

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرج

تعهذنامه اصالت رساله یا پایان نامه

اینجانب دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد نایب‌رسته/دکترای حرفه ای / دکتری تخصصی / در رشته که در تاریخ از پایان نامه / رساله خود تحت عنوان " " با کسب نمره و درجه دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

۱) این پایان نامه / رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

۲) این پایان نامه / رساله قبلاً " برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پائین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

.....

تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد کرج

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری ریاضی (Ph. D)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری به کمک توابع از مرتبه کسری

استادان راهنما:

دکتر سعید عباسبندی

دکتر الیاس شیوانیان

استاد مشاور:

دکتر حسام الدین دریلی

نگارش:

سعیده رضابیک

شهریور سال ۱۳۹۹

سپاسگزاری

سپاس از آن خدایی است که آدمی را زیور عقل آراست و نعمت های سلامتی، صبر و آرامش را در اختیار او قرار داد.

در ابتدا وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استادان فرهیخته و بزرگوار، جناب آقای دکتر سعید عباسبندی و دکتر الیاس شیوانیان که راهنمایی این رساله را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که اگر راهنمایی های ارزنده این دو عزیز نبود این کار به سرانجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر حسام الدین دریلی که زحمت مشاوره این پایان نامه را متحمل شدند، کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

هم چنین از داوران محترم آقایان دکتر ، دکتر و سرکار خانم دکتر که در تصحیح این پایان نامه اینجانب را یاری نمودند، کمال امتنان را دارم.

تقديم به

فهرست مطالب

13	چکیده
16	فصل 1
17	1 مقدمه و کلیات
17	1-1 تولد حساب کسری
19	1-2 کاربردهای مشتق و انتگرال کسری
19	1-3 روش های عددی
20	1-4 بیان مساله
20	1-5 تعاریف مقدماتی
20	1-5-1 تابع گاما
21	1-5-2 تابع بتا
22	1-5-3 تابع میتاگ-لفلر
24	1-5-4 تابع راییت
24	1-5-5 مشتق و انتگرال کسری
24	1-5-6 مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لنتیکوف
30	7-5-1 انتگرال کسری ریمن-لیوویل
37	1-5-8 مشتق کسری کاپوچو
37	1-5-9 روابط بین تعاریف مشتق و انتگرال های کسری
Error! Bookmark not defined.	10-5-1 انتگرال کسری دو بعدی
39	1-5-11 معادلات انتگرال کسری
43	فصل 2
Error! Bookmark not defined.	2 تعاریف مقدماتی
44	2-1 مقدمه
14	2-1-1 چند جمله ای های برنشتاین
Error! Bookmark not defined.	2-1-2 چند جمله ای های برنشتاین یک متغیره
Error! Bookmark not defined.	2-1-3 چند جمله ای های برنشتاین دو متغیره

Error! Bookmark not defined.	توابع بلاک پالس	2-1-4
Error! Bookmark not defined.	مقدمه	2-2
Error! Bookmark not defined.	ماتریس عملیاتی مشتق کسری	2-2-1
Error! Bookmark not defined.	تقریب تابع	2-2-2
Error! Bookmark not defined.	روش عددی	2-2-3
Error! Bookmark not defined.	آنالیز همگرایی	2-2-4
Error! Bookmark not defined.	نتایج عددی	2-2-5
Error! Bookmark not defined.	فصل 3	
Error! Bookmark not defined.	3 حل عددی معادله انتگرال کسری دو بعدی خطی	
Error! Bookmark not defined.	3-1 ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چند جمله ای برنشتاین یک متغیره	
Error! Bookmark not defined.	2-3 ماتریس عملیاتی انتگرال کسری چند جمله ای برنشتاین دو متغیره	
Error! Bookmark not defined.	3-3 ماتریس عملیاتی ضرب	
Error! Bookmark not defined.	3-4 روش عددی برای حل معادله انتگرال	
Error! Bookmark not defined.	3-5 آنالیز خطا	
Error! Bookmark not defined.	3-6 نتایج عددی	
Error! Bookmark not defined.	فصل 4	
Error! Bookmark not defined.	4 حل عددی معادله انتگرال کسری دو بعدی غیرخطی	
Error! Bookmark not defined.	4-1 ماتریس عملیاتی بلاک پالس یک بعدی	
Error! Bookmark not defined.	4-2 ماتریس عملیاتی برنشتاین یک بعدی	
Error! Bookmark not defined.	4-3 ماتریس عملیاتی برنشتاین دو بعدی	
Error! Bookmark not defined.	4-4 روش عددی برای حل معادله انتگرال	
Error! Bookmark not defined.	4-5 آنالیز خطا	
Error! Bookmark not defined.	4-6 نتایج عددی	
114	5 نتایج و پیشنهادات	

فهرست جدول ها

Error! Bookmark not defined.	جدول 1-2: ماکزیمم خطای مطلق مثال 1-5-2-2 با $a = 10, b = 5$
Error! Bookmark not defined.	جدول 2-2: ماکزیمم خطای مطلق مثال 1-5-2-2 با $a = 20, b = 10$
Error! Bookmark not defined.	جدول 3-2: ماکزیمم خطای مطلق مثال 2-5-2-2
Error! Bookmark not defined.	جدول 2-4: ماکزیمم خطای مطلق مثال 3-5-2-2 با روش $(QLMW)$
Error! Bookmark not defined.	جدول 5-2: ماکزیمم خطای مطلق مثال 3-5-2-2 با $\alpha = 1$
Error! Bookmark not defined.	جدول 6-2: ماکزیمم خطای مطلق مثال 3-5-2-2 با $\alpha = 0.925$
Error! Bookmark not defined.	جدول 1-3: ماکزیمم خطای مطلق مثال 1-6-3
Error! Bookmark not defined.	جدول 2-3: ماکزیمم خطای مطلق مثال 2-6-3 با $m = n = 2$
Error! Bookmark not defined.	جدول 3-3: ماکزیمم خطای مطلق مثال 2-6-3 با $m = n = 3$
Error! Bookmark not defined.	جدول 4-3: ماکزیمم خطای مطلق مثال 3-6-3
Error! Bookmark not defined.	جدول 1-4: ماکزیمم خطای مطلق مثال 1-6-4
Error! Bookmark not defined.	جدول 2-4: ماکزیمم خطای مطلق مثال 2-6-4
Error! Bookmark not defined.	جدول 3-4: ماکزیمم خطای مطلق مثال 3-6-4
Error! Bookmark not defined.	جدول 4-4: ماکزیمم خطای مطلق مثال 4-6-4

فهرست شکل ها

- شکل 1-2: جواب دقیق مثال 1-5-2-2
Error! Bookmark not defined.
- شکل 2-2: جواب تقریبی مثال 1-5-2-2
Error! Bookmark not defined.
- شکل 3-2: جواب تقریبی مثال 1-5-2-2
Error! Bookmark not defined.
- شکل 4-2: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق مثال 1-5-2-2 در $t = 0.5$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 5-2: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق مثال 1-5-2-2 در $t = 0.5$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 6-2: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق مثال 1-5-2-2 در $t = 0.75$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 7-2: تابع خطا به ازای $t = 0.5$ برای $x \in [0,1]$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 8-2: جواب دقیق مثال 2-5-2-2
Error! Bookmark not defined.
- شکل 9-2: جواب تقریبی مثال 2-5-2-2 با $m = 4$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 10-2: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق مثال 2-5-2-2 در $t = 0.5$ با $\alpha = 0.975$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 11-2: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق مثال 2-5-2-2 در $t = 0.5$ با $\alpha = 0.975$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 12-2: تابع خطا مثال 2-5-2-2 به ازای $t = 0.75$ برای $x \in [0,1]$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 13-2: جواب دقیق مثال 3-5-2-2
Error! Bookmark not defined.
- شکل 14-2: جواب تقریبی مثال 3-5-2-2 با $m = 2$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 1-3: جواب دقیق مثال 1-6-3
Error! Bookmark not defined.
- شکل 2-3: جواب تقریبی مثال 1-6-3 با $m = n = 4$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 3-3: مقایسه جواب تقریبی و دقیق مثال 1-6-3 در $x = 0.5$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 4-3: مقایسه جواب تقریبی و دقیق مثال 1-6-3 در $y = 0.5$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 5-3: تابع خطا در مثال 1-6-3 به ازای $x = 0.5$
Error! Bookmark not defined.
- شکل 6-3: جواب دقیق مثال 2-6-3
Error! Bookmark not defined.

Error! Bookmark not defined.

شکل 3-7: جواب تقریبی مثال 3-6-2 با $\alpha = \beta = 0.95$

Error! Bookmark not defined.

شکل 3-8: جواب تقریبی مثال 3-6-2 با $\alpha = \beta = 0.8$

Error! Bookmark not defined.

شکل 3-9: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق در $x = 0.75$

Error! Bookmark not defined.

شکل 3-10: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق در $y = 0.5$

Error! Bookmark not defined.

شکل 3-11: مقایسه جواب های تقریبی و دقیق در $y = 0.5$

Error! Bookmark not defined.

شکل 3-12: تابع خطا مثال 3-6-2 به ازای $y = 0.5$

Error! Bookmark not defined.

شکل 3-13: تابع خطا مثال 3-6-2 به ازای $x = 0.75$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-1: جواب تقریبی مثال 4-6-1 با $m = n = 3$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-2: جواب دقیق مثال 4-6-1

Error! Bookmark not defined. شکل 4-3: مقایسه جواب دقیق و جواب های تقریبی مثال 4-6-1 در $x = 0.5$

Error! Bookmark not defined. شکل 4-4: مقایسه جواب دقیق و جواب های تقریبی مثال 4-6-1 در $y = 0.5$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-5: جواب تقریبی مثال 4-6-2 با $m = n = 4$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-6: جواب دقیق مثال 4-6-2

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-7: جواب دقیق مثال 4-6-3

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-8: جواب تقریبی مثال 4-6-3 با $m = n = 4$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-9: مقایسه جواب تقریبی و دقیق مثال 4-6-3 در $x = 0.5$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-10: مقایسه جواب تقریبی و دقیق مثال 4-6-3 در $y = 0.75$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-11: جواب دقیق مثال 4-6-4

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-12: جواب تقریبی مثال 4-6-4 با $m = n = 3$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-13: مقایسه جواب تقریبی و دقیق مثال 4-6-4 در $x = 0.7$

Error! Bookmark not defined.

شکل 4-14: مقایسه جواب تقریبی و دقیق مثال 4-6-4 در $y = 0.6$

چکیده

هدف اصلی این رساله، حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل تاخیری کسری با هسته منفرد ضعیف همراه با شرایط اولیه بر اساس ماتریس های عملیاتی چند جمله ای های اویلر از مرتبه کسری و چبیشف نوع اول انتقال یافته می باشد. برای این منظور، ابتدا ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری این دو چندجمله ای و نیز توابع تاخیری را به دست می آوریم. سپس با تقریب مشتق کسری جواب مسئله به کمک سری جواب از این دو چندجمله ای و نیز با بکارگیری ماتریس عملیاتی انتگرال کسری، شکل ماتریسی جواب تقریبی مسئله مورد نظر را بدست می آوریم. با بکارگیری شکل ماتریسی تمام جملات معلوم مسئله و نیز با اعمال ماتریسهای عملیاتی بدست آمده، مسئله مورد نظر را به یک دستگاه معادلات خطی یا غیر خطی جبری تبدیل می کنیم. با حل دستگاه به دست آمده، جواب تقریبی معادلات انتگرال دیفرانسیل تاخیری کسری با هسته منفرد ضعیف با شرایط اولیه به شکل سری جواب از چندجمله ای ها به دست می آید. آنالیز خطای روش های پیشنهاد شده را بررسی کرده و در آخر چند مثال عددی جهت نشان دادن کارایی روشهای پیشنهاد شده ارائه کرده و نتایج حاصل را با روش های دیگر مقایسه می کنیم.

کلمات کلیدی: انتگرال با هسته ضعیف، انتگرال کسری، چند جمله ای های اویلر، چند جمله ای های چبیشف انتقال یافته، ماتریس عملیاتی انتگرال و دیفرانسیل کسری، ماتریس عملیاتی ضرب، ماتریس عملیاتی تابع تاخیری، آنالیز خطا.

مقدمه

معادلات انتگرال دیفرانسل از مرتبه کسری در مدل بندی بسیاری از علوم همانند فیزیک، شیمی، بیولوژی، مهندسی و علوم ریاضی ظاهر می شوند. با توجه به کاربرد وسیع این دسته از معادلات، حل این معادلات مورد توجه بسیاری از محققین بوده و هست و بر این اساس، اخیراً محققین زیادی سعی در توسعه روشهای عددی برای حل این معادلات داشتند و روشهایی مبتنی بر توابع متعامد، چندجمله ای ها، توابع از مرتبه کسری و موجکها برای حل این معادلات را پیشنهاد کردند. برای جزئیات بیشتر می توان به مقالات [] رجوع کرد.

هدف اصلی این رساله، حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل تاخیری کسری با هسته منفرد ضعیف همراه با شرایط اولیه می باشد. برای این منظور از توابع اویلر از مرتبه کسری و نیز چندجمله ای های چیشف نوع اول انتقال یافته استفاده شده است. این رساله در شش فصل تهیه و تنظیم شده است. فصل اول به معرفی حساب کسری اختصاص دارد. در این فصل، ابتدا مروری بر تاریخچه حساب کسری کرده سپس انواع مختلفی از مشتقات و انتگرال های کسری را آورده ایم. سعی شده است که مفاهیم و مطالبی که در فصل های بعدی مورد نیاز هست در این فصل مرور شود. در فصل دوم چندجمله ای های اویلر و نیز خواص این چندجمله ای ها آورده ایم. تقریب توابع یک متغیره و نیز دو متغیره به کمک این چندجمله ایها در این فصل مرور شده است. شکل ماتریسی این چندجمله ای ها و نیز شکل ماتریسی توابع دارای تاخیر به کمک این چند جمله ای ها در این فصل آورده شده است. در آخر فصل ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل و ضرب ارائه شده است. در فصل سوم ابتدا توابع اویلر از مرتبه کسری یک متغیره و دو متغیره معرفی شده سپس ویژگی این توابع بررسی و ارائه شده است. در ادامه تقریب توابع یک متغیره و نیز دو متغیره به کمک این توابع ارائه شده و در ادامه شکل ماتریسی این توابع و نیز شکل ماتریسی توابع دارای تاخیر به کمک این توابع آورده شده است. ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل و ضرب این توابع در آخر فصل محاسبه شده است. در فصل چهارم ابتدا چندجمله ای های چیشف نوع اول انتقال یافته و نیز خواص این چندجمله ای ها را مرور کرده و سپس تقریب توابع یک متغیره و دو متغیره را به کمک این چندجمله ای ها ارائه می کنیم. در ادامه ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب این چند جمله ای ها را محاسبه و ارائه می کنیم. فصل پنجم به ارائه یک روش عددی مبتنی بر ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب توابع اویلر از مرتبه کسری برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری با هسته ضعیف اختصاص دارد. در این فصل آنالیز

خطای روش را اثبات شده و در آخر فصل چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی ارائه می شود. در فصل ششم ابتدا با بکارگیری ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته، یک روش عددی برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری با هسته ضعیف پیشنهاد کرده و روش را با جزئیات کامل ارائه می دهیم. در ادامه آنالیز خطای روش را اثبات کرده و در آخر فصل چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی ارائه می دهیم.

