





معاونت پژوهش و فن آوری به نام خدا مشور اخلاق پژوهش

یاباری از خداوند سبحان و اعتقاد به اینکه عالم محضر خداست و بهواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اہمیت جایگاه دانشگاه در ارتقای فرهنگ و تمدن بشری، مآد انجمن و اعطاء بیات علمی واحد های دانشگاه

آزاد اسلامی متعددی گردیم، اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

- ۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از حرکت پنهان سازی حقیقت.
- ۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
- ۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بکاران پژوهش.
- ۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن چه بر دو تومنه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
- ۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از حرکت جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
- ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهاد های مرتبط با تحقیق.
- ۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از حرکت حرمت شکنی.
- ۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشناء نتایج تحقیقات و انتقال آن به بکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
- ۹- اصل برکت: التزام به برکت جویی از حرکت رفقار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به مثابه های غیر علمی می آلائند.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات تهران

تعهدنامه اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب بهر رانجی نزد دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی که در تاریخ از رساله خود تحت عنوان

روش بسته باز تولیدی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری با کسب نمره ... و درجه دفاع نموده‌ام بدینوسیله متعهد می‌شوم:

(۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آنرا در فهرست مربوط ذکر و درج کرده‌ام.

(۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

(۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و... از این رساله داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوط را اخذ نمایم.

(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می‌پذیرم و دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: بهر رانجی نژاد
تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات تهران

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

روش هسته بازتولیدی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری

استادان راهنما:

دکتر توفیق الهویرانلو

دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور:

دکتر اسمعیل بابلیان

نگارش:

هاجر راسخی نژاد

بهار ۱۴۰۳

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که، همتیان، شنیدوبه، بنشیننی رحروان علم و دانش مفتخران نمود و ذره‌ای ناچیز از دریای علم و معرفت خود را روزیایان ساخت. در اینجا لازم می‌دانم از زحمات اساتید ارجمندم، دکتر توفیق الهویرنلو و دکتر سعید عباس بندی که بارها بهانه‌های کار ساز و سازنده، همواره روشنگر راه بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر کنم و از جناب پرفور اسمعیل بایلیان که در سمت مشاور رساله از نگاشتن بهره بردم سپاسگذارم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم و خواهر مهربانم سمانه

که همواره من را برای رسیدن به درجات عالی علمی حمایت می کنند

فهرست مطالب

ی	فهرست تصاویر
ک	فهرست جداول
۱	چکیده
۲	۱ تعریف مسئله و مفاهیم اولیه
۳	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ معادله دیفرانسیل تأخیری
۳	۳.۱ معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحملی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته
۴	۴.۱ معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر
۴	۵.۱ معادله دیفرانسیل کسری تأخیری
۵	۱.۵.۱ مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر
۵	۶.۱ مفاهیم پایه‌ای فضای هسته بازتولیدی
۵	۱.۶.۱ تعریف فضای هسته بازتولیدی
۶	۲.۶.۱ خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی
۶	۳.۶.۱ تابع مطلقاً پیوسته و خواص آن
۷	۴.۶.۱ فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ و تابع هسته بازتولیدی آن
۱۰	۵.۶.۱ زیر فضاهای بسته‌ی فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$
۱۲	۶.۶.۱ تعریف تابع کاملاً پیوسته و خواص آن
۱۲	۷.۶.۱ فضای هسته بازتولیدی دوتایی $W_p^{(m,n)}(D)$
۱۴	۲ کلیات روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادله دیفرانسیل کسری تأخیری
۱۵	۱.۲ روش هسته بازتولیدی

۱۵	مقدمه	۱.۱.۲
	فضاهای بازتولیدی و پایه‌های مربوط به آن برای معادله دیفرانسیل کسری	۲.۱.۲
۱۶	تأخیری	
۱۸	تقریب جواب معادله دیفرانسیل کسری تأخیری	۳.۱.۲
۲۰	آنالیز همگرایی	۴.۱.۲
۲۲	معرفی یک پایه جدید مبتنی بر هسته بازتولیدی	۵.۱.۲
۲۳	معرفی روش هسته بازتولیدی با استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت	۶.۱.۲
۲۳	آنالیز همگرایی	۷.۱.۲
۲۴	مثال‌های عددی	۸.۱.۲
۲۵	آنالیز خطا	۹.۱.۲
۳۱	روش هسته بازتولیدی برای حل مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر	۳
۳۲	مقدمه	۱.۳
	معرفی فضای هسته بازتولیدی و پایه‌های مربوطه برای مسئله مقدار مرزی	۱.۱.۳
۳۳	تابعی کسری متغیر	
۳۵	تقریب جواب مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر	۲.۱.۳
۳۷	آنالیز همگرایی	۳.۱.۳
۳۷	مثال‌های عددی	۴.۱.۳
۳۸	آنالیز خطا	۲.۳
	حل معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر و معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحلّی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته	۴
۴۳	مقدمه	۱.۴
۴۴	مقدمه	۱.۱.۴
۴۴	نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای معادله (۱.۴)	۲.۱.۴
۴۷	آنالیز همگرایی	۳.۱.۴
۴۷	آنالیز خطا	۴.۱.۴
۴۸	مثال‌های عددی	۵.۱.۴
۴۹	معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحلّی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته	۲.۴
۵۱	مقدمه	۱.۲.۴
۵۴	مثال‌های عددی	۳.۴

۵۵		۱.۳.۴	آنالیز خطا
۵۹		۵	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۶۱			منابع
۶۸			واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۵			مقاله‌های مستخرج از رساله
۷۶			چکیده انگلیسی

فهرست تصاویر

۲۵	نمودار خطای مطلق برای مثال (۱۸.۱.۲) در بازه $x \in [0, 100]$	۱.۲
۲۵	نمودار خطای مطلق برای مثال (۱۹.۱.۲) در بازه $x \in [0, 10]$	۲.۲
۲۸	قدر مطلق خطا برای مثال ۲۲.۱.۲ با $n = 100$	۳.۲
۲۹	قدر مطلق خطا برای مثال ۲۳.۱.۲ با $n = 100$	۴.۲
۳۹	نمودار خطای مطلق برای مثال (۷.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$	۱.۳
۳۹	نمودار خطای مطلق برای مثال (۷.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$	۲.۳
۴۰	نمودار خطای نسبی برای مثال (۸.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$	۳.۳
۴۰	نمودار خطای نسبی برای مثال (۸.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$	۴.۳
۴۰	نمودار خطای مطلق برای مثال (۹.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$	۵.۳
۴۱	نمودار خطای مطلق برای مثال (۹.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$	۶.۳
۴۹	نمودار خطای مطلق برای مثال (۵.۱.۴) در بازه $x \in [0, 1]$	۱.۴
۵۰	نمودار خطای مطلق برای مثال (۶.۱.۴) در بازه $x \in [0, 1]$	۲.۴
۵۱	نمودار خطای مطلق برای مثال (۵.۱.۴) در بازه $x \in [0, 10]$	۳.۴
۵۱	نمودار خطای مطلق برای مثال (۶.۱.۴) در بازه $x \in [0, 10]$	۴.۴
۵۷	نمودار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_P^2$	۵.۴
۵۷	نمودار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_P^3$	۶.۴
۵۸	نمودار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_P^2$	۷.۴
۵۸	نمودار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_P^3$	۸.۴

فهرست جداول

۱.۲	ماکسیم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۱۸.۱.۲) در بازه
۲۵	$x \in [0, 100]$
۲.۲	ماکسیم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۱۹.۱.۲) در بازه
۲۶	$x \in [0, 10]$
۳.۲	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱۸.۱.۲) و (۱۹.۱.۲) . . .
۴.۲	مقایسه‌ی نتایج مثالهای (۲۲.۱.۲) و (۲۳.۱.۲) با هر سه حالت روش هسته
۲۹	بازتولیدی
۱.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۷.۱.۳) در بازه
۳۸	$x \in [0, 1]$
۲.۳	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی
۳۸	برای مثال (۷.۱.۳) در $x \in [0, 1]$
۳.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۸.۱.۳) در بازه
۳۹	$x \in [0, 1]$
۴.۳	مقایسه خطای نسبی برای جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی برای مثال
۳۹	(۸.۱.۳) در $x \in [0, 1]$
۵.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۹.۱.۳) در بازه
۴۰	$x \in [0, 1]$
۱.۴	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۵.۱.۴) و (۶.۱.۴) در بازه $x \in [0, 1]$
۴۹	مرتبه همگرایی برای مثال (۵.۱.۴) در $x \in [0, 1]$
۳.۴	مرتبه همگرایی برای مثال (۶.۱.۴) در $x \in [0, 1]$
۴.۴	مرتبه همگرایی برای مثال (۵.۱.۴) در $x \in [0, 10]$
۵.۴	مرتبه همگرایی برای مثال (۶.۱.۴) در $x \in [0, 10]$
۵۵	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_2^2$. .

۷.۴	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_p^3$. .	۵۶
۸.۴	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی	
	برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_p^3$ و W_p^3	۵۶
۹.۴	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_p^2$. .	۵۶
۱۰.۴	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_p^3$. .	۵۶
۱۱.۴	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_p^2$. .	۵۷
۱۲.۴	مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_p^3$. .	۵۷

چکیده

در این رساله معادله دیفرانسیل کسری تأخیری، معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر، معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحملی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته و مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر را با استفاده از روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت حل می‌کنیم. ما روش هسته بازتولیدی را بدون فرآیند متعامدسازی گرام اشمیت در نظر گرفته و ابتدا آنرا معرفی کرده و سپس برای پیاده‌سازی آن روی مسائل مورد نظر ابتدا هسته بازتولیدی که در شرایط مسئله صدق می‌کند را بدست می‌آوریم و با استفاده از روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامدسازی مسئله را حل می‌کنیم. نتایج حاصل از پیاده‌سازی الگوریتم ارائه شده در این رساله بیانگر حجم کم محاسبات، همگرایی سریع به جواب اصلی و دقت بالای روش ارائه شده در مقایسه با روش‌های عددی دیگر است. در روش هسته بازتولیدی، مولفه‌هایی همچون نقاط، فضا، ضرب داخلی و پایه‌ها برای حل مسئله با دقتی قابل قبول حائز اهمیت است. در هر فصل ابتدا قضیه‌های مربوط به هسته بازتولیدی را بیان و اثبات می‌کنیم و سپس همگرایی و آنالیز خطای مربوط به روش هسته بازتولیدی را جداگانه برای مسئله‌های مورد نظر آورده و اثبات می‌کنیم.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری، معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر، معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحملی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته، مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر، روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت، مشتق کسری، آنالیز خطا، آنالیز همگرایی

فصل ۱

تعريف مسئله و مفاهيم اوليه

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تعاریف مربوط به معادلات دیفرانسیل تأخیری و همچنین معادلات دیفرانسیل کسری و معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری و همچنین برخی از معادلاتی که از لحاظ رفتار جواب تا حدود زیادی شبیه به این معادلات هستند را می‌آوریم و سپس تاریخچه و کاربردهای آنها و روش‌های عددی به کار رفته برای این معادلات را مرور خواهیم کرد. در ادامه تعاریف مربوط به مشتق کسری را می‌آوریم و سپس به معرفی تعاریف، مفاهیم و قضیه‌های اساسی فضای هسته بازتولیدی^۱ می‌پردازیم.

۲.۱ معادله دیفرانسیل تأخیری

معادلات دیفرانسیل تأخیری برای مدل‌بندی بهتر پدیده‌های دنیای واقعی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. در حقیقت به دلیل وجود حافظه در ذات بسیاری از پدیده‌های زیستی، توصیف رفتار این دسته از پدیده‌ها با کمک معادلات با استفاده از معادلات دیفرانسیل تأخیری باعث کاهش خطای مدل‌بندی می‌شود و با نتایج آزمایشگاهی مطابقت بیشتری دارد. این معادلات در زمینه‌های زیادی از علوم پایه و علوم مهندسی کاربرد فراوانی دارند که از جمله آنها می‌توان به فیزیک، زیست‌شناسی، شیمی، اقتصاد و مهندسی مانند تبادل حرارت، ترافیک شهری، نظریه کنترل، رباتیک، رشد جمعیت با ساختار سنی، شبکه‌های عصبی، رشد تومور [۲] و ... دارد. اولین بار معادلات دیفرانسیل تأخیری در قرن هجدهم میلادی توسط لاپلاس^۲ و کاندورست^۳ [۳] معرفی شدند همچنین این دسته از معادلات با عنوان معادلات دیفرانسیل تفاضلی به عنوان یک دسته‌ای خاص از معادلات دیفرانسیلی که به معادلات دیفرانسیل تابعی [۴] معروف هستند، شناخته می‌شوند. معادلات دیفرانسیل تأخیری شامل مقادیر گذشته متغیرهای حالت هستند. حل این معادلات نه تنها نیازمند آگاهی از وضعیت کنونی بلکه آگاهی از وضعیت یک زمان معین از قبل است. معادلات دیفرانسیل تأخیری تعمیمی از معادلات دیفرانسیل معمولی هستند که برای سیستم‌های فیزیکی مناسب هستند که به داده‌های گذشته وابسته باشند و علت وقوع تأخیر در این سیستم‌ها این است که انتقال ماده و انرژی به طور لحظه‌ای رخ نمی‌دهد [۵]. به عنوان مثال معادله دیفرانسیل تأخیری به فرم زیر را داریم:

$$y'(t) = -y(t - \tau) \quad (1.1)$$

در این معادله y در زمان $(t - \tau)$ ارزیابی می‌شود. از آنجائیکه برای بدست آوردن جواب یک معادلات دیفرانسیل معمولی نیاز به شرایط اولیه در نقطه شروع هستیم، برای بدست آوردن جواب یک معادلات دیفرانسیل تأخیری همانند معادله ۱.۱ نیز باید تابع آغازین زیر را داشته باشیم:

$$y(t) = \phi(t) \quad (2.1)$$

که ϕ یک تابع آغازین پیوسته روی $[-\tau, 0]$ است [۶].

۳.۱ معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحل^۴ با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته^۵

معادله دیفرانسیل تابعی با آرگومان‌های پیشرفته رده خاصی از معادله دیفرانسیل تأخیری است که به آن معادله دیفرانسیل تأخیری متناسب^۶ نیز می‌گویند.

مثال ۱.۳.۱. [۷]

$$\begin{cases} y'(t) + a(t)y(\tau(t)) + b(t)y(t) = f(t), & t \in [0, 1] \\ B(y(c), y) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

که در آن a و b تابع‌هایی به قدر کافی هموار در بازه $[0, 1]$ هستند و $\tau \in C^1[0, 1]$ و

$$B(y(c), y) = \lambda y(c) - \int_0^1 y(s) ds, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

در حقیقت واژه آرگومان‌های پیشرفته اشاره به تابع τ دارد که به عنوان متغیر اصلی در تابع مجهول مسئله ظاهر شده است.

۴.۱ معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر

معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر ابتدا در زمینه کنترل بهینه جمعیت مطرح شد که برای جزئیات بیشتر به [۸-۱۱] رجوع کنید. معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر را در این رساله به فرم زیر

$$\begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x - \tau(x)) + \int_{\lambda(x)}^x c(s, x)u(s)ds = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = h(x), & -\tau(x) \leq x < 0, \quad \tau(x) \geq 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

در نظر میگیریم که $\lambda(x) = \max\{x - \tau(x), 0\}$ و τ تابع تأخیر است و a, b, f تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند و تابع آغازین h در بازه $[-\tau(x), 0]$ پیوسته است. در حقیقت واژه تأخیری متغیر در عنوانی که برای این مسئله انتخاب شده است اشاره به تابع تأخیر τ دارد که همانطور که می‌دانیم اگر این تابع یک مقدار ثابت باشد آنگاه عنوان متغیر دیگر در نامگذاری مسئله استفاده نمی‌شود. برخی از کاربردهای معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر را می‌توان در [۱۲] ملاحظه کرد. وجود و یکتایی جواب و همچنین آنالیز پایداری برای معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر در [۲۱-۱۳] بحث و بررسی شده است.

۵.۱ معادله دیفرانسیل کسری تأخیری

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم تابع پیوسته $y(t)$ را داریم، مشتق کسری ریمان-لیوویل^۱ $D^\beta y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵-۲۲]،

$$D^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \beta)} \frac{d^m}{dx^m} \int_0^t \frac{y(s)}{(t - s)^{\beta - m + 1}} ds, \quad m - 1 \leq \beta < m,$$

معادله دیفرانسیلی که در آن حداقل یک مشتق از مرتبه کسری و یک جمله تأخیری وجود داشته باشد را یک معادله دیفرانسیل کسری تأخیری می‌گوییم. معادله دیفرانسیل کسری تأخیری در زمینه‌های زیادی از علوم مختلف کاربرد دارد [۳۰-۲۶]. به عنوان مثال،

$$\begin{cases} D^\beta u(x) - a(x)u(x - \tau) - b(x)u(x) = f(x), & x \in [0, T], \\ u(x) = \phi(x), & x \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (5.1)$$

یک معادله دیفرانسیل کسری تأخیری است که a, b, f تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند و تابع آغازین ϕ در بازه $[-\tau(x), 0]$ پیوسته است و D^β مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه β که $0 < \beta < 1$ وجود و یکتایی جواب و همچنین آنالیز پایداری برای معادله دیفرانسیل کسری تأخیری در [۳۷-۳۱] بحث و بررسی شده است.

۱.۵.۱ مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنیم تابع پیوسته $y(t)$ را داریم، مشتق کسری کاپوتو^۱ $D^{\alpha(t)}y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۵-۲۲]،

$$D^{\alpha(t)}y(t) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha(t))} \int_0^t \frac{y^{(m)}(s)}{(t-s)^{\alpha(t)+1-m}} ds, \quad m-1 \leq \alpha(t) < m,$$

مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} D^{\alpha(x)}u(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(\tau(x)) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = A, \quad u(1) = B. \end{cases}$$

که a, b, f تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند و $D^{\alpha(x)}$ مشتق کسری از مرتبه متغیر است که $1 < \alpha(x) \leq 2$ و A, B ثابت هستند و $\tau \in C^1[0, 1]$. همچنین قابل ذکر است که چون در این مسئله مرتبه مشتق کسری به جای یک مقدار ثابت یک تابع است از عنوان کسری متغیر برای نامگذاری آن استفاده شده است و همینطور که ملاحظه می‌کنید آرگومان تابع مجهول مسئله به جای متغیر اصلی مسئله، تابع τ است.

۶.۱ مفاهیم پایه‌ای فضای هسته بازتولیدی^۲

۱.۶.۱ تعریف فضای هسته بازتولیدی

تعریف ۱.۶.۱. قرار می‌دهیم،

$$\mathcal{H} = \left\{ u \mid \text{یک تابع با مقادیر حقیقی یا مختلط روی مجموعه دلخواه } X \text{ است} \right\}$$

یک فضای هیلبرت^۳ با ضرب داخلی زیر،

$$\langle u, g \rangle_{\mathcal{H}}, \quad u, g \in \mathcal{H}.$$

اگر یک تابع $R_y \in \mathcal{H}$ برای هر $y \in X$ وجود داشته باشد، به طوریکه برای هر $u \in \mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\langle u, R_y \rangle_{\mathcal{H}} = u(y),$$

آنگاه R_y هسته بازتولیدی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود و $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی نامیده می‌شود.

^۳Hilbert

^۲Fundamental Properties of Reproducing Kernel

^۱Caputo



۲.۶.۱ خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی

خاصیت ۲.۶.۱. اگر فضای هسته بازتولیدی و R_y هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه R_y متقارن مزدوج است، یعنی $R_y(x) = \overline{R_x(y)}$.

خاصیت ۳.۶.۱. اگر فضای هسته بازتولیدی و R_y هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه R_y هسته بازتولیدی منحصر به فرد فضای $\mathcal{H}$ است.

خاصیت ۴.۶.۱. اگر فضای هسته بازتولیدی و R_y هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه $R_x(x) \geq 0, \forall x \in X$ و $R_x(x) = 0$ است اگر و تنها اگر $\mathcal{H} = \{0\}$.

خاصیت ۵.۶.۱. هسته بازتولیدی R_y یک هسته معین مثبت^۱ برای فضای $\mathcal{H}$ است، یعنی

$$\sum_{i,j=1}^n R_{x_i}(x_j) \bar{\xi}_i \xi_j \geq 0, \quad \forall x_i \in X,$$

که $\xi_i, \xi_j, \dots, n$ اعداد مختلط هستند

خاصیت ۶.۶.۱. فضای تابعی هیلبرت $\mathcal{H}$ یک فضای هسته بازتولیدی است اگر و تنها اگر $\forall x \in X$ که x ثابت شده، عملگر تابعی خطی $I(f) = f(x)$ کراندار باشد.

برای ملاحظه اثبات هر پنج خاصیت رجوع شود به [۳۸، ۱۱].

۳.۶.۱ تابع مطلقاً پیوسته^۲ و خواص آن

تعریف ۷.۶.۱. تابع f را روی بازه $[a, b]$ فرض کنید، قرار می‌دهیم $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ را یک مجموعه از بازه‌های باز دوجه‌دو از هم جدا^۳ که $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ اگر $\forall \varepsilon, \exists \delta$ به طوری که،

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon, \quad \text{برای} \quad \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta,$$

در این صورت تابع f یک تابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a, b]$ است.

خاصیت ۸.۶.۱. یک تابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a, b]$ یک تابع پیوسته است.

خاصیت ۹.۶.۱. تابع f را روی بازه $[a, b]$ فرض کنید، اگر $|f'| \leq M, \forall x \in [a, b]$ آنگاه f یک تابع مطلقاً پیوسته است.

خاصیت ۱۰.۶.۱. فرض کنید تابع f' روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع f روی بازه $[a, b]$ مطلقاً پیوسته است.

خاصیت ۱۱.۶.۱. اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $\int_a^x f(t)dt$ یک تابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a, b]$ است.

برای ملاحظه اثبات خواص فوق رجوع شود به [۱۱].

۴.۶.۱ فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ و تابع هسته بازتولیدی آن

فضای تابعی $W_p^m[a, b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_p^m[a, b] = \left\{ u \mid u^{(m-1)} \text{ تابع مطلقا پیوسته است} \mid u^{(m)} \in L^p[a, b] \right\}$$

همچنین ضرب داخلی و نرم را $\forall u_1, u_2 \in W_p^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{W_p^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} u_1^{(i)}(a) u_2^{(i)}(a) + \int_a^b u_1^{(m)}(x) u_2^{(m)}(x) dx,$$

$$\|u(x)\|_{W_p^m[a, b]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_p^m[a, b]}},$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که فضای تابعی $W_p^m[a, b]$ یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۱۲.۶.۱. فضای تابعی $W_p^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۱۳.۶.۱. فضای تابعی $W_p^m[a, b]$ یک فضای هسته بازتولیدی است.

برای ملاحظه اثبات قضیه‌های فوق رجوع شود به [۱۱]. اکنون تابع هسته بازتولیدی R_y ، مربوط به فضای $W_p^m[a, b]$ را بدست می‌آوریم. فرض کنید R_y ، هسته بازتولیدی مربوط به فضای $W_p^m[a, b]$ باشد، آنگاه برای هر y ثابت نگه‌داشته شده که $y \in [a, b]$ و $\forall u \in W_p^m[a, b]$ ، در شرط زیر صدق کند،

$$\langle u, R_y \rangle_{W_p^m[a, b]} = u(y) \quad (۶.۱)$$

با بکاربردن تعریف ضرب داخلی برای فضای $W_p^m[a, b]$ داریم،

$$\langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_p^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b u^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx,$$

که با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم،

$$\begin{aligned} & \int_a^b u^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i u^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_{x=a}^{x=b} + (-1)^m \int_a^b u(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \end{aligned}$$

همچنین داریم،

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i u^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} u^{(i)}(x) \frac{\partial^{m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{m-i-1}}.$$

در نتیجه ضرب داخلی به فرم زیر تبدیل می‌شود،

$$\begin{aligned} \langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_r^m[a,b]} &= \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} u^{(i)}(b) \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b u(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \end{aligned} \quad (7.1)$$

با استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک^۱ و انتگرال آن رو بازه $(-\infty, +\infty)$ و همچنین مفروضات زیر، خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی در رابطه (۷.۱) برقرار می‌شود،

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & x \neq y, \\ \infty & x = y, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \delta(x-y) dx = u(y),$$

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \\ (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (8.1)$$

مشخص است زمانی که $x \neq y$ تابع $R_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن زیر با مرتبه $2m$ است،

$$(-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = 0, \quad (9.1)$$

با شرایط مرزی زیر،

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \\ (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (10.1)$$

چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل (۹.۱) برابر $\lambda^{2m} = 0$ است که دارای ریشه تکراری صفر از مرتبه تکرار $2m$ است، بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۹.۱) با شرایط مرزی (۱۰.۱) به صورت زیر است،

$$R_y(x) = \begin{cases} \ell R_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1} & x \leq y, \\ r R_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1} & x > y, \end{cases} \quad (11.1)$$

حال برای بدست آوردن تابع هسته بازتولیدی $R_y(x)$ کافی است که ثابتهای $c_i(y), d_i(y)$ که $i = 1, 2, \dots, 2m$ را محاسبه کنیم. مشخص است برای محاسبه این $2m$ مجهول، نیاز به $2m$ معادله داریم که در ادامه نحوه بدست آوردن آنها را توضیح می‌دهیم. با استفاده از تعریف انتگرال تابع دلتای دیراک روی بازه $(y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ و رابطه

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y),$$

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta(x - y) dx = 1, \quad \varepsilon > 0,$$

داریم،

$$\begin{cases} (-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} R_y(y+\varepsilon)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} R_y(y-\varepsilon)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1, \\ \frac{\partial^i R_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i R_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2 \end{cases} \quad (12.1)$$

رابطه (12.1)، $2m$ مورد نیاز برای محاسبه‌ی ثابت‌های $c_i(y), d_i(y)$ را فراهم می‌آورد، و با استفاده از شرایط مرزی (10.1) می‌توانیم $2m$ معادله دیگر را بدست بیاوریم. بنابراین با استفاده از این $2m$ معادله به راحتی می‌توان تابع هسته بازتولیدی $R_y(x)$ را تعیین کرد. در ادامه برخی از خواص تابع هسته بازتولیدی $R_y(x)$ را می‌آوریم که اثبات آنها در مرجع [11] یافت می‌شود.

