معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

با یاری از خداوند سبحان و اعتقاد به اینکه عالم محضر خداست و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضاء هیأت علمی واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم، اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هر گونه پنهان سازی حقیقت.

۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه همکاران پژوهش.

۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هر گونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از هر گونه حرمت شکنی.

۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹- اصل برائت: التزام به برائت جویی از هر گونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلایند.

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات تهران

تعهدنامه اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب طاهر عموزاده مهدیرجی دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی که در تاریخ ۱۴۰۳/۴/۲ از رساله خود تحت عنوان
روش بسته باز تولیدی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل متقرن با شرایط غیر محلی با کسب نمره ۲۰ و درجه عالی دفاع نموده‌ام بدینوسیله متعهد می‌شوم:

۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه،کتاب،مقاله و ...)استفاده نموده‌ام ،مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آنرا در فهرست مربوط ذکر و درج کرده‌ام.

۲) این رساله قبلا برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح،پایین تر یا بالاتر)در سایر دانشگاه‌ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل ،قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و... از این رساله داشته باشم ،از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوط را اخذ نمایم.

۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد ثابت شود،عواقب ناشی از آن را می‌پذیرم و دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: طاهر عموزاده مهدیرجی
تاریخ و امضاء: ۱۴۰۳/۴/۲

دانشگاه آزاداسلامی

واحد علوم و تحقیقات تهران

دانشکده علوم‌پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

روش هسته بازتولیدی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل منفرد با شرایط غیر محلی

استادان راهنما:

دکتر توفیق الهویرانلو

دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور:

دکترمحسن رستمی

نگارش:

طاهر عموزاد مهدیرجی

۱۴۰۳

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستیمان بخشید و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و ذرّه‌ای ناچیز از دریای علم و معرفت خود را روزیمان ساخت. در اینجا لازم می‌دانم از زحمات اساتید ارجمندم، دکتر سعید عباس‌بندی و دکتر توفیق الهویر نلوکه با راهنمائیهای کارساز و سازنده، همواره روشنگر راه بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر کنم و از دکتر محسن رستمی که در سمت مشاور پایان نامه از گلکشان بهره بردم سپاسگذارم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و همسر مهربانم

که همواره من را برای رسیدن به درجات عالی علمی حمایت می کنند

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

چکیده

در این رساله تعمیمی از روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند گرام اشمیت برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی ارائه کردیم. در روش هسته بازتولیدی، مولفه هایی همچون نقاط، فضا، ضرب داخلی، پایه ها و روش مناسب برای حل مسئله با دقتی قابل قبول حائز اهمیت است. پیاده سازی آسان، حذف فرآیند گرام اشمیت، حجم محاسبات کم و دقت بالا از ویژگی های روش پیشنهادی در این رساله می باشد. با توجه به این که می توان بسیاری از پدیده ها را در فیزیک، شیمی، زیست و صنعت به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی مدل سازی کرد، بیش از پیش روش های عددی برای حل این نوع مسائل مورد توجه قرار گرفته است. در ادامه این رساله ابتدا به بیان مسئله و معرفی روش هسته باز تولیدی پرداختیم، سپس روشی را که تعمیم آن منجر به روش پیشنهادی می شود را معرفی کردیم و در نهایت با دو رویکرد متفاوت به پیاده سازی روش حاضر به همراه اثبات قضایای همگرایی و آنالیز خطا پرداختیم.

کلمات کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی، روش هسته بازتولیدی، آنالیز خطا، آنالیز همگرایی.

فصل ۱

بیان مسئله، تاریخچه، اهمیت موضوع و مفاهیم اولیه

۱.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی

۱.۱.۱ مقدمه

دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی در علوم مکانیک، اقتصاد و زیست کاربرد دارد [۶-۱] . نویسندگان زیادی از روش های قدرتمند ریاضی همانند هم محلی طیفی چبیشف ، توابع پایه ای شعاعی، روش اختلالی هموتوپی ، روش هسته بازتولیدی با فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت ، برای حل انواع مختلف دستگاه معادلات دیفرانسیل مانند دستگاه معادلات دیفرانسیل جزیی غیر خطی، دستگاه معادلات انتگرال اولترا، دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل غیر خطی کسری اولترا، دستگاه معادلات دیفرانسیل اختلالی منفرد مسائل مقدار مرزی واکنش - انتشار، حل کرده اند [۱۵-۷].

روش هسته بازتولیدی تاکنون به صورت های مختلفی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل به کار برده شده است، همچنین طیف وسیعی از دستگاه معادلات دیفرانسیل با روش های عددی مختلف حل شده اند. در کتاب روش هسته بازتولیدی مربوط به کوی [۱] و لین [۲] دستگاه معادلات دیفرانسیل با روش هسته بازتولیدی با فرآیند متعامد گرام اشمیت مورد حل و بررسی قرار گرفته است [۱۶]. روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت اولین بار توسط ونگ [۳] و همکاران مطرح شد [۱۷، ۱۸] و توسط صحیحی و همکاران روی مسائل دیفرانسیل- تفاضلی اختلالی منفرد تاخیری و دستگاه معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی معمولی و اختلالی منفرد پیاده سازی شده است [۲۱-۱۹]. بیشتر پژوهشهای اخیر در خصوص حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش هسته بازتولیدی با فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت شکل گرفته است و تاکنون پژوهش های کمی بر روی روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت پیاده سازی شده است.

در این رساله، دو رویکرد کاملا متفاوت را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی همگن و ناهمگن بر مبنای روش هسته بازتولیدی با حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت ارائه شده است. برای نشان دادن کارآمدی رویکرد اول مقایسه ای بین این رویکرد و روش [۲۲] ، انجام خواهیم داد. در [۲۲]، دکتر صحیحی و همکاران روش جدیدی بر مبنای روش هسته بازتولیدی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت ارائه دادند. همچنین، برای نشان دادن کارآمدی رویکرد دوم مقایسه ای بین این رویکرد و روش [۲۳]، انجام خواهیم داد. روش [۲۳] ، روش اختلالی هموتوپی بر مبنای هسته بازتولیدی است. روش اختلالی هموتوپی بر مبنای هسته بازتولیدی، یک روش قدرتمند در حل انواع معادلات و دستگاه معادلات دیفرانسیل می باشد. در ادامه، این رساله به صورت زیر فصل بندی شده است.

در فصل اول به بیان مفاهیم پایه ای شامل فضا، نحوه ساختن پایه ها و قضیه های اساسی می پردازیم. در فصل دوم به بررسی سه روش متفاوت برای حل معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد با شرایط مقدار مرزی خواهیم پرداخت، سپس در انتهای این فصل به بیان ایده اصلی جهت حل دستگاه معادلات دیفرانسیل می پردازیم. در فصل سوم به شرح کامل یک پیاده سازی جدید برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مقدار مرزی به همراه نتایج عددی خواهیم پرداخت. در فصل چهارم نیز به یک رویکرد جدید و کاملا متفاوت برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خواهیم پرداخت. در نهایت در فصل پنجم، به نتیجه گیری و پیشنهادات جهت انجام کارهای آینده پرداخته شده است.

تعریف ۱.۱.۱. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل مجموعه متناهی از معادلات دیفرانسیل است. به طوریکه، هر کدام از این معادلات دیفرانسیل به صورت ترکیب خطی یا غیر خطی از توابع مجهول و مشتقات آن ساخته شده است. نکته مهم، وابستگی این معادلات دیفرانسیل به یکدیگر می باشد، به طوریکه توابع مجهول و مشتقات آن در یک معادله در معادلات دیگر نیز ظاهر می شود. نمونه ای از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی به صورت زیر است.

[۱] M. Cui [۲] Y. Lin [۳] Wang

مثال ۱.۱.۲. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط مقدار مرزی

$$\begin{cases} \eta_1''(\tau)+\eta_1'(\tau)+\tau\,\eta_1(\tau)+\eta_2'(\tau)+2\tau\,\eta_2(\tau)=f_1(\tau), & 0\le\tau\le 1,\\ \eta_2''(\tau)+\eta_2(\tau)+2\eta_1'(\tau)+\tau^2\eta_1(\tau)=f_2(\tau),\\ \eta_1(0)=\eta_1(1)=0, \qquad \eta_2(0)=\eta_2(1)=0. \end{cases}$$

مثال ۱.۱.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی

$$\begin{cases} \eta_1''(\tau)+\eta_1'(\tau)+\tau^2\eta_2(\tau)+\eta_2'(\tau)+2\tau\,\eta_2(\tau)+\eta_1'(\tau)sin(\eta_3'(\tau))=f_1(\tau), & 0\le\tau\le 1,\\ \eta_2''(\tau)+\eta_2(\tau)+2\eta_1'(\tau)+\tau^2\eta_1(\tau)+\tau\,\eta_2^2(\tau)\eta_3(\tau)=f_2(\tau),\\ \eta_3''(\tau)+\tau\eta_3'(\tau)+\tau^2\eta_2(\tau)+2(\eta_2'(\tau))^2\eta_1'(\tau)e^{\eta_3(\tau)}=f_3(\tau),\\ \eta_1(0)=\eta_1(1)=0, \qquad \eta_2(0)=\eta_2(1)=0, \qquad \eta_3(0)=\eta_3(1)=0. \end{cases}$$

۲.۱ مفاهیم پایه‌ای فضای هسته بازتولیدی

تعریف ۱.۲.۱. قرار می‌دهیم،

$$\mathcal{H}=\Big\{u|\ u \text{ یک تابع با مقادیر حقیقی یا مختلط روی مجموعه مجرد } X \text{ است}\Big\}$$

یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر،

$$\big\langle u,g\big\rangle_{\mathcal{H}},\qquad u,g\in\mathcal{H}.$$

اگر یک تابع $R_y\in\mathcal{H}$ برای هر $y\in X$ وجود داشته باشد، به طوریکه برای هر $u\in\mathcal{H}$ داشته باشیم

$$\big\langle u,R_y\big\rangle_{\mathcal{H}}=u(y),$$

آنگاه R_y هسته بازتولیدی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود و $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی نامیده می‌شود.

خاصیت ۱.۲.۱. اگر $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی و R_y هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه R_y متقارن مزدوج است، یعنی $R_y(x)=\overline{R_x(y)}$.

خاصیت ۱.۲.۲. اگر $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی و R_y هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه R_y هسته بازتولیدی منحصر به فرد فضای $\mathcal{H}$ است.

خاصیت ۱.۲.۳. اگر $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی و R_y هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه $\forall x\in X$، $R_x(x)\ge 0$ و $R_x(x)=0$ است اگر و تنها اگر $\mathcal{H}=\{0\}$.

خاصیت ۱.۲.۴. هسته بازتولیدی R_y یک هسته معین مثبت برای فضای $\mathcal{H}$ است، یعنی

$$\sum_{i,j=1}^{n}R_{x_i}(x_j)\overline{\xi_i}\xi_j\ge 0,\qquad \forall x_i\in X,$$

که ξ_i,ξ_j اعداد مختلط هستند $i,j=1\ldots,n$.

خاصیت ۱.۲.۵. فضای تابعی هیلبرت $\mathcal{H}$ یک فضای هسته بازتولیدی است اگر و تنها اگر برای هر $x\in X$، عملگر تابعی خطی $I(f)=f(x)$ کراندار باشد.

برای اثبات هر پنج خاصیت رجوع شود به [۱۶، ۲۴].

۱.۲.۱ تابع مطلقا پیوسته

تعریف ۷.۲.۱. تابع f را روی بازه $[a,b]$ در نظر می گیریم و فرض می کنیم $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ یک مجموعه از بازه‌های باز دوبه‌دو از هم جدا زیر مجموعه $[a,b]$ باشند. اگر $\forall\varepsilon,\exists\delta$ به طوری که،

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon,\quad \text{برای}\quad \sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta,$$

در این صورت تابع f یک تابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a,b]$ است.

خاصیت ۸.۲.۱. یک تابع مطلقا پیوسته روی بازه $[a,b]$ یک تابع پیوسته است.

خاصیت ۹.۲.۱. فرض کنید تابع f روی بازه $[a,b]$ دارای مشتق کراندار باشد یعنی ، اگر $|f'|\leq M$، آنگاه f یک تابع مطلقا پیوسته است.

خاصیت ۱۰.۲.۱. فرض کنید تابع f' روی بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع f روی بازه $[a,b]$ مطلقا پیوسته است.

خاصیت ۱۱.۲.۱. اگر تابع f روی بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $\int_a^x f(t)dt$ یک تابع مطلقا پیوسته روی بازه $[a,b]$ است.

برای اثبات این خواص به [۱۶] مراجعه شود.

۲.۲.۱ فضای هسته بازتولیدی $W_2^m[a,b]$ و تابع هسته بازتولیدی آن

فضای هیلبرت $L^2[a,b]$ را با ضرب داخلی استاندارد در نظر می گیریم. فضای تابعی $W_2^m[a,b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_2^m[a,b]=\left\{u\,|\ u^{(m-1)}\text{ تابع مطلقا پیوسته است }\ ,\ u^{(m)}\in L^2[a,b]\right\}$$

همچنین ضرب داخلی و نرم را $\forall u_1,u_2\in W_2^m[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$<u_1,u_2>_{W_2^m[a,b]}=\sum_{i=0}^{m-1}u_1^{(i)}(a)u_2^{(i)}(a)+\int_a^b u_1^{(m)}(x)u_2^{(m)}(x)dx,$$

$$\|u\|_{W_2^m[a,b]}=\sqrt{<u,u>_{W_2^m[a,b]}},$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که فضای تابعی $W_2^m[a,b]$ یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۱۲.۲.۱. فضای تابعی $W_2^m[a,b]$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۱۳.۲.۱. فضای تابعی $W_2^m[a,b]$ یک فضای هسته بازتولیدی است.

برای اثبات قضایای فوق به [۱۶] رجوع شود. در ادامه می خواهیم R_y تابع هسته بازتولیدی $W_2^m[a,b]$ را بدست آوریم. برای این کار فرض کنیم $y\in[a,b]$ مشخص باشد، باید $\forall u\in W_2^m[a,b]$ تابع در شرط زیر صدق کند:

$$\left\langle u,R_y\right\rangle_{W_2^m[a,b]}=u(y). \tag{۱.۱}$$

با بکاربردن تعریف ضرب داخلی برای فضای $W_2^m[a,b]$ داریم،

$$\left\langle u, R_y \right\rangle_{W_2^m[a,b]} = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a)\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b u^{(m)}(x)\frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m}dx,$$

که با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم،

$$\int_a^b u^{(m)}(x)\frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m}dx = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i u^{(m-i-1)}(x)\frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}}\Big|_{x=a}^{x=b} + (-1)^m \int_a^b u(x)\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}}dx$$

همچنین داریم،

$$\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i u^{(m-i-1)}(x)\frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1} u^{(i)}(x)\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}}.$$

در نتیجه ضرب داخلی به فرم زیر تبدیل می‌شود،

$$\begin{aligned}\left\langle u, R_y \right\rangle_{W_2^m[a,b]} &= \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a)\Big[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1}\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}}\Big] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{m-i-1} u^{(i)}(b)\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b u(x)\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}}dx. \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

با استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک و انتگرال آن رو بازه $(-\infty, +\infty)$ و همچنین مفروضات زیر، خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی در رابطه (۲.۱) برقرار می‌شود،

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & x \neq y, \\ \infty & x = y, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\delta(x-y)dx = u(y),$$

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1}\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ (-1)^{m-i-1}\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1. \end{cases} \tag{۳.۱}$$

مشخص است زمانی که $x \neq y$، تابع R_y جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن زیر با مرتبه $۲m$ است،

$$(-۱)^m \frac{\partial^{۲m} R_y(x)}{\partial x^{۲m}} = ۰, \tag{۴.۱}$$

با شرایط مرزی زیر،

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-۱)^{m-i-۱} \frac{\partial^{۲m-i-۱} R_y(a)}{\partial x^{۲m-i-۱}} = ۰, \\ \\ (-۱)^{m-i-۱} \frac{\partial^{۲m-i-۱} R_y(b)}{\partial x^{۲m-i-۱}} = ۰, \quad i = ۰, ۱, \ldots, m-۱. \end{cases} \tag{۵.۱}$$

چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل (۴.۱) برابر $\lambda^{۲m} = ۰$ است که دارای ریشه تکراری صفر از مرتبه تکرار $۲m$ است، بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۴.۱) با شرایط مرزی (۵.۱) به صورت زیر است،

$$R_y(x) = \begin{cases} \ell R_y(x) = \sum_{i=۱}^{۲m} c_i(y) x^{i-۱}, & x \leq y, \\ \\ r R_y(x) = \sum_{i=۱}^{۲m} d_i(y) x^{i-۱}, & x > y, \end{cases} \tag{۶.۱}$$

حال برای بدست آوردن تابع هسته بازتولیدی R_y کافی است که ثابتهای $c_i(.)$ و $d_i(.)$ که $i = ۱, ۲, \ldots, ۲m$ را محاسبه کنیم. مشخص است برای محاسبه این $۴m$ مجهول، نیاز به $۴m$ معادله داریم که در ادامه نحوه بدست آوردن آنها را توضیح می‌دهیم. با استفاده از تعریف انتگرال تابع دلتای دیراک روی بازه $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ و رابطه

$$(-۱)^m \frac{\partial^{۲m} R_y(x)}{\partial x^{۲m}} = \delta(x-y),$$
$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta(x-y)dx = ۱, \quad \varepsilon > ۰,$$

داریم،

$$\begin{cases} (-۱)^m \left(\frac{\partial^{۲m-۱} r R_y(y+\varepsilon)}{\partial x^{۲m-۱}} - \frac{\partial^{۲m-۱} \ell R_y(y-\varepsilon)}{\partial x^{۲m-۱}} \right) = ۱, \\ \\ \frac{\partial^i \ell R_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r R_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = ۰, ۱, \ldots, ۲m-۲. \end{cases} \tag{۷.۱}$$

رابطه (۷.۱)، $۲m$ مورد نیاز برای محاسبه ثابت‌های $c_i(.)$ و $d_i(.)$ را فراهم می‌آورد، و بااستفاده از شرایط مرزی (۵.۱) می‌توانیم $۲m$ معادله دیگر را بدست بیاوریم. بنابراین با استفاده از این $۴m$ معادله به راحتی می توان تابع هسته بازتولیدی R_y را تعیین کرد. در ادامه برخی از خواص تابع هسته بازتولیدی R_y را می‌آوریم که اثبات آنها در [۱۶] یافت می‌شود.

گزاره ۱۴.۲.۱. فرض کنیم R_y هسته بازتولیدی $W_۲^m[a,b]$ باشد، آنگاه داریم

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^۲[a,b], \quad i+j = ۲m-۱.$$

نتیجه ۱۵.۲.۱. تابع زیر یک تابع مطلقا پیوسته در بازه $[a,b]$ است،

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad ۰ \leq i+j \leq ۲m-۲.$$

از نتیجه و گزاره فوق، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۶.۲.۱. فرض کنیم R_y هسته بازتولیدی $W_۲^m[a,b]$ باشد، آنگاه داریم

$$\frac{\partial^{i+j}R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in W_۲^m[a,b], \quad i+j=m-۱.$$

قضیه ۱۷.۲.۱. فرض کنیم $W_۲^m[a,b]$ فضای هسته بازتولیدی و $f_n, f \in W_۲^m[a,b]$ که$(n=۱,۲,\dots)$. اگر تابع f_n به تابع f به مفهوم نرم $\|.\|_{W_۲^m}$ همگرا باشد، آنگاه تابع $f_n^{(k)}$ به تابع $f^{(k)}$ به طور یکنواخت همگرا می‌باشد، که $۰ \le k \le m-۱$.

۳.۲.۱ زیر فضاهای بسته فضای هسته بازتولیدی $W_۲^m[a,b]$

در این بخش زیرفضای بسته $W_۲^m[a,b]$ را با اعمال یک سری شرایط مرزی خواهیم ساخت و آن را با $^{\circ}W_۲^m[a,b]$ نمایش داده و به عنوان مثال تعریف می کنیم:

$$^{\circ}W_۲^m[a,b] = \Big\{u|\ u \in W_۲^m[a,b],\ u'(a)=۰, u(b)=۰\Big\}$$

به راحتی همانند فضای $W_۲^m[a,b]$ ثابت می‌شود که $^{\circ}W_۲^m[a,b]$ یک فضای هسته بازتولیدی هیلبرت است. تابع فضای هسته بازتولیدی $^{\circ}W_۲^m[a,b]$ را Q_y می‌نامیم و اکنون درصدد پیدا کردن تابع Q_y هستیم و قابل ذکر است که نحوه پیدا کردن Q_y کاملا شبیه به روش پیدا کردن تابع R_y است. مشخص است که Q_y باید در ضرب داخلی زیر صدق کند،

$$\begin{aligned}\big\langle u, Q_y\big\rangle_{^{\circ}W_۲^m[a,b]} &= \sum_{i=۰}^{m-۱} u^{(i)}(a)\Big[\frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-۱)^{m-i-۱}\frac{\partial^{۲m-i-۱}Q_y(a)}{\partial x^{۲m-i-۱}}\Big] \\ &+ \sum_{i=۰}^{m-۱}(-۱)^{m-i-۱}u^{(i)}(b)\frac{\partial^{۲m-i-۱}Q_y(b)}{\partial x^{۲m-i-۱}} \\ &+ (-۱)^m\int_a^b u(x)\frac{\partial^{۲m}Q_y(x)}{\partial x^{۲m}}dx,\end{aligned}$$

بنابراین تابع Q_y جواب معادله دیفرانسیل زیر است، با این تفاوت که به خاطر نوع تعریف فضای $^{\circ}W_۲^m[a,b]$، دارای دوشرط مرزی متفاوت نسبت به محاسبه تابع R_y است.

$$\begin{cases} (-۱)^m\frac{\partial^{۲m}Q_y(x)}{\partial x^{۲m}} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-۱)^{m-i-۱}\frac{\partial^{۲m-i-۱}Q_y(a)}{\partial x^{۲m-i-۱}} = ۰, \quad i=۰,۲,۳,\dots,m-۱, \\ \frac{\partial^{۲m-i-۱}Q_y(b)}{\partial x^{۲m-i-۱}} = ۰, \qquad\qquad i=۱,۲,۳,\dots,m-۱, \\ Q_y(b)=۰, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = ۰. \end{cases} \tag{۸.۱}$$

همانند قبل مشخص است که زمانی که $x \neq y$ است آنگاه تابع Q_y جواب معادله دیفرانسیل مرتبه $2m$ خطی همگن زیر،

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0, \tag{9.1}$$

با شرایط مرزی،

$$\begin{cases} \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, & i = 0, 2, 3, \ldots, m-1, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, & i = 1, 2, 3, \ldots, m-1, \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{10.1}$$

است. چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل (۹.۱) برابر $\lambda^{2m} = 0$ است که دارای ریشه تکراری صفر از مرتبه تکرار $2m$ است، بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۹.۱) با شرایط مرزی (۱۰.۱) به صورت زیر است:

$$Q_y(x) = \begin{cases} \ell Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ r Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases} \tag{11.1}$$

اکنون با استفاده از معادلات حاصل از $2m$تا شرط مرزی (۱۰.۱) و همچنین $2m$ معادله زیر، که با استفاده از انتگرال از دو طرف رابطه $(-1)^m \frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y)$ روی بازه $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ بدست می‌آید،

$$\begin{cases} (-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} r R_y(y+\varepsilon)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} \ell R_y(y-\varepsilon)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1, \\ \frac{\partial^i \ell Q_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r Q_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 2m-2, \end{cases} \tag{12.1}$$

می توان ثابتهای $c_i(.)$ و $d_i(.)$ در تابع بازتولیدی (۹.۱) را بدست آورد.

قضیه ۱۸.۲.۱. فضای هسته بازتولیدی $W_2^m[a,b]$، یک زیرفضای بسته از فضای $\overset{\circ}{W}{}_2^m[a,b]$ است [۱۶].

مثال ۱۹.۲.۱. به عنوان مثال تابع‌های بازتولیدی Q_y, R_y به ترتیب برای فضاهای هسته بازتولیدی $W_2^3[0,1]$ و $\overset{\circ}{W}{}_2^3[0,1]$ به صورت زیر هستند.