بخش هایی از فصل های ۳ و ۴ و نیز تمامی فصل های ۵ و ۶ این رساله مباحث اصیل رساله بوده و از این مباحث مقالات زیر استخراج شده است:

- 1- S. Rezabeyk, S. Abbasbandy, E. Shivanian, Solving fractional-order delay integro-differential equations using operational matrix based on fractional-order Euler polynomials, Mathematical Sciences, 2020, <https://doi.org/10.1007/s40096-020-00320-1>
- 2- S. Rezabeyk, S. Abbasbandy, E. Shivanian, H. Dereli, New approach to solve weakly singular fractional order delay integro-differential equations using operational matrices, Under Review.

فصل 1

کلیات و حساب کسری

1 مقدمه و کلیات

1-1 تولد حساب کسری¹

حساب کسری در واقع تعمیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه صحیح به مرتبه ی دلخواه است. در تولد حساب کسری، ایده اصلی به نماد مشتق لایبنیتز² یعنی $\frac{d^p y}{dx^p}$ زمانی که p صحیح نباشد، برمی گردد. لایبنیتز در نامه هایی به هوپیتال³ (1962) در سال 1695 و والس⁴ (1853) در سال 1697 به بعضی نکات در مورد امکان وجود مشتق برای $p = \frac{1}{2}$ اشاره کرد. در این خصوص، اولین گام را اوایلر⁵ (1738) در سال 1734 با تاکید بر ارزیابی مشتق $\frac{d^p y}{dx^p}$ برای توابع توانی به فرم x^a برداشت. سپس لاپلاس⁶ (1812) ایده مشتق غیر صحیح را برای توابع، توسط انتگرال $\int T(t)t^{-x}dt$ مطرح کرد. پس از آن لاکرویس⁷ (1820) فرمول دقیقی را برای مشتق $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}}$ به صورت زیر ارائه داد:

$$y = x^m, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n,$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n},$$

با انتخاب $m = 1$ و $n = \frac{1}{2}$ به فرمول دقیق مشتق در این حالت رسید:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}.$$

گام بعدی توسط فوریه⁸ (1822) با ارائه انتگرال زیر به عنوان تعریف مشتق مرتبه غیر صحیح برداشته شد:

¹ Fractional calculus

² Leibniz

³ L' Hopital

⁴ Wallis

⁵ Euler

⁶ Laplace

⁷ Lacroix

⁸ Fourier

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^p d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos\left(\lambda x - t\lambda + \frac{p\pi}{2}\right) dt.$$

این اولین تعریف برای مشتق مرتبه غیر صحیح بود که لزوماً روی توابع توانی تأکید نداشت. در ادامه الگویی توسط آبل^۹ (1826) به صورت معادله انتگرال

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^\mu} = f(x), \quad x > a, \quad 0 < \mu < 1,$$

بیان شد که البته بیشتر تأکید او برای $\mu = \frac{1}{2}$ بود و خود در این حالت معادله را حل نمود. در سال های 1832 تا 1837 لیوویل^{۱۰} مقالات فراوانی ارائه داد که در آن ها ایده های مهمی مطرح شده بود اما در آن زمان چنین ایده هایی دور از دسترس به نظر می رسید. اولین پیشنهاد او برای مشتق کسری تابع نمایی به فرم $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$ به صورت زیر تعریف شد:

$$D^p f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^p e^{a_k x}, \quad \forall p.$$

ریمان^{۱۱} (1847) در تأکید اهمیت کارهای لیوویل مقاله ای ارائه داد که در آن تعریف

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad x > 0,$$

را برای انتگرال کسری بیان کرده بود. هر چند این مقاله در سال 1876 منتشر شد، اما این همان تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل می باشد.

اولین کنفرانس حساب کسری در سال 1974 در نیوهاون آمریکا با عنوان "حساب کسری و کاربردها"^{۱۲} و دومین کنفرانس در سال 1984 در بریتانیا با عنوان "حساب کسری"^{۱۳} برگزار شد.

⁹ Abel

¹⁰ Liouville

¹¹ Riemann

¹² Fractional calculus and applications

¹³ Fractional calculus

۱-۱-۱ کاربردهای مشتق و انتگرال کسری

از آن جایی که بعضی از مسائل واقعی در زمینه های فیزیک، مکانیک، شیمی و بیولوژی را به راحتی نمی توان توسط مدل های کلاسیک تشریح کرد و عموماً این مسائل به صورت معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و یا معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری فرموله می شوند، حساب کسری مورد توجه قرار گرفته است. به عنوان مثال می توان به مفهوم مشتق اشاره کرد. این تعریف زمانی که تابع پیوسته باشد به راحتی قابل محاسبه و بیان است اما اگر تابع گسسته باشد، مفهوم میل کردن نمو تابع به صفر عملاً به مشکل برخورد می کند.

از نقطه نظر کاربردی، تنها کتابی که اختصاصاً به کاربردهای حساب کسری اشاره دارد توسط اولدهام و اسپانیر^{۱۴} (1974) نوشته شد. این کتاب با تاکید بر ارزیابی مشتق و انتگرال کسری از توابع واقعی^{۱۵}، به ارائه سیستماتیک ایده ها و کاربردهای حساب کسری از جمله کاربردهای شیمی و مسائل انتشار^{۱۶} اشاره می کند در حالی که در کتاب های دیگر فقط یک بخش یا یک فصل از کتاب به کاربردها اختصاص می یابد.

امروزه کاربردهای فراوانی توسط محققین در مسائل علمی و مهندسی مانند مهندسی زیستی^{۱۷} [1]، مسائل اقتصادی^{۱۸} (بایلی، 1996)، زلزله^{۱۹} [3]، مسائل بهینه سازی^{۲۰} [2]، مکانیک جامدات [5]، پردازش سیگنال [4] و ... برای حساب کسری مطرح شده و مورد توجه قرار گرفته است.

۱-۱-۲ روش های عددی

در سال های اخیر استفاده از مشتق و انتگرال کسری در مدل سازی پدیده های طبیعی رو به افزایش است. این مدل سازی به معادلات انتگرال، انتگرال دیفرانسیل یا معادلات دیفرانسیل کسری منجر می شود که با توجه به پیچیدگی معادلات حاصل، یا جواب های تحلیلی کامل و جامع برای آن ها وجود ندارد و یا در موارد اندک تعیین این جوابها دارای پیچیدگی زیادی می باشند. از این رو روش های عددی بسیاری برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری ارائه شده است.

¹⁴ Oldham and Spanier

¹⁵ Concrete functions

¹⁶ Diffusion problems

¹⁷ bioengineering

¹⁸ economic

¹⁹ earthquakes

²⁰ Optimal control problems

۳-۱-۱ بیان مساله

اخیرا درمباحث مربوط به حساب کسری، معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری با هسته ضعیف مورد توجه محققین بوده است. در این پایان نامه، هدف ما ارائه روشهای عددی برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری با هسته ضعیف خواهد بود. لازم هست اشاره کنیم که معادلات مورد بررسی در این رساله می تواند در دسته معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترا از نوع پانتوگراف، معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری منفرد و معادلات دیفرانسیل کسری تاخیری قرار گیرد. معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری منفرد در مدل بندی ریاضی پدیده های مختلف مثل مسائل مربوط به انتقال حرارت، تعادل تابشی، کشش و مکانیک شکستگی ظاهر می شوند. معادلات پانتوگراف در زمینه های مختلف علوم نظیر اختریفیک، اقتصاد، کنترل، زیست شناسی و الکترو دینامیک نقش مهمی ایفا می کنند. همچنین کاربردهای معادلات دیفرانسیل تاخیری را می توان در سیستمهای مختلف فنی از جمله کنترل اتوماتیک، زیست شناسی و شبکه های هیدرولیکی، خطوط انتقال طولانی، اقتصاد و زیست شناسی مشاهده کرد. بنابراین بررسی و حل این گونه معادلات حائز اهمیت زیادی است.

۲-۱ تعاریف مقدماتی

در این بخش ابتدا بعضی از توابع مهم را که در بحث مشتق و انتگرال کسری نقش اساسی دارند معرفی می کنیم. سپس انواع مشتقات و انتگرال های کسری و روابط بین آن ها را مورد بررسی قرار می دهیم و در پایان انواع مختلف معادلات انتگرال کسری را بیان می کنیم.

۲-۱-۱ تابع گاما^{۲۱}

یکی از مهمترین توابعی که نقش اساسی در معرفی حساب کسری دارند، تابع گاما می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1-1)$$

²¹ Gamma function

اگر $Rel(z) > 0$ ، انتگرال فوق به طور مطلق همگرا است.

مهمترین ویژگی تابع گاما که در حساب کسری کاربرد دارد، عبارت است از:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z).$$

واضح است که اگر $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه $\Gamma(n+1) = n!$

تابع گاما را به صورت های دیگر نیز تعریف می کنند. تعریف حدی تابع گاما عبارت است از:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}, \quad Rel(z) > 0.$$

تعریف حاصلضربی تابع گاما که به تعریف اویلر معروف است به صورت زیر بیان می شود:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z.$$

تعریف دیگری به فرم حاصلضرب به تعریف وایراشتراس^{۲۲} معروف است که عبارت است از:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z+1) \cdots (z+n)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

که در آن $\gamma = 0.5772$ ، ثابت اویلر-ماسکرونی^{۲۳} می باشد.

۲-۲-۱ تابع بتا^{۲۴}

یکی دیگر از توابع مورد استفاده در حساب کسری، تابع بتا است. این تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad Rel(z) > 0, \quad Rel(w) > 0, \quad (2-1)$$

به کمک تبدیل لاپلاس ارتباط بین تابع گاما و تابع بتا را به دست می آوریم. برای این منظور با استفاده از

²² Weierstrass

²³ Euler-mascheroni

²⁴ Beta function

مفهوم پیچش^{۲۵} توابع، تابع بتا را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$h_{z,w}(t) = \int_0^t \tau^{z-1} (1-\tau)^{w-1} d\tau = t^{z-1} * t^{w-1} = f_1(t) * f_2(t),$$

که در آن * نماد پیچش یا کانوولوشن می باشد. اگر از طرفین رابطه فوق تبدیل لاپلاس بگیریم، خواهیم داشت:

$$L\{h_{z,w}(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{(z-1)!}{s^z} \frac{(w-1)!}{s^w} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{s^{z+w}},$$

حال تبدیل لاپلاس معکوس می گیریم. بنابراین داریم:

$$h_{z,w}(t) = \Gamma(z)\Gamma(w) L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{z+w}}\right\} = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} t^{z+w-1},$$

در $t = 1$ ، رابطه مهم بین تابع گاما و تابع بتا را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (3-1)$$

با استفاده از مطالب فوق، می توان نشان داد که:

$$1. \Gamma(z)\Gamma(1-z) = B(z, 1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

$$2. \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} 2^{1-2z} \Gamma(2z),$$

$$3. \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}(2n!)}{n! 2^{2n}},$$

$$4. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

۳-۲-۱ تابع میتاگ-لفلر^{۲۶}

تابع میتاگ-لفلر را می توان تعمیمی از تابع نمایی دانست که توسط ریاضی دان سوئدی به نام میتاگ-لفلر (1903) معرفی شد. تابع میتاگ-لفلر با یک پارامتر به صورت زیر تعریف می شود:

²⁵ convolution

²⁶ Mittag-Leffler function

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

سپس این تابع توسط وایمن (1905) مورد مطالعه قرار گرفت اما تعمیم تابع آن توسط آگاروال ارائه شد که به تابع میتاگ-لفلر با دو پارامتر معروف است. تابع میتاگ-لفلر با دو پارامتر عبارت است از:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

اگر $\beta = 1$ ، آنگاه رابطه بین تابع میتاگ-لفلر یک پارامتری و دو پارامتری را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z).$$

در حالت خاص برای تابع میتاگ-لفلر با دو پارامتر داریم:

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{1}{z}(e^z - 1),$$

و در حالت کلی

$$E_{1,m}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+m-1)!} = \frac{1}{z^{m-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right).$$

همچنین توابع سینوس هیپربولیک و کسینوس هیپربولیک را می توان بر حسب تابع میتاگ-لفلر به صورت زیر بیان کرد:

$$E_{2,1}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z),$$

$$E_{2,2}(z^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{\sinh(z)}{z}.$$

۴-۲-۱ تابع راییت^{۲۷}

تابع راییت نقش مهمی در حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری از جمله معادله دیفرانسیل انتشار موج کسری دارد. این تابع اولین بار توسط راییت (1933) مطرح شد. تابع راییت به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(z; \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

تابع نمایی e^z حالت خاص تابع راییت به ازای $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ می باشد. به بیان دیگر داریم:

$$W(z; 0, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

تبدیل لاپلاس تابع راییت، رابطه بین تابع راییت و تابع میتاگ-لفلر را به صورت زیر بیان می کند:

$$L\{W(z; \alpha, \beta)\} = L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(\alpha k + \beta)}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{1}{s^{k+1}} = \frac{1}{s} E_{\alpha, \beta}\left(\frac{1}{s}\right).$$

۳-۱ مشتق و انتگرال کسری

همانطور که قبلاً اشاره شد، تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال کسری ارائه شده است اما سه نوع از آن ها مورد توجه قرار گرفته اند که عبارتند از: مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف^{۲۸}، ریمان-لیوویل^{۲۹} و کاپوتو^{۳۰}.

۱-۳-۱ مشتق و انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف

این نوع مشتق و انتگرال در سال 1867 توسط گرانوالد و لتنیکوف مطرح شد. تعریف مشتق گرانوالد-لتنیکوف بر اساس تعریف مشتق برای تابع مشتق پذیر $f(t)$ می باشد. بدین ترتیب که

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h},$$

²⁷ Wright function

²⁸ Grunwald-Letnikov

²⁹ Riemann-Liouville

³⁰ Caputo

$$f''(t) = \frac{df'}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)),$$

اگر مشتق n ام تابع $f(x)$ وجود داشته باشد، خواهیم داشت:

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} f(t-rh). \quad (4-1)$$

اگر تعریف را برای هر p در نظر بگیریم:

$$f_h^{(p)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh), \quad (5-1)$$

آنگاه برای $0 \leq p \leq n$ داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_h^{(p)}(t) = f^{(n)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p}. \quad (6-1)$$

بدین ترتیب می توان مشتق کسری را به صورت زیر تعریف کرد:

تعریف ۱-۳-۲: مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف تابع $f(t)$ از مرتبه $p \in \mathbb{R}^+$ روی بازه $[a, t]$ عبارت است از:

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t-rh). \quad (7-1)$$

برای دستیابی به انتگرال کسری، با استفاده از تعریف مشتق فوق بسط دو جمله ای ضریب را به صورت زیر می نویسیم:

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{r! (p-r)!} = \frac{p(p-1) \cdots (p-r+1)}{r!}, \quad (8-1)$$

اگر $p < 0$ آنگاه $-p > 0$ که با جایگذاری در رابطه 8-1 خواهیم داشت:

$$\binom{-p}{r} = \frac{-p(-p-1) \cdots (-p-r+1)}{r!} = (-1)^r \frac{p(p+1) \cdots (p+r-1)}{r!}, \quad (9-1)$$

با تعریف $\left[\begin{smallmatrix} p \\ r \end{smallmatrix} \right] = \frac{p(p+1)(p+2) \cdots (p+r-1)}{r!}$ و جایگذاری در رابطه 5-1 داریم:

$$f_h^{(-p)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh), \quad p > 0 \quad (10-1)$$

اگر $p = 1$ آنگاه

$$\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (1 + r - 1)}{r!} = 1,$$

بنابراین

$$f_h^{(-1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{r=0}^n f(t - rh), \quad (11-1)$$

با تعریف $h = \frac{t-a}{n}$, اگر $h \rightarrow 0$ آنگاه $n \rightarrow \infty$. بنابراین حد موجود در رابطه 11-1 بیانگر تعریف انتگرال می باشد. در نتیجه داریم:

$$f_h^{(-1)}(t) = \int_0^{t-a} f(t - z) dz, \quad (12-1)$$

برای $p = 2$,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} = \frac{2 \times 3 \times \cdots \times (2 + r - 1)}{r!} = \frac{(r + 1)!}{r!} = 1 + r,$$

در رابطه 10-1 خواهیم داشت:

$$f_h^{(-2)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 2 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{r=0}^n h(r + 1) f(t - rh), \quad (13-1)$$

با تغییر متغیر $y = t + h$ و فرض $k = r + 1$ در رابطه 13-1 داریم:

$$f_h^{(-2)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=1}^{n+1} h k f(y - kh) = \int_0^{t-a} z f(t - z) dz = \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (14-1)$$

اگر $p = 3$ آنگاه

$$\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times (3 + r - 1)}{r!} = \frac{(r + 2)!}{2r!} = \frac{(r + 1)(r + 2)}{2},$$

بنابراین با جایگذاری در 10-1، می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
f_h^{(-3)}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} \sum_{r=0}^n h^2 (r+1)(r+2) f(t - rh) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) h^2 f(y - kh) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2} \sum_{k=1}^{n+1} (kh)^2 f(y - kh) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{2} \sum_{k=1}^{n+1} kh f(y - kh),
\end{aligned} \tag{15-1}$$

چون جمله دوم در رابطه 15-1 صفر می شود، با فرض $z = kh$ در جمله اول، خواهیم داشت:

$$f_h^{(-3)}(t) = \frac{1}{2!} \int_0^{t-a} z^2 f(t-z) dz = \frac{1}{2!} \int_a^t (t-\tau)^2 f(\tau) d\tau. \tag{16-1}$$

با توجه به روابط (12-1)، (14-1) و (16-1)، داریم:

$$f_h^{(-p)}(t) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau. \tag{17-1}$$

بنابراین می توان تعریف زیر را بیان کرد.

