





معاونت پژوهش و فن آوری به نام خدا منشور اخلاق پژوهش

- بیاباری از خداوند سبحان و اعتقاد به اینکه عالم محضر خداست و بهواره ناظر بر افعال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه اهمیت جایگاه دانشگاه در اعلامی فرهنگ و تمدن بشری، مادیان شبیمن و اعتناء بهیات علمی واحد های دانشگاه آزاد اسلامی متعبد می گردیم، اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی به نظر قرار داده و از آن تحفظی نکنیم:
- ۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.
 - ۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهشگران (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
 - ۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بکاران پژوهش.
 - ۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
 - ۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
 - ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهاد های مرتبط با تحقیق.
 - ۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.
 - ۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بکاران علمی و دانشیمن به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
 - ۹- اصل برات: التزام به برات جویی از هرگونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به مثابه های غیر علمی می آلائند.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات تهران

تعهدنامه اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب **سید اسماعیل سادات نجفی** دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی که در تاریخ ۱۴۰۳ از رساله خود تحت عنوان
حل عددی معادلات دینفرانسیل غیرخطی توافقی بر روش ایتراک و فیلتر با کسب نمره ۹۹ و درجه ۹۰ دفاع نموده‌ام بدینوسیله متعهد می‌شوم:
(۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آنرا در فهرست مربوط ذکر و درج کرده‌ام.
(۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.
(۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این رساله داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوط را اخذ نمایم.
(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می‌پذیرم و دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: **سید اسماعیل سادات نجفی**
تاریخ و امضاء: ۱۴۰۳



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات تهران

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

کرايش: آناليز عددي

عنوان:

حل عددي معادلات غير خطي جريان تراکيب با استفاده از روش هاي طيفي و فیلتر

استادان راهنما:

دکتر سعید عباس بندي

دکتر توفيق الهويرانلو

استاد مشاور:

دکتر محسن رستي مال خليفه

مشارش:

سيد اسماعيل سادات نجفي

۱۴۰۳

در اینجا لازم می‌دانم از زحمات استایدار جنم، دکتر سعید عباس بندی و توفیق الهویرنلو که بارها بهانه‌های کار ساز و سازنده به‌واره روشنگر راه بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر کنم و از جناب دکتر محسن رستمی که در سمت مشاور پایان نامه از گلشان بهره‌بردم سپاسگذارم. همچنین از..... بحال پاس و تشکر و قدردانی را دارم.

فهرست مطالب

ی	فهرست تصاویر
ل	فهرست جداول
۱	چکیده
۲	۱ فصل اول
۲	۲.۱ مقدمه
۳	۳.۱ طبقه بندی مدل های جریان ترافیک
۳	۱.۳.۱ مدل های زیر میکروسکوپی
۴	۲.۳.۱ مدل های میکروسکوپی
۵	۳.۳.۱ مدل های مزوسکوپی
۵	۴.۳.۱ مدل های ماکروسکوپی
۶	۴.۱ شبکه ترافیکی (شبکه عبور و مرور)
۶	۱.۴.۱ تعریف چگالی (تراکم)
۶	۲.۴.۱ نرخ جریان ترافیکی
۶	۳.۴.۱ سرعت میانگین
۷	۵.۱ روابط جریان ترافیک
۷	۱.۵.۱ نمودار جریان-چگالی
۸	۲.۵.۱ نمودار سرعت-چگالی
۸	۳.۵.۱ نمودار سرعت-جریان
۸	۶.۱ اصل بقای وسایل نقلیه
۱۰	۷.۱ مدل های ماکروسکوپی جریان ترافیک
۱۰	۱.۷.۱ مدل LWR

۱۱	مدل گرین شیلدز	۲.۷.۱
۱۱	مدل گرینبرگ	۳.۷.۱
۱۳	مدلهای تصادفی	۴.۷.۱
۱۳	مدلهای مرتبه بالاتر	۵.۷.۱

۱۵	فصل دوم	۲
۱۵	۱.۲ قوانین بقا	۱.۲
۱۵	۲.۲ تعاریف	۲.۲
۱۵	۱.۲.۲ تعریف قانون بقا	۱.۲.۲
۱۷	۲.۲.۲ مسئله‌ی کوشی	۲.۲.۲
۱۷	۳.۲.۲ مسئله‌ی ریمان	۳.۲.۲
۱۷	۴.۲.۲ معادله‌ی برگرز	۴.۲.۲
۱۸	۵.۲.۲ حالت (الف)	۵.۲.۲
۱۸	۶.۲.۲ حالت (ب)	۶.۲.۲
۲۱	۳.۲ قانون تعادل	۳.۲
۲۱	۱.۳.۲ روش‌های عددی برای حل معادلات قانون بقا	۱.۳.۲
۲۱	۲.۳.۲ روش شبکه‌های تطبیقی	۲.۳.۲
۲۳	۳.۳.۲ روش‌های جابه‌جایی شبکه	۳.۳.۲
۲۳	۴.۳.۲ شبکه‌های به‌روزشده و تنظیم‌شده	۴.۳.۲
۲۳	۵.۳.۲ همراهی با معادلات مشتقات جزئی	۵.۳.۲
۲۳	۶.۳.۲ کنترل نقاط شبکه با توابع شاخص	۶.۳.۲

۲۵	فصل سوم	۳
۲۵	۱.۰.۳ مدل جریان ترافیک در دنبال کردن خودرو	۱.۰.۳
۲۶	۲.۰.۳ اثر زمان و فاصله واکنش در مدل تعقیب خودرو	۲.۰.۳
۲۷	۳.۰.۳ مدل توسعه‌یافته مایکروسکوپی در تعقیب خودرو	۳.۰.۳
۲۹	۴.۰.۳ بررسی مسئله سرعت منفی	۴.۰.۳
۳۰	۵.۰.۳ بررسی ویژگی‌های کیفی مدل	۵.۰.۳
۳۰	۶.۰.۳ بررسی پایداری خطی جواب‌ها	۶.۰.۳
۳۱	۷.۰.۳ روش عددی	۷.۰.۳

۳۴	۴	فصل چهارم
۳۴	۱.۰.۴	مقدمه
۳۹	۲.۰.۴	نظریه و الگوریتم
۴۰	۳.۰.۴	کاربرد در مدل های ترافیکی
۴۱	۴.۰.۴	همگرایی روش
۴۴	۵.۰.۴	مثالها حل شده عددی
۴۴	۶.۰.۴	مثال ۱: مدل ترافیکی LWR با جواب تحلیلی
۴۵	۷.۰.۴	مثال ۲: مدل ترافیکی مقایسه با CLAWPACK
۴۸	۸.۰.۴	مثال ۳: پیش بینی پیش بینی آینده
۴۸	۹.۰.۴	مثال ۴: پیش بینی آینده اصلاح شده
۵۰	۱۰.۰.۴	مثال ۵ معادله برگر
۵۲	۱۱.۰.۴	مثال ۶ آرامش بخشی LWR:
۵۴	۱۲.۰.۴	نتیجه گیری ها

۵۵	۵	فصل پنجم
۵۵	۱.۰.۵	مقدمه
۵۷	۲.۰.۵	نظریه و الگوریتم
۶۲	۳.۰.۵	کاربرد در مدل های ترافیکی
۶۳	۴.۰.۵	همگرایی روش
۶۶	۵.۰.۵	مثالها حل شده عددی
۶۶	۶.۰.۵	مثال ۱
۶۶	۷.۰.۵	مثال ۲
۶۹	۸.۰.۵	مثال ۳
۷۰	۹.۰.۵	مثال ۴

۷۳	۶	فصل ششم
۷۳	۱.۰.۶	نتیجه گیری
۷۴	۲.۰.۶	پیشنهادهای و انتقادات

۸۴	مقاله های مستخرج از پایان نامه
----	--------------------------------

۸۵

□□□□□□□□□□

۹۴

چکیده انگلیسی

فهرست تصاویر

۷		۱.۱
۸		۲.۱
۹		۳.۱
۱۹	 شکل موج	۱.۲
۱۹	 شکل موج	۲.۲
۲۰		۳.۲
۲۲		۴.۲
	نمودار چگالی جریان در زمان $t = 10$ به ازای زمانها و فاصله های عکس و	۱.۳
۳۳	 العمل	
	حل مدل جریان ترافیک با روش حاضر برای چگالی نسبت به مکان در زمان	۱.۴
۴۵	 $t = 1$ در مثال ۱.	
۴۶	 مقایسه روش رساله با روش لکس.	۲.۴
	حل مدل جریان ترافیک با روش حاضر برای چگالی نسبت به مکان در زمان	۳.۴
۴۷	 $t = 25$ در مثال ۲.	
۴۷	 نمودار فوق با استفاده از نرم افزار CLAWPACK تهیه شده است.	۴.۴
	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر، چگالی در مقابل مکان در	۵.۴
۴۸	 زمان $t = 25$ در مثال ۳	
	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر، چگالی در مقابل مکان در	۶.۴
۵۰	 مثال ۴	
	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش CU برای چگالی نسبت به موقعیت	۷.۴
۵۰	 در مثال ۴.	

۵۱	حل های عددی به دست آمده از طریق روش های فیلتر و CU برای چگالی نسبت به موقعیت در مثال ۴	۸.۴
۵۲	حل معادله بورگر با استفاده از روش حاضر برای چگالی نسبت به موقعیت در مثال ۵	۹.۴
۵۳	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر، چگالی در مقابل مکان در زمان $t = 1$ در مثال ۶	۱۰.۴
۵۳	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش CU، چگالی در مقابل مکان در مثال ۶	۱۱.۴
۶۷	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش فیلتر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۱	۱.۵
۶۷	نمودار فوق با استفاده از نرم افزار CLAWPACK تهیه شده است.	۲.۵
۶۷	چگالی و انباشتگی چگالی در مقابل موقعیت در طول زمان در مثال ۱	۳.۵
۶۸	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۲	۴.۵
۶۸	چگالی و انباشتگی چگالی در مقابل موقعیت در طول زمان در مثال ۲	۵.۵
۷۰	حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۳	۶.۵
۷۰	حل های عددی به دست آمده با استفاده از روش های فیلتر CU و روش CU برای چگالی در مقابل موقعیت.	۷.۵
۷۱	حل معادله برگرز با استفاده از روش حاضر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۴	۸.۵

فهرست جداول

۱۲		۱.۱
	مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش	۱.۴
۴۶	حاضر و روش لاکس برای مثال ۱.	
	مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش	۲.۴
۴۷	حاضر و روش لاکس برای مثال ۲.	
	مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش	۳.۴
۴۹	حاضر و روش لاکس برای مثال ۳.	
	مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش	۴.۴
۵۱	حاضر و روش لاکس برای مثال ۴.	
	مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش	۵.۴
۵۱	حاضر و روش لاکس برای مثال ۵.	
	مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش	۶.۴
۵۴	حاضر و روش لاکس برای مثال ۶.	



چکیده

پژوهش حاضر به بررسی و بهبود روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل ترافیکی می‌پردازد. در این تحقیق، مدل‌های مختلف جریان ترافیک، به ویژه مدل‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. یک مدل جریان ترافیک میکروسکوپی جدید و بهینه ارائه شده که دقت پیش‌بینی‌های ترافیکی را افزایش می‌دهد. همچنین، روش طیفی به همراه فیلترهای گسسته پایین‌گذر برای حل معادلات دیفرانسیل ترافیکی ترکیب شده و به عنوان یک روش نوین معرفی شده است. این روش با کاهش انحرافات ناشی از موج‌های ضربه‌ای، نتایج دقیقی در مقایسه با تکنیک‌های طیفی معمول ارائه می‌دهد. شرایط پایداری این روش تحلیل شده و با ارائه مثال‌های عددی متعدد، برتری آن نسبت به سایر روش‌ها تأیید گردیده است. نتایج این پژوهش نه تنها به توسعه یک تکنیک عددی نوین کمک می‌کند، بلکه راهکارهای عملی و قابل اعتمادی برای مدیریت بهتر ترافیک شهری و بهینه‌سازی سیستم‌های حمل‌ونقل هوشمند ارائه می‌دهد. همچنین، این تحقیق می‌تواند به عنوان پایه‌ای برای پژوهش‌های آتی در زمینه مدیریت ترافیک و حمل‌ونقل هوشمند مورد استفاده قرار گیرد.

فصل ۱

نظریه ترافیک

۲.۱ مقدمه

تحلیل، پیش‌بینی و شبیه‌سازی مسائل ترافیکی از جمله تراکم، سرعت و جریان ترافیک به یکی از مباحث حیاتی و پرکاربرد در حوزه ریاضیات کاربردی و مهندسی حمل‌ونقل تبدیل شده است. با گسترش سریع جمعیت شهری و افزایش روزافزون تعداد وسایل نقلیه، مدیریت بهینه ترافیک شهری بیش از پیش اهمیت یافته است. در این میان، فناوری‌های هوشمند حمل‌ونقل نقش بسزایی در بهبود کارایی سیستم‌های ترافیکی ایفا می‌کنند. این فناوری‌ها با بهره‌گیری از سیستم‌های مدیریت پیشرفته سفر، بهینه‌سازی زمان‌بندی چراغ‌های راهنمایی و ارائه اطلاعات لحظه‌ای به رانندگان، قادر به کاهش زمان سفر، کاهش تراکم و ارتقاء ایمنی جاده‌ها هستند.

یکی از چالش‌های اساسی در مدل‌سازی جریان ترافیک، توصیف دقیق تغییرات دینامیکی پارامترهای ترافیکی مانند تراکم و سرعت است. این تغییرات اغلب ناگهانی و تحت تأثیر شوک‌های ترافیکی قرار می‌گیرند که نیازمند استفاده از مدل‌های ریاضی پیچیده‌ای مانند معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی می‌باشد. مدل‌های ماکروسکوپی که با استفاده از این معادلات توصیف می‌شوند، ابزار قدرتمندی برای تحلیل و پیش‌بینی رفتار سیستم‌های ترافیکی در مقیاس بزرگ فراهم می‌کنند. با این حال، حل عددی این معادلات به دلیل پیچیدگی‌های موجود، همواره یک چالش بزرگ محسوب می‌شود.

در سال‌های اخیر، پیشرفت‌های چشمگیری در حوزه روش‌های عددی صورت گرفته است که امکان حل دقیق‌تر و سریع‌تر معادلات دیفرانسیل ترافیکی را فراهم کرده است. یکی از این روش‌ها، روش طیفی است که با استفاده از تبدیل فوریه و نمایش دقیق توابع در حوزه فرکانس، دقت بالایی در حل معادلات غیرخطی ارائه می‌دهد. با این حال، روش طیفی در مواجهه با پدیده‌های موج ضربه‌ای که در مدل‌سازی جریان ترافیک مشاهده می‌شود، ممکن است دچار ناپایداری و ایجاد انحرافات ناخواسته شود. به منظور مقابله با این مشکل، استفاده از فیلترهای گسسته پایین‌گذر به عنوان یک راهکار مؤثر پیشنهاد شده است. این فیلترها با کاهش نویز و انحرافات ناشی از موج‌های ضربه‌ای، دقت نتایج



به دست آمده را به طور قابل توجهی افزایش می دهند.

این پژوهش به بررسی روش های حل عددی معادلات دیفرانسیل ترافیکی می پردازد. در فصول ابتدایی، اصول اساسی مدل سازی جریان ترافیک و معرفی مدل های مختلف، به ویژه مدل های میکروسکوپی و ماکروسکوپی، مورد بررسی قرار می گیرند. سپس، در فصل دوم، چند مدل جریان ترافیک میکروسکوپی ارائه شده و با در نظر گرفتن پارامترهای کلیدی، مدلی جدید و بهینه پیشنهاد می گردد که می تواند به بهبود دقت پیش بینی های ترافیکی کمک کند.

فصل پایانی این رساله به بررسی روش های حل عددی معادلات دیفرانسیل ترافیکی اختصاص دارد. در این فصل، روش طیفی به همراه فیلترهای گسسته پایین گذر ترکیب شده و به عنوان یک روش نوین برای حل معادلات مورد استفاده قرار می گیرد. این روش با کاهش انحرافات ناشی از موج های ضربه ای، نتایج بسیار دقیقی در مقایسه با تکنیک های طیفی معمول ارائه می دهد. علاوه بر این، شرایط پایداری مرتبط با این روش به طور کامل تحلیل شده و با ارائه مثال های عددی متعدد، اثربخشی و برتری این روش نسبت به روش های معتبر دیگر مانند روش های لکس^۱ و CU^۲ تأیید می گردد.

در نهایت، این پژوهش با تلفیق دانش ریاضی و فناوری های نوین، به بهبود فرآیندهای تصمیم گیری در مدیریت ترافیک و ارائه راهکارهای مؤثر برای کاهش مشکلات ترافیکی کمک شایانی می کند. انتظار می رود که نتایج این تحقیق بتواند به عنوان یک مرجع معتبر در حوزه مدل سازی جریان ترافیک و توسعه سیستم های حمل و نقل هوشمند مورد استفاده قرار گیرد و به پیشبرد علم و صنعت در این زمینه یاری رساند.

۳.۱ طبقه بندی مدل های جریان ترافیک

در این فصل به انواع مختلف مدل های جریان ترافیک پرداخته خواهد شد. مدل های مختلفی برای تحلیل ترافیک ارائه شده اند که این دیدگاه ها شامل چهار نوع زیر میکروسکوپی^۱، میکروسکوپی^۲، مزوسکوپی^۳ و ماکروسکوپی^۴ می باشند و می توان آن ها را به دسته بندی های جزئی تر نیز تقسیم نمود.

۱.۳.۱ مدل های زیر میکروسکوپی

مدل های زیر میکروسکوپی، به تحلیل جزئی رفتار هر وسیله نقلیه به صورت جداگانه می پردازند. در این رویکرد، واکنش بین هر دو وسیله نقلیه به دقت بررسی شده و حتی رفتار رانندگان مانند تغییر دنده، ترمز کردن و سرعت گرفتن نیز مدنظر قرار می گیرد. این نوع مدل ها بیشتر در کاربردهایی مانند سیستم های پیشرفته کمک راننده، خودروهای خودکار و وسایل نقلیه هوشمند به کار می روند،



چرا که ایمنی بالا در این کاربردها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۲.۳.۱ مدل‌های میکروسکوپی

مدل‌های میکروسکوپی جزئیاتی چون نحوه ترمز کردن را نادیده گرفته و بیشتر بر رفتار کلی وسایل نقلیه تمرکز می‌کنند. در این رویکرد، هر خودرو به صورت مستقل و در تعامل با سایر خودروها در نظر گرفته می‌شود. رفتار رانندگان به صورت مجموعه‌ای از قوانین "اگر-آنگاه" تعریف می‌شود که موقعیت، سرعت و شتاب هر وسیله نقلیه بر اساس رفتار رانندگان و ویژگی‌های خودرو در هر لحظه محاسبه می‌شود. یکی از شناخته شده‌ترین مدل‌های میکروسکوپی، مدل تعقیب خودرو است. در مدل تعقیب خودرو، فرض می‌شود که یک ردیف از وسایل نقلیه در حال حرکت هستند که هر وسیله نقلیه نسبت به خودروی جلویی خود واکنش نشان می‌دهد. وضعیت حرکت خودروی پیروی کننده با توجه به سرعت خود و سرعت خودرو پیشرو و همچنین فاصله میان دو خودرو تعیین می‌شود. نظریه کلاسیک تعقیب خودرو با استفاده از معادله زیر بیان شده است [۱۰]:

$$\frac{d(v_{n+1}(t + \Delta t))}{dt} = \Delta \lambda v \quad (1.1)$$

که $\Delta v = v_{n+1}(t) - v_n(t)$ و v_n و $v(n+1)$ به ترتیب سرعت خودروهای پیش‌تاز و خودروی قبل از آن و Δt زمان عکس العمل است، λ در مدل فوق بصورت زیر است:

$$\lambda = a \frac{[v_{n+1}(t + \Delta t)]^m}{(\Delta x)^l} \quad (2.1)$$

که در آن:

a : یک ثابت تجربی است که بیانگر میزان حساسیت راننده به تغییرات در سرعت و فاصله است.
 m : توان مربوط به سرعت خودروی دنبال کننده است و نشان می‌دهد که چگونه تغییرات در سرعت بر عکس العمل راننده تأثیر می‌گذارد.
 l : توان مربوط به فاصله Δx است و نشان‌دهنده حساسیت راننده به تغییرات فاصله بین دو خودرو می‌باشد.

مدل دیگر تعقیب خودروها، مدل سرعت بهینه (OVM)^۱ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = k[V(\Delta x) - v_{n+1}(t)] \quad (3.1)$$

که در آن $V(\Delta x)$ بیانگر حداکثر سرعت مجاز برای خودرو تعقیب کننده است و k ضریب عکس العمل.



یکی دیگر از مدل‌های تعقیب خودرو، مدل نیروی تعمیم‌یافته (GFM) ^۲ است:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = k[V(\Delta x) - v_{n+1}(t)] + \lambda \Delta v H(-\Delta v) \quad (4.1)$$

که در آن H تابع هویساید ^۱ یا تابع پله ای است و λ در ۲.۱ تعریف شده است. همچنین در مرجع [۶۱] مدل دیگری از تعقیب خودرو معرفی شده که به صورت زیر ارائه شده است:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = k[v_{n+1}(t) - V(\Delta x)] + \lambda \Delta v \quad (5.1)$$

این مدل‌ها به بررسی رفتار دینامیکی خودروهای در حال تعقیب و رابطه‌ی میان آن‌ها بر اساس پارامترهای سرعت و فاصله می‌پردازند.

۳.۳.۱ مدل‌های مزوسکوپی

مدل‌های مزوسکوپی مجموعه‌ای از مدل‌ها هستند که در بررسی جزئیات جریان، میان مدل‌های ماکروسکوپی و میکروسکوپی قرار می‌گیرند. این مدل‌ها به دو نوع مختلف تقسیم می‌شوند:

۱. این دسته از مدل‌ها با استفاده از ویژگی‌های جریان بر اساس مدل‌های ماکروسکوپی و مبتنی بر خصوصیات مدل‌های میکروسکوپی عمل می‌کنند. در مدل ماکروسکوپی، وضعیت حرکت هر وسیله نقلیه به صورت جداگانه مشخص می‌شود؛ برای مثال، با انتگرال‌گیری از سرعت بر حسب زمان.
 ۲. در این دسته از مدل‌ها، جریان ترافیک به شکل مدل‌های ماکروسکوپی بر اساس مدل‌های میکروسکوپی شبیه‌سازی می‌شود، اما برخی از پارامترهای مدل ماکروسکوپی، مانند واکنش رانندگان و نحوه تغییر خط رانندگی، بر اساس ویژگی‌های فردی رانندگان تعریف می‌شوند.
- نوع اول از مدل‌های مزوسکوپی از محدوده این پژوهش خارج است، اما در این رساله با چند نمونه از مدل‌های مزوسکوپی نوع دوم کار خواهیم کرد.

۴.۳.۱ مدل‌های ماکروسکوپی

نظریه ماکروسکوپی، جریان ترافیک را به عنوان یک مفهوم تجمعی بررسی می‌کند. این رویکرد، مشابه قیاس‌های فیزیکی همچون جریان گرما و جریان سیالات، روشی مناسب برای مطالعه وضعیت پایدار جریان به شمار می‌آید و می‌تواند به شکل مؤثری کارایی بالقوه سامانه را توضیح دهد. در این مدل‌ها، شبیه‌سازی جریان ترافیک روی بخشی از جاده انجام می‌شود و تعاملات تک‌تک کاربران جاده در نظر گرفته نمی‌شود. مدل‌های شبیه‌سازی ماکروسکوپی معمولاً برای تحلیل سطح خدمت، عرضه و تقاضا در طول برنامه‌ریزی منطقه‌ای یا شبکه‌های حمل‌ونقل گسترده به کار می‌روند.



مدل‌های میکروسکوپی جزئیات بیشتری نسبت به مدل‌های ماکروسکوپی ارائه می‌دهند و بنابراین می‌توانند برای ارزیابی دقیق‌تر تأثیرات اصلاحات پیشنهادی در تسهیلات جاده‌ای مورد استفاده قرار گیرند. با این حال، به دلیل حجم و گستردگی اطلاعاتی که مدل‌های میکروسکوپی شبیه‌سازی می‌کنند، اجرا در مقایسه با مدل‌های ماکروسکوپی کندتر و محاسبات آنها زمان‌بر است.

مدل‌های ماکروسکوپی پارامترهایی همچون تراکم، نرخ جریان ترافیک و سرعت میانگین را ارائه می‌دهند که این پارامترها به عنوان متغیرهای پیوسته در زمان یا مکان به صورت زیر تعریف می‌شوند.

۴.۱ شبکه ترافیکی (شبکه عبور و مرور)

۱.۴.۱ تعریف چگالی (تراکم)

چگالی جریان ترافیک به تعداد وسایل نقلیه‌ای گفته می‌شود که در یک بازه مکانی به طول Δx در لحظه زمانی t قرار دارند. به عبارت دیگر، چگالی تعداد وسایل نقلیه در واحد طول را نشان می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x, t) = \frac{n(t)}{\Delta x} \quad (۶.۱)$$

که در آن، $n(t)$ تعداد وسایل نقلیه در طول Δx در زمان t است.