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{120} - \frac{x^4 y}{24} + \frac{x^3 y^2}{12} + \frac{x^2 y^2}{4} + xy + 1, & x \leq y, \\ \frac{1}{12} x^2 \left(y^3 + 3y^2\right) + \frac{1}{24} x \left(24y - y^4\right) + \frac{1}{120} \left(y^5 + 120\right), & x > y, \end{cases}$$

$$Q_y(x)=\begin{cases}\frac{x^5\left(-y^5+5y^4-10y^3-30y^2+36\right)}{18720}+\frac{x^4\left(y^5-5y^4+10y^3+30y^2-156y+120\right)}{3744}+\frac{x^3\left(-y^5+5y^4-10y^3+126y^2-120\right)}{1872}\\ +\frac{1}{624}x^2\left(-y^5+5y^4-10y^3+126y^2-120\right)+\frac{1}{156}\left(-y^5+5y^4-10y^3-30y^2+36\right), & x\le y,\\ \frac{x^5\left(-y^5+5y^4-10y^3-30y^2-120\right)}{18720}+\frac{x^4\left(y^5-5y^4+10y^3+30y^2+120\right)}{3744}+\frac{x^3\left(-y^5+5y^4-10y^3-30y^2-120\right)}{1872}\\ +\frac{1}{624}x^2\left(-y^5+5y^4+42y^3+126y^2-120\right)-\frac{xy^4}{24}+\frac{3y^5+50y^4-100y^3-300y^2+360}{1560}, & x>y.\end{cases}$$

۴.۲.۱ توابع کاملاً پیوسته

تعریف ۲۰.۲.۱. تابع f را روی ناحیه $D=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ در نظر می گیریم. فرض کنیم

$$\left\{I_k=[a_k,b_k]\times[c_k,d_k]\right\}_{k=1}^n$$

یک مجموعه از ناحیه‌های دوبه‌دو از هم جدا که $I_k\subset D$. اگر $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ به طوری که، $\sum_{i=1}^n|f(I_i)|<\varepsilon$ برای $\sum_{i=1}^n|I_i|<\delta$ و

$$f(I_i)=f(b_i,d_i)-f(b_i,c_i)-f(a_i,d_i)+f(a_i,c_i)$$

و $f(x,c)$، $f(a,y)$ به ترتیب تابع‌های مطلقاً پیوسته نسبت به متغییر y,x باشند آنگاه f یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۱.۲.۱. اگر $f(x,y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D باشد، آنگاه $\forall y\in[c,d]$ تابع $f(x,y)$ یک تابع مطلقاً پیوسته نسبت به متغییر x بر روی بازه $[a,b]$ است و به طور مشابه $\forall x\in[a,b]$ تابع $f(x,y)$ یک تابع مطلقاً پیوسته نسبت به متغییر y بر روی بازه $[c,d]$ است.

گزاره ۲۲.۲.۱. اگر $f(x,y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D باشد، آنگاه $f(x,y)$ یک تابع پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۳.۲.۱. اگر $f(x,y)$ بر روی ناحیه D انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه تابع $(x,y)\in D$ $\int_a^x\int_c^y f(t,s)dtds$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۴.۲.۱. اگر f یک تابع مطلقاً پیوسته بر روی بازه $[a,b]$ باشد، آنگاه f یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۵.۲.۱. اگر $f(x)$ و $g(y)$ تابع‌های مطلقاً پیوسته بر روی بازه‌های $[a,b]$ و $[c,d]$ باشند، آنگاه تابع $f(x)g(y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

برای اثبات گزاره‌های فوق به [۱۶] رجوع شود.

۵.۲.۱ فضای هسته بازتولیدی دوتایی $W_2^{(m,n)}(D)$

فضای تابعی دوتایی $W_2^{(m,n)}(D)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_2^{(m,n)}(D) = W_2^m[a,b] \otimes W_2^n[c,d]$$
$$= \left\{ u(x,t) \middle| \text{ تابع کاملاً پیوسته است } \frac{\partial^{m+n-2}u(x,t)}{\partial x^{m-1}\partial t^{n-1}} \text{ که }, \ \frac{\partial^{m+n}u(x,t)}{\partial x^m \partial t^n} \in L^2(D), \ (x,t) \in D \right\}$$

همچنین ضرب داخلی و نرم را $\forall u_1, u_2 \in W_2^{(m,n)}(D)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$< u_1, u_2 >_{W_2^{(m,n)}(D)} = \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial^i}{\partial x^i}u_1(a,t)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{\partial^i}{\partial x^i}u_2(a,t) \right] dt$$
$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j}u_1(x,c), \frac{\partial^j}{\partial t^j}u_2(x,c) \right\rangle_{W_2^m[a,b]}$$
$$+ \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial t^n}u_1(x,t)\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial t^n}u_2(x,t)dxdt$$
$$\|u(x,t)\|_{W_2^{(m,n)}(D)} = \sqrt{< u, u >_{W_2^{(m,n)}(D)}},$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که فضای تابعی $W_2^{(m,n)}(D)$ یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۲۶.۲.۱. فضای تابعی $W_2^{(m,n)}(D)$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۲۷.۲.۱. قرار می‌دهیم $f, g_1, g_2 \in W_2^{(m,n)}(D)$ آنگاه،

$$\left\langle f, g_1 g_2 \right\rangle_{W_2^{(m,n)}(D)} = \left\langle \left\langle f, g_1 \right\rangle_{W_2^m}, g_2 \right\rangle_{W_2^n}.$$

نتیجه ۲۸.۲.۱. قرار می‌دهیم $f_1, f_2, g_1, g_2 \in W_2^{(m,n)}(D)$ آنگاه،

$$\left\langle f_1 f_2, g_1 g_2 \right\rangle_{W_2^{(m,n)}(D)} = \left\langle f_1, g_1 \right\rangle_{W_2^m} \left\langle f_2, g_2 \right\rangle_{W_2^n}.$$

نتیجه ۲۹.۲.۱. اگر تابع $f \in W_2^m[a,b]$ آنگاه برای $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|f\|_{W_2^m[a,b]} = \|f\|_{W_2^{(m,n)}}.$$

قضیه ۳۰.۲.۱. فضای تابعی دوبعدی $W_2^{(m,n)}(D)$ یک فضای هسته بازتولیدی است و تابع هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است

$$K_{(\eta,\xi)}(x,t) = R_\eta(x)Q_\xi(t).$$

که R_η و Q_ξ به ترتیب هسته‌های بازتولیدی فضای فضاهای $W_2^m[a,b]$ و $W_2^n[c,d]$ هستند.

برای اثبات قضیه‌ها و نتایج فوق رجوع شود به [۱۶]. اکنون پس از معرفی کامل مقدمات مربوط به فضای هسته بازتولیدی و تابع فضای هسته بازتولیدی و قضیه‌های مربوطه، نوبت به معرفی روش هسته بازتولیدی و نحوه پیاده‌سازی آن برای حل معادله دیفرانسیل می‌رسد.

فصل ۲

روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد با شرایط مقدار مرزی

۱.۲ روش هسته بازتولیدی

۱.۱.۲ مقدمه

روش هسته بازتولیدی یک روش نیمه تحلیلی قدرتمند برای حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل می‌باشد، با استفاده از این روش و تکنیک‌های ابتکاری حتی می توان طیف وسیعی از مسائل دشوارتر را حل کرد و تقریب‌های مناسبی برای آنها بدست آورد، به عنوان مثال نمونه‌هایی از مسائلی که با روش هسته بازتولیدی حل شده‌اند. همانند، معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات دیفرانسیل-انتگرال خطی و غیر خطی، معادلات انتگرال فردهلم-اولترا خطی و غیر خطی و معادلات برگر ضرایب- متغیر [۳۱-۲۵].

در این فصل تمرکز ما بر روی مقاله ای است که توسط یولان ونگ [۱] و همکاران ارائه شده است [۱۸]. در این مقاله سه روش برای حل معادله دیفرانسیل منفرد معرفی شده است (روش ۱، روش۲ ، روش۳). روش ۱ حل معادله دیفرانسیل با فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت است و دو روش دیگر بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت است. با توجه به اینکه در این رساله هدف ارائه تعمیمی از روش ۲ برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی است، در ادامه این فصل به تشریح کامل روش ۲ می پردازیم و به صورت اجمالی روش های ۱ و ۳ را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

در آخر این فصل با توجه به نتایج عددی مقایسه ای بین هر سه روش انجام خواهیم داد و علت اینکه روش ۲ مورد توجه ما قرار گرفته است را تشریح خواهیم کرد.

۲.۱.۲ معادله دیفرانسیل منفرد با شرایط مقدار مرزی

معادله دیفرانسیل منفرد با شرایط مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} L(u(x)) = N(u(x)) + f(x), \\ u(۰) = u(۱) = ۰, \end{cases} \tag{۱.۲}$$

که

$$L(u(x)) \equiv p(x)u''(x) + \frac{۱}{q(x)}u'(x) + \frac{۱}{r(x)}u(x),$$

$\frac{۱}{q(x)}, \frac{۱}{r(x)} \in C(۰,۱)$، $q(۰)q(۱) = ۰$، $r(۰)r(۱) = ۰$ و همچنین $N(u)$ تابعی غیر خطی پیوسته بر حسب u است. قدم اول در حل یک معادله دیفرانسیل با روش هسته بازتولیدی انتخاب مناسب فضای هسته بازتولیدی عملگر معادله می‌باشد. در معادله (۱.۲) با توجه به اینکه بزرگترین مشتق معادله از مرتبه دو است و ما می‌خواهیم که یک جواب تقریبی برای مسئله در فضای هسته بازتولیدی بدست بیاوریم فرض می‌کنیم که تابع مجهول عملگر یا همان u در فضای $W_۲^۳[۰,۱]$ باشد که در اینصورت مشتق اول آن یعنی u' در فضای $W_۲^۲[۰,۱]$ است و مشتق دوم آن، u'' در فضای $W_۲^۱[۰,۱]$ است. با توجه به اینکه

$$W_۲^۳[۰,۱] \subset W_۲^۲[۰,۱] \subset W_۲^۱[۰,۱],$$

پس بدیهی است حالتی را در نظر بگیریم که $L(u)$ در فضای $W_۲^۱[۰,۱]$ است. نکته دیگری که نباید در اینجا فراموش شود این است که فضای $W_۲^۳[۰,۱]$ که تابع مجهول معادله u در آن فرض شده همراه با شرایط مقدار مرزی $u(۰) = ۰$ $u(۱) = ۰$ است که باید در تولید تابع هسته بازتولیدی لحاظ شوند، پس فضای هسته بازتولیدی $W_۲^۳[۰,۱]^{\circ}$ را به

[۱] Yulan Wang

صورت زیر تعریف می کنیم،

$$^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱]=\Big\{u|\ \text{تابع مطلقا پیوسته است } u^{(۲)},\ u^{(۳)}\in L^{۲}[۰,۱],\ u(۰)=u(۱)=۰\Big\},$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$< u_{۱},u_{۲} >_{\circ W_{۲}^{۳}[۰,۱]}=\sum_{i=۰}^{۲}u_{۱}^{(i)}(۰)u_{۲}^{(i)}(۰)+\int_{۰}^{۱}u_{۱}^{(۳)}(x)u_{۲}^{(۳)}(x)dx,$$

$$\|u\|_{\circ W_{۲}^{۳}[۰,۱]}=\sqrt{< u,u >_{\circ W_{۲}^{۳}[۰,۱]}},\qquad \forall u_{۱},u_{۲}\in {}^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱],$$

و بنابراین فضای عملگر معادله به صورت $L:{}^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱]\longrightarrow W_{۲}^{۱}[۰,۱]$ است. به راحتی می‌توان ثابت کرد که L یک عملگر خطی کراندار است [۱۶]، بعلاوه L^{*} عملگر خودالحاقی L را به صورت $L^{*}:W_{۲}^{۱}[۰,۱]\longrightarrow {}^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱]$ تعریف می کنیم.

نکته ۱.۱.۲. در بعضی مواقع مخصوصا زمان‌هایی که به دنبال ارائه یک آنالیز خطا از روش هسته بازتولیدی هستیم یا به دنبال تقریب مشتق‌های از مرتبه بالاتر تابع مجهول معادله هستیم نیاز داریم که فضاهای هسته بازتولیدی کوچکتری را اختیار کنیم در این صورت است که باید فضای بازتولیدی عملگر هم متناسب با فضای بازتولیدی انتخابی برای تابع مجهول مسئله باشد، به عنوان مثال اگر بخواهیم تابع مجهول معادله (۱.۲) را به ترتیب در فضاهای بازتولیدی $W_{۲}^{۴}[۰,۱]$ و $W_{۲}^{۵}[۰,۱]$ فرض کنیم، آنگاه فضای عملگر به صورت زیر می‌شود،

$$L:{}^{\circ}W_{۲}^{۴}[۰,۱]\longrightarrow W_{۲}^{۲}[۰,۱],$$
$$L:{}^{\circ}W_{۲}^{۵}[۰,۱]\longrightarrow W_{۲}^{۳}[۰,۱].$$

فرض کنیم r_{y} برای یک y مشخص تابع هسته بازتولیدی فضای $W_{۲}^{۱}[۰,۱]$ و با استفاده از نقاط $x_{i}\in[۰,۱]$ (که بعدا راجع به انتخاب این نقاط صحبت خواهیم کرد) قرار می دهیم $\varphi_{i}(x)=r_{x_{i}}(x)$ و

$$\psi_{i}(x)=L^{*}\varphi_{i}(x).$$

با فرض اینکه عملگر L یک عملگر خطی کراندار معکوس پذیر است [۲۰]، لم زیر یک پایه کامل برای فضای $^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱]$ ارائه می‌دهد، به طوریکه می‌توان هرکدام از اعضای این فضا را با استفاده از این توابع پایه ای بسط داد.

لم ۲.۱.۲. مجموعه نقاط $\{x_{i}\}_{i=۱}^{\infty}$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[۰,۱]$ در نظر می‌گیریم، آنگاه $\{\psi_{i}\}_{i=۱}^{\infty}$ یک پایه کامل برای فضای هسته بازتولیدی $^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱]$ است [۱۸].

فرض کنیم R_{y} تابع هسته بازتولیدی فضای $^{\circ}W_{۲}^{۳}[۰,۱]$ باشد که در فصل قبل به طور کامل نحوه محاسبه آن را شرح دادیم. نحوه محاسبه ψ_{i} به صورت زیر است،

$$\psi_{i}(x)=L^{*}\varphi_{i}(x)=\big\langle L^{*}\varphi_{i}(y),R_{x}(y)\big\rangle_{\circ W_{۲}^{۵}}=\big\langle \varphi_{i}(y),L_{y}R_{x}(y)\big\rangle_{W_{۲}^{۱}}=L_{y}R_{x}(y)\Big|_{y=x_{i}}$$
$$p(y)\frac{\partial^{۲}R_{x}(y)}{\partial y^{۲}}\Big|_{y=x_{i}}+\frac{۱}{q(y)}\frac{\partial R_{x}(y)}{\partial y}\Big|_{y=x_{i}}+\frac{۱}{r(y)}R_{x}(y)\Big|_{y=x_{i}}.$$

۲.۲ معرفی سه روش متفاوت برای حل معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد

۱.۲.۲ معرفی روش هسته بازتولیدی با استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت (روش ۱)

با استفاده از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت پایه‌های $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ را به پایه‌های متعامد یکه $\{\overline{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای بازتولیدی $W_2^3[0,1]^\circ$ تبدیل می‌کنیم به طوری که در شرط زیر صدق کنند:

$$\overline{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}\psi_k(x),$$

که β_{ik} ثابت‌های متعامدسازی هستند.

۲.۲.۲ تقریب جواب معادله دیفرانسیل با شرایط مقدار مرزی

قضیه ۱.۲.۲. قرار می‌دهیم مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[0,1]$، آنگاه جواب تحلیلی معادله (۱.۲) به فرم زیر است.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}(F(x_k) + Nu(x_k))\overline{\psi}_i(x). \qquad (۲.۲)$$

برای ملاحظه اثبات قضیه فوق به [۱۶] رجوع کنید. اکنون می‌خواهیم روش بدست آوردن جواب تقریبی را از روی سری (۲.۲) شرح دهیم. فرض کنید

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}F(x_k)\overline{\psi}_i(x), \qquad (۳.۲)$$

که مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ متعلق به بازه $[0,1]$ است و u_n جواب تقریبی معادله دیفرانسیل با n نقطه در بازه $[0,1]$ یا n پایه حاصل از هسته بازتولیدی فضای $W_2^3[0,1]^\circ$ باشد.

قضیه ۲.۲.۲. (قضیه همگرایی) اگر سری (۲.۲) برای حالتی که $N(u(x)) = 0$ یک جواب تحلیلی برای معادله (۱.۲) در فضای بازتولیدی $W_2^3[0,1]^\circ$ باشد و

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x), \overline{\psi}_i(x)\right\rangle_{\circ W_2^3} \overline{\psi}_i(x),$$

$$\overline{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}\psi_k(x),$$

که $\{\overline{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه‌های متعامد یکه از فضای $W_2^3[0,1]^\circ$ است، آنگاه

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i} \beta_{ik}F(x_k)\overline{\psi}_i(x),$$

جواب تقریبی معادله (۱.۲) است و داریم $\|u_n - u\|_{\circ W_2^3} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$.

اثبات. رجوع شود به [۱۶]. □

۳.۲.۲ تقریب جواب معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد با شرایط مقدار مرزی (روش ۲)

فرض می‌کنیم $L(u_m)$ یک عملگر دیفرانسیلی معکوس‌پذیر خطی کراندار باشد و عملگر غیرخطی $N(u_{m-1})$ نیز پیوسته باشد. قرار می‌دهیم $m=1$ و فرض می‌کنیم که u_{m-1} برای $m=1$ یک تابع اولیه باشد به طوری که u. در شرایط مرزی مسئله (۱.۲) صدق می‌کند و برای هر تکرار $m=2,3,\ldots$ تابع u_{m-1} را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و شمارا در بازه $[0,1]$ باشد و L^{-1} وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (۱.۲) به صورت زیر است

$$u_m(x)=\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m}\phi_i(x), \qquad m=1,2,\ldots \tag{۴.۲}$$

که $c_{i,m}$ ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند و m تعداد تکرارها برای جمله غیرخطی مسئله $N(u_{m-1}(x))$ است.

اثبات. با استفاده از خواص فضای هسته بازتولیدی $W_2^m[0,1]$ و عملگر خودالحاق داریم:

$$L(u_m(x_j))=\Big\langle L(u_m(x)),\varphi_j(x)\Big\rangle=\Big\langle u_m(x),L^*\varphi_j(x)\Big\rangle=\Big\langle\sum_{i=1}^{\infty}c_{i,m}\phi_i(x),L^*\varphi_j(x)\Big\rangle=$$
$$\Big\langle L\big(\sum_{i=1}^{\infty}c_{i,m}\phi_i(x)\big),\phi_j(x)\Big\rangle=\Big\langle\sum_{i=1}^{\infty}c_{i,m}L(\phi_i(x)),\varphi_j(x)\Big\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}c_{i,m}L(\phi_i(x))|_{x=x_j}=$$
$$N(u_{m-1}(x))|_{x=x_j}+F(x_j),\qquad j=1,2,\ldots\quad m=1,2,\ldots$$

بنابراین $L(u_m(x_j))=N(u_{m-1}(x))|_{x=x_j}+F(x_j)$ و از آنجا که $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[0,1]$ است در نتیجه داریم $L(u_m(x))=N(u_{m-1}(x))+F(x)$ و جواب تقریبی مسئله (۱.۲) با n نقطه به صورت زیر است،

$$u_{n,m}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_{i,m}\phi_i(x). \tag{۵.۲}$$

□

اکنون نحوه محاسبه ضرایب مجهول $c_{i,m},\ i=1,2,\ldots\ m=1,2,\ldots$ را بیان می‌کنیم. با استفاده از جواب تقریبی $u_{n,m}$ و قرار دادن آن در معادله (۱.۲) تابع مانده Z_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Z_n(x)=L(u_{n,m}(x))-N(u_{n,m-1}(x))-F(x), \tag{۶.۲}$$

اکنون ضرایب $c_{i,m}$ را طوری محاسبه می‌کنیم که ضرب داخلی زیر برابر صفر باشد، یعنی

$$\big\langle Z_n(x),\phi_j(x)\big\rangle_{\circ W_2^2}=0,\qquad j=1,2,\ldots,n. \tag{۷.۲}$$

با استفاده از تعریف تابع مانده و تعریف جواب تقریبی $u_{n,m}$ داریم

$$\begin{aligned}\big\langle Z_n, \phi_j\big\rangle &= \big\langle L(u_{n,m}) - N(u_{n,m-1}) - F, \phi_j\big\rangle \\ &= \big\langle L(u_{n,m}), \phi_j\big\rangle - \big\langle N(u_{n,m-1}) + F, \phi_j\big\rangle \\ &= \big\langle L\big(\sum_{i=1}^{n} c_{i,m}\phi_i\big), \phi_j\big\rangle - \big\langle N(u_{n,m-1}) + F, \phi_j\big\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,m}\big\langle L(\phi_i), \phi_j\big\rangle - \big\langle N(u_{n,m-1}) + F, \phi_j\big\rangle = 0,\end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی به یک دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر می‌رسیم که با حل آن می‌توان ضرایب $c_{i,m}$ را محاسبه کرد:

(۸.۲)

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,m} L\phi_i(x)|_{x=x_j} = N(u_{n,m-1}(x))|_{x=x_j} + F(x_j), \quad m = 1, 2, \ldots \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

اگر معادله (۱.۲) خطی باشد $N(u(x)) = 0$ در نتیجه جواب معادله به فرم زیر است.

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,m} L\phi_i(x)|_{x=x_j} = F(x_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{۹.۲}$$

۴.۲.۲ آنالیز همگرایی

قضیه ۴.۲.۲. (قضیه آرزلا-آسکُلی[1]) مجموعه $\mathcal{B}$ را درنظر می‌گیریم که $\mathcal{B} \subset C(D)$ و $D \subset \mathbb{R}$، بسته و کراندار است. فرض می‌کنیم که تابع ها در $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت کراندار و هم‌پیوسته باشند یعنی،

$$sup_{y(x)\in\mathcal{B}}\|y(x)\|_\infty < \infty,$$

$$\forall \hat{x}, \check{x} \in D \quad \|(\hat{x} - \check{x})\| \le \epsilon, \quad \Longrightarrow \quad |y(\hat{x}) - y(\check{x})| \le d_{\mathcal{B}}(\epsilon), \quad \forall y(x) \in \mathcal{B}$$

و $d_{\mathcal{B}}(\epsilon) \longrightarrow 0 \quad (\epsilon \longrightarrow 0)$. آنگاه $\mathcal{B}$ یک مجموعه نسبتا فشرده در $C(D)$ است [۲۴].

لم ۵.۲.۲. اگر فرض کنیم $\mathcal{B} = \{u_{n,m} | \ \|u_{n,m}\|_{W_2^3[0,1]} \le \zeta\}$ آنگاه $\mathcal{B}$ یک مجموعه فشرده در فضای $C[0, 1]$ است که ζ یک ثابت است.

اثبات. با استفاده از خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی داریم

$$\|R_x\|^2 = < R_x, R_x > = R_x(x) < \zeta_1,$$

که ζ_1 یک ثابت است. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز[2] $\forall u_{n,m} \in \mathcal{B}$ داریم،

$$\begin{aligned}|u_{n,m}(x)| &= | < u_{n,m}, R_x > | \\ &\le \|u_{n,m}\| \ \|R_x\| \le \zeta\zeta_1^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

[1] Arzela-Ascoli [2] Cauchy-Schwartz

بنابراین مجموعه $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت کراندار است در $C[۰,۱]$. همچنین $\forall \epsilon > ۰$ و $\forall u_{n,m} \in \mathcal{B}$ وجود دارد $\delta > ۰$ به طوریکه داریم،

$$\begin{aligned} |u_{n,m}(x+h) - u_{n,m}(x)| &= | < u_{n,m}, R_{x+h} - R_x > | \\ &\leq \|u_{n,m}\| \, \|R_{x+h} - R_x\| \\ &\leq \zeta_{\cdot}\Big(\|\frac{\partial R_x}{\partial x}|_{x=\eta}\|.|h|\Big), \qquad \eta \in [x, x+h], \end{aligned}$$

و از خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی داریم

$$\|\frac{\partial R_x}{\partial x}\| \leq \zeta_{۲},$$

که $\zeta_{۲}$ یک ثابت است. اگر درنظر بگیریم $\delta = \frac{\epsilon}{\zeta\zeta_{۲}}$، وقتیکه $|h| < \delta$ داریم

$$|u_{n,m}(x+h) - u_{n,m}(x)| < \epsilon.$$

بنابراین $u_{n,m}(x)$ هم‌پیوسته است و در نتیجه با استفاده از قضیه آرزلا-آسکلی، مجموعه $\mathcal{B}$ نسبتا فشرده است. از آنجا که بستار مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ خودش می‌باشد پس مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ فشرده است. □

قضیه ۶.۲.۲. (قضیه همگرایی) فرض کنید $\{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[۰,۱]$ باشند، آنگاه جواب تقریبی معادله (۱.۲) به جواب دقیق معادله همگراست یعنی

$$u_{n,m} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} u, \quad m = ۱, ۲, \ldots.$$

اثبات. مشخص است اگر ثابت کنیم که $u_{n,m} \longrightarrow u$ آنگاه با استفاده از قضیه ۱۷.۲.۱ به راحتی می توان همگرایی یکنواخت را نتیجه گرفت. باتوجه به رابطه‌های (۵.۲) (۶.۲) و (۹.۲) داریم

$$\begin{aligned} L(u_{n,m}(x_i)) &= N(u_{n,m-۱}(x))|_{x=x_i} + F(x_i), \\ m = ۱, ۲, \ldots \qquad & i = ۱, ۲, \ldots, n \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۵.۲.۲ مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ فشرده است و دنباله $\{u_{n,m}\}_{n=۱}^{\infty}$ متعلق به مجموعه $\mathcal{B}$ است و بدیهی است که $u \in \mathcal{B}$. و همچنین با استفاده از تعریف مجموعه فشرده در فضای نرم‌دار دنباله $\{u_{n,m}\}_{n=۱}^{\infty}$ شامل یک زیر دنباله همگرا مانند $\{u_{n,m_l}\}_{l=۱}^{\infty}$ است که به یک عضو از مجموعه $\mathcal{B}$ همگراست. فرض می‌کنیم که $\{u_{n,m_l}\}_{l \to \infty}^{n \to \infty} \longrightarrow u$. داریم،

$$\begin{aligned} L(u_{n,m_l}(x_i)) &= N(u_{n,m_l-۱}(x))|_{x=x_i} + F(x_i), \\ m = ۱, ۲, \ldots \qquad & i = ۱, ۲, \ldots, n \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

از آنجا که L یک عملگر خطی کراندار است پس عملگری پیوسته می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم که عملگر غیرخطی N نیز پیوسته باشد، بنابراین $u_{n,m_l} \longrightarrow u$. در نتیجه،

$$\begin{aligned} L(u_{n,m_l}) &\longrightarrow L(u), \\ N(u_{n,m_l-۱}) &\longrightarrow N(u). \end{aligned}$$

بنابراین در معادله (۱۰.۲)، $Z_n \longrightarrow ۰$ و در نتیجه $(n \longrightarrow \infty)$ $\|u_{n,m_l} - u\|_{\circ W_۲^۳} \longrightarrow ۰$. اکنون ما همگرایی یکنواخت $u_{n,m_l} \xrightarrow{n,l \longrightarrow \infty} u, \quad (m = ۱, ۲, \dots)$ را ثابت می‌کنیم. با استفاده از قضیه ۱۷.۲.۱ و خواص پایه‌ای تابع هسته تولیدی داریم

$$\begin{aligned} |u_{n,m_l} - u| =& | < u_{n,m_l} - u, R_x >_{\circ W_۲^۳} | \\ \leq& \|u_{n,m_l} - u\|_{\circ W_۲^۳} \|R_x\|_{\circ W_۲^۳} \\ \leq& M \|u_{n,m_l} - u\|_{\circ W_۲^۳} \end{aligned}$$

بنابراین $u_{n,m_l} \xrightarrow{n \longrightarrow \infty} u$. □

۵.۲.۲ معرفی یک مدل جدید از پایه‌های مبتنی بر هسته بازتولیدی (روش ۳)

در اینجا یک مدل جدید برای ساختن پایه مورد استفاده از تابع هسته بازتولیدی را بیان می‌کنیم. ساختن این پایه اندکی با پایه قبلی متفاوت است به طوریکه قبل مقداردهی به y در هسته $R_y(.)$ ابتدا یکبار عملگر معادله را بر روی هسته $R_y(.)$ اثر می‌دهیم، به صورت زیر

$$\Psi_i(.) = LR_y(.)\big|_{y=x_i}, \quad i = ۱, ۲, \dots \tag{۱۱.۲}$$

که $\{x_i\}_{i=۱}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و شمارا در بازه $[۰, ۱]$ و $R_y(.)$ هسته بازتولیدی فضای $^{\circ}W_۲^۳[۰, ۱]$ و L عملگر خطی کراندار مسئله (۱.۲) می‌باشند، همچنین تمام مفروضات در حالت قبل نیز عینا برای این حالت وجود دارد و حل معادله دیفرانسیل و نحوه اثبات قضیه همگرایی نیز همانند حالت قبل است با این تفاوت که ما از پایه‌های جدید (۱۱.۲) استفاده می‌کنیم.