تعریف ۳-۳-۱: انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف تابع $f(t)$ از مرتبه $p \in \mathbb{R}^+$ روی بازه $[a, t]$ عبارت است از:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^p \sum_{r=0}^n \begin{bmatrix} p \\ r \end{bmatrix} f(t - rh) = \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau, \tag{18-1}$$

که در آن $h = \frac{t-a}{n}$.

اگر تابع $f(t)$ روی بازه $[a, t]$ دارای مشتق اول پیوسته باشد، آنگاه به کمک انتگرالگیری جز به جز از (18-1) می توان نوشت:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\tau)^p f'(\tau) d\tau, \tag{19-1}$$

و اگر $f(t)$ روی بازه $[a, t]$ دارای مشتق $m+1$ ام پیوسته باشد، آنگاه با انتگرالگیری جز به جز، فرمول کاربردی از انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف به صورت زیر به دست می آید:

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{p+k}}{\Gamma(p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \quad (20-1)$$

به همین ترتیب اگر $f(t)$ روی بازه $[a, t]$ دارای مشتق $m+1$ ام پیوسته باشد، آنگاه رابطه کاربردی برای مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف برای $m \leq p < m+1$ عبارت است از:

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau. \quad (21-1)$$

قضیه ۱-۳-۴: فرض کنید مشتق و انتگرال گرانوالد-لتنیکوف برای تابع دلخواه به صورت (7-1) و (18-1) تعریف شده باشد. در این صورت داریم:

$$1. {}_a D_t^p (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-p)} (t-a)^{\nu-p}, \quad (p < 0, \nu > -1) \text{ or } (0 \leq m \leq p < m+1, \nu > m). \quad (22-1)$$

$$2. \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_a D_t^{p+n} f(t), \quad f^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1. \quad (23-1)$$

$$3. {}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t), \quad f^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq r-1, \quad r = \max\{m, n\} \quad (24-1)$$

اثبات.

اگر $p < 0$ ، آنگاه انتگرال کسری از مرتبه $-p$ را خواهیم داشت بنابراین از رابطه (18-1) داریم:

$${}_a D_t^p (t-a)^\nu = \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{-p-1} (\tau-a)^\nu d\tau,$$

با تغییر متغیر $\tau = a + \xi(t-a)$ داریم:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^p (t-a)^\nu &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{\nu-p} \int_0^1 \xi^\nu (1-\xi)^{-p-1} d\xi \\ &= \frac{1}{\Gamma(-p)} (t-a)^{\nu-p} B(-p, \nu+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-p)} (t-a)^{\nu-p}, \quad p < 0, \nu > -1.$$

اگر $0 \leq m \leq p < m+1$ چون

$$f^{(m+1)}(t) = \frac{d^{m+1}(t-a)^\nu}{dt^{m+1}} = \nu(\nu-1)\cdots(\nu-m)(t-a)^{\nu-m-1} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\nu-m} (t-a)^{\nu-m-1},$$

در 21-1، سیگما صفر است. بنابراین با استفاده از رابطه فوق و انتخاب $\tau = a + \xi(t-a)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^p (t-a)^\nu &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(\nu+1-p)} \int_0^t (t-\tau)^{m-p} (\tau-a)^{\nu-m-1} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-m)\Gamma(\nu+1-p)} B(-p+m+1, \nu-m) (t-a)^{\nu-p} \\ &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-p)} (t-a)^{\nu-p}, \quad 0 \leq m \leq p < m+1. \square \end{aligned}$$

1. برای $0 \leq m \leq p < m+1$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) &= {}_aD_t^{p+n} f(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p-n+k}}{\Gamma(-p-n+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m-1} f^{(m+n+1)}(\tau) d\tau, \\ {}_aD_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(n+k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m-1} f^{(m+n+1)}(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

با مقایسه دو رابطه فوق، می توان نتیجه گرفت که اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

آنگاه خاصیت جابجایی میان مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف و مشتق مرتبه صحیح برقرار است. به بیان دیگر

$$\frac{d^n}{dt^n} ({}_aD_t^p f(t)) = {}_aD_t^p \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = {}_aD_t^{p+n} f(t). \square$$

۱.۱ اگر $p < 0$ آنگاه به ازای $q < 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
{}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) &= \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} ({}_a D_t^p f(\tau)) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} d\tau \int_a^t (\tau-\xi)^{-p-1} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\Gamma(-q)\Gamma(-p)} \int_a^t f(\xi) d\xi \int_a^t (t-\tau)^{-q-1} (\tau-\xi)^{-p-1} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(-p-q)} \int_a^t (t-\xi)^{-p-q-1} f(\xi) d\xi \\
&= {}_a D_t^{p+q} f(t),
\end{aligned}$$

در حالت $0 \leq m \leq p < m+1$ و $q < 0$ ، اگر $0 \leq k \leq m-1$ ، $f^{(k)}(a) = 0$ ، آنگاه داریم:

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = \frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{-p-q+m}}{\Gamma(-p-q+m+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p-q+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p-q+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau.$$

یعنی خاصیت جابجایی بین مشتقات کسری برقرار خواهد بود.

حال اگر $0 \leq m \leq p < m+1$ و $0 \leq n \leq q < n+1$ ، آنگاه با برقراری شرط

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq r-1, \quad r = \max\{m, n\},$$

مشتقات کسری خاصیت جابجایی خواهند داشت. به بیان دیگر

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^p ({}_a D_t^q f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t). \square$$

۴-۱ انتگرال کسری ریمان-لیوویل

در سال 1974 مفهوم مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل معرفی شد. این تعریف بر اساس انتگرال n -تایی^{۳۱} معرفی شد [6]. در انتگرال n -تایی داریم:

$$\int_a^t dt \int_a^t dt \cdots \int_a^t \varphi(t) dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (25-1)$$

³¹ n-fold integral

می دانیم $\Gamma(n) = (n-1)!$ ، بنابراین سمت راست رابطه (1-25) را می توان بر حسب $\Gamma(n)$ بیان کرد. اگر (1-25) را برای n های غیر صحیح در نظر بگیریم آنگاه می توان آن را به عنوان انتگرال کسری تعریف کرد.

تعریف ۱-۴-۱: فرض کنید $f(t)$ روی $J = (0, \infty)$ پیوسته تکه ای باشد و بر هر زیر بازه ی متناهی از J انتگرال پذیر باشد. در این صورت انتگرال کسری ریمان-لیوویل تابع $f(t)$ از مرتبه $\alpha > 0$ ، برای $t > 0$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (26-1)$$

قضیه ۱-۴-۲: فرض کنید $f(t)$ روی بازه $[0, X]$ پیوسته و به ازای هر $a \in [0, X]$ در $t = a$ تحلیلی باشد. در این صورت داریم:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k D^{(k)} f(t)}{k! (\alpha + k)} t^{\alpha+k}, \quad 0 \leq t \leq X. \quad (27-1)$$

اثبات. رابطه (26-1) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^{\alpha-1} f(t-x) dx, \quad (28-1)$$

اگر $f(t)$ در $t = a$ تحلیلی باشد آنگاه سری توانی

$$f(t-x) = f(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k D^{(k)} f(t)}{k!} x^k, \quad (29-1)$$

برای همه $x \in [0, t]$ همگرای یکنواخت است. با جایگذاری (29-1) در 28-1، داریم:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} f(t) \int_0^t x^{\alpha-1} dx + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x^\alpha \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k D^{(k)} f(t)}{k!} x^{k-1} \right) dx,$$

با توجه به همگرایی یکنواخت $f(t)$ ، با جابجایی انتگرال و سیگما خواهیم داشت:

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k D^{(k)} f(t)}{k! (\alpha + k)} t^{\alpha+k}, \quad 0 \leq t \leq X. \square$$

قضیه ۳-۴-۱: فرض کنید انتگرال کسری ریمان-لیوویل تابع $f(t)$ به صورت (26-1) تعریف شده باشد. در این صورت داریم:

$$1. I^\alpha (I^\beta f(t)) = I^{\alpha+\beta} f(t). \quad (30-1)$$

$$2. I^\alpha t^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} t^{\alpha+\nu}, \quad \nu > -1. \quad (31-1)$$

$$3. I^\alpha (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} (t-a)^{\alpha+\nu}, \quad \nu > -1, \quad (32-1)$$

$$4. I^\alpha (I^\beta f(t)) = I^\beta (I^\alpha f(t)). \quad (33-1)$$

اثبات.

1. با استفاده از تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل داریم:

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (I^\beta f(\tau)) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau d\tau$$

با استفاده از فرمول دیریکله داریم:

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \left(\int_\eta^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-\eta)^{\beta-1} d\tau \right) f(\eta) d\eta,$$

تغییر متغیر $\tau = \eta + (t-\eta)r$ را در نظر می گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{\beta-1} dr \right) f(\eta) d\eta,$$

انتگرال داخلی همان تابع بتا می باشد که بنا به تعریف برابر است با $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ ، لذا داریم:

$$I^\alpha I^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-\eta)^{\alpha+\beta-1} f(\eta) d\eta = I^{\alpha+\beta} f(t). \quad \square$$

2.

$$I^\alpha t^\nu = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^\nu d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} \tau^\nu d\tau$$

با تغییر متغیر $u = \frac{\tau}{t}$ داریم:

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-u)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} (u\tau)^\nu t du = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+\nu} \int_0^t (1-u)^{\alpha-1} u^\nu du$$

انتگرال موجود در رابطه آخر تابع بتا می باشد، بنابراین می توان نوشت:

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha+\nu} \times \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\alpha+\nu+1)} t^{\alpha+\nu}. \square$$

۲. اثبات مانند قسمت دوم می باشد.

۳. با استفاده از تعریف داریم:

$$\begin{aligned} I^\alpha I^\beta f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} (I^\beta f(\tau)) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_0^\tau (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) d\tau d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} \int_0^\tau (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} (I^\alpha f(\tau)) d\tau \\ &= I^\alpha I^\beta f(t). \square \end{aligned}$$

حال رابطه بین مشتق معمولی و انتگرال ریمان-لیوویل را با قضایای زیر بیان می کنیم.

قضیه ۴-۴-۱: فرض کنید $f(t)$ روی J پیوسته باشد و تابع مشتق $Df(t)$ در شرایط تعریف انتگرال ریمان-لیوویل صدق کند. در این صورت داریم:

$$1. I^{\alpha+1}(Df(t)) = I^\alpha f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha, \quad (34-1)$$

$$2. D(I^\alpha f(t)) = I^\alpha (Df(t)) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}. \quad (35-1)$$

اثبات.

۱. فرض کنید $\varepsilon, \eta > 0$. در این صورت $f(\xi)$ و $(t-\xi)^{\alpha-1}$ روی بازه $[\eta, t-\varepsilon]$ پیوسته و مشتق پذیرند.

بنابراین با انتگرال گیری جز به جز خواهیم داشت:

$$\int_{\eta}^{t-\varepsilon} (t-\xi)^{\alpha} (Df(\xi)) d\xi = \alpha \int_{\eta}^{t-\varepsilon} (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi + \varepsilon^{\alpha} f(t-\varepsilon) - (t-\eta)^{\alpha} f(\eta),$$

در حد، اگر $\varepsilon \rightarrow 0$ و $\eta \rightarrow 0$ آنگاه

$$\int_0^t (t-\xi)^{\alpha} (Df(\xi)) d\xi = \alpha \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi - t^{\alpha} f(\eta),$$

با تقسیم رابطه فوق بر $\Gamma(\alpha+1)$ و استفاده از تعریف داریم:

$$I^{\alpha+1}(Df(t)) = I^{\alpha}f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha}. \square$$

۱. در این قسمت تغییر متغیر $\xi = t - x^{\lambda}$ با $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ را در نظر بگیرید. بنابراین داریم:

$$I^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{x^{\lambda}} f(t-x^{\lambda}) dx,$$

با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل خواهیم داشت:

$$D(I^{\alpha}f(t)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[f(0)(\alpha t^{\alpha-1}) + \int_0^{x^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial t} f(t-x^{\lambda}) dx \right],$$

با قرار دادن $\xi = t - x^{\lambda}$ اثبات قسمت دوم کامل است. $\square$

قضیه ۱-۴-۵: فرض کنید $n \in \mathbb{Z}^+$ و $I^{\alpha}f(t)$ روی J پیوسته باشد. در این صورت اگر $D^{(n)}f(t)$ در شرایط

تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل صدق کند، آنگاه

$$1. I^{\alpha}f(t) = I^{\alpha+n}(D^{(n)}f(t)) + Q_n(t, \alpha), \quad (36-1)$$

$$2. D^{(n)}(I^{\alpha}f(t)) = I^{\alpha}(D^{(n)}f(t)) + Q_n(t, \alpha - n), \quad (37-1)$$

که در آن

$$Q_n(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^{(k)}f(0)}{\Gamma(\alpha+k+1)} t^{\alpha+k}.$$

اثبات.