۲.۴.۱ نرخ جریان ترافیکی

نرخ جریان ترافیک، تعداد وسایل نقلیه‌ای را نشان می‌دهد که از یک نقطه مشخص در بازه زمانی Δt عبور می‌کنند. به عبارت دیگر، نرخ جریان تعداد وسایل نقلیه عبوری از نقطه x را در واحد زمان تعریف می‌کند و به شکل زیر بیان می‌شود:

$$q(x, t) = \frac{n(t)}{\Delta t} \quad (۷.۱)$$

۳.۴.۱ سرعت میانگین

سرعت میانگین، میانگین حسابی سرعت‌های ثبت شده همه خودروهایی است که در یک بازه زمانی مشخص و در فاصله مکانی معین در حال حرکت هستند. شکل ۱.۱ نمای کلی از مدل‌های جریان ترافیک را به خوبی به تصویر می‌کشد.



۵.۱ روابط جریان ترافیک

یک رابطه کلیدی بین متغیرهای جریان ترافیک وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q(x, t) = \rho(x, t)u(x, t) \quad (۸.۱)$$

که در آن $\rho(x, t)$ چگالی، $u(x, t)$ سرعت متوسط و $q(x, t)$ دبی^۱ یا جریان ترافیک است.

۱.۵.۱ نمودار جریان-چگالی

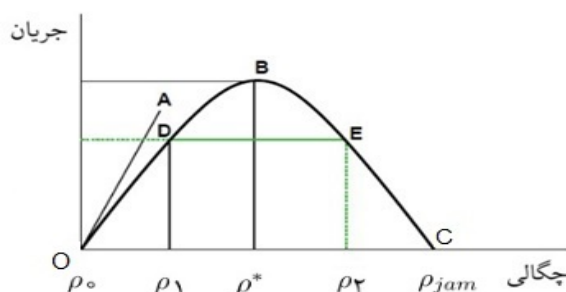
جریان و چگالی، با توجه به زمان و مکان تغییر می‌کنند. ارتباط میان چگالی و جریان، یکی از روابط اساسی در جریان ترافیک محسوب می‌شود. ویژگی‌های این رابطه به شرح زیر است:

۱. هنگامی که چگالی صفر است، جریان نیز صفر خواهد بود؛ زیرا هیچ وسیله نقلیه‌ای در مسیر حضور ندارد.

۲. با افزایش تعداد وسایل نقلیه، چگالی و به تبع آن جریان نیز افزایش پیدا می‌کنند.

۳. اگر تعداد خودروها به حدی برسد که دیگر حرکت ممکن نباشد، چگالی برابر چگالی ترافیک متوقف‌شده است و جریان صفر خواهد بود.

۴. در چگالی‌های بین صفر و چگالی ترافیک متوقف‌شده، نمودار جریان به شکل سهمی ظاهر می‌شود. شکل ۱.۱ رابطه میان جریان و چگالی را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱:

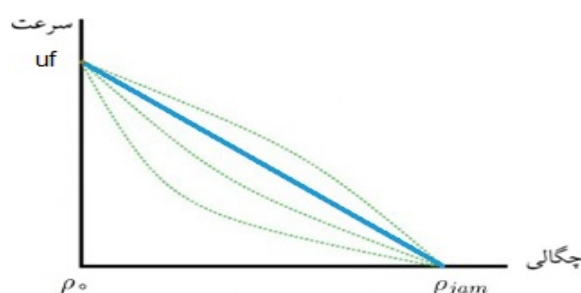
در شکل فوق O نشان دهنده وضعیتی است که چگالی جریان صفر است، نقطه B جریان ماکزیمم یا همان q_{max} و C چگالی راه بندان است.

^۱ discharge flow

شیب خط OA سرعت جریان آزاد متوسط را مشخص می‌کند، که همان سرعت وسیله نقلیه است زمانی که هیچ خودروی دیگری در مسیر وجود ندارد. نقاط D و E دارای جریان مشابه ولی با چگالی‌های متفاوت هستند. همچنین، شیب خط OE نسبت به OD کمتر است، زیرا تعداد خودروها کمتر است و سرعت متوسط در چگالی‌های کمتر، مانند نقاط ۱ و ۲، بیشتر خواهد بود.

۲.۵.۱ نمودار سرعت-چگالی

مشابه با روابط میان جریان و چگالی، حداکثر سرعت متناظر با سرعت جریان آزاد و سرعت صفر با چگالی راه‌بندان هماهنگ است. آسان‌ترین راه برای تعریف این رابطه، استفاده از یک مدل خطی است. البته، می‌توان رابطه سرعت-چگالی را به صورت غیرخطی نیز بیان کرد. شکل ۲.۱ روابط خطی و غیرخطی سرعت-چگالی را نمایش می‌دهد.



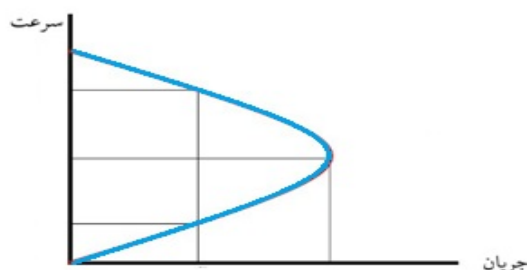
شکل ۲.۱:

۳.۵.۱ نمودار سرعت-جریان

در رابطه بین سرعت و جریان، چنانچه هیچ وسیله نقلیه‌ای در جاده نباشد یا تعداد خودروها به حدی زیاد شود که حرکت متوقف گردد، در هر دو حالت جریان برابر صفر خواهد بود. حداکثر جریان زمانی حاصل می‌شود که سرعت بین صفر و سرعت جریان آزاد (u_f) باشد. این روابط در شکل ۳.۱ به نمایش درآمده‌اند. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌شود، برای یک مقدار مشخص از جریان، ممکن است دو سرعت متفاوت وجود داشته باشد.

۶.۱ اصل بقای وسایل نقلیه

یک جاده یک‌طرفه با یک خط عبوری را در بازه $[x_1, x_2]$ در نظر بگیرید. تعداد خودروها در این بخش از جاده به زمان وابسته است. اگر تعداد خودروهای ورودی به این قسمت بیشتر از تعداد خودروهای خروجی باشد، تعداد وسایل نقلیه در این بازه افزایش می‌یابد. به‌طور مشابه، اگر تعداد خودروهای



شکل ۳.۱:

ورودی از تعداد خودروهای خروجی کمتر باشد، تعداد خودروها در این بخش از جاده کاهش می‌یابد. بنابراین نرخ تغییر تعداد خودروها در بازه $[x_1, x_2]$ به تفاوت جریان ورودی و خروجی بستگی دارد. N تعداد خودروها در این بازه است که با اختلاف نرخ جریان ورودی و خروجی برابر خواهد بود. به صورت ریاضی داریم:

$$\frac{dN}{dt} = q(x_2, t) - q(x_1, t) \quad (9.1)$$

تعداد وسایل نقلیه در بازه $[x_1, x_2]$ در زمان t نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \quad (10.1)$$

با توجه به این تعریف، داریم:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = q(x_2, t) - q(x_1, t) \quad (11.1)$$

در صورتی که x_1 و x_2 ثابت باشند، به قانون بقای کلی می‌رسیم:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx \quad (12.1)$$

از طرفی، طبق قضیه اساسی حسابان داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x} dx = q(x_2, t) - q(x_1, t) \quad (13.1)$$

با استفاده از روابط فوق، داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = 0 \quad (14.1)$$



این معادله به قانون بقای محلی منجر می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (15.1)$$

۷.۱ مدل‌های ماکروسکوپی جریان ترافیک

در این بخش، به معرفی تعدادی از مدل‌های ماکروسکوپی جریان ترافیک که در این رساله مورد بررسی قرار گرفته‌اند، می‌پردازیم.

۱.۷.۱ مدل LWR^۱

معادله بقا در جریان ترافیک، با در نظر گرفتن روابط ۱۵.۱، ۸.۱ به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (16.1)$$

در مدل ارائه شده توسط لایت^۲ و ریچاردز^۳ در سال‌های ۱۹۵۵ و ۱۹۵۶ [۳۶]، جریان ترافیک به کمک دو متغیر اصلی چگالی ρ و سرعت u تعریف می‌شود. در این مدل، سرعت به عنوان تابعی از چگالی در نظر گرفته شده است و رابطه آن به صورت معادله زیر نمایش داده می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (17.1)$$

این مدل که با نام مدل LWR شناخته می‌شود، اولین مدل غیرخطی معادلات مشتقات جزئی برای جریان ترافیک است و اساس مدل‌های بعدی را شکل داده است. در اینجا، تابع $f = \rho u$ تحت شرایط زیر فرض می‌شود:

۱. تابع f تا مرتبه دوم پیوسته است.

۲. تابع f به طور اکید مقعر است.

۳. $f(0) = f(\rho_{\max}) = 0$

یکی از موضوعات کلیدی در مدل‌سازی جریان ترافیک، تعریف تابع سرعت به عنوان تابعی از چگالی است. مدل‌های مختلفی برای ارتباط بین سرعت و چگالی وجود دارد که هریک ویژگی‌ها و کاربردهای خاص خود را دارند.

۲.۷.۱ مدل گرین شیلدز^۴

یکی از ساده‌ترین مدل‌ها که سرعت را به صورت تابعی خطی از چگالی بیان می‌کند، مدل گرین شیلدز است که در سال ۱۹۳۵ ارائه شد [۱۷]. این مدل به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u(\rho) = u_{\max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right), \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad (18.1)$$

مدل گرین شیلدز در ادامه به مدل‌های زیر توسعه یافت:

مدل درو^۱ (۱۹۶۵) [۷]:

$$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^n \right] \quad (19.1)$$

مدل پایپس^۲ (۱۹۶۷) [۴۹]:

$$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^m \right] \quad (20.1)$$

مدل می^۳-کلر^۴ (۱۹۶۸) [۴۰]:

$$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^n \right]^m \quad (21.1)$$

مدل‌های گرین شیلدز، درو، پایپس، می، و کلر همگی نمونه‌هایی از تلاش‌ها برای تعریف ارتباط میان چگالی و سرعت در جریان ترافیک هستند.

۳.۷.۱ مدل گرینبرگ^۵

در سال ۱۹۵۹، گرینبرگ [۱۱] مدل زیر را به عنوان رابطه‌ی میان سرعت و چگالی پیشنهاد داد:

$$u(\rho) = u_0 \log(\rho_{\max}/\rho) \quad (22.1)$$

که در آن u_0 یک ثابت مثبت است افزون بر این، مدل‌های دیگری نیز توسط محققانی مانند آندروود^۶ [۷۱]، پاپاگئورگیو^۷ [۴۶]، کان^۸ [۲۶]، لی^۹ و کرنر^{۱۰} [۳۴] برای توصیف رابطه بین سرعت و چگالی پیشنهاد شده‌اند که به صورت خلاصه در جدول زیر آمده‌اند.



نام مدل	رابطه مدل	سال ارائه مدل
گرین شیلدز	$u(\rho) = u_{\max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) \right)$	۱۹۳۵
گرین برگ	$u(\rho) = u_0 \log(\rho_{\max}/\rho)$	۱۹۵۹
آندروود	$u(\rho) = u_0 \exp(-\frac{\rho}{\rho_0})$	۱۹۶۱
درو	$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^n \right]$	۱۹۶۵
پاپیس	$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^m \right]$	۱۹۶۷
می و کلمر	$u(\rho) = u_{\max} \left[1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^n \right]^m$	۱۹۶۸
پاپاگتوگیو سایرین	$u(\rho) = u_0 \exp(-\frac{1}{m} \frac{\rho}{\rho_0})$	۱۹۸۹
کرنر و کان هاسر	$u(\rho) = u_f \left(1 / (1 + \exp(\frac{\frac{\rho}{\rho_m} - 0.25}{0.06})) \right) - 3.72 \times 10^6$	۱۹۹۳
لی و سایرین	$u(\rho) = u_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right) / \left(1 + \exp \left(\frac{\rho}{\rho_{\max}} \right)^m \right)$	۱۹۹۸

جدول ۱.۱:



در جدول ۱.۱:

$u()$: سرعت متوسط وسایل نقلیه به عنوان تابعی از چگالی (ρ).
 u_{max} : حداکثر سرعت مجاز وسایل نقلیه در شرایط بدون ترافیک.
 ρ : چگالی ترافیک (تعداد خودروها در واحد طول جاده).
 ρ_{max} : حداکثر چگالی ممکن (زمانی که جاده کاملاً پر است، یعنی خودروها پشت سر هم توقف کرده‌اند).
 n : پارامتری که تأثیر چگالی ترافیک بر کاهش سرعت را مشخص می‌کند.
 m : پارامتر شکل تابع، که میزان غیرخطی بودن کاهش سرعت بر اساس چگالی را تعیین می‌کند.

۴.۷.۱ مدل‌های تصادفی

برخی مدل‌های ترافیک بر اساس متغیرهای تصادفی بنا شده‌اند. این دسته از مسائل ماکروسکوپی ترافیکی، از مدل‌های میکروسکوپی مشتق شده‌اند. یکی از این مدل‌ها، که توسط سپاساکیس در سال ۲۰۰۶ معرفی شد، به صورت یک معادله انتگرال-دیفرانسیل به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u, U)}{\partial x} = 0 \quad (23.1)$$

که در آن $F(u, U) = (u(1 - u))V_m e^{U(\Delta x + x) - Ux}$ و $V_m, Ux = \int_1^x u(\xi, t) d\xi$ سرعت ماکزیمم، u تابع سرعت و F تابع شار است.
 جدول ۱.۱ شامل روابط سرعت چگالی، نام مدل و سال معرفی آن است.

۵.۷.۱ مدل‌های مرتبه بالاتر

در مدل LWR، سرعت به عنوان تابعی از چگالی در نظر گرفته می‌شود؛ اما این فرض در برخی شرایط ترافیکی کافی نیست. به همین دلیل، نیاز به یک معادله دیگر برای توصیف سرعت در جریان ترافیک به وجود آمد. در سال ۱۹۷۱، پین^۱ [۴۸] اولین معادله حرکت جریان ترافیک را بر اساس نظریه تعقیب خودرو ارائه کرد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u - \rho u_e}{T} - \frac{\mu}{T} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (24.1)$$



سپس مدل ترافیک به صورت زیر بیان شد:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (25.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u - \rho u_e}{T} - \frac{\mu}{T} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (26.1)$$

یکی دیگر از مدل‌های ترافیک که شامل معادله حرکت است به شکل زیر ارائه میشود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (27.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e - u}{T} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (28.1)$$

معادله حرکت این مدل از مدل تعقیب خودرو به دست آمده است. در این رساله، شبیه سازی عددی این مدل‌های ماکروسکوپی ترافیکی بررسی و پیاده سازی میشود.

فصل ۲

قانون بقا

۱.۲ قوانین بقا

یکی از اهداف این پژوهش، شبیه‌سازی عددی مسائل جریان ترافیک در مایکروسکوپی است که در بخش ۴.۳.۱ ارائه شده است. از آنجا که این مسائل به صورت قوانین بقا مطرح می‌شوند، در این قسمت به معرفی و بررسی اصول قوانین بقا، مباحث مرتبط و روش‌های عددی برای حل این دسته از مسائل پرداخته می‌شود.

۲.۲ تعاریف

در این بخش، شکل عمومی قوانین بقا و ویژگی‌های آن را در فضای یک‌بعدی توضیح داده و چند نمونه از این دستگاه‌ها را معرفی می‌کنیم.

۱.۲.۲ تعریف قانون بقا

فرض کنید تابعی پیوسته باشد، به طوری که Ω یک زیرمجموعه باز از R باشد و تابع $f : \Omega \rightarrow R$ به عنوان جریان آن تابع معرفی شود. شکل کلی معادله بقای خطی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0; \quad x \in R, t > 0 \quad (1.2)$$

این معادله بیانگر بقای کمیتی فیزیکی مانند جرم، اندازه حرکت یا انرژی در مسائل دینامیک سیالات است. به طور دقیق‌تر، تابع $u : R \times [0, +\infty] \rightarrow \Omega$ حالت و $f(u)$ شار حالت را نشان می‌دهد، و Ω فضای حالت را تشکیل می‌دهد.

برای روشن‌تر کردن فرآیند استخراج قوانین بقا از اصول فیزیکی، معادله بقای جرم در مسئله دینامیک یک‌بعدی گاز را شرح می‌دهیم. به عنوان نمونه، جریان گاز را در یک لوله در نظر بگیرید. فرض کنید چگالی و سرعت گاز در قطعه‌ای از لوله به صورت ثابت باقی بماند. در زمان t و در نقاطی



از لوله که مختصات آنها x بین $[x_1, x_2]$ قرار دارد، کل حجم گاز را می‌توان از انتگرال زیر محاسبه کرد:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx \quad (2.2)$$

این انتگرال، چگالی گاز در آن مقطع از لوله را در زمان مشخص محاسبه می‌کند. با در نظر گرفتن نفوذناپذیری دیواره لوله، تغییرات حجمی گاز در این بخش از لوله فقط از طریق جریان گاز در نقاط معین امکان‌پذیر است. حال فرض کنید که سرعت گاز در نقطه‌ای با مختصات x و در زمان t برابر $v(x, t)$ باشد و نقاط ابتدایی و انتهایی مقطع مورد نظر به ترتیب $[x_1, x_2]$ باشند. بنابراین، نرخ تغییرات حجمی گاز برابر با اختلاف جریان گاز از این نقاط خواهد بود:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = u(x_1, t)v(x_1, t) - u(x_2, t)v(x_2, t) \quad (3.2)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین معادله ۳.۲ نسبت به زمان، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x; t_2) dx = \quad (4.2)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x; t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} u(x_1; t)v(x_1; t) dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2; t)v(x_2; t) dt$$

معادلات ۳.۲ و ۴.۲ به عنوان فرم‌های انتگرالی قانون بقا شناخته می‌شوند. برای به دست آوردن فرم دیفرانسیلی این قانون، با استفاده از:

$$u(x; t_2) - u(x; t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} u(x; t) dt \quad (5.2)$$

و

$$u(x_2; t)v(x_2; t) - u(x_1; t)v(x_1; t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (u(x; t)v(x; t)) dx \quad (6.2)$$

معادله ۴.۲ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} u(x; t) + \frac{\partial}{\partial x} (u(x; t)v(x; t)) \right) dx dt = 0 \quad (7.2)$$



از آنجا که بازه‌های $[t_1, t_2]$ و $[x_1, x_2]$ دلخواه هستند، پس عبارت درون انتگرال در معادله ۷.۲ باید برابر صفر باشد:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x; t) + \frac{\partial}{\partial x}(u(x; t)v(x; t)) = 0 \quad (۸.۲)$$

اگر فرض کنیم که در معادله بقای ۸.۲، v فقط تابعی از u باشد، آنگاه این معادله به شکل قانون بقای چگالی گاز به صورت عددی درمی‌آید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0 \quad (۹.۲)$$

که در آن، $f(u) = uv$ تابع جریان یا شار چگالی است.

۲.۲.۲ مسئله‌ی کوشی^۱

مسئله‌ی کوشی یا همان مسئله مقدار اولیه شامل یافتن تابعی مانند $u(x, t)$ است که معادله ۱.۲ را حل کرده و شرایط اولیه زیر را برآورده کند:

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in R, u_0 : R \rightarrow \Omega \quad (۱۰.۲)$$

۳.۲.۲ مسئله‌ی ریمان^۲

در حالت خاصی از مسئله‌ی کوشی (تعریف ۲.۲.۲)، اگر تابع اولیه به صورت زیر تعریف شود:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & x < x_0 \\ u_r & x > x_0 \end{cases} \quad (۱۱.۲)$$

در این صورت، مسئله‌ی کوشی فوق به نام مسئله‌ی ریمان شناخته می‌شود.

۴.۲.۲ معادله‌ی برگرز^۳

یکی از ساده‌ترین نمونه‌های قوانین بقای غیرخطی، معادله‌ی برگرز است که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$u_t + uu_x - \epsilon u_{xx} = 0 \quad (۱۲.۲)$$



این معادله که به عنوان مدلی ساده از جریان سیال توسط برگرز معرفی شده است، به معادله برگرز لزج معروف است. جمله‌ی غیرخطی uu_x در این معادله باعث تقویت شیب‌ها و در نهایت ایجاد شوک می‌شود، به‌ویژه هنگامی که تمایل به شکل‌گیری موج‌های تند و فشرده دارد. از طرف دیگر، جمله‌ی خطی u_{xx} تمایل به هموارسازی و تضعیف ساختارهای تشکیل شده دارد و در خلاف جهت جریان عمل می‌کند.

اگر $\epsilon = 0$ معادله‌ی قانون بقای مرتبط به صورت زیر خواهد بود:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0 \quad (13.2)$$

معادله ۱۳.۲ به عنوان معادله‌ی برگرز غیرلزج شناخته می‌شود. در برخی موارد، مسئله‌ی کوشی برای این معادله می‌تواند به راه‌حل‌های ضعیفی منجر شود که شکل موج هموار نداشته و شامل موج‌های شوکی یا انتشار ناپیوسته باشد. به طور خاص، حل مسئله‌ی ریمان برای توابع اولیه‌ای که پیوستگی نداشته باشند، می‌تواند منجر به شکل‌گیری امواج خاصی مانند امواج شوک یا انتشار شود.

در مسئله‌ی ریمان معادله ۱۳.۲، اگر شرایط اولیه به صورت زیر باشد:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases} \quad (14.2)$$

با فرض مقادیر u_l و u_r می‌توان دو حالت را برای شکل پاسخ در نظر گرفت.

۵.۲.۲ حالت (الف)

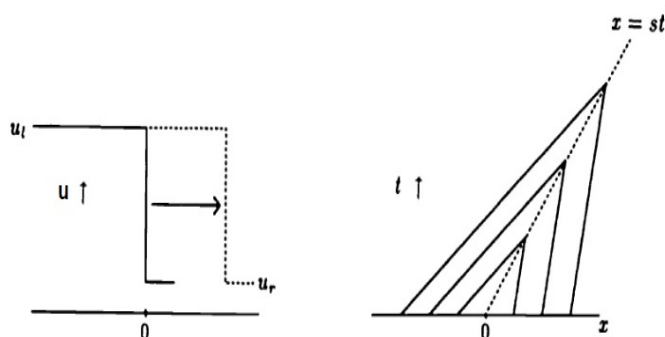
اگر $u_l > u_r$ ، در این حالت، تنها یک جواب ضعیف و منحصر به فرد وجود خواهد داشت که به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x < st \\ u_r & x > st \end{cases} \quad (15.2)$$

که در آن $s = (u_l + u_r)/2$ سرعت موج شوک را نشان می‌دهد. در این وضعیت، پاسخ به صورت موج شوکی است که مشخصه‌های آن با گذر زمان به سمت موقعیت شوک حرکت می‌کنند (به شکل ۱.۲ مراجعه کنید).

۶.۲.۲ حالت (ب)

اگر $u_l < u_r$ ، پاسخ یکتا نخواهد بود و یکی از جواب‌های ممکن همان فرم ۱۵.۲ و ۱۶.۲ است که در آن مشخصه‌ها به سمت بیرون از شوک حرکت می‌کنند. در این حالت، جواب نسبت به آشفتگی‌ها پایدار نیست و شکل موج به‌طور پیوسته تغییر می‌کند (به شکل ۱.۲ مراجعه کنید).

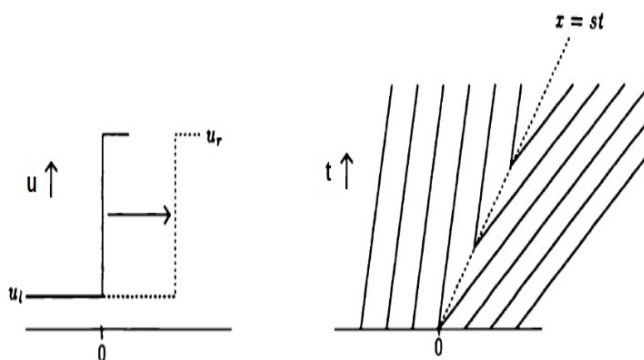


شکل ۱.۲: شکل موج

یکی دیگر از راه‌حل‌های ضعیف در این حالت، موجی به نام موج تضعیف است که به صورت زیر بیان می‌شود:

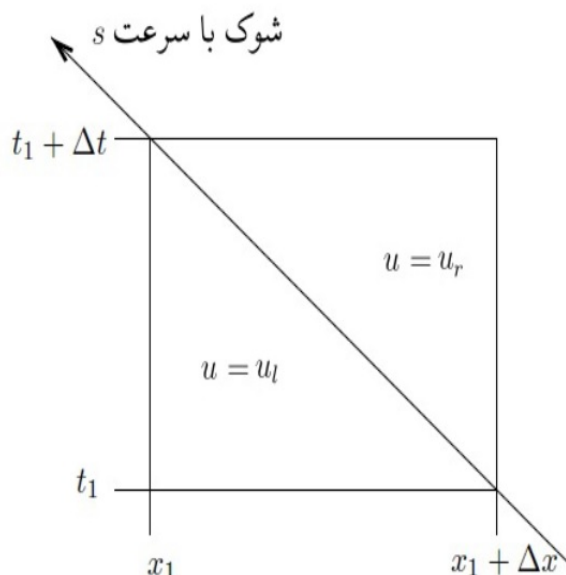
$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x < u_l t \\ \frac{x}{t} & u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r & x > u_r t \end{cases} \quad (۱۶.۲)$$

این پاسخ نسبت به آشفتگی‌ها پایدار است و تغییرات سریع در آن مشاهده نمی‌شود (به شکل ۲.۲ مراجعه کنید).