گزاره ۱۴.۶.۱. قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را هسته بازتولیدی مربوط به فضای $W_{\mathbb{P}}^m[a, b]$ ، آنگاه داریم

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^{\mathbb{P}}[a, b], \quad i + j = 2m - 1.$$

نتیجه ۱۵.۶.۱. تابع زیر یک تابع مطلقاً پیوسته در بازه $[a, b]$ است،

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad 0 \leq i + j \leq 2m - 2.$$

از نتیجه و گزاره فوق، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۶.۶.۱. قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را هسته بازتولیدی فضای $W_{\mathbb{P}}^m[a, b]$ ، آنگاه داریم

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in W_{\mathbb{P}}^m[a, b], \quad i + j = m - 1.$$

قضیه ۱۷.۶.۱. قرار می‌دهیم $W_{\mathbb{P}}^m[a, b]$ را یک فضای هسته بازتولیدی و $f_n(x), f(x) \in W_{\mathbb{P}}^m[a, b]$ که $(n = 1, 2, \dots)$. اگر تابع $f_n(x)$ همگرا باشد به تابع $f(x)$ به مفهوم نرم $\|\cdot\|_{W_{\mathbb{P}}^m}$ ، آنگاه تابع $f_n^{(k)}(x)$ همگرا می‌باشد به تابع $f^{(k)}(x)$ به طور یکنواخت، که $0 \leq k \leq m - 1$.

۵.۶.۱ زیر فضاهای بسته‌ی فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$

ما در این بخش زیرفضای بسته $W_p^m[a, b]$ از فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ را با اعمال کردن یک سری شرایط مرزی بر روی $W_p^m[a, b]$ می‌سازیم. ابتدا فضای تابعی $W_p^m[a, b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$${}^{\circ}W_p^m[a, b] = \left\{ u(x) \mid u(x) \in W_p^m[a, b], u'(a) = \circ, u(b) = \circ \right\}$$

به راحتی همانند فضای $W_p^m[a, b]$ ثابت می‌شود که ${}^{\circ}W_p^m[a, b]$ یک فضای هسته بازتولیدی هیلبرت است. تابع فضای هسته بازتولیدی ${}^{\circ}W_p^m[a, b]$ را $Q_y(x)$ می‌نامیم و اکنون درصدد پیدا کردن تابع $Q_y(x)$ هستیم و قابل ذکر است که نحوه پیدا کردن $Q_y(x)$ کاملاً شبیه به روش پیدا کردن تابع $R_y(x)$ است. مشخص است که $Q_y(x)$ باید در ضرب داخلی زیر صدق کند،

$$\begin{aligned} \langle u(x), Q_y(x) \rangle_{{}^{\circ}W_p^m[a, b]} &= \sum_{i=\circ}^{m-1} u^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=\circ}^{m-1} (-1)^{m-i-1} u^{(i)}(b) \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b u(x) \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} dx \end{aligned}$$

و بنابراین تابع $Q_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر است، با این تفاوت که به خاطر نوع تعریف فضای ${}^{\circ}W_p^m[a, b]$ ، دارای دوشروط مرزی متفاوت نسبت به محاسبه تابع $R_y(x)$ است.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^m \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x - y), \\ \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = \circ, \quad i = \circ, 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = \circ, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1 \\ Q_y(b) = \circ, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = \circ, \end{array} \right. \quad (13.1)$$

همانند قبل مشخص است که زمانی که $x \neq y$ است آنگاه تابع $Q_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه $2m$ خطی همگن زیر،

$$(-1)^m \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} = \circ, \quad (14.1)$$

با شرایط مرزی،

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1 \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (15.1)$$

است. چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل (۱۴.۱) برابر $\lambda^{2m} = 0$ است که دارای ریشه تکراری صفر از مرتبه تکرار $2m$ است، بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱۴.۱) با شرایط مرزی (۱۵.۱) به صورت زیر است،

$$Q_y(x) = \begin{cases} \ell Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1} & x \leq y, \\ r Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1} & x > y, \end{cases} \quad (16.1)$$

اکنون با استفاده از معادلات حاصل از $2m$ تا شرط مرزی (۱۵.۱) و همچنین $2m$ معادله زیر، که با استفاده از انتگرال از دو طرف رابطه $\frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y)$ روی بازه $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ بدست می‌آید،

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^m \left(\frac{\partial^{m-1} r R_y(y+\varepsilon)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} \ell R_y(y-\varepsilon)}{\partial x^{m-1}} \right) = 1, \\ \frac{\partial^i \ell Q_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r Q_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2 \end{array} \right. \quad (17.1)$$

می‌توان ثابتهای $c_i(y), d_i(y)$ در تابع بازتولیدی (۱۴.۱) را بدست آورد.

قضیه ۱۸.۶.۱. فضای هسته بازتولیدی $W_{\tau}^m[a, b]$ ، یک زیرفضای بسته از فضای $W_{\tau}^m[a, b]$ است [۱۱].

مثال ۱۹.۶.۱. به عنوان مثال تابع‌های بازتولیدی $Q_y(x), R_y(x)$ به ترتیب برای فضاهای هسته بازتولیدی $W_{\tau}^{\tau}[0, 1]$ و $W_{\tau}^{\tau}[0, 1]$ به صورت زیر هستند.

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{x^0}{110} - \frac{x^1 y}{24} + \frac{x^2 y^2}{12} + \frac{x^3 y^3}{4} + xy + 1 & x \leq y, \\ \frac{1}{11} x^2 (y^3 + 3y^2) + \frac{1}{11} x (24y - y^4) + \frac{1}{110} (y^5 + 120) & x > y, \end{cases}$$

$$Q_y(x) = \begin{cases} \frac{x^0(-y^5 + 5y^4 - 10y^3 + 30y^2 + 36)}{18720} + \frac{x^1(y^5 - 5y^4 + 10y^3 + 30y^2 - 156y + 120)}{3744} + \frac{x^2(-y^5 + 5y^4 - 10y^3 + 126y^2 - 120)}{1872} + \frac{1}{648} x^3 (-y^5 + 5y^4 - 10y^3 + 126y^2 - 120) + \frac{1}{156} (-y^5 + 5y^4 - 10y^3 - 30y^2 + 36), & x \leq y, \\ \frac{x^0(-y^5 + 5y^4 - 10y^3 - 30y^2 - 120)}{18720} + \frac{x^1(y^5 - 5y^4 + 10y^3 + 30y^2 + 120)}{3744} + \frac{x^2(-y^5 + 5y^4 - 10y^3 - 30y^2 - 120)}{1872} + \frac{1}{648} x^3 (-y^5 + 5y^4 + 42y^3 + 126y^2 - 120) - \frac{xy^4}{24} + \frac{3y^5 + 5y^4 - 10y^3 - 30y^2 + 360}{1560}, & x > y, \end{cases}$$

۶.۶.۱ تعریف تابع کاملاً پیوسته^۱ و خواص آن

قرار می‌دهیم $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$

تعریف ۲۰.۶.۱. تابع f را روی ناحیه D فرض کنید، قرار می‌دهیم

$$\{I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}_{k=1}^n$$

را یک مجموعه از ناحیه‌های دوبه‌دو از هم جدا که $I_k \subset D$. اگر $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ به طوری که، $\sum_{i=1}^n |f(I_i)| < \varepsilon$ برای $\sum_{i=1}^n |I_i| < \delta$

$$f(I_i) = f(b_i, d_i) - f(b_i, c_i) - f(a_i, d_i) + f(a_i, c_i)$$

و $f(a, y), f(x, c)$ به ترتیب تابع‌های مطلقاً پیوسته نسبت به متغیر y, x باشند آنگاه $f(x, y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۱.۶.۱. اگر $f(x, y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D باشد، آنگاه $\forall y \in [c, d]$ تابع $f(x, y)$ یک تابع مطلقاً پیوسته نسبت به متغیر x بر روی بازه $[a, b]$ است و به طور مشابه $\forall x \in [a, b]$ تابع $f(x, y)$ یک تابع مطلقاً پیوسته نسبت به متغیر y بر روی بازه $[c, d]$ است.

گزاره ۲۲.۶.۱. اگر $f(x, y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D باشد، آنگاه $f(x, y)$ یک تابع پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۳.۶.۱. اگر $f(x, y)$ بر روی ناحیه D انتگرال پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds, (x, y) \in D$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۴.۶.۱. اگر $f(x)$ یک تابع مطلقاً پیوسته بر روی بازه $[a, b]$ باشد، آنگاه $f(x)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۵.۶.۱. اگر $f(x), g(y)$ تابع‌های مطلقاً پیوسته بر روی بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، آنگاه تابع $f(x)g(y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

برای ملاحظه اثبات گزاره‌های فوق رجوع شود به [۱۱].

۷.۶.۱ فضای هسته بازتولیدی دوتایی $W_p^{(m,n)}(D)$

فضای تابعی دوتایی $W_p^{(m,n)}(D)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_p^{(m,n)}(D) = W_p^m[a, b] \otimes W_p^n[c, d] \\ = \left\{ u(x, t) \mid \frac{\partial^{m+n-2} u(x, t)}{\partial x^{m-1} \partial t^{n-1}} \text{ تابع کاملاً پیوسته است} \text{ که } \frac{\partial^{m+n} u(x, t)}{\partial x^m \partial t^n} \in L^p(D), (x, t) \in D \right\}$$

همچنین ضرب داخلی و نرم را $\forall u_1(x, t), u_2(x, t) \in W_p^{(m,n)}(D)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\begin{aligned} \langle u_1(x, t), u_2(x, t) \rangle_{W_r^{(m,n)}(D)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u_1(a, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u_2(a, t) \right] dt \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j} u_1(x, c), \frac{\partial^j}{\partial t^j} u_2(x, c) \right\rangle_{W_r^m[a,b]} \\ &+ \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} u_1(x, t) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} u_2(x, t) dx dt \end{aligned}$$

$$\|u(x, t)\|_{W_r^{(m,n)}(D)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_r^{(m,n)}(D)}}, \quad u_1(x, t), u_2(x, t) \in W_r^{(m,n)}(D),$$

به راحتی می توان ثابت کرد که فضای تابعی $W_r^{(m,n)}(D)$ یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۲۶.۶.۱. فضای تابعی $W_r^{(m,n)}(D)$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۲۷.۶.۱. قرار می دهیم $f, g_1, g_2 \in W_r^{(m,n)}(D)$ آنگاه،

$$\langle f, g_1 g_2 \rangle_{W_r^{(m,n)}(D)} = \langle \langle f, g_1 \rangle_{W_r^m}, g_2 \rangle_{W_r^n}.$$

نتیجه ۲۸.۶.۱. قرار می دهیم $f_1, f_2, g_1, g_2 \in W_r^{(m,n)}(D)$ آنگاه،

$$\langle f_1, f_2, g_1 g_2 \rangle_{W_r^{(m,n)}(D)} = \langle f_1, g_1 \rangle_{W_r^m} \langle f_2, g_2 \rangle_{W_r^n}.$$

نتیجه ۲۹.۶.۱. اگر تابع $f(x) \in W_r^m[a, b]$ آنگاه برای $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|f\|_{W_r^m[a,b]} = \|f\|_{W_r^{(m,n)}}.$$

قضیه ۳۰.۶.۱. فضای تابعی دوبعدی $W_r^{(m,n)}(D)$ یک فضای هسته بازتولیدی است و تابع هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است

$$K_{(\eta, \xi)}(x, t) = R_\eta(x) Q_\xi(t).$$

که Q_ξ و R_η به ترتیب هسته های بازتولیدی فضای فضاهای $W_r^m[a, b]$ و $W_r^n[c, d]$ هستند.

برای ملاحظه اثبات قضیه ها و نتایج فوق رجوع شود به [۱۱]. اکنون پس از معرفی کامل مقدمات مربوط به فضای هسته بازتولیدی و تابع فضای هسته بازتولیدی و قضیه های مربوطه، نوبت به معرفی روش هسته بازتولیدی و نحوه پیاده سازی آن برای حل معادله دیفرانسیل می رسد.

فصل ۲

کلیات روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادله
دیفرانسیل کسری تأخیری

۱.۲ روش هسته بازتولیدی

۱.۱.۲ مقدمه

روش هسته بازتولیدی یک روش نیمه تحلیلی قدرتمند برای حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل می‌باشد، با استفاده از این روش و تکنیک‌های ابتکاری حتی می‌توان طیف وسیعی از مسائل دشوارتر را حل کرد و تقریب‌های مناسبی برای آنها بدست آورد، به عنوان مثال نمونه‌هایی از مسائلی که با روش هسته بازتولیدی حل شده‌اند در زیر آورده شده است [۳۹-۴۷].

- 1-Fractional differential equations
- 2-delay integro-differential equations
- 3-Nonlinear Volterra-Fredholm integrals
- 4-Nonlinear integro-differential equations
- 5-Variable-Coefficient Burgers equation
- 6-Damped Nonlinear Klein-Gorden
- 7-Linear and nonlinear partial differential equations
- :

معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری توسط محققین مختلفی با استفاده از روش هسته بازتولیدی در سال‌های اخیر حل شده‌اند، در حقیقت ما به دنبال استفاده از ایده‌ها و تکنیک‌های ابتکاری در این روش هستیم که بتوانیم تقریب‌ها و دقت‌های موجود را بهبود ببخشیم، و آن دسته از این مسائل که تابحال با روش هسته بازتولیدی حل نشده‌اند را حل کرده و با دقت‌های مناسبی جواب آنها را تقریب بزنیم. به طور کلی برای حل معادله دیفرانسیل با روش هسته بازتولیدی ابتدا فضای بازتولیدی عملگر مسئله و جواب تقریبی را تعیین میکنیم و بعد از ساختن هسته بازتولیدی متناسب با فضای عملگر مسئله، پایه‌های آن فضا را از روی هسته بازتولیدی‌اش بدست آورده و جواب را به صورت ترکیب خطی از این پایه‌ها نوشته و با بدست آوردن ضرائب مجهول جواب مسئله را محاسبه می‌کنیم.

ما از روش هسته بازتولیدی بدون استفاده از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت که در سالهای اخیر توسط یولان ونگ^۱ و همکارانش برای اولین بار مطرح شده [۴۷-۵۳] و مورد توجه تعداد کمی از محققین قرار گرفته است، استفاده می‌کنیم. در این روش ابتدا ما هسته بازتولیدی متناسب با فضای بازتولیدی عملگر و شرایط مسئله را می‌سازیم و سپس پایه‌ها را به صورت مستقیم از روی هسته بازتولیدی بدست آورده و جواب مسئله را به صورت ترکیب خطی از همین پایه‌ها بسط داده و با محاسبه‌ی ضرائب مجهول جواب تقریبی مسئله را بدست می‌آوریم. روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی از جهت ایجاد تغییر در روند حل الگوریتم روش هسته بازتولیدی، تفاوت خلاقانه‌ای ایجاد کرده و با استفاده از مفاهیم ساده‌ای همچون بسط جواب معادله به فرم سری و مفهوم تابع مانده و حل دستگاه معادلات جبری، سبب ایجاد تغییر در الگوریتم حل شده و زمان اجرای حل مسئله با استفاده از برنامه کامپیوتری را به شدت کاهش داده و محققین را در بررسی سریعتر و رسیدن و به نتایج روشن و دقیقتر در این تکنیک کمک فراوان می‌کند. علاوه بر این به صورت تحقیقی مشاهده شده است که حتی در بیشتر مسئله‌هایی که با این روش حل می‌شوند دقت‌های حاصل حداقل یک رقم بهتر از تقریب‌هایی هستند که از روش با فرایند متعامدسازی بدست می‌آید. البته این موضوع خود به تنهایی می‌تواند یک زمینه تحقیق مستقل برای کارهای آینده ایجاد کند.

۲.۱.۲ فضاهای بازتولیدی و پایه‌های مربوط به آن برای معادله دیفرانسیل کسری تأخیری

معادله دیفرانسیل کسری تأخیری زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} D^\alpha u(x) - a(x)u(x - \tau) - b(x)u(x) = f(x), & x \in [0, T], \\ u(x) = \phi(x), & x \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (1.2)$$

که a, b, f تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند و تابع آغازین ϕ در بازه $[-\tau(x), 0]$ پیوسته است و D^α مشتق کسری ریمان-لیوویل از مرتبه α که $0 < \alpha < 1$ است. چونکه در اینجا کران بالای بزرگترین مرتبه مشتق کسری ۱ است بنابراین ما فضای بازتولیدی برای حل این مسئله را $W_1^\alpha[0, T]$ در نظر می‌گیریم. برای مثال اگر کران بالای بزرگترین مرتبه مشتق کسری ۲ بود، فضای بازتولیدی برای حل مسئله را $W_2^\alpha[0, T]$ در نظر می‌گرفتیم، و به همین ترتیب تا آخر. حال که نحوه انتخاب فضای بازتولیدی برای یک معادله دیفرانسیل کسری را متوجه شدیم، در ادامه نحوه انتخاب فضای بازتولیدی برای یک معادله دیفرانسیل مقدار مرزی از مرتبه دو را هم بحث و بررسی می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۱.۲. قدم اول در حل یک معادله دیفرانسیل با روش هسته بازتولیدی انتخاب مناسب فضای هسته بازتولیدی عملگر معادله می‌باشد. در معادله

$$\begin{cases} p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x) = N(u(x)) + f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

که p, q, r تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند و همچنین $N(u)$ تابعی غیر خطی پیوسته بر حسب u است. با توجه به اینکه بزرگترین مشتق معادله از مرتبه دو است و ما می‌خواهیم که یک جواب تقریبی برای مسئله در فضای هسته بازتولیدی بدست بیاوریم فرض می‌کنیم که تابع مجهول عملگر یا همان u در فضای $W_2^\alpha[0, 1]$ باشد که در اینصورت مشتق اول آن یعنی u' در فضای $W_1^\alpha[0, 1]$ و مشتق دوم آن، u'' در فضای $W_0^\alpha[0, 1]$ است، همچنین داریم،

$$W_2^\alpha[0, 1] \subset W_1^\alpha[0, 1] \subset W_0^\alpha[0, 1],$$

پس بدیهی است، عملگر مسئله در بزرگترین فضایی که مجموع همه‌ی این فضاها است می‌باشد و بنابراین $L(u(x)) \equiv p(x)u''(x) + q(x)u'(x) + r(x)u(x)$ در فضای $W_2^\alpha[0, 1]$ است. نکته دیگری که نباید در اینجا فراموش شود این است که فضای $W_2^\alpha[0, 1]$ که تابع مجهول معادله u در آن فرض شده همراه با شرایط مرزی $u(0) = u(1) = 0$ است که باید در تولید تابع هسته بازتولیدی لحاظ شوند.

نکته ۲.۱.۲. در بعضی مواقع مخصوصاً زمان‌هایی که به دنبال ارائه یک آنالیز خطا از روش هسته بازتولیدی هستیم یا به دنبال تقریب مشتق‌های از مرتبه بالاتر تابع مجهول معادله هستیم نیاز داریم که فضاهای هسته بازتولیدی کوچکتری را اختیار کنیم در این صورت است که باید فضای بازتولیدی عملگر هم متناسب با فضای بازتولیدی انتخابی برای تابع مجهول مسئله باشد، به عنوان مثال اگر بخواهیم تابع مجهول معادله (۲.۲) را به ترتیب در فضاهای بازتولیدی $W_2^\alpha[0, 1]$ و $W_1^\alpha[0, 1]$ فرض کنیم، آنگاه فضای عملگر به صورت زیر می‌شود،

$$\begin{aligned} L : W_2^\alpha[0, 1] &\longrightarrow W_2^\alpha[0, 1] \\ L : W_1^\alpha[0, 1] &\longrightarrow W_1^\alpha[0, 1]. \end{aligned}$$

برای حل معادله (۱.۲) ابتدا عملگر معادله را به صورت $\mathbb{L}(u(x)) \equiv D^\alpha u(x) - a(x)u(x - \tau) - b(x)u(x)$ در بازه $x \in [0, T]$ در نظر میگیریم و سپس عملگر را به دو قسمت تقسیم میکنیم قسمت اول زمانی است که متغیر اصلی معادله یعنی x در حالت تأخیر قرار دارد و قسمت دوم زمانی است که متغیر اصلی معادله x از تأخیر عبور کرده است، یعنی داریم

$$\mathbb{L}(u(x)) = \begin{cases} D^\alpha u(x) - b(x)u(x), & 0 \leq x \leq \tau, \\ D^\alpha u(x) - a(x)u(x - \tau) - b(x)u(x), & x > \tau, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\mathbb{F}(x) = \begin{cases} f(x) + a(x)\phi(x - \tau), & 0 \leq x \leq \tau, \\ f(x), & x > \tau. \end{cases} \quad (4.2)$$

در نتیجه $\mathbb{L}(u(x)) \equiv \mathbb{F}$ و فضاهای بازتولیدی $W_1^\lambda[0, T]$ و $W_1^\lambda[0, T]$ را برای معادله (۱.۲) به صورت زیر در نظر میگیریم

$$W_1^\lambda[0, T] = \left\{ u \mid u' \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'' \in L^\lambda[0, T], u(0) = 0 \right\},$$

$$W_1^\lambda[0, T] = \left\{ u \mid u \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u' \in L^\lambda[0, T] \right\},$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $W_1^\lambda[0, T]$ و $W_1^\lambda[0, T]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{W_1^\lambda[0, T]} = \sum_{i=0}^1 u_1^{(i)}(0)u_2^{(i)}(0) + \int_0^T u_1''(x)u_2''(x)dx,$$

$$\|u\|_{W_1^\lambda[0, T]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^\lambda[0, T]}}, \quad \forall u_1, u_2 \in W_1^\lambda[0, T].$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{W_1[0, T]} = u_1(0)u_2(0) + \int_0^T u_1'(x)u_2'(x)dx,$$

$$\|u\|_{W_1[0, T]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1[0, T]}}, \quad \forall u_1, u_2 \in W_1[0, T].$$

همچنین فضای عملگر معادله به صورت $\mathbb{L} : W_1^\lambda[0, T] \rightarrow W_1^\lambda[0, T]$ است. به راحتی می‌توان ثابت کرد که $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی کراندار است [۱۱]، با این فرض که $\mathbb{L}^*$ عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ است را به صورت $\mathbb{L}^* : W_1^\lambda[0, T] \rightarrow W_1^\lambda[0, T]$ تعریف می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $r_y(x)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $W_1^\lambda[0, T]$ و با مشخص کردن y با استفاده از نقاط $x_i \in [0, T]$ داریم $\varphi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که $\varphi_i(x)$ پایه‌های فضای $W_1^\lambda[0, T]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\psi_i(x) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x).$$

با فرض اینکه عملگر $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی کراندار است [۱۱]، لم زیر که یک پایه کامل برای فضای $W_1^\lambda[0, T]$ ارائه می‌دهد، را داریم که می‌توان هر کدام از اعضای این فضا را با استفاده از این پایه‌ها بسط داد.

لم ۳.۱.۲. مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[0, T]$ در نظر می‌گیریم، آنگاه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک پایه کامل برای فضای هسته بازتولیدی $W_1^\lambda[0, T]$ است.

قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را تابع هسته بازتولیدی فضای $W_p^\gamma[0, T]$

$$R_y(x) = \begin{cases} R(x, y) & x \leq y, \\ R(y, x) & x > y, \end{cases}$$

در فصل قبل به طور کامل نحوه محاسبه هسته $R_y(x)$ را شرح دادیم.

۳.۱.۲ تقریب جواب معادله دیفرانسیل کسری تأخیری

فرض می‌کنیم $\mathbb{L}(u_m(x))$ یک عملگر دیفرانسیلی معکوس پذیر خطی کراندار باشد و عملگر غیرخطی $\mathbb{N}(u_{m-1}(x))$ نیز پیوسته باشد. قرار می‌دهیم $m = 1$ و فرض می‌کنیم که $u_{m-1}(x)$ برای $m = 1$ یک تابع آغازین باشد به طوری که $u_0(x)$ در شرایط مرزی مسئله (۱.۲) صدق می‌کند و برای هر تکرار $m = 2, 3, \dots$ تابع $u_{m-1}(x)$ را محاسبه می‌کنیم. یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, T]$ مانند $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$\xi_i(x) = R_y(x)|_{y=x_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^\gamma[0, T]$ و $r_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^\gamma[0, T]$ می‌باشند. همچنین به راحتی ثابت می‌شود که $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل برای فضای $W_p^\gamma[0, T]$ است. $\varphi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که $\varphi_i(x)$ پایه‌های فضای $W_p^\gamma[0, T]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\xi_i(x) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x).$$

که $\mathbb{L}^*$ عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ است.

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, T]$ باشد و $\mathbb{L}^{-1}$ وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (۱.۲) به صورت زیر است

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \xi_i(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

که ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند و m تعداد تکرارها برای جمله غیرخطی مسئله $\mathbb{N}(u_{m-1}(x))$ است.

اثبات.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(u_m(x_j)) &= \left\langle \mathbb{L}(u_m(x)), \varphi_j(x) \right\rangle = \left\langle u_m(x), \mathbb{L}^* \varphi_j(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \xi_i(x), \mathbb{L}^* \varphi_j(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle \mathbb{L} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \xi_i(x) \right), \xi_j(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \mathbb{L}(\xi_i(x)), \varphi_j(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \mathbb{L}(\xi_i(x))|_{x=x_j} = \\ &= \mathbb{N}(u_{m-1}(x))|_{x=x_j} + \mathbb{F}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{L}(u_m(x_j)) = \mathbb{N}(u_{m-1}(x))|_{x=x_j} + \mathbb{F}(x_j)$ و از آنجا که $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[0, T]$ است در نتیجه داریم $\mathbb{L}(u_m(x)) = \mathbb{N}(u_{m-1}(x)) + \mathbb{F}(x)$ و جواب تقریبی مسئله (۱.۲) با n تا نقطه به صورت زیر است،

$$u_{n,m}(x) = \sum_{i=1}^n c_{i,m} \xi_i(x), \quad (6.2)$$

□

که m باید به قدر کافی بزرگ باشد.