۶.۲.۲ مثال‌های عددی

مثال ۷.۲.۲. معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۱۸]:

$$\begin{aligned} &u''(x) + \frac{۱}{\sqrt{x}} u'(x) \frac{۱}{x} + u(x) - sin(u^۲(x)) - e^{u^۴(x)} + u^{۱۱}(x) = f(x) \\ &u(۰) = u(۱) = ۰, \quad x \in (۰, ۱), \end{aligned}$$

که جواب دقیق این معادله $u(x) = (x - x^۲) sinx$ است، همچنین قرار دهید $u_۱(x) = ۰$. این مثال با استفاده از سه روش (روش۱، روش۲، روش۳) ارائه شده در این فصل حل شده است. نتایج عددی مربوط به این مثال در جدول ۱.۲ ارائه شده است. لازم به ذکر است که هر سه روش توسط ونگ و همکاران در [۱۸] ارائه شده است و جدول ۱.۲ نیز در [۱۸] ارائه شده است.

مثال ۸.۲.۲. معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۱۸]:

$$\begin{aligned} &\epsilon u''(x) + \frac{۱}{x} u'(x) + (۱ + x^۲) u(x) - (u(x))^۹ = f(x), \\ &u(۰) = u(۱) = ۰, \quad x \in (۰, ۱), \end{aligned}$$

جواب دقیق این معادله $u(x) = (x - x^۲)$ است، همچنین قرار دهید $u_۱(x) = ۰$. این مثال با استفاده از سه روش (روش۱، روش۲، روش۳) ارائه شده در این فصل حل شده است. نتایج عددی مربوط به این مثال در جدول ۲.۲ ارائه شده است. لازم به ذکر است که هر سه روش توسط ونگ و همکاران در [۱۸] ارائه شده است و جدول ۲.۲ نیز در [۱۸] ارائه شده است.

جدول ۱.۲: ماکزیمم خطای مطلق برای مثال (۷.۲.۲) به ازای $n = ۴۰$ و $m = ۱۰$.

x	روش ۱	روش ۲	روش ۳
۰/۰۸	$۲/۸۸۰۳۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۷۱۵۱۹ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۸۸۰۳۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۱۶	$۴/۴۶۷۳۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۷۵۰۴۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۴۶۷۳۴ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۳۲	$۵/۷۳۵۳۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۱۹۱۰۷ \times ۱۰^{-۶}$	$۵/۷۳۵۳۷ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۴۸	$۴/۰۱۹۸۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۳۵۰۹ \times ۱۰^{-۶}$	$۵/۳۶۴۰۳ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۶۴	$۴/۰۱۹۸۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۴۶۹۷۴ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۰۱۹۸۲ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۸۰	$۲/۲۱۶۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۶۳۵۸۹ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۲۱۶۲۸ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۹۶	$۴/۰۴۵۹۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۲۲۰۷۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۰۴۵۹ \times ۱۰^{-۵}$
$CPU\ Time(sec)$			
$n = ۶۴$	۱۷/۵	۱۰	۱۵/۵

جدول ۲.۲: ماکزیمم خطای مطلق برای مثال (۸.۲.۲) به ازای $n = ۸۰$، $m = ۱۰$ و $\epsilon = ۱۰^{-۵}$.

x	روش ۱	روش ۲	روش ۳
۰/۰۸	$۲/۲۹۳۷۷ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۱۷۳۱۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۲۹۳۷۷ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۱۶	$۲/۱۶۰۷۴ \times ۱۰^{-۸}$	$۲/۵۶۵۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۱۶۰۷۳ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۳۲	$۱/۸۵۹۱۱ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۱۱۱۰۲ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۸۵۹۱ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۴۸	$۱/۵۰۲۹۴ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۰۳۶۷۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۵۰۲۹۵ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۶۴	$۱/۰۹۳۷۶ \times ۱۰^{-۸}$	$۲/۳۴۷۳۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۰۹۳۷۵ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۸۰	$۶/۴۰۶۹۱ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۸۳۸۴۲ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۶/۴۰۶۹۴ \times ۱۰^{-۹}$
۰/۹۶	$۱/۶۶۴۸۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۲۰۶۱۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۶۶۴۸۴ \times ۱۰^{-۹}$
$CPU\ Time(sec)$			
$n = ۶۴$	۱۱	۶/۵	۱۲

هر دو مثال، معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد با شرایط مقدار مرزی هستند. ماکزیمم خطای مطلق مربوط به این دو مثال در جداول ۱.۲ و ۲.۲ آورده شده است.

$$L_\infty = \max_{۰<x<۱} |u(x) - u_n(x)|.$$

۷.۲.۲ مقایسه نتایج عددی روش۱، روش۲ و روش۳ .

نتایج عددی در جدول های (۱.۲) و (۲.۲) نشان می دهد که دقت روش ۱ و ۳ تقریبا نزدیک به یکدیگر است، از طرفی روش ۱ حل معادله دیفرانسیل غیر خطی منفرد با فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت است ولی روش ۳ بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت، همچنین حجم عملیات در روش ۳ بدلیل حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت از روش ۱ کمتر است. نکته ی مهم در هر دو جدول این است که دقت روش ۲ از دو روش دیگر بالاتر است و بدلیل حذف فرآیند گرام اشمیت حجم محاسبات نیز کمتر است.

حجم عملیات کم و دقت بالا در روش ۲ این انگیزه را در ما به وجود آورد که تعمیمی از روش ۲ برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی ارائه دهیم. در فصل های بعدی با دو رویکرد متفاوت به تعمیم روش۲ خواهیم پرداخت.

فصل ۳

استفاده از یک پیاده سازی جدید بر مبنای روش هسته بازتولیدی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مقدار مرزی

۱.۳ مقدمه

در این فصل رویکرد جدیدی را با استفاده از تعمیم روش۲ برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی معرفی خواهیم کرد. قبل از اینکه به رویکرد جدید برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل بپردازیم مروری بر ساختار و نحوه ی عملکرد روش۲، برای درک این تعمیم ارائه خواهیم داد. در روش ۲ هسته های فضا با در نظر گرفتن شرایط مقدار مرزی بر حسب τ و y ساخته می شوند سپس بجای y نقاط هم محلی را قرار می دهیم، در نتیجه پایه ها بر حسب τ بدست می آیند. در ادامه عملگر خطی بر روی این پایه ها اعمال می شود و با استفاده از نقاط هم محلی ماتریس ضرایب ساخته می شود. در نهایت ضرایب مجهول با ضرب معکوس ماتریس ضرایب در بردار سمت راست بدست می آیند. بنابراین در روش ۲ انتخاب فضا، ضرب داخلی و نقاط هم محلی حائز اهمیت است.
برای اینکه نشان دهیم روش معرفی شده در این رساله بسیار کار آمد هست مقایسه ای بین روش حاضر و روش صحیحی و همکاران [۲۲] انجام خواهیم داد. در [۲۲] روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت برای حل دستگاه معادلات دیفرانسل خطی و غیر خطی ارائه شده است. همچنین در این مقاله مقایسه ای با روش [۳۲] روش هسته بازتولیدی با فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت، انجام شده است. در این فصل نشان خواهیم داد که روش ما از هر دو روش از نظر نتایج عددی کارآمد تر است. دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{11}(\eta_1(\tau)) + \mathcal{V}_{12}(\eta_2(\tau)) + \cdots + \mathcal{V}_{1k}(\eta_k(\tau)) = \mathcal{H}_1(\tau) - \delta_1(\tau, \eta(\tau)), \ 0 \le \tau \le 1, \\ \mathcal{V}_{21}(\eta_1(\tau)) + \mathcal{V}_{22}(\eta_2(\tau)) + \cdots + \mathcal{V}_{2k}(\eta_k(\tau)) = \mathcal{H}_2(\tau) - \delta_2(\tau, \eta(\tau)), \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \mathcal{V}_{k1}(\eta_1(\tau)) + \mathcal{V}_{k2}(\eta_2(\tau)) + \cdots + \mathcal{V}_{kk}(\eta_k(\tau)) = \mathcal{H}_k(\tau) - \delta_k(\tau, \eta(\tau)), \\ \eta_i(0) = \eta_i(1) = \beta, \end{cases} \tag{۱.۳}$$

به طوریکه

$$\mathcal{V}_{ij}(\eta_j(\tau)) = \eta_j''(\tau) + a_{ij}(\tau)\eta_j'(\tau) + b_{ij}(\tau)\eta_j(\tau), \quad i, j = 1, 2, \ldots, k.$$

فرض کنید $a_{ij}(.)$ و $b_{ij}(.)$ تابع های مشخص، $\mathcal{V}_{i,j}(.)$ و $\delta_j(.)$ به ترتیب عملگر های خطی و غیر خطی و $\tau \in \Omega = [0, 1]$ باشند. همچنین $\mathcal{H}_j(.)$ توابع داده شده و $\eta(\tau) = (\eta_1(\tau), \eta_2(\tau), \ldots, \eta_k(\tau))^T$ بردار توابع مجهول که باید مشخص شوند. حال، قرار دهید $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_k)$ و $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_k)$، اگر $\boldsymbol{\delta} = 0$ معادله (۱.۳) خطی است در هر صورت فرم ماتریسی معادله (۱.۳) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mathbb{V}(\eta(\tau)) = \mathbb{H}(\tau) - \boldsymbol{\delta}(\tau, \eta(\tau)), & 0 \le \tau \le 1, \\ \eta_i(0) = \eta_i(1) = \beta, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \end{cases} \tag{۲.۳}$$

به طوریکه

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_{11} & \mathcal{V}_{12} & \ldots & \mathcal{V}_{1k} \\ \mathcal{V}_{21} & \mathcal{V}_{22} & \ldots & \mathcal{V}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{V}_{k1} & \mathcal{V}_{k2} & \ldots & \mathcal{V}_{kk} \end{pmatrix}.$$

در حالت غیر خطی، نحوه تکرار معادله (۲.۳) به فرم زیر است.

$$\mathbb{V}(\eta_n(\tau)) = \mathbb{H}(\tau) - \boldsymbol{\delta}(\tau, \eta_{n-1}(\tau)), \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{۳.۳}$$

به طوریکه $\mathbb{V}(\eta_1(\tau)) = \mathbb{H}(\tau)$، برای جزییات بیشتر به [۱۶] مراجعه شود.

۲.۳ توصیف یک پیاده سازی جدید

در این بخش، فضای هسته بازتولیدی، پایه های این فضا و چندین لم و قضیه را معرفی خواهیم کرد. در روش حاضر فضای هیلبرت به صورت زیر است:

$$\mathcal{W}_2^m[0,1] = \{\eta(.) | \eta^{(m-1)}(.) \text{ تابع مطلقا پیوسته است}, \ \eta^{(m)}(.) \in L^2[0,1], \eta(0) = \eta(1) = 0\},$$

به طوریکه $m \in \mathbb{N}$ ، همچنین نرم و ضرب داخلی این فضا را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\langle \eta(.), \gamma(.) \rangle_{\mathcal{W}_2^m[0,1]} = \sum_{i=0}^{m-1} \eta^{(i)}(0)\gamma^{(i)}(1) + \int_0^1 \eta^{(m)}(\tau)\gamma^{(m)}(\tau)d\tau,$$

$$\|\eta(.)\|_{\mathcal{W}_2^m[0,1]} = \sqrt{\langle \eta(.), \eta(.) \rangle_{\mathcal{W}_2^m[0,1]}}, \quad \eta(.), \gamma(.) \in \mathcal{W}_2^m[0,1].$$

قضیه ۱.۲.۳. $\mathcal{W}_2^3[0,1]$ و $\mathcal{W}_2^1[0,1]$ فضاهای هسته بازتولیدی هستند. همچنین $R_y(\tau)$ و $\tilde{R}_y(\tau)$ به ترتیب هسته های بازتولیدی این فضا ها هستند [۱۶].

$$R_y(\tau) = \begin{cases} R_1(y,\tau), & \tau \geq y, \\ R_2(\tau,y), & \tau < y, \end{cases} \qquad \tilde{R}_y(\tau) = \begin{cases} \tilde{R}_1(y,\tau), & \tau \geq y, \\ \tilde{R}_2(\tau,y), & \tau < y, \end{cases}$$

بطوریکه

$$R_1(y,\tau) = y^5/120 + (\tau(864y - 720y^2 - 240y^3 - 36y^4 - 24y^5))/3744 + (\tau^2(-360y + 378y^2 + 126y^3 + 15y^4 - 3y^5))/1872 + (\tau^3(-120y - 30y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/1872 + (\tau^5(-120y - 30y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/187720 + (\tau^4(120y + 30y^2 + 10y^3 - 5y^4 + y^5))/3744,$$
$$R_2(\tau,y) = (x(864y - 720y^2 - 240y^3 + 120y^4 - 24y^5))/3744 + (\tau^2(-360y + 378y^2 - 30y^3 + 15y^4 - 3y^5))/1872 + (\tau^5(156 - 120y - 30y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/187720 + (\tau^3(-120y + 126y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/1872 + (\tau^4(-36y + 30y^2 + 10y^3 - 5y^4 + y^5))/3744,$$
$$\tilde{R}_1(y,\tau) = 1 + \tau \text{ و } \tilde{R}_2(\tau,y) = 1 + y.$$

در معادله (۱.۳)، ما عملگر های خطی $\mathcal{V}_{i,j} : \mathcal{W}_2^3[0,1] \to \mathcal{W}_2^1[0,1]$ را داریم و

$$\eta \in \boldsymbol{W}_2^3[0,1] = \overbrace{\mathcal{W}_2^3[0,1] \oplus \mathcal{W}_2^3[0,1] \oplus \cdots \oplus \mathcal{W}_2^3[0,1]}^{k \text{ times}},$$

همچنین در معادله (۳.۳) ، قرار دهید

$$\mathbb{H}-\boldsymbol{\delta}\in \boldsymbol{W}_{۲}^{۱}[۰,۱]=\overbrace{\mathcal{W}_{۲}^{۱}[۰,۱]\oplus \mathcal{W}_{۲}^{۱}[۰,۱]\oplus\cdots\oplus \mathcal{W}_{۲}^{۱}[۰,۱]}^{k \text{ times}}.$$

بعلاوه در فضای هیلبرت $\boldsymbol{W}_{۲}^{۳}[۰,۱]=\left\{\eta=(\eta_{۱},\eta_{۲},\ldots,\eta_{k})^{T}\mid \eta_{i}\in \mathcal{W}_{۲}^{۳}[۰,۱],\ i=۱,۲,\ldots,k\right\}$ نرم و ضرب داخلی به ترتیب به صورت زیر است:

$$\langle \eta,\gamma\rangle_{\boldsymbol{W}_{۲}^{۳}}=\sum_{i=۱}^{k}\langle \eta_{i},\gamma_{i}\rangle_{\mathcal{W}_{۲}^{۳}[۰,۱]},\ \|\eta\|=\left(\sum_{i=۱}^{k}\|\eta_{i}\|^{۲}\right)^{۱/۲},\ \forall \eta,\gamma\in \boldsymbol{W}_{۲}^{۳}[۰,۱].$$

حال، فرض کنید $\{\tau_{l}\}_{l=۱}^{\infty}$ مجموعه ای از نقاط در بازه $[۰,۱]$ باشند. در این صورت ما می توانیم نتیجه بگیریم که

$$\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau)=R_{\tau_{l}}(\tau)\overrightarrow{e_{j}}=\begin{cases}(R_{\tau_{l}}(\tau),۰,\ldots,۰)^{T}, & j=۱,\\ (۰,R_{\tau_{l}}(\tau),\ldots,۰)^{T}, & j=۲,\\ \vdots & \\ (۰,\ldots,R_{\tau_{l}}(\tau),۰)^{T}, & j=k-۱,\\ (۰,۰,\ldots,R_{\tau_{l}}(\tau))^{T}, & j=k,\end{cases}\qquad (۴.۳)$$

هسته های بازتولیدی فضای $\boldsymbol{W}_{۲}^{۳}[۰,۱]$ هستند به ازای $j=۱,\ldots,k$ و هر عدد صحیح مثبت l. همچنین $\overrightarrow{e_{j}}$ برداری است در $\mathbb{R}^{k}$ به طوریکه j امین مولفه آن ۱ و سایر مولفه ها صفر است [۱۶]. همچنین می توان ثابت کرد که،

$$\left\langle \boldsymbol{\psi}_{si}(.),\boldsymbol{\psi}_{lj}(.)\right\rangle_{\boldsymbol{W}_{۲}^{۳}}=\begin{cases}۰, & i\neq j,\\ \|R_{\tau_{s}}\|^{۲}, & s=l,\ i=j,\\ R_{\tau_{s}}(\tau_{l}), & s\neq l,\ i=j.\end{cases}\qquad (۵.۳)$$

لم ۲.۲.۳. اگر $\mathcal{V}_{i,j}:\mathcal{W}_{۲}^{۳}[۰,۱]\rightarrow \mathcal{W}_{۲}^{۱}[۰,۱], i,j=۱,۲,\ldots,k$ عملگر های خطی کراندار باشند، آنگاه $\mathbb{V}:\boldsymbol{W}_{۲}^{۳}[۰,۱]\rightarrow \boldsymbol{W}_{۲}^{۱}[۰,۱]$ نیز عملگر خطی کراندار است [۳۲].

قضیه ۳.۲.۳. اگر $\{\tau_{l}\}_{l=۱}^{\infty}$ در بازه $[۰,۱]$ چگال باشند، آنگاه $\left\{\boldsymbol{\psi}_{lj}(.)\right\}_{(۱,۱)}^{(\infty,k)}$ یک سیستم کامل تابعی در $\boldsymbol{W}_{۲}^{۳}[۰,۱]$ است.

اثبات. برای هر $\eta\in \boldsymbol{W}_{۲}^{۳}[۰,۱]$ ثابت، اگر $\left\langle \eta(.),\psi_{lj}(.)\right\rangle=۰$ آنگاه با توجه به معادله (۴.۳) داریم

$$\begin{aligned}\langle \eta(.),R_{\tau_{l}}(.)\overrightarrow{e_{j}}\rangle_{\boldsymbol{W}_{۲}^{۳}}&=\langle \eta_{j}(.),R_{\tau_{l}}(.)\rangle_{\mathcal{W}_{۲}^{m}[۰,۱]}\\ &=\eta_{j}(\tau_{l}),\end{aligned}$$

برای $j=۱,\ldots,k$ و با در نظر گرفتن چگال بودن $\{\tau_{l}\}_{l=۱}^{\infty}$ می توان نتیجه گرفت که $\eta_{۱}(\tau_{l})=\cdots=\eta_{k}(\tau_{l})=۰$ و به طبع آن $\eta(.)=۰$، پس اثبات کامل شد. □

ملاحظه ۴.۲.۳. در این رساله، ما از نقاط چبیشف انتقال یافته استفاده کردیم:

$$\tau_l = \left[\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}Cos\left(\frac{\frac{۲l-۱}{۲}}{N}\pi\right)\right] + \varepsilon, \quad l = ۱, \ldots, N.$$

دلیل استفاده از ε این است که تاثیر گذاری آن بر روی نتایج عددی بدست آمده است. علاوه بر این اگر ماتریس ضرایب به ازای برخی مقادیر N منفرد شود، این مشکل با اضافه کردن ε حل خواهد شد. البته با توجه به نوع مسئله می توان مقدار ε را تغییر داد، این کار بر روی دقت روش نیز تاثیر دارد. برای مثال قرار دهید $\varepsilon = ۱۰^{-۳}, ۱۰^{-۴}$ و $۱۰^{-۵}$. در قسمت نتایج عددی به تاثیر این نقاط بر روی روش ۲ خواهیم پرداخت.

لم ۵.۲.۳. برای هر N ثابت فرض شده، $\{\boldsymbol{\psi}_{lj}(.)\}_{(۱,۱)}^{(N,k)}$ در $\boldsymbol{W}_۲^۳[۰, ۱]$ مستقل خطی است [۳۳].

با استفاده از خاصیت هسته بازتولیدی برای $\eta(.)$ داریم:

$$\eta(\tau) = \sum_{l=۱}^{\infty}\sum_{j=۱}^{k} c_{j,l}\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau), \tag{۶.۳}$$

به طوریکه $c_{j,l}$ به ازای $j = ۱, \ldots, k$ و $l = ۱, \ldots$ اعداد نا مشخصی هستند که باید تعیین شوند. اگر معادله (۱.۳) خطی باشد در نتیجه $\boldsymbol{\delta} = ۰$، داریم

$$\eta_N(\tau) = \sum_{l=۱}^{N}\sum_{j=۱}^{k} c_{j,l}\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau), \tag{۷.۳}$$

که $c_{j,l}$ به ازای $j = ۱, \ldots, k$ و $l = ۱, \ldots, N$ اعداد نامشخصی هستند که باید مشخص شوند. همچنین اگر معادله (۱.۳) غیر خطی باشد، با مشخص کردن $\eta_۱(.),\ n,\ N$ داریم:

$$\eta_{n,N}(\tau) = \sum_{l=۱}^{N}\sum_{j=۱}^{k} c_{j,l,n}\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau), \quad n = ۲, ۳, \ldots. \tag{۸.۳}$$

حال با توجه به معادله (۳.۳) و جایگزینی معادله (۸.۳) در معادله (۱.۳) داریم:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{V}_{۱۱} & \ldots & \mathcal{V}_{۱k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{V}_{k۱} & \ldots & \mathcal{V}_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}\boldsymbol{\psi}_{l۱}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} \\ \sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}\boldsymbol{\psi}_{l۲}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} \\ \vdots \\ \sum_{l=۱}^{N} c_{k,l,n}\boldsymbol{\psi}_{lk}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_۱(\tau_m) \\ \vdots \\ \mathcal{H}_k(\tau_m) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_۱(\tau, \eta_{n-۱,N}(\tau))_{|_{\tau=\tau_m}} \\ \vdots \\ \delta_k(\tau, \eta_{n-۱,N}(\tau))_{|_{\tau=\tau_m}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{۱۱}\boldsymbol{\psi}_{l۱}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} & \ldots & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{۱k}\boldsymbol{\psi}_{lk}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{k۱}\boldsymbol{\psi}_{l۱}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} & \ldots & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{kk}\boldsymbol{\psi}_{lk}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{۱,l,n} \\ \vdots \\ c_{k,l,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_۱(\tau_m) \\ \vdots \\ \mathcal{H}_k(\tau_m) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_۱(\tau, \eta_{n-۱,N}(\tau))_{|_{\tau=\tau_m}} \\ \vdots \\ \delta_k(\tau, \eta_{n-۱,N}(\tau))_{|_{\tau=\tau_m}} \end{pmatrix},$$

به طوریکه $m = ۱, ۲, \ldots, N$. با در نظر گرفتن:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{۱۱} \psi_{l۱}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} & \cdots & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{۱k} \psi_{lk}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{k۱} \psi_{l۱}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} & \cdots & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{V}_{kk} \psi_{lk}(\tau)_{|_{\tau=\tau_m}} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} c_{۱,l,n} \\ \vdots \\ c_{k,l,n} \end{pmatrix}, \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_۱(\tau_m) \\ \vdots \\ \mathcal{H}_k(\tau_m) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta_۱(\tau, \eta_{n-۱,N}(\tau))_{|_{\tau=\tau_m}} \\ \vdots \\ \delta_k(\tau, \eta_{n-۱,N}(\tau))_{|_{\tau=\tau_m}} \end{pmatrix},$$

نماد گذاری ماتریسی معادله (۱.۳) به فرم زیر است:

$$\mathcal{A}\,\mathcal{C} = \mathcal{H}.$$

با استفاده از خاصیت معین مثبت بودن هسته بازتولیدی، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۶.۲.۳. اگر $\{\tau_l\}_{l=۱}^{\infty}$ در بازه $[۰, ۱]$ چگال باشد و $\mathcal{A}^{-۱}$ وجود داشته باشد آنگاه جواب معادله (۲.۳) وجود دارد و یکتاست [۲۸].