شکل ۲.۲: شکل موج

برای به‌دست‌آوردن سرعت موج شوک در مسئله‌ی قانون بقا به‌صورت کلی، می‌توان از شکل انتگرالی معادله بقا استفاده کرد. در این روش، سرعت موج شوک بر اساس مقادیر جواب معادله در سمت چپ و راست موج شوک محاسبه می‌شود. فرض کنید موج شوک در حال حرکت است و در بازه‌ای زمانی و مکانی کوتاه $[t, t + \Delta t]$ و $[x_1, x_1 + \Delta x]$ قرار دارد (همانند شکل ۳.۲). در این بازه، سرعت شوک به‌طور تقریبی ثابت در نظر گرفته می‌شود و در نتیجه می‌توان از آن برای تعیین مقدار تغییرات در هر دو سمت شوک استفاده کرد.



شکل ۳.۲:

طبق شکل انتگرالی قانون بقا داریم:

$$\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} u(x, t_1 + \Delta t) dx - \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} u(x, t_1) dx = \quad (۱۷.۲)$$

$$\int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(u(x_1, t)) dt - \int_{t_1}^{t_1+\Delta t} f(u(x_1 + \Delta x, t)) dt$$

با فرض اینکه مقدار u در مرزها ثابت باشد، می توان نوشت:

$$\Delta x u_r - \Delta x u_l = \Delta t f(u_l) - \Delta t f(u_r) + O(\Delta t^2) \quad (۱۸.۲)$$

با توجه به تعریف سرعت شوک s اگر بازه‌ی زمانی و مکانی کوچک شوند $\Delta t \rightarrow 0$ با استفاده از رابطه فوق دست می آوریم:

$$s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \quad (۱۹.۲)$$

این رابطه به نام شرط رانکین-هوگونیوت^۱ شناخته می شود و بیانگر سرعت موج شوک است. در حالت کلی، مقادیر چگالی جریان در سمت های چپ و راست شوک $u_l(t)$, $u_r(t)$ و نیز سرعت شوک تغییر می کنند، اما برای حالت خاص مسئله ریمان با داده های ثابت، سرعت موج شوک، ثابت باقی می ماند و با سرعتی ثابت حرکت می کند.

^۱ Rankin-Hugoniot jump condition



در دستگاه معادلات هذلولوی، سرعت شوک با استفاده از رابطه s (۱۹.۲) مانند فرمول ۱۸.۲ محاسبه می‌شود. در اینجا بردارها u_+ و u_- باید به صورت مستقل تعریف شوند، زیرا تنها پرش‌هایی معتبرند که بردارهای آنها وابسته خطی باشند، به گونه‌ای که $F(u_+) - F(u_-)$ به $u_+ - u_-$ وابسته خطی باشد. تمامی بحث‌های ذکر شده را می‌توان به دستگاه‌های معادلات قانون بقا نیز تعمیم داد. برای آشنایی بیشتر با مسائل قانون بقا می‌توانید به منابع [۲، ۳، ۱۸، ۲۲] مراجعه کنید.

۳.۲ قانون تعادل

در اکثر مسائل مرتبط با قوانین بقا، عبارت منبع نیز در سمت راست معادلات ظاهر می‌شود که به شکل زیر است:

$$u_t + f(u)_x = g(u) \quad (20.2)$$

که آن را قانون تعادل برای دستگاه‌های معادلات همانند ۱۹.۲ می‌نامند.

۱.۳.۲ روش‌های عددی برای حل معادلات قانون بقا

برای حل مسائل مرتبط با قوانین بقا با استفاده از روش‌های عددی، چالش‌های گوناگونی وجود دارد. برای نمونه، روش‌های تفاضلات متناهی در نزدیکی ناپیوستگی‌ها و شوک‌ها معمولاً دقت کافی را ندارند. اگر روش‌های حل ناپیوسته قوانین بقا با روش‌های عددی استاندارد به دست آیند که برای توابع پیوسته توسعه یافته‌اند، نتیجه‌های به دست آمده ضعیف خواهد بود.

در مسائل قانون بقا که شامل جواب‌های ناپیوسته یا دارای شوک هستند، روش‌های مبتنی بر فرم انتگرالی معادلات بقا، مفیدتر به نظر می‌رسند. این روش‌ها عمدتاً به عنوان روش‌های حجم محدود استفاده می‌شوند. یکی از این روش‌ها، روش گودونوف^۱ است که جزء روش‌های مرتبه اول می‌باشد و از ویژگی‌های اصلی آن هموارسازی پاسخ عددی در نواحی ناپیوستگی است. دسته‌ی دیگر، روش‌های لکس-وندروف^۲ هستند.

در پاسخ‌های عددی که به وسیله این روش‌ها به دست می‌آید، معمولاً نوساناتی در نزدیکی ناپیوستگی‌ها مشاهده می‌شود. با این حال، روش‌هایی که قادرند پاسخ را در نزدیکی شوک با دقت بالاتری تخمین بزنند، به عنوان روش‌های با وضوح بالا شناخته می‌شوند.

۲.۳.۲ روش شبکه‌های تطبیقی

در شبیه‌سازی‌های عددی، به دنبال روش‌هایی هستیم که بتوانند دقت بالاتری در محاسبات ارائه دهند. اگر هدف حل یک معادله با مشتقات جزئی باشد، دقت بیشتر به معنای افزایش تعداد مجهولات، یا به

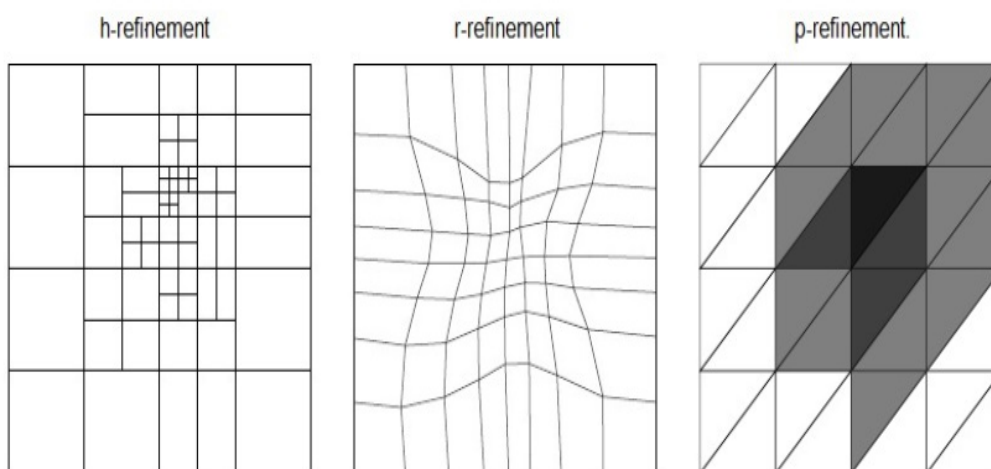
عبارتی گسترش درجه آزادی در روش است. در روش‌هایی مانند تفاضلات و حجم‌های متناهی، این مجهولات همان نقاط شبکه‌بندی هستند که گسسته‌سازی شده‌اند. یک گسسته‌سازی دقیق‌تر، منجر به نتایج عددی بهتر می‌شود. البته، روش عددی نه تنها باید دقیق، بلکه باید از لحاظ محاسباتی نیز کارآمد باشد. برای مثال، دو برابر کردن دقت روش، یا دو برابر کردن تعداد نقاط شبکه‌بندی، هزینه محاسباتی قابل توجهی در بر خواهد داشت. به علاوه، برخی نواحی از دامنه مسئله نیازی به دقت بالا ندارند. از این رو، نکته مهم در تنظیم شبکه‌بندی این است که دقت محلی افزایش یابد. این کار را می‌توان از سه طریق انجام داد:

۱. کوچک‌سازی سلول‌های شبکه یا h -تنظیم، که با تقسیم‌بندی شبکه به سلول‌های کوچکتر انجام می‌شود.

۲. حرکت نقاط شبکه یا r -تنظیم، که در آن نقاط شبکه به ناحیه مورد نیاز نزدیک‌تر می‌شوند.

۳. افزایش مرتبه محلی توابع پایه یا p -تنظیم، که در این حالت، توابع پایه به طور محلی با مرتبه بالاتری تنظیم می‌شوند.

شکل ۴.۲ این سه روش مختلف تنظیم شبکه را نشان می‌دهد. در روش h -تنظیم، تقسیم‌بندی شبکه به صورت بازگشتی ادامه می‌یابد تا زمانی که معیار موردنظر حاصل شود و همسایگی سلول‌ها با درجات مختلف تنظیم، به منظور کاهش تفاوت‌های بیش از حد در اندازه‌ها، حفظ می‌شود.



سه روش مختلف تعدیل شبکه



در روش r -تنظیف، شبکه به گونه‌ای تنظیم می‌شود که نقاط به سمت ناحیه‌ای که نیازمند دقت بالاتر است حرکت کنند، به‌خصوص در جاهایی که تغییرات سریع یا شوک‌های بزرگتری رخ می‌دهد. در نهایت، روش p -تنظیف به طور محلی مرتبه توابع پایه را افزایش می‌دهد، که به‌ویژه در روش اجزاء متناهی به کار گرفته می‌شود.

۳.۳.۲ روش‌های جابه‌جایی شبکه

پایه و اساس شبیه‌سازی‌های این پژوهش بر مبنای روش‌های جابه‌جایی شبکه است. در این قسمت، مروری کلی بر این روش‌ها خواهیم داشت.

۴.۳.۲ شبکه‌های به‌روزشده و تنظیم‌شده

دو رویکرد مختلف برای ایجاد شبکه‌های تنظیم‌شده وجود دارد:

- اولین رویکرد، انتقال نقاط شبکه از طریق یک تبدیل است که شبکه‌ای یکنواخت و ثابت در دامنه محاسباتی را به شبکه‌ای نامنظم در دامنه فیزیکی تبدیل می‌کند.
- دومین رویکرد، حرکت دادن نقاط شبکه با تعریف سرعتی مناسب، به طوری که نقاط به ناحیه دلخواه جابه‌جا شوند.

۵.۳.۲ همراهی با معادلات مشتقات جزئی

در حالت کلی، تولید شبکه یک حوزه پژوهشی مستقل است، اما در مسائل حل معادلات مشتقات جزئی، اغلب با روش‌های تنظیم شبکه ترکیب می‌شود. این فرآیند می‌تواند به صورت ایستا یا پویا انجام شود.

- در روش ایستا، در هر گام زمانی، شبکه به طور جداگانه جابه‌جا شده و سپس معادلات مشتقات جزئی روی شبکه نامنظم زمانی حل می‌شوند.
- در روش پویا، معادلات مشتقات جزئی و معادلات جابه‌جایی شبکه به صورت یک مجموعه معادلات همزمان حل می‌شوند.

۶.۳.۲ کنترل نقاط شبکه با توابع شاخص

روش‌های مختلفی برای تنظیم نقاط شبکه وجود دارند، که یکی از آن‌ها استفاده از حل معادلات مشتقات جزئی برای کنترل شبکه تنظیم‌شده است. توابع شاخص نشان‌دهنده ویژگی‌های خاص منحنی پاسخ مانند شیب، تقعر یا تحدب آن هستند. این توابع، نقاط شبکه را به نواحی با ویژگی‌های مطلوب‌تر



هدایت می‌کنند. به عنوان نمونه، تابع شاخصی که بر طول قوس تمرکز دارد، می‌تواند نقاط شبکه را در نواحی با شیب بیشتر، فشرده‌تر کند.

فصل ۳

مدلهای جریان ترافیکی

۱.۰.۳ مدل جریان ترافیک در دنبال کردن خودرو

بسیاری از تحلیل‌های مهندسی ترافیک با بهره‌گیری از ابزارهای شبیه‌سازی میکروسکوپی جریان ترافیک انجام می‌شوند. مدل‌های تعقیب خودرو یکی از اساسی‌ترین زیرمدل‌های این نوع شبیه‌سازی‌ها به شمار می‌آیند که رفتار رانندگان را در هنگام دنبال کردن خودروی جلویی در یک خط عبور مشابه بررسی می‌کنند. وجود تعداد زیادی از این مدل‌های تعقیب خودرو، لزوم شناخت هر مدل را پیش از انتخاب آن افزایش می‌دهد.

در مدل‌های شبیه‌سازی میکروسکوپی جریان ترافیک، تعامل هر خودرو با سایر خودروها و همچنین با شبکه جاده‌ها در نظر گرفته می‌شود. این مدل‌ها معمولاً از چندین زیرمدل تشکیل شده‌اند که هر کدام نقش مشخصی در فرآیند شبیه‌سازی دارند. مدل‌های تعقیب خودرو یکی از این زیرمدل‌ها هستند. در این مدل‌ها فرض می‌شود که رانندگان به تغییرات سرعت خودروی جلویی خود واکنش نشان می‌دهند. در مدل‌های تعقیب خودرو، وضعیت حرکتی خودروی دنبال‌کننده با توجه به عواملی مانند سرعت خودروی جلویی، سرعت خودروی تعقیب‌کننده، فاصله بین دو خودرو، شرایط جاده، ویژگی‌های خودرو و رفتار راننده تعیین می‌شود. به دلیل پیچیدگی مسئله، معمولاً شرایط ایده‌آلی از جمله شباهت در رانندگان و خودروها و جاده در نظر گرفته می‌شود.

به طور کلی، معادله حرکتی در مدل‌های تعقیب خودرو در یک مسیر با یک خط عبور به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = f(v_{n+1}, \Delta x_{n+1}, \Delta v_{n+1}) \quad (۱.۳)$$

که در آن $v_n(t)$ و $x_n(t)$ به ترتیب سرعت و مکان خودروی دنبال‌کننده هستند، و $\Delta v_{n+1} = v_n(t) - v_{n+1}(t)$ و $\Delta x_{n+1} = x_n(t) - x_{n+1}(t)$ اختلاف سرعت و فاصله بین خودروی پیشرو و دنبال‌کننده را نشان می‌دهند. تابع f واکنش بین دو خودرو و اختلاف سرعت آن‌ها را مشخص می‌کند.



یکی از مدل‌های شناخته‌شده تعقیب خودرو مدل سرعت بهینه (OVM) [۷۵] است که در سال ۱۹۹۵ توسط باندو^۱ ارائه شد و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = [V(\Delta x_{n+1}(t)) - v_{n+1}(t)] \quad (۲.۳)$$

در اینجا $V(\Delta x)$ سرعت بهینه خودروی تعقیب‌کننده را با توجه به فاصله از خودروی پیشرو تعیین می‌کند.

در سال ۱۹۹۹، جینگ^۱ و همکارانش دریافتند که اختلاف سرعت بین خودروی پیشرو و تعقیب‌کننده و مثبت یا منفی بودن آن بر رفتار راننده تأثیرگذار است. با در نظر گرفتن این عامل، آن‌ها مدلی بهبودیافته ارائه کردند که تأثیر هر دو پارامتر فاصله و اختلاف سرعت بین دو خودروی متوالی را شامل می‌شود:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = [V(\Delta x_{n+1}(t)) - v_{n+1}(t)] + \Delta v_{n+1}(t) \quad (۳.۳)$$

این مدل که به واقعیت نزدیک‌تر است، تأثیر هر دو پارامتر فاصله و اختلاف سرعت را در نظر می‌گیرد. مدل (OVM) یک حالت خاص از این مدل به حساب می‌آید.

۲.۰.۳ اثر زمان و فاصله واکنش در مدل تعقیب خودرو

یکی از پارامترهای اصلی در مدل‌سازی جریان ترافیک، زمان واکنش راننده است. در این بخش از رساله، هدف ما بررسی تأثیر پارامترهای زمان و فاصله واکنش در مدل‌سازی جریان ترافیک میکروسکوپی تعقیب خودرو ۳.۳ می‌باشد. بر اساس مشاهدات جریان واقعی ترافیک، رانندگان با تأخیر به محرک‌ها پاسخ می‌دهند. زمان واکنش، که به نوعی به تأخیر واکنش راننده اشاره دارد، در بسیاری از مقالات مدل‌های تعقیب خودرو مورد مطالعه قرار گرفته است [۷۸، ۲۳، ۱]. به عنوان مثال، در [۲۳]، شتاب خودروی تعقیب‌کننده با استفاده از یک معادله دیفرانسیل تأخیری به صورت زیر ارائه شده است:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = [V(\Delta x_{n+1}(t)) - v_{n+1}(t)]; \quad (۴.۳)$$

در اینجا، مقدار صفر نشان‌دهنده تأخیر زمانی در واکنش راننده است. مدل فوق با فرض صفر بودن در مدل ۲.۳ به کار می‌رود. یکی دیگر از مدل‌های تعقیب خودرو که در آن زمان واکنش راننده مورد نظر است، مدل زیر می‌باشد [۷۸]:



$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = [V(\Delta x_{n+1}(t-1)) - v_{n+1}(t-2)] + \Delta v_{n+1}(t-2); \quad (5.3)$$

مدل فوق تعمیم یافته‌ای از مدل ۳.۳ با دو پارامتر تأخیری است. بر اساس مشاهدات از حرکات خودروها در دنیای واقعی، علاوه بر تأخیر زمانی، تأخیر مکانی نیز مشاهده می‌شود. به این صورت که در طول زمان واکنش راننده، فاصله بین دو خودرو نیز تغییر می‌کند. بنابراین، اگر فرض کنیم مدت زمان عکس العمل راننده خودروی تعقیب کننده باشد، فاصله بین دو خودرو را پس از سپری شدن زمان واکنش راننده DRT^۱ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta x_{n+1}(t-\tau) = \Delta x_{n+1}(t) - d; \quad (6.3)$$

این فاصله به نام فاصله واکنش راننده DRD^۲ و زمان و مکان تأخیر تعریف می‌شود. معادله دیفرانسیل متناظر با دو پارامتر فاصله واکنش به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = [V(\Delta x_{n+1}(t) - d) - v_{n+1}(t)] + \Delta v_{n+1}(t); \quad (7.3)$$

این مدل ۶.۳ مشابه مدل ۳.۳ است. در حالت خاصی که $d = 0$ و در نتیجه تأخیر زمانی و مکانی صفر باشد، با بسط تیلور و حذف جمله‌های مرتبه بالاتر، عبارت‌های زیر به دست می‌آیند:

$$V(\Delta x_{n+1}(t) - d) = V(\Delta x_{n+1}(t)) - dV'(\Delta x_{n+1}(t)); \quad (8.3)$$

۳.۰.۳ مدل توسعه یافته مایکروسکوپی در تعقیب خودرو

مدل ترافیکی که در بخش قبل معرفی شد، از نوع مدل‌های مایکروسکوپی بود. به منظور تحلیل مدل ۶.۳، ابتدا این مدل را به یک مدل مایکروسکوپی که به شکل معادله مشتقات جزئی بیان می‌شود، تبدیل می‌کنیم. برای این منظور، لازم است ابتدا متغیرهای مدل مایکروسکوپی را به متغیرهای مدل مایکروسکوپی تبدیل نماییم. فرض می‌کنیم موقعیت خودرو توسط یک شرط متوسط ترافیکی به شکل $[x + \frac{1}{2}\Delta x; x - \frac{1}{2}\Delta x]$ نمایش داده شود، که نشان‌دهنده وضعیت ترافیک در موقعیت x در مدل تعقیب خودرو است. در اینجا، Δx نشان‌دهنده فواصل مکانی است.



سپس متغیرهای میکروسکوپی را به شکل زیر به متغیرهای میکروسکوپی تبدیل می‌کنیم:

$$\Delta x \rightarrow \rho(x; t), \quad v_{n+1}(t) \rightarrow u(x, t), \quad v_n(t) \rightarrow u(x + \Delta x, t), \quad (9.3)$$

و همچنین:

$$V(\Delta x) \rightarrow u_e(x, t), \quad \frac{\partial V(\Delta x)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x}. \quad (10.3)$$

در این معادلات، پارامترهایی مانند T زمان استراحت و τ زمان لازم برای انتشار آشفته‌گی به سمت عقب را معرفی می‌کنیم. با جایگذاری این متغیرها و استفاده از روابط ۷.۳ و ۸.۳، معادله تعقیب خودرو ۶.۳ به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{T} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u_e(x, t) - \frac{u(x, t)}{T} + \frac{\Delta}{T} \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x} + u(x + \Delta x, t) - u(x, t). \quad (11.3)$$

با بسط و ساده‌سازی جمله سوم، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (12.3)$$

برای تکمیل مدل و حفظ بقای چگالی جریان ترافیک، نیازمند رابطه‌ای دیگر برای قانون بقای جریان هستیم. بنابراین، مدل ترافیکی جدید را به صورت دستگاه معادلات مشتقات جزئی زیر بیان می‌کنیم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \quad (13.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u - \frac{c_0 T}{T} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = u_e(x, t) - \frac{u(x, t)}{T} + \frac{\Delta x}{T} \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x}. \quad (14.3)$$

برای تحلیل ویژگی‌های این مدل، از روش مشخصه‌ها استفاده می‌کنیم. به این منظور، معادله را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + [A] \frac{\partial U}{\partial x} = E, \quad (15.3)$$

که در آن:

$$(16.3)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \quad [A] = \begin{pmatrix} u & 0 \\ u - \frac{c_0 T}{T} & \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ u_e(x, t) - \frac{u(x, t)}{T} + \frac{\Delta x}{T} \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x} \end{pmatrix}.$$



مقادیر ویژه ماتریس $[A]$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\lambda_1 = u - \frac{c_0 T}{T}, \quad \lambda_2 = u. \quad (17.3)$$

این مقادیر ویژه، سرعت مشخصه‌های مدل ۱۴.۳ را تعیین می‌کنند، که بیانگر سرعت حرکت منحنی‌های مشخصه نسبت به جریان ترافیک هستند.

۴.۰.۳ بررسی مسئله سرعت منفی

هدف این بخش بررسی وجود مسئله سرعت منفی در مدل ۱۴.۳ است. در اینجا، دگانزو^۱ یک ردیف از خودروهای متوقف را در نظر می‌گیرد، با این فرض که هیچ خودروی جدیدی به جاده وارد نمی‌شود. شرایط اولیه برای مدل جریان ترافیک ۱۴.۳ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\rho(x, 0) = m H(x), \quad (18.3)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (19.3)$$

که در آن، تابع پله‌ای H نشان‌دهنده چگالی خودروها در راه‌بندان است و مقدار m نشان‌دهنده حداکثر چگالی می‌باشد.

تابع $H(x)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (20.3)$$

واضح است که با توجه به شرایط اولیه، جواب دستگاه ۱۴.۳ همان شرایط اولیه داده شده است. بنابراین، اگر مشتقات $\frac{du}{dt} = 0$ باشد، نتیجه می‌گیریم که:

$$u(x, t) = u_e(x, t) \quad \text{و} \quad \frac{d}{d\rho} \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x} > 0. \quad (21.3)$$

این نتیجه نشان می‌دهد که u تابعی نزولی نسبت به چگالی نیست و به بیان دیگر، در این مدل سرعت منفی وجود ندارد. این مسئله به‌ویژه در بسیاری از مدل‌های جریان ترافیک که در آن‌ها سرعت منفی به‌صورت طبیعی پدیدار می‌شود، به‌عنوان یک مزیت محسوب می‌شود. در این مدل، هیچ حرکتی به سمت عقب خودروها مشاهده نمی‌شود، و این ویژگی یکی از مزایای اصلی این مدل نسبت به برخی مدل‌های دیگر است.



۵.۰.۳ بررسی ویژگی‌های کیفی مدل

در این بخش، به تحلیل برخی از ویژگی‌های کیفی مدل می‌پردازیم. از جمله این ویژگی‌ها، پایداری خطی و ساختار موجی جواب‌ها در مدل است.

۶.۰.۳ بررسی پایداری خطی جواب‌ها

فرض کنید که $u = u + \delta u$ و $\rho = \rho + \delta \rho$ جواب‌های پایدار معادله ۱۴.۳ هستند، به‌طوری که $u = u_e(\rho)$ و ρ ثابت است. هدف بررسی این است که چگونه این تغییرات کوچک (آشفته‌گی‌ها) در طول زمان رشد می‌کنند یا تضعیف می‌شوند. برای این منظور، مقادیر $u = u + \delta u$ و $\rho = \rho + \delta \rho$ را در معادلات ۱۴.۳ جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial(\rho + \delta \rho)}{\partial t} + \frac{\partial((u + \delta u)(\rho + \delta \rho))}{\partial x} = 0, \quad (22.3)$$

$$\frac{\partial(u + \delta u)}{\partial t} + (u + \delta u) \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial x} = u_e(\rho + \delta \rho) \frac{\partial(u + \delta u)}{\partial x}. \quad (23.3)$$

با بسط تیلور و حذف جملات مرتبه بالاتر، به سیستم معادلات زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = 0, \quad (24.3)$$

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} = \left(\frac{du_e}{d\rho} \right)_{\rho=\rho_0} \delta \rho. \quad (25.3)$$

با توجه به $c_1 = u_0 + c_0 T$ و $c_2 = u_0$. بنابراین، با استفاده از روش‌های مرسوم تحلیل پایداری خطی، می‌توان نشان داد که شرط پایداری جواب به صورت زیر است:

$$c_1 > c > c_2. \quad (26.3)$$

اگر شرط ۲۶.۳ برقرار نباشد، پدیده ناپایداری ترافیکی رخ خواهد داد، که باعث بروز پدیده‌هایی مانند توقف-حرکت^۱ در جریان ترافیک می‌شود. با افزایش زمان واکنش و پارامترهای مناسب (مانند DRT و DRD)، ناحیه پایداری جواب‌ها افزایش می‌یابد و ترافیک در محدوده پایداری بیشتری قرار می‌گیرد.