نکته ۵.۱.۲. بدیهی است زمانیکه در فرم کلی معادله (۱.۲) یا مثالهای عددی که در انتهای این فصل به آنها می‌رسیم، عملگر غیرخطی یا همان تابع غیرخطی وجود نداشته باشد آنگاه مقدار $\mathbb{N}(u(x))$ برابر صفر است. اما ما در اینجا فرم کلی معادله را در نظر گرفته‌ایم که ممکن است شامل تابع غیرخطی در عملگر معادله باشد، و به همین دلیل از عملگر غیرخطی هم در اثبات قضیه‌ها و لم‌ها و هم پیاده سازی روش استفاده کرده‌ایم.

اکنون نحوه محاسبه ضرایب مجهول $m = 1, 2, \dots$ را بیان می‌کنیم. با استفاده از جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ و قرار دادن آن در معادله (۱.۲) تابع مانده $\mathbb{R}_n(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{R}_n(x) = \mathbb{L}(u_{n,m}(x)) - \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) - \mathbb{F}(x), \quad (7.2)$$

اکنون ضرایب $c_{i,m}$ را طوری محاسبه می‌کنیم که ضرب داخلی زیر برابر صفر باشد، یعنی

$$\langle \mathbb{R}_n(x), \xi_j(x) \rangle_{W_T^r} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8.2)$$

با استفاده از تعریف تابع مانده و تعریف جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ داریم

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{R}_n(x), \xi_j(x) \rangle &= \langle \mathbb{L}(u_{n,m}(x)) - \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) - \mathbb{F}(x), \xi_j(x) \rangle \\ &= \langle \mathbb{L}(u_{n,m}(x)), \xi_j(x) \rangle - \langle \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) + \mathbb{F}(x), \xi_j(x) \rangle \\ &= \langle \mathbb{L}\left(\sum_{i=1}^n c_{i,m} \xi_i(x)\right), \xi_j(x) \rangle - \langle \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) + \mathbb{F}(x), \xi_j(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c_{i,m} \langle \mathbb{L}(\xi_i(x)), \xi_j(x) \rangle - \langle \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) + \mathbb{F}(x), \xi_j(x) \rangle = 0, \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی به یک دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر می‌رسیم که با حل آن می‌توان ضرایب $c_{i,m}$ را محاسبه کرد.

$$\sum_{i=1}^n c_{i,m} \mathbb{L}\xi_i(x)|_{x=x_j} = \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x))|_{x=x_j} + \mathbb{F}(x_j), \quad m = 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9.2)$$

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad (10.2) \\ & \begin{bmatrix} \mathbb{L}\xi_1(x_1) & \mathbb{L}\xi_2(x_1) & \mathbb{L}\xi_3(x_1) & \dots & \mathbb{L}\xi_n(x_1) \\ \mathbb{L}\xi_1(x_2) & \mathbb{L}\xi_2(x_2) & \mathbb{L}\xi_3(x_2) & \dots & \mathbb{L}\xi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}\xi_1(x_{n-1}) & \mathbb{L}\xi_2(x_{n-1}) & \mathbb{L}\xi_3(x_{n-1}) & \dots & \mathbb{L}\xi_n(x_{n-1}) \\ \mathbb{L}\xi_1(x_n) & \mathbb{L}\xi_2(x_n) & \mathbb{L}\xi_3(x_n) & \dots & \mathbb{L}\xi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,m} \\ c_{2,m} \\ \vdots \\ c_{n-1,m} \\ c_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{N}(y_{n,m-1}(x_1)) + \mathbb{F}(x_1) \\ \mathbb{N}(y_{n,m-1}(x_2)) + \mathbb{F}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbb{N}(y_{n,m-1}(x_{n-1})) + \mathbb{F}(x_{n-1}) \\ \mathbb{N}(y_{n,m-1}(x_n)) + \mathbb{F}(x_n) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم که جواب دستگاه معادلات (۱۰.۲) وجود دارد و منحصر به فرد است. برای اینکه نشان دهیم دستگاه معادلات (۱۰.۲) دارای یک جواب منحصر به فرد است باید نشان دهیم ماتریس $[\mathbb{L}\xi_i(x_j)]_{i,j=1,2,\dots,n}^{j=1,2,\dots,n}$ معین مثبت است که با توجه به تعریف معین مثبت بودن ماتریس یعنی باید نشان دهیم که

$$A^T \mathbb{L}\xi_i(x_j) A > 0, \quad \forall A \in \mathbb{R}^n$$

قضیه ۶.۱.۲. اگر $\mathbb{L}^{-1}$ وجود داشته باشد، آنگاه دستگاه معادلات (۱۰.۲) دارای یک جواب منحصر به فرد است.

اثبات. ابتدا نیاز داریم که نشان دهیم ماتریس $[\mathbb{L}\xi_i(x_j)]_{i,j=1,2,\dots,n}^{j=1,2,\dots,n}$ معین مثبت است یعنی $A^T \mathbb{L}\xi_i(x_j) A > 0$ که بردار $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ضرایب غیر صفر هستند همچنین می‌توانیم بنویسیم،

$$\begin{aligned} A^T \mathbb{L}\xi_i(x_j) A &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{L}\xi_1(x_1) & \mathbb{L}\xi_2(x_1) & \mathbb{L}\xi_3(x_1) & \dots & \mathbb{L}\xi_n(x_1) \\ \mathbb{L}\xi_1(x_2) & \mathbb{L}\xi_2(x_2) & \mathbb{L}\xi_3(x_2) & \dots & \mathbb{L}\xi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{L}\xi_1(x_n) & \mathbb{L}\xi_2(x_n) & \mathbb{L}\xi_3(x_n) & \dots & \mathbb{L}\xi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{L}\xi_i(x_j) a_j a_i = \mathbb{L} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i(x_j) a_j a_i = \mathbb{L} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{x_i}(x_j) a_j a_i, \end{aligned}$$

همچنین با استفاده از خاصیت معین مثبت بودن هسته بازتولیدی $R_y(x)$ (فصل اول-بخش مفاهیم پایه‌ای فضای هسته بازتولیدی-زیربخش خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی-خاصیت (۵.۶.۱)) داریم، $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{x_i}(x_j) a_j a_i \geq 0$. با استفاده از خاصیت (۴.۶.۱) برای هسته بازتولیدی $R_y(x)$ ، (فصل اول-بخش مفاهیم پایه‌ای فضای هسته بازتولیدی-زیربخش خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی-خاصیت (۴.۶.۱)) $R_x(x) \geq 0$ و $R_x(x) = 0$ اگر و تنها اگر $W^\perp = \{0\}$ به ازای هر $y \in [0, T]$ مقدار ثابت است. حال اگر فرض کنیم $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_{x_i}(x_j) a_j a_i = 0$ از آنجایی که $\mathbb{L}^{-1}$ وجود دارد بنابراین $A = 0$ که این یک تناقض با تعریف معین مثبت بودن ماتریس است که بردار $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ ضرایب غیر صفر هستند، در نتیجه اثبات کامل می‌شود. برای جزئیات بیشتر به [۵۵، ۵۴، ۳۸]. مراجعه کنید.

□

۴.۱.۲ آنالیز همگرایی

برای اثبات قضیه همگرایی ما نیاز به یک سری تعاریف و قضیه‌ها و لم‌ها داریم که در ادامه آنها را می‌آوریم [۵۶].

تعریف ۷.۱.۲. (مجموعه‌ی فشرده) قرار می‌دهیم $\mathcal{B}$ را یک زیر مجموعه از فضای نرم‌دار $\mathcal{H}$ ، مجموعه $\mathcal{B}$ را فشرده می‌نامیم اگر هر دنباله $\{v_i\} \subset \mathcal{B}$ شامل یک زیر دنباله‌ی همگرایی $\{v_{i_n}\}$ باشد که به یک عضو از $v \in \mathcal{B}$ همگراست.

تعریف ۸.۱.۲. (مجموعه‌ی نسبتاً فشرده) اگر $\mathcal{B}$ یک مجموعه‌ای باشد که بستار آن $(\overline{\mathcal{B}})$ فشرده باشد در این صورت $\mathcal{B}$ یک مجموعه نسبتاً فشرده^۱ می‌نامیم.

تعریف ۹.۱.۲. (عملگر پیوسته) قرار می‌دهیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای نرم‌دار و عملگر $\mathbb{L} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ در $v \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ پیوسته است اگر

$$\{\{v_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{L}), \quad v_n \rightarrow v \text{ در } \mathcal{H}_1\} \implies \{\mathbb{L}(v_n) \rightarrow \mathbb{L}(v) \text{ در } \mathcal{H}_2\}.$$

عملگر $\mathbb{L}$ را پیوسته می‌نامیم اگر در تمام دامنه خود $D(\mathbb{L})$ پیوسته باشد.

قضیه ۱۰.۱.۲. (عملگر پیوسته و کراندار) قرار می‌دهیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای نرم‌دار و عملگر $\mathbb{L} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ یک عملگر خطی باشد آنگاه $\mathbb{L}$ را پیوسته می‌نامیم اگر و تنها اگر در $\mathcal{H}_1$ کراندار باشد.

قضیه ۱۱.۱.۲. (قضیه آرزلا-آسکلی^۱) مجموعه $\mathcal{B}$ را در نظر می‌گیریم که $\mathcal{B} \subset C(D)$ و $D \subset \mathbb{R}$ ، بسته و کراندار است. فرض می‌کنیم که تابع‌ها در $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت کراندار و هم پیوسته^۲ باشند یعنی،

$$\sup_{y(x) \in \mathcal{B}} \|y(x)\|_{\infty} < \infty,$$

$$\forall \hat{x}, \tilde{x} \in D \quad \|(\hat{x} - \tilde{x})\| \leq \epsilon, \implies |y(\hat{x}) - y(\tilde{x})| \leq d_{\mathcal{B}}(\epsilon), \quad \forall y(x) \in \mathcal{B}$$

و $(\epsilon \rightarrow 0) \implies d_{\mathcal{B}}(\epsilon) \rightarrow 0$. آنگاه $\mathcal{B}$ یک مجموعه نسبتاً فشرده در $C(D)$ است.

لم ۱۲.۱.۲. اگر فرض کنیم $\mathcal{B} = \{u_{n,m}(x) \mid \|u_{n,m}(x)\|_{W^{\alpha}_{[\cdot,T]}} \leq \zeta\}$ آنگاه $\mathcal{B}$ یک مجموعه فشرده در فضای $C[0, T]$ است که ζ یک ثابت است.

اثبات. با استفاده از خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی داریم

$$\|R_x(y)\|^2 = \langle R_x(y), R_x(y) \rangle = R_x(x) < \zeta,$$

که ζ یک ثابت است. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز^۳ $\forall u_{n,m}(x) \in \mathcal{B}$ داریم،

$$\begin{aligned} |u_{n,m}(x)| &= |\langle u_{n,m}(y), R_x(y) \rangle| \\ &\leq \sqrt{\langle u_{n,m}(y), u_{n,m}(y) \rangle \cdot \langle R_x(y), R_x(y) \rangle} \\ &= \|u_{n,m}(y)\| \|R_x(y)\| \leq \zeta \zeta^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

بنابراین مجموعه $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت کراندار است در $C[0, 1]$. همچنین $\forall \epsilon > 0$ وجود دارد $\delta > 0$ به طوریکه داریم،

$$\begin{aligned} |u_{n,m}(x+h) - u_{n,m}(x)| &= |\langle u_{n,m}(y), R_{x+h}(y) - R_x(y) \rangle| \\ &\leq \|u_{n,m}(y)\| \|R_{x+h}(y) - R_x(y)\| \\ &\leq \zeta \cdot \left(\left\| \frac{\partial R_x(y)}{\partial x} \right\|_{x=\eta} \cdot |h| \right), \quad \eta \in [x, x+h]. \end{aligned}$$

و از خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی داریم

$$\left\| \frac{\partial R_x(y)}{\partial x} \right\| \leq \zeta,$$

که ζ یک ثابت است. اگر در نظر بگیریم $\delta = \frac{\epsilon}{\zeta}$ ، و قتیکه $|h| < \delta$ داریم

$$|u_{n,m}(x+h) - u_{n,m}(x)| < \epsilon.$$

بنابراین $u_{n,m}(x)$ هم پیوسته است و در نتیجه با استفاده از قضیه آرزلا-آسکلی^۱، مجموعه $\mathcal{B}$ نسبتاً فشرده است. از آنجا که بستار مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ خودش می‌باشد پس مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ فشرده است. □

قضیه ۱۳.۱.۲. (قضیه همگرایی) فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[0, T]$ باشند، آنگاه جواب تقریبی معادله (۱.۲) به جواب دقیق معادله همگراست یعنی

$$u_{n,m}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

اثبات. مشخص است اگر ثابت کنیم که $u_{n,m}(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_T^\gamma}} u(x)$ آنگاه با استفاده از قضیه ۱۷.۶.۱ به راحتی می توان همگرایی یکنواخت را نتیجه گرفت. با توجه به رابطه های (۲۰.۴) (۵.۳) و (۱۰.۴) داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(u_{n,m}(x_i)) &= \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x))|_{x=x_i} + \mathbb{F}(x_i), \\ m &= 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱۲.۱.۲ مجموعه $\mathcal{B}$ فشرده است و دنباله $\{u_{n,m}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ متعلق به مجموعه $\mathcal{B}$ است و بدیهی است که $u(x) \in \mathcal{B}$ و همچنین با استفاده از تعریف مجموعه فشرده در فضای نرم دار دنباله $\{u_{n,m}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ شامل یک زیر دنباله همگرا مانند $\{u_{n,m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ است که به یک عضو از مجموعه $\mathcal{B}$ همگراست. فرض می کنیم که $\{u_{n,m_l}(x)\}_{l=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(u_{n,m_l}(x_i)) &= \mathbb{N}(u_{n,m_l-1}(x))|_{x=x_i} + \mathbb{F}(x_i), \\ m &= 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (۱۱.۲)$$

از آنجا که $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی کراندار است پس بنابر قضیه ۱۰.۱.۲ عملگری پیوسته می باشد و همچنین فرض می کنیم که عملگر غیر خطی $\mathbb{N}$ نیز پیوسته باشد، بنابراین با استفاده از تعریف ۹.۱.۲ و $u_{n,m_l}(x) \rightarrow u(x)$ داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(u_{n,m_l}(x)) &\rightarrow \mathbb{L}(u(x)), \\ \mathbb{N}(u_{n,m_l-1}(x)) &\rightarrow \mathbb{N}(u(x)). \end{aligned}$$

بنابراین در معادله (۱۱.۲)، $\mathbb{R}_n(x) \rightarrow 0$ و در نتیجه $(n \rightarrow \infty)$ $\|u_{n,m_l}(x) - u(x)\|_{W_T^\gamma} \rightarrow 0$. اکنون ما همگرایی یکنواخت $(m = 1, 2, \dots)$ $u_{n,m_l}(x) \xrightarrow{n, l \rightarrow \infty} u(x)$ را ثابت می کنیم. با استفاده از قضیه ۱۷.۶.۱ و خواص پایه ای تابع هسته بازتولیدی داریم

$$\begin{aligned} |u_{n,m_l}(x) - u(x)| &= |\langle u_{n,m_l}(y) - u(y), R_x(y) \rangle_{W_T^\gamma}| \\ &\leq \|u_{n,m_l}(y) - u(y)\|_{W_T^\gamma} \|R_x(y)\|_{W_T^\gamma} \\ &\leq M \|u_{n,m_l}(y) - u(y)\|_{W_T^\gamma} \end{aligned}$$

□

$$u_{n,m_l}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x) \text{ بنابراین}$$

۵.۱.۲ معرفی یک پایه جدید مبتنی بر هسته بازتولیدی

در اینجا یک مدل جدید برای ساختن پایه مورد استفاده از تابع هسته بازتولیدی را بیان می کنیم. ساختن این پایه اندکی با پایه قبلی متفاوت است به طوریکه قبل مقداردهی به y در هسته $R_y(x)$ ابتدا یکبار عملگر معادله را بر روی هسته $R_y(x)$ اثر می دهیم، به صورت زیر

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \mathbb{L}^* \varphi_i(x) = \langle \mathbb{L}^* \varphi_i(y), R_x(y) \rangle_{W_T^\gamma} = \langle \varphi_i(y), \mathbb{L}_y R_x(y) \rangle_{W_T^\gamma} = \mathbb{L}_y R_x(y)|_{y=x_i} \\ &= D_y^\alpha(R_x(y))|_{y=x_i} - b(y)R_x(y)|_{y=x_i}, \quad 0 \leq x \leq \tau \end{aligned} \quad (۱۲.۲)$$

(۱۳.۲)

$$\psi_i(x) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x) = \langle \mathbb{L}^* \varphi_i(y), R_x(y) \rangle_{W_T^*} = \langle \varphi_i(y), \mathbb{L}_y R_x(y) \rangle_{W_T^*} = \mathbb{L}_y R_x(y) \Big|_{y=x_i}$$

$$D_y^\alpha(R_x(y)) \Big|_{y=x_i} - a(y) R_x(y - \tau) \Big|_{y=x_i} - b(y) R_x(y) \Big|_{y=x_i}, \quad x > \tau$$

که $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, T]$ و $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای W_T^* و $\mathbb{L}$ عملگر خطی کراندار مسئله (۱.۲) می‌باشند، همچنین تمام مفروضات در حالت قبل نیز عیناً برای این حالت وجود دارد و حل معادله دیفرانسیل و نحوه اثبات قضیه همگرایی نیز همانند حالت قبل است با این تفاوت که ما از پایه‌های جدید (۱۳.۲) و (۱۲.۲) استفاده می‌کنیم.

۶.۱.۲ معرفی روش هسته بازتولیدی با استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت^۱

با استفاده از فرایند متعامد سازی گرام اشمیت پایه‌های $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ را به پایه‌های متعامد یک $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ از فضای بازتولیدی W_T^* تبدیل می‌کنیم به طوری که در شرط زیر صدق کنند،

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x)$$

که β_{ik} ثابت‌های متعامد سازی هستند.

قضیه ۱۴.۱.۲. قرار می‌دهیم مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[0, T]$ ، آنگاه جواب تحلیلی معادله (۱.۲) به فرم زیر است.

$$u(x) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (\mathbb{F}(x_k) + \mathbb{N}u(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (۱۴.۲)$$

برای ملاحظه اثبات قضیه فوق به [۱۱] رجوع کنید. اکنون می‌خواهیم روش بدست آوردن جواب تقریبی را از روی سری (۱۴.۲) شرح دهیم.

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \mathbb{F}(x_k) \bar{\psi}_i(x). \quad (۱۵.۲)$$

که مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^n$ متعلق به بازه $[0, T]$ است و $u_n(x)$ را جواب تقریبی معادله دیفرانسیل با n تا نقطه در بازه $[0, T]$ یا n تا پایه‌ی حاصل از هسته بازتولیدی فضای W_T^* می‌نامیم.

۷.۱.۲ آنالیز همگرایی

قضیه ۱۵.۱.۲. فرض کنید $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ سیستم متعامد یک V فضای هیلبرت باشند در این صورت نتایج زیر را داریم [۵۶]

۱. نامساوی بسل^۲

$$\sum_{i=1}^\infty |\langle v, v_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2, \quad \forall v \in V$$

۲. سری $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, v_i \rangle v_i$ در V همگراست.

۳. اگر $\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i \in V$ آنگاه $a_i = \langle v, v_i \rangle$.

۴. سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i$ در V همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$.

قضیه ۱۶.۱.۲. فرض کنید $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ سیستم متعامد یک از فضای هیلبرت V باشند در این صورت $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه‌های کامل و متعامد یک برای فضای هیلبرت V هستند [۵۶].

قضیه ۱۷.۱.۲. (قضیه همگرایی) اگر سری (۱۴.۲) برای حالتی که $N(u(x)) = 0$ یک جواب تحلیلی برای معادله (۱.۲) در فضای بازتولیدی $W_T^{\alpha}[0, T]$ باشد و

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_T^{\alpha}} \bar{\psi}_i(x),$$

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x),$$

که $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ پایه‌های متعامد یک از فضای $W_T^{\alpha}[0, T]$ است، آنگاه

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \mathbb{F}(x_k) \bar{\psi}_i(x),$$

جواب تقریبی معادله (۱.۲) است و داریم $(n \rightarrow \infty) \|u_n(x) - u(x)\|_{W_T^{\alpha}} \rightarrow 0$.

□

اثبات. رجوع شود به [۱۱].

۸.۱.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱۸.۱.۲. معادله دیفرانسیل کسری تأخیری زیر را در نظر بگیرید [۵۷، ۵۸]،

$$\begin{cases} D^{\alpha} u(x) - u(x-1) + u(x) = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = x^2, & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

که جواب دقیق این معادله $u(x) = x^2$ و $f(x) = \frac{\lambda x^{\alpha/\alpha}}{\alpha \sqrt{\pi}} + 2x - 1$

مثال ۱۹.۱.۲. معادله دیفرانسیل کسری تأخیری زیر را در نظر بگیرید [۵۷، ۵۸]،

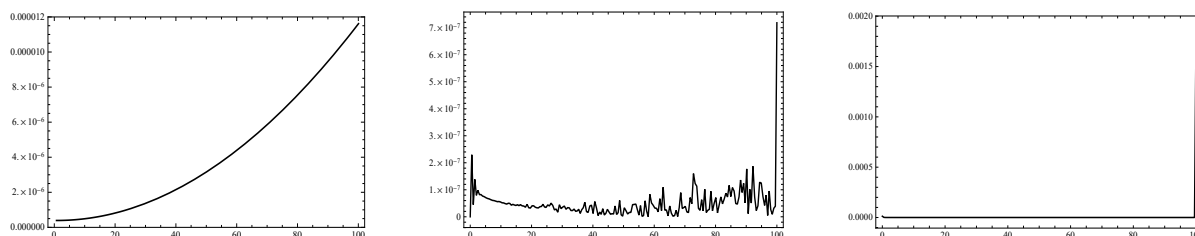
$$\begin{cases} D^{\alpha} u(x) - u(x-1) + u(x) = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = x^3, & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله $u(x) = x^3$ و $f(x) = 3x^2 + \frac{\gamma \Gamma(\frac{\gamma}{\alpha})}{\alpha \Gamma(\frac{\gamma}{\alpha})} - 3x + 1$

هر دو مثال یک معادله دیفرانسیل کسری تأخیری هستند و آنها را استفاده نرم افزار ریاضی متمتیکا^۱ حل می‌کنیم و نتایج حاصل از محاسبه‌ی مقادیر، ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی را با یکدیگر در جدول‌های ۱.۲، ۲.۲، ۳.۲ و شکل‌های ۱.۲، ۲.۲، ۳.۲ مقایسه می‌کنیم.

جدول ۱.۲: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۱۸.۱.۲) در بازه $x \in [0, 100]$

$Max u_n(x) - u(x) $						
E_{Δ_0}	$E_{\lambda_{00}}$	$Log_{\gamma} \frac{E_{\Delta_0}}{E_{\lambda_{00}}}$	$E_{\gamma_{00}}$	$Log_{\gamma} \frac{E_{\lambda_{00}}}{E_{\gamma_{00}}}$	$E_{\gamma_{00}}$	$Log_{\gamma} \frac{E_{\lambda_{00}}}{E_{\gamma_{00}}}$
2.30×10^{-3}	1.45×10^{-4}	۳.۹۸۷۵۱	8.70×10^{-6}	۴.۵۸۸۸۹	7.20×10^{-7}	۳.۵۹۴۹۵
$Max u'_n(x) - u'(x) $						
E'_{Δ_0}	$E'_{\lambda_{00}}$	$Log_{\gamma} \frac{E'_{\Delta_0}}{E'_{\lambda_{00}}}$	$E'_{\gamma_{00}}$	$Log_{\gamma} \frac{E'_{\lambda_{00}}}{E'_{\gamma_{00}}}$	$E'_{\gamma_{00}}$	$Log_{\gamma} \frac{E'_{\lambda_{00}}}{E'_{\gamma_{00}}}$
1.30×10^{-1}	3.20×10^{-2}	۲.۲۲۳۷	7.8×10^{-3}	۲.۳۶۵۳	2.00×10^{-3}	۱.۸۶۳۴۷



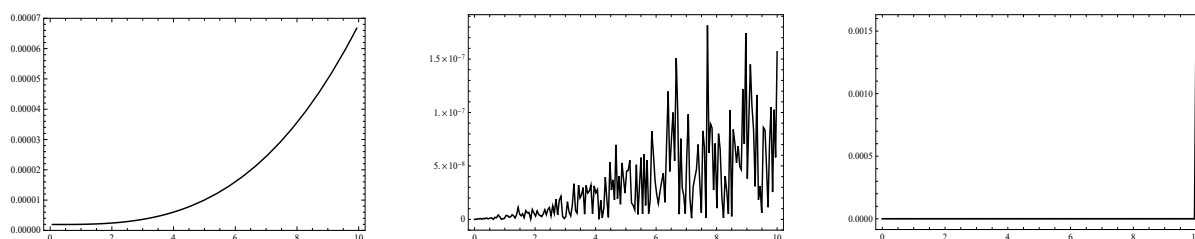
شکل ۱.۲: نمودار خطای مطلق برای مثال (۱۸.۱.۲) در بازه $x \in [0, 100]$ (چپ: [۵۸], $|u_{\lambda_{00}}(x) - u(x)|$; وسط: روش حاضر، $|u_{\gamma_{00}}(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u'_{\gamma_{00}}(x) - u'(x)|$).

$$E_n = \max_{x \in [0, T]} |u_n(x) - u(x)|,$$

$$E'_n = \max_{x \in [0, T]} |u'_n(x) - u'(x)|.$$

۹.۱.۲ آنالیز خطا

قضیه ۲۰.۱.۲. فرض کنید $u_n(x)$ جواب تقریبی معادله (۱.۲) در فضای $W^\gamma[0, T]$ و $u(x)$ جواب دقیق آن باشد. همچنین فرض کنید که $\|u(x) - u_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, T]} |u(x) - u_n(x)|$ و $\|u'(x) - u'_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, T]} |u'(x) - u'_n(x)|$ که C_1, C_2 ثابت‌های مثبت هستند و $h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|$ و تعداد نقاط



شکل ۲.۲: نمودار خطای مطلق برای مثال (۱۹.۱.۲) در بازه $x \in [0, 10]$ (چپ: [۵۸], $|u_{\lambda_{00}}(x) - u(x)|$; وسط: روش حاضر، $|u_{\gamma_{00}}(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u'_{\gamma_{00}}(x) - u'(x)|$).