۱. با جایگذاری $\alpha + 1$ به جای α و $Df(t)$ به جای $f(t)$ در رابطه 34-1، خواهیم داشت:

$$I^{\alpha+2}(D^{(2)}f(t)) = I^{\alpha+1}(Df(t)) - \frac{Df(0)}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha+1},$$

با جایگذاری رابطه (34-1) در رابطه فوق، داریم:

$$I^{\alpha+2}(D^{(2)}f(t)) = I^{\alpha}f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha} - \frac{Df(0)}{\Gamma(\alpha+2)}t^{\alpha+1},$$

با تکرار روند فوق، رابطه (36-1) برقرار خواهد شد. □

۲. با مشتق گیری از رابطه (35-1) داریم:

$$D^{(2)}(I^{\alpha}f(t)) = D(I^{\alpha}(Df(t))) + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha-1)}t^{\alpha-2},$$

با استفاده از (35-1) در رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$D^{(2)}(I^{\alpha}f(t)) = I^{\alpha}(D^{(2)}f(t)) + \frac{Df(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha-1)}t^{\alpha-2},$$

و با تکرار روند فوق، رابطه (37-1) به دست می آید. □

نتیجه: اگر $D^{(k)}f(0) = 0$ برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ ، آنگاه

$$1. I^{\alpha}f(t) = I^{\alpha+n}(D^{(n)}f(t)),$$

$$2. D^{(n)}(I^{\alpha}f(t)) = I^{\alpha}(D^{(n)}f(t)).$$

قضیه ۵-۴-۱: فرض کنید $m, n \in \mathbb{Z}^+$ و $\alpha, \beta > 0$ به طوری که $n - \alpha = m - \beta$ در این صورت اگر

$f(t)$ دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه r ام باشد که $r = \max\{m, n\}$ آنگاه

$$I^{\alpha}(D^{(n)}f(t)) = I^{\beta}(D^{(m)}f(t)) + sgn(\beta - \alpha) \sum_{k=s}^{r-1} \frac{D^{(k)}f(0)}{\Gamma(\alpha - n + k + 1)} t^{\alpha-n+k},$$

که در آن $s = \min\{m, n\}$.

اثبات. اثبات را می توان در کتاب (میلر، [8]) دید.

با توجه به این که کاربرد مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف در مسائل آسان نیست و وجود جمله غیر انتگرالی کاربرد آن را با مشکل روبرو می کند، لذا نیاز به تعریف دیگری برای مشتق کسری داریم. این تعریف انتگرال-دیفرانسیلی همان تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل می باشد.

تعریف ۱-۴-۶: مشتق کسری ریمان-لیوویل تابع $f(t)$ از مرتبه $\alpha > 0$ ، عبارت است از:

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} (I^{m-\alpha} f(t)), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (38-1)$$

با توجه به تعریف فوق داریم:

$$1. D^\alpha I^\alpha f(t) = f(t), \quad (39-1)$$

زیرا

$$D^\alpha (I^\alpha f(t)) = \frac{d^m}{dt^m} (I^{m-\alpha} (I^\alpha f(t))) = \frac{d^m}{dt^m} (I^m f(t)) = f(t).$$

$$2. I^\alpha D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0^+) \frac{t^i}{i!}, \quad (40-1)$$

زیرا

$$I^\alpha D^\alpha f(t) = I^\alpha \left(\frac{d^m}{dt^m} (I^{m-\alpha} f(t)) \right),$$

در انتگرال گیری از مشتق، مقادیر تابع در نقاط ابتدایی نیز ظاهر می شوند و چون مشتق مرتبه m ام زیر علامت انتگرال می باشد، لذا مقادیر تابع تا مشتق $m-1$ ام در نقطه ابتدایی در رابطه به وجود می آید. □

قضیه ۱-۴-۷: فرض کنید:

$$m-1 < \alpha \leq m, \quad n-1 < \beta \leq n, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

در این صورت برای مشتق کسری ریمان-لیوویل تابع دلخواه $f(t)$ ، داریم:

$$1. \frac{d^n}{dt^n} (D^\alpha f(t)) = D^\alpha \left(\frac{d^n}{dt^n} f(t) \right) = D^{\alpha+n} f(t), \quad (41-1)$$

اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

$$2. D^\alpha (D^\beta f(t)) = D^\beta (D^\alpha f(t)) = D^{\alpha+\beta} f(t), \quad (42-1)$$

اگر و فقط اگر

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad 0 \leq k \leq r-1, \quad r = \max\{m, n\}.$$

$$3. D^\alpha (t-a)^\nu = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} (t-a)^{\nu-\alpha}, \quad \nu > -1. \quad (43-1)$$

۵-۱ مشتق کسری کاپوچو

در مسائل کاربردی نیاز به تعاریفی از مشتقات کسری داریم که در آن‌ها شرایط اولیه به راحتی قابل بیان و تفسیر باشند. با توجه به این که در تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل این شرایط به صورت حدی بیان می شود و در عمل غیر قابل توصیف می باشند، لذا سومین تعریف از مشتق کسری توسط کاپوچو (1969 و 1995) بیان شد.

تعریف ۱-۵-۱: مشتق کسری کاپوچو تابع $f(t)$ از مرتبه $\alpha > 0$ ، به صورت زیر تعریف می شود:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(\tau) d\tau, \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (44-1)$$

اگر تابع $f(t)$ دارای مشتق مرتبه $m+1$ ام پیوسته روی بازه $[a, t]$ باشد آنگاه با انتگرالگیری جز به جز وقتی $m \rightarrow \alpha$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow m} {}_a^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow m} \left(\frac{f^{(m)}(a)(t-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(m)}(a) + \int_0^t f^{(m+1)}(\tau) d\tau = f^{(m)}(a), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

۲-۵-۱ روابط بین تعاریف مشتق و انتگرال های کسری

با توجه به روند بیان رابطه (18-1) و رابطه (26-1)، ارتباط بین انتگرال کسری گرانوالد-لتنیکوف و انتگرال کسری ریمان-لیوویل واضح است.

اگر تابع $f(t)$ دارای مشتق مرتبه $m + 1$ ام پیوسته روی بازه $[a, t]$ باشد، آنگاه مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف و ریمان-لیوویل برابرند. زیرا برای $0 < m - 1 \leq p, \alpha \leq m < n$ ، با انتگرال گیری جز به جز از رابطه (38-1) به رابطه (21-1) می رسیم. به بیان دیگر داریم:

$$D^\alpha f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m-1} f^{(m)}(\tau) d\tau.$$

و برای $0 \leq p < 1$ داریم:

$$D^\alpha f(t) = {}_a D_t^p f(t) = \frac{f(a)(t-a)^{-p}}{\Gamma(1-p)} + \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_a^t (t-\tau)^{-p} f'(\tau) d\tau.$$

به شرط آن که $f'(\tau)$ پیوسته و انتگرال پذیر باشد. اما باید توجه داشت که در تعریف مشتق ریمان-لیوویل تنها شرط لازم، انتگرال پذیری $(t-\tau)^{m-\alpha} f(\tau)$ می باشد در صورتی که در مشتق گرانوالد-لتنیکوف تابع $f(t)$ باید شرط قوی پیوستگی مشتقات تا مرتبه $m + 1$ ام را داشته باشد.

با توجه به این که شرایط اولیه در معادلات دیفرانسیل کسری کاپوچو مانند شرایط اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی می باشد مشتق کسری کاپوچو نسبت به دو مشتق دیگر برتری دارد. بین مشتق کسری کاپوچو و ریمان-لیوویل چند تفاوت آشکار وجود دارد که باعث برتری مشتق کاپوچو نسبت به مشتق ریمان-لیوویل می شود که عبارتند از:

۱. در تبدیل لاپلاس مشتق داریم:

$$L\{{}_a^C D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left({}_a^C D_t^{\alpha-k-1} f(t) \right)_{t=0}, \quad n-1 < \alpha \leq n,$$

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n,$$

دو رابطه فوق بیان کننده ی این مطلب هستند که در تبدیل لاپلاس مشتق کسری ریمان-لیوویل، مقادیر مشتق کسری در نقطه ی ابتدایی نقش اساسی دارند در حالی که در تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوچو، مقادیر مشتقات از مرتبه ی صحیح در نقطه ابتدا نیاز است. چون در عمل مقادیر مشتق از مرتبه صحیح را داریم لذا کاربرد مشتق کاپوچو به راحتی امکان پذیر است.

۱. مشتق کسری کاپوچو تابع ثابت صفر است در حالی که مشتق کسری ریمان-لیوویل تابع ثابت عبارت است از

$$D^\alpha C = \frac{C t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, 0 \leq \alpha < 1,$$

باید توجه داشت که در $a = \infty$ هر دو مشتق برابرند. یعنی

$${}_a D_t^\alpha f(t) = (D^\alpha)_{a=\infty} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n.$$

به بیان دیگر در فرآیندهای دینامیکی حالت پایدار، هر دو مشتق نتایج یکسانی خواهند داشت.

۱. در برقراری خاصیت جابجایی در مشتقات، در مشتق کاپوچو برای برقراری رابطه

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \quad n-1 < \alpha \leq n < m,$$

باید شرط زیر برقرار باشد

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = n, n+1, \dots, m$$

در حالی که شرط برقراری خاصیت جابجایی در مشتق ریمان-لیوویل عبارت است از:

$$f^{(k)}(a) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

معمولا در مقالات برای حل معادلات انتگرال کسری از تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل و برای حل معادلات دیفرانسیل کسری از تعریف مشتق کسری کاپوچو استفاده می شود. علت این امر در مطالب فوق بیان شده است.

۶-۱ معادلات انتگرال کسری

معادله انتگرال به معادله ای گفته می شود که تابع مجهول زیر علامت انتگرال قرار می گیرد. این معادلات به سه دسته مهم تقسیم می شوند (اتکینسون، ۱۹۹۷):

الف) معادلات انتگرال ولترا^{۳۲}

ب) معادلات انتگرال فردهلم^{۳۳}

ج) معادلات انتگرال - دیفرانسیل^{۳۴}

اگر در معادله انتگرال تابع مجهول علاوه بر زیر علامت انتگرال در بیرون از آن نیز ظاهر شود، معادله انتگرال را نوع دوم و در غیر این صورت نوع اول می نامند.

معادله انتگرال کسری به مفهوم معادله انتگرال از مرتبه دلخواه $\alpha \in \mathbb{R}$ می باشد که در زمینه های مختلف مهندسی، ریاضیات کاربردی، پدیده های فیزیکی و بیولوژی کاربرد دارد (سامکو و همکاران، 1993).

تعریف ۱-۶-۱: معادله انتگرال کسری ولترا یک بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

$$f(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} k(x,t) f(t) dt = g(x), \quad (45-1)$$

که در آن تابع $g(x)$ و هسته معادله یعنی $k(x,y)$ ، توابعی معلوم هستند و $\alpha \in \mathbb{R}^+$. این معادله معمولاً به عنوان معادله انتگرال منفرد ضعیف ولترا معرفی می شود. در حالت خاص، اگر $k(x,y) = 1$ و $0 < \alpha < 1$ آنگاه معادله انتگرال نوع دوم آبل^{۳۵} به فرم زیر به دست می آید:

$$f(x) - \lambda \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\beta} dt = g(x),$$

که در آن $\lambda = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ و $\beta = 1 - \alpha$. معمولاً معادله انتگرال آبل را با $\lambda = 1$ و $\beta = \frac{1}{2}$ در نظر می گیرند. همچنین در رابطه 1-47، اگر $\alpha = 1$ آنگاه معادله انتگرال معمولی نوع دوم ولترا را خواهیم داشت.

همچنین معادله انتگرال کسری فردهلم را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$f(x) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-t)^{\alpha-1} k(x,t) f(t) dt = g(x). \quad (46-1)$$

³² Volterra integral Equation

³³ Fredholm integral Equation

³⁴ Integro-differential Equation

³⁵ Abel

تعریف ۱-۶-۲: معادله انتگرال دیفرانسیل کسری معادله ای هست که مشتق کسری (یا طبیعی) تابع مجهول در بیرون از انتگرال نیز ظاهر شده باشد. البته می تواند در داخل انتگرال نیز باشد. به عنوان مثال معادله زیر یک معادله انتگرال دیفرانسیل هست:

$$D^{\nu} y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^{\mu}} ds + \lambda_2 \int_0^t k_3(s,t)y(s) ds + f(t) \quad (49-1)$$

در این رساله معادلات زیر بررسی خواهند شد:

$$\begin{cases} D^{\nu} y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^{\mu}} ds + \lambda_2 \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^{\gamma}} ds + \lambda_3 \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s) ds \\ \quad + g(t)y(h(s)) + p(t)y(t) + f(t), \quad \nu > 0, \quad 0 < \mu, \gamma < 1, \\ y^{(j)}(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, [\nu], \quad t \in [0, 1], \end{cases} \quad (50-1)$$

(51-1)

$$\begin{cases} D^{\nu} y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)F(y(s))}{(t-s)^{\mu}} ds + \lambda_2 \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^{\gamma}} ds + \lambda_3 \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s) ds \\ \quad + \lambda_4 \int_0^{r(t)} k_4(s,t)y(h(s)) ds + w(t)y(h(s)) + p(t)G(y(t)) + f(t), \quad \nu > 0, \quad 0 < \mu, \gamma < 1, \\ y^{(j)}(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, [\nu], \quad t \in [0, 1]. \end{cases}$$

تعریف ۱-۶-۳: معادله انتگرال کسری دو بعدی ولترا به صورت زیر بیان می شود:

$$f(x, y) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y (x-s)^{\alpha-1} (y-t)^{\beta-1} k(x, y, s, t) F(s, t, f(s, t)) dt ds = g(x, y). \quad (52-1)$$

اگر در 49-1، $F(s, t, f(s, t)) = f(s, t)$ باشد معادله انتگرال را خطی و در غیر این صورت آن را غیر خطی می نامند. به همین ترتیب معادله انتگرال کسری دو بعدی فردهلم عبارت است از:

$$f(x, y) - \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^T \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} (T-t)^{\beta-1} k(x, y, s, t) f(s, t) dt ds = g(x, y).$$

(۵۳-۱)

که در این معادلات $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ و توابع $k(x, y, s, t)$ و $g(x, y)$ توابعی معلوم هستند .

فصل 2

چند جمله ای های اوایلر

۱-۲ مقدمه

در این قسمت چند جمله ای های اویلر^{۳۶} یک متغیره و دو متغیره را معرفی کرده و خواص این چند جمله ای ها را بیان می کنیم. در ادامه ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمن-لیوویل و نیز ضرب مبتنی بر این چندجمله ای ها را ارائه می دهیم. همچنین شکل مانریسی توابع شامل تاخیر به کمک جمله ای های اویلر بیان می شود.

۱-۱-۲ چند جمله ای های اویلر یک متغیره

در کل این فصل، چند جمله ای های اویلر یک متغیره از مرتبه m را با $E_m(x)$ نشان می دهیم. این چندجمله ایها توسط تابع مولد زیر تعریف می شوند[8]:

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} E_k(x) \frac{t^k}{k!}, \quad |t| < \pi, \quad (1-2)$$

ثابت می شود که رابطه بازگشتی زیر برای این چندجمله ایها برقرار است:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} E_k(t) + E_m(t) = 2t^m, \quad (2-2)$$

که در اینجا $\binom{m}{k}$ ضرایب دو جمله ای نیوتن میباشد. واضح است که داریم:

$$E_0(x) = 1, \quad E_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$E_2(x) = x^2 - x, \quad E_3(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{4}, \dots$$

۲-۱-۲ خواص چند جمله ای های اویلر

این چندجمله ایها دارای خواص زیر هستند[9]:

$$(3-2)$$

³⁶ Euler polynomials

$$\begin{aligned}
1. E'_n(x) &= nE_{n-1}(x), \\
2. E_{n+1}(x+1) + E_n(x) &= 2x^n, \\
3. E_n(x+y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) y^{n-k}, \\
4. E_n(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (2-2^{k+1}) \binom{n+1}{k} B_k(0) x^{n+1-k}, \quad n=1,2,\dots,
\end{aligned}$$

که در اینجا $B_k(x)$ ، $k=0,1,2,\dots$ ، چندجمله‌ایهای برنولی از درجه k بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n.$$

۲-۱-۳ ضرب داخلی چندجمله‌ایهای اویلر:

اگر ضرب داخلی چندجمله‌ایهای $E_n(x)$ و $E_m(x)$ را با $(E_n(x), E_m(x))$ نشان دهیم ثابت می‌شود که [9]

$$\begin{aligned}
(E_n(x), E_m(x)) &= \\
\int_0^1 E_m(x) E_n(x) dx &= (-1)^{n-1} \frac{m!(n+1)!}{(m+n+1)!} E_{m+n+1}(0), \quad m, n \geq 1.
\end{aligned} \tag{۴-۲}$$

۲-۱-۴ شکل ماتریسی بردار چندجمله‌ای‌های اویلر تک متغیره:

با توجه به اینکه در فصل‌های بعدی توابع را با چندجمله‌ایهای اویلر تقریب خواهیم زد، بردار اویلر $E(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(t) = [E_0(t), E_1(t), \dots, E_m(t)]^T. \tag{۵-۲}$$

واضح است که چندجمله‌ای اویلر $E_m(t)$ یک چندجمله‌ای از درجه m است. لذا با در نظر گرفتن (۲-۳)، می‌توان شکل ماتریسی بردار اویلر را به صورت زیر نوشت:

$$E(t) = A_m X(t), \tag{۶-۲}$$

که در اینجا داریم:

$$A_m = \begin{pmatrix} \frac{2-2^2}{1} B_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2-2^3}{2} \binom{2}{2} B_2(0) & \frac{2-2^2}{2} \binom{2}{1} B_1(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2-2^{m+2}}{m+2} \binom{m+1}{m+1} B_{m+1}(0) & \frac{2-2^{m+1}}{m+1} \binom{m+1}{m} B_m(0) & \dots & \frac{2-2^2}{m+1} \binom{m+1}{1} B_1(0) \end{pmatrix}$$

9

$$X(t) = [1, t, t^2, \dots, t_m]^T.$$

واضح است که ماتریس D یک ماتریس بالامثلثی هست. با توجه به اعضای روی قطر اصلی، این ماتریس نامنفرد بوده و لذا دارای معکوس هست.