۷.۰.۳ روش عددی

معادلات جریان ترافیک ۱۴.۳ به صورت تحلیلی قابل حل نیستند؛ بنابراین، نیاز به استفاده از روش‌های عددی برای حل آن‌ها داریم. در اینجا از روش تفاضل محدود گسسته‌سازی استفاده می‌کنیم. ابتدا روش بالادست^۲ را شرح می‌دهیم و سپس به گسسته‌سازی معادلات بالادست ۱۴.۳ می‌پردازیم. روش‌های بالادست در دسته‌ی روش‌های گسسته‌سازی برای حل معادلات مشتقات جزئی هذلولوی قرار دارند. این روش‌ها از الگوی تفاضل محدود وابسته به جواب برای شبیه‌سازی عددی مسیر انتشار موج استفاده می‌کنند. در روش بالادست، معادلات هذلولوی با استفاده از تفاضل‌های محدود و با توجه به سرعت مشخصه‌ها گسسته‌سازی می‌شوند. به طور کلی، اگر سرعت مشخصه‌ها مثبت باشد، از نقاط سمت چپ و اگر سرعت منفی باشد، از نقاط سمت راست برای گسسته‌سازی استفاده می‌شود که دستگاه معادلات ۱۴.۳ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho_i^{j+1} = \rho_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} \rho_i^j (u_i^j - u_{i+}^j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} u_i^j (\rho_{i+1}^j - \rho_i^j), \quad (27.3)$$

اگر $u_i^j < c_0 T$

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_0 T - \tau u_i^j) (u_{i+1}^j - u_i^j) - \frac{\Delta t}{T \tau} (u_i^j - u_e(\rho_i^j)) - \frac{d}{T \tau} \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x} (\rho_i^j), \quad (28.3)$$

در غیر این صورت:

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{\Delta t}{\Delta x} (c_0 T - \tau u_i^j) (u_i^j - u_{i-1}^j) - \frac{\Delta t}{T \tau} (u_i^j - u_e(\rho_i^j)) - \frac{d}{T \tau} \frac{\partial u_e(x, t)}{\partial x} (\rho_i^j), \quad (29.3)$$

معادله‌ی ۲۷.۳ بر اساس یک طرح تفاضل مناسب از دیدگاه فیزیکی جریان ترافیک تعریف شده است، که در j شاخص مکان و i نشان‌دهنده‌ی زمان است. معادلات ۲۸.۳ و ۲۹.۳ نیز بر پایه طرح تفاضل بالادست مرتبه اول هستند.

برای بررسی وضعیت جریان ترافیک در شرایط "شوک" و "ترقیق"، به دو مجموعه شرایط اولیه مسئله ریمان توجه می‌کنیم:

۱. در حالت اول: وسایل نقلیه بر متر $u_1 = 0.04$ وسایل نقلیه بر متر $d_1 = 0.18$

۲. در حالت دوم: وسایل نقلیه بر متر $u_2 = 0.18$ وسایل نقلیه بر متر $d_2 = 0.04$



در حالت شوک، چگالی جریان بالادست و پایین دست به ترتیب d_2 و u_2 است و در وضعیت ترقیق، این مقادیر به ترتیب d_1 و u_1 در نظر گرفته می شوند. سرعت اولیه جریان نیز بر اساس رابطه زیر تعیین می شود:

$$u_{1,2} = u_e(u_{1,2}), \quad d_{1,2} = u_e(d_{1,2}) \quad (30.3)$$

در اینجا، شرط مرزی آزاد را فرض می کنیم، به این معنی که در مرز، مشتق سرعت نسبت به موقعیت برابر صفر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (31.3)$$

برای تعیین سرعت-چگالی در حالت تعادل از رابطه زیر استفاده می کنیم:

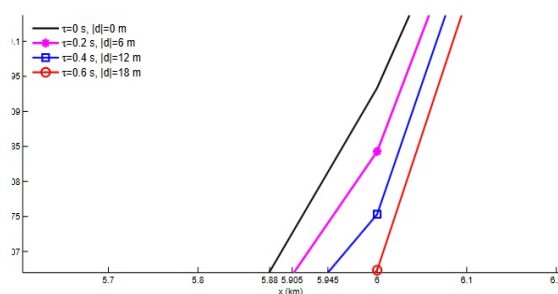
$$u_e(\rho) = u_f \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho}{\rho_m}\right) \right] \quad (32.3)$$

در این رابطه، u_f سرعت جریان آزاد، ρ_m حداکثر چگالی و c_m سرعت موج سینماتیک در تراکم ترافیکی است. در این مدل، سرعت آزاد $u_f = 30$ متر بر ثانیه، حداکثر چگالی $\rho_m = 0.2$ وسایل نقلیه بر متر، و سرعت موج $c_0 = 11$ متر بر ثانیه فرض شده اند. ابتدا فرض می کنیم که زمان واکنش راننده برابر با 0.6 ثانیه باشد. در شرایط شوک، خودروها که با حداکثر سرعت $u_f = 30$ متر بر ثانیه حرکت می کنند، ناگهان با نقطه شوک روبرو شده و مجبور به ترمز می شوند. با در نظر گرفتن زمان واکنش راننده، در این بازه زمانی خودرو می تواند مسافتی برابر با $0.6 \times 30 = 18$ متر را طی کند. در نتیجه فاصله بین دو خودرو در اثر واکنش کاهش می یابد.

به طور مشابه، در شرایط ترقیق، چگالی جریان کاهش یافته و خودروها با فاصله بیشتری از یکدیگر قرار دارند. در این حالت نیز اگر زمان واکنش راننده به اندازه 0.6 ثانیه فرض شود، خودروها فاصله ای معادل ۱۸ متر را در این مدت طی می کنند و سرعت آن ها افزایش می یابد. بنابراین، فاصله میان دو خودرو و زمان واکنش با پارامترهای زیر تعریف می شوند:

$$\Delta t = 0.6 \text{ ثانیه}; \quad d = \begin{cases} 0.018 \text{ کیلومتر} & \text{در شرایط شوک} \\ 0.018 \text{ کیلومتر} & \text{در شرایط ترقیق} \end{cases} \quad (33.3)$$

نتایج عددی مربوط به شرایط اولیه ۳۰.۳ و ۳۱.۳ با گام‌های زمانی $\Delta t = 1$ ثانیه و $\Delta x = 200$ متر نشان داده شده است. همان‌طور که از این نمودارها مشخص است، مدل جدید قادر به شبیه‌سازی موج‌های شوک و ترقیق است. برای بررسی تأثیر پارامترهای زمانی و مکانی واکنش (DRT و DRD) بر جریان ترافیک، مدل ۱۴.۳ را با شرایط اولیه ۳۰.۳ و با زمان‌های واکنش مختلف حل می‌کنیم. در ابتدا، مدل را بدون در نظر گرفتن زمان واکنش رانندگان و برای زمان $t = 10$ دقیقه بررسی می‌کنیم. نتایج به‌دست‌آمده در شکل ۱.۳ نشان داده شده است. سپس فرض می‌کنیم که زمان واکنش راننده‌ها در نظر گرفته شود، بنابراین خودروهایی که قبل از نقطه شوک با سرعت 30 متر بر ثانیه حرکت می‌کردند، در زمان واکنش 0.6 ثانیه، مسافتی برابر با ۱۸ متر را طی می‌کنند. بدیهی است که فاصله خودروها پس از گذشت زمان واکنش کاهش خواهد یافت. به همین ترتیب، اگر فاصله میان خودروها برابر با ۱۸ متر فرض شود و زمان واکنش 0.6 ثانیه باشد، به نتایج مشابهی می‌رسیم.



شکل ۱.۳: نمودار چگالی جریان در زمان $t = 10$ به ازای زمانها و فاصله‌های عکس و العمل

فصل ۴

حل عددی معادلات دیفرانسیل ترافیکی قوانین بقا به روش طیفی با استفاده از فیلتر

در این روش، روش طیفی را با یک فیلتر در معادله دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان ترکیب می‌کند تا با پدیده موج ضربه‌ای در مدل‌سازی جریان ترافیک مقابله کند. با استفاده استراتژیک از فیلترهای گسسته، این روش به‌طور مؤثری انحرافات ناشی از موج ضربه‌ای را کاهش می‌دهد و در نتیجه، نتایج بسیار دقیق‌تری در مقایسه با تکنیک‌های طیفی معمول به دست می‌آید. ما شرایط پایداری مرتبط با این روش را به‌طور کامل بررسی می‌کنیم و بینش‌های ارزشمندی درباره پایداری آن ارائه می‌دهیم. برای تأیید اثربخشی این روش، مجموعه‌ای از مثال‌های عددی ارائه می‌کنیم که توانایی این روش را در دستیابی به راه‌حل‌های دقیق به تصویر می‌کشد. مقایسه با روش‌های معتبر مانند Lax^۱ و CU^۲ نشان‌دهنده برتری قابل‌توجه در دقت است. این پژوهش نه تنها تکنیک عددی نوینی به حوزه مدل‌سازی جریان ترافیک اضافه می‌کند، بلکه به چالشی مداوم پاسخ می‌دهد و راه امیدبخشی برای تحقیقات بیشتر و کاربردهای عملی ارائه می‌کند.

۱.۰.۴ مقدمه

ترافیک، چالشی فراگیر است که تأثیرات گسترده‌ای بر اقتصاد، ایمنی و محیط‌زیست دارد. برای مدل‌سازی و کاهش اختلالات در جریان ترافیک به روش‌های نوآورانه نیاز است. در این راستا، این رساله تکنیک جدیدی را معرفی می‌کند که روش طیفی را با یک فیلتر معادله دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان ترکیب می‌کند تا راه‌حلی منحصربه‌فرد برای کاهش موج‌های شوک و نوساناتی که در حل عددی مدل‌های معادلات دیفرانسیل ترافیک رخ می‌دهند، ارائه دهد. این رویکرد به مقابله با این چالش‌ها پرداخته و راه‌حلی برای آنها ارائه می‌دهد.

به طور خاص، تمرکز ما بر استفاده از روش طیفی همراه با یک فیلتر معادله دیفرانسیل جزئی

^۱Lax Crank-Nicolson Method^۲



وابسته به زمان است که با مسئله موج‌های شوک، که اغلب عاملی پیچیده در حل این نوع معادلات است، مقابله می‌کند. برای مثال، در فرایند حل عددی معادلاتی مانند معادله برگرز، نقاط شوک به وجود می‌آیند که در آنجا امواج با گذشت زمان تکامل پیدا می‌کنند و باعث انحراف از نتیجه نهایی می‌شوند. به طور معمول، دو روش اصلی در این فرایند استفاده می‌شود: فیلتر کردن جریان ترافیک و کاهش موج‌ها از طریق روش طیفی.

روش‌های طیفی، که به دقت و کارایی معروف هستند (به ویژه در مقایسه با روش‌های دیگر)، در حل معادلات دیفرانسیل بر پایه قوانین بقای سیستم‌های غیرخطی هذلولوی عمل می‌کنند:

$$u_t + g_x(u) = 0, \quad (1.4)$$

با شرط اولیه در $t = 0$ ، به صورت:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.4)$$

معمولاً چنین معادلاتی راه‌حل تحلیلی ندارند و نیاز به استفاده از روش‌های عددی مانند روش طیفی برای حل آنها است. با این حال، در برخی موارد، استفاده مستقیم از روش طیفی می‌تواند به نوساناتی منجر شود که پاسخ را از مقدار واقعی‌اش دور می‌کند و به آن شوک گفته می‌شود. همان‌طور که گاتلیب اشاره کرده است، انتظار می‌رود روش‌های طیفی ویژگی‌ها و ساختارهای ظریف جریان ترافیک، از جمله شوک‌ها را به خوبی دریافت و شناسایی کنند.

هدف اصلی این روش، حل نوسانات گیبس^۱ است که باعث افزایش نرخ همگرایی شده و دقت راه‌حل‌ها را به طور قابل توجهی بهبود می‌بخشد. روش‌های مختلفی برای حذف شوک‌ها در این مسئله به کار می‌روند که یکی از این روش‌ها، روش وزن‌دار بدون نوسان است. دقت و موفقیت این نوع روش کاهش شوک، با توجه به میزان خطا در فرایند حل، به ویسکوزیته آن نسبت به میانگین محلی بستگی دارد. در اصل، روش‌های طیفی هنگام تقریب مشتق‌ها، پراکندگی عددی کمتری ایجاد می‌کنند. اما هنگام محاسبه مشتق‌ها در حضور ناپیوستگی‌ها، نوسانات و شوک‌های متعددی ممکن است رخ دهند که نیازمند کنترل و کاهش است.

برای حل این مسئله، دو روش پیشنهاد شده‌اند: روش طیفی ویسکوزیته‌ای^۲ SV که توسط تدمر^۳ معرفی شده است [۶۸] و روش فیلترسازی. در حال حاضر، بیشتر فیلترهایی که در روش‌های طیفی به کار می‌روند برای کاهش این نوسانات طراحی شده‌اند. حسینی و همکاران [۲۲] لیستی از فیلترهای طیفی رایج تهیه کرده‌اند که شامل فیلتر لانچزوس^۴، فیلتر کسینوسی برجسته^۵، فیلتر کسینوسی با نوک تیز^۶، و فیلتر قطع^۷ می‌شوند. علاوه بر این، انواع مؤثرتری از فیلترها نیز ظهور کرده‌اند، مانند فیلتر

cut-off filter^۷protruding cosine filter^۶cosine filter^۵Lanczos^۴Tadmor^۳Spectral Vicious^۲Gibbs^۱



p^A [۷۲] و فیلتر کای و همکاران [۴]. همچنین، فیلترهای معمولی دیریکله^۹ که توسط گاتلیب^{۱۰} و تدمر^{۱۱} توسعه یافته‌اند [۱۴] نتایج امیدوارکننده‌ای را نشان داده‌اند.

علاوه بر فیلترها در حوزه طیفی، می‌توان فیلترهایی را نیز در حوزه فیزیکی به کار برد. با این حال، ایجاد و اجرای فیلترها در فضای فیزیکی نسبت به کاربرد آنها در فضای فوریه فرآیندی پیچیده‌تر است. یکی از روش‌هایی که برای کاهش شوک به کار می‌رود از طریق غیرقابل بازگشت بودن [۳] است، مانند روش ENO^۱. در این رویکرد، ائتلاف عددی تا حدی در حوزه فوریه از طریق یک فیلتر نمایی اعمال می‌شود. در حوزه فیزیکی، تکنیک دیگری شامل روش ENO (درون‌یابی چندجمله‌ای) است. به طور ویژه، یی و همکاران [۷۷] روشی به نام فیلتر مشخصه معرفی کردند که به طور مؤثری با شبیه‌سازی شوک سر و کار دارد. همچنین گاتلیب [۱۳] از چندجمله‌ای‌های گگنباور^۲ برای حل نتایج روش فوریه جزئی استفاده کرد. برای جزئیات بیشتر در مورد راه‌حل‌های عددی مناسب با استفاده از فیلترها به منابع [۸، ۱۶، ۲۱، ۲۲] مراجعه کنید.

با این حال، چالش‌های متعددی ممکن است مانع از اجرای موفقیت‌آمیز روش فیلتر در کاهش شوک شوند. انتخاب فیلتر بهینه برای کاهش شوک باید بر اساس مسئله خاص و با توجه به ویژگی‌های آن، مانند موجچه‌ها، تداخل، تاثیر طول موج، مکان و باند انتقال صورت گیرد. به دست آوردن فیلترهایی بدون خطای پراکندگی نیازمند فاصله‌های محاسباتی کوچک و دقت وضوح بالا است. علاوه بر این، تفاوت بین روش‌های حل در سیستم‌های طیفی فوریه و سیستم‌های فیزیکی به پیچیدگی موضوع می‌افزاید. در نتیجه، فیلتری که برای یک مسئله مناسب است، ممکن است برای مسئله‌ای دیگر کارایی نداشته باشد. برای رفع این مشکل، ترجیح داده می‌شود فیلتری داشته باشیم که با یک یا دو پارامتر قابل تنظیم، انعطاف‌پذیری داشته باشد. یکی دیگر از چالش‌های مربوط به روش فیلتر، مربوط به محاسبه و تقریب قوانین بقای هذلولوی است. با توجه به اینکه توزیع طیفی فوریه وابسته به زمان است، استفاده از یک فیلتر وابسته به زمان به چالشی تبدیل می‌شود. اعمال یک فیلتر به صورت یکنواخت در همه مراحل زمانی ممکن است برای همه مسائل موثر نباشد.

برای رفع این چالش‌ها، یک روش تطبیقی که توسط یک پارامتر در طول زمان کنترل می‌شود، ضروری است. به دلیل پیچیدگی و تنوع مسائل، هیچ روش یکسانی برای همه وجود ندارد و اغلب به زمان و تلاش زیادی نیاز است. در جستجوی روش‌های مؤثر، محققان مجموعه‌ای از فیلترهای پایین‌گذر با مرتبه پایین را که در هر دو فضای فوریه و فیزیکی کار می‌کنند، بررسی کرده‌اند. یکی از این رویکردها روش گسسته DSC^۳ است [۲۴، ۲۵، ۷۶-۷۴] که هدف آن کاهش نوسانات ناشی از روش شبه‌طیفی فوریه است. استفاده از فیلترهای پایین‌گذر با دامنه گسترده‌ای از امواج مؤثر امکان بهره‌برداری کارآمد را فراهم می‌آورد، به ویژه در روش‌های طیفی که با قوانین بقای سیستم‌ها



ساخته شده‌اند. پارامتری برای کنترل این امواج به کار می‌رود که در حوزه فوریه برای افزایش دقت قابل تنظیم است. در روش (DSC)، فیلترها ابتدا برای کاهش نوسانات سیستم ^۴CFOR طراحی می‌شوند [۱۸، ۳۷، ۶۱، ۸۱]. این فیلترها فیلترهای پایین‌گذر^۵ و بالاگذر^۶ را برای محاسبه مشتقات همگام می‌کنند. ترکیب فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر در حالت فوریه^۷ (به صورت پنجره‌ای) این روش را به‌ویژه برای کاهش و کنترل شوک مؤثر می‌سازد. اخیراً، رویکرد جدیدی با ترکیب روش‌های فیلتر و طرح‌های شبکه عصبی برای بهینه‌سازی عملکرد باتری به کار گرفته شده است [۶، ۱۹]. در ادامه، این فیلترها در روش‌های عددی برای حل مسائل ترافیکی به کار رفته‌اند و خطاهای آنها با سایر روش‌ها مقایسه شده‌اند.

ترافیک مشکلی رو به رشد در سراسر جهان است که تأثیرات زیادی بر اقتصاد، ایمنی و محیط‌زیست دارد. بنابراین، حل مشکل اثرات منفی تراکم ترافیک بسیار مهم و قابل توجه است. پژوهشگران مدل‌های مختلفی ارائه کرده‌اند که از نظر ویژگی‌های ترافیکی به‌طور کلی به مدل‌های میکروسکوپی، مزوسکوپی و ماکروسکوپی تقسیم می‌شوند. یکی از مدل‌هایی که در آن با مسئله موج یا شوک در فرآیند حل معادلات دیفرانسیل مواجه می‌شویم، معادلات دیفرانسیل جریان ترافیک است که توسط سوپاساکیس^۱ و کاتسولاکیس^۲ مدل‌سازی و سپس بهبود یافته است [۲، ۵، ۳۵، ۷۰]. در اینجا، از روش طیفی به همراه فیلتری که در بالا ذکر شد برای کنترل این امواج در فرآیند دستیابی به پاسخ و کاهش آنها با فیلتر DSC استفاده می‌شود و پاسخی با میزان کمی خطا ایجاد می‌گردد. به دلیل اینکه این مدل‌ها با چنین تکنیکی حل نشده‌اند و با توجه به میزان خطا و مقرون‌به‌صرفه بودن محاسبات، این رویکرد به عنوان روشی نوآورانه مطرح است.

چندین مدل پیوسته برای ترافیک بزرگراه‌ها پیشنهاد شده است. در این میان، کارهای س. محمدیان و ز. ژنگ^۳ [۴۲] قابل توجه هستند. همچنین در رابطه با مدل جریان ترافیک لایتهیل-ویتهم-ریچاردز (LWR)^۴ و مدل او-راسل^۵ می‌توان به کارهای محمدیان اشاره کرد، همانطور که در [۴۱] و همچنین در رساله [۴۳] به بحث در مورد حل مدل‌های جریان ترافیک بر اساس سیستم‌های غیرخطی هذلولوی^۶ از معادلات دیفرانسیل جزئی پرداخته شده است.

کار حاضر به خاطر ترکیب نوآورانه‌ای که از روش طیفی و فیلترهای معادله دیفرانسیل جزئی PDE^۷ ارائه می‌دهد، راه‌حلی جامع برای مسئله‌ای قدیمی در مدل‌سازی جریان ترافیک فراهم می‌کند. با کاهش قابل توجه شوک‌ها و نوسانات، تکنیک پیشنهادی دقت و نرخ همگرایی راه‌حل‌های عددی را بهبود می‌بخشد. این نوآوری نه تنها پیشرفت در حوزه مدل‌سازی جریان ترافیک را نشان می‌دهد، بلکه کاربردهای بالقوه‌ای نیز در دنیای واقعی دارد، جایی که پیش‌بینی‌های دقیق جریان ترافیک برای برنامه‌ریزی شهری، مدیریت حمل‌ونقل و ارزیابی اثرات زیست‌محیطی اهمیت بالایی دارند. روش

Z. Zheng^۳ Katsoulakis^۲ Sopasakis^۱ Fourier^۷ High-pass filters^۶ Low-pass filters^۵ Conjugate filter^۴
Partial Differential Equations^۷ Nonlinear hyperbolic systems^۶ Aw-Rascle mode^۵ Lighthill-Whitham-Richards^۴



گسسته DSC، که جزء مرکزی این رویکرد است، از فیلترها هم در حوزه طیفی و هم در حوزه فیزیکی استفاده می‌کند. این کاربرد دوگانه به کاهش نوسانات و شبیه‌سازی شوک کمک مؤثری می‌کند. به ویژه، روش DSC تنظیم‌پذیری را از طریق پارامتری که رفتار فیلترها را کنترل می‌کند، ارائه می‌دهد و انعطاف‌پذیری لازم برای دستیابی به دقت بالا را فراهم می‌آورد. در حالی که این تکنیک در کاهش شوک‌ها برجسته است، اثربخشی آن به انتخاب فیلتر بهینه و درک ویژگی‌های مسئله خاص، مانند موجچه‌ها، پیچش‌ها، تأثیر طول موج، مکان و باند انتقال بستگی دارد.

هدف روش‌شناسی ارائه شده در این رساله حل مسئله موج‌های شوک و نوساناتی است که در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان PDES با استفاده از روش طیفی با آنها مواجه می‌شویم. این رساله استفاده از رویکرد مبتنی بر فیلتر، به ویژه روش گسسته DSC، را برای کاهش و کنترل شوک‌ها در حالی که دقت و نرخ همگرایی راه‌حل عددی را بهبود می‌بخشد، پیشنهاد می‌کند. این روش شامل اعمال فیلترها هم در حوزه طیفی و هم در حوزه فیزیکی برای کاهش نوسانات و شبیه‌سازی شوک است. تمرکز اصلی این کاربرد بر روی معادلات جریان ترافیک است که در آنها شوک‌ها و موجچه‌ها شایع هستند.

همچنین، در رفع مشکلات مربوط به لایه‌های مرزی و اولیه در راه‌حل‌ها، در نظر گرفتن تأثیر تکنیک‌های پالایش شبکه حائز اهمیت است. مطالعات اخیر نشان داده‌اند که استفاده از شبکه‌های تطبیقی قطعه‌ای یکنواخت یا انواع دیگری از شبکه‌های پالایش‌یافته می‌تواند به طور قابل توجهی تعداد نقاط شبکه را افزایش داده و دقت راه‌حل‌ها را بهبود بخشد. برای مثال، مزایای چنین رویکردهایی در بهبود دقت راه‌حل‌ها با افزایش نقاط تقسیم در [۵۶] مورد بحث قرار گرفته است. به طور مشابه، بینش‌های اضافی در مورد کارایی تکنیک‌های شبکه تطبیقی در [۵۷] و [۵۸] ارائه شده است. همچنین تحلیل اینکه چگونه این روش‌ها به بهتر مدیریت کردن چالش‌های مربوط به لایه‌های مرزی و اولیه کمک می‌کنند، در [۴۵] بررسی شده است.

نتایج به دست آمده از این روش‌شناسی دارای کاربردهای عملی قابل توجهی هستند. با بهبود قابل ملاحظه دقت پیش‌بینی‌های جریان ترافیک، برنامه‌ریزان شهری و مقامات حمل‌ونقل می‌توانند تصمیمات آگاهانه‌تری در زمینه توسعه زیرساخت‌ها و مدیریت ترافیک اتخاذ کنند. علاوه بر این، کاهش خطای محاسباتی باعث افزایش اعتبار ارزیابی‌های اثرات زیست‌محیطی شده و به برنامه‌ریزی شهری پایدار کمک می‌کند.



۲.۰.۴ نظریه و الگوریتم

به طور نظری، یک فیلتر بر اساس معادله زیر تعریف می‌شود که در آن یک کانولوشن تکین با عملگر * نمایش داده شده است:

$$g(x) = (P * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x-t)f(t)dt, \quad (3.4)$$

که در آن $P(x)$ هسته و $f(x)$ تابع تست است. برای اینکه کانولوشن $g(x)$ به خوبی تعریف شود، فرض می‌کنیم که $P(X)$ به قدر کافی هموار باشد. به طور خاص، $P(X)$ به فضای شوارتز $S(R)$ تعلق دارد و $f(x)$ تابعی در $L^1(R)$ است.