جدول ۲.۲: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۱۹.۱.۲) در بازه $x \in [0, 10]$

$Max u_n(x) - u(x) $						
E_{Δ_0}	$E_{\lambda_{00}}$	$Log_2 \frac{E_{\Delta_0}}{E_{\lambda_{00}}}$	$E_{\lambda_{00}}$	$Log_2 \frac{E_{\lambda_{00}}}{E_{\lambda_{00}}}$	$E_{\lambda_{00}}$	$Log_2 \frac{E_{\lambda_{00}}}{E_{\lambda_{00}}}$
9.50×10^{-4}	5.80×10^{-5}	۴.۳۳۸	3.60×10^{-6}	۴.۹۹۸	2.60×10^{-7}	۳.۷۹۱۴۱
$Max u'_n(x) - u'(x) $						
E'_{Δ_0}	$E'_{\lambda_{00}}$	$Log_2 \frac{E'_{\Delta_0}}{E'_{\lambda_{00}}}$	$E'_{\lambda_{00}}$	$Log_2 \frac{E'_{\lambda_{00}}}{E'_{\lambda_{00}}}$	$E'_{\lambda_{00}}$	$Log_2 \frac{E'_{\lambda_{00}}}{E'_{\lambda_{00}}}$
4.10×10^{-1}	1.05×10^{-1}	۱.۹۶۵۲۳	2.6×10^{-2}	۲.۱۳۸۱	6.40×10^{-3}	۲.۲۲۳۷

جدول ۳.۲: مقایسه ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱۸.۱.۲) و (۱۹.۱.۲)

مثال ۱۸.۱.۲			مثال ۱۹.۱.۲		
روش حاضر		روش [۵۸]	روش حاضر		روش [۵۸]
$E_{\lambda_{00}}$	$E'_{\lambda_{00}}$	$E_{\lambda_{00}}$	$E_{\lambda_{00}}$	$E'_{\lambda_{00}}$	$E_{\lambda_{00}}$
7.20×10^{-7}	1.90×10^{-3}	1.20×10^{-5}	1.80×10^{-7}	1.55×10^{-3}	7.00×10^{-5}

هم محلی^۱ در بازه $[0, T]$ با n نشان داده می‌شود. اگر $u'''(x) \in C[0, T]$ و $\|u_n'''(x)\|_\infty$ کراندار باشد آنگاه داریم،

$$\|u(x) - u_n(x)\|_\infty \leq C_1 h^3,$$

$$\|u'(x) - u_n'(x)\|_\infty \leq C_2 h^2,$$

اثبات. با بهره‌گیری از استراتژی موجود در منابع [۵۹-۶۱] برای هر $[x_i, x_{i+1}] \subset [0, T]$ می‌توان نوشت،

$$u''(x) - u_n''(x) = u''(x) - u''(x_i) + u_n''(x_i) - u_n''(x) + u''(x_i) - u_n''(x_i). \quad (۱۶.۲)$$

دوجمله اول بسط سری تیلور $u'(x)$ در نقطه x_i به صورت زیر است

$$u''(x) \approx u''(x_i) + (x - x_i)u'''(x_i),$$

از آنجاکه $u'''(x) \in C[0, 1]$ ، ثابت c_1 وجود دارد بطوریکه $|u'''(x)| \leq c_1, \forall x \in [0, T]$

$$\|u''(x) - u''(x_i)\|_\infty \leq c_1 h. \quad (۱۷.۲)$$

همچنین می‌توان نوشت

$$u_n''(x_i) - u_n''(x) = - \int_{x_i}^x u_n'''(s) ds,$$

$$|u_n''(x_i) - u_n''(x)| \leq \int_{x_i}^x |u_n'''(s)| ds,$$

از آنجاکه $\|u_n'''(x)\|_\infty$ کراندار است، داریم

$$\|u_n''(x_i) - u_n''(x)\|_\infty \leq c_2 h. \quad (۱۸.۲)$$

اگر فرض کنیم $u_n^{(m)}(x)$ به طوریکه نواخت همگراست به $u^{(m)}(x)$ که $m = 0, 1, 2$ و برای هر $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0, \epsilon_3 > 0$ وجود دارد یک n به قدر کافی بزرگ به طوریکه،

$$|u''(x_i) - u_n''(x_i)| \leq \epsilon_1,$$

$$|u'(x_i) - u_n'(x_i)| \leq \epsilon_2, \quad (۱۹.۲)$$

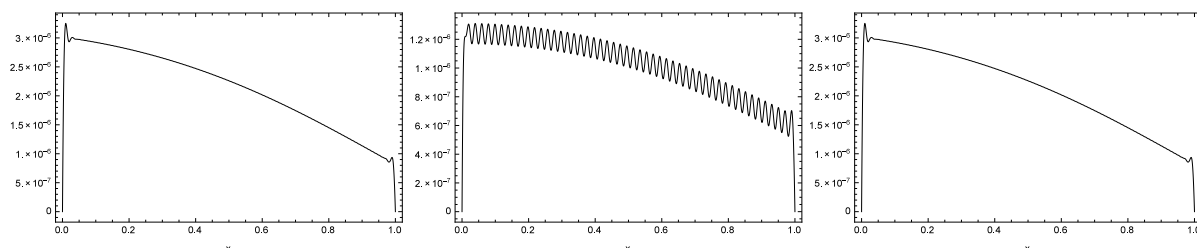
$$|u(x_i) - u_n(x_i)| \leq \epsilon_3.$$

با ترکیب رابطه‌های (۱۶.۲)، (۱۷.۲)، (۱۸.۲) و (۱۹.۲) داریم،

$$\|u''(x) - u_n''(x)\|_\infty \leq C_3 h. \quad (۲۰.۲)$$

همچنین می‌توان نوشت،

$$u'(x) - u_n'(x) = u'(x_i) - u_n'(x_i) + \int_{x_i}^x (u''(t) - u_n''(t)) dt, \quad (۲۱.۲)$$


 شکل ۳.۲: خطای مطلق برای مثال (۲۲.۱.۲) با $n = 100$ (راست: حالت اول، وسط: حالت دوم، چپ: حالت سوم)

$$u(x) - u_n(x) = u(x_i) - u_n(x_i) + \int_{x_i}^x (u'(t) - u'_n(t)) dt, \quad (22.2)$$

با ترکیب رابطه‌های (۱۹.۲)، (۲۰.۲)، (۲۱.۲) و (۲۲.۲) داریم،

$$\begin{aligned} \|u'(x) - u'_n(x)\|_{\infty} &\leq C_2 h^2, \\ \|u(x) - u_n(x)\|_{\infty} &\leq C_1 h^3. \end{aligned}$$

□

ملاحظه ۲۱.۱.۲.

مثال ۲۲.۱.۲. معادله دیفرانسیل تأخیری خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u'(x) - u(x-1) + u(x) = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = x^2, & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

که جواب دقیق این معادله $u(x) = x^2$ و

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & 0 \leq x < 1, \\ x^2 - (x-1)^2 + 2x, & 1 \leq x. \end{cases}$$

مثال ۲۳.۱.۲. معادله دیفرانسیل تأخیری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u'(x) - u(x-1) + u^2(x) = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = x^3, & x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

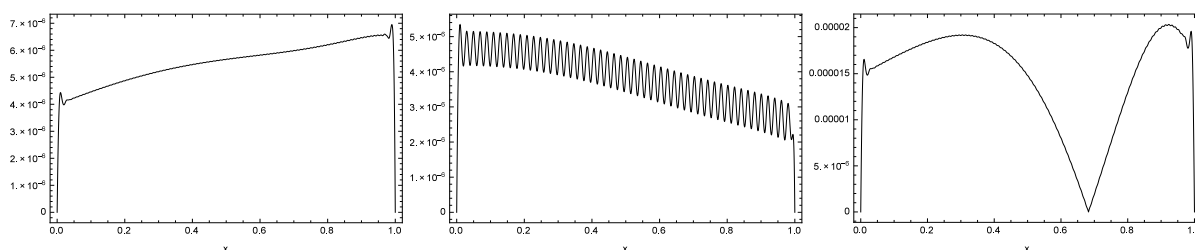
جواب دقیق این معادله $u(x) = x^3$ و

$$f(x) = \begin{cases} x^6 + 3x^2, & 0 \leq x < 1, \\ x^6 + 3x^2 - (x-1)^3, & 1 \leq x. \end{cases}$$

در ملاحظه ۲۱.۱.۲ ما با استفاده از حل دو مثال مربوط به معادله دیفرانسیل تأخیری با استفاده از روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامدسازی (روش مورد بحث این رساله) و روش هسته بازتولیدی با فرآیندی متعامدسازی نتایج بدست آمده حاصل از محاسبه نرم دو خطا و نرم بینهایت خطا و زمان محاسبه برنامه کامپیوتری را باهم در جدول ۴.۲ و شکل‌های

جدول ۴.۲: مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل مثال (۲۲.۱.۲) و مثال (۲۳.۱.۲) با هر سه حالت روش هسته بازتولیدی

	مثال (۲۲.۱.۲)			مثال (۲۳.۱.۲)		
	حالت اول	حالت دوم	حالت سوم	حالت اول	حالت دوم	حالت سوم
L_∞						
$n = 32$	1.15×10^{-5}	1.90×10^{-6}	1.20×10^{-5}	5.40×10^{-5}	5.40×10^{-5}	2.30×10^{-5}
$n = 64$	1.60×10^{-6}	2.70×10^{-7}	1.60×10^{-6}	1.50×10^{-5}	7.00×10^{-6}	4.00×10^{-6}
$n = 128$	2.30×10^{-7}	3.10×10^{-8}	2.30×10^{-7}	1.60×10^{-6}	7.50×10^{-7}	5.60×10^{-7}
L_T						
$n = 32$	8.05×10^{-6}	9.04×10^{-7}	8.05×10^{-6}	4.07×10^{-5}	3.87×10^{-5}	1.95×10^{-5}
$n = 64$	1.05×10^{-6}	1.28×10^{-7}	1.05×10^{-6}	7.76×10^{-6}	4.83×10^{-6}	2.45×10^{-6}
$n = 128$	1.48×10^{-7}	1.39×10^{-8}	1.48×10^{-7}	1.03×10^{-6}	5.45×10^{-7}	2.41×10^{-7}
CPU Time (sec)						
$n = 32$	۱۱	۶.۵	۱۲	۱۷.۵	۱۰	۱۵.۵
$n = 64$	۴۹.۵	۱۴.۵	۲۵	۸۴	۲۶.۵	۳۹.۵
$n = 128$	۳۱۳.۵	۳۹	۶۲	۷۹۲.۵	۹۰.۵	۲۴۲.۵



شکل ۴.۲: خطای مطلق برای مثال (۲۳.۱.۲) با $n = 100$ (راست: حالت اول وسط: حالت دوم چپ: حالت سوم)

۳.۲ و ۴.۲ مقایسه می کنیم. لازم به ذکر است که منظور از حالت اول همان روش هسته بازتولیدی با فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت است و منظور از حالت دوم نیز روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت (روش مورد بحث در این رساله) است و منظور از حالت سوم هم باز همان روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت می باشد، منتها اینبار با پایه های جدیدی که در ۵.۱.۲ معرفی شده اند.

$$L_{\infty} = \max_{x \in x} |u(x) - u_n(x)|,$$
$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(u_n(x_i) - u(x_i))^2}{n}}.$$

فصل ۳

روش هسته بازتولیدی برای حل مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه
کسری متغیر

۱.۳ مقدمه

در دهه‌های اخیر نظریه محاسبات کسری نقش مهمی در فیزیک، مهندسی، مکانیک سیالات و آنتروپی دارد [۶۲-۶۵]، همچنین می‌توان به برخی کاربردهای مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر در پردازش سیگنال، کاهش نویز، تأیید امضا و پردازش اطلاعات جغرافیایی اشاره کرد [۶۶-۷۰]. وجود و منحصر به فرد بودن جواب مسئله مقدار مرزی تابعی کسری متغیر در [۷۱] بررسی شده است. در این فصل مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} D^{\alpha(x)}u(x) + g_1(x)u'(x) + g_2(x)u(\tau(x)) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = A, \quad u(1) = B, \end{cases} \quad (1.3)$$

که g_1, g_2 تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند و تابع f به گونه‌ای داده شده که مسئله دارای یک جواب منحصر به فرد باشد و $D^{\alpha(x)}$ مشتق کسری کاپوتو از مرتبه متغیر است که $1 < \alpha(x) \leq 2$ و A, B ثابت هستند و $\tau \in C^1[0, 1]$. همچنین قابل ذکر است که چون در این مسئله مرتبه مشتق کسری به جای یک مقدار ثابت یک تابع است از عنوان کسری متغیر برای نامگذاری آن استفاده شده است و همینطور که ملاحظه می‌کنید آرگومان تابع مجهول مسئله به جای متغیر اصلی مسئله، تابع τ است.

روش‌های محاسباتی مختلفی برای حل معادله (۱.۳) در منابع [۷۲-۷۴] بررسی شده است. مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر (۱.۳) توسط لی و وو^۱ با استفاده از روش هسته بازتولیدی در [۷۵] حل شده است. در حقیقت ما به دنبال این هستیم که بتوانیم تقریب‌ها و دقت‌های موجود را بهبود ببخشیم و یک تحلیل خطای معتبر هم بر روی روشی که ارائه می‌کنیم بیاوریم. ما از روش هسته بازتولیدی، بدون فرآیند متعامد سازی استفاده می‌کنیم. در فصل قبل اشاره کردیم که این روش اولین بار توسط یولان ونگ مطرح شد، اما کارهای پژوهشی با استفاده از این روش توسط صحیحی و عباس‌بندی بر روی مسائل اغتشاشی منفرد انجام شده است که برای بررسی بیشتر مراجعه کنید به [۷۶-۸۰]. همچنین این روش برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی مرتبه دو و مدل براتو کسری آتنگانا-بلانو^۲ استفاده شده است [۸۱، ۸۲].

به طور کلی ما به دنبال بهبود جواب تقریبی معادله (۱.۳) در مقایسه با سایر روشها هستیم. برای این منظور باید به دو عامل مهم توجه کنیم، یکی انتخاب ضرب داخلی مناسب در فضای هسته بازتولیدی مورد نظر و دوم انتخاب نقاط هم‌محلی چگال در سرتاسر بازه تعریف معادله (۱.۳). انتخاب درست این عوامل برای به دست آوردن یک جواب تقریبی با دقت بالا بسیار مهم است. اگر این عوامل درست در نظر گرفته نشوند، ممکن است نتوانیم معادله (۱.۳) را با دقت مورد نظر حل کنیم. قبل از توضیح این عوامل، ما فضای بازتولیدی $W^3[0, 1]$ را در نظر می‌گیریم و معادله (۱.۳) را در این فضا حل می‌کنیم. تفاوت‌هایی بین روش حاضر در این رساله و روش پیشنهادی در [۸۳، ۷۵] وجود دارد که در اینجا به وضوح توضیح خواهیم داد. در [۷۵]، از فضای هسته بازتولیدی $W^4[0, 1]$ برای حل معادله (۱.۳) استفاده شده است و از آنجایی که $W^4[0, 1]$ زیرفضای فضای هسته بازتولیدی $W^3[0, 1]$ است، می‌دانیم که دقت جواب‌های تقریبی در فضای بازتولیدی $W^4[0, 1]$ بسیار بهتر از فضای بازتولیدی $W^3[0, 1]$ است. نکته مهم این است که جواب تقریبی باید در فضای بزرگتر محاسبه شوند و ما به دنبال جواب تقریبی در فضای بزرگتر هستیم. بنابراین، اهمیت کار ما در یافتن جوابهای تقریبی در فضای بزرگتر است. علاوه بر این، در [۸۳] فضای هسته بازتولیدی $W^3[0, 1]$ در نظر گرفته شده است، اما ما در جدول ۲.۳ نشان می‌دهیم که جواب‌های تقریبی به دست آمده با روش حاضر بهتر از جواب‌های موجود در [۸۳] هستند و این در حالی است که هر دو جواب تقریبی در فضای هسته بازتولید $W^3[0, 1]$ هستند. حال این سوال مطرح می‌شود

که چرا با توجه به یکی بودن فضای هسته بازتولیدی $W^{\alpha}[\circ, 1]$ در هر دو روش [۸۳] و روش ما، جوابهای تقریبی روش حاضر دقیق تر هستند؟

برای پاسخ به این سوال، باید به دو نکته اساسی توجه کنیم که نقش مهمی در بهبود جوابهای تقریبی حاصل از پیاده سازی روش هسته بازتولیدی در معادله (۱.۳) دارد. می دانیم که ضرب داخلی استاندارد در [۱۱] معرفی شده است و در [۸۳، ۷۵] استفاده شده است. همانطور که در بالا هم اشاره شد انتخاب ضرب داخلی برای حل معادله (۱.۳) بسیار مهم است، زیرا اگر از ضرب داخلی استاندارد استفاده کنیم، نمی توانیم تقریب مناسبی از جواب معادله بدست آوریم. بنابراین، ما از ضرب داخلی معرفی شده در [۸۴] استفاده می کنیم که با فرم استاندارد در [۸۳، ۷۵] متفاوت است. پس تاکنون متوجه شدیم که فضای هسته بازتولیدی $W^{\alpha}[\circ, 1]$ و ضرب داخلی آن با [۸۳، ۷۵] متفاوت است. نکته بعدی که بسیار مهم است، نحوه انتخاب نقاط در بازه $[\circ, 1]$ برای تشکیل پایه برای فضای هسته بازتولیدی $W^{\alpha}[\circ, 1]$ است. مهمترین استراتژی برای حل معادله (۱.۳) انتخاب نقاط هم محلی برای $[\circ, 1]$ است. چرا که انتخاب نقاط ارتباط مستقیم با ساختن پایه ها برای فضای هسته بازتولیدی $W^{\alpha}[\circ, 1]$ دارد و می دانیم هرچه پایه ها بهتری یا به عبارت دیگر دقیقتری تولید شوند، می توان تقریب بهتری از جواب معادله مورد نظر بدست آورد. اگر نقاط هم محلی دارای ویژگی نمایی با چگالی بالا در نزدیکی مرزهای بازه $[\circ, 1]$ باشند، می توان پایه های مناسبی برای فضای هسته بازتولیدی $W^{\alpha}[\circ, 1]$ ایجاد کرد و یک تقریب مناسب از جواب معادله (۱.۳) دست آورد. ما با استفاده از ویژگی چگالی بالا و نمایی این نقاط در نزدیکی مرزهای بازه $[\circ, 1]$ به دقتهای تقریبی بالایی دست یافته ایم. با توجه به توضیحات داده شده، می توان به اختصار اشاره کرد که ما توانستیم جوابهای تقریبی معادله (۱.۳) را در مقایسه با [۸۳، ۷۵] بهبود بخشیم.

۱.۱.۳ معرفی فضای هسته بازتولیدی و پایه های مربوطه برای مسئله مقدار مرزی تابعی کسری متغیر

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم تابع پیوسته $u(x)$ را داریم، مشتق کسری کاپوتو $D^{\alpha(x)}u(x)$ به صورت زیر تعریف می شود [۲۵-۲۲]،

$$D^{\alpha(x)}u(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha(x))} \int_{\circ}^x \frac{u^{(m)}(s)}{(x - s)^{\alpha(x)+1-m}} ds, \quad m - 1 \leq \alpha(x) < m,$$

مسئله مقدار مرزی تابعی کسری متغیر (۱.۳) را در نظر می گیریم. $D^{\alpha(x)}$ مشتق کسری کاپوتو از مرتبه متغیر است که $1 < \alpha(x) \leq 2$ و چونکه در اینجا کران بالای بزرگترین مرتبه مشتق کسری ۲ است بنابراین ما فضای بازتولیدی برای حل این مسئله را $W^{\alpha}[\circ, 1]$ در نظر می گیریم. برای مثال اگر کران بالای بزرگترین مرتبه مشتق کسری ۳ بود، فضای بازتولیدی برای حل مسئله (۱.۳) را $W^{\alpha}[\circ, 1]$ در نظر می گرفتیم، و به همین ترتیب تا آخر. حال که نحوه انتخاب فضای بازتولیدی برای معادله (۱.۳) را متوجه شدیم، ابتدا عملگر معادله (۱.۳) را به صورت $L(u(x)) = D^{\alpha(x)}u(x) + g_1(x)u'(x) + g_0(x)u(\tau(x))$ بازه $x \in [\circ, 1]$ در نظر می گیریم و فضای بازتولیدی $W^{\alpha}[\circ, 1]$ و $W^{\alpha}[\circ, 1]$ را برای معادله (۱.۳) به صورت زیر تعریف می کنیم

$$W^{\alpha}[\circ, 1] = \left\{ u \mid u'' \text{ تابع مطلقا پیوسته است}, u''' \in L^2[\circ, 1], u(\circ) = u(1) = \circ \right\},$$

$$W^{\alpha}_1[\circ, 1] = \left\{ u \mid u \text{ تابع مطلقا پیوسته است}, u' \in L^2[\circ, 1] \right\},$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $W^{\alpha}[\circ, 1]$ و $W^{\alpha}_1[\circ, T]$ به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\langle u_1(\cdot), u_2(\cdot) \rangle_{W^\tau} = u_1(\circ)u_2(\circ) + u_1'(\circ)u_2'(\circ) + u_1(1)u_2(1) + \int_{\circ}^1 u_1'''(x)u_2'''(x)dx,$$

$$\|u\|_{W^\tau[\circ,1]} = \sqrt{\langle u(\cdot), u(\cdot) \rangle_{W^\tau[\circ,1]}}, \quad \forall u_1, u_2 \in W^\tau[\circ,1].$$

$$\langle u_1(\cdot), u_2(\cdot) \rangle_{W^\gamma[\circ,T]} = u_1(\circ)u_2(\circ) + \int_{\circ}^1 u_1'(x)u_2'(x)dx,$$

$$\|u\|_{W^\gamma[\circ,1]} = \sqrt{\langle u(\cdot), u(\cdot) \rangle_{W^\gamma[\circ,1]}}, \quad \forall u_1, u_2 \in W^\gamma[\circ,1].$$

همچنین فضای عملگر معادله به صورت $L : W^\tau[\circ,1] \rightarrow W^\gamma[\circ,1]$ است. به راحتی می‌توان ثابت کرد که L یک عملگر خطی کراندار است [۱۱]، با این فرض که L^* عملگر خودالحاقی L است را به صورت $L^* : W^\gamma[\circ,1] \rightarrow W^\tau[\circ,1]$ تعریف می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $r_y(x)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $W^\gamma[\circ,1]$ و با مشخص کردن y با استفاده از نقاط $x_i \in [\circ,1]$ داریم $\varphi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که پایه‌های فضای $W^\gamma[\circ,1]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\psi_i(x) = L^*\varphi_i(x).$$

با فرض اینکه عملگر L یک عملگر خطی کراندار است [۱۱]، لم زیر که یک پایه کامل برای فضای $W^\tau[\circ,1]$ ارائه می‌دهد، را داریم که می‌توان هر کدام از اعضای این فضا را با استفاده از این پایه‌ها بسط داد.

لم ۲.۱.۳. مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[\circ,1]$ در نظر می‌گیریم، آنگاه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک پایه کامل برای فضای هسته بازتولیدی $W^\tau[\circ,1]$ است.

قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را تابع هسته بازتولیدی فضای $W^\tau[\circ,1]$

$$R_y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{12}x^\circ y^\tau + \frac{x^\tau y^\tau}{24} + \frac{x^\tau y^\tau}{24} + \frac{4x^\tau y^\tau}{12} - \frac{x^\tau y^\tau}{12} - \frac{x^\tau y^\circ}{12} - \\ \frac{x^\tau y^\tau}{24} - x^\tau y + \frac{x^\circ}{12} - xy^\tau + xy, & x \leq y, \\ -\frac{1}{12}x^\circ y^\tau + \frac{x^\tau y^\tau}{24} - \frac{x^\tau y^\tau}{12} + \frac{x^\tau y^\tau}{24} + \frac{4x^\tau y^\tau}{12} - \frac{x^\tau y^\circ}{12} - \\ x^\tau y - xy^\tau - \frac{xy^\tau}{24} + xy + \frac{y^\circ}{12}, & y < x. \end{cases}$$

در اینجا نحوه تولید پایه‌های $\psi_i(x)$ با استفاده از تابع هسته بازتولیدی را بیان می‌کنیم. برای ساختن پایه‌های $\psi_i(x)$ قبل مقداردهی $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ به y در هسته $R_y(x)$ ابتدا یکبار عملگر معادله را بر روی هسته $R_y(x)$ اثر می‌دهیم، به صورت زیر

(۲.۳)

$$\psi_i(x) = L^*\varphi_i(x) = \langle \mathbb{L}^*\varphi_i(y), R_x(y) \rangle_{W^\tau} = \langle \varphi_i(y), L_y R_x(y) \rangle_{W^\gamma} = L_y R_x(y)|_{y=x_i}$$

$$D_y^\alpha(R_x(y))\Big|_{y=x_i} + g(y)\frac{\partial R_x(y)}{\partial y}\Big|_{y=x_i} + g_\circ(y)R_x(\tau(y))\Big|_{y=x_i}, \quad \circ \leq x \leq 1,$$

که $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[\circ,1]$ و L عملگر خطی کراندار مسئله (۱.۳) است.

۲.۱.۳ تقریب جواب مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر

فرض می‌کنیم $L(u(x))$ یک عملگر دیفرانسیلی معکوس‌پذیر خطی کراندار باشد و همچنین فرض کنید در حالت کلی معادله (۱.۳) دارای جمله‌های غیرخطی باشد که با عملگر غیرخطی $N(u(x))$ نشان می‌دهیم، و فرض می‌کنیم که $N(u(x))$ نیز پیوسته باشد. یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ مانند $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$\xi_i(x) = R_y(x)|_{y=x_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^{\alpha}[0, 1]$ و $r_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^{\lambda}[0, 1]$ می‌باشند. همچنین به راحتی ثابت می‌شود که $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل برای فضای $W_p^{\alpha}[0, 1]$ است. $\varphi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که $\varphi_i(x)$ پایه‌های فضای $W_p^{\lambda}[0, 1]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\xi_i(x) = L^* \varphi_i(x).$$

که L^* عملگر خودالحاقی L است.