۲-۲ چند جمله ای های اویلر دو متغیره

تعریف ۲-۲-۱: چند جمله ای اویلر دو متغیره از درجه mn در $[0,1] \times [0,1]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{m,n}(x, y) = E_m(x) E_n(y).$$

لم ۲-۲-۲. رابطه بازگشی زیر برای چند جمله ای های اویلر دو متغیره برقرار است:

$$\sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^m \binom{n}{k} \binom{m}{i} E_{i,k}(x, y) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_{m,k}(x, y) + \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} E_{i,n}(x, y) + E_{m,n}(x, y) = 2x^m y^n.$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۲-۲)، اثبات واضح است.

۲-۲-۳ شکل ماتریسی بردار چند جمله ای های اویلر دو متغیره:

فرض کنید

$$E(x, y) = [E_{0,0}(x, y), E_{0,1}(x, y), \dots, E_{0,n}(x, y), E_{1,0}(x, y), \dots, E_{m,n}(x, y)]^T. \quad (7-2)$$

واضح است که

$$E(x, y) = E(x) \otimes E(y),$$

که در اینجا $\otimes$ عملگر ضرب کرونیگر بوده و نیز

$$E(x) = [E_0(x), E_1(x), \dots, E_m(x)]^T, \quad E(y) = [E_0(y), E_1(y), \dots, E_n(y)]^T.$$

با فرض اینکه

$$E(x) = A_m X(x), \quad E(y) = A_n X(y),$$

$$X_{m,n}(x, y) = [1, y, \dots, y^n, x, xy, \dots, xy^n, \dots, x^m, x^m y, \dots, x^m y^n]$$

نتیجه می شود که:

$$E(x, y) = A_m \otimes A_n X(x, y).$$

۲-۲-۴ خواص چندجمله ای های اویلر دو متغیره:

با بکارگیری خواص چندجمله ای های اویلر یک متغیره، می توان نتیجه زیر را گرفت:

$$\frac{\partial E_{n,m}(x, y)}{\partial x} = n E_{n-1,m}(x, y),$$

$$\frac{\partial E_{n,m}(x, y)}{\partial y} = m E_{n,m-1}(x, y).$$

۲-۲-۵ بسط توابع یک متغیره به کمک چندجمله ای های اویلر:

فرض کنید $u(x) \in L^2([0, 1])$. این تابع را می توان به کمک چندجمله ایهای اویلر به صورت زیر بسط داد:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i E_i(x) \square \sum_{i=0}^m u_i E_i(x) = U^T E(x) = E(x)^T U, \quad (2-8)$$

بردار U به صورت زیر است:

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_m].$$

برای تعیین بردار U ، از ضرب داخلی رابطه (۲-۸) با $E_j(x)$ به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$(u(x), E_j(x)) = \sum_{i=0}^m u_i \int_0^1 E_j(x) E_i(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

حال ماتریس $D = [d_{ij}]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d_{ij} = \int_0^1 E_i(x) E_j(x) dx$$

بنابراین داریم:

$$DU = b,$$

$$b = [b_0, b_1, \dots, b_m]^T, \quad b_j = \int_0^1 u(x) E_j(x) dx.$$

در نتیجه، با فرض معکوس پذیری ماتریس D ، داریم:

$$U = D^{-1}b.$$

۲-۲-۶ بسط توابع دو متغیره به کمک چندجمله ای های اویلر دو متغیره:

فرض کنید $f(x, y) \in L^2([0,1] \times [0,1])$. همانند توابع یک متغیره، این تابع را می توان به کمک چندجمله ایهای اویلر دو متغیره به صورت زیر بسط داد:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij} E_{i,j}(x, y) \quad \square \quad \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} E_{i,j}(x, y) = F^T E(x, y) = E(x, y)^T F, \quad (9-2)$$

در این فرمول، بردار $E(x, y)$ در رابطه (۷-۲) تعریف شده و نیز

$$F = [f_{00}, f_{01}, \dots, f_{0n}, f_{10}, f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots, f_{mn}]^T.$$

لم ۷-۲-۲. برای تقریب تابع $f(x, y) \in L^2([0,1] \times [0,1])$ ، داریم:

$$f(x, y) \square F^T E(x, y) = E(x)^T \Phi E(y),$$

در اینجا $\Phi = [\phi_{ij}]$ یک ماتریس $(m+1) \times (n+1)$ بوده و نیز داریم:

$$\phi_{ij} = f_{ij}.$$

برای محاسبه بردار ضرایب F ، ابتدا قرار دهید:

$$z_{pq} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) E_{pq}(x, y) dx dy.$$

با جایگذاری تقریب $f(x, y)$ از رابطه (۹-۲) در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} z_{pq} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} \int_0^1 \int_0^1 E_{i,j}(x, y) E_{p,q}(x, y) dx dy \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} \int_0^1 \int_0^1 E_i(x) E_j(y) E_p(x) E_q(y) dx dy \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} \underbrace{\int_0^1 E_i(x) E_p(x) dx}_{w_{pi}^{(m)}} \underbrace{\int_0^1 E_j(y) E_q(y) dy}_{w_{qj}^{(n)}} \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{pi}^{(m)} w_{qj}^{(n)} f_{ij}. \end{aligned}$$

در نتیجه می توان نوشت:

$$Z = W^{(m)} \otimes W^{(n)} F \quad (۱۰-۲)$$

که در این رابطه، $Z = [z_{pq}]$ یک ماتریس $(m+1)(n+1) \times (m+1)(n+1)$ بوده و نیز ماتریسهای $W^{(m)}$ و $W^{(n)}$ به ترتیب از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ و $(n+1) \times (n+1)$ هستند. واضح است که با حل دستگاه خطی (۱۰-۲) میتوان بردار ضرایب یعنی F را تعیین کرد.

۸-۲-۲ بسط توابع شامل تابع تاخیر به کمک چندجمله ای های اویلر:

فرض کنید $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$ تابع تاخیر باشد و نیز $u(x) \in L^2([0,1])$ با استفاده رابطه (۸-۲) داریم:

$$\begin{aligned} u(x) \square \sum_{i=0}^m u_i E_i(x) &\Rightarrow u(h(x)) \square \sum_{i=0}^m u_i E_i(h(x)) = U^T E(h(x)) \\ &= U^T A_m X(h(x)). \end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$X(h(x)) = [1, h(x), h(x)^2, \dots, h(x)^m]^T$$

حال از بسط $h(x)^i$ برای $i = 0, 1, \dots, m$ ، میتوان نوشت:

$$h(x)^i \square \sum_{j=0}^m H_j^i E_j(x) = (H^i)^T E(x).$$

بنابراین میتوان نتیجه گرفت :

$$u(h(x)) = U^T A_m D E(x), \quad (11-2)$$

که در اینجا داریم:

$$D = \begin{pmatrix} (H^0)^T \\ (H^1)^T \\ \vdots \\ (H^m)^T \end{pmatrix}.$$

۲-۳ ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل و ضرب چندجمله ایهای اویلر

۳-۲-۱ ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل چندجمله ایهای اویلر

تعریف ۱-۲-۳: فرض کنید $E(t) = [E_0(t), E_1(t), \dots, E_m(t)]^T$ بردار چندجمله ایهای اویلر بوده و نیز I^ν عملگر انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل باشد که در تعریف (1-5-3) آورده شده است. گویند Π ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل $E(t)$ است هرگاه داشته باشیم:

$$I^\nu E(x) = \Pi E(x) \quad (12-2)$$

که در اینجا Π یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ است.

برای بدست آوردن ماتریس Π ، از رابطه (۶-۲) داریم:

$$I^\nu E(x) = I^\nu A_m X(x) = A_m I^\nu X(x). \quad (13-2)$$

ثابت شده است که

$$I^\nu x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} x^{\nu+k}$$

لذا میتوان نتیجه زیر را گرفت:

$$I^\nu X(x) = I^\nu [1, x, x^2, \dots, x^m]^T \\ = \left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu, \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\nu+2)} x^{\nu+1}, \dots, \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\nu+1)} x^{\nu+m} \right]^T$$

با توجه به بسط $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} x^{\nu+k}$ با استفاده از جندجمله ایهای اویلر، داریم

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\nu+1)} x^{\nu+k} = \sum_{i=0}^m u_i^k E_i(x) = (U^k)^T E(x), \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (14-2)$$

و در نتیجه

$$I^\nu X(x) = \Theta E(x) \quad (15-2)$$

که در اینجا داریم:

$$\Theta = \begin{pmatrix} (U^0)^T \\ (U^1)^T \\ \vdots \\ (U^m)^T \end{pmatrix}.$$

با جایگذاری رابطه بالا در (2-13)، نتیجه زیر را می گیریم:

$$I^\nu E(x) = A_m \Theta E(x).$$

واضح است که ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل جندجمله ایهای اویلر یعنی Π به صورت زیر است:

$$\Pi = A_m \Theta. \quad (16-2)$$

۲-۲-۲ ماتریس عملیاتی ضرب مبتنی بر جندجمله ای های اویلر

فرض کنید P یک $(m+1)$ بردار باشد. گویند $\tilde{P}$ ماتریس عملیاتی ضرب نامیده میشود هرگاه داشته باشیم:

$$E(x)E(x)^T P = \tilde{P}E(x), \quad (17-2)$$

برای تعیین این ماتریس، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$E(x)E(x)^T P = A_m X(x)X(x)^T A_m^T P = A_m \Lambda A_m^T P,$$

در این فرمول درآیه های ماتریس $\Lambda = [\gamma_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq m+1$, به صورت زیر تعریف شده است:

$$\gamma_{ij} = x^{i+j-2}.$$

فرض کنید $\Lambda A_m^T P = G$ و $G = [G_1, G_2, \dots, G_{m+1}]^T$. حال به

کمک رابطه (۸-۲)، هرکدام G ها را بسط می‌دهیم. داریم:

$$G_i = \Xi_i^T E(x), i = 1, 2, \dots, m.$$

در نتیجه

$$E(x)E(x)^T P = A_m \Xi E(x),$$

که در اینجا داریم:

$$\Xi = \begin{pmatrix} (\Xi_1)^T \\ (\Xi_2)^T \\ \vdots \\ (\Xi_{m+1})^T \end{pmatrix}.$$

بوضوح ماتریس عملیاتی ضرب عبارت است از $\tilde{P} = A_m \Xi$.

فصل ۳

توابع اویلر از مرتبه کسری

۳-۱ مقدمه

در این فصل توابع اویلر از مرتبه کسری^{۳۷} یک متغیره و دو متغیره را معرفی کرده و خواص این توابع را بیان می کنیم. تقریب توابع یک متغیره و نیز دو متغیره توسط این توابع را آورده و در ادامه ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل و نیز ضرب مبتنی بر این توابع ارائه می دهیم. در آخر فصل شکل مانریتی توابع شامل تاخیر به کمک این توابع را محاسبه می کنیم.

۳-۱-۱ توابع اویلر از مرتبه کسری یک متغیره

اخیرا ساختن توابع از مرتبه کسری به کمک چندجمله ای ها برای حل عددی انواع معادلات کسری مثل معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات انتگرال کسری و معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری مورد توجه محققین قرار گرفته است. در مقالات چاپ شده در این موضوع، بوضوح به این نکته اشاره شده است که نتایج عددی بکارگیری توابع از مرتبه کسری خیلی بهتر از بکارگیری چندجمله ای ها برای حل عددی این نوع از معادلات هست. لذا در این قسمت ساختن توابع از مرتبه کسری به کمک چندجمله ای ها را توضیح داده و سپس تابع اویلر از مرتبه کسری را تعریف می کنیم.

تعریف ۳-۱-۱-۱. فرض کنید $p_n(x)$ یک چندجمله ای از درجه n باشد. برای ساختن تابع از مرتبه کسری به کمک $p_n(x)$ ، کافیه متغیر x را با متغیر دیگری مثل t^α جایگزین کنیم که $\alpha \in (0,1)$. در این صورت $p_n(t^\alpha)$ را تابع از مرتبه کسری نامند.

تعریف ۳-۱-۱-۲. فرض کنید $E_n(x)$ چندجمله ای اویلر از درجه n باشد. با جایگزینی متغیر x با متغیر t^α تابع $E_n(t^\alpha)$ بدست می آید که به این تابع، تابع اویلر از مرتبه کسری می گویند. در کل رساله، برای راحتی $E_n(t^\alpha)$ را با $E_n^\alpha(t)$ نشان می دهیم.

با توجه به فصل قبل می توان رابطه بازگشتی زیر را برای این چندجمله ای ها نوشت:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} E_k^\alpha(t) + E_m^\alpha(t) = 2t^{\alpha m}, \quad (1-3)$$

³⁷ Fractional-order Euler polynomials

که در اینجا $\binom{m}{k}$ ضرایب دو جمله ای می باشد. بدیهی است که:

$$E_0^\alpha(t) = 1, \quad E_1^\alpha(t) = t^\alpha - \frac{1}{2},$$

$$E_2^\alpha(t) = t^{2\alpha} - t^\alpha, \quad E_3^\alpha(t) = t^{3\alpha} - \frac{2}{3}t^{2\alpha} + \frac{1}{4}, \dots$$

۳-۱-۲ شکل بسته توابع اویلر از مرتبه کسری

با استفاده از شکل بسته چندجمله ایهای اویلر که در رابطه (۲-۳) آورده شده است، شکل بسته این توابع به صورت زیر می باشند:

(۲-۳)

$$E_n^\alpha(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} (2-2^{k+1}) \binom{n+1}{k} B_k(0) t^{\alpha(n+1-k)}, \quad n=1,2,\dots,$$

که در اینجا $B_k(x)$ ، $k=0,1,2,\dots$ ، چندجمله ای های برنولی از درجه k بوده و در فصل قبل تعریف شده است.