انواع مختلفی از توابع هسته وجود دارد، از جمله توابع هیلبرت، آبل و دلتا. در این پژوهش از هسته‌های دلتا استفاده می‌شود و این تابع و مشتقات آن به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$P(x) = \delta^{(s)}(x), \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

که در رابطه بالا، s مرتبه مشتق را نشان می‌دهد. تابع دلتا که در اینجا استفاده شده است بر اساس تابع شانون به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{\alpha,\Delta}(x - x_k) = \frac{\sin(\frac{\pi(x-x_k)}{\Delta})}{\frac{\pi(x-x_k)}{\Delta}} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2\alpha^2}}, \quad (5.4)$$

که در آن دو پارامتر α ، Δ برای کنترل این هسته استفاده می‌شوند. بر این اساس، می‌توان برای یک تابع مانند $u(x)$ در نقاط $\{x_k\}_{k=-M}^M$ تقریب زیر را نوشت:

$$u^{(s)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \delta_{\alpha,\Delta}^{(s)}(x - x_k)u(x_k), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (6.4)$$

بیان تابع $\delta_{\alpha,\Delta}^{(s)}$ برای $s = 0$ به صورت زیر است:

$$\delta_{\alpha,\Delta}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\frac{\pi}{\Delta}(x))}{\frac{\pi}{\Delta}(x)} e^{-(x)^2/(2\alpha^2)}, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

و برای $s = 1$ به صورت زیر خواهد بود:



$$\delta_{\alpha, \Delta}^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos(\frac{\pi x}{\Delta}) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{x} - \frac{\sin(\frac{\pi x}{\Delta}) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{\pi x^2 \Delta} - \frac{\sin(\frac{\pi x}{\Delta}) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{\frac{\pi \alpha^2}{\Delta}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

در فرمول بالا، $r = \alpha/\Delta$ یک ضریب است که برای کنترل عملکرد فیلتر جهت کاهش شوک استفاده می‌شود. در کاربرد فیلتر، معمولاً از روش‌های عددی مانند روش پنجره رانگ-کوتا برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود.

۳.۰.۴ کاربرد در مدل‌های ترافیکی

مدل LWR: مدل لایت‌هیل ویتام ریچاردز LWR برای توصیف جریان ترافیک در جاده با در نظر گرفتن تراکم و سرعت متوسط وسایل نقلیه استفاده می‌شود. این مدل بر اساس اصل بقای جرم بنا شده و توسط معادله زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi(u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (9.4)$$

که در آن u نشان‌دهنده تراکم (چگالی) وسایل نقلیه است، v سرعت وسایل نقلیه و شار (یا جریان) به صورت $\Psi(u) = uv$ تعریف می‌شود. این معادله به عنوان یک قانون بقای غیرخطی شناخته می‌شود. مدل‌های مختلفی از مدل LWR در ادبیات علمی موجود است. به عنوان مثال، در [۶۹] یک تابع سرعت ساده به صورت زیر تعریف شده است:

$$v = \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right) v_{max}, \quad (10.4)$$

این معادله نشان می‌دهد که سرعت به صفر کاهش می‌یابد، زمانی که تراکم u به مقدار حداکثری خود u_{max} نزدیک می‌شود. برعکس، سرعت به حداکثر مقدار خود می‌رسد هنگامی که تراکم نزدیک به صفر است.

با گسسته‌سازی و اعمال روش بالا با مقادیر $u_{max} = 1$, $v_{max} = 1$ می‌توان $u_N(x, t)$ را به صورت زیر نوشت:



$$u_N(x, t) = \sum_{k=-M}^M \delta_{\alpha, \Delta}(x - x_k) u(x_k, t), \quad (11.4)$$

و معادله دیفرانسیل به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(12.4)$$

$$\frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} = \left(\sum_{k=j-M/2}^{j+M/2} \frac{\partial \delta_{\Delta, \alpha}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right) (2u(x_j, t) - 1), \quad j = 1, \dots, N.$$

حل عددی معادلات غیرخطی: برای یافتن راه‌حل و بررسی همگرایی این روش، از روش عددی رانگ-کوتای^۱ مرتبه چهارم استفاده می‌کنیم. این روش به ما یک دقت همگرایی در مرتبه چهارم ارائه می‌دهد.

۴.۰.۴ همگرایی روش

برای بررسی پایداری و همگرایی روش عددی در حل معادلات دیفرانسیل، از شرط CFL^۲ [۳۵] استفاده می‌کنیم. این شرط به شکل زیر بیان می‌شود:

$$|F_x(u) \frac{\Delta t}{\Delta x}| \leq c, \quad (13.4)$$

که در آن $C = |F_x(u) \frac{\Delta t}{\Delta x}|$ عدد کورانت^۳ است. در تعریف فوق c یک کران مشخص برای روش عددی موردنظر است که در اینجا ۱ در نظر گرفته می‌شود. این شرط برای سیستم‌های قانون بقا به صورت زیر تعریف شده است:

$$u_t + F_x(u) = 0. \quad (14.4)$$

شکل گسسته شرط CFL به شکل زیر می‌باشد،

$$\Delta t \leq c \cdot \min_j \frac{\Delta x}{|F_x(u_j^n)|}, \quad 0 < c < 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t, \quad (15.4)$$

که در آن u_j^n مقدار عددی حاصل برای u در نقطه x_j و زمان t_n است. بنابراین، اگر شرط فوق در روش ما برقرار باشد، این روش همگرا خواهد بود.



قضیه ۱.۰.۴. شرط CFL در روش اسپکترال با بکارگیری فیلتر با کرنل دلتا برقرار است. اثبات: با استفاده از تعاریف فوق و شکل گسسته روش داریم،

$$\begin{aligned} F_x(u_j^n) &= \left(\sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{\partial \delta_{\Delta, \alpha}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right) (2u(x_j, t) - 1) \\ &= \left(\sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \delta_{\alpha, \Delta}^{(1)}(x_j) u(x_k, t) \right) (2u(x_j, t) - 1), \end{aligned} \quad (۱۶.۴)$$

همچنین، با توجه به تابع تراکم u داریم [۲۹]،

$$0 \leq u_j^n \leq 1 \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq N} |2u_j^n - 1| \leq 1, \quad (۱۷.۴)$$

بنابراین:

$$\max_j |F_x(u_j^n)| \leq \max_j \left| \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{\partial \delta_{\Delta, \alpha}^{(1)}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right|, \quad (۱۸.۴)$$

$$\leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \max_j \left| \frac{\partial \delta_{\Delta, \alpha}^{(1)}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right|, \quad (۱۹.۴)$$

$$(۲۰.۴)$$

$$= \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \max_j \left| \frac{\cos(\frac{\pi x}{\Delta}) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{x} - \frac{\sin(\frac{\pi x}{\Delta}) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{\pi x^2 \Delta} - \frac{\sin(\frac{\pi x}{\Delta}) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{\frac{\pi \alpha^2}{\Delta}} \right| |u(x_k, t)|.$$

چون $0 \leq u \leq 1$ بنابراین

$$(۲۱.۴)$$

$$\begin{aligned} \max_j |F_x(u_j^n)| &\leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \max_j \left| \frac{\cos(\frac{\pi(x_j - x_k)}{\Delta}) e^{\frac{-(x_j - x_k)^2}{2\alpha^2}}}{(x_j - x_k)} - \frac{\sin(\frac{\pi(x_j - x_k)}{\Delta}) e^{\frac{-(x_j - x_k)^2}{2\alpha^2}}}{\pi(x_j - x_k)^2 \Delta} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin(\frac{\pi(x_j - x_k)}{\Delta}) e^{\frac{-(x_j - x_k)^2}{2\alpha^2}}}{\frac{\pi \alpha^2}{\Delta}} \right|, \end{aligned}$$



چون $\Delta = \Delta x$

$$\max_j |F_x(u_j^n)| \leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{\max_j |e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}}|}{\Delta x} + \frac{\max_j |e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}}|}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{\max_j |e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}}|}{\frac{\pi\alpha^2}{\Delta x}}. \quad (22.4)$$

چون $e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}} \leq 1$

$$\begin{aligned} \max_j |F_x(u_j^n)| &\leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{1}{\frac{\pi\alpha^2}{\Delta x}} \\ &= (M-1) \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{1}{\frac{\pi\alpha^2}{\Delta x}} \right), \end{aligned} \quad (23.4)$$

بنابراین

$$\max_j |F_x(u_j^n)| \leq (M-1) \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{1}{\frac{\pi\alpha^2}{\Delta x}} \right), \quad (24.4)$$

با توجه به اثبات فوق، در این روش همواره می توان Δt را کوچکتر از $c \cdot \min_j \frac{\Delta x}{|F_x(u_j^n)|}$ انتخاب کرد. بنابراین، در این حالت شرط CFL برقرار می شود و روش با این انتخاب همگرا خواهد بود.

تحلیل همگرایی برای تکنیک های مبتنی بر جابجایی، هم از لحاظ ریاضی و هم عددی، به خوبی در ادبیات علمی بررسی شده است. مطالعات مختلفی به صورت دقیق این روش ها و نیازمندی های آنها از نظر نرمی را مورد بررسی قرار داده اند. به ویژه، مطالعات ذکر شده در [۲۷، ۲۸، ۶۰، ۶۲، ۶۷-۶۵] پایه ای محکم برای همگرایی این روش ها فراهم کرده اند.



۵.۰.۴ مثال‌ها حل شده عددی

در این بخش، معادلات مدل ترافیکی زیر را حل می‌کنیم. در مثال زیر، خطای باقیمانده L_2 را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

(۲۵.۴)

$$E(t_n) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N R_j(n)^2}, \quad R_j(n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F(u_{j+1}) - F(u_j)}{\Delta x},$$

برای $n = 1, \dots, N_t$ و $j = 1, \dots, N$,

برای اطمینان از خوش‌وضع^۱، روش خود را با کارهای قبلی در حل مسائل پیچیده‌تر مقایسه می‌کنیم. منابعی مانند [۶۵] و [۵۰] پایه محکمی برای تحلیل خوش‌وضع به‌ویژه در زمینه پدیده‌های لایه مرزی و راه‌حل‌های داخلی که از چارچوب‌های ریاضی مشابه حاصل می‌شوند، ارائه می‌دهند. ما از روش‌های مشابهی برای تحلیل خوش‌وضع مدل خود استفاده کرده‌ایم.

نتایج همگرایی عددی ارائه شده با تحلیل‌های همگرایی که در منابع [۵۱] و [۵۲] مورد بحث قرار گرفته‌اند، همخوانی دارند؛ جایی که نرخ همگرایی عددی در هر دو نرم L_2 و نرم بیشینه به‌طور گسترده بررسی شده است. به‌ویژه، این منابع بینش‌های ارزشمندی را درباره رفتار روش‌های عددی در ریاضیات کاربردی فراهم می‌کنند که از آن‌ها برای افزایش دقت تحلیل خود استفاده کرده‌ایم. در این رساله، از چندین تحقیق که به بررسی همگرایی مسائل دارای لایه‌های ابتدایی یا مرزی می‌پردازند، بهره برده‌ایم. این بررسی‌ها برای درک رفتار راه‌حل‌هایی که مشتقات کراندار دارند اما لایه‌های داخلی را نشان می‌دهند. به‌ویژه، به منابع [۵۵-۵۳، ۶۰، ۸۰] اشاره داریم که به مسائل مربوط به همگرایی در مسائل دارای این ویژگی‌ها می‌پردازند.

۶.۰.۴ مثال ۱: مدل ترافیکی LWR با جواب تحلیلی

مدل ترافیکی LWR زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi(u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, \\ u(0, t) = 0 \end{cases}, \quad (26.4)$$

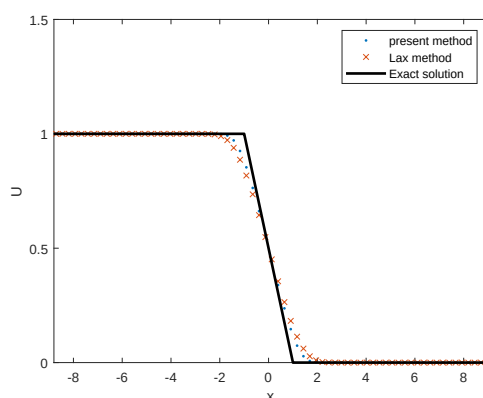


فرض می‌کنیم $\Psi(u) = uv$ با $u_{max} = 1, v_{max} = 1$ بر اساس فرمول گرین‌شیلد، داری $v = v_{max}(1 - u/u_{max})$ در این حالت، راه‌حل دقیق به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x/t \leq \Psi'(0), \\ 1/2 u_{max}(1 - \frac{x}{t u_{max}}), & \Psi'(1) \leq x/t < \Psi'(0), \\ 0, & x/t \geq \Psi'(0). \end{cases} \quad (27.4)$$

با در نظر گرفتن $\alpha = r.\beta, \Delta_0 = L/N, M = 32$ و استفاده از روش فیلتر طیفی و حل در زمان $c = 1/2, r = 1/2, L = 20, \Delta t^n = \Delta x^n/10, N = 500, t = 1$

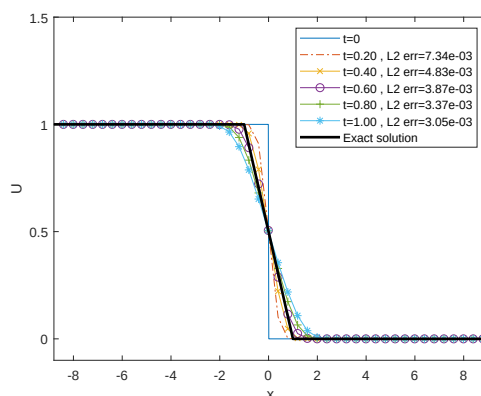
شکل ۱.۴ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک را با استفاده از روش فیلتر تطبیقی برای چگالی نمایش می‌دهد. شکل ۲.۴ روش حاضر را با روش‌های لاکس-فریدریشز و حل دقیق مقایسه می‌کند. در این مثال، طرف راست معادله ۲۴.۴ برابر با ۶۱۴۱ است. شرط کرانت عددی حداقل به صورت $c \frac{\Delta x_j}{\min_j F_u(u_j^n)} = 1.24e - 01$ بیان شده است. در جدول ۱.۴ خطای باقیمانده $L2$ روش حاضر را با روش لاکس-فریدریشز مقایسه کرده‌ایم و خطای $L2$ روش حاضر نسبت به حل دقیق برابر $5.4327e - 03$ است.



شکل ۱.۴: حل مدل جریان ترافیک با روش حاضر برای چگالی نسبت به مکان در زمان $t = 1$ در مثال ۱.

۷.۰.۴ مثال ۲: مدل ترافیکی مقایسه با CLAWPACK

مثال زیر فرض می‌کند که یک بزرگراه یک‌طرفه داریم که در آن هدف، محاسبه چگالی خودروها است [۳۵]. در اینجا، چگالی می‌تواند ۰ باشد که نشان‌دهنده فضای خالی است یا ۱، زمانی که خودروها پشت سر هم قرار گرفته‌اند. فرض می‌کنیم که خودروها با سرعت مجاز در حال حرکت هستند. تابع $u(x, t)$ نمایانگر چگالی در زمان t است. می‌توانیم از یک سیستم قوانین بقای غیرخطی



شکل ۲.۴: مقایسه روش رساله با روش لکس.

present method L2 error	Lax method L2 error	t times
7.3423e-03	2.8532e-02	0.2
4.8342e-03	3.4245e-01	0.4
3.8798e-02	2.2576e-01	0.6
3.3742e-02	1.1792e-01	0.8
3.0574e-02	2.1101e-01	1

جدول ۱.۴: مقایسه خطاهای باقی مانده $L2$ و زمان های محاسباتی با استفاده از روش حاضر و روش لاکس برای مثال ۱.

استفاده کرده و این مدل را با دنبال کردن یک معادله دیفرانسیل جزئی با مقدار اولیه گاوسی فرموله کنیم.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u(1-u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = 0.25 + 0.7e^{-0.01x^2}, \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (28.4)$$

با در نظر گرفتن $\alpha = r\Delta$, $\Delta = L/N$, $M = 32$ و استفاده از روش فیلتر طیفی و حل در زمان $c = 1/2$, $r = 1/2$, $L = 65$, $\Delta t = \Delta x/10$, $N = 500$, $t = 25$.

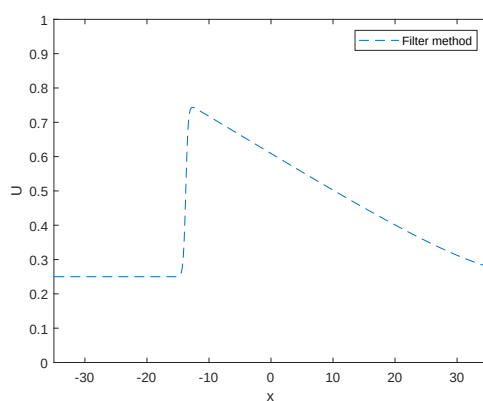
شکل ۳.۴ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک را با روش فیلتر برای چگالی نمایش می دهد. شکل ۴.۴ با استفاده از نرم افزار CLAWPACK تهیه شده است [۳۵]. در این مثال، طرف راست معادله ۲۴.۴ برابر با ۵۰۳۵ است. حداقل شرط کرانت عددی به صورت $c \frac{\Delta x}{\min_j F_u(u_j^n)} = 1.89e - 01$ است. در جدول ۲.۴، خطای باقی مانده $L2$ روش حاضر را با روش لاکس مقایسه کرده ایم [۳۳]. حداکثر خطای $L2$ برای روش حاضر برابر با $1.90e^{-01}$ در زمان $t = 13$ و برای روش لاکس برابر



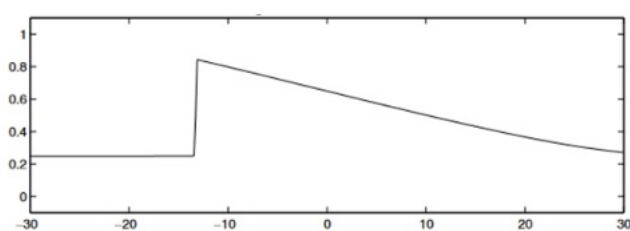
present method	Lax method	time
6.95e-04	7.30e-04	0.03
5.95e-02	3.40e-01	6.50
1.90e-01	1.28e+00	13.00
7.03e-02	3.49e-01	19.50
3.40e-02	3.58e-02	25.00

جدول ۲.۴: مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش حاضر و روش لاکس برای مثال ۲.

با 1.28 در زمان $t = 13$ است.



شکل ۳.۴: حل مدل جریان ترافیک با روش حاضر برای چگالی نسبت به مکان در زمان $t = 25$ در مثال ۲.



شکل ۴.۴: نمودار فوق با استفاده از نرم‌افزار CLAWPACK تهیه شده است.



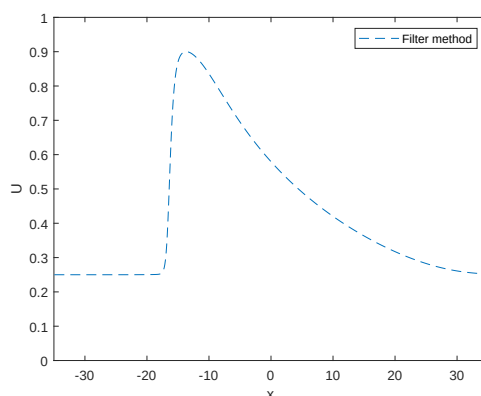
۸.۰.۴ مثال ۳: پیش بینی پیش بینی آینده

برای مثال دوم، ما در حال کار بر روی مدل ترافیک هستیم که بر اساس روش پیش بینی جلو [۶۴] اصلاح شده است، که به شرح زیر می باشد:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{e^{-u} \partial(u(1-u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = 0.25 + 0.7e^{-0.01x^2}, \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (29.4)$$

با در نظر گرفتن $M = 32$ ، $\Delta = L/N$ ، $\alpha = r \cdot \Delta$ و استفاده از روش فیلتر طیفی و حل در زمان $t = 25$ ، $N = 500$ ، $\Delta t = \Delta x/10$ ، $L = 65$ ، $r = 1/2$ ، $c = 1/2$.

شکل ۵.۴ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک را با استفاده از روش حاضر برای چگالی نمایش می دهد. در این مثال، طرف راست معادله ۲۴.۴ برابر با ۵۰۳۵ است. حداقل شرط کرانت عددی به صورت $c \frac{\Delta x}{\min_j F_u(u_j^n)} = 1.09e - 01$ است. جدول ۳.۴ خطای باقی مانده $L2$ روش حاضر را با روش لاکس مقایسه می کند. حداکثر خطای $L2$ برای روش حاضر برابر با $1.31e^{-02}$ در زمان $t = 25$ و برای روش لاکس برابر با $1.37e^{-01}$ در زمان $t = 25$ است.



شکل ۵.۴: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر، چگالی در مقابل مکان در زمان $t = 25$ در مثال ۳

۹.۰.۴ مثال ۴: پیش بینی آینده اصلاح شده

برای مثال سوم، ما در حال کار بر روی مدل ترافیکی هستیم که بر اساس روش پیش بینی جلو اصلاح شده است، که به شرح زیر می باشد [۲۹]:



present method	Lax method	time
2.09e-04	2.20e-04	0.03
3.71e-04	9.10e-03	6.50
2.07e-03	1.01e-01	13.00
9.01e-03	5.92e-01	19.50
1.31e-02	1.37e-01	25.00

جدول ۳.۴: مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش حاضر و روش لاکس برای مثال ۳.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V_m \frac{e^{-u} \partial(u(1-u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 & 4 < x < 6, \\ 0 & \text{else}, \end{cases} \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

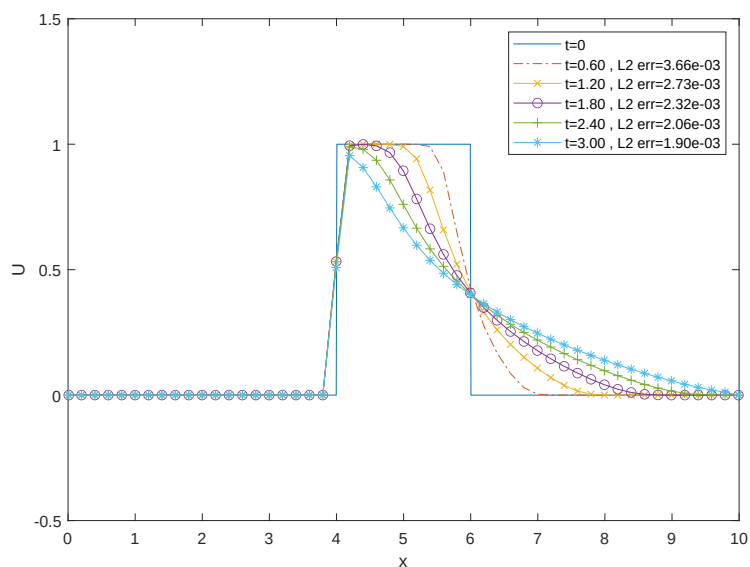
با در نظر گرفتن $M = 32$ ، $\Delta = L/N$ ، $\alpha = r \cdot \Delta$ و استفاده از روش فیلتر طیفی، و حل در زمان $t = 1$ و $V_m = 2$ که بیشترین سرعت ممکن است، $N = 500$ ، $\Delta t = \Delta x/10$ ، $L = 10$ ، $c = 1/2$ ، $r = 1/2$.

شکل ۶.۴ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک را با استفاده از روش حاضر برای چگالی نمایش می‌دهد. شکل ۷.۴ حل مدل جریان ترافیک را با استفاده از روش CU [۲۹] نشان می‌دهد. شکل ۶.۴ همچنین حل‌های عددی به‌دست‌آمده از طریق روش‌های فیلتر و CU را نشان می‌دهد. مقدار خطای این روش در حل این مدل بر اساس خطای $L2$ از خطای روش مرجع [۲۹] کمتر است. جدول ۴.۴ این مقایسه را نشان می‌دهد.

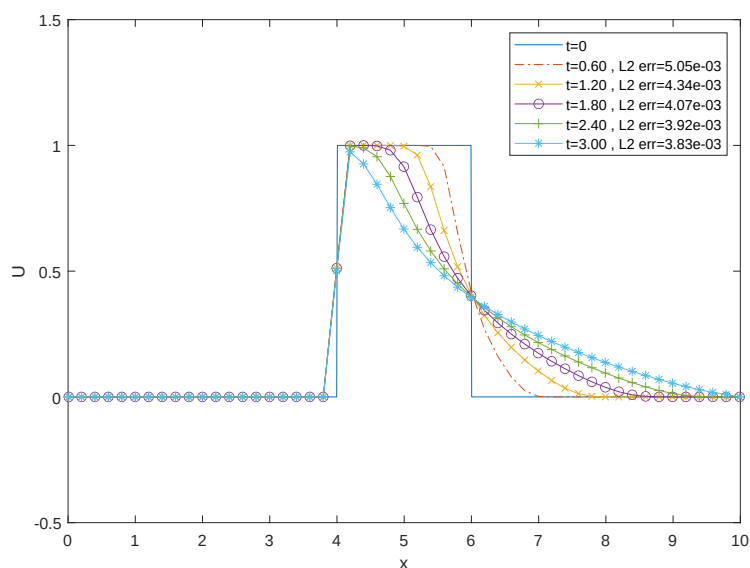
حداکثر خطای $L2$ برای روش حاضر برابر با $3.66e^{-03}$ در زمان $t = 0.6$ و برای روش CU برابر با $5.05e^{-03}$ در زمان $t = 0.6$ است.