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, T]$ باشد و L^{-1} وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (۱.۳) به صورت زیر است

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \xi_i(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

که ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند و m تعداد تکرارها برای جمله غیرخطی مسئله $N(u(x))$ است. اثبات.

$$\begin{aligned} (u_m(x_j)) &= \langle L(u_m(x)), \varphi_j(x) \rangle = \langle u_m(x), L^* \varphi_j(x) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \xi_i(x), L^* \varphi_j(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle L \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \xi_i(x) \right), \xi_j(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} L(\xi_i(x)), \varphi_j(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} L(\xi_i(x))|_{x=x_j} = \\ &= N(u_{m-1}(x))|_{x=x_j} + f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

بنابراین $L(u_m(x_j)) = N(u_{m-1}(x))|_{x=x_j} + f(x_j)$ و از آنجا که $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[0, 1]$ است در نتیجه داریم $L(u_m(x)) = N(u_{m-1}(x)) + f(x)$ و جواب تقریبی مسئله (۱.۳) با n تا نقطه به صورت زیر است،

$$u_{n,m}(x) = \sum_{i=1}^n c_{i,m} \xi_i(x), \quad (4.3)$$

□

که m باید به قدر کافی بزرگ باشد.

اکنون نحوه محاسبه ضرایب مجهول $m = 1, 2, \dots$ را بیان می‌کنیم. با استفاده از جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ و قرار دادن آن در معادله (۱.۳) تابع مانده $R_n(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R_n(x) = L(u_{n,m}(x)) - N(u_{n,m-1}(x)) - f(x), \quad (5.3)$$

اکنون ضرایب $c_{i,m}$ را طوری محاسبه می‌کنیم که ضرب داخلی زیر برابر صفر باشد، یعنی

$$\langle R_n(x), \xi_j(x) \rangle_{W_T} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (6.3)$$

با استفاده از تعریف تابع مانده و تعریف جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ داریم

$$\begin{aligned} \langle R_n(x), \xi_j(x) \rangle &= \langle L(u_{n,m}(x)) - N(u_{n,m-1}(x)) - f(x), \xi_j(x) \rangle \\ &= \langle L(u_{n,m}(x)), \xi_j(x) \rangle - \langle N(u_{n,m-1}(x)) + f(x), \xi_j(x) \rangle \\ &= \langle L\left(\sum_{i=1}^n c_{i,m} \xi_i(x)\right), \xi_j(x) \rangle - \langle N(u_{n,m-1}(x)) + f(x), \xi_j(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c_{i,m} \langle L(\xi_i(x)), \xi_j(x) \rangle - \langle N(u_{n,m-1}(x)) + f(x), \xi_j(x) \rangle = 0, \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی به یک دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر می‌رسیم که با حل آن می‌توان ضرایب $c_{i,m}$ را محاسبه کرد. قرار می‌دهیم $m = 1$ و فرض می‌کنیم که $u_{m-1}(x)$ برای $m = 1$ یک تابع اولیه باشد به طوری که $u_0(x)$ در شرایط مرزی مسئله (۱.۳) صدق می‌کند و برای هر تکرار $m = 2, 3, \dots$ تابع $u_{m-1}(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^n c_{i,m} L\xi_i(x)|_{x=x_j} = N(u_{n,m-1}(x))|_{x=x_j} + f(x_j), \quad m = 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} & \quad (8.3) \\ & \begin{bmatrix} L\xi_1(x_1) & L\xi_2(x_1) & L\xi_3(x_1) & \dots & L\xi_n(x_1) \\ L\xi_1(x_2) & L\xi_2(x_2) & L\xi_3(x_2) & \dots & L\xi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L\xi_1(x_{n-1}) & L\xi_2(x_{n-1}) & L\xi_3(x_{n-1}) & \dots & L\xi_n(x_{n-1}) \\ L\xi_1(x_n) & L\xi_2(x_n) & L\xi_3(x_n) & \dots & L\xi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,m} \\ c_{2,m} \\ \vdots \\ c_{n-1,m} \\ c_{n,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(y_{n,m-1}(x_1)) + f(x_1) \\ N(y_{n,m-1}(x_2)) + f(x_2) \\ \vdots \\ N(y_{n,m-1}(x_{n-1})) + f(x_{n-1}) \\ N(y_{n,m-1}(x_n)) + f(x_n) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

اکنون نشان می‌دهیم که جواب دستگاه معادلات (۸.۳) وجود دارد و منحصر به فرد است. برای اینکه نشان دهیم دستگاه معادلات (۸.۳) دارای یک جواب منحصر به فرد است باید نشان دهیم ماتریس $[L\xi_i(x_j)]_{i=1,2,\dots,n}^{j=1,2,\dots,n}$ معین مثبت است که با توجه به تعریف معین مثبت بودن ماتریس یعنی باید نشان دهیم که

$$A^T L\xi_i(x_j) A > 0, \quad \forall A \in R^n$$

قضیه ۴.۱.۳. اگر L^{-1} وجود داشته باشد، آنگاه دستگاه معادلات (۸.۳) دارای یک جواب منحصر به فرد است.

۳.۱.۳ آنالیز همگرایی

قضیه همگرایی و نحوه اثبات آن همانند فصل دوم می باشد.

قضیه ۵.۱.۳. (قضیه همگرایی) فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[0, T]$ باشند، آنگاه جواب تقریبی معادله (۱.۳) به جواب دقیق معادله همگراست یعنی

$$u_{n,m}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

نتیجه ۶.۱.۳. [۱۱] جواب تقریبی $u_{n,m}^{(k)}(x)$ به طور یکنواخت همگراست به $u^{(k)}(x)$ که $k = 0, 1, 2$ و $m = 2, 3, \dots$

۴.۱.۳ مثال‌های عددی

مثال ۷.۱.۳. مسئله مقدار مرزی تابعی کسری متغیر زیر را در نظر بگیرید [۸۳، ۷۵]

$$\begin{cases} D^{\alpha(x)}u(x) + \cos(x)u'(x) + 4u(x) + 5u(x^2) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

که جواب دقیق این معادله $u(x) = x^2$ و $\alpha(x) = \frac{5+\sin(x)}{4}$ و $f(x) = -\frac{2x^{2-\alpha(x)}}{(\alpha(x)-2)\Gamma(2-\alpha(x))} + 5x^4$

مثال ۸.۱.۳. مسئله مقدار مرزی تابعی کسری متغیر زیر را در نظر بگیرید [۷۵]

$$\begin{cases} D^{\alpha(x)}u(x) + e^x u'(x) + 2u(x) + 8u(e^{x-1}) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 4, \quad u(1) = 9, \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله $u(x) = x^2 + 4x + 4$ و $\alpha(x) = \frac{e+\cos(x)}{4}$ و $f(x) = -\frac{2x^{2-\alpha(x)}}{(\alpha(x)-2)\Gamma(2-\alpha(x))} + 2(x^2 + 4x + 4) + 8(4e^{x-1} + e^{2x-2} + 4) + e^x(2x + 4)$

مثال ۹.۱.۳. مسئله مقدار مرزی تابعی کسری متغیر زیر را در نظر بگیرید [۷۵]

$$\begin{cases} D^{\alpha(x)}u(x) + \sin(x)u'(x) + \sin(u^2(x)) + 4u(e^x) = f(x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

جواب دقیق این معادله $u(x) = x(x-1)$ و $\alpha(x) = \frac{1+\sin(2x)}{4}$ و $f(x) = -\frac{2x^{2-\alpha(x)}}{(\alpha(x)-2)\Gamma(2-\alpha(x))} + x \sin((x-1)^2 x^2) + 4e^x(e^x - 1) + (2x - 1) \sin(x)$

هر سه مثال را با استفاده از نرم‌افزار ریاضی متممیکا حل می‌کنیم و نتایج حاصل از محاسباتی مقادیر، ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی را با یکدیگر در جدول‌های ۱.۳، ۲.۳، ۳.۳، ۴.۳ و ۵.۳ و شکل‌های ۱.۳، ۲.۳، ۳.۳، ۴.۳ و ۵.۳ مقایسه می‌کنیم.

جدول ۱.۳: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۷.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$

$E_n = \max u_n(x) - u(x) $						
E_{λ_0}	E_{τ_0}	$\log_2 \frac{E_{\lambda_0}}{E_{\tau_0}}$	E_{τ_0}	$\log_2 \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$	E_{λ_0}	$\log_2 \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$
4.80×10^{-11}	2.60×10^{-12}	4.20645	2.00×10^{-13}	3.70044	1.20×10^{-14}	4.58889
$E'_n = \max u'_n(x) - u'(x) $						
E'_{λ_0}	E'_{τ_0}	$\log_2 \frac{E'_{\lambda_0}}{E'_{\tau_0}}$	E'_{τ_0}	$\log_2 \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$	E'_{λ_0}	$\log_2 \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$
4.60×10^{-10}	3.80×10^{-11}	3.59756	9.4×10^{-12}	2.91527	1.20×10^{-12}	2.96963

جدول ۲.۳: مقایسه ماکسیمم مقدار خطای مطلق جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی برای مثال (۷.۱.۳) در $x \in [0, 1]$

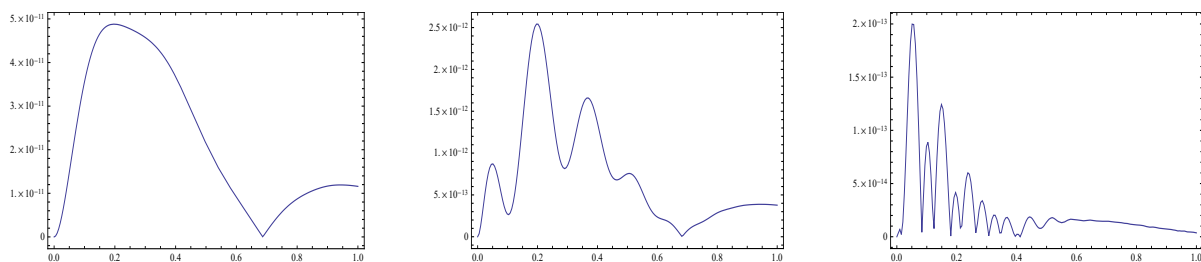
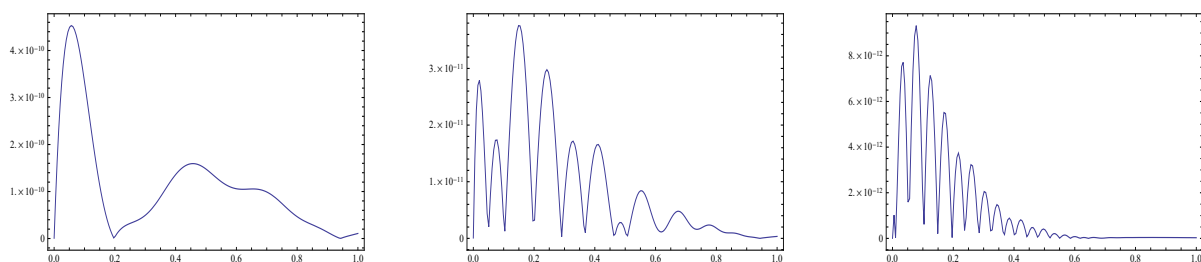
روش حاضر			روش [۷۵]			روش [۸۳]	
E_{λ_0}	E_{τ_0}	E_{τ_0}	E_{λ_0}	E_{τ_0}	E_{τ_0}	E_{λ_0}	E_{τ_0}
4.80×10^{-11}	2.60×10^{-12}	2.00×10^{-13}	3.13×10^{-6}	4.53×10^{-7}	5.30×10^{-8}	2.66×10^{-7}	2.45×10^{-8}
E'_{λ_0}	E'_{τ_0}	E'_{τ_0}	E'_{λ_0}	E'_{τ_0}	E'_{τ_0}	E'_{λ_0}	E'_{τ_0}
4.60×10^{-10}	3.80×10^{-11}	9.4×10^{-12}	—	—	—	1.15×10^{-6}	1.01×10^{-8}

$$\begin{aligned}
 E_n &= \max_{x \in [0, T]} |u_{n,m}(x) - u(x)|, \\
 E'_n &= \max_{x \in [0, T]} |u'_{n,m}(x) - u'(x)|, \\
 Re_n &= \left| \frac{u_{n,m}(t) - u(t)}{u(t)} \right|, \\
 Re'_n &= \left| \frac{u'_{n,m}(t) - u'(t)}{u'(t)} \right|,
 \end{aligned}$$

۲.۳ آنالیز خطا

در ادامه یک کران خطا برای روش هسته بازتولیدی که بر روی مسئله (۱.۳) به کار برده شده است، می‌آوریم.

قضیه ۱.۲.۳. قرار می‌دهیم $u_{n,m}^{(k)}(x)$ جواب تقریبی بدست آمده از روش هسته بازتولیدی در فضای $W^r[0, 1]$ و $u^{(k)}(x)$

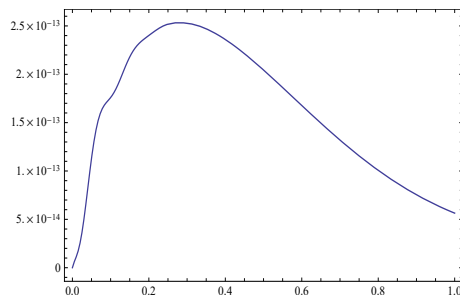
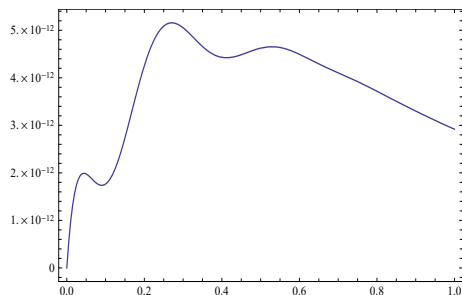

 شکل ۱.۳: نمودار خطای مطلق برای مثال (۷.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$: چپ: $|u_{\lambda_0}(x) - u(x)|$; وسط: $|u_{\tau_0}(x) - u(x)|$; راست: $|u_{\varphi_0}(x) - u(x)|$.

 شکل ۲.۳: نمودار خطای مطلق برای مثال (۷.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$: چپ: $|u'_{\lambda_0}(x) - u'(x)|$; وسط: $|u'_{\tau_0}(x) - u'(x)|$; راست: $|u'_{\varphi_0}(x) - u'(x)|$.

 جدول ۳.۳: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۸.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$

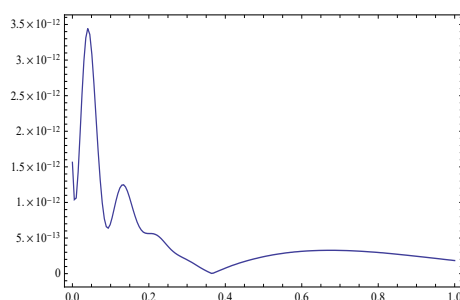
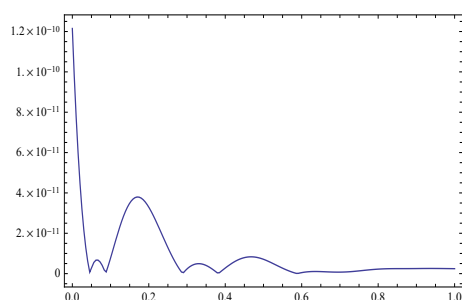
$E_n = \max u_n(x) - u(x) $						
E_{λ_0}	E_{τ_0}	$\log_{\tau} \frac{E_{\lambda_0}}{E_{\tau_0}}$	E_{φ_0}	$\log_{\tau} \frac{E_{\tau_0}}{E_{\varphi_0}}$	E_{λ_0}	$\log_{\tau} \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$
3.80×10^{-11}	7.50×10^{-12}	۲,۴۷۳۱	1.35×10^{-12}	۲,۴۷۳۹۳	2.30×10^{-13}	۲,۵۵۳۲۵
$E'_n = \max u'_n(x) - u'(x) $						
E'_{λ_0}	E'_{τ_0}	$\log_{\tau} \frac{E'_{\lambda_0}}{E'_{\tau_0}}$	E'_{φ_0}	$\log_{\tau} \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\varphi_0}}$	E'_{λ_0}	$\log_{\tau} \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$
4.80×10^{-10}	7.50×10^{-11}	۲,۶۷۸۰۷	1.40×10^{-11}	۲,۴۲۱۴۶	2.50×10^{-12}	۲,۴۸۵۴۳

 جدول ۴.۳: مقایسه خطای نسبی $Re_n = \left| \frac{u_n(x) - u(x)}{u(x)} \right|$ و $Re'_n = \left| \frac{u'_n(x) - u'(x)}{u'(x)} \right|$ برای جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی برای مثال (۸.۱.۳) در $x \in [0, 1]$

روش حاضر			روش [۷۵]		
Re_{λ_0}	Re_{τ_0}	Re_{φ_0}	Re_{λ_0}	Re_{τ_0}	Re_{φ_0}
5.20×10^{-12}	1.40×10^{-12}	2.50×10^{-13}	3.40×10^{-7}	—	2.90×10^{-8}
Re'_{λ_0}	Re'_{τ_0}	Re'_{φ_0}	Re'_{λ_0}	Re'_{τ_0}	Re'_{φ_0}
1.20×10^{-10}	1.80×10^{-11}	3.50×10^{-12}	3.00×10^{-6}	—	2.60×10^{-7}



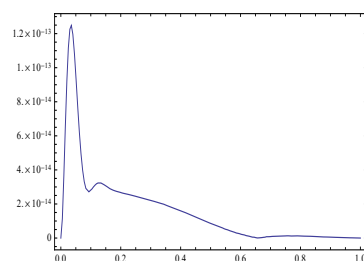
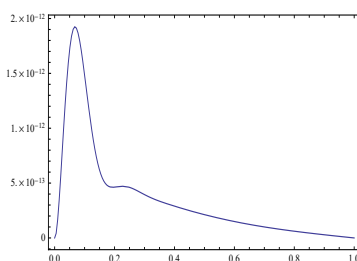
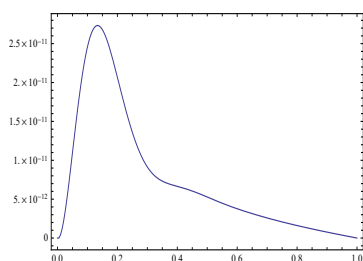
شکل ۳.۳: نمودار خطای نسبی برای مثال (۸.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$ (چپ): $| \frac{u_{\tau_0}(x) - u(x)}{u(x)} |$; راست: $| \frac{u_{\tau_0}(x) - u(x)}{u(x)} |$.



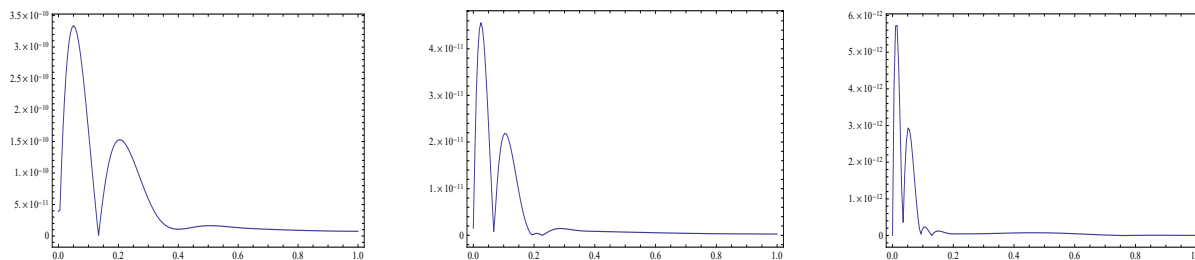
شکل ۴.۳: نمودار خطای نسبی برای مثال (۸.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$ (چپ): $| \frac{u'_{\tau_0}(x) - u'(x)}{u'(x)} |$; راست: $| \frac{u'_{\tau_0}(x) - u'(x)}{u'(x)} |$.

جدول ۵.۳: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و مرتبه همگرایی برای مثال (۹.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$

$E_n = \max u_n(x) - u(x) $						
E_{λ_0}	E_{τ_0}	$\log_{\tau} \frac{E_{\lambda_0}}{E_{\tau_0}}$	E_{τ_0}	$\log_{\tau} \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$	E_{λ_0}	$\log_{\tau} \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$
2.80×10^{-11}	1.90×10^{-12}	۳.۸۸۱۳۶	1.25×10^{-12}	۳.۹۲۶	8.50×10^{-15}	۳.۸۷۸۳۲
$E'_n = \max u'_n(x) - u'(x) $						
E'_{λ_0}	E'_{τ_0}	$\log_{\tau} \frac{E'_{\lambda_0}}{E'_{\tau_0}}$	E'_{τ_0}	$\log_{\tau} \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$	E'_{λ_0}	$\log_{\tau} \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$
3.40×10^{-10}	4.60×10^{-11}	۲.۸۸۵۸۳	5.80×10^{-12}	۲.۹۸۷۵۱	7.90×10^{-13}	۲.۸۷۶۱۳



شکل ۵.۳: نمودار خطای مطلق برای مثال (۹.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$ (چپ): $|u_{\tau_0}(x) - u(x)|$; وسط: $|u_{\tau_0}(x) - u(x)|$; راست: $|u_{\tau_0}(x) - u(x)|$.



شکل ۶.۳: نمودار خطای مطلق برای مثال (۹.۱.۳) در بازه $x \in [0, 1]$: چپ: $|u'_m(x) - u'(x)|$; وسط: $|u'_m(x) - u'(x)|$; راست: $|u'_m(x) - u'(x)|$.

جواب دقیق مسئله (۱.۳) باشد که $k = 0, 1$ آنگاه

$$\|u_{n,m}(x) - u(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |u_{n,m}(x) - u(x)| \leq \theta h^{\gamma},$$

$$\|u'_{n,m}(x) - u'(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |u'_{n,m}(x) - u'(x)| \leq \Theta h^{\gamma},$$

که $i = 1, 2, \dots, n$ ، $h = \max |x_{i+1} - x_i|$ ، c_1, c_2 ثابت های مثبت هستند و n تعداد نقاط در نظر گرفته شده برای بازه $[0, 1]$ و m تعداد تکرارهای غیرخطی برای جمله $N(u(x))$ است و فرض می کنیم $f(x) \in C^{\gamma}[0, 1]$.

اثبات. از آنجا که $u_{n,m}$ جواب تقریبی مسئله (۱.۳) است و $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ نقاط هم محلی در بازه $[0, 1]$ است داریم،

$$L(u_{n,m}(x_i)) = N(u_{n,m-1}(x_i)) + f(x_i),$$

$$m = 2, 3, \dots \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

فرض کنید $\mathcal{R}_n(x) \in C^{\gamma}[0, 1]$ بدیهی است که $\mathcal{R}_n(x_i) = L(u_{n,m}(x_i)) - N(u(x_i)) + f(x_i)$ با بکار بردن قضیه رول^۱ برای $\mathcal{R}_n(x)$ در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 1, 2, \dots, n$

$$\mathcal{R}'_n(y_i) = 0, \quad y_i \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

قرار می دهیم $h_x = \max_{1 \leq i \leq n-1} |x_i - x_{i+1}|$ و $h_y = \max_{1 \leq i \leq n-1} |y_i - y_{i+1}|$ فرض می کنیم $\ell(x)$ چندجمله ای از درجه یک است که تابع $\mathcal{R}'_n(x)$ در y_i و y_{i+1} درونیایی می کند. واضح است که $\ell(x) = 0$ و با استفاده از خطای چندجمله ای درونیاب داریم $\forall x \in [y_i, y_{i+1}]$

$$\mathcal{R}'_n(x) = \mathcal{R}'_n(x) - \ell(x) = \frac{\mathcal{R}_n^{(\gamma)}(\eta_i)}{\gamma!} (x - y_i)(x - y_{i+1}), \quad \eta_i \in [y_i, y_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$|\mathcal{R}'_n(x)| \leq \frac{|\mathcal{R}_n^{(\gamma)}(\eta_i)|}{\gamma!} h_i^{\gamma} = c_i h_i^{\gamma},$$

$$c_i = \frac{|\mathcal{R}_n^{(\gamma)}(\eta_i)|}{\gamma!}, \quad h_i^{\gamma} = \max \{h_y\}.$$

قرار می دهیم $h = \max \{h_i\}$ و $c = \max \{c_i\}$ بنابراین داریم

$$\|\mathcal{R}'_n(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |\mathcal{R}'_n(x)| \leq c h^{\gamma}, \quad (9.3)$$

با انتگرال گیری از $\mathcal{R}'_n(x)$ در بازه $1, 2, \dots, n-1$ در $[x_i, x_{i+1}]$ داریم

$$\mathcal{R}_n(x) = \int_{y_i}^x \mathcal{R}'_n(t) dt,$$

و تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n(x) &\leq \|\mathcal{R}'_n(x)\|_{\infty} |x - y_i| \leq d_i h^{\gamma}, \\ \|\mathcal{R}_n(x)\|_{\infty} &= \max_{x \in [0,1]} |\mathcal{R}_n(x)| \leq d h^{\gamma}, \end{aligned} \quad (10.3)$$

بدیهی است که از معادله‌های (9.3) و (10.3) داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n^{\gamma}(\circ) &\leq d^{\gamma} h^{\epsilon}, \\ \int_{\circ}^1 (\mathcal{R}'_n(x))^{\gamma} dx &\leq c^{\gamma} h^{\epsilon}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

با استفاده از تعریف نرم برای فضای $W^{\gamma}[0,1]$ و معادله (11.3) داریم

$$\|\mathcal{R}_n(x)\|_{W^{\gamma}[0,1]} = \sqrt{(\mathcal{R}_n(\circ))^{\gamma} + \int_{\circ}^1 (\mathcal{R}'_n(x))^{\gamma} dx} \leq p h^{\gamma}. \quad (12.3)$$

با استفاده از تعریف $\mathcal{R}_n(x)$ و معادله (12.3) و کراندار بودن عملگر $\mathbb{M}$ ، داریم

$$\|u(x) - u_{n,m}(x)\|_{W^{\gamma}[0,1]} = \|L^{-1} \mathcal{R}_n(x)\|_{W^{\gamma}[0,1]} \leq \|L^{-1}\| \|\mathcal{R}_n(x)\|_{W^{\gamma}[0,1]} \leq \theta h^{\gamma}. \quad (13.3)$$

با استفاده از خاصیت هسته بازتولیدی $\hat{R}_y(x)$ و نامساوی کوشی-شوارتز

$$\begin{aligned} |u^{(j)}(x) - u_{n,m}^{(j)}(x)| &= \left| \left\langle u(y) - u_{n,m}(y), \frac{\partial^j \hat{R}_y(x)}{\partial x^j} \right\rangle_{W^{\gamma}[0,1]} \right| \\ &\leq \|u(y) - u_{n,m}(y)\|_{W^{\gamma}} \left\| \frac{\partial^j \hat{R}_y(x)}{\partial x^j} \right\|_{W^{\gamma}} \leq \zeta_j \theta h^{\gamma}, \end{aligned} \quad (14.3)$$

که ζ_j یک ثابت هست بطوریکه $j = 0, 1$ ، $\left\| \frac{\partial^j \hat{R}_y(x)}{\partial x^j} \right\|_{W^{\gamma}} \leq \zeta_j$. بنابراین با ترکیب معادله‌های (13.3) و (14.3) اثبات کامل می‌شود.