۳-۱-۳ ضرب داخلی توابع اویلر از مرتبه کسری:

همانند فصل قبل، ضرب داخلی توابع اویلر از مرتبه کسری $E_n^\alpha(t)$ و $E_m^\alpha(t)$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$(E_n^\alpha(t), E_m^\alpha(t)) = \int_0^1 E_m^\alpha(t) E_n^\alpha(t) t^{\alpha-1} dt = (-1)^{n-1} \frac{m!(n+1)!}{\alpha(m+n+1)!} E_{m+n+1}(0), \quad m, n \geq 1. \quad (3-3)$$

۳-۱-۴ شکل ماتریسی بردار توابع اویلر از مرتبه کسری تک متغیره،

بردار توابع اویلر از مرتبه کسری $E^\alpha(t)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E^\alpha(t) = [E_0^\alpha(t), E_1^\alpha(t), \dots, E_m^\alpha(t)]^T. \quad (4-3)$$

با توجه به رابطه (۳-۲) ، می توان شکل ماتریسی بردار $E^\alpha(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$E^\alpha(t) = A_m X^\alpha(t), \quad (۳-۵)$$

که در اینجا داریم:

$$A_m = \begin{pmatrix} \frac{2-2^2}{1} B_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2-2^3}{2} \binom{2}{2} B_2(0) & \frac{2-2^2}{2} \binom{2}{1} B_1(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2-2^{m+2}}{m+2} \binom{m+1}{m+1} B_{m+1}(0) & \frac{2-2^{m+1}}{m+1} \binom{m+1}{m} B_m(0) & \dots & \frac{2-2^2}{m+1} \binom{m+1}{1} B_1(0) \end{pmatrix}$$

و

$$X^\alpha(t) = [1, t^\alpha, t^{2\alpha}, \dots, t^{m\alpha}]^T.$$

مزیت نوشتن شکل برداری توابع اویلر به صورت $E^\alpha(t) = A_m X^\alpha(t)$ این است که در محاسبه ماتریس عملیاتی انتگرال گیری این توابع کافیت محاسبه ماتریس عملیاتی انتگرال گیری $X^\alpha(t)$ محاسبه شود.

۳-۲ توابع اویلر از مرتبه کسری دو متغیره

تعریف ۳-۲-۱: توابع اویلر از مرتبه کسری دو متغیره تعریف شده در $[0, 1] \times [0, 1]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_{i,j}^{\alpha,\beta}(x,y) = E_i^\alpha(x) E_j^\beta(y).$$

۳-۲-۲ شکل ماتریسی توابع اویلر از مرتبه کسری دو متغیره:

فرض کنید

$$E^{\alpha,\beta}(x,y) = [E_{0,0}^{\alpha,\beta}(x,y), E_{0,1}^{\alpha,\beta}(x,y), \dots, E_{0,n}^{\alpha,\beta}(x,y), E_{1,0}^{\alpha,\beta}(x,y), \dots, E_{m,n}^{\alpha,\beta}(x,y)]^T. \quad (۳-۶)$$

واضح است که

$$E^{\alpha,\beta}(x,y) = E^{\alpha}(x) \otimes E^{\beta}(y),$$

که در اینجا $\otimes$ عملگر ضرب کرونیگر بوده و نیز

$$E^{\alpha}(x) = [E_0^{\alpha}(x), E_1^{\alpha}(x), \dots, E_m^{\alpha}(x)]^T, \quad E^{\beta}(y) = [E_0^{\beta}(y), E_1^{\beta}(y), \dots, E_n^{\beta}(y)]^T.$$

با فرض اینکه

$$E^{\alpha}(x) = A_m X^{\alpha}(x), \quad E^{\beta}(y) = A_n X^{\beta}(y),$$

$$X_{m,n}^{\alpha,\beta}(x,y) = [1, y^{\beta}, \dots, y^{n\beta}, x^{\alpha}, x^{\alpha} y^{\beta}, \dots, x^{\alpha} y^{n\beta}, \dots, x^{m\alpha}, x^{m\alpha} y^{\beta}, \dots, x^{m\alpha} y^{n\beta}]$$

نتیجه می شود که:

$$E^{\alpha,\beta}(x,y) = A_m \otimes A_n X^{\alpha,\beta}(x,y).$$

۳-۲-۳ بسط توابع یک متغیره به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری:

فرض کنید $u(x) \in L^2([0,1])$. این تابع را می توان به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری به صورت زیر بسط داد:

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i E_i^{\alpha}(x) \square \sum_{i=0}^m u_i E_i^{\alpha}(x) = U^T E^{\alpha}(x) = E^{\alpha}(x)^T U, \quad (Y-3)$$

که در اینجا بردار U به صورت زیر تعریف شده است:

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_m]^T.$$

برای تعیین بردار U ، همانند بخش قبل، از ضرب داخلی رابطه (Y-3) با $E_j^{\alpha}(x)$ (با در نظر گرفتن رابطه (3-))
(3) به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$(u(x), E_j^{\alpha}(x)) = \sum_{i=0}^m u_i \int_0^1 E_j^{\alpha}(x) E_i^{\alpha}(x) x^{\alpha-1} dx, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

حال ماتریس $D^{\alpha} = [d_{ij}^{\alpha}]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$d_{ij}^{\alpha} = \int_0^1 E_i^{\alpha}(x) E_j^{\alpha}(x) x^{\alpha-1} dx$$

بنابراین داریم:

$$D^\alpha U = b^\alpha,$$

$$b^\alpha = [b_0^\alpha, b_1^\alpha, \dots, b_m^\alpha]^T, b_j^\alpha = \int_0^1 u(x) E_j^\alpha(x) x^{\alpha-1} dx.$$

در نتیجه، با فرض معکوس پذیری ماتریس D^α ، داریم:

$$U = (D^\alpha)^{-1} b^\alpha.$$

۳-۲-۴ بسط توابع دو متغیره به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری دو متغیره:

فرض کنید $f(x, y) \in L^2([0,1] \times [0,1])$. همانند توابع یک متغیره، این تابع را می توان به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری دو متغیره به صورت زیر بسط داد:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij} E_{i,j}^{\alpha,\beta}(x, y) \square \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} E_{i,j}^{\alpha,\beta}(x, y) = F^T E^{\alpha,\beta}(x, y) = E^{\alpha,\beta}(x, y)^T F, \quad (۸-۳)$$

در این فرمول، بردار $E^{\alpha,\beta}(x, y)$ در رابطه (۳-۶) تعریف شده و نیز

$$F = [f_{00}, f_{01}, \dots, f_{0n}, f_{10}, f_{11}, \dots, f_{1n}, \dots, f_{mn}]^T.$$

لم ۳-۲-۱. برای تقریب تابع $f(x, y) \in L^2([0,1] \times [0,1])$ ، داریم:

$$f(x, y) \square F^T E^{\alpha,\beta}(x, y) = E^\alpha(x)^T \Phi^{\alpha,\beta} E^\beta(y),$$

در اینجا $\Phi^{\alpha,\beta} = [\phi_{ij}^{\alpha,\beta}]$ یک ماتریس $(m+1) \times (n+1)$ بوده و نیز داریم:

$$\phi_{ij}^{\alpha,\beta} = f_{ij}.$$

برای محاسبه بردار ضرایب F ، ابتدا قرار دهید:

$$z_{pq}^{\alpha,\beta} = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) E_{pq}^{\alpha,\beta}(x, y) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dx dy.$$

با اسفاده از رابطه (۳-۸) در رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned}
z_{pq}^{\alpha,\beta} &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} \int_0^1 \int_0^1 E_{ij}^{\alpha,\beta}(x,y) E_{pq}^{\alpha,\beta}(x,y) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dx dy \\
&= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} \int_0^1 \int_0^1 E_i^\alpha(x) E_j^\beta(y) E_p^\alpha(x) E_q^\beta(y) x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dx dy \\
&= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n f_{ij} \underbrace{\int_0^1 E_i^\alpha(x) E_p^\alpha(x) x^{\alpha-1} dx}_{w_{pi}^{(m,\alpha)}} \underbrace{\int_0^1 E_j^\beta(y) E_q^\beta(y) y^{\beta-1} dy}_{w_{qj}^{(n,\beta)}} \\
&= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{pi}^{(m,\alpha)} w_{qj}^{(n,\beta)} f_{ij}.
\end{aligned}$$

برای $p = 0, 1, \dots, m$ و $q = 0, 1, \dots, n$ شکل ماتریسی رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$Z = W^{(m,\alpha)} \otimes W^{(n,\beta)} F \quad (9-3)$$

که در این رابطه، $Z = [z_{pq}^{\alpha,\beta}]$ یک ماتریس $(m+1)(n+1) \times (m+1)(n+1)$ بوده و نیز ماتریسهای $W^{(m,\alpha)}$ و $W^{(n,\beta)}$ به ترتیب از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ و $(n+1) \times (n+1)$ هستند. واضح است که با حل دستگاه خطی (9-3) میتوان بردار ضرایب یعنی F را تعیین کرد.

۳-۲-۵ بسط توابع شامل تابع تاخیر به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری:

فرض کنید $h: [0,1] \rightarrow [0,1]$ تابع تاخیر باشد و نیز $u(x) \in L^2([0,1])$ با بکارگیری رابطه (۷-۳) داریم:

$$\begin{aligned}
u(x) \square \sum_{i=0}^m u_i E_i^\alpha(x) &\Rightarrow u(h(x)) \square \sum_{i=0}^m u_i E_i^\alpha(h(x)) = U^T E^\alpha(h(x)) \\
&= U^T A_m X^\alpha(h(x)).
\end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$X^\alpha(h(x)) = [1, h^\alpha(x), h(x)^{2\alpha}, \dots, h(x)^{m\alpha}]^T$$

حال از بسط $h(x)^{i\alpha}$ برای $i = 0, 1, \dots, m$ ، میتوان نوشت:

$$h(x)^{i\alpha} \square \sum_{j=0}^m H_j^{i,\alpha} E_j^\alpha(x) = (H^{i,\alpha})^T E^\alpha(x).$$

بنابراین میتوان نتیجه گرفت:

$$u(h(x)) = U^T A_m D^\alpha E^\alpha(x), \quad (۱۰-۳)$$

که در اینجا داریم:

$$D^\alpha = \begin{pmatrix} (H^{0,\alpha})^T \\ (H^{1,\alpha})^T \\ \vdots \\ (H^{m,\alpha})^T \end{pmatrix}.$$

۳-۳ ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل و ضرب توابع اویلر از مرتبه کسری

۱-۳-۳ ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل توابع اویلر از مرتبه کسری

فرض کنید $E^\alpha(t) = [E_0^\alpha(t), E_1^\alpha(t), \dots, E_m^\alpha(t)]^T$ بردار توابع اویلر از مرتبه کسری بوده و نیز I^ν عملگر انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل باشد که در تعریف (1-5-3) آورده شده است. با توجه به تعریف ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل چندجمله ایهای اویلر که در فصل قبل آورده شد گویند Π^α ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل $E^\alpha(t)$ است هرگاه داشته باشیم:

$$I^\nu E^\alpha(x) = \Pi^\alpha E^\alpha(x) \quad (۱۷-۳)$$

که در اینجا Π^α یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ است.

برای تعیین ماتریس Π^α ، همانند فصل عمل می کنیم. از رابطه (۳-۵) داریم:

$$I^\nu E^\alpha(x) = I^\nu A_m X^\alpha(t) = A_m I^\nu X^\alpha(x). \quad (۱۸-۳)$$

با توجه به اینکه $X^\alpha(x) = [1, x^\alpha, x^{2\alpha}, \dots, x^{m\alpha}]^T$ ، نتیجه زیر را می توان گرفت:

$$\begin{aligned} I^\nu X^\alpha(x) &= I^\nu [1, x^\alpha, x^{2\alpha}, \dots, x^{m\alpha}]^T \\ &= \left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} x^\nu, \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(\nu+1+\alpha)} x^{\nu+\alpha}, \dots, \frac{\Gamma(m\alpha+1)}{\Gamma(m\alpha+\nu+1)} x^{\nu+m\alpha} \right]^T \end{aligned}$$

برای تعیین ماتریس عملیاتی Π^α ، لازم است که توابع $\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+\nu+1)} x^{\nu+k\alpha}$ ، $k = 0, 1, \dots, m$ ، را با استفاده

از توابع اویلر از مرتبه کسری به شکل زیر بسط دهیم:

$$\frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+\nu+1)} x^{\nu+k\alpha} \square \sum_{i=0}^m u_i^{k\alpha} E_i^\alpha(x) = (U^{k\alpha})^T E^\alpha(x), \quad k=0,1,\dots,m. \quad (19-3)$$

و در نتیجه

$$I^\nu X^\alpha(x) = \Theta^\alpha E^\alpha(x) \quad (20-3)$$

که در اینجا داریم:

$$\Theta^\alpha = \begin{pmatrix} (U^0)^T \\ (U^\alpha)^T \\ \vdots \\ (U^{m\alpha})^T \end{pmatrix}.$$

با جایگذاری رابطه بالا در (۱۸-۳)، نتیجه زیر را می گیریم:

$$I^\nu E^\alpha(x) = A_m \Theta^\alpha E^\alpha(x).$$

بوضوح ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل توابع اویلر از مرتبه کسری یعنی Π^α به صورت زیر خواهد بود:

$$\Pi^\alpha = A_m \Theta^\alpha. \quad (21-3)$$

۳-۳-۲ ماتریس عملیاتی ضرب مبتنی بر توابع اویلر از مرتبه کسری

همانند فصل قبل، فرض کنید P یک $(m+1)$ بردار باشد. هدف تعیین ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ مانند $\tilde{P}$ است بطوریکه داشته باشیم:

$$E^\alpha(x) E^\alpha(x)^T P = \tilde{P}^\alpha E^\alpha(x), \quad (22-3)$$

با جایگذاری شکل ماتریسی $E^\alpha(x)$ در رابطه بالا، داریم:

$$E^\alpha(x) E^\alpha(x)^T P = A_m X^\alpha(x) X^\alpha(x)^T A_m^T P = A_m \Lambda^\alpha A_m^T P,$$

با در نظر گرفتن اینکه حاصل ضرب $\Lambda^\alpha = X^\alpha(x) X^{\alpha}(x)^T$ یک ماتریس $(m+1) \times (m+1)$ است و نیز با فرض $\Lambda^\alpha = [\gamma_{ij}^\alpha], 1 \leq i, j \leq m+1$ ، داریم:

$$\gamma_{ij}^\alpha = x^{(i+j-2)\alpha}.$$

اگر فرض کنیم $G^\alpha = \Lambda^\alpha A_m^T P$ که $G^\alpha = [G_1^\alpha, G_2^\alpha, \dots, G_{m+1}^\alpha]^T$ در اینصورت با استفاده از رابطه (۷-۳)، هرکدام G_i^α ها را بسط میدهیم. لذا نتیجه می گیریم که:

$$G_i^\alpha = (\Xi_i^\alpha)^T E^\alpha(x), i = 1, 2, \dots, m+1,$$

$$E^\alpha(x) E^\alpha(x)^T P = A_m \Xi^\alpha E(x),$$

که در اینجا داریم:

$$\Xi^\alpha = \begin{pmatrix} (\Xi_1^\alpha)^T \\ (\Xi_2^\alpha)^T \\ \vdots \\ (\Xi_{m+1}^\alpha)^T \end{pmatrix}.$$

بوضوح ماتریس عملیاتی ضرب عبارت است از $\tilde{P}^\alpha = A_m \Xi^\alpha$.