در این مثال، طرف راست معادله ۲۴.۴ برابر با 10071 می‌باشد. حداقل شرط کرانت عددی به‌صورت

$$c \frac{\Delta x}{\min_j F_u(u_j^n)} = 1.13e - 02.$$



شکل ۴.۶: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر، چگالی در مقابل مکان در مثال ۴

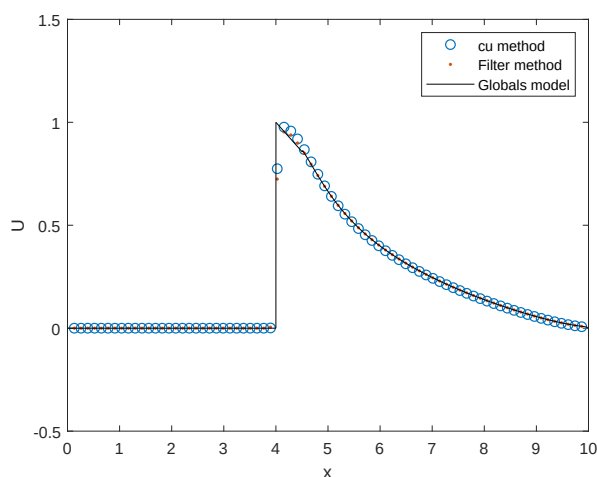


شکل ۴.۷: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش CU برای چگالی نسبت به موقعیت در مثال ۴.

۱۰.۰.۴ مثال ۵ معادله بورگر

برای مثال پنجم ما از این روش بر روی معادلات غیرترافیکی استفاده می‌کنیم، معادله بورگر که بر اساس روش پیش‌بینی جلو اصلاح شده است، به شرح زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} + u \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \sin(\pi x), \\ u(0, t) = 0, u(0, 1) = 0, \end{cases} \quad (31.4)$$



شکل ۸.۴: حل‌های عددی به‌دست‌آمده از طریق روش‌های فیلتر و CU برای چگالی نسبت به موقعیت در مثال ۴.

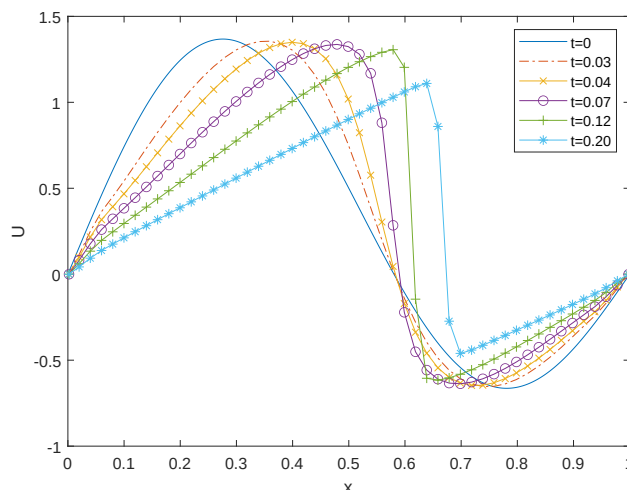
present method	CU method	time
3.66e-03	5.05e-03	0.6
2.73e-03	4.34e-03	1.2
2.32e-03	4.04e-03	1.8
2.06e-03	3.92e-03	2.4
1.90e-03	3.83e-03	3

جدول ۴.۴: مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش حاضر و روش لاکس برای مثال ۴.

با در نظر گرفتن $M = 32$, $\Delta = L/N$, $\alpha = r * \Delta$ و استفاده از روش فیلتر طیفی، و حل در زمان $t = 1$, $N = 500$, $\Delta t = \Delta x/10$, $L = 1$, $\epsilon = 0.00001$, $r = 1/2$ ، برای $c = 1/2$. شکل ۹.۴ حل معادله بورگر را با استفاده از روش حاضر نشان می‌دهد. جدول ۵.۴ حداکثر خطای $L2$ برای روش حاضر را برابر با $2.13e^{-01}$ در زمان $t = 0.2$ و برای روش لاکس برابر با $8.67e^{-01}$ در زمان $t = 0.2$ نشان می‌دهد.

present method	Lax method	time
2.13e-01	1.95e-01	0.2
8.05e-02	1.03e-01	0.4
4.01e-02	1.57e-01	0.6
2.94e-02	1.08e-01	0.8
2.17e-02	8.67e-01	1.0

جدول ۵.۴: مقایسه خطاهای باقی‌مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش حاضر و روش لاکس برای مثال ۵.



شکل ۹.۴: حل معادله بورگر با استفاده از روش حاضر برای چگالی نسبت به موقعیت در مثال ۵.

۱۱.۰.۴ مثال ۶ آرامش بخشی: LWR

در این مدل، ما بر روی یک جمله آرامش^۱ در مدل‌های جریان ترافیک لایت‌هیل-ویثام-ریچاردز (LWR) یا آو-راسکل-ژانگ^۲ کار می‌کنیم [۷۰]، که به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(f(u))}{\partial x} = \alpha(u_{eq} - u), \\ u(x, 0) = 0.1 + e^{-(x-5)^2}, \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (32.4)$$

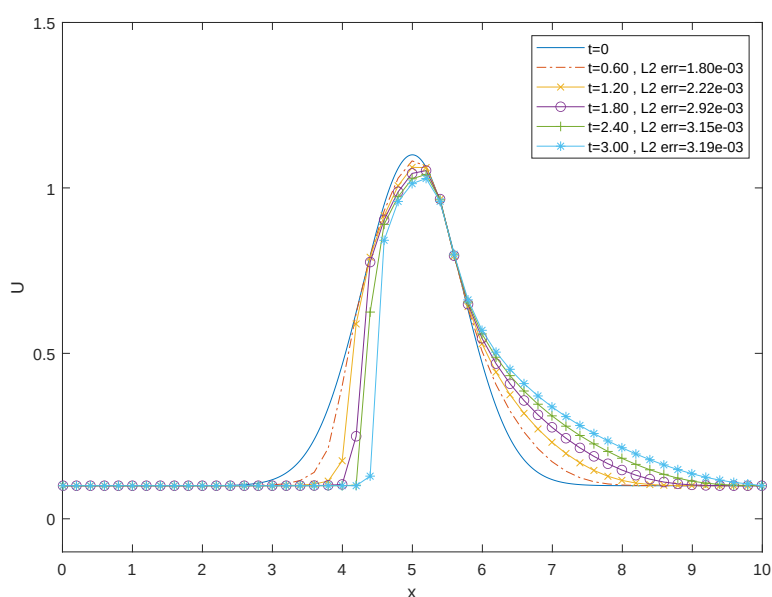
که در آن u نمایانگر چگالی ترافیک، t زمان، x مختصات مکانی، $f(\cdot)$ تابع جریان ترافیک، α پارامتر آرامش و u_{eq} چگالی تعادلی است. تابع جریان ترافیک می‌تواند به صورت زیر انتخاب شود:

$$f(u) = u(1 - u), \quad (33.4)$$

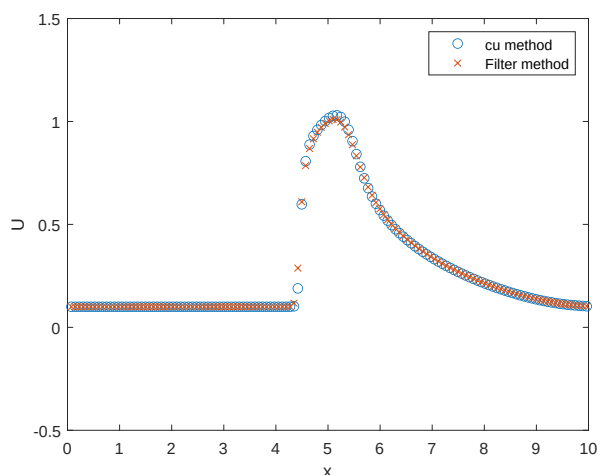
این تابع جریان یک فرم ساده‌شده از جریان ترافیک بر اساس چگالی u را نشان می‌دهد، جایی که نرخ جریان حاصل ضرب چگالی u و سرعت جریان آزاد $(1 - u)$ است. با در نظر گرفتن $M = 32$ ، $N = 500$ ، $t = 1$ و استفاده از روش فیلتر طیفی، و حل معادله در زمان $t = 1$ ، $\Delta = L/N$ ، $\alpha = r \cdot \Delta$ ، $c = 1/2$ ، $r = 1/2$ ، $L = 10$ ، $\Delta t = \Delta x/10$ و $u_{eq} = 0.8$ ، شکل ۱۰.۴ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر برای چگالی را نمایش می‌دهد. شکل ۱۱.۴ حل‌های عددی به دست آمده توسط روش‌های فیلتر و CU را نشان می‌دهد. در این مدل، مقدار خطای این روش بر اساس خطای $L2$ از خطای روش مرجع کمتر است. در این مثال،



عبارت سمت راست معادله ۲۴.۴ برابر با ۹۸۳۵ است. شرط حداقل کوندورانت عددی به صورت $c \frac{\Delta x}{\min_j F_u(u_j^n)} = 2.57e - 02$ می باشد. در جدول ۶.۴، خطای باقی مانده $L2$ روش حاضر با روش CU مقایسه شده است. جدول ۶.۴ نشان می دهد که حداکثر خطای $L2$ برای روش حاضر برابر با $3.19e^{-03}$ در زمان $t = 1.0$ است، در حالی که برای روش CU این مقدار $3.21e^{-03}$ در زمان $t = 0.1$ است.



شکل ۱۰.۴: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر، چگالی در مقابل مکان در زمان $t = 1$ در مثال ۶.



شکل ۱۱.۴: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش CU، چگالی در مقابل مکان در مثال ۶.



present method	CU method	time
1.8e-03	1.95e-03	0.2
2.22e-03	2.23e-03	0.4
2.92e-03	3.01e-03	0.6
3.15e-03	3.18e-03	0.8
3.19e-03	3.21e-03	1.0

جدول ۶.۴: مقایسه خطاهای باقی مانده $L2$ و زمان‌های محاسباتی با استفاده از روش حاضر و روش لاکس برای مثال ۶

۱۲.۰.۴ نتیجه‌گیری‌ها

در این روش، به مسئله جریان ترافیک که توسط معادلات دیفرانسیلی ارائه شده توسط سوپاساکیس و کاتسولاکیس در سال ۲۰۰۶ مدل‌سازی شده و سپس توسط کورگانوف و پولیزی در سال ۲۰۰۹ اصلاح شده است، پرداخته‌ایم. با استفاده از فیلترهای DSC در روش طیفی، به طور مؤثری امواج شوک در فرآیند محاسباتی کاهش یافته است. این فیلترها بهبود قابل توجهی در پایداری روش طیفی، به ویژه در بازه‌های زمانی طولانی‌تر، نشان داده‌اند. استفاده از طرح رانگه-کوتای مرتبه چهارم در بُعد زمانی، استحکام این پیاده‌سازی را افزایش داده است.

پیاده‌سازی این روش به دلیل پیچیدگی محاسباتی پایین و هزینه کم، در عین حال با انعطاف‌پذیری بالا، بسیار مقرون به صرفه است. قابلیت تنظیم پارامترهای این روش به ما امکان می‌دهد که طیف وسیعی از معادلات را به طور موفقیت‌آمیز حل کنیم. برای اثبات کارآمدی این روش، تحلیل مقایسه‌ای با سایر روش‌ها در مثال‌های عددی مختلف انجام داده‌ایم. نتایج نشان می‌دهند که روش ما به طور مداوم خطاهای کمتری نسبت به روش‌های جایگزین ارائه شده در این رساله دارد. این موضوع نشان می‌دهد که رویکرد ما به طیف وسیعی از مسائل جریان ترافیک که با معادلات دیفرانسیلی مدل‌سازی شده‌اند، به خوبی قابل اعمال است.

علاوه بر این، شایان ذکر است که این روش به راحتی می‌تواند به ابعاد بالاتر گسترش یابد و برای حل مسائل پیچیده‌تر مناسب باشد. به عنوان مثال، پیاده‌سازی از طریق تکنیک‌های شبه‌طیفی فوری، کاهش بیشتری در نوسانات ارائه می‌دهد. همچنین روش‌های دیگری نیز وجود دارند، مانند استفاده از نقاط میانی فیلتر که وضوح بالاتری را به ارمغان می‌آورند. در آینده، تحقیقات بیشتری می‌تواند بر روی بهبود این روش برای افزایش دقت و کاهش هزینه‌های محاسباتی متمرکز شود. پتانسیل تطبیق و اصلاح این روش برای مجموعه وسیع‌تری از سناریوهای جریان ترافیک، افق امیدبخشی برای پژوهش‌های آتی به حساب می‌آید.

فصل ۵

حل عددی معادلات غیر خطی چگالی جریان ترافیک با استفاده از روش‌های central-upwind schemes و بکارگیری فیلتر

این رساله به بررسی روشی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبط با ترافیک می‌پردازد که توسط سوپاساکیس^۱ و کاتسولاکیس^۲ مدل‌سازی شده‌اند. این مدل براساس مدلی اصلاح شده که در سال ۲۰۰۹ توسط کورگانوف^۳ و پولیزی^۴ پیشنهاد شده بود و بر اساس قانون تبدیل تغییر یافته است. به طور معمول، روش‌های عددی برای حل این نوع معادلات دیفرانسیل، مانند روش طیفی، شوک‌هایی ایجاد می‌کنند که باعث افزایش خطا در فرایند حل می‌شود و نتیجه را از حل واقعی دور می‌کند. در این رساله، روشی پیشنهاد می‌شود که این شوک‌ها را کنترل و کاهش می‌دهد. در اینجا، ما روش‌های بالادست مرکزی^۵ را اصلاح می‌کنیم. در این روش با استفاده از فیلترهای هم‌تراز گسسته^۶، به یک راه‌حل برای این نوع معادلات دیفرانسیل می‌رسیم که خطای کمتری نسبت به روش بالادست مرکزی و روش لکس^۷ دارد. در نهایت، تعدادی مثال عددی از این نوع معادلات و مدل‌ها را با این روش حل کرده و مقدار خطای آن را با روش‌های لکس و بالادست مرکزی مقایسه می‌کنیم. مشاهده می‌شود که خطای این روش کمتر از دو روش ذکر شده است.

۱.۰.۵ مقدمه

هدف اصلی این رساله توسعه روش‌های عددی قابل اعتماد و مقاوم برای یک مدل جدید جریان ترافیک قطعی است که اخیراً در [۷۲] معرفی شده است. همچنین، تغییرات واقع‌بینانه‌تری از این مدل مورد بررسی قرار می‌گیرد و با استفاده از طراحی‌های مختلف مطالعه می‌شود. تمرکز این رساله بر روی روش طیفی همراه با یک فیلتر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان است که معمولاً با حضور موج‌های شوک پیچیده می‌شود. یکی از مثال‌های این نوع معادلات، معادله برگرز^۸ است که در آن در طی فرایند حل عددی به نقاط شوک می‌رسیم. این شوک‌ها در طول زمان و در

Lax^۱ Discrete Singular Convolution^۶ Central-Upwind Schemes^۵ Polizzi^۴ Kurganov^۳ Katsoulakis^۲ Sopasakis^۱
Burgers' equation^۸



فرآیند حل نسبت به نتیجه نهایی حرکت می‌کنند.

معمولاً دو روش در این فرآیند استفاده می‌شود: فیلتر کردن جریان ترافیک و کاهش موجک‌ها در روش طیفی. زیرا روش‌های طیفی دقت و کارایی خوبی نسبت به سایر روش‌ها در حل عددی معادلات دیفرانسیل دارند. استفاده از قوانین پایستگی در سیستم‌های غیرخطی هذلولوی به صورت زیر:

$$u_t + g_x(u) = 0, \quad (۱.۵)$$

با شرایط اولیه در $t = 0$ با:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (۲.۵)$$

معمولاً این معادلات راه‌حل تحلیلی ندارند، بنابراین برای حل آن‌ها از روش‌های عددی مانند روش طیفی استفاده می‌کنیم. گاهی اوقات استفاده از روش‌های طیفی مستقیم باعث ایجاد نوساناتی می‌شود که پاسخ را از مقدار واقعی آن دور می‌کند (شوک). همان‌طور که گاتلیب^۱ [۱۵] اشاره کرده است، انتظار می‌رود روش‌های طیفی ویژگی‌ها و ساختارهای جزئی جریان ترافیک را به خوبی شناسایی و توصیف کنند. هدف اصلی این روش حل نوسانات گیبس^۲ است که نرخ همگرایی را بهبود می‌بخشد. راه‌های زیادی برای حذف شوک در این مسئله وجود دارد، مانند روش وزن‌گذاری غیرنوسانی. دقت یا موفقیت این نوع روش‌های کاهش شوک به میزان خطا در فرآیند حل بستگی به ویسکوزیته^۳ آن نسبت به میانگین محلی دارد. روش‌های طیفی به‌طور اصولی منجر به حداقل پراکندگی عددی هنگام تقریب مشتقات می‌شوند. در هنگام محاسبه مشتقات در روش طیفی، در صورت وجود ناپیوستگی، نوسانات و شوک‌های زیادی ایجاد می‌شود. باید راه‌هایی برای کاهش و کنترل آن‌ها پیدا کنیم، که دو روش وجود دارد: یکی روش ارائه شده توسط تدمر^۴ [۶۸] و دیگری این روش. اکثر فیلترهایی که ایجاد می‌شوند، در حال حاضر در روش‌های طیفی استفاده می‌شوند. حسینی و همکاران [۲۲] فیلترهای طیفی رایج، مانند فیلتر لانچوز^۵، فیلتر کسینوسی^۶ افزایش یافته، فیلتر کسینوسی^۷ افزایش یافته تیز و فیلتر قطع^۸ را فهرست کرده‌اند. فیلترهای مختلف و مؤثرتری در زمینه فیلتر p وجود دارد [۷۲]، همچنین برای کاربردهای بیشتر فیلترها به [۴۷، ۱۲] مراجعه کنید.

ما از این فیلترها در طرح‌های مرکزی بر اساس انتگرال‌گیری از قوانین حفاظتی بر روی حجم‌های کنترل زمان-مکان استفاده می‌کنیم. بنابراین، طرح‌های مرکزی می‌توانند به مسائل قابل حل با مسئله

cutoff filter^۸ raised cosine filter^۷ cosine filter^۶ Lanczos^۵ Tadmor^۴ viscosity^۳ Gibbs fluctuations^۲ Gottlieb^۱



موجی گسترش یابند. طرح مرتبه اول لکس-فریدریشز^۹ [۹] یک نمونه ابتدایی از طرح‌های مرکزی است. این احتمالاً جهانی‌ترین روش عددی برای معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان است، اما وضوح آن بسیار پایین است. کارایی طرح LXF در [۴۴] بهبود یافته است، جایی که یک طرح مرکزی مرتبه دوم، طرح نسیاو^{۱۰} -تدمار NT^{۱۱}، با استفاده از بازسازی چندجمله‌ای مرتبه دوم در چارچوب LXF مرکزی ساخته شده است.

روش عددی در طرح NT می‌تواند تغییر کند اگر حجم‌های کنترلی در هر رابط سلولی به‌طور متناسب با سرعت انتشار در نظر گرفته شوند. این کار در [۳۰-۳۲] انجام شده است که یک کلاس جدید از طرح‌های مرکزی، یعنی روش بالادست مرکزی^۱ معرفی کرده است. روش‌های CU از یک شبکه نیمه‌گسسته استفاده نمی‌کنند و یک فرم نیمه‌گسسته ساده دارند. همچنین به دلیل مقدار کمتر اتلاف عددی، روش‌های CU می‌توانند به‌طور موفقیت‌آمیزی در مسائلی که به گام‌های زمانی کوچک و با یکپارچگی زمانی بزرگ نیاز دارند، اعمال شوند. در اینجا، در روش CU، در بخش درونی‌یابی آن، از فیلترهای مذکور استفاده می‌کنیم تا تقریب بهتری ایجاد کرده و شوک کمتری نسبت به روش اصلی داشته باشیم. در ادامه بحث، این فیلترها در روش‌های عددی برای حل مسائل ترافیکی به کار گرفته شده و میزان خطای آن‌ها با روش‌های دیگر مقایسه شده است.

مسئله تراکم ترافیک یکی از مشکلات رو به رشد در سراسر جهان است که تأثیر زیادی بر اقتصاد، ایمنی و محیط‌زیست دارد. بنابراین، با حل این مشکل، اثرات منفی تراکم ترافیک کاهش می‌یابد. پژوهشگران مدل‌های مختلفی ارائه داده‌اند که معمولاً از نظر ویژگی‌های ترافیکی به مدل‌های میکروسکوپی، مزوسکوپی و ماکروسکوپی تقسیم می‌شوند. یکی از مدل‌هایی که در فرآیند حل معادلات دیفرانسیل آن‌ها با مشکل موج یا شوک مواجه می‌شویم، معادلات دیفرانسیل جریان ترافیک است که توسط سوپاساکیس و کاتسولاکیس مدل‌سازی شده و بعدها بهبود یافته است [۳، ۳۵، ۵۹، ۶۴]. در اینجا از روش NT و CU استفاده می‌کنیم. فیلتری که در بالا ذکر شد، این امواج را در فرآیند رسیدن به پاسخ کنترل می‌کند و آن‌ها را با فیلتر DSC کاهش می‌دهد و پاسخی با خطای کم تولید می‌کند.

۲.۰.۵ نظریه و الگوریتم

اگر فرض کنیم که نقاط ما با فاصله‌های مساوی از هم قرار دارند، می‌توانیم تعریف کنیم:

$$x_j = x_0 + j\Delta x, \quad j = 1, \dots, N, \quad t_n = t_0 + n\Delta t. \quad (۳.۵)$$

ما مقدار $\bar{u}_j^n$ را به عنوان میانگین مقادیر u در بازه $[x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ در نظر می‌گیریم، که به صورت نظری به شکل زیر تعریف می‌شود:



$$\bar{u}_j^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u(x, t_n) dx. \quad (4.5)$$

به طور کلی، اگر شیب خط بین u_{j-1} و u_j را با s_j^n نشان دهیم و رابطه $\bar{u}_j^n(x) = \bar{u}_j^n + s_j^n(x - x_j)$ را در نظر بگیریم، برای محاسبه s_j^n از روش زیر برای کاهش نوسانات استفاده می‌کنیم. تقریب‌های مرتبه دوم با وضوح بالا و نوسانی برای حل‌های ناپیوسته می‌توانند شامل روش‌هایی باشند که در این فصل معرفی شده‌اند، که به معرفی راه‌حل‌های هموار کمک می‌کنند. با این حال، در صورت وجود ناپیوستگی، این روش‌ها نمی‌توانند دقت بالایی را تضمین کنند. بنابراین، رفتار در نزدیکی نقاط شکست یا ناپیوستگی می‌تواند دارای شیب زیادی باشد که منجر به نوسانات می‌شود. برای جلوگیری از این نوسانات در نزدیکی نقاط ناپیوستگی، مقدار شیب می‌تواند به یک مقدار کوچک محدود شود. روش‌هایی برای محدود کردن شیب وجود دارند و ایده‌های محدود کردن شیب توسط لیر^۱ [۳۸] مورد بررسی قرار گرفته است. هر روش کاهش تغییرات کلی یکنواختی را حفظ می‌کند. بنابراین، اگر یک موج ناپیوسته با یک روش کاهش تغییرات کلی نمایی پردازش شود، ممکن است ناپیوستگی در گام‌های زمانی بعدی باقی بماند، اما نوسان نخواهد داشت. یک انتخاب مناسب برای محاسبه شیب s_j^n ، به گونه‌ای که خاصیت کاهش تغییرات را حفظ کند، استفاده از شیب Minmod،

$$s_j^n = \text{Minmod} \left(\kappa \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x}, u^{(1)}(x), \kappa \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n}{\Delta x} \right), \quad \kappa = 1 \text{ or } 2, \quad (5.5)$$

و

$$\text{Minmod}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \begin{cases} \min_j \{\gamma_j\}, & \gamma_j > 0, \\ \max_j \{\gamma_j\}, & \gamma_j < 0, \\ 0, & \text{else,} \end{cases} \quad (6.5)$$

در اینجا، κ می‌تواند به صورت ۱ یا ۲ انتخاب شود. در مثال‌های ما، مقدار $\kappa = 1$ قرار داده شده است که منجر به باقیمانده خطاهای کمتری شده است. با گسسته‌سازی رابطه، معادله $u_t + \Psi(u)_x = 0$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{u(t_n + \Delta t_n) - u(t_n)}{\Delta t_n} \approx -\Psi(u_x) \Rightarrow$$



$$u(t_n + \Delta t_n) = u(t_n) - \Delta t_n \Psi(u_j^n)_x \quad \text{or} \quad u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t_n \Psi(u_j^n)_x. \quad (7.5)$$

به شکل زیر u_j^{n+1} را محاسبه می کنیم:

$$(8.5)$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (u_t + \Psi(u)_x) dt = 0 \Rightarrow u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n) = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u)_x dt,$$

$$\Rightarrow u(x, t_{n+1}) = u(x, t_n) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u(x, t))_x dt. \quad (9.5)$$

با انتگرال گیری روی $[x_j, x_{j+1}]$ بدست می آید

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_{n+1}) dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_n) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left(\int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u(x, t))_x dt \right) dx \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u(x, t)) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} dt. \end{aligned} \quad (10.5)$$