□

فصل ۴

حل معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر و معادله
دیفرانسیل تابعی غیرمحلّی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته

۱.۴ معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر

معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر ابتدا در زمینه کنترل بهینه جمعیت مطرح شد که برای جزئیات بیشتر به [۸، ۹، ۱۱] رجوع کنید. معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر را در این رساله به فرم زیر

$$(1.4) \quad \begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x - \tau(x)) + \int_{\lambda(x)}^x c(s, x)u(s)ds = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = h(x), & -\tau(x) \leq x < 0, \quad \tau(x) \geq 0, \end{cases}$$

در نظر میگیریم که $\lambda(x) = \max\{x - \tau(x), 0\}$ و τ تابع تأخیر است و a, b, f تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند و تابع آغازین h در بازه $[-\tau(x), 0]$ پیوسته است. در حقیقت واژه تأخیری متغیر در عنوانی که برای این مسئله انتخاب شده است اشاره به تابع تأخیر τ دارد که همانطور که می‌دانیم اگر این تابع یک مقدار ثابت باشد آنگاه عنوان متغیر دیگر در نامگذاری مسئله استفاده نمی‌شود. برخی از کاربردهای معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر را می‌توان در [۱۲] ملاحظه کرد که شامل جمعیت بیولوژیکی، سیستم‌های چراندن، انتشار موج، راکتورهای هسته‌ای، ویسکوالاستیسیته و سیستم‌های اسکال بزرگ می‌باشند. وجود و یکتایی جواب و همچنین آنالیز پایداری برای معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر در [۲۱-۱۳] بحث و بررسی شده است.

۱.۱.۴ مقدمه

در اینجا می‌خواهیم معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر را با استفاده از روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی گرام اشمیت حل کنیم. ابتدا عملگر معادله را به زمانی که در تأخیر است و زمانی که از تأخیر عبور میکند، تقسیم بندی میکنیم و سپس فضای بازتولیدی متناسب با این مسئله را تعریف کرده و هسته بازتولیدی آنرا میسازیم به طوریکه در شرایط معادله (۱.۴) صدق کنند و از روی هسته بازتولیدی پایه‌های متناسب با این معادله را به یکی از دو روشی در دو فصل قبل مطرح شد میسازیم و سپس روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی گرام اشمیت را بر روی این پایه‌ها پیاده‌سازی کرده و نتایج حاصل را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم و همچنین قضیه‌های مربوط به همگرایی و آنالیز خطا را بیان کرده و نحوه اثبات آنها را بحث و بررسی می‌کنیم. همچنین از آنجا که در معادله (۱.۴) بزرگترین مرتبه مشتق ۱ است بنابراین ما فضای بازتولیدی برای حل این مسئله را W^2 در نظر میگیریم. برای مثال اگر بزرگترین مرتبه مشتق ۲ بود، فضای بازتولیدی برای حل مسئله (۱.۴) را W^3 در نظر می‌گرفتیم، و به همین ترتیب تا آخر.

۲.۱.۴ نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای معادله (۱.۴)

برای حل معادله (۱.۴) ابتدا عملگر معادله را به صورت $\mathbb{L}(u(x)) \equiv u'(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x - \tau(x)) + \int_{\lambda(x)}^x c(s, x)u(s)ds$ در بازه $x \in [0, T]$ در نظر میگیریم و سپس عملگر را به دو قسمت تقسیم میکنیم قسمت اول زمانی است که متغیر اصلی معادله یعنی x در حالت تأخیر قرار دارد و قسمت دوم زمانی است که متغیر اصلی معادله x از تأخیر عبور کرده است، یعنی داریم

$$L(u(x)) = \begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) + \int_{\lambda(x)}^x c(s, x)u(s)ds, & 0 \leq x < \tau(x), \\ u'(x) + a(x)u(x) + b(x)u(x - \tau(x)) + \int_{\lambda(x)}^x c(s, x)u(s)ds, & x \geq \tau(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\lambda(x) = \max\{x - \tau(x), 0\} \text{ که}$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) + b(x)h(x - \tau(x)), & 0 \leq x < \tau(x), \\ f(x), & x \geq \tau(x), \end{cases} \quad (3.4)$$

فضاهای بازتولیدی $W^\gamma[0, \infty]$ و $W^1[0, \infty]$ را برای حل معادله (۱.۴) با یک ضرب داخلی جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$W^\gamma[0, \infty] = \left\{ u(x) \mid u'(x) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'(x) \in L^\gamma[0, \infty], u(0) = 0 \right\}, \quad (4.4)$$

$$W^1[0, \infty] = \left\{ u(x) \mid u(x) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'(x) \in L^1[0, \infty] \right\}, \quad (5.4)$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $W^\gamma[0, \infty]$ و $W^1[0, \infty]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1(x), u_2(x) \rangle_{W^\gamma} = \int_0^\infty \gamma u_1(x)u_2(x) + \delta u_1'(x)u_2'(x) + u_1''(x)u_2''(x)dx,$$

$$\|u(x)\|_{W^\gamma} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W^\gamma}}, \quad u_1(x), u_2(x) \in W^\gamma,$$

$$\langle u_1(x), u_2(x) \rangle_{W^1} = \int_0^\infty u_1(x)u_2(x) + u_1'(x)u_2'(x)dx,$$

$$\|u(x)\|_{W^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W^1}}, \quad u_1(x), u_2(x) \in W^1,$$

همچنین فضای عملگر معادله به صورت $L : W^\gamma[0, \infty] \rightarrow W^1[0, \infty]$ است. به راحتی می‌توان ثابت کرد که L یک عملگر خطی کراندار است [۱۱]، با این فرض که L^* عملگر خودالحاقی L است را به صورت $L^* : W^1[0, \infty] \rightarrow W^\gamma[0, \infty]$ تعریف می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $r_y(x)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $W^1[0, \infty]$ و با مشخص کردن y با استفاده از نقاط $x_i \in [0, T]$ داریم $\varphi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که $\varphi_i(x)$ پایه‌های فضای $W^1[0, \infty]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\psi_i(x) = L^* \varphi_i(x).$$

با فرض اینکه عملگر L یک عملگر خطی کراندار است [۱۱]، لم زیر که یک پایه کامل برای فضای $W^\gamma[0, \infty]$ ارائه می‌دهد، را داریم که می‌توان هر کدام از اعضای این فضا را با استفاده از این پایه‌ها بسط داد.

لم ۱.۱.۴. مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[0, T]$ در نظر می‌گیریم، آنگاه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک پایه کامل برای فضای هسته بازتولیدی $W^\gamma[0, \infty]$ است.

قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را تابع هسته بازتولیدی فضای $W^\gamma[0, \infty]$

$$R_y(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-\gamma x - \gamma y} - \frac{e^{-x-y}}{\epsilon} + \begin{cases} \frac{e^{x-y}}{\epsilon} - \frac{1}{\gamma} e^{\gamma x - \gamma y}, & x \leq y, \\ \frac{e^{y-x}}{\epsilon} - \frac{1}{\gamma} e^{\gamma y - \gamma x}, & y < x, \end{cases}$$

در اینجا نحوه تولید پایه‌های $\psi_i(x)$ با استفاده از تابع هسته بازتولیدی را بیان می‌کنیم. برای ساختن پایه‌های $\psi_i(x)$ قبل مقداردهی $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ به y در هسته $R_y(x)$ ابتدا یکبار عملگر معادله را بر روی هسته $R_y(x)$ اثر می‌دهیم، به صورت زیر

$$\psi_i(x) = L^* \varphi_i(x) = \langle L^* \varphi_i(y), R_x(y) \rangle_{W^*} = \langle \varphi_i(y), L_y R_x(y) \rangle_{W^*} = L_y R_x(y) \Big|_{y=x_i} \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial R_x(y)}{\partial y} \Big|_{y=x_i} + a(y) R_x(y) \Big|_{y=x_i} + \int_{\lambda(y)}^y c(s, y) R_x(s) ds \Big|_{y=x_i}, \quad 0 \leq x < \tau(x)$$

(7.4)

$$\psi_i(x) = L^* \varphi_i(x) = \langle L^* \varphi_i(y), R_x(y) \rangle_{W^*} = \langle \varphi_i(y), L_y R_x(y) \rangle_{W^*} = L_y R_x(y) \Big|_{y=x_i}$$

$$\frac{\partial R_x(y)}{\partial y} \Big|_{y=x_i} + a(y) R_x(y) \Big|_{y=x_i} + b(y) R_x(y - \tau(y)) \Big|_{y=x_i} + \int_{\lambda(y)}^y c(s, y) R_x(s) ds \Big|_{y=x_i}, \quad x \geq \tau(x)$$

که $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ و L عملگر خطی کراندار مسئله (1.3) است. پیاده‌سازی روش هسته بازتولیدی برای معادله دیفرانسیل با شرایط غیرمحملی یا ترکیبی اولین بار توسط یولان ونگ و همکارانش در [51, 53, 85] معرفی شده است. حال نحوه تولید پایه‌های $\xi_i(x)$ با استفاده از تابع هسته بازتولیدی را بیان می‌کنیم. برای ساختن پایه‌های $\xi_i(x)$ ، مستقیماً $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ را به y در هسته $R_y(x)$ مقداردهی می‌کنیم،

$$\xi_i(x) = R_y(x) \Big|_{y=x_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W^*[0, \infty]$ و همچنین به راحتی ثابت می‌شود که $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل برای فضای $W^*[0, \infty]$ است.

قضیه 2.1.4. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, T]$ باشد و L^{-1} وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (1.3) به صورت زیر است

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_i(x), \quad (8.4)$$

که c_i ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند و جواب تقریبی مسئله (1.2) با n تا نقطه به صورت زیر است،

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \xi_i(x), \quad (9.4)$$

نحوه محاسبه ضرایب مجهول c_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ به این صورت است که تنها کافی است دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر را حل کنیم.

$$\sum_{i=1}^n c_i L \xi_i(x) \Big|_{x=x_j} = F(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.4)$$

$$\begin{bmatrix} L\xi_1(x_1) & L\xi_2(x_1) & L\xi_3(x_1) & \dots & L\xi_n(x_1) \\ L\xi_1(x_2) & L\xi_2(x_2) & L\xi_3(x_2) & \dots & L\xi_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L\xi_1(x_{n-1}) & L\xi_2(x_{n-1}) & L\xi_3(x_{n-1}) & \dots & L\xi_n(x_{n-1}) \\ L\xi_1(x_n) & L\xi_2(x_n) & L\xi_3(x_n) & \dots & L\xi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x_1) \\ F(x_2) \\ \vdots \\ F(x_{n-1}) \\ F(x_n) \end{bmatrix}, \quad (11.4)$$

در فصل دوم نشان دادیم که جواب دستگاه معادلات (۱۱.۴) وجود دارد و منحصر به فرد است.

قضیه ۳.۱.۴. اگر L^{-1} وجود داشته باشد، آنگاه دستگاه معادلات (۸.۳) دارای یک جواب منحصر به فرد است.

۳.۱.۴ آنالیز همگرایی

قضیه همگرایی و اثبات آن برای این مسئله همانند قضیه همگرایی برای مسئله‌هایی است که در فصل دوم و سوم بحث شد و بنابراین دیگر در این بخش به آن اشاره نمی‌کنیم.

۴.۱.۴ آنالیز خطا

قضیه ۴.۱.۴. فرض کنید $u_n(x)$ جواب تقریبی معادله (۱.۴) در فضای $W^\gamma[0, \infty]$ و $u(x)$ جواب دقیق آن باشد. همچنین فرض کنید که $\|u(x) - u_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, T]} |u(x) - u_n(x)|$ و $\|u'(x) - u'_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, T]} |u'(x) - u'_n(x)|$ که C_1, C_2 ثابت‌های مثبت هستند و $h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|$ و تعداد نقاط در بازه $[0, T]$ با n نشان داده می‌شود. اگر $u''(x) \in C[0, T]$ و $\|u''_n(x)\|_\infty$ کراندار باشد آنگاه داریم،

$$\|u(x) - u_n(x)\|_\infty \leq C_1 h^\gamma,$$

$$\|u'(x) - u'_n(x)\|_\infty \leq C_2 h,$$

اثبات. با بهره‌گیری از استراتژی موجود در منابع [۵۹-۶۱] برای هر $[x_i, x_{i+1}] \subset [0, T]$ می‌توان نوشت،

$$u'(x) - u'_n(x) = u'(x) - u'(x_i) + u'_n(x_i) - u'_n(x) + u'(x_i) - u'_n(x_i). \quad (12.4)$$

دوجمله اول بسط سری تیلور $u'(x)$ در نقطه x_i به صورت زیر است

$$u'(x) \approx u'(x_i) + (x - x_i)u''(x_i),$$

از آنجا که $u''(x) \in C[0, T]$ ثابت c_1 وجود دارد بطوریکه $|u''(x)| \leq c_1, \forall x \in [0, T]$

$$\|u'(x) - u'(x_i)\|_\infty \leq c_1 h. \quad (13.4)$$

همچنین می‌توان نوشت

$$u'_n(x_i) - u'_n(x) = - \int_{x_i}^x u''_n(s) ds,$$

$$|u'_n(x_i) - u'_n(x)| \leq \int_{x_i}^x |u''_n(s)| ds,$$

از آنجا که $\|u_n''(x)\|_\infty$ کراندار است، داریم

$$\|u_n'(x_i) - u_n'(x)\|_\infty \leq c_7 h. \quad (14.4)$$

اگر فرض کنیم $u_n^{(m)}(x)$ به طوریکه نواخت همگراست به $u^{(m)}(x)$ که $m = 0, 1$ و برای هر $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ وجود دارد یک n به قدر کافی بزرگ به طوریکه،

$$\begin{aligned} |u'(x_i) - u_n'(x_i)| &\leq \epsilon_1, \\ |u(x_i) - u_n(x_i)| &\leq \epsilon_2. \end{aligned} \quad (15.4)$$

با ترکیب رابطه‌های (12.4)، (13.4)، (14.4) و (15.4) داریم،

$$\|u'(x) - u_n'(x)\|_\infty \leq C_7 h. \quad (16.4)$$

همچنین می‌توان نوشت،

$$u(x) - u_n(x) = u(x_i) - u_n(x_i) + \int_{x_i}^x (u'(t) - u_n'(t)) dt, \quad (17.4)$$

با ترکیب رابطه‌های (15.4)، (16.4) و (17.4) داریم،

$$\|u(x) - u_n(x)\|_\infty \leq C_7 h^2.$$

□

۵.۱.۴ مثال‌های عددی

مثال ۵.۱.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر زیر را در نظر بگیرید [۱۱]،

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) + u(x - \frac{1}{\delta}) + \int_{\lambda(x)}^x u(s) ds = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = x, & -\frac{1}{\delta} \leq x < 0. \end{cases}$$

که جواب دقیق این معادله $u(x) = \frac{x}{1+x^2}$ و

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x^2 - x^2 + x + 1) + (x^2 + 1)^2 \ln(x^2 + 1)}{2(x^2 + 1)^2}, & 0 \leq x < \frac{1}{\delta}, \\ -\frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \left(\ln(x^2 + 1) - \ln\left(x^2 - \frac{2x}{\delta} + \frac{2}{\delta^2}\right) \right) + \frac{x - \frac{1}{\delta}}{(x - \frac{1}{\delta})^2 + 1}, & \frac{1}{\delta} \leq x. \end{cases}$$

مثال ۶.۱.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر زیر را در نظر بگیرید [۱۱]،

$$\begin{cases} u'(x) + u(x) + u(x - \frac{\delta x + 1}{10}) + \int_{\lambda(x)}^x e^{x-s} u(s) ds = f(x), & x \geq 0, \\ u(x) = \frac{\delta x - x^2}{\delta}, & -\frac{\delta x + 1}{10} \leq x < 0. \end{cases}$$

که جواب دقیق این معادله $u(x) = x e^{\frac{-x}{\delta}}$ و

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{180} e^{-\frac{x}{\delta}} \left(-6x + 125 e^{\frac{x}{\delta}} + 55 \right), & 0 \leq x < \frac{\delta x + 1}{10}, \\ \frac{1}{180} e^{-\frac{x}{\delta}} \left(-6x + 18 e^{\frac{1}{\delta}(\delta x + 1)} (\delta x - 1) + 5 e^{\frac{x}{\delta} + \frac{2}{10}} (15x + 22) + 55 \right), & \frac{\delta x + 1}{10} \leq x. \end{cases}$$

جدول ۱.۴: ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مثال (۵.۱.۴) و (۶.۱.۴) در بازه $x \in [0, 1]$

مثال ۵.۱.۴			مثال ۶.۱.۴		
روش حاضر		روش [۱۱]	روش حاضر		روش [۱۱]
E_{100}	E'_{100}	E_{200}	E_{100}	E'_{100}	E_{200}
930×10^{-6}	140×10^{-3}	740×10^{-4}	850×10^{-5}	140×10^{-2}	410×10^{-3}

جدول ۲.۴: مرتبه همگرایی برای مثال (۵.۱.۴) در $x \in [0, 1]$

E_{10}	E_{20}	$\text{Log}_2 \frac{E_{10}}{E_{20}}$	E_{40}	$\text{Log}_2 \frac{E_{20}}{E_{40}}$	E_{80}	$\text{Log}_2 \frac{E_{40}}{E_{80}}$
160×10^{-3}	340×10^{-4}	۲.۲۳۴۴۷	850×10^{-5}	۲.۰۰	210×10^{-5}	۲.۰۱۷۰۷

E'_{10}	E'_{20}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{10}}{E'_{20}}$	E'_{40}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{20}}{E'_{40}}$	E'_{80}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{40}}{E'_{80}}$
210×10^{-2}	100×10^{-2}	۱.۰۷۰۳۹	500×10^{-3}	۱.۰۰	240×10^{-3}	۱.۰۵۸۸۹

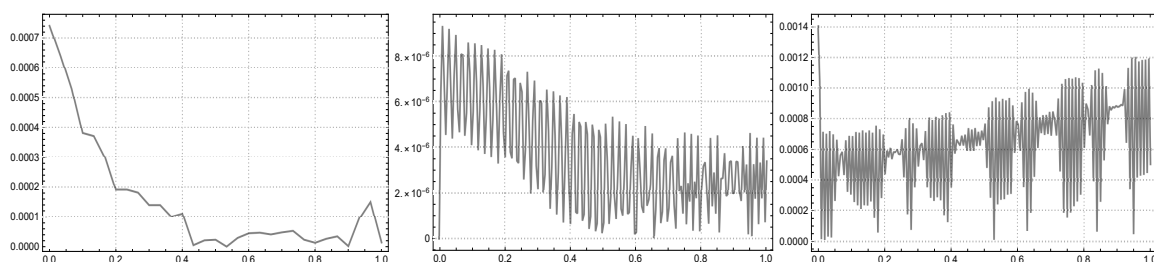
هر دو مثال را با استفاده از نرم‌افزار ریاضی متمتیکا حل می‌کنیم و نتایج حاصل از محاسبه‌ی مقادیر، ماکزیمم خطای مطلق و مرتبه همگرایی را با یکدیگر در جدول‌های ۱.۴، ۲.۴، ۳.۴، ۴.۴ و ۵.۴ و شکل‌های ۱.۴، ۲.۴، ۳.۴ و ۴.۴ مقایسه می‌کنیم.

$$E_n = \max_{x \in [0, T]} |u_n(x) - u(x)|,$$

$$E'_n = \max_{x \in [0, T]} |u'_n(x) - u'(x)|,$$

۲.۴ معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحملی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته

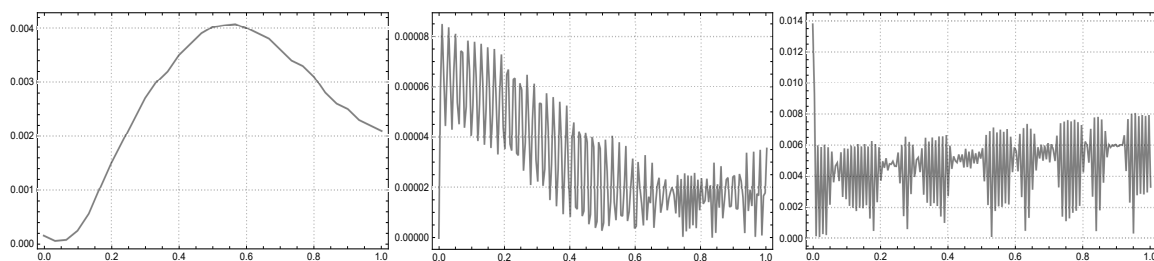
معادله دیفرانسیل تابعی با آرگومان‌های پیشرفته رده خاصی از معادله دیفرانسیل تأخیری است که به آن معادله دیفرانسیل تأخیری متناسب نیز می‌گویند.



شکل ۱.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۵.۱.۴) در بازه $x \in [0, 1]$ (چپ: روش [۱۱]، $|u_{200}(x) - u(x)|$ ؛ وسط: روش حاضر، $|u_{100}(x) - u(x)|$ ؛ راست: روش حاضر، $|u_{100}(x) - u(x)|$).

جدول ۳.۴: مرتبه همگرایی برای مثال (۶.۱.۴) در $x \in [0, 1]$

E_{λ_0}	E_{τ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$	E_{τ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$	E_{λ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$
120×10^{-2}	280×10^{-2}	۲٫۹۹۵۴	750×10^{-4}	۱٫۹۰۴۶	190×10^{-4}	۱٫۹۸۰۸۹
E'_{λ_0}	E'_{τ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$	E'_{τ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$	E'_{λ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$
140×10^{-1}	700×10^{-2}	۱٫۰۰	350×10^{-2}	۱٫۰۰	170×10^{-2}	۱٫۴۱۸۲

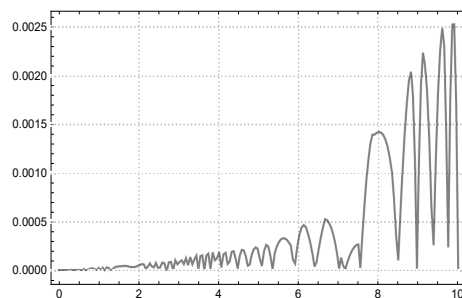
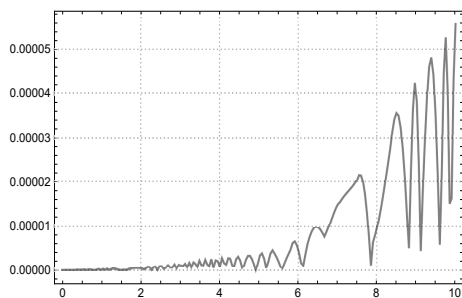

 شکل ۲.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۶.۱.۴) در بازه $x \in [0, 1]$ (چپ: روش [۱۱]، وسط: روش حاضر، راست: روش حاضر، $|u_{100}(x) - u(x)|$).

 جدول ۴.۴: مرتبه همگرایی برای مثال (۵.۱.۴) در $x \in [0, 10]$

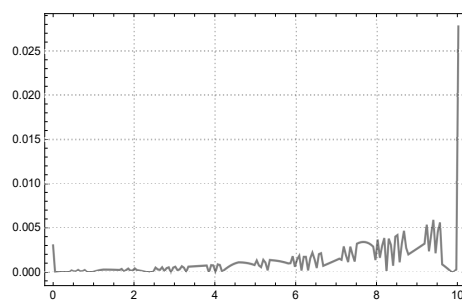
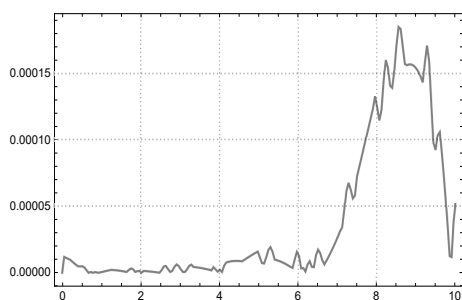
E_{τ_0}	E_{λ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$	E_{λ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\lambda_0}}{E_{\tau_0}}$	E_{τ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_0}}{E_{\lambda_0}}$
300×10^{-3}	850×10^{-4}	۱٫۸۱۹۴۳	220×10^{-4}	۱٫۹۴۹۹۶	560×10^{-5}	۱٫۹۷۴
E'_{τ_0}	E'_{λ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$	E'_{λ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\lambda_0}}{E'_{\tau_0}}$	E'_{τ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_0}}{E'_{\lambda_0}}$
180×10^{-2}	100×10^{-2}	۰٫۸۴۷۹۹۷	520×10^{-3}	۰٫۹۴۳۴۱۶	265×10^{-3}	۰٫۹۷۲۵۱۹

 جدول ۵.۴: مرتبه همگرایی برای مثال (۶.۱.۴) در $x \in [0, 10]$

$E_{\lambda_{00}}$	$E_{\tau_{00}}$	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_{00}}}{E_{\lambda_{00}}}$	$E_{\tau_{00}}$	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_{00}}}{E_{\lambda_{00}}}$	$E_{\lambda_{00}}$	$\text{Log}_2 \frac{E_{\tau_{00}}}{E_{\lambda_{00}}}$
140×10^{-2}	330×10^{-3}	۲٫۸۴۸۹	800×10^{-4}	۲٫۴۴۳۹	190×10^{-4}	۲٫۷۴
$E'_{\lambda_{00}}$	$E'_{\tau_{00}}$	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_{00}}}{E'_{\lambda_{00}}}$	$E'_{\tau_{00}}$	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_{00}}}{E'_{\lambda_{00}}}$	$E'_{\lambda_{00}}$	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\tau_{00}}}{E'_{\lambda_{00}}}$
190×10^{-1}	100×10^{-1}	۰٫۹۲۵۹۹۹	530×10^{-2}	۰٫۹۱۵۹۳۶	280×10^{-2}	۰٫۹۲۰۵۶۶



شکل ۳.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۵.۱.۴) در بازه $x \in [0, 10]$ (چپ: روش حاضر، $|u_{32}(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u'_{32}(x) - u'(x)|$).