۳.۳ آنالیز خطا

لم ۱.۳.۳. فرض کنید λ عددی مثبت و ثابت باشد، در اینصورت $S = \left\{\eta(.) = (\eta_۱(.), \ldots, \eta_k(.)) \mid \|\eta\|_{\boldsymbol{W}_۲^۳} \leq \lambda\right\}$ یک مجموعه فشرده در فضای $C^k[۰, ۱]$ است [۱۸].

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید در دستگاه (۲.۳)، $\|\eta\|_{\boldsymbol{W}_۲^۳}$ کران دار باشد. همچنین $\{\tau_m\}_{m=۱}^{\infty}$ یک مجموعه چگال در بازه $[۰, ۱]$ و $\mathbb{V}(\eta(.))$ یک تابع پیوسته معکوس پذیر بر حسب η باشد، آنگاه جواب دقیق $\eta(.)$ و تقریبی $\eta_{n,N}(.)$ معادله (۲.۳) وجود دارد [۱۸].

قضیه ۳.۳.۳. اگر $\eta(.) = (\eta_۱(.), \ldots, \eta_k(.)) \in \boldsymbol{W}_۲^۳[۰, ۱]$ جواب معادله (۲.۳) باشد، آنگاه جواب تقریبی $\eta_{n,N}(.) = (\eta_{۱,n,N}(.), \ldots, \eta_{k,n,N}(.))$ و مشتق آن $\eta_{n,N}^{(e)}(.) = (\eta_{۱,n,N}^{(e)}(.), \ldots, \eta_{k,n,N}^{(e)}(.))$ به ترتیب به $\eta(.)$ و $\eta^{(e)}(.)$ همگرای یکنواخت است، به ازای $e = ۱, ۲$.

اثبات. برای هر $\eta_۱, \eta_۲, \eta_۳, \ldots, \eta_k$ مشخص، با جمع کردن k معادله (۱.۳) داریم:

$$\eta_۱''(\tau) + a(\tau)\eta_۱'(\tau) + b(\tau)\eta_۱(\tau) + \delta(\tau, \eta(\tau)) = H(\tau), \qquad (۹.۳)$$

به طوریکه a، b، H و δ توابع مشخصی هستند. واضح است که معادله (۹.۳) معادله غیر خطی در فضای هسته بازتولیدی $\mathcal{W}_2^3[0,1]$ است. از طرفی با توجه به قضیه ۲.۳.۳ می دانیم که $\eta_{1,n,N}(.)$ جواب تقریبی $\eta_1(.)$ می باشد، بنابراین

$$\begin{aligned}|\eta_1(\tau)-\eta_{1,n,N}(\tau)| &= |\left\langle \eta_1-\eta_{1,n,N}, R_\tau\right\rangle| \le \left\|\eta_1-\eta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^3}\|R_\tau\|_{\mathcal{W}_2^3}\\ &\le D_1\left\|\eta_1-\eta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^3}.\end{aligned}$$

همچنین برای مشتق های مرتبه اول و دوم $(e=1,2)$ داریم

$$\begin{aligned}|\eta_1^{(e)}(\tau)-\eta_{1,n,N}^{(e)}(\tau)| &= |\frac{\partial^e}{\partial\tau^e}[\left\langle \eta_1-\eta_{1,n,N}, R_\tau\right\rangle_{\mathcal{W}_2^3}]|\\ &= |\left\langle \eta_1-\eta_{1,n,N}, \frac{\partial^e}{\partial\tau^e}R_\tau\right\rangle_{\mathcal{W}_2^3}| \le \left\|\eta_1-\eta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^3}\left\|\frac{\partial^e}{\partial\tau^e}R_\tau\right\|_{\mathcal{W}_2^3}\\ &\le S_{e1}\left\|\eta_1-\eta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^3}.\end{aligned}$$

به طور مشابه برای $i=2,\dots,k$ می توان نتیجه گرفت که

$$|\eta_i(\tau)-\eta_{i,n,N}(\tau)| \le D_i\left\|\eta_i-\eta_{i,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^3}, \tag{۱۰.۳}$$

$$|\eta_i^{(e)}(\tau)-\eta_{i,n,N}^{(e)}(\tau)| \le S_{ei}\left\|\eta_i-\eta_{i,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^3}, \tag{۱۱.۳}$$

به طوریکه D_i و S_{ei} ثابت های عددی هستند.

□

ملاحظه ۴.۳.۳. به ازای مقادیر صحیح مثبت N، فرض کنید که $0=\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_N=1$ و

$$h_i=\tau_{i+1}-\tau_i,\quad i=1,\dots,N-1,$$

همچنین قرار دهید

$$h=\max_{1\le i\le N-1} h_i.$$

قضیه ۵.۳.۳. قرار دهید $\eta(.)=(\eta_1(.),\dots,\eta_k(.))$ و $\eta_{n,N}(.)=(\eta_{1,n,N}(.),\dots,\eta_{k,n,N}(.))$ به ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی معادله (۱.۳) باشند، همچنین $\eta(.)\in C^3[0,1]$، $\eta_{n,N}(.)\in \boldsymbol{W}_2^3[0,1]$ و $\left\|\eta''_{i,n,N}\right\|_\infty\le Q_i$، $i=1,\dots,k$، آنگاه برای $i=1$ داریم،

$$\left\|\eta_1(.)-\eta_{1,n,N}(.)\right\|_\infty \le C_1h^3, \tag{۱۲.۳}$$

$$\left\|\eta'_1(.)-\eta'_{1,n,N}(.)\right\|_\infty \le C_2h^2, \tag{۱۳.۳}$$

$$\left\|\eta''_1(.)-\eta''_{1,n,N}(.)\right\|_\infty \le C_3h, \tag{۱۴.۳}$$

به طوریکه C_i به ازای $i=1,2,3$ ثابت های عددی هستند [۳۴].

ملاحظه ۶.۳.۳. در روش حاضر، ما می توانیم با عوض کردن فضا دقت های بهتری را نتیجه بگیریم. بنابراین، این کار به ما اجازه می دهد تا معادله (۱.۳) را در فضای $\boldsymbol{W}_{۲}^{m}[۰,۱]$ به ازای $m = ۴,۵$ نیز حل کنیم. در این حالت، تغییر فضا منجر به تغییر قضیه ۵.۳.۳ نیز می شود. به عنوان مثال به ازای $m = ۴$ داریم

$$\left\|\eta_{۱}(.) - \eta_{۱,n,N}(.)\right\|_{\infty} \leq M_{۱} h^{۴}. \qquad (۱۵.۳)$$

برای مشاهده جزییات بیشتر به [۳۴] مراجعه شود. همچنین برای ساختن هسته های $\boldsymbol{W}_{۲}^{۴}[۰,۱]$ و $\boldsymbol{W}_{۲}^{۵}[۰,۱]$ به [۱۶] مراجعه شود.

قضیه ۷.۳.۳. در معادله ۲.۳ قرار دهید $\boldsymbol{H} = \mathbb{H}(\tau) - \boldsymbol{\delta}(\tau, \eta(\tau))$ ، اگر در $\boldsymbol{H}$ به اندازه ϵ اختلال ایجاد کنیم، $\tilde{\boldsymbol{H}} = \boldsymbol{H} + \epsilon$ ، آن در $\mathbb{V}\tilde{\eta} = \tilde{\boldsymbol{H}}$ صدق می کند، آنگاه

$$\|\eta - \tilde{\eta}\|_{\boldsymbol{W}_{۲}^{۲}} \leq C \|\epsilon\|_{\boldsymbol{W}_{۲}^{۲}}.$$

[۲۹].

ملاحظه ۸.۳.۳. اگر شرایط مقدار مرزی به اندازه ϵ تغییر کند، آنگاه جواب تقریبی کمی تغییر خواهد کرد. به همین منظور ما نیاز داریم شرایط مقدار مرزی معادله (۱.۳) را به صورت $\eta_{۱}(۰) = \eta_{۱}(۱) = \epsilon$ ،$\eta_{۲}(۰) = \eta_{۲}(۱) = \epsilon$ ،$\eta_{۳}(۰) = \eta_{۳}(۱) = \epsilon$ تغییر دهیم. همچنین ماکسیمم خطای مطلق مربوط به جواب تقریبی و مشتق آن به صورت $E_{\epsilon}^{\eta_{i,n,N}} = \left\|\eta_i - \eta_{i,n,N_{\epsilon}}\right\|_{\infty}$ و $E_{\epsilon}^{\eta'_{i,n,N}} = \left\|\eta'_i - \eta'_{i,n,N_{\epsilon}}\right\|_{\infty}$، به ازای $i = ۱,۲,۳$ در قسمت نتایج عددی، جدول ۹.۳ گزارش شده است.

۴.۳ نتایج عددی

در این بخش، با استفاده از روش حاضر مثال هایی را حل خواهیم کرد. همچنین نتایج عددی نشان می دهد که روش حاضر از روش های [۲۲] و [۳۲] بسیار کار آمدتر است.

مثال ۱.۴.۳. معادله دیفرانسیل منفرد با شرایط مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید [۱۸] :

$$\begin{cases} \eta''(\tau) + \frac{۱}{\tau}\eta'(\tau) + \eta(\tau) = f(\tau), \\ \eta(۰) = \eta(۱) = ۰, \end{cases}$$

به طوریکه جواب دقیق آن به صورت زیر است:

$$\eta(\tau) = \tau^{۲} - \tau^{۳}.$$

هدف از ارائه این مثال نشان دادن تاثیر نقاط مناسب بر روی روش ۲ است. در جدول ۱.۳ مقایسه ای بین نقاط معرفی شده در این رساله $\tau_l = \left[\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}Cos\left(\frac{۲l-۱}{N}\pi\right)\right] + ۱۰^{-۴},\ \ l = ۱,\ldots,N-۱$، و نقاط مقاله [۱۸] ، $\tau_l = l(\frac{۱}{N}),\ l = ۱,\ldots,N$ انجام شده است. نتایج عددی در جدول نشان می دهد که نقاط حاضر دقت بسیار بالاتری را نتیجه می دهند. در این مثال، $L : \mathcal{W}_{۲}^{۳}[۰,۱] \to \mathcal{W}_{۲}^{۱}[۰,۱]$. همچنین، به منظور نشان دادن تاثیر تغییر فضا بر روی روش ۲، با توجه به ملاحضه ۶.۳.۳ دقت روش حاضر را باعوض کردن فضا افزایش دادیم. به همین منظور، ما این مثال را درفضای $\mathcal{W}_{۲}^{m}[۰,۱]$ به ازای $m = ۳,۴,۵$ نیز حل کردیم. نتایج عددی در شکل ۱.۳ نشان داده شده است.

مثال ۲.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید [۲۲، ۳۲].

$$\begin{cases} \eta_1''(\tau)+\eta_1'(\tau)+\tau\,\eta_1(\tau)+\eta_2'(\tau)+2\tau\,\eta_2(\tau)=f_1(\tau), & 0\le\tau\le 1,\\ \eta_2''(\tau)+\eta_2(\tau)+2\eta_1'(\tau)+\tau^2\eta_1(\tau)=f_2(\tau),\\ \eta_1(0)=\eta_1(1)=0, \qquad \eta_2(0)=\eta_2(1)=0, \end{cases}$$

به طوریکه جواب دقیق آن به صورت زیر است:

$$\eta(\tau)=(\eta_1(\tau),\eta_2(\tau))=(2sin(\tau)(1-\tau),sin(\pi\tau)).$$

در جدول ۲.۳ خطای روش حاضر و روش های دیگر نشان داده شده است. همچنین پایداری و مرتبه همگرایی به ترتیب در جدول های ۲.۳ و ۹.۳ آورده شده است. در شکل ۲.۳ مقایسه ای بین روش حاضر و روش [۲۲] انجام شده است. علاوه بر این در شکل های به ترتیب ۸.۳ و ۹.۳ مقایسه ای بر اساس خطای مطلق مشتق تقریبی مرتبه اول انجام شده است. در نهایت با توجه به ملاحضه ۶.۳.۳، روش حاضر را در فضای $\boldsymbol{W}_2^m[0,1]$ به ازای $m=3,4,5$ حل کردیم. البته، برای تطابق بیشتر بین ملاحضه ۶.۳.۳ و شکل ۳.۳ از نقاط انتقال یافته لژاندر استفاده کردیم.

مثال ۳.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید [۲۲، ۳۲]:

$$\begin{cases} \eta_1''(\tau)+\tau\,\eta_1(\tau)+2\tau\,\eta_2(\tau)+\tau\,\eta_2^2(\tau)=f_1(\tau), & 0\le\tau\le 1,\\ \eta_2''(\tau)+\eta_2(\tau)+\tau^2\eta_1(\tau)+sin(\tau)\,\eta_2^2(\tau)=f_2(\tau),\\ \eta_1(0)=\eta_1(1)=0, \qquad \eta_2(0)=\eta_2(1)=0, \end{cases}$$

به طوریکه جواب دقیق آن به صورت زیر است:

$$\eta(\tau)=(\eta_1(\tau),\eta_2(\tau))=(\tau-\tau^2,sin(\pi\tau)).$$

در جدول ۴.۳ و شکل های به ترتیب ۴.۳ ، ۱۰.۳ و ۱۱.۳ مقایسه ای بین روش حاضر و روش های دیگر انجام شده است. نتایج عددی مربوط به مرتبه همگرایی و پایداری روش حاضر در جدول های ۷.۳ و ۹.۳ داده شده است. در نهایت، ما این مثال را با توجه به ملاحضه ۶.۳.۳ در فضای $\boldsymbol{W}_2^m[0,1]$ به ازای $m=3,4,5$ حل کردیم. نتایج عددی در شکل ۵.۳ نشان داده شده است. البته، برای تطابق بیشتر بین ملاحضه ۶.۳.۳ و شکل ۵.۳ از نقاط انتقال یافته لژاندر استفاده شده است.

مثال ۴.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید [۲۲]:

$$\begin{cases} \eta_1''(\tau)+\eta_1'(\tau)+\tau^2\eta_2(\tau)+\eta_2'(\tau)+2\tau\,\eta_2(\tau)+\eta_1'(\tau)sin(\eta_3'(\tau))=f_1(\tau), & 0\le\tau\le 1,\\ \eta_2''(\tau)+\eta_2(\tau)+2\eta_1'(\tau)+\tau^2\eta_1(\tau)+\tau\,\eta_2^2(\tau)\eta_3(\tau)=f_2(\tau),\\ \eta_3''(\tau)+\tau\eta_3'(\tau)+\tau^2\eta_2(\tau)+2(\eta_2'(\tau))^2\eta_1'(\tau)e^{\eta_3(\tau)}=f_3(\tau),\\ \eta_1(0)=\eta_1(1)=0, \qquad \eta_2(0)=\eta_2(1)=0, \qquad \eta_3(0)=\eta_3(1)=0, \end{cases}$$

به طوریکه جواب دقیق آن به صورت زیر است:

$$\eta(\tau)=(e^{sin(\tau^2-\tau)}-1,\tau(1-\tau)e^{-\tau},sin(\frac{\pi}{2}\tau)(\tau-1)).$$

مرتبه همگرایی و پایداری روش حاضر در جدول های به ترتیب ۸.۳ و ۹.۳ آورده شده است. همچنین، در شکل های ۶.۳، ۱۲.۳،۱۳.۳ و ۱۴.۳ مقایسه ای بین روش حاضر و روش [۲۲] انجام شده است. در نهایت، این مثال را با توجه به ملاحضه ۶.۳.۳ در فضای $\boldsymbol{W}_{۲}^{m}[۰,۱]$ به ازای $m = ۳,۴,۵$ حل کردیم. نتایج عددی در شکل ۷.۳ نشان داده شده است. برای حل این مثال، قسمت غیر خطی را به سمت راست معادله (۱۶.۳) انتقال دادیم و به کمک قسمت خطی ماتریس ضرایب را ساختیم. بنابراین:

$$\begin{cases} \eta_{۱}''(\tau)+\eta_{۱}'(\tau)+\tau^{۲}\eta_{۲}(\tau)+\eta_{۲}'(\tau)+۲\tau\,\eta_{۲}(\tau)=f_{۱}(\tau)-\eta_{۱}'(\tau)sin(\eta_{۳}'(\tau)),\\ \eta_{۲}''(\tau)+\eta_{۲}(\tau)+۲\eta_{۱}'(\tau)+\tau^{۲}\eta_{۱}(\tau)=f_{۲}(\tau)-\tau\,\eta_{۲}^{۲}(\tau)\eta_{۳}(\tau),\\ \eta_{۳}''(\tau)+\tau\eta_{۳}'(\tau)+\tau^{۲}\eta_{۲}(\tau)=f_{۳}(\tau)-۲(\eta_{۲}'(\tau))^{۲}\eta_{۱}'(\tau)e^{\eta_{۳}(\tau)},\\ \eta_{۱}(۰)=\eta_{۱}(۱)=۰, \qquad \eta_{۲}(۰)=\eta_{۲}(۱)=۰, \qquad \eta_{۳}(۰)=\eta_{۳}(۱)=۰, \end{cases} \tag{۱۶.۳}$$

در تساوی اول معادله (۱۶.۳) عملگر روی $\eta_{۳}(\tau)$ اعمال نشده است. در نتیجه، به جای ماتریس ضرایب وابسته به $\eta_{۳}(\tau)$ از ماتریس صفر $N \times N$ استفاده کردیم. همین کار در تساوی دوم و سوم به جای $\eta_{۳}(\tau)$ و $\eta_{۱}(\tau)$ انجام شده است.

جدول ۱.۳: مقایسه نقاط در روش ۲ برای مثال ۱.۴.۳ .

τ	نقاط [۱۸]	نقاط حاضر	نقاط [۱۸]	نقاط حاضر
	$N = ۲۶$	$N = ۲۶$	$N = ۵۱$	$N = ۵۱$
۰٫۰۸	$۴٫۲۸۲۳۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۹٫۰۹۸۷ \times ۱۰^{-۸}$	$۶٫۲۲۳۹۹ \times ۱۰^{-۶}$	$۲٫۶۰۰۸ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۱۶	$۵٫۲۳۲۶۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۸۴۲۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۷٫۲۸۶۶۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۵٫۲۹۶۴ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۳۲	$۶٫۰۸۷۰۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۱۱۹۵ \times ۱۰^{-۸}$	$۸٫۲۶۱۸۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۷٫۷۶۴۵ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۴۸	$۶٫۵۱۰۶۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۸۵۵۵ \times ۱۰^{-۸}$	$۸٫۷۳۰۳۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۹٫۰۴۶۸ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۶۴	$۶٫۷۵۳۷۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۷٫۳۰۲۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۸٫۹۸۵۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۹٫۷۵۷۱ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰٫۸۰	$۶٫۹۱۲۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۷٫۲۵۸۶ \times ۱۰^{-۸}$	$۹٫۱۳۹۳۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۱٫۰۰۸۶ \times ۱۰^{-۹}$
۰٫۹۶	$۷٫۸۱۷۷۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۱٫۳۱۲۴۸ \times ۱۰^{-۸}$	$۹٫۱۹۰۷۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۹٫۹۸۷۳۷ \times ۱۰^{-۱۰}$

جدول ۲.۳: ماکسیمم خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۳.

τ	روش [۳۲]	روش [۲۲]	روش حاضر	روش [۳۲]	روش [۲۲]	روش حاضر
	$E^{\eta_{1,11}}(\tau)$	$E^{\eta_{1,25,11}}(\tau)$	$E^{\eta_{1,11}}(\tau)$	$E^{\eta_{1,21}}(\tau)$	$E^{\eta_{1,25,21}}(\tau)$	$E^{\eta_{1,21}}(\tau)$
۰/۰۸	$۳/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۸/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۸ \times ۱۰^{-۷}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۲۴	$۷/۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۴ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۴۰	$۹/۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۷ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۵۶	$۹/۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۶ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۷۲	$۷/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۲ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۷/۷ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۸۸	$۳/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۸/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۹۶	$۱/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۶ \times ۱۰^{-۷}$
	$E^{\eta_{2,11}}(\tau)$	$E^{\eta_{2,25,11}}(\tau)$	$E^{\eta_{2,11}}(\tau)$	$E^{\eta_{2,21}}(\tau)$	$E^{\eta_{2,25,21}}(\tau)$	$E^{\eta_{2,21}}(\tau)$
۰/۰۸	$۷/۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۲۴	$۲/۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۵ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۴۰	$۲/۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۷/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۵۶	$۲/۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۶/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۷۲	$۲/۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۷ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۸۸	$۹/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۹۶	$۳/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۶}$

جدول ۳.۳: ماکسیمم خطای مطلق مشتق مرتبه اول در مثال ۲.۴.۳ .

τ	روش [۲۲]		روش حاضر	
	$E^{\eta'_{1,10}}(\tau)$	$E^{\eta'_{2,10}}(\tau)$	$E^{\eta'_{1,10}}(\tau)$	$E^{\eta'_{2,10}}(\tau)$
۰/۲	$۱/۲۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۶۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۳/۷۷ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۱/۶۲ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۴	$۱/۳۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۵۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۵۸ \times ۱۰^{-۹}$	$۷/۶۲ \times ۱۰^{-۹}$
۰/۶	$۱/۳۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۱۳ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۸۴ \times ۱۰^{-۹}$	$۶/۷۳ \times ۱۰^{-۹}$
۰/۸	$۱/۱۸ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۶۲ \times ۱۰^{-۹}$	$۵/۹۹ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱/۵۲ \times ۱۰^{-۸}$

جدول ۴.۳: ماکسیمم خطای مطلق برای مثال۳.۴.۳.

τ	روش [۳۲]	روش [۲۲]	روش حاضر	روش [۳۲]	روش [۲۲]	روش حاضر
	$E^{\eta_{۱,۸,۲۱}}(\tau)$	$E^{\eta_{۱,۲۵,۲۱}}(\tau)$	$E^{\eta_{۱,۱۰,۲۱}}(\tau)$	$E^{\eta_{۲,۸,۲۱}}(\tau)$	$E^{\eta_{۲,۲۵,۲۱}}(\tau)$	$E^{\eta_{۲,۱۰,۲۱}}(\tau)$
۰/۰۸	$۵/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۷}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۲۴	$۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۹/۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۵/۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۴۰	$۲/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۷}$	$۷/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۵۶	$۲/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۸/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۷۲	$۱/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۷}$	$۶/۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۸۸	$۹/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۷ \times ۱۰^{-۸}$	$۳/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۹۶	$۳/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۳/۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۶}$

جدول ۵.۳: ماکسیمم خطای مطلق مشتق مرتبه اول در مثال ۳.۴.۳ .

τ	روش [۲۲]	روش حاضر		
	$E^{\eta'_{۱,۲۵,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۲,۲۵,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۱,۱۰,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۲,۱۰,۱۰۰}}(\tau)$
۰/۲	$۳/۴۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۵/۲۳ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۴۵ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱/۶۹ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۴	$۱/۶۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۵/۱۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۰۱ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۸/۰۰ \times ۱۰^{-۹}$
۰/۶	$۱/۲۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۵/۱۱ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۷۰ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۷/۰۰ \times ۱۰^{-۹}$
۰/۸	$۳/۷۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۵/۰۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۰۲ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۵۹ \times ۱۰^{-۸}$

جدول ۶.۳: ماکسیمم خطای مطلق مشتق مرتبه اول در مثال ۴.۴.۳ .

τ	روش [۲۲]	روش حاضر				
	$E^{\eta'_{۱,۲۵,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۲,۲۵,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۳,۲۵,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۱,۱۰,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۲,۱۰,۱۰۰}}(\tau)$	$E^{\eta'_{۳,۱۰,۱۰۰}}(\tau)$
۰/۲	$۲/۱۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۳/۸۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۴۲ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۲۷ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۷/۴۳ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۲/۳۹ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۴	$۲/۱۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۰۱ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۰۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۶۶ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱/۰۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۳/۷۹ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۶	$۲/۱۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۳/۹۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۱۴ \times ۱۰^{-۹}$	$۸/۳۸ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۱/۶۱ \times ۱۰^{-۹}$	$۹/۹۳ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۸	$۲/۱۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۳/۶۵ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۹۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۲۰ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۲۶ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۲۸ \times ۱۰^{-۹}$

جدول ۷.۳: مرتبه همگرایی $(Log_{۲}^{E^{n,N}/E^{n,۲N}})$.