برای افزایش دقت محاسبات، می توانیم از مقدار میانگین $\bar{u}_j^n + \frac{1}{2}$ و $\bar{u}_j^{n+1} + \frac{1}{2}$ در بازه $[x_j, x_{j+1}]$ استفاده کنیم، رابطه به شکل زیر نوشته می شود:

$$\bar{u}_{j+1/2}^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_n) dx, \quad (11.5)$$

$$\bar{u}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_{n+1}) dx. \quad (12.5)$$

با قرار دادن آنها در روابط فوق:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \bar{u}_{j+1/2}^{n+1} &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t_n) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u(x, t)) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} dt, \\ &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \bar{u}_j^n(x) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u(x, t)) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} dt. \end{aligned} \quad (13.5)$$



از اینرو خواهیم داشت،

(۱۴.۵)

$$\Delta x \cdot \bar{u}_{j+1/2}^{n+1} = \int_{x_j}^{x_{j+\frac{1}{2}}^n} (\bar{u}_j^n + s_j^n (x - x_j)) dx + \int_{x_{j+\frac{1}{2}}^n}^{x_{j+1}} (\bar{u}_{j+1}^n + s_{j+1}^n (x - x_{j+1})) dx \\ - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u(x, t)) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} dt,$$

بنابراین،

(۱۵.۵)

$$\bar{u}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\Delta x}{2} \bar{u}_j^n + \frac{\Delta x}{2} \bar{u}_{j+1}^n + \frac{1}{2} s_j \left(\frac{\Delta x}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} s_{j+1} \left(-\frac{1}{2} (\Delta x) \right)^2 \right] \\ - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Psi(u(x, t)) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} dt.$$

با استفاده از رابطه $u \left(x_j, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \approx \bar{u}^n(x_j) + \frac{\Delta t_n}{2} u_t(x_j, t_n)$

$$\bar{u}_{j+1/2}^{n+1} = \frac{1}{2} (u_{j+1} + u_j) + \frac{1}{8} \Delta x (s_j^n - s_{j+1}^n) - \quad (۱۶.۵)$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\Psi \left(u \left(x_{j+1}, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) - \Psi \left(u \left(x_j, t^{n+\frac{1}{2}} \right) \right) \right].$$

با استفاده از رابطه $u_t + \Psi(u)_x = 0$ بدست می آید $u_t(x_j, t_n) = -\Psi(u)_x$ و تعریف s_j^n ، خواهیم داشت،

$$u_{j+1}^n = \frac{\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j+1}^n}{2} + \frac{1}{8} (\Delta x) (s_j^n - s_{j+1}^n) \\ - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Psi \left(\bar{u}_{j+1}^n + \frac{1}{2} (\Delta t) s_{j+1}^n \right) - \Psi \left(\bar{u}_j^n + \frac{1}{2} (\Delta t) s_j^n \right) \right). \quad (۱۷.۵)$$

برای محاسبه $u^{(1)}(x)$ با استفاده از فیلتر DSC، از روش‌های هموارسازی خاصی استفاده می‌کنیم

$$g(x) = (P * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x-t) f(t) dt, \quad (۱۸.۵)$$

در اینجا، $P(x)$ به عنوان هسته فیلتر ^۱ و $f(x)$ به عنوان تابع تست ^۲ در نظر گرفته می‌شود. هسته فیلتر می‌تواند اشکال مختلفی داشته باشد،



$$P(x) = \varsigma^{(s)}(x), s = 0, 1, 2, \dots \quad (19.5)$$

در رابطه‌ی بالا، s نشان‌دهنده مرتبه مشتق است. همچنین، تابع دلتا که در اینجا استفاده می‌شود، مبتنی بر تابع شانون^۱ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varsigma_{\alpha, \Delta}(x - x_k) = \frac{\sin\left(\frac{\pi(x-x_k)}{\Delta}\right)}{\frac{\pi(x-x_k)}{\Delta}} e^{-\frac{(x-x_k)^2}{2\alpha^2}}, \quad (20.5)$$

در اینجا، دو پارامتر α و Δ برای کنترل هسته‌ای که در بالا ذکر شد، استفاده می‌شوند. این هسته به ما امکان می‌دهد که توابعی مانند $u(x)$ را در نقاط گسسته $\{x_k\}_{k=-M}^M$ تقریب بزنیم.

$$u^{(s)}(x) \approx \sum_{k=-M}^M \varsigma_{\alpha, \Delta}^{(s)}(x - x_k) u(x_k), s = 0, 1, 2, \dots \quad (21.5)$$

برای $s = 0$ ، عبارت $\varsigma_{\alpha, \Delta}^{(s)}$ به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\varsigma_{\alpha, \Delta}(x) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}(x)\right)}{\frac{\pi}{\Delta}(x)} e^{-(x)^2/(2\alpha^2)}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad (22.5)$$

و برای $s = 1$ داریم

$$\varsigma_{\alpha, \Delta}^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{\Delta}(x)\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}(x)\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}}{\pi x^2 \Delta} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}(x)\right) e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}}{\frac{\pi \alpha^2}{\Delta}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (23.5)$$

در فرمول فوق، $r = \frac{\alpha}{\Delta}$ یک ضریب است که برای کنترل عملکرد فیلتر و کاهش شوک‌ها استفاده می‌شود. این ضریب به‌طور خاص برای تنظیم پهنای هسته دلتا و تنظیم فواصل گسسته در روش‌های عددی به کار می‌رود.

با استفاده از رابطه (۱۷.۵) همراه با $u^{(1)}(x)$ می‌توانیم یک روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل توسعه دهیم. این روش می‌تواند به‌طور خاص برای حل معادلات جریان ترافیک که شامل شوک‌ها و ناپیوستگی‌ها هستند، به کار رود.

^۱ Shannon function



۳.۰.۵ کاربرد در مدل‌های ترافیکی

مدل LWR: مدل لایت هیل ویتام ریچاردز LWR برای توصیف جریان ترافیک در جاده با در نظر گرفتن تراکم و سرعت متوسط وسایل نقلیه استفاده می‌شود. این مدل بر اساس اصل بقای جرم بنا شده و توسط معادله زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi(u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (24.5)$$

که در آن u نشان‌دهنده تراکم (چگالی) وسایل نقلیه است، v سرعت وسایل نقلیه و شار (یا جریان) به صورت $\Psi(u) = uv$ تعریف می‌شود. این معادله به عنوان یک قانون بقای غیرخطی شناخته می‌شود. مدل‌های مختلفی از مدل LWR در ادبیات علمی موجود است. به عنوان مثال، در [۶۹] یک تابع سرعت ساده به صورت زیر تعریف شده است:

$$v = \left(1 - \frac{u}{u_{max}}\right)v_{max}, \quad (25.5)$$

این معادله نشان می‌دهد که سرعت به صفر کاهش می‌یابد، زمانی که تراکم u به مقدار حداکثری خود u_{max} نزدیک می‌شود. برعکس، سرعت به حداکثر مقدار خود می‌رسد هنگامی که تراکم نزدیک به صفر است.

با گسسته‌سازی و اعمال روش بالا با مقادیر $u_{max} = 1, v_{max} = 1$ ، می‌توان $u_N(x, t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$u_N(x, t) = \sum_{k=-M}^M \delta_{\alpha, \Delta}(x - x_k) u(x_k, t), \quad (26.5)$$

و معادله دیفرانسیل به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$(27.5)$$

$$\frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} = \left(\sum_{k=j-M/2}^{j+M/2} \frac{\partial \delta_{\Delta, \alpha}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right) (2u(x_j, t) - 1), \quad j = 1, \dots, N.$$



حل عددی معادلات غیرخطی: برای یافتن راه حل و بررسی همگرایی این روش، از روش عددی رانگ-کوتای^۱ مرتبه چهارم استفاده می‌کنیم. این روش به ما یک دقت همگرایی در مرتبه چهارم ارائه می‌دهد.

۴.۰.۵ همگرایی روش

برای بررسی پایداری و همگرایی روش عددی در حل معادلات دیفرانسیل، از شرط CFL^۱ [۳۵] استفاده می‌کنیم. این شرط به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\left| F_x(u) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq c, \quad (28.5)$$

که در آن $C = \left| F_x(u) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right|$ عدد کورانت^۲ است. در تعریف فوق c یک کران مشخص برای روش عددی موردنظر است که در اینجا ۱ در نظر گرفته می‌شود. این شرط برای سیستم‌های قانون بقا به صورت زیر تعریف شده است:

$$u_t + F_x(u) = 0. \quad (29.5)$$

شکل گسسته شرط CFL به شکل زیر می‌باشد،

$$\Delta t \leq c \cdot \min_j \frac{\Delta x}{|\Psi_x(u_j^n)|}, \quad 0 < c < 1, \quad j = 1, \dots, N, \quad n = 1, \dots, N_t, \quad (30.5)$$

که در آن u_j^n مقدار عددی حاصل برای u در نقطه x_j و زمان t_n است. بنابراین، اگر شرط فوق در روش ما برقرار باشد، این روش همگرا خواهد بود.

در این روش، $\Psi_x(u_j^n) = s_j^n$ می‌باشد. بنابراین اگر یک حد بالایی برای s_j^n پیدا کنیم، می‌توانیم مطمئن شویم که این روش شرایط CFL را برآورده می‌کند.

قضیه ۱.۰.۵. شرط CFL در روش فوق با بکارگیری فیلتر با کرنل دلتا برقرار است.

اثبات: با استفاده از تعاریف فوق و شکل گسسته روش داریم،

چون $s_j^n = \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n}{\Delta x}$ ، $s_j^n = \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x}$ یا $s_j^n = u^{(1)}(x)$ و چون تابه چگالی است،
بنابراین:

$$\left| \frac{\bar{u}_j^n - \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{\Delta x} \quad \text{and} \quad \left| \frac{\bar{u}_{j+1}^n - \bar{u}_j^n}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{\Delta x}, \quad (31.5)$$



شرط CFL برقرار می شود اگر $\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$.
حالا حالت $s_j^n = u^{(1)}(x)$ را بررسی می کنیم،

$$\begin{aligned} \Psi_x(u_j^n) &= \left(\sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{\partial \varsigma_{\Delta, \alpha}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right) (2u(x_j, t) - 1) \\ &= \left(\sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \varsigma_{\alpha, \Delta}^{(1)}(x_j) u(x_k, t) \right) (2u(x_j, t) - 1), \end{aligned} \quad (32.5)$$

چون در اینجا u تابع چگالی [۲۹] است خواهیم داشت:

$$0 \leq u_j^n \leq 1 \Rightarrow \max_{1 \leq j \leq N} |2u_j^n - 1| \leq 1, \quad (33.5)$$

بنابراین،

$$\max_j |\Psi_x(u_j^n)| \leq \max_j \left| \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{\partial \varsigma_{\Delta, \alpha}^{(1)}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right| \quad (34.5)$$

$$\leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \max_j \left| \frac{\partial \varsigma_{\Delta, \alpha}^{(1)}(x - x_k)}{\partial x} (x_j) u(x_k, t) \right| \quad (35.5)$$

$$= \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \max_j \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{x} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{\pi x^2 \Delta} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{\Delta}\right) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}}}{\frac{\pi \alpha^2}{\Delta}} \right| \cdot |u(x_k, t)|. \quad (36.5)$$

از آنجایی که $0 \leq u \leq 1$ پس:



$$\max_j |\Psi_x(u_j^n)| \leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \max_j \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi(x_j-x_k)}{\Delta}\right) e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}}}{(x_j-x_k)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi(x_j-x_k)}{\Delta}\right) e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}}}{\pi(x_j-x_k)^2 \Delta} - \frac{\sin\left(\frac{\pi(x_j-x_k)}{\Delta}\right) e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}}}{\frac{\pi\alpha^2}{\Delta}} \right|, \quad (37.5)$$

در این روش $\Delta = \Delta x$ است، پس:

$$\max_j |\Psi_x(u_j^n)| \leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{\max_j \left| e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}} \right|}{\Delta x} + \frac{\max_j \left| e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}} \right|}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{\max_j \left| e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}} \right|}{\frac{\pi\alpha^2}{\Delta x}}. \quad (38.5)$$

چون $e^{\frac{-(x_j-x_k)^2}{2\alpha^2}} \leq 1$ بنابراین،

$$\begin{aligned} \max_j |\Psi_x(u_j^n)| &\leq \sum_{k=j-M/2, k \neq j}^{j+M/2} \frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{1}{\frac{\pi\alpha^2}{\Delta x}} \\ &= (M-1) \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{1}{\frac{\pi\sigma^2}{\Delta x}} \right), \end{aligned} \quad (39.5)$$

پس،

$$\max_j |\Psi_x(u_j^n)| \leq (M-1) \left(\frac{1}{\Delta x} + \frac{1}{\pi(\Delta x)^3} + \frac{1}{\frac{\pi\sigma^2}{\Delta x}} \right) \text{ and } \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1, \quad (40.5)$$

بنابراین، از آنجایی که مقدار موجود در سمت راست معادله قابل محاسبه است، این روش همگرا می باشد.



۵.۰.۵ مثال‌ها حل شده عددی

در این بخش، معادلات مدل ترافیکی زیر را حل می‌کنیم. در مثال زیر، خطای باقیمانده L_2 را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

(۴۱.۵)

$$E(t_n) = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N R_j(n)^2}, \quad R_j(n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{F(u_{j+1}) - F(u_j)}{\Delta x},$$

برای $n = 1, \dots, N_t$ و $j = 1, \dots, N$,

۶.۰.۵ مثال ۱

در این مثال، یک جاده یک‌طرفه در نظر گرفته شده است که در آن چگالی وسایل نقلیه مطلوب است [۳۵]. در اینجا، چگالی می‌تواند برابر با ۰ باشد که به معنای فضای خالی است یا ۱ زمانی که اتومبیل‌ها به صورت صف ایستاده‌اند. در این مدل فرض می‌شود که اتومبیل‌ها با سرعت مجاز حرکت می‌کنند. تابع $u(x, t)$ نشان‌دهنده چگالی در زمان t است.

ما می‌توانیم این مدل را با استفاده از یک سیستم از قوانین حفاظت غیرخطی فرموله کنیم که معادله دیفرانسیل جزئی PDE با یک مقدار اولیه گوسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

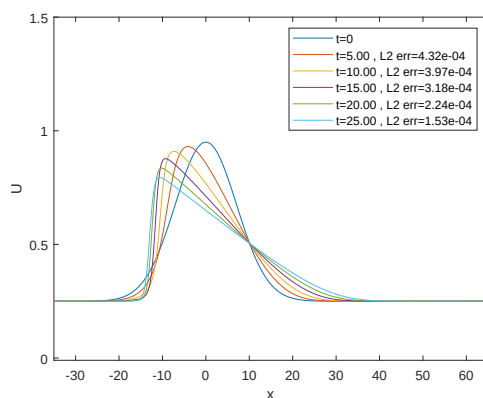
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u(1-u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = 0.25 + 0.7e^{-0.01x^2}, \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (۴۲.۵)$$

با $\sigma = r \cdot \Delta$ ، $\Delta = L/N$ ، $M = 32$ و استفاده از روش فیلتر اسپکترال و حل در زمان $t = 25$ ، $c = 1/2$ ، $r = 1/2$ ، $L = 65$ ، $\Delta t = \Delta x/10$ ، $N = 500$.

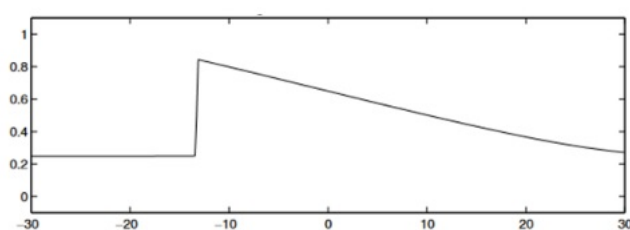
شکل ۱.۵ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک با استفاده از روش فیلتر برای چگالی را نمایش می‌دهد. شکل ۲.۵ با استفاده از نرم‌افزار CLAWPACK، [۳۵] تهیه شده است و شکل ۳.۵ چگالی و انباشتگی چگالی در طول زمان را نشان می‌دهد. در این مثال، سمت راست معادله ۴۰.۵ برابر با $c \frac{\Delta x}{\min_j \Psi_u(u_j^n)} = 1.71e - 01$ است.

۷.۰.۵ مثال ۲

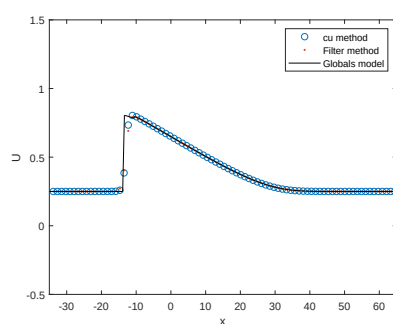
برای مثال دوم، ما روی مدلی از ترافیک کار می‌کنیم که بر اساس قانون نگاه به جلو اصلاح شده است، که به شرح زیر می‌باشد:



شکل ۱.۵: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش فیلتر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۱.



شکل ۲.۵: نمودار فوق با استفاده از نرم افزار CLAWPACK تهیه شده است.



شکل ۳.۵: چگالی و انباشتگی چگالی در مقابل موقعیت در طول زمان در مثال ۱.

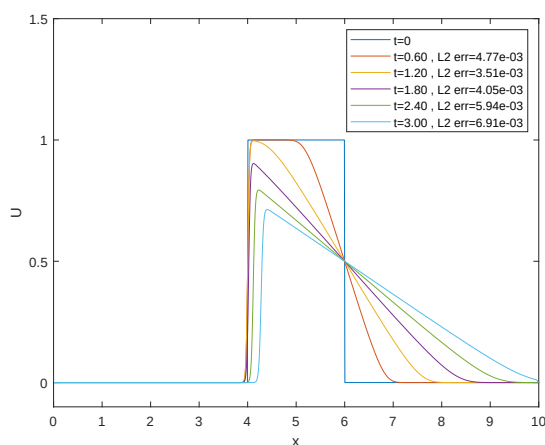
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{e^{-u} \partial(u(1-u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = 0.25 + 0.7e^{-0.01x^2}, \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (۴۳.۵)$$

با $\sigma = r \cdot \Delta$, $\Delta = L/N$, $M = 32$ و استفاده از روش فیلتر اسپکترال و حل در زمان $c = 1/2$, $r = 1/2$, $L = 65$, $\Delta t = \Delta x/10$, $N = 500$, $t = 25$

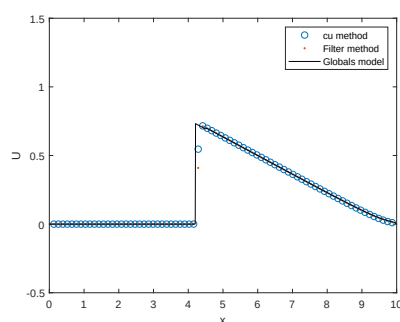
present method L2 error	CU method L2 error	t times
4.32 e-04	4.39 e-04	0.03
3.97 e-04	4.16 e-04	6.50
3.18 e-04	3.73 e-04	13.00
2.24 e-04	2.93 e-04	19.50
1.53 e-04	2.22 e-04	25.00

جدول ۶.۵. خطای باقیمانده $L2$ برای مثال ۱.

شکل ۴.۵ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر برای چگالی را نمایش می‌دهد. شکل ۵ چگالی و انباشتگی چگالی در طول زمان را نشان می‌دهد. در این مثال، سمت راست معادله ۴۰.۵ برابر با ۵۰۳۵ است. حداقل شرط کرانت عددی برابر است با $c \frac{\Delta x}{\min_j \Psi_u(u_j^n)} = 1.09e - 01$



شکل ۴.۵: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۲.



شکل ۵.۵: چگالی و انباشتگی چگالی در مقابل موقعیت در طول زمان در مثال ۲.



present method error	L2	CU method L2 error	t times
4.77 e-03		7.18 e-03	0.6
3.51 e-03		6.38 e-03	1.2
4.05 e-03		6.75 e-03	1.8
5.94 e-03		7.97 e-03	2.4
6.91 e-03		8.70 e-03	3.0

جدول ۷.۰.۵ خطای باقیمانده $L2$ برای مثال ۲.

۸.۰.۵ مثال ۳

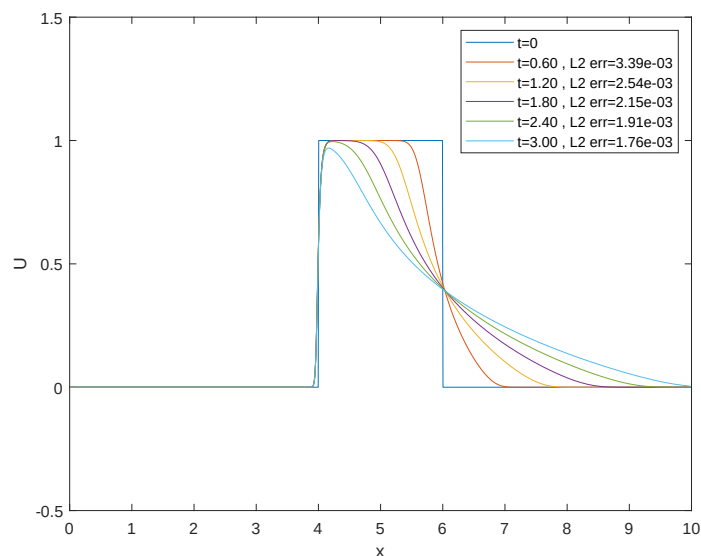
برای مثال سوم، ما روی مدلی از ترافیک کار می‌کنیم که بر اساس قانون نگاه به جلو اصلاح شده است، که به شرح زیر است [۲۹]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + V_m \frac{e^{-u} \partial(u(1-u))}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 4 < x < 6, \\ 0, & else, \end{cases} \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (۴۴.۵)$$

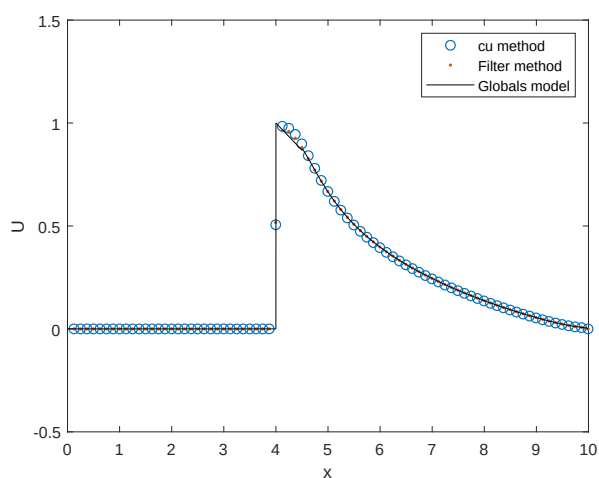
با $M = 32$ ، $\Delta = L/N$ ، $\sigma = r \cdot \Delta$ و استفاده از روش فیلتر اسپکترال و حل در زمان $t = 1$ و $V_m = 2$ که حداکثر سرعت ممکن است، $N = 500$ ، $\Delta t = \Delta x/10$ ، $L = 10$ ، $c = 1/2$ ، $r = 1/2$.

شکل ۶.۵ نمودار حل عددی مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر برای چگالی را نمایش می‌دهد. شکل ۷.۵ حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش CU [۲۹] را نشان می‌دهد. شکل ۳ حل‌های عددی به‌دست‌آمده با استفاده از روش‌های فیلتر و CU را نمایش می‌دهد. مقدار خطای این روش در حل این مدل بر اساس خطای $L2$ کمتر از خطای روش مرجع [۲۹] است. در این مثال، سمت راست معادله ۴۰.۵ برابر با ۱۰۰۷۱ است. حداقل شرط کرانت عددی برابر است با

$$c \frac{\Delta x}{\min_j \Psi_u(u_j^n)} = 1.42e - 02$$



شکل ۶.۵: حل مدل جریان ترافیک با استفاده از روش حاضر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۳.



شکل ۷.۵: حل‌های عددی به دست آمده با استفاده از روش‌های فیلتر CU و روش CU برای چگالی در مقابل موقعیت.

۹.۰.۵ مثال ۴

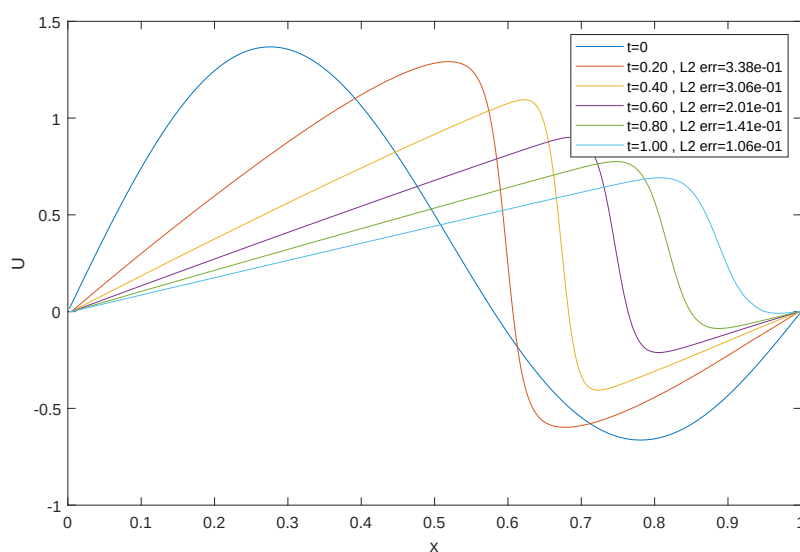
برای مثال چهارم، از این روش برای معادلات غیر ترافیکی استفاده می‌کنیم، معادله برگرز که بر اساس قانون نگاه به جلو اصلاح شده است، که به شرح زیر می‌باشد،

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon \frac{\partial^2(u)}{\partial x^2} + u \frac{\partial(u)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \sin(\pi x), \\ u(0, t) = 0, u(0, 1) = 0, \end{cases} \quad (۴۵.۵)$$

present method L2 error	CU method L2 error	t times
3.39 e-03	4.83 e-03	0.6
2.54 e-03	4.21 e-03	1.2
2.15 e-03	3.97 e-03	1.8
1.91 e-03	3.83 e-03	2.4
1.76 e-03	3.76 e-03	3

جدول ۸.۵. خطای باقیمانده $L2$ برای مثال ۳.