شکل ۴.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۶.۱.۴) در بازه $x \in [0, 10]$ (چپ: روش حاضر، $|u_{80}(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u'_{80}(x) - u'(x)|$).

مثال ۱.۲.۴

$$\begin{cases} u'(x) + b(x)u(\tau(x)) + a(x)u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ B(u(c), u) = 0, \end{cases} \quad (18.4)$$

که در آن a و b تابع‌هایی به قدر کافی هموار در بازه $[0, 1]$ هستند و $\tau \in C^1[0, 1]$ و

$$B(u(c), u) = \lambda u(c) - \int_0^1 u(s)ds, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

که $c \in [0, 1]$. برخی از کاربردهای معادله دیفرانسیل تابعی با آرگومان‌های پیشرفته را می‌توان در [۸۸-۸۶] مشاهده کرد که شامل نظریه اعداد، الکتروپدینامیک، سیستم‌های دینامیک غیرخطی، نظریه احتمال در ساختارهای جبری، مکانیک کوانتوم، اختفیزیک و رشد سلول می‌باشند. وجود و یکتایی جواب برای معادله دیفرانسیل تابعی با آرگومان‌های پیشرفته در [۸۹، ۹۰] بحث و بررسی شده است.

۱.۲.۴ مقدمه

در اینجا می‌خواهیم معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحملی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته را با استفاده از روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی گرام اشمیت حل کنیم. ابتدا فضای بازتولیدی متناسب با عملگر معادله را تعریف کرده و هسته بازتولیدی آنرا می‌سازیم به طوریکه در شرایط غیرمحملی معادله (۱۸.۴) صدق کنند و سپس از روی هسته بازتولیدی پایه‌های متناسب با این معادله را به یکی از دو روشی در دو فصل قبل مطرح شد می‌سازیم و سپس روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی گرام اشمیت را بر روی این پایه‌ها پیاده‌سازی کرده و نتایج حاصل را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم و همچنین قضیه‌های مربوط به همگرایی و آنالیز خطا را بیان کرده و نحوه اثبات آنها را بحث و

بررسی می‌کنیم. ما فضای بازتولیدی برای حل این مسئله را W^2 و W^3 در نظر می‌گیریم، و در هر دوفضا مسئله را حل کرده و نتایج را باهم و همچنین روش‌های قبلی مقایسه می‌کنیم. ابتدا فضای هسته بازتولیدی $W_1^2[0, 1]$ و $W_1^3[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف کرده و سپس هسته بازتولیدی آنرا می‌سازیم.

$$W_1^2[0, 1] = \left\{ u \mid u' \text{ تابع مطلقاً پیوسته است} \right\}, \quad u'' \in L^2[0, 1],$$

$$W_1^3[0, 1] = \left\{ u \mid u'' \text{ تابع مطلقاً پیوسته است} \right\}, \quad u''' \in L^2[0, 1],$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $W_1^2[0, 1]$ و $W_1^3[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم و سپس هسته بازتولیدی آنرا می‌سازیم.

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{W_1^2[0, 1]} = u_1(0)u_2(0) + u_1'(1)u_2'(1) + \int_0^1 u_1''(x)u_2''(x)dx,$$

$$\|u\|_{W_1^2[0, 1]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^2[0, 1]}}, \quad u_1, u_2 \in W_1^2[0, 1],$$

$$\langle u_1, u_2 \rangle_{W_1^3[0, 1]} = \sum_{i=0}^2 u_1^{(i)}(1)u_2^{(i)}(1) + \int_0^1 u_1'''(x)u_2'''(x)dx,$$

$$\|u\|_{W_1^3[0, 1]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^3[0, 1]}}, \quad u_1, u_2 \in W_1^3[0, 1],$$

قضیه ۲.۲.۴. $W_1^2[0, 1]$ و $W_1^3[0, 1]$ فضاهای هسته بازتولیدی هستند که هسته بازتولیدی آنها به صورت زیر است [۱۱].

$$Q_y(x) = \begin{cases} Q(x, y), & x \leq y, \\ Q(y, x), & x > y, \end{cases}$$

$$R_y(x) = \begin{cases} R(x, y), & x \leq y, \\ R(y, x), & x > y, \end{cases}$$

که

$$R(x, y) = \frac{1}{18}x^2(-y^3 + 6y^2 - 9y + 4) + \frac{1}{18}x(y^4 - 18y^3 + 56y^2 - 39y + 1) + \frac{1}{18}(-y^5 + 40y^4 - 195y^3 + 276y^2 - 120y + 18) \\ Q(x, y) = \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}x(y^2 - 4y) - 1 \text{ و}$$

پایاده‌سازی روش هسته بازتولیدی برای معادله دیفرانسیل با شرایط غیرمحملی یا ترکیبی اولین بار توسط یولان ونگ و همکارانش در [۸۵، ۹۳-۹۱] معرفی شده است. اکنون فقط فضای هسته بازتولیدی $W_1^2[0, 1]$ و $W_1^3[0, 1]$ را داریم و باید شرایط $B(u(c), u) = \lambda u(c) - \int_0^1 u(s)ds$ را هم در فضای هسته بازتولیدی $W_1^2[0, 1]$ و $W_1^3[0, 1]$ لحاظ کنیم. بنابراین یک فضای هسته بازتولیدی جدید به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\hat{W}_1^2[0, 1] = \left\{ u \mid u \in W^2[0, 1], \quad B(u(c), u) = \lambda u(c) - \int_0^1 u(s)ds \right\}$$

$$\hat{W}_1^3[0, 1] = \left\{ u \mid u \in W^3[0, 1], \quad B(u(c), u) = \lambda u(c) - \int_0^1 u(s)ds \right\}$$

برای ساختن هسته بازتولیدی مربوط به فضای $\hat{W}_1^2[0, 1]$ فرض می‌کنیم $B(u(c), u) = L_{1,x}(u(x)) = u(c) - \int_0^1 u(s)ds$ و دو قضیه زیر را می‌آوریم.

قضیه ۳.۲.۴. اگر $L_\lambda : W_\lambda^\lambda[0, 1] \rightarrow W_\lambda^\lambda[0, 1]$ یک عملگر خطی کراندار باشد و $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_\lambda^\lambda[0, 1]$ و نماد $L_{\lambda, x}$ یعنی عملگر L_λ بر روی تابعی با متغیر x است به کار رود و قرار دهیم $r_\lambda(y) = L_{\lambda, x}(R_y(x))$ آنگاه $\|r_\lambda(y)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda = L_{\lambda, x}(L_{\lambda, s}(R_x(s)))$. اثبات.

$$\|r_\lambda(y)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda = \langle L_{\lambda, x}(R_y(x)), L_{\lambda, s}(R_y(s)) \rangle_{W_\lambda^\lambda} = L_{\lambda, x} L_{\lambda, s} \langle R_y(x), R_y(s) \rangle_{\hat{W}_\lambda^\lambda} = L_{\lambda, x} (L_{\lambda, s}(R_x(s))).$$

□

برای فضای هسته بازتولیدی $W_\lambda^\lambda[0, 1]$ با هسته بازتولیدی $Q_y(x)$ قضیه (۳.۲.۴) را با فرض اینکه $L_\lambda : W_\lambda^\lambda[0, 1] \rightarrow W_\lambda^\lambda[0, 1]$ عملگر خطی کراندار است، داریم.

قضیه ۴.۲.۴. فرض کنید $r_\lambda(x)$ و $R_y(x)$ همانند قضیه بالا تعریف شده‌اند، قرار می‌دهیم $\hat{R}_y(x) = R_y(x) - \frac{r_\lambda(x)r_\lambda(y)}{\|r_\lambda(x)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda}$ و $\hat{W}_\lambda^\lambda[0, 1] = \{u(y) | u(y) \in W_\lambda^\lambda[0, 1], L_{\lambda, y}(u(y)) = 0\}$ با همان ضرب داخلی فضای $W_\lambda^\lambda[0, 1]$ آنگاه $\hat{R}_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $\hat{W}_\lambda^\lambda[0, 1]$ است.

اثبات. ابتدا اثبات می‌کنیم $\hat{R}_y(x) \in \hat{W}_\lambda^\lambda[0, 1]$

$$L_{\lambda, y}(\hat{R}_x(y)) = L_{\lambda, y}(R_x(y)) - \frac{r_\lambda(x)L_{\lambda, y}(r_\lambda(y))}{\|r_\lambda(x)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda} = L_{\lambda, y}(R_x(y)) - \frac{L_{\lambda, y}(R_x(y))L_{\lambda, y}(L_{\lambda, s}(R_y(s)))}{L_{\lambda, y}(L_{\lambda, s}(R_y(s)))} = 0.$$

و سپس اثبات می‌کنیم $\forall u(y) \in \hat{W}_\lambda^\lambda[0, 1]$

$$\begin{aligned} \langle u(y), \hat{R}_x(y) \rangle_{\hat{W}_\lambda^\lambda} &= \langle u(y), R_y(x) - \frac{r_\lambda(x)r_\lambda(y)}{\|r_\lambda(x)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda} \rangle_{\hat{W}_\lambda^\lambda} = \langle u(y), R_y(x) \rangle_{\hat{W}_\lambda^\lambda} - \langle u(y), \frac{r_\lambda(x)r_\lambda(y)}{\|r_\lambda(x)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda} \rangle_{\hat{W}_\lambda^\lambda} \\ &= u(x) - \frac{r_\lambda(x)}{\|r_\lambda(x)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda} \langle u(y), L_{\lambda, s}(R_y(s)) \rangle_{\hat{W}_\lambda^\lambda} = u(x) - \frac{r_\lambda(x)}{\|r_\lambda(x)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda} L_{\lambda, s} \langle u(y), (R_y(s)) \rangle_{\hat{W}_\lambda^\lambda} = u(x) \\ &\quad - \frac{r_\lambda(x)}{\|r_\lambda(x)\|_{W_\lambda^\lambda}^\lambda} L_{\lambda, s}(u(s)) = u(x). \end{aligned}$$

□

برای فضای هسته بازتولیدی $W_\lambda^\lambda[0, 1]$ با هسته بازتولیدی $Q_y(x)$ قضیه (۴.۲.۴) را داریم.

قضیه ۵.۲.۴. $W_\lambda^\lambda[0, 1]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۱۱].

$$r_y(x) = \begin{cases} r(x, y), & x \leq y, \\ r(y, x), & x > y, \end{cases}$$

که، $r(x, y) = 1 + x$

برای حل معادله (۱۸.۴) ابتدا عملگر معادله را به صورت $\mathbb{L}(u(x)) \equiv u'(x) + b(x)u(\tau(x)) + a(x)u(x)$ در بازه $x \in [0, 1]$ در نظر می‌گیریم که یک عملگر دیفرانسیلی معکوس پذیر خطی کراندار باشد. یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ مانند $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$\phi_i(x) = \hat{R}_y(x)|_{y=x_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $\hat{R}_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $\hat{W}_r^*[0, 1]$ و $r_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_r^*[0, 1]$ می‌باشند. همچنین به راحتی ثابت می‌شود که $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل برای فضای $\hat{W}_r^*[0, 1]$ است. $\phi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که $\phi_i(x)$ پایه‌های فضای $W_r^*[0, 1]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\phi_i(x) = \mathbb{L}^* \phi_i(x).$$

که $\mathbb{L}^*$ عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ است.

قضیه ۶.۲.۴. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ باشد و $\mathbb{L}^{-1}$ وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (۱۸.۴) به صورت زیر است

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (19.4)$$

که ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند و جواب تقریبی مسئله (۱۸.۴) با n تا نقطه به صورت زیر است،

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \phi_i(x), \quad (20.4)$$

نحوه محاسبه ضرایب مجهول c_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ را در فصل دوم بیان کردیم. در نهایت به یک دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر می‌رسیم که با حل آن می‌توان ضرایب c_i را محاسبه کرد.

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbb{L} \phi_i(x)|_{x=x_j} = f(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (21.4)$$

۳.۴ مثالهای عددی

برای مقایسه نتایج مثالهای عددی ماکسیم مقدار خطا به صورت $E'_n = E_n = \max_{x \in [0, 1]} |u_n(x) - u(x)|$ داده شده‌اند که n تعداد نقاط هم محلی در بازه $[0, 1]$ است و مرتبه همگرایی جوابهای تقریبی با استفاده از رابطه $C_r = \log_{10}^{E_n/E_{rn}}$ محاسبه شده است.

مثال ۱.۳.۴. [۹۴، ۸۷، ۷]

$$\begin{cases} u'(x) + 500e^x u(\sqrt{x}) + 2000u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(1) = 5 \int_0^1 s u(s) ds, \end{cases}$$

که $u(x) = x^3$ جواب دقیق مسئله است.

جدول ۶.۴: مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_\gamma^2$

x	روش حاضر $\hat{W}_\gamma^2$ ($n = 11$)	روش حاضر $\hat{W}_\gamma^2$ ($n = 11$)	روش [۷] W_γ^2 ($n = 51$)	روش حاضر $\hat{W}_\gamma^2$ ($n = 51$)
2^{-1}	1.59×10^{-6}	6.9×10^{-7}	3.33×10^{-11}	1.13×10^{-9}
2^{-2}	1.87×10^{-6}	2.6×10^{-7}	4.13×10^{-11}	2.3×10^{-10}
2^{-3}	2.71×10^{-6}	1.6×10^{-7}	4.62×10^{-11}	1.38×10^{-10}
2^{-4}	2.41×10^{-6}	2.45×10^{-8}	4.89×10^{-11}	1.46×10^{-10}
2^{-5}	1.0×10^{-6}	2.7×10^{-11}	5.5×10^{-11}	1.7×10^{-11}
2^{-6}	3.51×10^{-7}	6.71×10^{-9}	4.74×10^{-11}	9.69×10^{-12}

مثال ۲.۳.۴. [۷، ۸۷، ۹۴]

$$\begin{cases} u'(x) + \frac{1}{\delta} u\left(\frac{x}{\delta}\right) + u(x) = f(x), & x \in [0, 1] \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

 که $u(x) = e^{-x}$ جواب دقیق مسئله است.

۱.۳.۴ آنالیز خطا

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید $u_n(x)$ جواب تقریبی معادله (۱۸.۴) در فضای $\hat{W}_\gamma^2[0, 1]$ و $u(x)$ جواب دقیق آن باشد. همچنین فرض کنید که $\|u(x) - u_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |u(x) - u_n(x)|$ و $\|u'(x) - u'_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |u'(x) - u'_n(x)|$ که C_1, C_2 ثابت‌های مثبت هستند و $h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|$ و تعداد نقاط هم‌محلی در بازه $[0, 1]$ با n نشان داده می‌شود. اگر $u'''(x) \in C[0, 1]$ و $\|u_n'''(x)\|_\infty$ کراندار باشد آنگاه داریم،

$$\|u(x) - u_n(x)\|_\infty \leq C_1 h^3,$$

$$\|u'(x) - u'_n(x)\|_\infty \leq C_2 h^2,$$

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنید $u_n(x)$ جواب تقریبی معادله (۱۸.۴) در فضای $\hat{W}_\gamma^2[0, 1]$ و $u(x)$ جواب دقیق آن باشد. همچنین فرض کنید که $\|u(x) - u_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |u(x) - u_n(x)|$ و $\|u'(x) - u'_n(x)\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |u'(x) - u'_n(x)|$ که C_1, C_2 ثابت‌های مثبت هستند و $h = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i+1} - x_i|$ و تعداد نقاط هم‌محلی در بازه $[0, 1]$ با n نشان داده می‌شود. اگر $u^{(*)}(x) \in C[0, 1]$ و $\|u_n^{(*)}(x)\|_\infty$ کراندار باشد آنگاه داریم،

$$\|u(x) - u_n(x)\|_\infty \leq S_1 h^4,$$

$$\|u'(x) - u'_n(x)\|_\infty \leq S_2 h^3,$$

جدول ۷.۴: مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^T$

x	روش حاضر $\hat{W}_T^T$ ($n = 11$)	روش حاضر $\hat{W}_T^T$ ($n = 11$)	روش [۷] W_T^T ($n = 51$)	روش حاضر $\hat{W}_T^T$ ($n = 51$)
2^{-1}	1.59×10^{-6}	5.26×10^{-7}	3.33×10^{-11}	2.50×10^{-10}
2^{-2}	1.87×10^{-6}	1.07×10^{-8}	4.13×10^{-11}	3.58×10^{-11}
2^{-3}	2.71×10^{-6}	1.57×10^{-7}	4.62×10^{-11}	7.70×10^{-12}
2^{-4}	2.41×10^{-6}	3.64×10^{-7}	4.89×10^{-11}	4.17×10^{-11}
2^{-5}	1.00×10^{-6}	6.39×10^{-7}	5.05×10^{-11}	1.69×10^{-11}
2^{-6}	3.51×10^{-7}	3.99×10^{-7}	4.74×10^{-11}	1.915×10^{-11}

جدول ۸.۴: مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^T$ و $\hat{W}_T^T$

روش حاضر $\hat{W}_T^T$				روش [۷] W_T^T	
E_{11}	E_{51}	E'_{11}	E'_{51}	E_{11}	E_{51}
4.00×10^{-5}	8.00×10^{-9}	4.00×10^{-2}	8.00×10^{-6}	1.50×10^{-4}	1.75×10^{-6}

جدول ۹.۴: مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^T$

E_Δ	E_{10}	$\text{Log}_2 \frac{E_\Delta}{E_{10}}$	E_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{10}}{E_{T0}}$	E_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{T0}}{E_{T0}}$
1.50×10^{-2}	1.20×10^{-2}	3.6438	8.00×10^{-5}	3.9068	5.00×10^{-6}	4.00
E'_Δ	E'_{10}	$\text{Log}_2 \frac{E'_\Delta}{E'_{10}}$	E'_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{10}}{E'_{T0}}$	E'_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{T0}}{E'_{T0}}$
6.00×10^{-1}	1.50×10^{-1}	2.00	4.00×10^{-2}	1.9068	1.00×10^{-2}	2.00

جدول ۱۰.۴: مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^T$

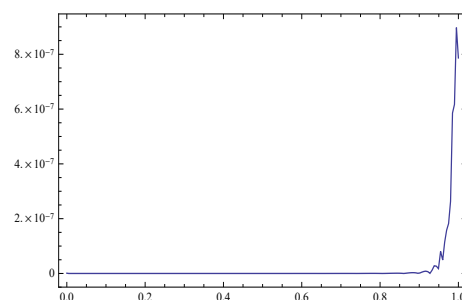
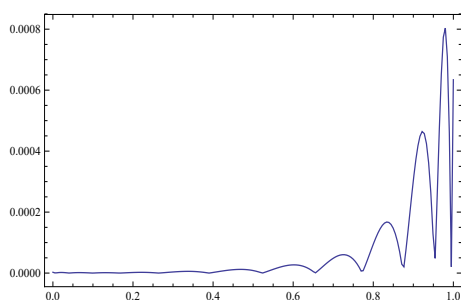
E_Δ	E_{10}	$\text{Log}_2 \frac{E_\Delta}{E_{10}}$	E_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{10}}{E_{T0}}$	E_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{T0}}{E_{T0}}$
3.50×10^{-2}	6.00×10^{-5}	5.8662	1.40×10^{-6}	5.4214	2.50×10^{-8}	5.8073
E'_Δ	E'_{10}	$\text{Log}_2 \frac{E'_\Delta}{E'_{10}}$	E'_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{10}}{E'_{T0}}$	E'_{T0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{T0}}{E'_{T0}}$
8.00×10^{-2}	6.00×10^{-3}	3.7369	3.00×10^{-4}	4.3219	1.50×10^{-5}	4.3219

جدول ۱۱.۴: مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^2$

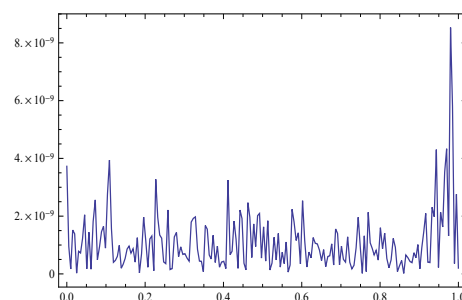
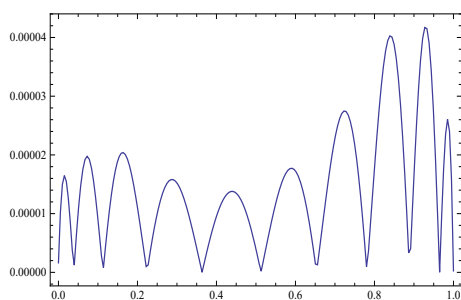
E_δ	E_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_\delta}{E_{\gamma_0}}$	E_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\gamma_0}}{E_{\gamma_0}}$	E_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\gamma_0}}{E_{\gamma_0}}$
2.50×10^{-5}	1.20×10^{-6}	۴,۳۸۰۸	6.0×10^{-8}	۴,۳۲۱۹	4.00×10^{-9}	۳,۹۰۶۸
E'_δ	E'_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_\delta}{E'_{\gamma_0}}$	E'_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\gamma_0}}{E'_{\gamma_0}}$	E'_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\gamma_0}}{E'_{\gamma_0}}$
3.00×10^{-4}	2.50×10^{-5}	۳,۵۸۴۹	2.50×10^{-6}	۳,۳۲۱۹	3.00×10^{-7}	۳,۵۵۸۸

جدول ۱۲.۴: مقایسه ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^3$

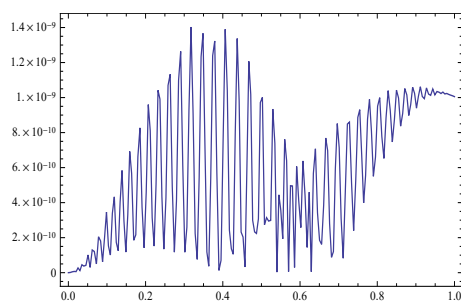
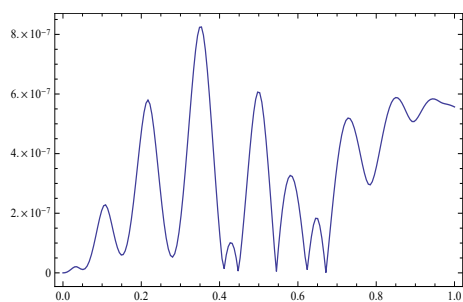
E_δ	E_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_\delta}{E_{\gamma_0}}$	E_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\gamma_0}}{E_{\gamma_0}}$	E_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E_{\gamma_0}}{E_{\gamma_0}}$
6.00×10^{-5}	1.20×10^{-6}	۵,۶۴۳۸	3.50×10^{-8}	۵,۹۹۵	8.00×10^{-10}	۵,۴۵۱۲
E'_δ	E'_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_\delta}{E'_{\gamma_0}}$	E'_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\gamma_0}}{E'_{\gamma_0}}$	E'_{γ_0}	$\text{Log}_2 \frac{E'_{\gamma_0}}{E'_{\gamma_0}}$
8.00×10^{-4}	5.00×10^{-5}	۴,۰۰۰	2.50×10^{-6}	۴,۳۲۱۹	7.00×10^{-8}	۵,۸۵۸۴



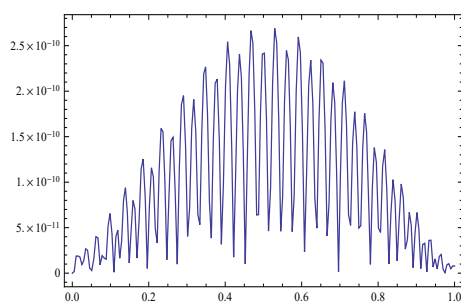
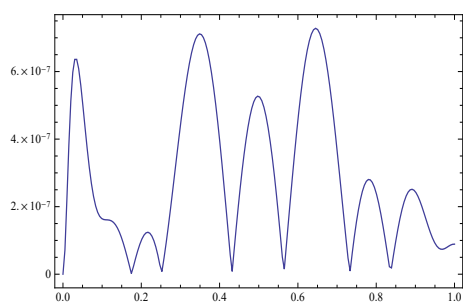
شکل ۵.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^2$ (چپ: روش حاضر، $|u_{\gamma 1}(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u_{\delta 1}(x) - u(x)|$).



شکل ۶.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۱.۳.۴) در فضای $\hat{W}_T^3$ (چپ: روش حاضر، $|u_{\gamma 1}(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u_{\delta 1}(x) - u(x)|$).



شکل ۷.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_7^1$ (چپ: روش حاضر، $|u_8(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u_{51}(x) - u(x)|$).



شکل ۸.۴: نمودار خطای مطلق برای مثال (۲.۳.۴) در فضای $\hat{W}_7^3$ (چپ: روش حاضر، $|u_8(x) - u(x)|$; راست: روش حاضر، $|u_{51}(x) - u(x)|$).