فصل ۴

چند جمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته و ماتریس های
عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب مبتنی بر این چند جمله ای ها

۴-۱ مقدمه

چندجمله ای های متعامد نقش بسیار مهمی در تقریب توابع دارند و در بین چندجمله ای های متعامد، چندجمله ای های چبیشف^{۳۸} یکی از مهم ترین چندجمله ای های شناخته شده در ریاضیات هستند. این چندجمله ای ها حالت های خاص چندجمله ای های ژاکوبی^{۳۹} به ازای $\alpha = \pm \frac{1}{p}$, $\beta = \pm \frac{1}{p}$ هستند. در بین این چندجمله ای ها، چندجمله ای های نوع اول از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. ارتباط نزدیک این چندجمله ای ها با توابع مثلثاتی و خاصیت تعامد گسسته^{۴۰} این چندجمله ای ها در صفرهای چندجمله ای های نوع اول، این چندجمله ای ها را از بقیه چندجمله ای های متعامد متمایز می کند. هم چنین تابع درونیاب در صفرهای چندجمله ای های چبیشف نوع اول تحت نرم بی نهایت^{۴۱} در تقریب می نی ماکس^{۴۲} به تابع اصلی همگراست. این چندجمله ای ها نقش بسیار مهمی در نظریه تقریب دارند. این چندجمله ای ها به صورت گسترده در ریاضیات کاربردی از جمله در انتگرال گیری و مشتق گیری عددی، تقریب کمترین مربعات، درونیابی و در حل عددی معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال و ... مورد استفاده قرار گرفته اند. در این فصل خواص مهمی از این چندجمله ای ها را آورده و سپس مروری بر چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته می کنیم. در ادامه تقریب توابع به کمک این چند جمله ای ها را ارائه داده و در آخر فصل ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری ریمان-لیوویل چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته، ضرب مبتنی بر این چندجمله ای ها و نیز توابع شامل تابع تاخیر را محاسبه می کنیم.

۴-۲ چندجمله ای های چبیشف

چندجمله ای های چبیشف نوع اول تا چهارم را به ترتیب با نمادهای W, V, U, T نشان می دهیم. این چندجمله ای ها به شکل زیر تعریف می شوند:

Chebyshev polynomials³⁸

Jacobi polynomials³⁹

Discrete orthogonality⁴⁰

$\|\cdot\|_{\infty}$ ⁴¹

Mini-max⁴²

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos \theta, \\
U_n(x) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \\
V_n(x) &= \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}, \\
W_n(x) &= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{۴-۱}$$

که در اینجا $x = \cos \theta$ است.

۴-۲-۱ تعامد چند جمله ای های چیشف

چندجمله ای های چیشف نوع اول تا چهارم یعنی T, U, V, W ، به ترتیب نسبت به توابع وزن

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},$$

متعامد هستند به عبارتی دیگر داریم:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_m(x) U_n(x) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} V_m(x) V_n(x) dx = \pi \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} W_m(x) W_n(x) dx = \pi \delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, \dots,$$

که در آن δ_{mn} دلتای کرونکر بوده و داریم:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

این چندجمله ای ها دارای خواص زیر هستند:

$$1) \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \quad T_{-1}(x) = 0,$$

- 2) $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_{-1}(x) = 0,$
- 3) $V_{n+1}(x) = 2xV_n(x) - V_{n-1}(x), V_0(x) = 1, V_1(x) = 2x - 1, V_{-1}(x) = 0,$
- 4) $W_{n+1}(x) = 2xW_n(x) - W_{n-1}(x), W_0(x) = 1, W_1(x) = 2x - 1, V_{-1}(x) = 0,$
- 5) $T_n(x) = xU_{n-1}(x) + U_{n-2}(x),$
- 6) $2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x),$
- 7) $xU_{n-1}(x) - (1-x^2)U'_{n-1}(x) = nT_n(x).$
- 8) $(1+x)V_n(x) = T_n(x) + T_{n+1}(x)$
- 9) $(1-x)W_n(x) = T_n(x) - T_{n+1}(x)$
- 10) $T_{mn}(x) = T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)),$
- 11) $U_{mn-1}(x) = U_{m-1}(T_n(x))U_{n-1}(x) = U_{n-1}(T_m(x))U_{m-1}(x),$
- 12) $T_n(2x^2 - 1) = 2T_n^2(x) - 1 = T_{2n}(x^2),$
- 13) $T_{m+n}(x) = T_m(x)T_n(x) - (1-x^2)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x),$
- 14) $U_{m+n+1}(x) = U_{m-1}(x)T_n(x) + U_{n-1}(x)T_m(x),$
- 15) $T_{m-n}(x) = T_m(x)T_n(x) + (1-x^2)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x),$
- 16) $U_{|m-n-1|}(x) = U_{m-1}(x)T_n(x) - U_{n-1}(x)T_m(x),$
- 17) $2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{|m-n|}(x),$
- 18) $2(1-x^2)U_{m-1}(x)U_{n-1}(x) = T_{|m-n|}(x) - T_{m+n}(x),$
- 19) $2T_n(x)U_{m-1}(x) = U_{m+n-1}(x) + U_{|m-n-1|}(x),$
- 20) $2T_n(x) = V_n(x) + V_{n-1}(x)$
- 21) $2T_n(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x)$
- 22) $V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$
- 23) $W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$
- 24) $2T_n(x) = U_n(x) - U_{n-2}(x)$
- 25) $xU_{n-1}(x) = U_n(x) - T_n(x).$

اثبات بعضی از این روابط در ب[Arghang] آمده است. با استفاده از تعامد چندجمله ای های چبیشف نتیجه می شود که چندجمله ای های چبیشف از درجه n بر هر چندجمله ای از درجه کمتر از n متعامد هستند. زمانی که درجه چندجمله ای مورد نظر بزرگتر یا مساوی با n باشد نتیجه جالبی بدست می آید. قضیه زیر به این مطلب اشاره می کند.

(2-2-2) قضیه: به ازای هر دو عدد طبیعی m و n داریم

$$(i) \quad I_{m,n}^T = \int_{-1}^1 \frac{x^m T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{2^{-m} \pi \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}, & m \geq n, \quad m-n \text{ is even}, \\ 0, & n > m \text{ or } m-n \text{ is odd}. \end{cases}$$

$$(ii) \quad I_{m,n}^U = \int_{-1}^1 x^m \sqrt{1-x^2} U_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2^{-1-m} (n+1) \pi \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m+n}{2}+2\right)}, & m \geq n, \quad m-n \text{ is even}, \\ 0, & n > m \text{ or } m-n \text{ is odd}. \end{cases}$$

$$(iii) \quad V_{m,n}^T = \int_{-1}^1 x^m \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} V_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m < n, \\ \frac{2^{-m} \pi \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}, & m > n+1, \quad m-n \text{ is even}, \\ \frac{2^{-m} \pi \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}+1\right)}, & m > n+1, \quad m-n \text{ is odd}, \\ \frac{3\pi}{2^{n+1}}, & m = n+1, \\ \frac{\pi}{2^n}, & m = n, \end{cases}$$

$$(iv) \quad W_{m,n}^T = \int_{-1}^1 x^m \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} W_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m < n, \\ \frac{2^{-m} \pi \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m-n}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}, & m > n+1, \quad m-n \text{ is even}, \\ \frac{-2^{-m} \pi \Gamma(m+1)}{\Gamma\left(\frac{m-n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+n+1}{2}+1\right)}, & m > n+1, \quad m-n \text{ is odd}, \\ \frac{\pi}{2^{n+1}}, & m = n+1, \\ \frac{\pi}{2^n}, & m = n, \end{cases}$$

اثبات : در [Arghang]

۳-۴ چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته

با روشی که در این بخش ارائه می شود می توان چندجمله ای چبیشف انتقال یافته از هر نوع را ساخت. در بخش قبل دیدیم که چندجمله ای های چبیشف در بازه $[-1,1]$ تعریف می شوند. حال برای تعریف این چندجمله ایها در بازه دلخواه $[a,b]$ ، لازم است که تبدیل زیر را در نظر بگیریم:

$$t = \frac{(b-a)}{2}x + \frac{(a+b)}{2}, \quad x \in [-1,1].$$

در این بخش، حالت $a=0, b=1$ را در نظر می گیریم. بنابراین برای این حالت تبدیل به صورت زیر خواهد بود:

$$x = 2t - 1, \quad t \in [0,1]. \quad (4-2)$$

با در نظر گرفتن رابطه بازگشتی

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \quad T_{-1}(x) = 0,$$

برای چندجمله های های چبیشف نوع اول و نیز با بکارگیری تبدیل (4-2) رابطه زیر را نتیجه می گیریم:

$$T_{n+1}(2t-1) = 2(2t-1)T_n(2t-1) - T_{n-1}(2t-1).$$

با فرض $T_n^*(t) = T_n(2t-1)$ رابطه بازگشتی زیر را برای چندجمله های های چبیشف نوع اول انتقال یافته و تعریف شده در بازه $[0,1]$ نتیجه می گیریم:

$$T_{n+1}^*(t) = 2(2t-1)T_n^*(t) - T_{n-1}^*(t), \quad n \in N, \quad (4-3)$$

که در اینجا داریم:

$$T_0^*(t) = 1, T_1^*(t) = 2t - 1.$$

3-4-1 خواص چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته

اگر بتوانیم $T_n^*(t)$ را به شکل بسته و به صورت بسطی از توانهای $t^k, k=0,1,...,n$ بنویسیم در این صورت محاسبه ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل و نیز مشتق کسری کاپوتو چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته کار آسانی خواهد بود. خوشبختانه در [10] ثابت شده است که $T_i^*(t)$ را می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$T_i^*(t) = i \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \frac{(i+k-1)! 2^{2k}}{(i-k)!(2k)!} t^k, \quad (4-4)$$

همچنین برای این چندجمله ایها داریم:

$$i) T_i^*(t) T_j^*(t) = \frac{1}{2} (T_{2i+2j}^*(t) + T_{\lceil 2i-2j \rceil}^*(t)),$$

$$ii) \int T_i^*(t) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{T_{i+1}^*(t)}{i+1} - \frac{T_{i-1}^*(t)}{i-1} \right).$$
(۴-۵)

به راحتی میتوان ثابت کرد که تعامد این چندجمله ایها به صورت زیر است:

$$\int_0^1 T_i^*(t) T_j^*(t) w^*(t) dt = h_i \delta_{ij},$$
(۴-۶)

که در این رابطه داریم:

$$w^*(t) = \frac{1}{\sqrt{t-t^2}},$$

$$h_i = \begin{cases} \pi, & i = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & i \geq 1. \end{cases}$$

۴-۳-۲ شکل ماتریسی چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته

فرض کنید:

$$X(t) = [1, t, t^2, \dots, t^m]^T,$$

$$V^{(m)} = [v_0^{(m)}, v_1^{(m)}, \dots, v_m^{(m)}],$$

با استفاده از رابطه (۴-۴) می توان $T_m^*(t)$ را به صورت زیر نوشت:

$$T_m^*(t) = V^{(m)} X(t),$$
(۴-۷)

که

$$v_k^{(m)} = (-1)^{m-k} \frac{m(m+k-1)! 2^{2k}}{(m-k)!(2k)!}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$
(۴-۸)

حال با فرض $T^{*,m}(t) = [T_0^m(t), T_1^m(t), \dots, T_m^m(t)]^T$ به راحتی نتیجه می گیریم:

$$T^{*,m}(t) = A_m X(t),$$
(۴-۹)

که در اینجا

$$A_m = \begin{pmatrix} V^{(0)} \\ V^{(1)} \\ \vdots \\ V^{(m)} \end{pmatrix}$$

یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ است. همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
V^{(0)} &= [1, 0, \dots, 0], \\
V^{(1)} &= [v_0^1, v_1^1, 0, \dots, 0], \\
V^{(2)} &= [v_0^2, v_1^2, v_2^2, 0, \dots, 0], \\
&\vdots \\
V^{(m)} &= [v_0^m, v_1^m, v_2^m, \dots, v_m^m].
\end{aligned} \tag{۴-۱۰}$$

۴-۴ بسط توابع به کمک چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته

۴-۴-۱ توابع یک متغیره

فرض کنید $u(x) \in L^2([0,1])$. این تابع را می توان به کمک چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته به صورت زیر بسط داد:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i T_i^*(t) \square \sum_{i=0}^m u_i T_i^*(t) \square U^T T^{*,m}(t) = T^{*,m}(t)^T U, \tag{۴-۱۱}$$

که در اینجا بردار U به صورت زیر تعریف شده است:

$$U = [u_0, u_1, \dots, u_m]^T.$$

برای تعیین بردار U ، از رابطه (۴-۶) یعنی ویژگی تعامد چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned}
(u(t), T_j^*(t)) &= \sum_{i=0}^m u_i \int_0^1 T_i^*(t) T_j^*(t) w^*(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^m u_i h_i \delta_{ij} = u_j h_j, \quad j = 0, 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$u_j = \frac{1}{h_j} \int_0^1 u(t) T_j^*(t) w(t) dt.$$

۴-۴-۲ توابع دو متغیره

فرض کنید $f(x, y) \in L^2([0,1] \times [0,1])$. همانند توابع یک متغیره، می توان تابع $f(x, y)$ را در جملات چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته دو متغیره به صورت زیر بسط داد:

$$f(s, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_{ij} T_{ij}^*(s, t) \square \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m f_{ij} T_{ij}^*(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m f_{ij} T_i^*(s) T_j^*(t) = T^{*,m}(s)^T F T^{*,m}(t), \quad (4-12)$$

که در اینجا $T_{ij}^*(s, t) = T_i^*(s) T_j^*(t)$ ، یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و دارای درآیه های به صورت زیر خواهد بود:

$$f_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \int_0^1 \int_0^1 f(s, t) T_i^*(s) T_j^*(t) w(s) w(t) ds dt, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (4-13)$$

۴-۴-۳ توابع شامل تابع تاخیر

فرض کنید $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ تابع تاخیر بوده و نیز $u(x) \in L^2([0, 1])$. برای بسط $u(h(t))$ با جملات چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته، رابطه (۴-۱۱) را بکار می بریم. داریم:

$$u(t) \square \sum_{i=0}^m u_i T_i^m(t) \Rightarrow u(h(t)) \square \sum_{i=0}^m u_i T_i^m(h(t)) = U^T T^{*,m}(h(t)) \\ = U^T A_m X(h(t)).$$

حال برای نوشتن بسط $u(h(t))$ با جملات چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته، کافی است که $X(h(t)) = [1, h(t), h^2(t), \dots, h^m(t)]^T$ را به کمک این چند جمله ای ها بسط دهیم. برای این منظور داریم:

$$h^i(t) \square \sum_{j=0}^m H_j^i T_j^i(t) = (H^i)^T T^{*,m}(t), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

که در اینجا $H^j = [H_0^j, H_1^j, \dots, H_m^j]^T$ بردار ضرائب بوده و داریم:

$$H_i^j = \frac{1}{h_i} \int_0^1 h^j(t) T_i^*(t) w(t) dt, \quad i, j = 0, 1, \dots, m. \quad (4-14)$$

بنابراین میتوان نتیجه زیر را گرفت:

$$u(h(t)) \square U^T A_m H T^{*,m}(t), \quad (4-15)$$

که در آن

$$H = \begin{pmatrix} (H^0)^T \\ (H^1)^T \\ \vdots \\ (H^m)^T \end{pmatrix}.$$

۴-۵ ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل و ضرب مبتنی بر چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته

۴-۵-۱ ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته

ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته در [9] ساخته شده است. در این بخش با روش بسیار ساده این ماتریس را بدست می آوریم. همانطور که در فصل قبل تعریف کردیم تعریف ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته به صورت زیر است:

تعریف ۴-۵-۱ فرض کنید $T^{*,m}(t) = [T_0^m(t), T_1^m(t), \dots, T_m^m(t)]^T$ بردار چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته بوده و نیز I^γ عملگر انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل باشد که در تعریف (1-5-3) آورده شده است. گویند $\prod^\gamma$ ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل $T^{*,m}(t)$ است هرگاه داشته باشیم:

$$I^\gamma T^{*,m}(t) = \prod^\gamma T^{*,m}(t) \quad (4-16)$$

که در اینجا $\prod^\gamma$ یک ماتریس از $(m+1) \times (m+1)$ مرتبه است.