با $M = 32$ ، $\Delta = L/N$ ، $\sigma = r \cdot \Delta$ و استفاده از روش فیلتر اسپکترال، و حل در زمان $t = 1$ ،
 $c = 1/2$ ، $r = 1/2$ ، $\epsilon = 0.0001$ ، $L = 1$ ، $\Delta t = \Delta x/10$ ، $N = 500$
 شکل ۸.۵ حل معادله برگرز با استفاده از روش حاضر.



شکل ۸.۵: حل معادله برگرز با استفاده از روش حاضر برای چگالی در مقابل موقعیت در مثال ۴.



present method L2 error	Lax method L2 error	t times
3.3773 e-01	1.78 e-01	0.2
3.0569 e-01	1.81 e-01	0.4
2.0065 e-01	7.82 e-00	0.6
1.4106 e-01	3.54 e-00	0.8
1.0555 e-01	2.39 e-00	1.0

جدول ۵.۹. خطای باقیمانده $L2$ برای مثال ۴.

فصل ۶

نتیجه گیری ، پیشنهادات و انتقادات

۱.۰.۶ نتیجه گیری

در این رساله، به بررسی مشکل جریان ترافیک مدل سازی شده با معادلات دیفرانسیل پرداخته ایم که نخستین بار توسط سوپاساکیس و کاتسولاکیس در سال ۲۰۰۶ ارائه و در سال ۲۰۰۹ توسط کورتانوف و پالیچی اصلاح شده است. این روش که ترکیبی از طرح های مرکزی-بالا-باد و فیلتر است، ثابت کرده است که پایداری روش طیفی را در طول زمان به طور چشمگیری افزایش می دهد. برای پیاده سازی این روش، از طرح چهارم رانگ-کوتا در بعد زمان استفاده کرده ایم. این روش از لحاظ محاسباتی مقرون به صرفه است، پیچیدگی کمی دارد و انعطاف پذیری بالایی ارائه می دهد. با پارامترهای قابل تغییر معرفی شده در این روش، قادر به انطباق آن با دامنه وسیعی از معادلات هستیم. ما نتایج این روش را با نتایج سایر روش ها در چندین مثال عددی مقایسه کرده و دریافتیم که خطای این روش کمتر از خطای سایر روش های ذکر شده در رساله است. این نشان می دهد که این روش می تواند به طور موفقیت آمیزی برای مدل سازی مشکلات جریان ترافیک که با معادلات دیفرانسیل نمایه شده اند، استفاده شود. علاوه بر این، این روش استفاده از ابعاد بالاتر را آسان کرده و می توان آن را برای مسائل پیچیده تر اعمال کرد.

روش فوق همچنین می تواند با شبه طیف فوریه برای برخی مدل سازی ها پیاده سازی شود که میزان نوسانات را بیشتر کاهش می دهد. سایر روش های توسعه یافته، مانند روش استفاده از نقاط میانه فیلتر، می توانند دقت بالاتری ایجاد کنند. ما می توانیم بر روی سازگاری این روش برای افزایش دقت و کاهش حجم محاسبات مورد نیاز کار کنیم.

در مجموع، طرح های مرکزی-بالا-باد و روش فیلتر ثابت کرده اند که روشی قابل اعتماد و کارآمد برای مدل سازی مشکلات جریان ترافیک نمایه شده با معادلات دیفرانسیل هستند. با انعطاف پذیری و سهولت استفاده، این روش پتانسیل این را دارد که برای طیف وسیعی از مسائل به کار رود و می توان آن را برای افزایش دقت و کاهش نیازهای محاسباتی بهبود داد.



۲.۰.۶ پیشنهادات و انتقادات

واژه نامه

واژه نامه فارسی به انگلیسی

الف

perturbation	آشفستگی
disturbance	اختلال
equidistribution principle	اصل هم توزیعی
strictly concave	اکیداً مقعر
interaction	اندراکنش
curvature	انحناء
static	ایستا

ب

critical	بحرانی
eigenvector	بردار ویژه
linear programming	برنامه ریزی خطی
highway	بزرگراه
submicroscopic	بسیار خرد نگر
update	به روز کردن

پ

right of way parameter	پارامتر حق عبور
order parameter	پارامتر مرتبه
stable	پایدار



stability	پایداری
potential	پتانسیل
interaction potential	پتانسیل تعامل
dynamic	پویا
continuous	پیوسته

ت

functional	تابع
monitor function	تابع نشانگر
optimal monitor function	تابع نشانگر بهینه
delay	تاخیر
inverse transform	تبدیل معکوس
traffic	ترافیک
rarefaction	ترقیق
refinement	تظریف
balance	تعاادل
finite differences	تفاضلات متناهی
approximation	تقریب
adaptive	تعدیل
car-following	تعقیب خودرو
distributed	توزیع شده

ج

flow	جریان
weak solution	جواب کلاسیک

چ



light traffic چراغ راهنمایی
density چگالی

ج

finite volume حجم متناهی
calculus of variation حساب وردشی

خ

microscopic خرد نگر
well defined خوش تعریف
interpolation درون یابی
resolution دقت

ر

jam راه بندان
mid point method روش نقطه میانی
slop limiter methods روش های محدود کننده شیب

ز

relaxation time زمان آسایش
delay time زمان تأخیر

س

speed سرعت
mean speed سرعت میانگین
cell سلول
kinematic سینماتیک



ش

flux	 شهر
mesh	 شبکه
network	 شبکه
moving mesh	 شبکه متحرک
crossing mesh	 شبکه متقاطع
uniform mesh	 شبکه یکنواخت
simulation	 شبیه سازی
consistency condition	 شرط سازگاری
jump condition	 شرط پرش
boundary condition	 شرط مرزی
shock	 شوک
slop	 شیب

ف

reaction distance	 کاما معکوس عمل
-------------------	----------------------

ق

conservation law	 قانون بقا
balance law	 قانون هم ارزی

ط

arc length	 طول قوس
------------	---------------

ع

finite element	 عناصر متناهی
----------------	--------------------



غ

non oscillatory غیر نوسانی

ک

macroscopic کلان نگر

گ

node گره

discretization گسسته سازی

bottleneck گلوگاه

م

Jacobian matrix ماتریس ژاکوبی

cross متقاطع

mesoscopic متوسط نگر

convex مهلب

local محلی

compact support محمل فشرده

physical coordinate مختصات فیزیکی

computational coordinates مختصات محاسباتی

eigen value مقدار ویژه

concave مقعر

partial differential equation معادلات مشتقات جزئی

characteristic curve منحنی مشخصه

wave موج

traffic circle میدان ترافیکی



ن

look ahead نگاه به جلو
mapping نگاشت

و

high resolution وضوح بالا

ه

..... هذلولوی
hyperbolic هموار
smooth هموار سازی

..... واژه نامه انگلیسی به فارسی

A

adaptive اصلاحیه
approximation مراسم
arc length طول قوس

B

balance تعادل
balance law قانون هم ارزی
bottleneck گلوگاه

C

car-following تعقیب خودرو
calculus of variation حساب وردشی
cell سلول



characteristic curve	منحنی مشخصه
compact support	محمل فشرده
concave	مقعر
consistency condition	شرط سازگاری
continuous	پیوسته
critical	بحرانی
cross	مقاطع
curvature	انحناء

D

delay	تاخیر
discretization	گسسته سازی
disturbance	اختلال
dynamic	پویا

E

eigen value	مقدار ویژه
eigenvector	بردار ویژه اصل هم توزیعی
equidistribution principle	اصل هم توزیعی

F

finite differences	تفاضلات متناهی
finite element	عناصر متناهی
finite volume	حجم متناهی
flux	شهر
functional	تابعک

H

high resolution	وضوح بالا
highway	بزرگراه



هذلولوی hyperbolic

I

اندرکنش interaction

پتانسیل تعامل interaction potential

جابجایی معکوس inverse transform

J

ماتریس ژاکوبی Jacobian matrix

K

سینماتیک kinematic

L

برنامه ریزی خطی linear programming

نگاه به جلو look ahead

M

کلان نگر macroscopic

نگاشت mapping

سرعت میانگین mean speed

متوسط نگر mesoscopic

روش نقطه میانی mid point method

خرد نگر microscopic

تابع نشانگر monitor function

N

شبکه network

گره node

غیر نوسانی non oscillatory



O

optimal monitor function تابع نشانگر بهینه
order parameter پارامتر مرتبه

P

partial differential equation معادلات مشتقات جزئی
perturbation آشفتگی
physical coordinate مختصات فیزیکی
potential پتانسیل

R

rarefaction نازک شدن
refinement تطریف
relaxation time زمان آسایش
resolution دقت
right of way parameter پارامتر حق عبور

S

shock شوک
single منحصر به فرد
slop شیب
slop limiter methods روش های محدود کننده شیب
smooth هموار



مقاله های مستخرج از پایان نامه

References

Bibliography

- [1] M. Bando , Hasebe K., Nakayama A., Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, *Physical Review E* 51 (1995) 1035–1042.
- [2] S. Belkadi, M. Atounti, Non oscillatory central schemes for general non-local traffic flow models, *International Journal of Applied Mathematics*, 35(4) (2022) 515–528.
- [3] W. Cai, C.W. Shu, Uniform high-order spectral methods for one-and two-dimensional euler equations, *Journal of Computational Physics*, 104(2) (1993) 427–443.
- [4] W. Cai, D. Gottlieb, C.W. Shu, Essentially nonoscillatory spectral fourier methods for shock wave calculations, *Mathematics of Computation*, 52(186) (1989) 389–410.
- [5] J. Chen, R. Liu, Y. Hu, High-resolution central-upwind scheme for second-order macroscopic traffic flow models, *International Journal of Modern Physics C*, 31(7) (2020) 2050097.
- [6] Z. Cui, L. Kang, L. Li, L. Wang, K. Wang, A hybrid neural network model with improved input for state of charge estimation of lithium-ion battery at low temperatures, *Renewable Energy*, 198 (2022) 1328–1340.
- [7] D. Drew R., Deterministic aspects of freeway operations and control, *Highway Research Record*, 99 (1965) 48–58.
- [8] W.S. Don, Numerical study of pseudospectral methods in shock wave applications, *Journal of Computational Physics*, 110(1) (1994) 103–111.



- [9] K.O. Friedrichs, Symmetric hyperbolic linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 7 (1954) 345-392.
- [10] I. Gelfand M., Fomin S. V., Calculus of Variation, Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall, 1963.
- [11] H. Greenberg , An analysis of traffic flow, Operations Research, 7 (1959) 79-85.
- [12] M. Ghosh, S.K. Paul, R.K. Ranjan, A. Ranjan, Third order universal filter using single operational transresistance amplifier, Journal of Engineering, Volume 2013, Article ID 317296 (2013) 1-7.
- [13] D. Gottlieb, C.W. Shu, A. Solomonoff, H. Vandeven, On the Gibbs phenomenon I: recovering exponential accuracy from the fourier partial sum of a nonperiodic analytic function, Journal of Computational and Applied Mathematics, 43(1-2) (1992) 81--98.
- [14] D. Gottlieb, E. Tadmor, Recovering pointwise values of discontinuous data within spectral accuracy, In Progress and supercomputing in computational fluid dynamics, pages 357--375, Springer, (1985).
- [15] D. Gottlieb, Issues in the application of high order schemes, In Algorithmic trends in computational fluid dynamics, pages 195--218, Springer, (1993).
- [16] D. Gottlieb, J.S. Hesthaven, Spectral methods for hyperbolic problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 128(1-2) (2001) 83--131.
- [17] B.D. Greenshields , Astudy of traffic capacity, Proceedings of Highway Research Board, 14 (1935) 448-477.
- [18] Y. Gu, G.W. Wei, Conjugate filter approach for shock capturing, Communications in Numerical Methods in Engineering, 19(2) (2003) 99--110.
- [19] Y. Guo, D. Yang, Y. Zhang, L. Wang, K. Wang, Online estimation of SOH for lithium-ion battery based on SSA-Elman neural network, Protection and Control of Modern Power Systems, 7 (2022) 40.



- [20] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., 49(2) (1983) 357-393.
- [21] J.S. Hesthaven, D. Gottlieb, Stable spectral methods for conservation laws on triangles with unstructured grids, Computer methods in applied mechanics and engineering, 175(3-4) (1999) 361—381.
- [22] M.Y. Hussaini, D.A. Kopriva, M.D. Salas, T.A. Zang, Spectral methods for the euler equations, I-fourier methods and shock capturing, AIAA journal, 23(1) (1985) 64—70.
- [23] R. Jiang , Hu M.B., Jia B., Wang R.L., Wu Q.S., The effects of reaction delay in the NagelSchreckenberg traffic flow model, The European Physical Journal B, 54(2) (2006) 267–27
- [24] M. Kara, A. Seçgin, Discrete singular convolution method for modelling of waveguide interaction of beam-type structures with impedance boundaries, Engineering Structures, 247 (2021) 113209.
- [25] M. Kara, A. Seçgin, Discrete singular convolution method for one-dimensional vibration and acoustics problems with impedance boundaries, Journal of Sound and Vibration, 28 (2019) 22–36.
- [26] B.S. Kerner , Konhauser P., Cluster effect in initially homogeneous traffic flow, Physical Review E 48 (1993) 2335-2338.
- [27] S. Kumar, D. Pratibhamoy, K. Kumar, Adaptive mesh based efficient approximations for Darcy scale precipitation–dissolution models in porous media. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2024 Apr 28.
- [28] S. Kumar, D. Pratibhamoy, Second-order a priori and a posteriori error estimations for integral boundary value problems of nonlinear singularly perturbed parameterized form. Numerical Algorithms. 2024 Aug 21:1-28.



- [29] A. Kurganov, A. Polizzi, Non-oscillatory central schemes for traffic flow models with Arrhenius look-ahead dynamics, *Networks and Heterogeneous Media*, 4(3) (2009) 431–451.
- [30] A. Kurganov, C.T. Lin, On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes, *Commun. Comput. Phys.*, 2 (2007) 141-163.
- [31] A. Kurganov, S. Noelle and G. Petrova, Semidiscrete central-upwind scheme for hyperbolic conservation laws and Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Sci. Comput.*, 23 (2001) 707-740.
- [32] A. Kurganov and E. Tadmor, New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, 160 (2000) 241-282.
- [33] P.D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, *CBMS Reg. Conf. Ser. Applied Math.*, (1973) 1–48, doi:10.1137/1.9781611970562.ch1.
- [34] H. Lee Y., Lee H. W., Kim D., Origin of synchronised traffic flow on highways and its dynamic phase transition, *Physical Review Letters*, 81(5) (1998) 1130–1133.
- [35] R.J LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Volume 31, Cambridge university press, 2002.
- [36] M. Lighthill J., Whitham G. B., On kinematic waves: II. a theory of traffic flow on long crowded roads, *Proceedings Royal Society, London, Series A* 229, 1178 (1955) 317-345.
- [37] X. Luo, S.P. Wu, An improved WENO-Z+ scheme for solving hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, 445 (2021) 110608.
- [38] B.V. Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme I. The quest of monotonicity, In: Cabannes, H., Temam, R. (eds) *Proceedings of the Third*



- International Conference on Numerical Methods in Fluid Mechanics. Lecture Notes in Physics, vol 18, Springer, Berlin, Heidelberg (1973) 163-168.
- [39] R.M. Mattheij, Rienstra, S.W. and Boonkkamp, J.T.T., 2005. Partial differential equations: modeling, analysis,
- [40] A. May D., Keller H. E., Evaluation of single- and two-regime traffic flow models, in: 4th International Symposium on the Theory of Traffic Flow, Karlsruhe, (1968) 37–48.
- [41] K. Mohamed, M.A.E. Abdelrahman, The NHRS scheme for the two models of traffic flow, Computational and Applied Mathematics, 42 (2023) 53.
- [42] S. Mohammadian, Z. Zheng, Md.M. Haque, A. Bhaskar, Performance of continuum models for realworld traffic flows: Comprehensive benchmarking, Transportation Research Part B: Methodological, 147 (2021) 132-167.
- [43] S. Mohammadian, F. van Wageningen-Kessels, Improved numerical method for Aw-Rascle type continuum traffic flow models, Transportation Research Record, 2672 (2018) 262–276.
- [44] H. Nessyahu and E. Tadmor, Nonoscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws, J. Comput. Phys., 87 (1990) 408-463.
- [45] A. NEMRAT AS, Z. ZAINUDDIN, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications.
- [46] M. Papageorgiou , Blosseville J.M., Hadj-Salem H., Macroscopic modelling of flow on the Boulevard Peripherique in Paris, Transport Research Part B, 23(1) (1989) 29–47.
- [47] R. Pandey, N. Pandey, N. Singhal, Single VDTA Based dual mode single input multioutput biquad filter, Journal of Engineering, Volume 2016, Article ID 1674343 (2016) 1-11.
- [48] H. Payne J., Models of freeway traffi and control, Simulation Councils Proc. Series: Math- ematical Models of Public Systems, 1(1) (1971) 51-61.



- [49] L. Pipes A., Car following models and the fundamental diagram of road traffic, *Transportation Research*, 1(1) (1967) 21–29.
- [50] D. Pratibhamoy, S. Rana, Theoretical prospects of fractional order weakly singular Volterra Integro differential equations and their approximations with convergence analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 44(11) (2021) 9419-40.
- [51] D. Pratibhamoy, Rana S, H. Ramos, A perturbation-based approach for solving fractional-order Volterra–Fredholm integro differential equations and its convergence analysis. *International Journal of Computer Mathematics*. 97(10) (2020) 1994-2014.
- [52] D. Pratibhamoy, Rana S, H. Ramos, Homotopy perturbation method for solving Caputo-type fractional-order Volterra-Fredholm integro-differential equations. *Computational and Mathematical Methods*. 1(5) (2019) e1047.
- [53] D. Pratibhamoy, Comparison of a priori and a posteriori meshes for singularly perturbed nonlinear parameterized problems. *Journal of computational and applied mathematics*. 290 (2015) 16-25.
- [54] D. Pratibhamoy, J. Vigo-Aguiar, Parameter uniform optimal order numerical approximation of a class of singularly perturbed system of reaction diffusion problems involving a small perturbation parameter. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 354 (2019) 533-44.
- [55] D. Pratibhamoy, An a posteriori based convergence analysis for a nonlinear singularly perturbed system of delay differential equations on an adaptive mesh. *Numerical Algorithms*. 81(2) (2019) 465-87.
- [56] D. Pratibhamoy, S. Natesan, Optimal error estimate using mesh equidistribution technique for singularly perturbed system of reaction–diffusion boundary-value problems. *Applied mathematics and computation*. 249 (2014) 265-77.



- [57] D. Pratibhamoy, N. Srinivasan, Adaptive mesh generation for singularly perturbed fourth-order ordinary differential equations. *International Journal of Computer Mathematics*. 2015 Mar 4;92(3):562-78.
- [58] D. Pratibhamoy, N. Srinivasan, A uniformly convergent hybrid scheme for singularly perturbed system of reaction-diffusion Robin type boundary-value problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. 41 (2013) 447-71.
- [59] A. Shi, P.O. Persson, M.J. Zahr, Implicit shock tracking for unsteady flows by the method of lines, in: *Presentations and videos to 10th International Conference on Adaptive Modeling and Simulation (ADMOS)*, URL https://www.scipedia.com/public/Per_et_al_2021a.
- [60] D. Shakti, J. Mohapatra, D. Pratibhamoy, J. Vigo-Aguiar, A moving mesh refinement based optimal accurate uniformly convergent computational method for a parabolic system of boundary layer originated reaction–diffusion problems with arbitrary small diffusion terms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 404 (2022) 113167.
- [61] A. Shi, P.O. Persson, M.J. Zahr, Implicit shock tracking for unsteady flows by the method of lines, in: *Presentations and videos to 10th International Conference on Adaptive Modeling and Simulation (ADMOS)*, URL https://www.scipedia.com/public/Per_et_al_2021a.
- [62] R. Shiromani, V. Shanthi, D. Pratibhamoy, A higher order hybrid-numerical approximation for a class of singularly perturbed two-dimensional convection-diffusion elliptic problem with non-smooth convection and source terms. *Computers and Mathematics with Applications*. 142 (2023) 9-30.
- [63] A. Sopasakis, M.A. Katsoulakis, Stochastic modeling and simulation of traffic flow: asymmetric single exclusion process with arrhenius look-ahead dynamics, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66(3) (2006) 921–944.
- [64] A. Sopasakis, Stochastic noise approach to traffic flow modeling, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 342(3-4) (2004) 741–754.



- [65] H.M. Srivastava , A.K. Nain, , R.K. Vats, et al, A theoretical study of the fractional-order p -Laplacian nonlinear Hadamard type turbulent flow models having the Ulam–Hyers stability. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A-Mat.* 117, 160 (2023).
- [66] S. Sudarshan, J. Mohapatra , D. Pratibhamoy, D. Choudhuri , Higher order approximations for fractional order integro-parabolic partial differential equations on an adaptive mesh with error analysis. *Computers and Mathematics with Applications.* 150 (2023) 87-101.
- [67] S. Sumit, D. Pratibhamoy, S. Kumar , Parameter uniform higher order numerical treatment for singularly perturbed Robin type parabolic reaction diffusion multiple scale problems with large delay in time. *Applied Numerical Mathematics.* 196 (2024) 1-21.
- [68] E. Tadmor, Convergence of spectral methods for nonlinear conservation laws, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26(1) (1989) 30—44.
- [69] EF. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics* [electronic resource], A Practical Introduction.
- [70] M. Treiber, A. Kesting, *Traffic flow dynamics: Data, Models and Simulation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, (2013).
- [71] R.T. Underwood , *Speed, Volume, and Density Relationships, Quality and Theory of Traffic Flow*, Yale Bureau of Highway Traffic (1961) 141-188.
- [72] H. Vandeveen, Family of spectral filters for discontinuous problems, *Journal of Scientific Computing*, 6(2) (1991) 159—192.
- [73] H. Vandeveen, Family of spectral filters for discontinuous problems, *Journal of Scientific Computing*, 6(2) (1991) 159-192.
- [74] D.C. Wan, B.S.V. Patnaik, G.W. Wei, Discrete singular convolution–finite subdomain method for the solution of incompressible viscous flows, *Journal of computational physics*, 180(1) (2002) 229—255.



- [75] X. Wang, Z. Yuan, Discrete singular convolution and Taylor series expansion method for free vibration analysis of beams and rectangular plates with free boundaries, *International Journal of Mechanical Sciences*, 122 (2017) 184–191.
- [76] G.W. Wei, Y.B. Zhao, Y. Xiang, Discrete singular convolution and its application to the analysis of plates with internal supports, part 1: Theory and algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 55(8) (2002) 913–946.
- [77] H.C. Yee, N.D. Sandham, M.J. Djomehri, Low-dissipative high-order shock-capturing methods using characteristic-based filters, *Journal of computational physics*, 150(1) (1999) 199–238.
- [78] L. Yu , Li T., Shi Z.K., Density waves in a traffic flow model with reaction-time delay, *Physica A* 389 (2010) 2607-2616.
- [79] L. Yu , Li T., Shi Z.K., A new car-following model with two delays, *Physics Letters A* 378 (2014) 348–357.
- [80] J. Zhong , J. Zhang, The stability of a degenerate fixed point for Guzowska–Luís–Elaydi model. *Journal of Difference Equations and Applications*. 24(3) (2018) 409-24.
- [81] Y.C. Zhou, and G.W. Wei, High resolution conjugate filters for the simulation of flows, *Journal of Computational Physics*, 189(1) (2003) 159–179.



Abstract

This paper introduces an innovative approach that marries the spectral method with a time-dependent partial differential equation filter to tackle the phenomenon of shock waves in traffic flow modeling. Through the strategic application of Discrete low-pass filters, this method effectively mitigates shock-induced deviations, leading to significantly more accurate results compared to conventional spectral techniques. We conduct a thorough examination of the stability conditions inherent to this approach, providing valuable insights into its robustness. To substantiate its effectiveness, we present a series of numerical examples illustrating the method's prowess in delivering precise solutions. Comparative analysis against established methods such as Lax and Cu reveals a marked superiority in accuracy. This work not only contributes a novel numerical technique to the field of traffic flow modeling but also addresses a persistent challenge, offering a promising avenue for further research and practical applications. **Keywords** Spectral methods · Filter · Traffic flow · Eliminates shock

Keywords: *Spectral methods · Filter · Traffic flow · Eliminates shock.*



Islamic Azad University

Science and Research Branch

Department of Mathematics

Ph.D Thesis for degree of Applied Mathematics and Numerical Analysis

Subject:

Numerical solution of nonlinear equations of traffic flow density using spectral methods by filter

Supervisor:

S. Abbasbandy Ph.D.

T. Allahviranloo Ph.D.

Advisor:

Mohsen Rostamy Malkhalifeh.

By:

Seyed Esmaeil Sadat Najafi

2024