فصل ۵

نتیجه گیری و پیشنهادات

در فصل اول مفهوم فضای هسته بازتولیدی و خواص آن و همچنین نحوه بدست آوردن آنرا بیان کردیم. همچنین تعاریف مربوط به معادله دیفرانسیل کسری تأخیری، معادله انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر، معادله دیفرانسیل تابعی غیرمحلی با تأخیر یا آرگومان‌های پیشرفته و مسئله مقدار مرزی کسری تابعی متغیر آورده شده است. در این رساله ما چهار نوع مسئله ذکر شده را با استفاده از روش هسته بازتولیدی حل می‌کنیم و نتایج را با سایر روش‌های دیگر مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که روش هسته بازتولیدی به سایر روش‌های ارائه شده برای حل این مسائل برتری ملموسی دارند. روش ارائه شده در این رساله روش هسته بازتولیدی بدون استفاده از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت می‌باشد که مهمترین ویژگی آن کاهش چشمگیری زمان اجرای برنامه‌های کامپیوتری برای حل مسائل مختلف است و همچنین باعث بهبود جوابهای تقریبی بدست آمده می‌شود. این موضوع به صورت مفصل در فصل دوم آورده شده است. با توجه به ویژگی مهم روش مذکور در پایین بودن زمان اجرا، ما به راحتی می‌توانیم نتایج حاصل از حل مسائل مختلف را در کمترین زمان مشاهده کرده و نتیجه‌گیری‌های لازم را انجام دهیم. روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی گرام اشمیت به تنهایی قادر به تقریب جواب معادلات دیفرانسیل تأخیری نیست. برای بدست آوردن تقریبی مناسب از جواب با استفاده از روش هسته بازتولیدی، نیاز به توجه به یک سری نکات و قضیه‌ها داریم. اولین و مهمترین آن پیدا کردن هسته بازتولیدی برای ضرب داخلی‌های غیراستاندارد به شکلی است که در شرایط اولیه، مرزی و یا غیرمحلی مسائل مذکور صدق کند. بعد از لحاظ کردن این نکات، آنگاه روش هسته بازتولیدی را برای حل مسئله بکار می‌گیریم. یکی از محاسن این روش این است که می‌تواند مشتق جواب مسئله را هم با دقت خوبی تقریب بزند. یکی از پیشنهادات ما در اینجا می‌تواند این موضوع باشد که آیا روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی می‌تواند یک تقریب مناسب از جواب معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری متغیر و یا معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری تأخیری متغیر با شرایط غیرمحلی و انتگرالی و یا دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری، بدست بیاورد یا خیر؟ هرکدام از مسائل مطرح شده در اینجا زمینه یک پژوهش جدید می‌باشد که در کارهای تحقیقاتی خود در حال بررسی و آزمایش و خطای روش هسته بازتولیدی بر روی این مسائل هستیم و در صورت رسیدن به نتیجه آنها را به اشتراک خواهیم گذاشت.

- [1] S. A. Campbell, R. Edwards, and P. van den Driessche. Delayed coupling between two neural network loops. *SIAM J. Appl. Math.*, 65:316–335, 2004.
- [2] M.Villasana, and A. Radunskaya. A delay differential equation model for tumor growth. *J. Math. Biol.*, 47:270–294, 2003.
- [3] H.Gorecki, S.Fuksa, P. Grabowski, and A. Korytowski. *Analysis and Synthesis of Time Delay Systems*. John Wiley and Sons, PWN-Polish Scientific Publishers-Warszawa, 1989.
- [4] J. K.Hale. *Theory of Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- [5] C.Cuvas, A. Ramírez, A. Egorov, and S. Mondié. *Delay Systems: From Theory to Numerics and Applications*. Springer International Publishing, 2014.
- [6] E. Fridman. *Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control*. Birkhäuser Basel, Springer Cham Heidelberg, 2014.
- [7] X.Y. Li, B.Y. Wu, A continuous method for nonlocal functional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* 409:485-493, 2014.
- [8] M.A. Ibiejugba, F.M. Aderibigbe, and O.S. Adegboye. Parameter selection for a delay equation. *J. Nigerian Math. Soc*, 9:77–93, 1990.
- [9] I.G.E. Kordonis and Ch.G. Philos. The behavior of solutions of linear integro-differential equations with unbounded delay. *Comput. Math. Appl.*, 38:45–50, 1999.
- [10] T. Koto. Stability of Runge-kutta methods for delay integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 145: 483-492, 2002.
- [11] M. Cui, Y. Lin. *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space*, Nova Science, Hauppauge, New York, United States, 2009.
- [12] V. Lakshmikantham, M.R. Mahana Rao. *Theory of Integro-Differential Equations (Stability and Control: Theory, Methods and Applications; Vol. 1)*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1995.

- [13] C. Zhang, S. Vandewalle. Stability analysis of Volterra delay-integro-differential equations and their backward differentiation time discretization, *J. Comput. Appl. Math.* 164-165:797-814 , 2004.
- [14] C. Zhang, Y. Niu, The stability relation between ordinary and delay-integro-differential equations, *Math. Comput. Model.* 49: 13-19, 2009.
- [15] L. Berezansky, J. Diblík, Z. Svoboda, Z. Šmarda, Uniform exponential stability of linear delayed integro-differential vector equations, *J. Diff. Equa.* 270:573-595, 2021.
- [16] F.A. Khasawneh, B.P. Mann. Stability of delay integro-differential equations using a spectral element method, *Math. Comput. Model* 54:2493-2503, 2011.
- [17] V. Lakshmikantham, M.R. Mahana Rao. *Theory of Integro-Differential Equations (Stability and Control: Theory, Methods and Applications; Vol. 1)*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1995.
- [18] I.-G.E. Kordonis, Ch.G. Philos. The behavior of solutions of linear integro-differential equations with unbounded delay, *Comput. Math. Appl.* 38:45-50, 1999.
- [19] T. Koto. Stability of Runge-Kutta methods for delay integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 145: 483-492, 2002.
- [20] J. Liang, T. Xiao. Solvability of the Cauchy problem for infinite delay equations, *Non. Anal.* 58:271-297, 2004.
- [21] W.H. Enright, M. Hu. Continuous Runge-Kutta methods for neutral Volterra integro-differential equations with delay, *Appl. Num. Math.* 24:175-190, 1997.
- [22] K.S. Miller, B. Ross. *An Introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, John Wiley and Sons, Inc, New York, 1993.
- [23] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [24] K. Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2010.
- [25] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev. *Fractional Integral and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach, Switzerland, 1993.
- [26] L. Stringhettia, B. Hummelsberger. The ACES mission: System development and test status, *Acta Astronaut.* 69: 929–938, 2011.

- [27] K.J. McGuire, J.J. McDonnell. A review and evaluation of catchment transit time modeling, *J. Hydrol* 333: 543–563, 2006.
- [28] S.Ch. Pei, Y.D. Huang. Design of variable combfilter using FIR variable fractional delayelement, *Signal Process.* 92: 2409–2421, 2012.
- [29] Y. Luo, Y.Q. Chen. Optimized fractional order conditional integrator, *J. Process Control* 21:960–966, 2011.
- [30] A. Fioravanti, C. Bonnetta. A numerical method for stability windows and unstable root-locus calculation for linear fractional time-delay systems, *Automatica.* 48:2824–2830, 2012.
- [31] V. Lakshmikantham, Theory of fractional functional differential equations, *J. Nonlinear Sci.* 69:3337–3343, 2008.
- [32] C. Liao, H. Ye. Existence of positive solutions of nonlinear fractional delay differential equations, *Positivity* 13:601–609, 2009.
- [33] H. Ye, Y. Ding, J. Gao. The existence of a positive solution of $D^\alpha[x(t)x(0)] = x(t)f(t, xt)$, *Positivity* 11:341–350, 2007.
- [34] Y. Chen, K.L. Moore, Analytical stability bound for a class of delayed fractional-order dynamic systems, *Nonlinear Dynam.* 29: 191–200, 2002.
- [35] P. Mihailo Lazarević, M. Aleksandar Spasić. Finite-time stability analysis of fractional order time-delay systems: Gronwall’s approach, *Math. Comput. Modelling* 49:475–481, 2009.
- [36] K. Krol. Asymptotic properties of fractional delay differential equations, *Appl. Math. Comput.* 218:1515–1532, 2011.
- [37] W. Deng, C. Li, J. Lu. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays, *Nonlinear Dynam.* 48:409–416, 2007.
- [38] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernel, *Trans. Amer. Math. Soc.* 68:337–404, 1950.
- [39] M.A. Ibiejugba, F.M. Aderibigbe, and O.S. Adegboye. Parameter selection for a delay equation. *J. Nigerian Math. Soc.* 9:77–93, 1990.
- [40] I.G.E. Kordonis and Ch.G. Philos. The behavior of solutions of linear integro-differential equations with unbounded delay. *Comput. Math. Appl.*, 38:45–50, 1999.
- [41] W. Jiang and Y. Lin. Approximate solution of the fractional advection–dispersion equation. *Comput. Phys. Commun.*, 181:557–561, 2010.

- [42] F. Geng and M. Cui. A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. *Appl. Math. Lett.*, 25:818–823, 2012.
- [43] M. Cui and F. Geng. A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient burgers equation. *Appl. Math. Comput.*, 188:1389–1401, 2007.
- [44] C.L. Temuer M.J. Du, Y.L. Wang and D. Tian. A modified reproducing kernel method for solving burgers' equation arising from diffusive waves in fluid dynamics. *Appl. Math. Comput.*, 315:500–506, 2017.
- [45] L. Mei and Y. Lin. Simplified reproducing kernel method and convergence order for linear volterra integral equations with variable coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 346:390–398, 2019.
- [46] J.H. Shen L.H. Yang and Y. Wang. The reproducing kernel method for solving the system of the linear volterra integral equations with variable coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 236:2398–2405, 2012.
- [47] M.Q. Xu and Y.Z. Lin. Simplified reproducing kernel method for fractional differential equations with delay. *Appl. Math. Lett.*, 52:156–161, 2016.
- [48] Y. Wang, T. Chaolu, and P. Jing. New algorithm for second-order boundary value problems of integro-differential equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 229:1–6, 2009.
- [49] Y. Wang, L. Su, X. Cao, and X. Li. Using reproducing kernel for solving a class of singularly perturbed problems. *Comput. Math. Appl.*, 61:421–430, 2011.
- [50] Y. Wang, T. Chaolu, and Z. Chen. Using reproducing kernel for solving a class of singular weakly nonlinear boundary value problems. *Int. J. Comput. Math.*, 87:367–380, 2010.
- [51] F.G.Tan X.H. Wan H. Yu Z.Y. Li, Y.L. Wang and J.S. Duan. Solving a class of linear nonlocal boundary value problems using the reproducing kernel. *Appl. Math. Comput.*, 265:1098–1105, 2015.
- [52] Y.Z.Lin M.Q. Xu and Y.H.Wang. A new algorithm for nonlinear fourth order multi-point boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, 274:163–168, 2016.
- [53] X. Cao Y. Wang and X. Li. A new method for solving singular fourth-order boundary value problems with mixed boundary conditions. *Appl. Math. Comput.*, 217:7385–7390, 2011.
- [54] T. Allahviranloo, H. Sahihi. Reproducing kernel method to solve fractional delay differential equations, *Appl. Math. Comput.* 400:126095, 2021.
- [55] E.Babolian, D.Hamedzadeh. A splitting iterative method for solving second kind integral equations in reproducing kernel spaces, *J. Comput. Appl. Math.* 326:204-216, 2017.

- [56] K. Atkinson, W. Han. Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework, Third Edition, Springer Science, 2009.
- [57] M.L. Morgado, N.J. Ford, P.M. Lima. Analysis and numerical methods for fractional differential equations with delay, *J. Comput. Appl. Math.* 252:159–168, 2013.
- [58] M.Q. Xu, Y.Z. Lin. Simplified reproducing kernel method for fractional differential equations with delay, *Appl. Math. Lett.* 52:156-161, 2016.
- [59] R. Ketabchi, R. Mokhtari, E. Babolian. Some error estimates for solving Volterra integral equations by using the reproducing kernel method, *J. Comput. Appl. Math.* 273:245-250, 2015.
- [60] E. Babolian, S. Javadi, E. Moradi, Error analysis of reproducing kernel Hilbert space method for solving functional integral equations, *J. Comput. Appl. Math.* 300:300-311, 2016.
- [61] E. Babolian, D. Hamedzadeh. A splitting iterative method for solving second kind integral equations in reproducing kernel spaces, *J. Comput. Appl. Math.* 326:204-216, 2017.
- [62] M. Caputo. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, *Geophysical Journal International*, 13:529–539, 1967.
- [63] K.B. Oldham, J. Spanier. The Fractional Calculus, Academic Press, New York, NY, USA, 1974.
- [64] H. Hassani, J.A.T. Machado, Z. Avazzadeh, An effective numerical method for solving nonlinear variable-order fractional functional boundary value problems through optimization technique, *Nonlinear Dyn* 97:2041-2054, 2019.
- [65] H. Hassani, J.A.T. Machado, E. Naraghirad, Z. Avazzadeh. Optimal solution of a general class of nonlinear system of fractional partial differential equations using hybrid functions, *Engineering with Computers* 39:2401-2431, 2023.
- [66] D.B.H. Tay, S.S. Abesekera, A.P. Balasuriya. Audio signal processing via harmonic separation using variable Laguerre filters, in *Proceedings of the International Symposium on Circuits and Systems*, 558-561, May 2003.
- [67] T. Shinbo, Y. Sugita, N. Aikawa, T. Kimura, T. Moriti, Y. Wakasa, A design of the stopband variable FIR digital filters using spectral parameter, in *Proceedings of the IEEE PacRim*, 90-93, August 2003.
- [68] A. Eghbali, H. Johansson, T. Saramäki. A method for the design of Farrow-structure based variable fractional-delay FIR filters, *Signal Processing* 93:1341-1348, 2013.
- [69] C. Yu, K.L. Teo, H.H. Dam. Design of allpass variable fractional delay filter with signed powers-of-two coefficients, *Signal Processing* 95:32-42, 2014.

- [70] H. Hassani, J.A.T. Machado, Z. Avazzadeh, E. Naraghirad. Generalized shifted Chebyshev polynomials: Solving a general class of nonlinear variable order fractional PDE, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 85:105229, 2020.
- [71] A. Razminia, A.F. Dizaji, V.J. Majd. Solution existence for non-autonomous variable-order fractional differential equations, *Mathematical and Computer Modelling* 55:1106-1117, 2012.
- [72] M. Delkhosh, K. Parand. A hybrid numerical method to solve nonlinear parabolic partial differential equations of time-arbitrary order, *Comput. Appl. Math.* 76:1-31, 2019.
- [73] M. Delkhosh, K. Parand. A new computational method based on fractional Lagrange functions to solve multi-term fractional differential equations, *Numer. Algor.* 88:729–766, 2021.
- [74] M. Delkhosh, K. Parand. Generalized pseudospectral method: Theory and applications, *J. Comput. Sci.* 34:11–32, 2019.
- [75] X.Y. Li, B.Y. Wu. A numerical technique for variable fractional functional boundary value problems, *Appl. Math. Lett.* 43:108-113, 2015.
- [76] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo. Reproducing kernel method for solving singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior in Hilbert space, *J. Comput. Appl. Math.* 328:30-43, 2018.
- [77] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo. Computational method based on reproducing kernel for solving singularly perturbed differential-difference equations with a delay, *Appl. Math. Comput.* 361:583-598, 2019.
- [78] H. Sahihi, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy. Solving system of second-order BVPs using a new algorithm based on reproducing kernel Hilbert space, *Appl. Num. Math.* 151:27-39, 2020.
- [79] S. Abbasbandy, H. Sahihi, T. Allahviranloo. Implementing reproducing kernel method to solve singularly perturbed convection-diffusion parabolic problems, *Math. Model. Anal.* 26:116-134, 2021.
- [80] T. Allahviranloo, H. Sahihi. Reproducing kernel method to solve parabolic partial differential equations with nonlocal conditions, *Nume. Method. Parti. Diffe. Equ.* 36:1758-1772, 2020.
- [81] M. Al-Smadi, S. Momani, N. Djeddi, A. El-Ajou, Z. Al-Zhour. Adaptation of reproducing kernel method in solving Atangana–Baleanu fractional Bratu model, *Int. J. Dynam. Control* 11:136-148, 2023.
- [82] T. Amoozad, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, M. Rostamy Malkhalifeh. Using a new implementation of reproducing kernel Hilbert space method to solve a system of second-order BVPs, *Int J Dyn Control*, 2023.

- [83] Y.T. Jia, M.Q. Xu, Y.Z. Lin. A numerical solution for variable order fractional functional differential equation, *Appl. Math. Lett.* 64:125-130, 2017.
- [84] F. Geng, M. Cui. A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems, *Appl. Math. Let.* 25:818-823, 2012.
- [85] Y. Wang, M. Du, F. Tan, Z. Li, T. Nie. Using reproducing kernel for solving a class of fractional partial differential equation with non-classical conditions. *Appl. Math. Comput.* 219:5918-5925, 2013.
- [86] M.Z. Liu, D.S. Li. Properties of analytic solution and numerical solution of multi-pantograph equation, *Appl. Math. Comput.* 155: 853–871, 2004.
- [87] M. Sezer, S. Yalçınbaş, M. Gülsu. A taylor polynomial approach for solving generalized pantograph equations with nonhomogeneous term, *Int. J. Comput. Math.* 85:1055–1063, 2008.
- [88] M. Sezer, S. Yalçınbaş, N. Şahin. Approximate solution of multi-pantograph equation with variable coefficients, *J. Comput. Appl. Math.* 214:406–416, 2008.
- [89] R. Rodríguez-López. Nonlocal boundary value problems for second-order functional differential equations, *Nonlinear Anal.* 74:7226–7239, 2011.
- [90] W.B. Wang, J.H. Shen, Z.G. Luo, Multi-point boundary value problems for second-order functional differential equations, *Comput. Math. Appl.* 56:2065–2072, 2008.
- [91] F.G.Tan X.H. Wan H. Yu Z.Y. Li, Y.L. Wang and J.S. Duan. Solving a class of linear nonlocal boundary value problems using the reproducing kernel. *Appl. Math. Comput.*, 265:1098–1105, 2015.
- [92] Y.Z.Lin M.Q. Xu and Y.H.Wang. A new algorithm for nonlinear fourth order multi-point boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, 274:163–168, 2016.
- [93] X. Cao Y. Wang and X. Li. A new method for solving singular fourth-order boundary value problems with mixed boundary conditions. *Appl. Math. Comput.*, 217:7385–7390, 2011.
- [94] Y. Muroya, E. Ishiwata, H. Brunner, On the attainable order of collocation methods for pantograph integro-differential equations, *J. Comput. Appl. Math.* 152:347–366, 2003.

واژه نامه

الف

Astrophysics	اخترفیزیک
Entropy	آنتروپی
Electrodynamics	الکترودینامیک
Error analysis	آنالیز خطا
Integral	انتگرال
Wave Propagation	انتشار موج
Integration by parts	انتگرال جزء به جزء
Adjoint	الحاقی

ب

Sufficiently Smooth	به قدر کافی هموار
Biomechanic	بیومکانیک
Biophysical	بیوفیزیک
Biology	بیولوژی
Optimal	بهینه
Expansion	بسط
Closed	بسته
Closure	بستار
Uniformly	به طور یکنواخت

پ

Normal Orthogonal Basis	پایه های متعامد یکه
Auxiliary parameter	پارامتر کمکی
Embedding parameter	پارامتر نشاندنه
Signal Processing	پردازش سیگنال
Geographic Data Processing	پردازش اطلاعات جغرافیایی



ت

Mixed	ترکیبی
Basis functions	توابع پایه‌ای
Residual function	تابع مانده
Unknown function	تابع مجهول
Divide	تقسیم کردن
Heart Exchanges	تبادل حرارت
Urban Traffics	ترافیک شهری
Signature Verification	تایید امضا

ث

Constant	ثابت
----------	------

ج

Approximate solution	جواب تقریبی
Exact solution	جواب دقیق
Numerical solution	جواب عددی
General solution	جواب عمومی
Biological Population	جمعیت بیولوژیکی

چ

Characteristic equation	چند جمله‌ای مشخصه
Dense	چگال
Multiple	چندگانه

ح

Numerical solution	حل عددی
Memory	حافظه
Initial guess	حدس اولیه

خ



Absolute error	خطای مطلق
Polynomial Interpolation Error	خطای چندجمله‌ای درونیاب
Fundamental Properties	خواص پایه‌ای
Adjoint	خودالحاقی

د

Fluid dynamics	دینامیک سیالات
Polynomial Degree	درجه چندجمله‌ای
Interpolation	درونیابی
Sequence	دنباله
Subsequence	زیردنباله
System of differential equations	دستگاه معادلات دیفرانسیل
System of algebraic equations	دستگاه معادلات جبری
Dirac delta	دلتای دیراک

ر

Nuclear Reactors	راکتورهای هسته‌ای
Robotics	رباتیک
Tumor Growth	رشد تومور
Age-Structured Population Growth	رشد جمعیت با ساختار سنی
Cell Growth	رشد سلول
Differential quadrature method	روش هسته‌بازتولیدی
Homotopy analysis method	روش تحلیل هموتوپی
Numerical method	روش عددی

ز

Closed Subspaces	زیرفضاهای بسته
Mathematical biology	زیست‌شناسی ریاضی

س

Taylor series	سری تیلور
Homotopy series	سری هموتوپی



سیستم های اسکیل بزرگ Large-Scale systems
سیستم های چراندن Grazing Systems
سیستم های دینامیکی غیرخطی Nonlinear Dynamical Systems
سیستم تابعی کامل Complete function system

ش

شبه نرم Seminorm
شرایط اولیه Initial conditions
شرایط مرزی Boundary conditions
شرایط ترکیبی Mixed conditions
شرایط غیرمحلی Nonlocal conditions
شدید Severe
شکل Figure
شیمی Chemidtry
شبکه های عصبی Neural Network

ص

صدق کردن Satisfy

ض

ضرب داخلی Inner product
ضریب ثابت Constant coefficient
ضریب Coefficient

ع

عملگر Operator
عملگر تابعی Functional operator
عملگر پیوسته Continuous operator

غ



Nonlinear غیر خطی
Nonlocal غیر محلی

ف

Physics فیزیک
Physiology فیزیولوژی
Normed space فضای نرم‌دار
Hilbert space فضای هیلبرت
Metric space فضای متریک
Orthogonalization process فرایند متعامدسازی
Compact فشرده

ق

Piecewise continuous قطعه به قطعه پیوسته
Countable قابل شمارش

ک

Noise Reduction کاهش نویز
Optimal Control کنترل بهین
Completely continuous کاملاً پیوسته
Bounded کراندار

گ

Discrete گسسته

م

Maximum ماکزیمم
Minimum مینیمم
Maximum Absolute Error ماکزیمم خطای مطلق
Convergence Order مرتبه همگرایی
Conjugate Symmetric متقارن مزدوج



Fractional problem	مسئله کسری
Fractional nonlocal problem	مسئله غیرمحلی کسری
Singular	منفرد
Fundamental concepts	مفاهیم اساسی
Functional differential equation	معادلات دیفرانسیل تابعی
Delay differential equation	معادلات دیفرانسیل تأخیری
Fractional differential equation	معادله دیفرانسیل کسری
Delay fractional differential equation	معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری
Ordinary differential equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
Variable delay integro-differential equation	معادلات انتگرال-دیفرانسیل تأخیری متغیر
Variable fractional differential equation	معادلات دیفرانسیل کسری متغیر
Nonlocal functional differential equation	معادلات دیفرانسیل تابعی غیرمحلی با تأخیر یا آرگومان های پیشرفته
	with delayed or advanced arguments
Derivative order	مرتبه مشتق
Boundary value problem	مسئله مقدار مرزی
Functional boundary value problem with variable fractional	مسئله مقدار مرزی تابعی با مرتبه کسری متغیر
Conjugate	مزدوج
Linearly independent	مستقل خطی
Differential	مشتق
Partial derivative	مشتق جزئی
Fractional derivative	مشتق کسری
Valid	معتبر
Partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
Invertible	معکوس پذیر
Absolutely continuous	مطلقاً پیوسته
Sense of norm	مفهوم نرم
Inverse	معکوس
Fractional Calculus	محاسبات کسری
Fluid Mechanics	مکانیک سیالات
Quantum Mechanics	مکانیک کوانتوم
Engineering	مهندسی

ن

Infinite	نامتناهی
Norm	نرم
Control Theory	نظریه کنترل



Number Theory	نظریه اعداد
Probability Theory on Algebraic Structure	نظریه احتمال در ساختارهای جبری
Semi-analytical	نیمه تحلیلی
Infinity-norm	نرم بی‌نهایت
Error of norm two	نرم دو خطا
Exponential	نمایی
Precompact	نسبتاً فشرده
Continuous mapping	نگاشت پیوسته

و

Viscoelasticity	ویسکوالاستیسیته
Existence	وجود

ه

Convergence	همگرایی
Collocation	هم‌محلی
Reproducing kernel	هسته بازتولیدی
Positive definite kernel	هسته معین مثبت
Homotopy	هموتوپی
Homogenization	همگن‌سازی
Equicontinuous	هم‌پیوسته

ی

Unique	یکتا
------------------	----------------



مقاله مستخرج از رساله

[1] Hajar Rasekhinezhad, Saeid Abbasbandy, Tofiqh Allahviranloo, Esmail Babolian, Applications of new smart algorithm based on kernel method for variable fractional functional boundary value problems, International Journal of Dynamics and Control. Published: 19 March 2024.



Abstract

In this thesis, we solve fractional delay differential equation, variable delay integro-differential equation, variable fractional functional boundary value problem and nonlocal functional differential equations with delayed or advanced arguments using the reproducing kernel Hilbert space method. We considered reproducing kernel Hilbert space method without the Gram-Schmidt orthogonalization process and first introduce it, and then to implement it on the mentioned problems, we first obtain the reproducing kernel that holds the initial, boundary or nonlocal conditions, then, using the reproducing kernel method without the orthogonalization process to solve the considered problems. The results of the implementation of the algorithm show low volume of calculations, rapid convergence to the analytical solutions and high accuracy of the proposed method compared to other numerical methods. In the reproducing kernel method, components such as points, space, inner product and bases have an effect on increasing the accuracy. In each chapter we present the theorems of the reproducing kernel and then we bring proof of the convergence and error analysis theorems for the considered problems, separately.

Keywords: *Fractional delay differential equations; Variable delay integro-differential equation; Variable fractional functional boundary value problem; Nonlocal functional differential equations with delayed or advanced arguments; fractional derivative; Reproducing kernel method; Error analysis; Convergence analysis*



Islamic Azad University

Science and Research Branch

Department of Mathematics

Ph.D Thesis for degree of Applied Mathematics and Numerical Analysis

Subject:

Reproducing Kernel Method to Solve Fractional Delay Differential Equations

Supervisor:

T. Allahviranloo Ph.D.

S. Abbasbandy Ph.D.

Advisor:

E. Babolian Ph.D.

By:

Hajar Rasekhinezhad

Spring 2024