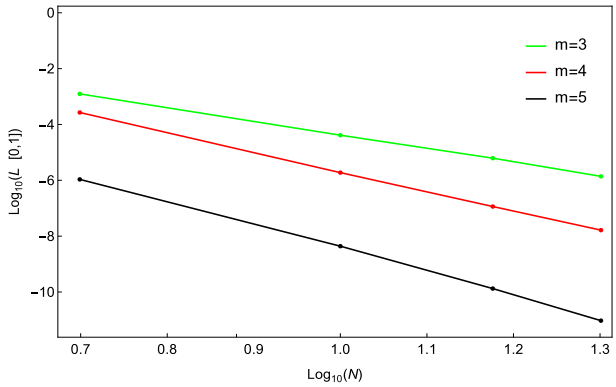
τ	روش حاضر			
	$N=۸$	$N=۱۶$	$N=۳۲$	$N=۶۴$
مثال ۲.۴.۳				
$E^{\eta_{۱},N}(\tau)$	۱٫۰۸۷۸۶ × ۱۰$^{-۴}$ ۵٫۵	۲٫۲۹۷۸۸ × ۱۰$^{-۶}$ ۴٫۶	۹٫۴۴۳۴۸ × ۱۰$^{-۸}$ ۳٫۹	۶٫۰۳۹۹۹ × ۱۰$^{-۹}$
$E^{\eta_{۲},N}(\tau)$	۵٫۰۳۷۴۶ × ۱۰$^{-۴}$ ۵٫۳	۱٫۲۲۲۲۳ × ۱۰$^{-۵}$ ۴٫۳	۵٫۹۹۱۰۴ × ۱۰$^{-۷}$ ۴٫۰	۳٫۷۳۹ × ۱۰$^{-۸}$
$E^{\eta'_{۱},N}(\tau)$	۷٫۲۰۱۹ × ۱۰$^{-۳}$ ۳٫۹	۴٫۷۰۴۶۱ × ۱۰$^{-۴}$ ۴٫۵	۱٫۹۴۰۶۳ × ۱۰$^{-۵}$ ۳٫۸	۱٫۳۴۶۹۵ × ۱۰$^{-۶}$
$E^{\eta'_{۲},N}(\tau)$	۳٫۷۸۳۷۶ × ۱۰$^{-۲}$ ۳٫۷	۲٫۷۲۹۴۲ × ۱۰$^{-۳}$ ۴٫۵	۱٫۱۵۱ × ۱۰$^{-۴}$ ۳٫۱	۱٫۳۲۰۲۷ × ۱۰$^{-۵}$
$E^{\eta''_{۱},N}(\tau)$	۲٫۹۱۶۷۹ × ۱۰$^{-۱}$ ۱٫۹	۷٫۸۰۱۶۱ × ۱۰$^{-۲}$ ۲٫۱	۱٫۷۷۶۵۶ × ۱۰$^{-۲}$ ۳٫۳	۱٫۸۰۲۲۷ × ۱۰$^{-۳}$
$E^{\eta''_{۲},N}(\tau)$	۱٫۷۰۹۹۳ ۱٫۸	۴٫۷۱۹۸۸ × ۱۰$^{-۱}$ ۲٫۱	۱٫۰۸۵۲۷ × ۱۰$^{-۱}$ ۱٫۹	۲٫۷۸۷۶۹ × ۱۰$^{-۲}$
مثال۳.۴.۳				
$E^{\eta_{۱},۱۰,N}(\tau)$	۱٫۹۴۲۵ × ۱۰$^{-۵}$ ۵٫۰	۶٫۰۱۸۷۹ × ۱۰$^{-۷}$ ۳٫۲	۶٫۱۲۷۸ × ۱۰$^{-۸}$ ۳٫۹	۳٫۸۸۰۵۶ × ۱۰$^{-۹}$
$E^{\eta_{۲},۱۰,N}(\tau)$	۴٫۹۴۵۲۳ × ۱۰$^{-۴}$ ۵٫۳	۱٫۲۲۸۴۱ × ۱۰$^{-۵}$ ۴٫۴	۵٫۷۴۴۷۶ × ۱۰$^{-۷}$ ۳٫۹	۳٫۶۰۹۹۷ × ۱۰$^{-۸}$
$E^{\eta'_{۱},۱۰,N}(\tau)$	۴٫۱۷۴۴۵ × ۱۰$^{-۴}$ ۳٫۴	۳٫۷۷۴۲۱ × ۱۰$^{-۵}$ ۴٫۰	۲٫۳۴۴۹۸ × ۱۰$^{-۶}$ ۱٫۴	۸٫۶۸۶۵ × ۱۰$^{-۷}$
$E^{\eta'_{۲},۱۰,N}(\tau)$	۳٫۷۴۵۵۱ × ۱۰$^{-۲}$ ۳٫۷	۲٫۷۲۳۰۷ × ۱۰$^{-۳}$ ۴٫۵	۱٫۱۵۰۷۸ × ۱۰$^{-۴}$ ۳٫۱	۱٫۳۲۱۵۶ × ۱۰$^{-۵}$
$E^{\eta''_{۱},۱۰,N}(\tau)$	۱٫۶۸۷۵۶ × ۱۰$^{-۲}$ ۱٫۸	۴٫۶۰۳۹۴ × ۱۰$^{-۳}$ ۰٫۸	۲٫۵۵۰۴۳ × ۱۰$^{-۳}$ ۰٫۵	۱٫۷۹۸۵ × ۱۰$^{-۳}$
$E^{\eta''_{۲},۱۰,N}(\tau)$	۱٫۷۰۴۹۲ ۱٫۸	۴٫۷۱۵۵۱ × ۱۰$^{-۱}$ ۲٫۱	۱٫۰۸۴۹۴ × ۱۰$^{-۱}$ ۱٫۹	۲٫۷۸۷۶۸ × ۱۰$^{-۲}$

جدول ۸.۳: مرتبه همگرایی $\left(Log_{۲}^{E^{n,N}/E^{n,۲N}}\right)$

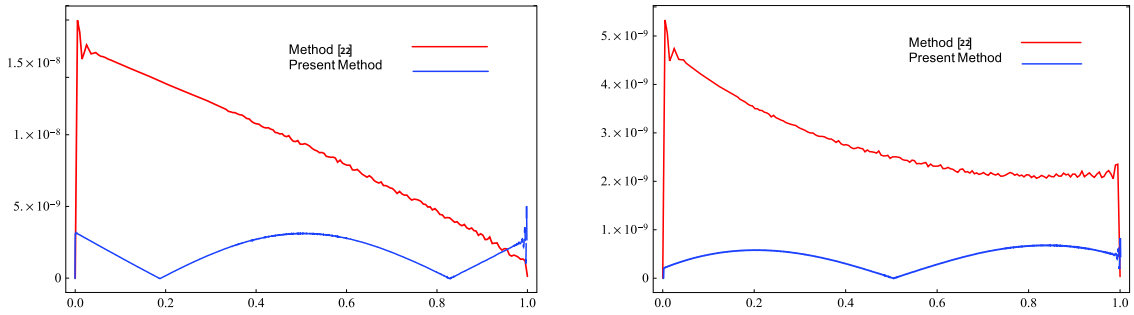
τ	روش حاضر			
	$N=۸$	$N=۱۶$	$N=۳۲$	$N=۶۴$
مثال ۴.۴.۳				
$E^{\eta_{۱,۱۰,N}}(\tau)$	۱٫۱۴۷۳۹ × ۱۰$^{-۴}$	۲٫۷۱۳۶ × ۱۰$^{-۶}$	۶٫۰۴۷۵۸ × ۱۰$^{-۸}$	۱٫۸۰۴۲۶ × ۱۰$^{-۹}$
	۳٫۷	۳٫۸	۳٫۵	
$E^{\eta_{۲,۱۰,N}}(\tau)$	۱٫۴۶۸۲۳ × ۱۰$^{-۴}$	۳٫۶۵۹۴۶ × ۱۰$^{-۶}$	۶٫۱۸۵۷۴ × ۱۰$^{-۸}$	۲٫۵۰۹۶۱ × ۱۰$^{-۹}$
	۳٫۷	۴٫۰	۳٫۱	
$E^{\eta_{۳,۱۰,N}}(\tau)$	۱٫۲۳۳۶ × ۱۰$^{-۴}$	۳٫۱۶۶۱۵ × ۱۰$^{-۶}$	۷٫۵۷۴۱۱ × ۱۰$^{-۸}$	۱٫۹۵۸۱۲ × ۱۰$^{-۹}$
	۳٫۶	۳٫۷	۳٫۶	
$E^{\eta'_{۱,۱۰,N}}(\tau)$	۷٫۲۶۸۲۷ × ۱۰$^{-۳}$	۵٫۳۰۹۷۱ × ۱۰$^{-۴}$	۲٫۲۶۰۲۴ × ۱۰$^{-۵}$	۳٫۸۶۵۲۵ × ۱۰$^{-۶}$
	۲٫۶	۳٫۱	۱٫۷	
$E^{\eta'_{۲,۱۰,N}}(\tau)$	۲٫۸۵۲۷۲ × ۱۰$^{-۳}$	۲٫۳۷۵۳۹ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۴۳۱۲ × ۱۰$^{-۵}$	۵٫۵۸۷۱۳ × ۱۰$^{-۶}$
	۲٫۴	۲٫۷	۰٫۹	
$E^{\eta'_{۳,۱۰,N}}(\tau)$	۹٫۱۶۷۷۲ × ۱۰$^{-۳}$	۶٫۵۸۰۳۹ × ۱۰$^{-۴}$	۲٫۷۸۳۱۳ × ۱۰$^{-۵}$	۱٫۹۸۸۶۶ × ۱۰$^{-۶}$
	۲٫۶	۳٫۱	۲٫۶	
$E^{\eta''_{۱,۱۰,N}}(\tau)$	۳٫۲۲۸۴۹ × ۱۰$^{-۱}$	۹٫۰۷۶۰۱ × ۱۰$^{-۲}$	۲٫۰۹۷۴۹ × ۱۰$^{-۲}$	۸٫۰۸۹۳۴ × ۱۰$^{-۳}$
	۱٫۲	۱٫۴	۰٫۹	
$E^{\eta''_{۲,۱۰,N}}(\tau)$	۱٫۰۹۲۴ × ۱۰$^{-۱}$	۳٫۶۲۲۶۶ × ۱۰$^{-۲}$	۱٫۷۷۳۹۳ × ۱۰$^{-۲}$	۱٫۱۶۸۴۳ × ۱۰$^{-۲}$
	۱٫۱	۰٫۷	۰٫۴	
$E^{\eta''_{۳,۱۰,N}}(\tau)$	۴٫۱۰۳۸۴ × ۱۰$^{-۱}$	۱٫۱۲۸۸۸ × ۱۰$^{-۱}$	۲٫۵۹۲۴۸ × ۱۰$^{-۲}$	۲٫۴۵۹۸۳ × ۱۰$^{-۳}$
	۱٫۲	۱٫۴	۲٫۳	

جدول ۹.۳: پایداری

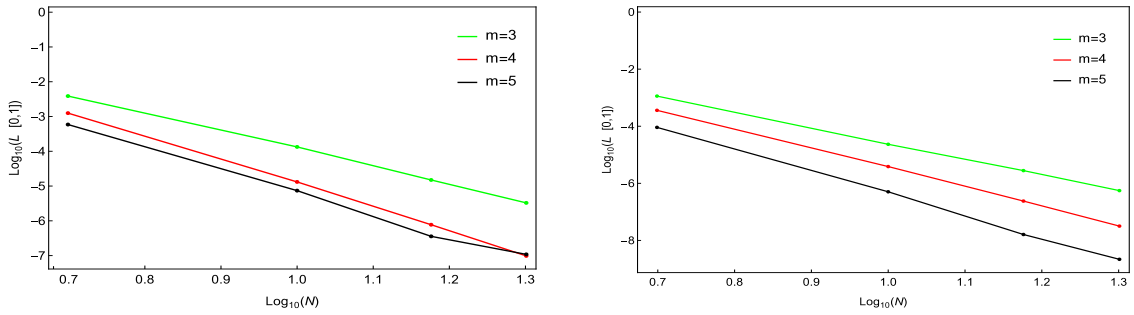
$W_{۲}^{۳}$	روش حاضر					
	$E_{\epsilon}^{\eta_{۱,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta_{۲,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta_{۳,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta'_{۱,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta'_{۲,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta'_{۳,۲۰}}(\tau)$
مثال ۲.۴.۳						
$\epsilon=۱۰^{-۳}$	۱٫۰ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۰ × ۱۰$^{-۳}$	-	۱٫۰۲۸۸۲ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۶۳۶۹۲ × ۱۰$^{-۳}$	-
$\epsilon=۱۰^{-۶}$	۱٫۴۶۹۵۷ × ۱۰$^{-۶}$	۴٫۲۶۱۹ × ۱۰$^{-۶}$	-	۱٫۸۴۷۳ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۰۸۱۷۷ × ۱۰$^{-۳}$	-
	$E_{\epsilon}^{\eta_{۱,۱۰,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta_{۲,۱۰,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta_{۳,۱۰,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta'_{۱,۱۰,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta'_{۲,۱۰,۲۰}}(\tau)$	$E_{\epsilon}^{\eta'_{۳,۱۰,۲۰}}(\tau)$
مثال ۳.۴.۳						
$\epsilon=۱۰^{-۳}$	۱٫۰ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۰ × ۱۰$^{-۳}$	-	۱٫۶۷۹۷۶ × ۱۰$^{-۳}$	۲٫۶۰۴۹۴ × ۱۰$^{-۳}$	-
$\epsilon=۱۰^{-۶}$	۱٫۱۴۸۹۱ × ۱۰$^{-۶}$	۴٫۲۳۲۱۸ × ۱۰$^{-۶}$	-	۱٫۵۰۱۹۴ × ۱۰$^{-۵}$	۱٫۰۸۱۲۶ × ۱۰$^{-۳}$	-
مثال ۴.۴.۳						
$\epsilon=۱۰^{-۳}$	۲٫۰۴۴۵ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۹۱۱۴۱ × ۱۰$^{-۴}$	۴٫۱۹۹۸ × ۱۰$^{-۵}$	۱٫۱۲۷۷۵ × ۱۰$^{-۳}$	۹٫۷۲۰۴۴ × ۱۰$^{-۴}$	۲٫۹۴۷۳۴ × ۱۰$^{-۴}$
$\epsilon=۱۰^{-۶}$	۷٫۹۱۳۴۵ × ۱۰$^{-۷}$	۹٫۹۱۲۴۲ × ۱۰$^{-۷}$	۸٫۷۳۵۰۶ × ۱۰$^{-۷}$	۲٫۱۱۷۳۴ × ۱۰$^{-۴}$	۹٫۸۴۶۰۶ × ۱۰$^{-۵}$	۲٫۶۰۴۴۴ × ۱۰$^{-۴}$



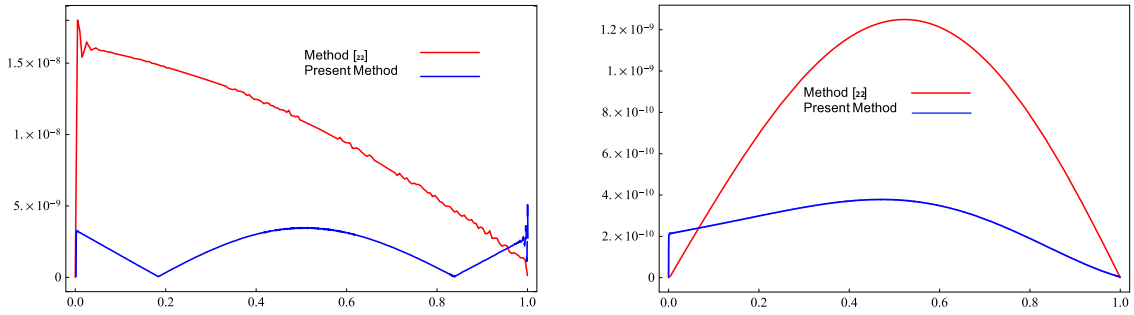
شکل ۱.۳: مقایسه ماکسیمم خطای مطلق $(E^{\eta_N} = \|\eta - \eta_N\|_\infty)$ برای مثال ۱.۴.۳ در $\mathcal{W}_2^m[0,1]$، به ازای $N = 5, 10, 15, 20$.



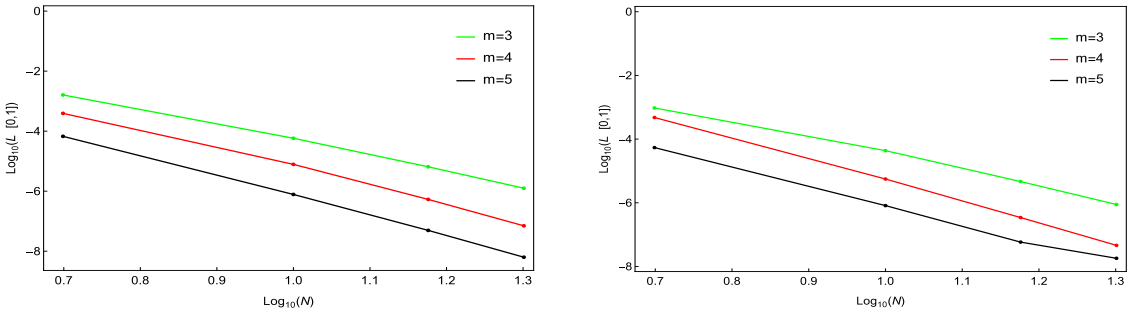
شکل ۲.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مثال ۲.۴.۳. (چپ: $E^{\eta_{1,10}}(\tau) = |\eta_{1,10}(\tau) - \eta_1(\tau)|$؛ راست: $E^{\eta_{2,10}}(\tau) = |\eta_{2,10}(\tau) - \eta_2(\tau)|$).



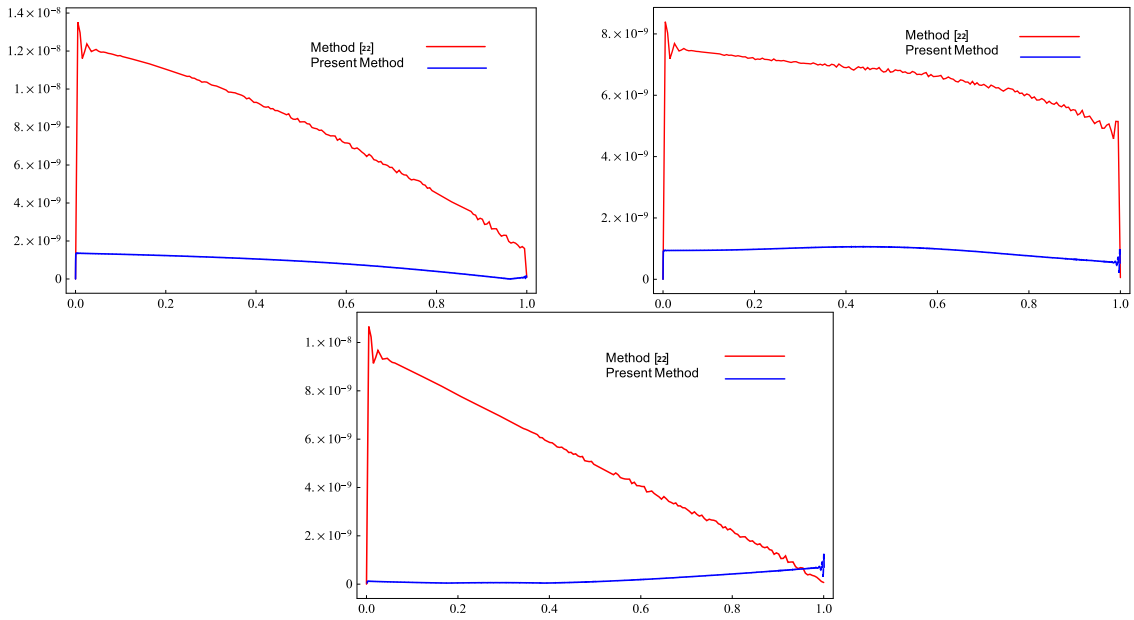
شکل ۳.۳: مقایسه ماکسیمم خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۳ در $\boldsymbol{W}_2^m[0,1]$، به ازای $N = 5, 10, 15, 20$ و $n = 10$. (چپ: $E^{\eta_{1,n,N}} = \|\eta_1 - \eta_{1,n,N}\|_\infty$؛ راست: $E^{\eta_{2,n,N}} = \|\eta_2 - \eta_{2,n,N}\|_\infty$).



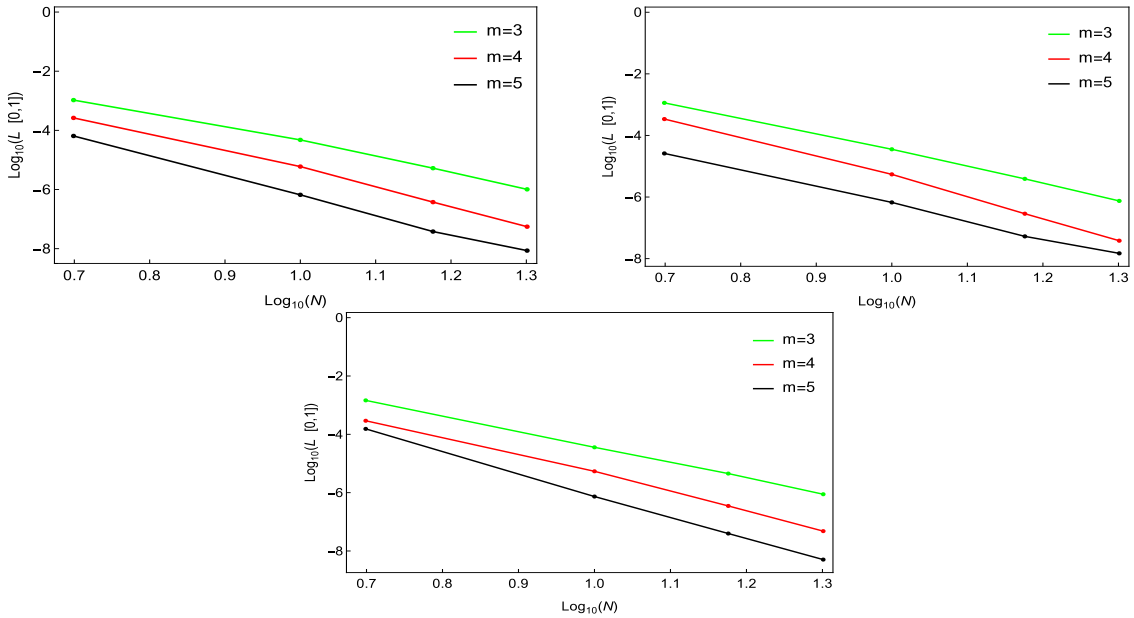
شکل ۴.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مثال ۳.۴.۳. (چپ: $E^{\eta_{1,25,10}}(\tau) = |\eta_{1,25,10}(\tau) - \eta_1(\tau)|$؛ راست: $E^{\eta_{2,25,10}}(\tau) = |\eta_{2,25,10}(\tau) - \eta_2(\tau)|$).



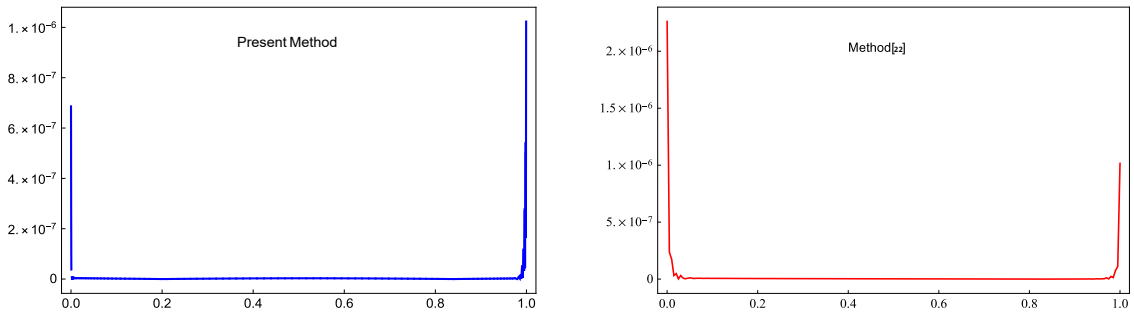
شکل ۵.۳: مقایسه ماکسیمم خطای مطلق برای مثال ۳.۴.۳ در $\boldsymbol{W}_۴^m[۰,۱]$، به ازای $N = ۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰$ و $n = ۱۰$ (چپ: $E^{\eta_۱,n,N} = \|\eta_۱ - \eta_{۱,n,N}\|_\infty$؛ راست: $E^{\eta_۲,n,N} = \|\eta_۲ - \eta_{۲,n,N}\|_\infty$).



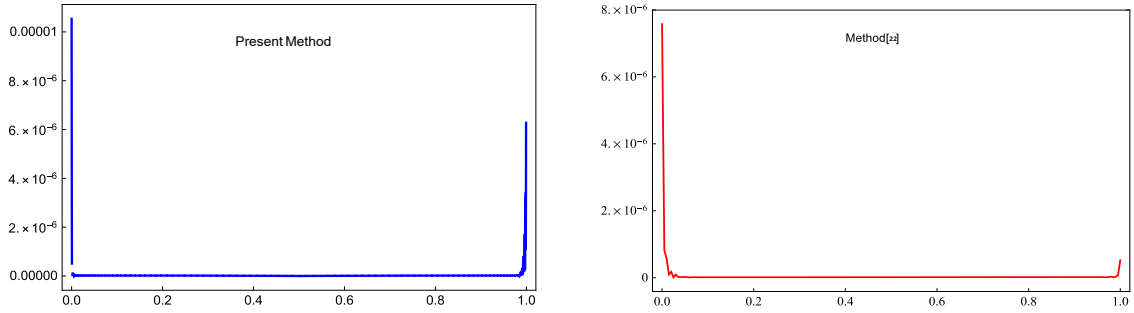
شکل ۶.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مثال ۴.۴.۳. (چپ: $E^{\eta_۱,۲۵,۱۰۰}(\tau) = |\eta_{۱,۲۵,۱۰۰}(\tau) - \eta_۱(\tau)|$؛ وسط: $E^{\eta_۲,۲۵,۱۰۰}(\tau) = |\eta_{۲,۲۵,۱۰۰}(\tau) - \eta_۲(\tau)|$؛ راست: $E^{\eta_۳,۲۵,۱۰۰}(\tau) = |\eta_{۳,۲۵,۱۰۰}(\tau) - \eta_۳(\tau)|$).



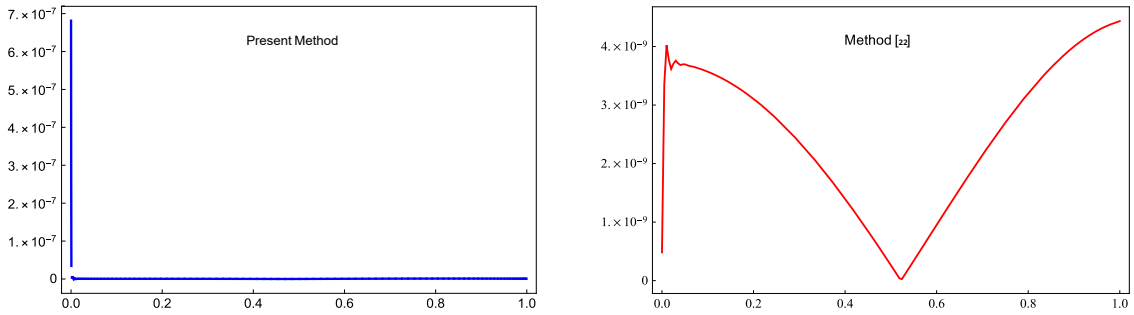
شکل ۷.۳: مقایسه ماکسیمم خطای مطلق برای مثال ۴.۴.۳ در $\boldsymbol{W}_4^m[0,1]$، به ازای $N = 5, 10, 15, 20$ و $n = 10$. (چپ: $E^{\eta_{1,n,N}} = \|\eta_1 - \eta_{1,n,N}\|_\infty$؛ وسط: $E^{\eta_{3,n,N}} = \|\eta_3 - \eta_{3,n,N}\|_\infty$؛ راست: $E^{\eta_{2,n,N}} = \|\eta_2 - \eta_{2,n,N}\|_\infty$).



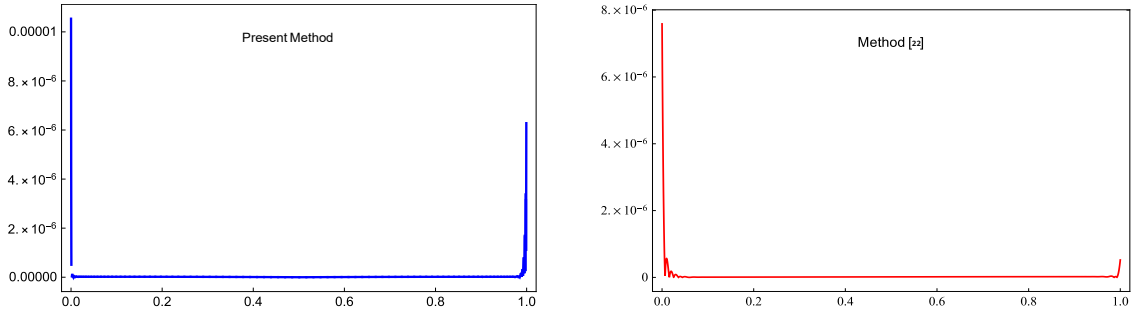
شکل ۸.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مشتق مرتبه اول، $E^{\eta'_{1,10}(\tau)} = |\eta'_{1,10}(\tau) - \eta'_1(\tau)|$ در مثال ۲.۴.۳.



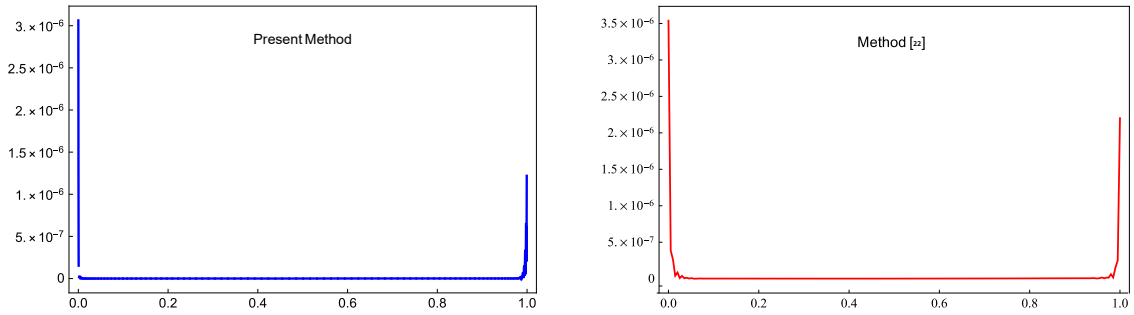
شکل ۹.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مشتق مرتبه اول، $E^{\eta'_{2,10}(\tau)} = |\eta'_{2,10}(\tau) - \eta'_2(\tau)|$ در مثال ۲.۴.۳.



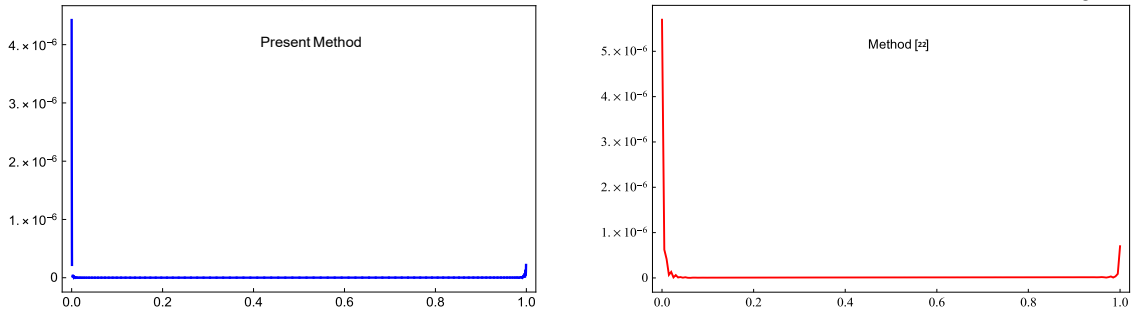
شکل ۱۰.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مشتق مرتبه اول، $E^{\eta'_{1,25,10}(\tau)} = |\eta'_{1,25,10}(\tau) - \eta'_1(\tau)|$ در مثال ۳.۴.۳.



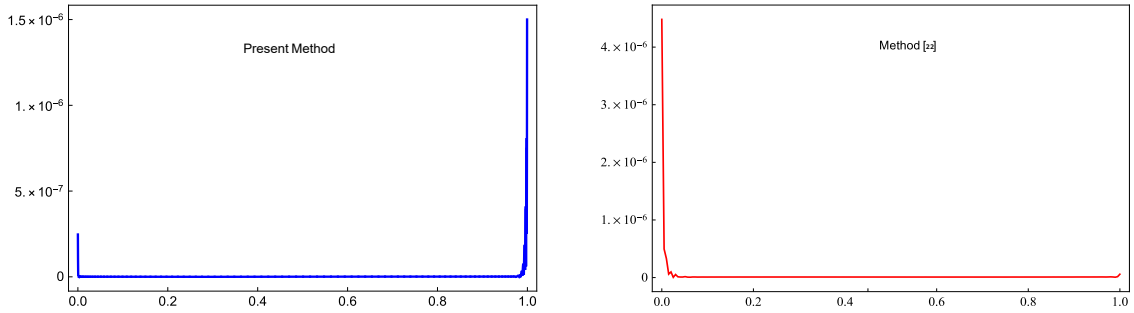
شکل ۱۱.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مشتق مرتبه اول، $E^{\eta'_{2,25,10}(\tau)} = |\eta'_{2,25,10}(\tau) - \eta'_2(\tau)|$ در مثال ۳.۴.۳.



شکل ۱۲.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مشتق مرتبه اول، $E^{\eta'_{1,25,10}(\tau)} = |\eta'_{1,25,10}(\tau) - \eta'_1(\tau)|$ در مثال ۴.۴.۳.



شکل ۱۳.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مشتق مرتبه اول، $E^{\eta'_{2,25,10}(\tau)} = |\eta'_{2,25,10}(\tau) - \eta'_2(\tau)|$ در مثال ۴.۴.۳.



شکل ۱۴.۳: مقایسه خطای مطلق بین روش حاضر و روش [۲۲] برای مشتق مرتبه اول، $E^{\eta'_{3,25,10}(\tau)} = |\eta'_{3,25,10}(\tau) - \eta'_3(\tau)|$ در مثال ۴.۴.۳.

فصل ۴

یک رویکرد جدید برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی

۱.۴ مقدمه

در این فصل رویکرد جدیدی بر اساس روش هسته بازتولیدی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی همگن و ناهمگن ارائه خواهیم کرد. در این رویکرد نیز همچنان ویژگی هایی همچون حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت، حجم عملیات کمتر و دقت بالا برقرار است. البته لازم به ذکر است چون اساس این رویکرد نیز روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت است، پس همچنان انتخاب نوع فضا متناسب با نوع مسئله، انتخاب نقاط مناسب و پایه ها از اهمیت بالایی بر خوردار است. به همین منظور، فضای مسئله به صورت جمع مستقیم دو فضای دیگر متناسب با نوع عملگر و مرتبه مشتق آن نوشته شده است. سپس پایه های این دو فضا با استفاده از بردار واحد و پایه های فضای $\mathcal{W}_2^k[0,1]$ معرفی شده است. در ادامه، با استفاده از عملگر خود الحاق و تکنیک های جبر خطی ماتریس ضرایب ساخته شده است. در نهایت برای بدست آوردن بردار مجهول معکوس ماتریس ضرایب در بردار سمت راست ضرب شده است.

به منظور نشان دادن کارآیی روش حاضر مقایسه ای بین روش حاضر و روش [۲۳] ، اختلالی هموتوپی بر مبنای روش هسته بازتولیدی انجام شده است. روش اختلالی هموتوپی ، یک روش قدرتمند در حل انواع معادلات و دستگاه معادلات دیفرانسیل می باشد. در این فصل نشان خواهیم داد روش ما از نظر نتایج عددی بسیار کارآمدتر از روش اختلالی هموتوپی است.

دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{11}\theta_1 + \mathcal{L}_{12}\theta_2 = f_1(\tau) - \sigma_1(\tau,\theta(\tau)), \ 0 \le \tau \le 1, \\ \mathcal{L}_{21}\theta_1 + \mathcal{L}_{22}\theta_2 = f_2(\tau) - \sigma_2(\tau,\theta(\tau)), \\ \theta_i(a) = \theta_i(b) = \gamma, \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{۱.۴}$$

به طوریکه، $\tau \in \Omega = [0,1]$ ،$i,j = 1,2$ ، $\mathcal{L}_{i,j} : \mathcal{W}_2^3[0,1] \to \mathcal{W}_2^1[0,1]$ عملگرهای خطی و $\sigma_d(.,.)$ به ازای $d = 1,2$ عملگر های غیر خطی هستند. همچنین، $f_d(.)$ توابع داده شده هستند. قرار دهید $\theta(.) = (\theta_1(.),\theta_2(.))^T$، بردار توابع مجهولی است که باید مشخص شود. در معادله (۱.۴) فرض کنید:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{11}\theta_1 = \theta_1''(\tau) + a_1(\tau)\theta_1'(\tau) + a_2(\tau)\theta_1(\tau), \\ \mathcal{L}_{12}\theta_2 = \theta_2''(\tau) + a_3(\tau)\theta_2'(\tau) + a_4(\tau)\theta_2(\tau), \\ \mathcal{L}_{21}\theta_1 = \theta_1''(\tau) + b_1(\tau)\theta_1'(\tau) + b_2(\tau)\theta_1(\tau), \\ \mathcal{L}_{22}\theta_2 = \theta_2''(\tau) + b_3(\tau)\theta_2'(\tau) + b_4(\tau)\theta_2(\tau), \end{cases}$$

به طوریکه، $a_i(.),\ b_i(.)$ به ازای $i = 1,2,3,4$ توابع داده شده هستند. همچنین عملگر خطی $\boldsymbol{L}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}.$$

همچنین، قرار دهید $\boldsymbol{F} = (f_1, f_2)$ و $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$، بنابراین فرم ماتریسی معادله (۱.۴) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}(\theta(\tau)) = \boldsymbol{F}(\tau) - \boldsymbol{\sigma}(\tau,\theta(\tau)), & 0 < \tau < 1, \\ \theta_i(0) = \theta_i(1) = \gamma, \quad i = 1,2. \end{cases} \tag{۲.۴}$$

در حالت غیر خطی، فرآیند تکرار در معادله (۲.۴) به صورت زیر است:

$$\boldsymbol{L}(\theta_n(\tau)) = \boldsymbol{F}(\tau) - \boldsymbol{\sigma}(\tau, \theta_{n-1}(\tau)), \qquad n = 2, 3, \ldots, \tag{3.4}$$

با در نظر گرفتن $\boldsymbol{L}(\theta_1(\tau)) = \boldsymbol{F}(\tau)$، برای جزییات بیشتر به مرجع [۱۶] مراجعه شود.

۲.۴ معرفی یک رویکرد جدید

با توجه به تعریف فضای هیلبرت $\mathcal{W}_2^k[0,1]$ در فصل قبل، فضای هیلبرت زیر را در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{W}_2^{k_1,k_2}[0,1] = \mathcal{W}_2^{k_1}[0,1] \oplus \mathcal{W}_2^{k_2}[0,1],$$

با ضرب داخلی و نرم

$$\langle \theta, \alpha \rangle_{\boldsymbol{W}_2^{k_1,k_2}} = \langle \theta_1, \alpha_1 \rangle_{\mathcal{W}_2^{k_1}} + \langle \theta_2, \alpha_2 \rangle_{\mathcal{W}_2^{k_2}}, \quad \|\theta\|_{\boldsymbol{W}_2^{k_1,k_2}} = \left(\sum_{i=1}^{2} \|\theta_i\|^2_{\mathcal{W}_2^{k_i}} \right)^{1/2},$$

به طوریکه $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T$، $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$، $\theta_i, \alpha_i \in \mathcal{W}_2^{k_i}[0,1]$ به ازای k_i و $i = 1, 2$. بنابراین، با توجه به معادله (۳.۴) داریم:

$$\theta(\tau) \in \boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1], \ \boldsymbol{F} - \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{W}_2^{1,1}[0,1].$$

لم ۱.۲.۴. اگر $\mathcal{L}_{i,j}$ در معادله (۱.۴) عملگرهای خطی کراندار باشد . آنگاه عملگر خطی $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1] \to \boldsymbol{W}_2^{1,1}[0,1]$ نیز کراندار است. به طوریکه

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix},$$

و کرانداری $\mathcal{L}_{ij}$ منتج به کرانداری $\boldsymbol{L}$ می شود. همچنین، عملگر خود الحاق $\boldsymbol{L}$ به فرم زیر است:

$$\boldsymbol{L}^* = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}^* & \mathcal{L}_{12}^* \\ \mathcal{L}_{21}^* & \mathcal{L}_{22}^* \end{pmatrix},$$

که $\mathcal{L}_{ij}^*$ عملگر خود الحاق $\mathcal{L}_{ij}$ است [۳۲].

ملاحظه ۲.۲.۴. فضا های $\mathcal{W}_2^3[0,1]$، $\mathcal{W}_2^2[0,1]$ و $\mathcal{W}_2^1[0,1]$ فضای هیلبرت هسته بازتولیدی هستند که هسته های آنها در فصل قبل معرفی شده است.

فرض کنید $\{\tau_l\}_{l=1}^{\infty}$ مجموعه ای از نقاط در بازه ی $[0,1]$ باشند. می توان نتیجه گرفت که :

$$\varphi_{lj}(\tau) = \tilde{R}_\tau(\tau_l)\overrightarrow{e_j} = \begin{cases} (\tilde{R}_\tau(\tau_l), 0)^T, & j = 1, \\ (0, \tilde{R}_\tau(\tau_l))^T, & j = 2, \end{cases} \tag{4.4}$$

و $\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau) = \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{\varphi}_{lj}(\tau)$ به ترتیب هسته های بازتولیدی فضاهای $\boldsymbol{W}_2^{1,1}[0,1]$ و $\boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$ هستند. که در آن $\overrightarrow{e_j}$ برداری یکه در فضای $\mathbb{R}^2$ است. بنابراین، می توان ثابت کرد که:

$$\left\langle \boldsymbol{\psi}_{si}(.), \boldsymbol{\psi}_{lj}(.) \right\rangle_{\boldsymbol{W}_2^{3,3}} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|R_{\tau_s}\|^2, & s = l,\ i = j, \\ R_{\tau_s}(\tau_l), & s \neq l,\ i = j. \end{cases} \tag{۵.۴}$$

قضیه ۳.۲.۴. به ازای $j = 1, 2$ و $l = 1, 2, \ldots,$ داریم:

$$\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau) = \boldsymbol{L}R_{\tau_l}(\tau)\overrightarrow{e_j}.$$

اثبات. با اعمال خاصیت های فضای بازتولیدی [۱۶] داریم:

$$\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau) = \left\langle \boldsymbol{L}^*\tilde{R}_{\tau}(.)\overrightarrow{e_j}, R_{\tau_l}(.)\overrightarrow{e_j} \right\rangle_{\boldsymbol{W}_2^{3,3}} = \left\langle \tilde{R}_{\tau}(.)\overrightarrow{e_j}, \boldsymbol{L}R_{\tau_l}(.)\overrightarrow{e_j} \right\rangle_{\boldsymbol{W}_2^{1,1}} = \boldsymbol{L}R_{\tau_l}(\tau)\overrightarrow{e_j}.$$

□

قضیه ۴.۲.۴. اگر $\{\tau_l\}_{l=1}^{\infty}$ در بازه $[0,1]$ چگال باشد، آنگاه $\left\{\boldsymbol{\psi}_{lj}(.)\right\}_{(1,1)}^{(\infty,2)}$ یک سیستم تابعی کامل در فضای $\boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$ است.

اثبات. برای هر $\theta(.) \in \boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$، اگر $\left\langle \theta(.), \boldsymbol{\psi}_{lj}(.) \right\rangle = 0$ آنگاه،

$$0 = \left\langle \theta(.), \boldsymbol{\psi}_{lj}(.) \right\rangle = \left\langle \theta(.), \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{\varphi}_{lj}(.) \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{L}\theta(.), \boldsymbol{\varphi}_{lj}(.) \right\rangle = \left\langle \boldsymbol{L}\theta(.), \tilde{R}_{(.)}(\tau_l)\overrightarrow{e_j} \right\rangle = \boldsymbol{L}\theta(\tau_l).$$

با توجه به چگال بودن $\{\tau_l\}_{l=1}^{\infty}$ نتیجه می شود $\theta(\tau_l) = 0$. بنابراین اثبات کامل می شود. □

لم ۵.۲.۴. برای هر N، $\left\{\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau)\right\}_{(1,1)}^{(N,2)}$ در فضای $\boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$ مستقل خطی است [۳۳].

قضیه ۶.۲.۴. اگر $\{\tau_s\}_{s=1}^{\infty}$در بازه $[0,1]$ چگال باشند، و جواب معادله (۲.۴) یکتا باشد. آنگاه جواب به صورت زیر است:

$$\theta(\tau) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_{j,l}\psi_{lj}(\tau). \tag{۶.۴}$$

اثبات. معادله (۶.۴) را در معادله (۲.۴) جایگزین کنید. بنابراین:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\theta(\tau_s) = \langle \boldsymbol{L}\theta(.), \boldsymbol{\varphi}_{si}(.) \rangle &= \langle \theta(.), \boldsymbol{L}^*\boldsymbol{\varphi}_{si}(.) \rangle \\ &= \left\langle \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_{j,l}\boldsymbol{\psi}_{lj}(.), \boldsymbol{\psi}_{si}(.) \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_{j,l}\left\langle \boldsymbol{\psi}_{lj}(.), \boldsymbol{\psi}_{si}(.) \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_{j,l}\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau_s) \\ &= \boldsymbol{F}(\tau_s) - \boldsymbol{\sigma}(\tau, \theta(\tau_s)). \end{aligned}$$

بنابراین $\theta(.)$ جواب معادله (۲.۴) است. به طوریکه $c_{j,l}$ باید به ازای $j = ۱, ۲$ و $l = ۱, \dots$ تعیین شوند. از طرفی، اگر معادله (۲.۴) خطی باشد، آنگاه $\boldsymbol{\sigma} = ۰$ و جواب تقریبی به صورت زیر است:

$$\theta_N(\tau) = \sum_{l=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{۲} c_{j,l} \psi_{lj}(\tau), \tag{۷.۴}$$

به طوریکه $c_{j,l}$ ضرایب مجهولی هستند که باید به ازای $j = ۱, ۲$ و $l = ۱, \dots, N$ مشخص شوند. در نتیجه اثبات کامل می شود. □

اگر معادله (۲.۴) غیر خطی باشد، با مشخص کردن $\theta_۱(.),\ n,\ N$ داریم:

$$\theta_{n,N}(\tau) = \sum_{l=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{۲} c_{j,l,n} \psi_{lj}(\tau), \quad n = ۲, ۳, \dots, \tag{۸.۴}$$

به طوریکه، n تعداد تکرار های قسمت غیر خطی، N تعداد نقاط هم محلی و $c_{j,l,n}$ ضرایب مجهولی هستند که باید مشخص شوند. به همین منظور، معادله (۸.۴) را در معادله (۲.۴) جایگزین میکنیم و در اینصورت برای N به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\boldsymbol{L}\theta_{n,N}(\tau) = \boldsymbol{F}(\tau) - \boldsymbol{\sigma}(\tau, \theta_{n-۱,N}(\tau)),$$

با توجه به قضیه ۶.۲.۴ ، داریم:

$$\sum_{l=۱}^{N} \sum_{j=۱}^{۲} c_{j,l,n} \boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau_s) = \boldsymbol{F}(\tau_s) - \boldsymbol{\sigma}(\tau, \theta_{n-۱,N}(\tau_s)), \tag{۹.۴}$$

که $s = ۱, ۲, \ldots, N$ تعداد نقاط هم محلی هستند. حال، با استفاده از قضیه ۳.۲.۴ داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=۱}^{N}\sum_{j=۱}^{۲} c_{j,l,n}\boldsymbol{\psi}_{lj}(\tau_s) &= \sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}\boldsymbol{\psi}_{l۱}(\tau_s) + \sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}\boldsymbol{\psi}_{l۲}(\tau_s) \\
&= \sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}(\boldsymbol{L}R_{\tau_l}(\tau_s)\overrightarrow{e_۱}) + \sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}(\boldsymbol{L}R_{\tau_l}(\tau_s)\overrightarrow{e_۲}) \\
&= \boldsymbol{L}\sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s)\overrightarrow{e_۱} + \boldsymbol{L}\sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s)\overrightarrow{e_۲} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{۱۱} & \mathcal{L}_{۱۲} \\ \mathcal{L}_{۲۱} & \mathcal{L}_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \\ \cdot \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{۱۱} & \mathcal{L}_{۱۲} \\ \mathcal{L}_{۲۱} & \mathcal{L}_{۲۲} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{۱۱}\sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \\ \mathcal{L}_{۲۱}\sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{۱۲}\sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \\ \mathcal{L}_{۲۲}\sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{۱۱}\sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) + \mathcal{L}_{۱۲}\sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \\ \mathcal{L}_{۲۱}\sum_{l=۱}^{N} c_{۱,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) + \mathcal{L}_{۲۲}\sum_{l=۱}^{N} c_{۲,l,n}R_{\tau_l}(\tau_s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۱۱}R_{\tau_l}(\tau_s) & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۱۲}R_{\tau_l}(\tau_s) \\ \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۲۱}R_{\tau_l}(\tau_s) & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۲۲}R_{\tau_l}(\tau_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{۱,l,n} \\ c_{۲,l,n} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

همچنین

$$\boldsymbol{F}(\tau_s) - \boldsymbol{\sigma}(\tau, \theta_{n-۱,N}(\tau_s)) = \begin{pmatrix} f_۱(\tau_s) \\ f_۲(\tau_s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_۱(\tau, \theta_{n-۱,N}(\tau_s)) \\ \sigma_۲(\tau, \theta_{n-۱,N}(\tau_s)) \end{pmatrix}.$$

بنابراین، با توجه به معادله (۹.۴) می توان نتیجه گرفت که

(۱۰.۴)

$$\begin{pmatrix} \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۱۱}R_{\tau_l}(\tau_s) & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۱۲}R_{\tau_l}(\tau_s) \\ \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۲۱}R_{\tau_l}(\tau_s) & \sum_{l=۱}^{N} \mathcal{L}_{۲۲}R_{\tau_l}(\tau_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{۱,l,n} \\ c_{۲,l,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_۱(\tau_s) \\ f_۲(\tau_s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_۱(\tau, \theta_{n-۱,N}(\tau_s)) \\ \sigma_۲(\tau, \theta_{n-۱,N}(\tau_s)) \end{pmatrix}.$$

با توجه به

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{N} \mathcal{L}_{11} R_{\tau_l}(\tau_s) & \sum_{l=1}^{N} \mathcal{L}_{12} R_{\tau_l}(\tau_s) \\ \sum_{l=1}^{N} \mathcal{L}_{21} R_{\tau_l}(\tau_s) & \sum_{l=1}^{N} \mathcal{L}_{22} R_{\tau_l}(\tau_s) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{1,l,n} \\ c_{2,l,n} \end{pmatrix}, \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} f_1(\tau_s) \\ f_2(\tau_s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_1(\tau, \theta_{n-1,N}(\tau_s)) \\ \sigma_2(\tau, \theta_{n-1,N}(\tau_s)) \end{pmatrix}.$$

می توان نوشت

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F},$$

در نهایت، با توجه به لم ۵.۲.۴، $\boldsymbol{A}^{-1}$ وجود دارد و

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{F}.$$

۳.۴ آنالیز خطا

قضیه ۱.۳.۴. اگر $\boldsymbol{W}_2^{3,3} \in \theta(.) = (\theta_1(.), \theta_2(.))$ جواب تقریبی معادله (۲.۴) ، آنگاه جواب تقریبی $\theta_{n,N}(.) = (\theta_{1,n,N}(.), \theta_{2,n,N}(.))$ و مشتق های آن

$$\theta_{n,N}^{(i)}(.) = (\theta_{1,n,N}^{(i)}(.), \theta_{2,n,N}^{(i)}(.)),$$

به ترتیب به $\theta(.)$ و $\theta^{(i)}(.)$ به طور یکنواخت همگرا هستند. به ازای $i = 1, 2$.

اثبات. با جمع کردن دو معادله (۱.۴) داریم:

$$\theta_1''(\tau) + c(\tau)\theta_1'(\tau) + d(\tau)\theta_1(\tau) + \sigma_1(\tau, \theta(\tau)) = f(\tau), \qquad (11.4)$$

که $c(.)$، $d(.)$، $f(.)$ و $\sigma_1(.)$ توابع مشخصی هستند. واضح است که معادله (۱۱.۴) یک معادله غیر خطی در فضای هسته بازتولیدی $\mathcal{W}_2^k[0, 1]$ است. علاوه بر این، با توجه به قضیه ۲.۳.۳ در فصل قبل می دانیم که $\theta_{1,n,N}(.)$ جواب تقریبی $\theta_1(.)$ است. پس

$$\begin{aligned} |\theta_1 - \theta_{1,n,N}| &= |\left\langle \theta_1 - \theta_{1,n,N}, R_\tau \right\rangle| \leq \left\|\theta_1 - \theta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^k} \|R_\tau\|_{\mathcal{W}_2^k} \\ &\leq P_1 \left\|\theta_1 - \theta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^k}, \end{aligned}$$

و همچنین، برای مشتق مرتبه اول داریم:

$$\begin{aligned} |\theta_1'(\tau) - \theta_{1,n,N}'(\tau)| &= |\frac{\partial}{\partial\tau}(\left\langle \theta_1 - \theta_{1,n,N}, R_\tau \right\rangle_{\mathcal{W}_2^k})| \\ &= |\left\langle \theta_1 - \theta_{1,n,N}, \frac{\partial}{\partial\tau} R_\tau \right\rangle_{\mathcal{W}_2^k}| \leq \left\|\theta_1 - \theta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^k} \left\|\frac{\partial}{\partial\tau} R_\tau\right\|_{\mathcal{W}_2^k} \\ &\leq Z_1 \left\|\theta_1 - \theta_{1,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^k}, \end{aligned}$$

که P_1 و Z_1 ثابت های عددی هستند. به طور مشابه :

$$|\theta_2(\tau) - \theta_{2,n,N}(\tau)| \leq P_2 \left\|\theta_2 - \theta_{2,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^k},$$

و

$$|\theta_2'(\tau) - \theta_{2,n,N}'(\tau)| \leq Z_2 \left\|\theta_2 - \theta_{2,n,N}\right\|_{\mathcal{W}_2^k}.$$

□

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $\theta(.) = (\theta_1(.), \theta_2(.))$ و $\theta_{n,N}(.) = (\theta_{1,n,N}(.), \theta_{2,n,N}(.))$ به ترتیب جواب دقیق و تقریبی معادله (۲.۴) باشند. اگر $\theta \in C^3[0,1]$، $\theta_{n,N} \in \boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$ و $\left\|\theta''_{i,n,N}\right\|_\infty \leq M_i$، $i = 1,2$، آنگاه به ازای $j = 1,2$ داریم:

$$\left\|\theta_j - \theta_{j,n,N}\right\|_\infty \leq C_j h^3, \tag{۱۲.۴}$$

$$\left\|\theta'_j - \theta'_{j,n,N}\right\|_\infty \leq C_j h^2, \tag{۱۳.۴}$$

که C_j یک ثابت عددی است [۳۴].

ملاحظه ۳.۳.۴. با توجه به لم ۵.۲.۴، $\boldsymbol{A}^{-1}$ وجود دارد پس جواب معادله (۲.۳) وجود دارد و یکتاست. علاوه بر این، ما می توانیم نتیجه بگیریم که روش حاضر در فضای $\boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$ پایدار است.

ملاحظه ۴.۳.۴. در روش حاضر، انتخاب فضا به نوع مسئله بستگی دارد. برای مثال در مثال های ۲.۴ و ۳.۴ بالاترین مرتبه مشتق θ_1 و θ_2 برابر با دو است. در نتیجه $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{W}_2^3[0,1]$ و فضای مناسب برای این دو مثال : $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1] \to \boldsymbol{W}_2^{1,1}[0,1]$. اما در مثال ۱.۴، بالا ترین مرتبه مشتق برای θ_1 و θ_2 به ترتیب ۲ و ۱ است. در نتیجه $\theta_1 \in \mathcal{W}_2^3[0,1]$ و $\theta_2 \in \mathcal{W}_2^2[0,1]$، بنابراین فضای مناسب برای مثال ۱.۴ $\boldsymbol{L} : \boldsymbol{W}_2^{3,2}[0,1] \to \boldsymbol{W}_2^{1,1}[0,1]$ البته واضح است که با تغییر فضا، مرتبه همگرایی نیز تغییر می کند. بنابراین در مثال ۱.۴ مرتبه همگرایی θ_2 و θ'_2 به صورت زیر خواهد بود.

$$\left\|\theta_2 - \theta_{2,n,N}\right\|_\infty \leq C_2 h^2, \tag{۱۴.۴}$$

$$\left\|\theta'_2 - \theta'_{2,n,N}\right\|_\infty \leq C_3 h. \tag{۱۵.۴}$$

ملاحظه ۵.۳.۴. در ادامه، فرمول مرتبه همگرایی به صورت زیر استفاده شده است:

$$C.F_i = log_2 \frac{||\theta_i - \theta_{i,n,N}||_\infty}{||\theta_i - \theta_{i,n,2N}||_\infty}, \quad C.F_i' = log_2 \frac{||\theta_i' - \theta_{i,n,N}'||_\infty}{||\theta_i' - \theta_{i,n,2N}'||_\infty},$$

که $i = 1,2$.

۴.۴ نتایج عددی

در این بخش، سه مثال به روش حاضر حل کردیم، نتایج عددی نشان می دهد که روش حاضر از روش های [۲۳] و [۳۲] کارآمدتر است.

مثال ۱.۴.۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی همگن زیر را در نظر بگیرید [۲۳]:

$$\begin{cases} \theta_1''(\tau)+\tau\theta_1(\tau)+2\tau\theta_2(\tau)+\tau\theta_1^2(\tau)=f(\tau), & 0<\tau<1,\\ \theta_2'(\tau)+\theta_2(\tau)+\tau^2\theta_1(\tau)+sin(\tau)\theta_2^2(\tau)=g(\tau),\\ \theta_1(0)=\theta_1(1)=0, \qquad \theta_2(0)=\theta_2(1)=0, \end{cases}$$

که جواب دقیق به صورت زیر است:

$$\theta(\tau)=[\tau-\tau^2, sin(\pi\tau)].$$

این مثال با استفاده از معادله (۱۰.۴) در فضای $\boldsymbol{W}_2^{3,2}[0,1]$ حل شده است. همچنین، در جدول های ۱.۴ و ۲.۴ روش حاضر را با روش های دیگر مقایسه شده و در نهایت، نتایج عددی مربوط به مرتبه همگرایی در جدول ۴.۴ داده شده است:

مثال ۲.۴.۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی همگن زیر را در نظر بگیرید [۲۳]:

$$\begin{cases} \theta_1''(\tau)+\tau\theta_1'(\tau)+cos(\pi\tau)\theta_2'(\tau)=f(\tau), & 0<\tau<1,\\ \theta_2''(\tau)+\tau\theta_1'(\tau)+\tau\theta_1^2(\tau)=g(\tau),\\ \theta_1(0)=\theta_1(1)=0, \qquad \theta_2(0)=\theta_2(1)=0, \end{cases}$$

که جواب دقیق به صورت زیر است:

$$\theta(\tau)=[(\tau-1)sin(\pi\tau), \tau-\tau^2].$$

این مثال با استفاده از معادله (۱۰.۴) در فضای $\boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$ حل شده است. همچنین، در جدول ۳.۴ و شکل های ۱.۴ و ۲.۴ مقایسه ای بر اساس خطای مطلق بین روش حاضر و روش های دیگر ارائه شده است و در نهایت، مرتبه همگرایی در جدول ۵.۴ نشان داده شده است.

مثال ۳.۴.۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مقدار مرزی ناهمگن زیر را در نظر بگیرید [۲۳]:

$$\begin{cases} \theta_1''(\tau)+20\theta_1'(\tau)+4cos(\tau)\theta_1(\tau)+sin(\theta_1(\tau)\theta_2(\tau))=f(\tau), & 0<\tau<1,\\ \theta_2''(\tau)+5e^{\tau}\theta_2'(\tau)+6sinh(\tau)\theta_2(\tau)+cos(\theta_2(\tau))=g(\tau),\\ \theta_1(0)=1,\ \theta_1(1)=e, \qquad \theta_2(0)=0,\ \theta_2(1)=sinh(1), \end{cases}$$

که جواب دقیق به صورت زیر است:

$$\theta(\tau)=[e^{\tau}, sinh(\tau)].$$

برای همگن سازی شرایط مقدار مرزی قرار دهید، $\tilde{\theta}_1=\theta_1+c_0+c_1x$ ،$\tilde{\theta}_2=\theta_2+d_0+d_1x$ که c_0, c_1, d_0, d_1 به وسیله $\bar{\theta}_1(0)=\bar{\theta}_1(1)=0$ ، $\tilde{\theta}_2(0)=\tilde{\theta}_2(1)=0$ تعیین می شوند. این مثال با استفاده از معادله (۱۰.۴) در فضای $\boldsymbol{W}_2^{3,3}[0,1]$ حل شده است. در شکل های ۳.۴، ۴.۴، ۵.۴ و ۶.۴ مقایسه ای بر اساس خطای نسبی بین روش حاضر و روش [۲۳] انجام شده است. جدول مرتبه همگرایی و ماکسیمم خطای مطلق مربوط به شکل های این مثال در جدول ۶.۴ و ۷.۴ داده شده است.

جدول ۱.۴: مثال ۲.۴.۳: خطای مطلق برای θ_1.

τ	روش [۳۲] θ_1	روش [۳۶] θ_1	روش [۲۳] $\theta_{1,5,21}$	روش [۲۳] $\theta_{1,5,51}$	روش حاضر $\theta_{1,5,21}$	روش حاضر $\theta_{1,5,51}$
۰/۰۸	$۵/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۲۴	$۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۲ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۴۰	$۲/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۷ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۵۶	$۲/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۹/۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۷/۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۰ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۷۲	$۱/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۶ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۸۸	$۹/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۹ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۹۶	$۳/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۹ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۳ \times ۱۰^{-۷}$

جدول ۲.۴: مثال ۱.۴.۴: خطای مطلق برای θ_2.

τ	روش [۳۲] θ_2	روش [۳۶] θ_2	روش [۲۳] $\theta_{2,5,21}$	روش [۲۳] $\theta_{2,5,51}$	روش حاضر $\theta_{2,5,21}$	روش حاضر $\theta_{2,5,51}$
۰/۰۸	$۲/۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۵ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۲۴	$۵/۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۳ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۴۰	$۷/۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۸/۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۱ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۵۶	$۸/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۷۲	$۶/۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۰ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۸۸	$۳/۱ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۶ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۰ \times ۱۰^{-۷}$
۰/۹۶	$۱/۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۹/۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۶ \times ۱۰^{-۵}$

جدول ۳.۴: مثال ۲.۴.۴:خطای مطلق برای θ_1.

τ	روش [۳۵] θ_1	روش [۲۳] $\theta_{1,5,21}$	روش [۲۳] $\theta_{1,5,51}$	روش حاضر $\theta_{1,5,21}$	روش حاضر $\theta_{1,5,51}$
۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
۰/۱۰	$۳/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۷/۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۳/۹ \times ۱۰^{-۸}$	$۲/۲ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۳۰	$۷/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۵۰	$۲/۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۴ \times ۱۰^{-۹}$	$۴/۸ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۷۰	$۴/۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۲ \times ۱۰^{-۸}$	$۲/۷ \times ۱۰^{-۱۰}$
۰/۹۰	$۳/۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۳/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۹/۴ \times ۱۰^{-۸}$	$۵/۲ \times ۱۰^{-۱۱}$
۱/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰

جدول ۴.۴: ماکسیمم خطای مطلق برای مرتبه همگرایی.

	$N=۵$	$N=۱۰$	$N=۲۰$	$N=۴۰$
۱.۴.۴ مثال				
$\|\|\theta_۱-\theta_{۱,۵,N}\|\|_\infty$	۷٫۰ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۷۰ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۵۰ × ۱۰$^{-۴}$	۹٫۰ × ۱۰$^{-۶}$
$C.F_۱$	-	۲٫۰۴۱۸۲	۳٫۵۰۲۵	۴٫۰۷۸۸۹
$\|\|\theta_۲-\theta_{۲,۵,N}\|\|_\infty$	۲٫۲۰ × ۱۰$^{-۲}$	۶٫۴۰ × ۱۰$^{-۳}$	۱٫۱۰ × ۱۰$^{-۳}$	۲٫۶۰ × ۱۰$^{-۴}$
$C.F_۲$	-	۱٫۷۸۱۳۶	۲٫۵۴۰۵۷	۲٫۰۸۰۹۲
$\|\|\theta'_۱-\theta'_{۱,۵,N}\|\|_\infty$	۷٫۳۰ × ۱۰$^{-۲}$	۲٫۸۰ × ۱۰$^{-۲}$	۵٫۶۰ × ۱۰$^{-۳}$	۷٫۵۰ × ۱۰$^{-۴}$
$C.F'_۱$	-	۱٫۳۸۲۴۷	۲٫۳۲۱۹۳	۲٫۹۰۰۴۶
$\|\|\theta'_۲-\theta'_{۲,۵,N}\|\|_\infty$	۳٫۴۰ × ۱۰$^{-۱}$	۱٫۸۰ × ۱۰$^{-۱}$	۷٫۵۰ × ۱۰$^{-۲}$	۳٫۶۰ × ۱۰$^{-۲}$
$C.F'_۲$	-	۰٫۹۱۷۵۳۸	۱٫۲۶۳۰۳	۱٫۰۵۸۸۹

جدول ۵.۴: ماکسیمم خطای مطلق برای مرتبه همگرایی.

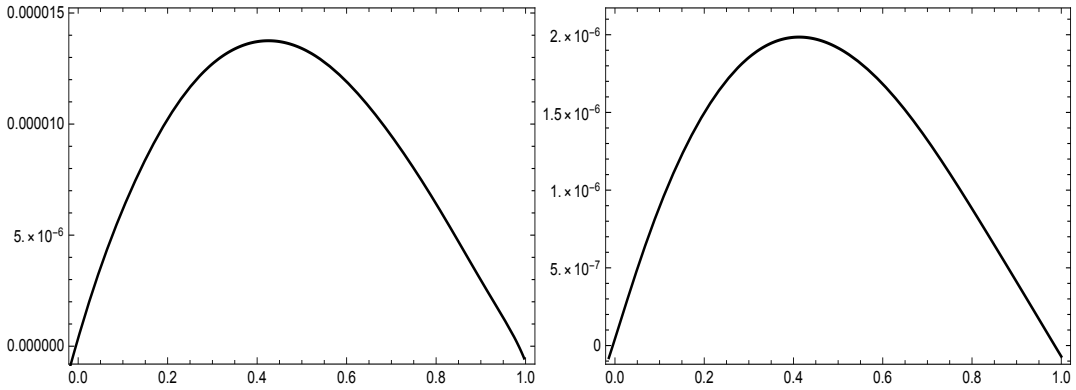
	$N=۵$	$N=۱۰$	$N=۲۰$	$N=۴۰$
۲.۴.۴ مثال				
$\|\|\theta_۱-\theta_{۱,۵,N}\|\|_\infty$	۳٫۱۰ × ۱۰$^{-۴}$	۱٫۲۰ × ۱۰$^{-۵}$	۲٫۶۰ × ۱۰$^{-۷}$	۳٫۴۰ × ۱۰$^{-۹}$
$C.F_۱$	-	۴٫۶۹۱۱۶	۵٫۵۲۸۳۸	۶٫۲۵۶۸۳
$\|\|\theta_۲-\theta_{۲,۵,N}\|\|_\infty$	۲٫۳۰ × ۱۰$^{-۴}$	۹٫۵۰ × ۱۰$^{-۶}$	۲٫۱۰ × ۱۰$^{-۷}$	۲٫۷۰ × ۱۰$^{-۹}$
$C.F_۲$	-	۴٫۵۹۷۵۶	۵٫۴۹۹۴۷	۶٫۲۸۱۲۹
$\|\|\theta'_۱-\theta'_{۱,۵,N}\|\|_\infty$	۳٫۵۰ × ۱۰$^{-۳}$	۳٫۴۰ × ۱۰$^{-۴}$	۲٫۷۰ × ۱۰$^{-۵}$	۱٫۷۰ × ۱۰$^{-۶}$
$C.F'_۱$	-	۳٫۳۶۳۷۵	۳٫۶۵۴۵	۳٫۹۸۹۳۵
$\|\|\theta'_۲-\theta'_{۲,۵,N}\|\|_\infty$	۲٫۷۰ × ۱۰$^{-۳}$	۲٫۸۰ × ۱۰$^{-۴}$	۲٫۱۰ × ۱۰$^{-۵}$	۱٫۴۰ × ۱۰$^{-۶}$
$C.F'_۲$	-	۳٫۲۶۹۴۶	۳٫۷۳۶۹۷	۳٫۹۰۶۸۹

جدول ۶.۴: ماکسیمم خطای مطلق برای مرتبه همگرایی.

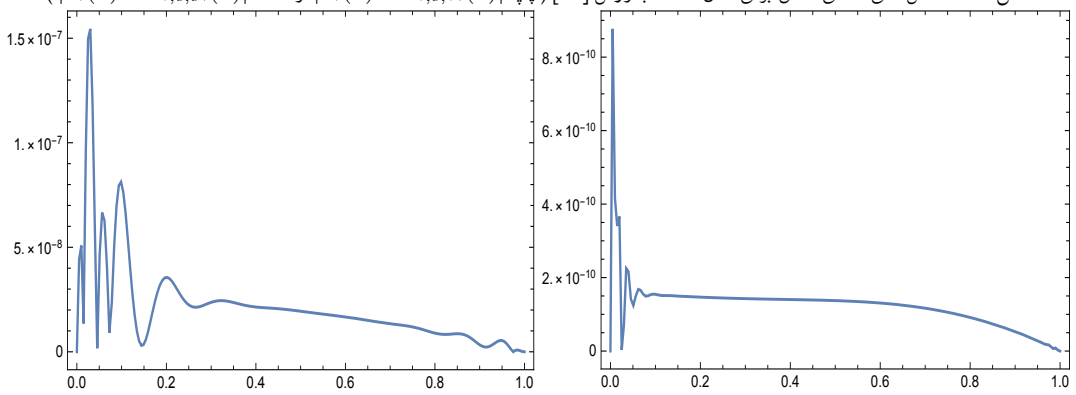
	$N=۵$	$N=۱۰$	$N=۲۰$	$N=۴۰$
مثال ۳.۴.۴				
$\|\|\theta_۱-\theta_{۱,۵,N}\|\|_\infty$	$۳/۶۰\times۱۰^{-۴}$	$۱/۰\times۱۰^{-۵}$	$۲/۴۰\times۱۰^{-۷}$	$۳/۸۰\times۱۰^{-۹}$
$C.F_۱$	-	۵/۱۶۹۹۳	۵/۳۸۰۸۲	۵/۹۸۰۸۹
$\|\|\theta_۲-\theta_{۲,۵,N}\|\|_\infty$	$۲/۴۰\times۱۰^{-۴}$	$۵/۲۰\times۱۰^{-۶}$	$۱/۵۰\times۱۰^{-۷}$	$۲/۱۰\times۱۰^{-۹}$
$C.F_۲$	-	۵/۵۲۸۳۸	۵/۱۱۵۴۸	۶/۱۵۸۴۳
$\|\|\theta'_۱-\theta'_{۱,۵,N}\|\|_\infty$	$۴/۶۰\times۱۰^{-۳}$	$۳/۵۰\times۱۰^{-۴}$	$۲/۶۰\times۱۰^{-۵}$	$۱/۹۰\times۱۰^{-۶}$
$C.F'_۱$	-	۳/۷۱۶۲۱	۳/۷۵۰۷۷	۳/۷۷۴۴۴
$\|\|\theta'_۲-\theta'_{۲,۵,N}\|\|_\infty$	$۲/۱۰\times۱۰^{-۳}$	$۱/۹۰\times۱۰^{-۴}$	$۱/۵۰\times۱۰^{-۵}$	$۱/۱۰\times۱۰^{-۶}$
$C.F'_۲$	-	۳/۴۶۶۳۲	۳/۶۶۲۹۷	۳/۷۶۹۳۹

جدول ۷.۴: ماکسیمم خطای مطلق برای شکل های ۱.۴، ۲.۴ و ماکسیمم خطای نسبی برای شکل های ۳.۴، ۴.۴، ۵.۴ و ۶.۴.

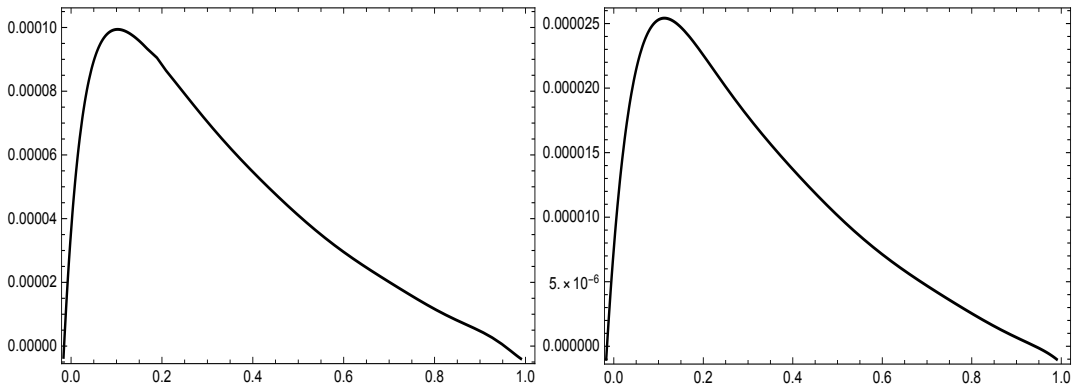
	روش [۲۳]	روش حاضر
مثال ۲.۴.۴		
$\|\|\theta_۱-\theta_{۱,۵,۲۱}\|\|_\infty$	$۱/۴۰\times۱۰^{-۵}$	$۱/۶۶\times۱۰^{-۷}$
$\|\|\theta_۲-\theta_{۲,۵,۵۱}\|\|_\infty$	$۲/۰\times۱۰^{-۶}$	$۸/۷۰\times۱۰^{-۱۰}$
مثال ۳.۴.۴		
$max_\tau\|\frac{\theta_۱(\tau)-\theta_{۱,۵,۲۱}(\tau)}{\theta_۱(\tau)}\|$	$۱/۰\times۱۰^{-۴}$	$۷/۲۰\times۱۰^{-۸}$
$max_\tau\|\frac{\theta_۱(\tau)-\theta_{۱,۵,۵۱}(\tau)}{\theta_۱(\tau)}\|$	$۲/۵۰\times۱۰^{-۵}$	$۴/۴۰\times۱۰^{-۱۰}$
$max_\tau\|\frac{\theta_۲(\tau)-\theta_{۲,۵,۲۱}(\tau)}{\theta_۲(\tau)}\|$	$۶/۲۰\times۱۰^{-۴}$	$۴/۵۰\times۱۰^{-۶}$
$max_\tau\|\frac{\theta_۲(\tau)-\theta_{۲,۵,۵۱}(\tau)}{\theta_۲(\tau)}\|$	$۱/۰\times۱۰^{-۴}$	$۸/۶۰\times۱۰^{-۸}$



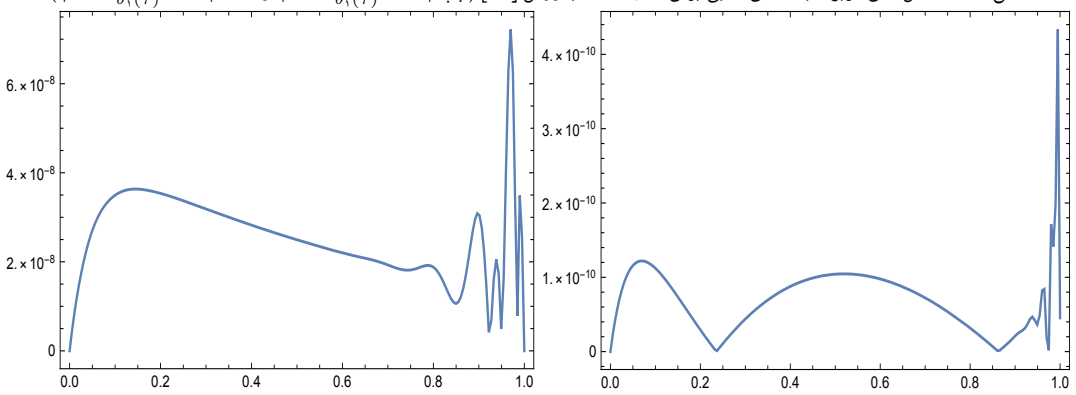
شکل ۱.۴: شکل های خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۴ با روش [۲۳] (چپ:$|\theta_{۲}(\tau)-\theta_{۲,۵,۲۱}(\tau)|$؛ راست: $|\theta_{۲}(\tau)-\theta_{۲,۵,۵۱}(\tau)|$).



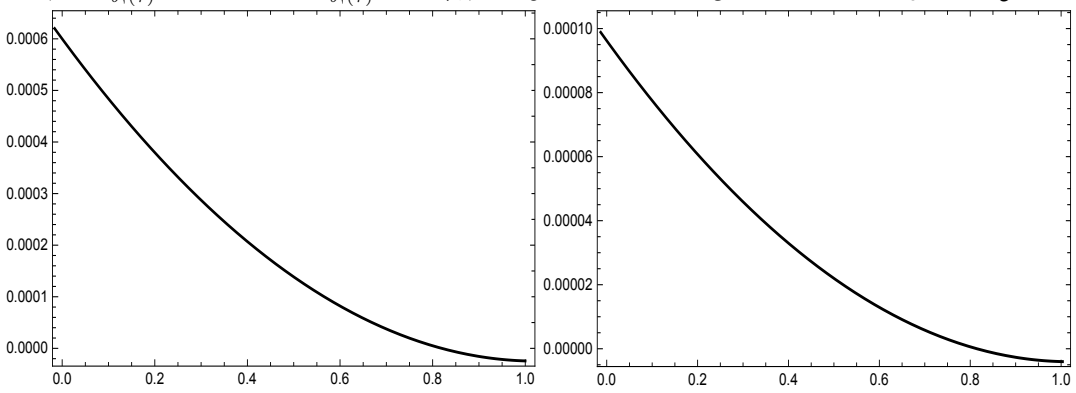
شکل ۲.۴: شکل های خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۴ با روش حاضر (چپ:$|\theta_{۲}(\tau)-\theta_{۲,۵,۲۱}(\tau)|$؛ راست: $|\theta_{۲}(\tau)-\theta_{۲,۵,۵۱}(\tau)|$).



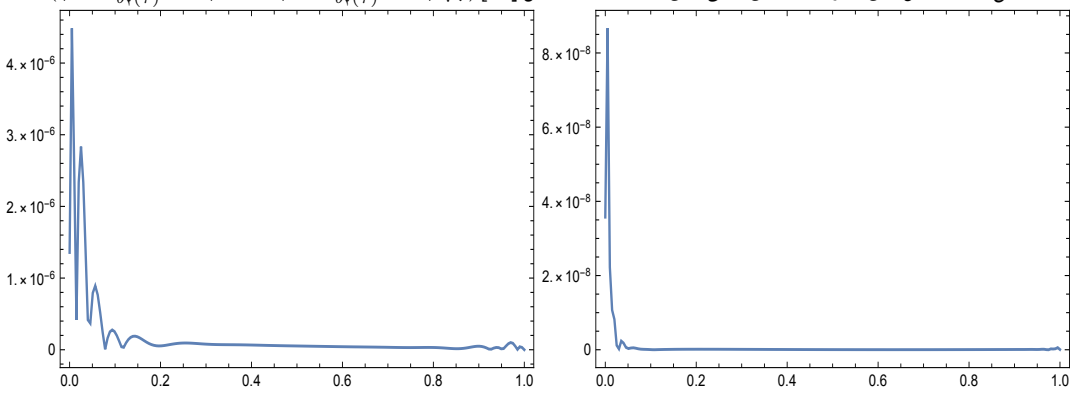
شکل ۳.۴: شکل های مربوط به خطای نسبی برای مثال ۳.۴.۴ با روش [۲۳] (چپ:$\left|\frac{\theta_1(\tau)-\theta_{1,5,21}(\tau)}{\theta_1(\tau)}\right|$؛ راست: $\left|\frac{\theta_1(\tau)-\theta_{1,5,51}(\tau)}{\theta_1(\tau)}\right|$).



شکل ۴.۴: شکل های مربوط به خطای نسبی برای مثال ۳.۴.۴ با روش حاضر (چپ :$\left|\frac{\theta_1(\tau)-\theta_{1,5,21}(\tau)}{\theta_1(\tau)}\right|$؛ راست: $\left|\frac{\theta_1(\tau)-\theta_{1,5,51}(\tau)}{\theta_1(\tau)}\right|$).



شکل ۵.۴: شکل های مربوط به خطای نسبی برای مثال ۳.۴.۴ با روش [۲۳] (چپ:$\left|\frac{\theta_2(\tau)-\theta_{2,5,21}(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right|$؛ راست: $\left|\frac{\theta_2(\tau)-\theta_{2,5,51}(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right|$).



شکل ۶.۴: شکل های مربوط به خطای نسبی برای مثال ۳.۴.۴ با روش حاضر (چپ:$\left|\frac{\theta_2(\tau)-\theta_{2,5,21}(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right|$؛ راست: $\left|\frac{\theta_2(\tau)-\theta_{2,5,51}(\tau)}{\theta_2(\tau)}\right|$).

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱.۰.۵ نتایج

در این رساله، تعمیمی از روش هسته بازتولیدی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی همگن و ناهمگن ارائه شده است. در روش هسته بازتولیدی مولفه هایی همچون فضا، ضرب داخلی، نقاط و پایه ها حائز اهمیت هستند. برای درک بهتر این روش، ابتدا در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه پرداختیم سپس فضای هسته بازتولیدی را به همراه نرم و ضرب داخلی معرفی کردیم . همچنین نشان دادیم که چطور به کمک شرایط مقدار مرزی می توان پایه های متناسب با این فضا را ساخت و در نهایت به تعدادی از قضیه ها و لم های ضروری پرداخته شد.
در فصل دوم، به ایده اصلی که منجر به روش حاضر شد پرداختیم. چون روش حاضر حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی بر مبنای روش هسته بازتولیدی است. بنابراین، نیاز بود ابتدا روش های که در حل معادله دیفرانسیل خطی و غیر خطی بر مبنای روش هسته بازتولیدی کارآمد هستند را معرفی کنیم. خوشبختانه یولان ونگ و همکاران در [۱۸]، سه روش متفاوت را برای حل معادله دیفرانسیل خطی و غیر خطی منفرد ارائه داده اند. در فصل دوم به طور کامل به این سه روش و تفاوت های آنها پرداختیم. همچنین در انتهای فصل با توجه به نتایج عددی مقایسه ای بین این سه روش انجام دادیم. نتایج عددی نشان دادند که روش ۲ از دو روش دیگر کارآمدتر است. حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت، حجم عملیات کمتر در مقایسه با دو روش دیگر، دقت بالا و پیاده سازی آسان، ویژگی های منحصر به فردی بود که ما را بر آن داشت که به این سوال فکر کنیم که آیا می توان تعمیمی از این روش برای حل انواع دستگاه معادلات خطی و غیر خطی ارائه داد یا خیر.
در فصل سوم، به معرفی روش حاضر پرداختیم. به همین منظور دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی را برای حل انتخاب کردیم، که شامل k معادله است و در هر معادله k عملگر روی k مجهول می تواند اعمال شود . بنابراین فضا را نیز متناسب با همین k عملگر و k تا مجهول ساختیم. سپس به معرفی نرم و ضرب داخلی این فضا پرداختیم. در ادامه، متناسب با مثال هایی که در قسمت نتایج عددی حل کردیم پایه ها را معرفی کردیم و به قضیه های اساسی همچون سیستم تابعی کامل بودن، استقلال خطی پایه ها ،معرفی جواب تقریبی، صدق کردن جواب تقریبی در مسئله، وجود و یکتایی جواب و قضیه های مربوط به آنالیز خطا و آنالیز همگرایی متناسب با روش حاضر پرداختیم.
روش معرفی شده در این فصل تعمیمی از روش ۲ برای حل انواع دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی می باشد. چون روش حاضر، تعمیمی از روش ۲ که بر مبنای روش هسته بازتولیدی است، می باشد. بنابراین شامل تمام ویژگی ها ی روش ۲ همچون حجم عملیات کم به دلیل حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت، دقت بالا و پیاده سازی آسان می باشد. علاوه براین، در روش حاضر همانند روش ۲ مولفه هایی همچون، فضا، ضرب داخلی، نقاط و پایه ها حائز اهمیت هستند. به همین منظور در این فصل ریشه های چند جمله ای چبیشف را به عنوان نقاط انتخاب کردیم و در قسمت نتایج عددی به تاثیر این نقاط بر روی روش۲ بحث کردیم. برای نشان دادن کارآیی روش حاضر، مقایسه ای بین این روش و روش [۲۲]، انجام دادیم. نتایج عددی در این فصل نشان می دهد که روش حاضر از روش [۲۲]، کارآمدتراست.
در فصل چهارم، رویکردی جدید و کاملا متفاوت با روش بیان شده در فصل سوم را ارائه دادیم. در این فصل نیز روشی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی با شرایط مقدار مرزی همگن و ناهمگن ارائه شده است. در این فصل سعی کردیم به کمک عملگر خود الحاق و تکنیک های جبر خطی روشی را ارائه دهیم که همچنان ویژگی هایی همچون، حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت، دقت بالا و پیاده سازی آسان را داشته باشد. ایده اصلی روش ارائه شده در این فصل با این سوال شروع شد که آیا می توان از مسیری متفاوت به همان ماتریس ضرایبی رسید که در فصل سوم نیز ارائه شد یا خیر؟ پاسخ به این سوال منجر به رویکردی جدید در این فصل برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی شده است. در این فصل فضا را به صورت جمع مستقیم دو فضای دیگر نوشتیم، البته نکته حائز اهمیت در این روش این است که فضا متناسب با نوع عملگر تغییر میکند. همچنین انتخاب مناسب ضرب داخلی، پایه ها و نقاط

همچنان در این روش نیز مورد توجه هستند. برای نشان دادن کارآیی روش ارائه شده در فصل چهارم مقایسه ای بین این روش و روش [۲۳]، انجام شده است. نتایج عددی در این فصل موثر بودن روش حاضر را اثبات می کند.

۲.۰.۵ پیشنهادات

با توجه به ویژگی های روش حاضر همچون، حجم عملیات کم به دلیل حذف فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت، دقت بالا و پیاده سازی آسان آیا می توان روش حاضر را برای حل انواع دستگاه معادلات شامل، دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی منفرد با شرایط مقدار مرزی غیر محلی، دستگاه معادلات انتگرال خطی و غیر خطی، دستگاه معادلات دیفرانسیل- انتگرال خطی و غیر خطی، دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی در حالت کسری، دستگاه معادلات دیفرانسیل-انتگرال در حالت کسری و دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی و همانند آن بکار برد؟

منابع

[1] M. Chillemi, T. Furtmüller, C. Adam, A. Pirrotta, Nonlinear mechanical model of a fluid inerter. J. Mechanical Systems and Signal Processing, (2023) 109986.

[2] X. Su, H. Kang, T. Guo, Modelling and energy transfer in the coupled nonlinear response of a 1: 1 internally resonant cable system with a tuned mass damper, J. Mechanical Systems and Signal Processing. (2022) 108058.

[3] P. K. Kundu, S. Chatterjee, Nonlinear feedback self-excitation of modal oscillations in a class of under-actuated two degrees-of-freedom mechanical systems. J. International Journal of Non-Linear Mechanics, (2021) 103768.

[4] H. Cheng, Y. Zhang, W. Lu, Z. Yang, Mechanical characteristics and nonlinear dynamic response analysis of rotor-bearing-coupling system. J. App. Math. Model, (2021) 708–727.

[5] D. Lisitano, E. Bonisoli, Direct identification of nonlinear damping: Application to a magnetic damped system. J. Mechanical Systems and Signal Processing, (2021) 107038.

[6] M. Baccouch, H. Temimi, M. Ben-Romdhane, A discontinuous Galerkin method for systems of stochastic differential equations with applications to population biology, finance, and physics, J. Comput. Appl. Math. 388 (2021) 113297.

[7] E. Babolian, J. Biazar, A.R. Vahidi, On the decomposition method for system of linear equations and system of linear Volterra integral equations, Appl. Math. Comput. 147 (2004) 19–27.

[8]] M.I. Berenguer, D. Gámez, A.I. Garralda-Guillem, M. Ruiz Galán, M.C. Serrano Pérez, Biorthogonal systems for solving Volterra integral equation systems of the second kind, J. Comput. Appl. Math. 235 (2011) 1875–1883.

[9] J. Biazar, H. Ghazvini, He's homotopy perturbation method for solving systems of Volterra integral equations of the second kind, Chaos Solitons Fractals. 39 (2009) 770–777.

[10] Z. Chen, Z.j. Chen, The exact solution of system of linear operator equations in reproducing kernel spaces, Appl. Math. Comput. 203 (2008) 56–61.

[11] P. Das, S. Natesan, Optimal error estimate using mesh equidistribution technique for singularly perturbed system of reaction–diffusion boundary-value problems, Appl. Math. Comput. 249 (2014) 265–277.

[12] J. Niu Zhang, Lobatto-reproducing Kernel Method for Solving a Linear System of Second Order Boundary Value Problems. J. Appl. Math. Comput. (2022) 3631–3653.

[13] M.H. Heydari, M.R. Hooshmandasl, F. Mohammadi, C. Cattani, Wavelets method for solving systems of nonlinear singular fractional Volterra integrodifferential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 19 (2014) 37–48.

[14] S. Islam, H. Sirajul, U. Marjan, A meshfree interpolation method for the numerical solution of the coupled nonlinear partial differential equations, Eng. Anal. Bound. Elem. 33 (2009) 399–409.

[15] W. Jiang, Z. Chen, Solving a system of linear Volterra integral equations using the new reproducing kernel method, Appl. Math. Comput. 219 (2013) 10225–10230.

[16] M. Cui, Y. Lin, Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space. Nova Science, Hauppauge, New York, United States, (2009).

[17] Y. Wang, T. Chaolu, P. Jing, New algorithm for second-order boundary value problems of integro-differential equation. J. Comput. Appl. Math. 229 (2009) 1–6.

[18] Y. Wang, T. Chaolu, Z. Chen, Using reproducing kernel for solving a class of singular weakly nonlinear boundary value problems. Int. J. Comput. Math. 87(2010) 367–380.

[19] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Reproducing kernel method for solving singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior in Hilbert space, J. Comput. Appl. Math. 328 (2018) 30-43.

[20] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Computational method based on reproducing kernel for solving singularly perturbed differential-difference equations with a delay, Appl. Math. Comput. 361 (2019) 583-598.

[21] S. Abbasbandy, H. Sahihi, T. Allahviranloo, Combining the Reproducing Kernel Method with a Practical Technique to Solve the Sustem of Nonlinear Singularly Perturbed Boundary Value Problem, Computational Methods for Differential Equations. 10 (2022) 942–953.

[22] H. Sahihi, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, Solving system of second-order BVPs using a new algorithm based on reproducing kernel hilbert space, Appl. Num. Math. 151 (2020) 27–39.

[23] F. Geng, M. Cui, Homotopy perturbation–reproducing kernel method for nonlinear systems of second order boundary value problems. J. Comput. Appl. Math. 235(2011) 2405–2411.

[24] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernel, Trans. Am. Math. Soc. 68 (1950) 337–404.

[25] W. Jiang, Y. Lin, Approximate solution of the fractional advection–dispersion equation. Comput. Phys. Commun. 181 (2010) 557–561.

[26] F. Geng M. Cui, A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. Appl. Math. Lett. 25 (2012) 818–823.

[27] Y. Wang, T. Chaolu, P. Jing., New algorithm for second-order boundary value problems of integro-differential equation. J. Comput. Appl. Math. 229 (2009) 1–6.

[28] T. Allahviranloo, H. Sahihi, Reproducing kernel method to solve fractional delay differential equations. J. Appl. Math. Comput. 400 (2021) .126095

[29] L. Mei, Y. Lin, Simplified reproducing kernel method and convergence order for linear volterra integral equations with variable coefficients. J. Comput. Appl. Math. 346 (2019) 390–398.

[30] M. Cui, F. Geng, A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient burgers equation. Appl. Math. Comput. 188 (2007) 1389–1401.

[31] C.L. Temuer M.J. Du, Y.L. Wang and D. Tian, A modified reproducing kernel method for solving burgers equation arising from diffusive waves in fluid dynamics. Appl. Math. Comput. 315 (2017) 500–506.

[32] F.Z. Geng, M.G. Cui, Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 1167-1181.

[33] V.L. Hansen, Functional Analysis, Entering Hilbert Space. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2006.

[34] E. Babolian, S. Javadi, E. Moradi, Error analysis of reproducing kernel Hilbert space method for solving functional integral equations, Comput. Appl. Math. 300 (2016) 300–311.

[35] J.F. Lu, Variational iteration method for solving a nonlinear system of second-order boundary value problems. J. Comput. Math. Appl. 54. 1133–1138 (2007).

[36] M. Dehghan, A. Saadatmandi, The numerical solution of a nonlinear system of second-order boundary value problems using the sinc-collocation method. J, Math. Comput. Model. 46 (2007) 1434–1441.

واژه نامه

الف

اختلالی . . . . . Perturbation
آنالیز خطا . . . . . Error analysis
انتگرال . . . . . Integral
انتقال گرما . . . . . Heat Transfer
انتگرال جزءبه جزء . . . . . Integration by parts
الحاقی . . . . . Adjoint
الکترو شیمیایی . . . . . Electrochemical

ب

به قدر کافی هموار . . . . . Sufficiently Smooth
بسط . . . . . Expansion
بسته . . . . . Closed
بستار . . . . . Closure
به طور یکنواخت . . . . . Uniformly

پ

پایه . . . . . Basis
پیوسته . . . . . Continuous

ت

تحلیل . . . . . Analysis
ترکیبی . . . . . Mixed
توابع پایه‌ای . . . . . Basis functions
تابع مانده . . . . . Residual function

تابع مجهول . . . . . Unknown function
تلاطم در موج آب . . . . . Reactions Turbulence in Water
تئوری کنترل . . . . . Control Theory
توابع پایه ای شعاعی . . . . . Radial Basis Functions

ث

ج

جواب تقریبی . . . . . Approximate solution
جواب دقیق . . . . . Exact solution
جواب عددی . . . . . Numerical solution

چ

چگال . . . . . Dense
چند جمله ای مشخصه . . . . . Characteristic equation

ح

حل عددی . . . . . Numerical solution
حدس اولیه . . . . . Initial guess
حد . . . . . Limit

خ

خطای مطلق . . . . . Absolute error
خودالحاقی . . . . . Adjoint

د

دستگاه معادلات دیفرانسیل . . . . . System of differential equations
دستگاه معادلات جبری . . . . . System of algebraic equations
دو به دو از هم جدا شده . . . . . Mutually Disjoint
دلتای دیراک . . . . . Dirac delta

ر

روش هسته بازتولیدی . . . . . Differential quadrature method
روش تحلیل هموتوپی . . . . . Homotopy analysis method
روش عددی . . . . . Numerical method
روش اختلالی هم توپی . . . . . Homotopy Perturbation Method

ز

زیر فضای بسته . . . . . Closed Subspaces

ژ

س

سیستم تابعی کامل . . . . . Complete function system

ش

شرایط اولیه . . . . . Initial conditions
شرایط مرزی . . . . . Boundary conditions
شرایط ترکیبی . . . . . Mixed conditions
شرایط غیرمحلی . . . . . Nonlocal conditions
شیمی الکترو تحلیلی . . . . . Electroanalytical Chemistry

ص

ض

ضرب داخلی . . . . . Inner product
ضریب ثابت . . . . . Constant coefficient

ع

عملگر . . . . . Operator
عملگر تابعی . . . . . Functional operator
عملگر پیوسته . . . . . Continuous operator

غ

غیرخطی . . . . . Nonlinear
غیرمحلی . . . . . Nonlocal

ف

فضای نرم‌دار . . . . . Normed space
فضای هیلبرت . . . . . Hilbert space
فضای متریک . . . . . Metric space
فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت . . . . . Gram-Schmidt Orthogonalization Process
فضای هسته بازتولیدی . . . . . Reproducing Kernel Space

ق

قطعه به قطعه پیوسته . . . . . Piecewise continuous
شمارا . . . . . Countable

ک

کنترل بهین . . . . . Optimal Control
کاملاً پیوسته . . . . . Completely continuous
کراندار . . . . . Bounded

گ

گسسته . . . . . Discrete

م

مسئله کسری . . . . . Fractional problem
مسئله غیرمحلی کسری . . . . . Fractional nonlocal problem
منفرد . . . . . Singular
مفاهیم اساسی . . . . . Fundamental concepts
معادله دیفرانسیل معمولی . . . . . Ordinary differential equation
مرتبه . . . . . Order

مسئله مقدار مرزی . . . . . Boundary value problem
مزدوج . . . . . Conjugate
معادله دیفرانسیل جزئی . . . . . Partial differential equation
معکوس پذیر . . . . . Invertible
مطلقا پیوسته . . . . . Absolutely continuous
معادلات شکار و شکارچی . . . . . Equations of Predator-Prey
متقارن مزدوج . . . . . Conjugate Symmetric
مجموعه مجرد . . . . . Abstract set

ن

نیمه تحلیلی . . . . . Semi-analytical
نرم بی‌نهایت . . . . . Infinity-norm
نقاط چبیشف انتقال یافته . . . . . Shifted Chebyshev points

و

واکنش - انتشار . . . . . Reaction-Diffusion

ه

همگرایی . . . . . Convergence
هم‌محلی . . . . . Collocation
هسته بازتولیدی . . . . . Reproducing kernel
هسته معین مثبت . . . . . Positive definite kernel
هموتوپی . . . . . Homotopy
همگن‌سازی . . . . . Homogenization
هم‌پیوسته . . . . . Equicontinuous
هم محلی چبیشف . . . . . Chebyshev Spectral Collocation

ی

یکتا . . . . . Unique

مقاله مستخرج از رساله

[1] Taher Amoozad, Tofigh Allahviranloo, Saeid Abbasbandy, Mohsen Rostamy Malkhalifeh, Using a new implementation of reproducing kernel Hilbert space method to solve a system of second-order BVPs, International Journal of Dynamics and Control. Published: 10 November 2023.

[2] Taher Amoozad, Tofigh Allahviranloo, Saeid Abbasbandy, Mohsen Rostamy Malkhalifeh, A new approach for Solving a nonlinear system of second-order BVPs, Journal of Mathematical Modelling and Analysis. In press.

[3] Taher Amoozad, Tofigh Allahviranloo, Saeid Abbasbandy, Mohsen Rostamy Malkhalifeh, Application of the Reproducing Kernel Method for Solving Linear Volterra Integral Equations with Variable Coefficients , Journal of Physica Scripta. 15 January 2024.

[4] Taher Amoozad, Saeid Abbasbandy, Hussein Sahihi, Tofigh Allahviranloo, A new application of the reproducing kernel method for solving linear systems of fractional order Volterra integro-differential equations, Journal of Physica Scripta. 5 June .2024

Abstract

In this thesis, we present a generalized version of the Reproducing Kernel Method (RKM) for solving linear and non-linear differential equations with boundary value conditions, without the use of the Gram-Schmidt process. The RKM relies on various components, such as points, space, inner product, bases, and an appropriate method for achieving accurate solutions. Our proposed method in this thesis boasts features such as easy implementation, elimination of the Gram-Schmidt process, low computational complexity, and high accuracy. As many phenomena in physics, chemistry, biology, and industry can be modeled using linear and non-linear differential equations, there has been a growing interest in developing numerical methods for solving these types of problems. In the following sections, we first state the problem and introduce the RKM, then present the generalized method that leads to our proposed approach, and finally discuss two different implementation approaches along with convergence theorems and error analysis.

Keywords: *System of linear and non-linear differential equations, Reproducing kernel method, Error estimation, Convergence analysis.*

Islamic Azad University

Science and Research Branch

Department of Mathematics

Ph.D Thesis for degree of Applied Mathematics and Numerical Analysis

Subject:

Reproducing kernel Method to Solve System of Singular Differential Equations with Nonlocal Conditions

Supervisor:

T. Allahviranloo Ph.D.

S. Abbasbandy Ph.D.

Advisor:

M. Rostamy Malkhalifeh Ph.D.

By:

Taher Amoozad

2024