برای بدست آوردن ماتریس $\prod^\gamma$ ، همانند روش فصل سوم عمل می کنیم. از رابطه (4-9) داریم:

$$I^\nu T^{*,m}(t) = I^\nu A_m X(t) = A_m I^\nu X(t). \quad (4-17)$$

در فصل سوم ثابت کردیم که:

$$\begin{aligned} I^\lambda X(t) &= I^\gamma [1, t, t^2, \dots, t^m]^T \\ &= \left[\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} t^\lambda, \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\nu+2)} t^{\gamma+1}, \dots, \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\nu+1)} t^{\gamma+m} \right]^T. \end{aligned}$$

حال بسط $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}t^{\gamma+k}$ را برای $k=0,1,\dots,m$ با استفاده از چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته می نویسیم. داریم:

$$\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}t^{\gamma+k} \square \sum_{i=0}^m u_i^k T_i^*(t) = (U^k)^T T^{*,m}(t), \quad k=0,1,\dots,m. \quad (4-18)$$

و در نتیجه

$$I^\gamma X(t) = \Theta^\gamma T^{*,m}(t) \quad (4-19)$$

که در اینجا داریم:

$$\Theta^\gamma = \begin{pmatrix} (U^0)^T \\ (U^1)^T \\ \vdots \\ (U^m)^T \end{pmatrix}. \quad (4-20)$$

بوضوح، از روابط (4-17) و (4-20) نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$I^\gamma T^{*,m}(t) = A_m \Theta^\gamma T^{*,m}(t),$$

که در اینجا $\prod^\gamma = A_m \Theta^\gamma$ ماتریس عملیاتی عملگر انتگرال گیری کسری ریمان-لیوویل $T^{*,m}(t)$ است.

۴-۵-۲ ماتریس عملیاتی ضرب مبتنی بر چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته

فرض کنید P یک $(m+1)$ بردار باشد. $\tilde{P}$ ماتریس عملیاتی ضرب نامیده میشود هرگاه داشته باشیم:

$$T^{*,m}(t) T^{*,m}(t)^T P = \tilde{P} T^{*,m}(t). \quad (4-21)$$

برای تعیین ماتریس $\tilde{P}$ ، از شکل ماتریسی $T^{*,m}(t)$ استفاده می کنیم. بنابر این داریم:

$$T^{*,m}(t) T^{*,m}(t)^T P = A_m X(t) X(t)^T A_m^T P = A_m Q A_m^T P,$$

در اینجا درآیه های ماتریس $Q = [q_{ij}]$ ، $1 \leq i, j \leq m+1$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$q_{ij} = t^{i+j-2}.$$

فرض کنید $QA_m^T P = R(t)$ و $R(t) = [r_1(t), r_2(t), \dots, r_{m+1}(t)]^T$. حال به کمک رابطه (۴-۱۱)، داریم:

$$r_i(t) = \Xi_i^T T^{*,m}(t), \quad i = 1, 2, \dots, m+1.$$

بنابراین

$$T^{*,m}(t) T^{*,m}(t)^T P = A_m \Delta T^{*,m}(t), \quad (۴-۲۲)$$

در نتیجه

$$\tilde{P} = A_m \Delta \quad (۴-۲۳)$$

که در اینجا داریم:

$$\Delta = \begin{pmatrix} (\Xi_1)^T \\ (\Xi_2)^T \\ \vdots \\ (\Xi_{m+1})^T \end{pmatrix}. \quad (۴-۲۴)$$

فصل ۵

روش عددی مبتنی بر ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب
توابع اویلر از مرتبه کسری برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری
تاخیری خطی با هسته ضعیف

۵-۱ مقدمه

همانطور که می دانیم محاسبات کسری شاخه ای از آنالیز ریاضی بوده و اخیراً مدل‌های دیفرانسیل و انتگرال کسری، با توجه به کاربردهای زیاد در شاخه های مختلف علوم و مهندسی، علاقه مندان زیادی را به خود جلب کرده است. بعضی از کاربردهای جالب محاسبات کسری را می توان در امواج مغناطیسی [11]، سیستمهای آشوب [12]، سیستمهای فیزیکی [13]، بهینه سازی [14]، سیستمهای دینامیکی غیر خطی [15] و مدل های انتقال گرما [16] مشاهده کرد. جهت مطالعه کاربرد محاسبات کسری در ویسکوالاستیسی، می توان به رفرنس های [17-23] مراجعه کرد. با عنایت به کاربردهای وسیع محاسبات کسری، روشهای عددی مختلفی برای حل عددی معادلات کسری ارائه شده است که این روشها شامل روش تبدیل دیفرانسل کسری [24]، روش تجزیه آدومین [25,26]، روش آنالیز هموتوپي [27,28]، روش موجک [29-32] و روشهای دیگر [33-36] است.

اخیراً روشهای عددی مبتنی بر توابع از مرتبه کسری (چندجمله ای ها یا موجک ها) برای حل معادلات انتگرال دیفرانسل کسری و معادلات دیفرانسیل کسری پیشنهاد شده است که از بین این روشها می توان به روش توابع لاگور تعمیم یافته از مرتبه کسری برای حل عددی دستگاه معادلات کسری [37]، چندجمله ای های برنشتاین از مرتبه کسری برای حل معادله ریکاتی کسری [38]، توابع لژاندر از مرتبه کسری برای حل معادلات کسری [39]، موجکهای برنولی از مرتبه کسری برای حل معادلات دیفرانسیل کسری [40,41]، توابع اویلر از مرتبه کسری برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری [41] اشاره کرد.

در این فصل، یک روش عددی مبتنی بر توابع اویلر از مرتبه کسری برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری و تاخیری زیر ارائه می شود:

$$\begin{cases} D^{\nu} y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^{\mu}} ds + \lambda_2 \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^{\gamma}} ds + \lambda_3 \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s) ds \\ \quad + g(t)y(h(s)) + p(t)y(t) + f(t), \quad \nu > 0, \quad 0 < \mu, \gamma < 1, \\ y^{(j)}(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, [\nu], \quad t \in [0, 1], \end{cases} \quad (1-5)$$

که در این معادله توابع f, g و نیز $r, h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ توابع پیوسته و معلومی هستند.

$k_1(s,t), k_2(s,t), k_3(s,t)$ هسته هایی هستند که در $[0,1] \times [0,1]$ تعریف شده اند. همچنین $y_0^{(i)}, i = 1, 2, \dots, [v]$ و $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ اعداد ثابتی بوده و D^ν نشانگر عملگر مشتق کسری کاپوچو می باشد. برای این منظور، ماتریسهای عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب توابع اویلر از مرتبه کسری را برای تقریب جواب (۱-۵) به کار می بریم. ابتدا مشتق کسری جواب مسئله (۱-۵) یعنی $D^\nu y(t)$ را با جملات توابع اویلر از مرتبه کسری تقریب زده سپس با بکارگیری ماتریس عملیاتی انتگرال گیری کسری، تقریب جواب مسئله یعنی $y(t)$ را بدست می آوریم. در ادامه تقریب $y(h(s))$ را بدست آورده و تقریب های حاصل را در مسئله اصلی یعنی (۱-۵) جایگذاری می کنیم. در نهایت حل مسئله (۱-۵) منجر به حل یک دستگاه معادلات خطی می شود. با حل این دستگاه، جواب مسئله به صورت سری جواب با جملات توابع اویلر از مرتبه کسری بدست می آید.

۵-۲ روش پیشنهادی

در این بخش روش پیشنهادی برای حل مسئله (۱-۵) را ارائه می دهیم. برای این منظور تمامی جملات در معادله این مسئله را به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری و نیز ماتریسهای عملیاتی مبتنی بر این توابع تقریب زده و نمایش ماترسی هر کدام از این جملات را می نویسیم.

۵-۲-۱ تقریب جملات مسئله (۱-۵)

تمامی جملات معلوم و نامعلوم در معادله

$$D^\nu y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds + \lambda_3 \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s) ds \quad (2-5)$$

$$+ g(t)y(h(s)) + p(t)y(t) + f(t),$$

را به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری تقریب می زنیم. جزئیات تقریب در فصل سوم آورده شده است. داریم:

$$\begin{aligned}
D^\nu y(t) &\square \sum_{i=0}^m y_i E_i^\alpha(t) = Y^T E^\alpha(t), \\
p(t) &\square \sum_{i=0}^m p_i E_i^\alpha(t) = P^T E^\alpha(t), \\
g(t) &\square \sum_{i=0}^m g_i E_i^\alpha(t) = G^T E^\alpha(t), \\
f(t) &\square \sum_{i=0}^m f_i E_i^\alpha(t) = F^T E^\alpha(t),
\end{aligned} \tag{۳-۵}$$

$$\begin{aligned}
k_1(s,t) &\square \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n k_{ij}^{(1)} E_i^\alpha(s) E_j^\beta(t) = E^\alpha(s)^T K_1 E^\beta(t), \\
k_2(s,t) &\square \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n k_{ij}^{(2)} E_i^\alpha(s) E_j^\beta(t) = E^\alpha(s)^T K_2 E^\beta(t), \\
k_3(s,t) &\square \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n k_{ij}^{(3)} E_i^\alpha(s) E_j^\beta(t) = E^\alpha(s)^T K_3 E^\beta(t).
\end{aligned}$$

از اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل بر معادله اول رابطه (۳-۵) نتیجه می شود:

$$I^\nu D^\nu y(t) \square I^\nu Y^T E^\alpha(t) = Y^T I^\nu E^\alpha(t) \Rightarrow y(t) - \sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i \square Y^T I^\nu E^\alpha(x) = Y^T \Pi^\nu E^\alpha(x)$$

حال با بسط $\sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i$ در جملات توابع اویلر از مرتبه کسری، داریم:

$$\sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i \square Y_0^T E^\alpha(t),$$

بنابراین تقریب جواب معادله (۲-۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y(t) \square Y^T \Pi^\nu E^\alpha(x) + Y_0^T E^\alpha(x) = (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) E^\alpha(x). \tag{۴-۵}$$

۲-۲-۵ تقریب جملات شامل انتگرال در مسئله (۱-۵)

قبل از اینکه تقریب جملات شامل انتگرال در مسئله (۱-۵) را بدست آوریم حاصل انتگرال

$$\int_0^t \frac{E^\alpha(s) E^\beta(s)^T}{(t-s)^\mu} ds$$

را تعیین می کنیم.

$$۵-۲-۱-۲-۱: \int_0^t \frac{E^\alpha(s)E^\beta(s)^T}{(t-s)^\mu} ds \text{ شکل ماتریسی}$$

با استفاده از تعریف بردارهای $E^\alpha(s)=[1,s^\alpha,...,s^{m\alpha}]^T$ و $E^\beta(s)=[1,s^\beta,...,s^{n\beta}]^T$ ، واضح است که حاصل به صورت ماتریس $(m+1) \times (n+1)$ خواهد بود. با جایگذاری بردارهای $E^\alpha(s)$ و $E^\beta(s)$ در انتگرال فوق، داریم:

$$\int_0^t \frac{E^\alpha(s)E^\beta(s)^T}{(t-s)^\mu} ds = \int_0^t \frac{A_m X^\alpha(s) X^\beta(s)^T A_n^T}{(t-s)^\mu} ds = A_m \int_0^t \frac{X^\alpha(s) X^\beta(s)^T}{(t-s)^\mu} ds A_n^T$$

با فرض $T(s) = X^\alpha(s) X^\beta(s)^T$ به عنوان یک ماتریس $(n+1) \times (m+1)$ ، درآیه این ماتریس به شکل زیر خواهند بود:

$$T(s) = [T_{ij}], \quad T_{ij} = s^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta}.$$

از طرفی طبق تعریف عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل می توان نوشت:

$$I^{1-\mu} t^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^t \frac{s^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta}}{(t-s)^\mu} ds.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{s^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta}}{(t-s)^\mu} ds &= \Gamma(1-\mu) I^{1-\mu} t^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta} \\ &= \Gamma(1-\mu) I^{1-\mu} t^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta} = \Gamma(1-\mu) \frac{\Gamma((i-1)\alpha + (j-1)\beta + 1)}{\Gamma((i-1)\alpha + (j-1)\beta + 2 - \mu)} t^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta + 1 - \mu} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\int_0^t \frac{E^\alpha(s)E^\beta(s)^T}{(t-s)^\mu} ds = A_m M A_n^T \quad (۵-۵)$$

که در اینجا $M = [m_{ij}]$ یک ماتریس $(m+1) \times (n+1)$ بوده و نیز داریم:

$$m_{ij} = \Gamma(1-\mu) \frac{\Gamma((i-1)\alpha + (j-1)\beta + 1)}{\Gamma((i-1)\alpha + (j-1)\beta + 2 - \mu)} t^{(i-1)\alpha + (j-1)\beta + 1 - \mu}. \quad (۶-۵)$$

بدیهی است با فرض $\alpha = \beta$ ، ماتریس M یک ماتریس مربعی و از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ خواهد بود.

$$\int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds \quad \text{۵-۲-۲-تقریب}$$

برای تقریب $\int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds$ از روابط (۵-۳) و (۵-۴) استفاده کرده و به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds &\square \int_0^t \frac{(Y^T \Pi^\nu + Y_0^T)E^\alpha(s)E^\alpha(s)^T K_1 E^\beta(t)}{(t-s)^\mu} ds \\ &= (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) \int_0^t \frac{E^\alpha(s)E^\alpha(s)^T}{(t-s)^\mu} ds K_1 E^\beta(t) \end{aligned}$$

حال با بکارگیری (۵-۵) در رابطه بالا داریم:

$$\int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m M A_m^T K_1 E^\beta(t)$$

با توجه به اینکه $M A_m^T K_1 E^\beta(t)$ یک $(m+1)$ بردار است لذا می توان این بردار را به کمک توابع اوایلر از مرتبه

کسری بسط داد. باید توجه کنیم که درآیه های ماتریس M از رابطه (۵-۶) با فرض $\beta = \alpha$ محاسبه می شوند.

بنابراین با فرض $V^1 = M A_m^T K_1 E^\beta(t)$ که $V^1 = [v_1^1, v_2^1, \dots, v_{m+1}^1]$ ، می توان نوشت:

$$v_j^1 = \chi_{1,j,\alpha,\beta}^T E^\alpha(t), \quad j = 1, 2, \dots, m+1.$$

در نتیجه می توان تقریب $\int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds$ را به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m \Omega^1 E^\beta(t) \quad (۷-۵)$$

بدیهی است که

$$\Omega^1 = \begin{pmatrix} \chi_{1,1,\alpha,\beta}^T \\ \chi_{1,2,\alpha,\beta}^T \\ \vdots \\ \chi_{1,m+1,\alpha,\beta}^T \end{pmatrix}.$$

$$: \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \quad \text{۵-۲-۲-۳-تقریب}$$

همانند زیر بخش قبل برای تقریب $\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds$ روابط (۳-۱۰) و (۵-۴) را بکار می‌گیریم. با در نظر

گرفتن تقریب $y(t)$ از رابطه (۳-۱۰) و نیز با بکارگیری رابطه (۵-۴)، نتیجه زیر را می‌گیریم:

$$\begin{aligned} y(s) &\square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) E^\alpha(s) \Rightarrow \\ y(h(s)) &\square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) E^\alpha(h(s)) \\ &\square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha E^\alpha(s). \end{aligned} \quad (۵-۸)$$

با بکارگیری (۵-۸) در انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds &\square \int_0^t \frac{(Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha E^\alpha(s) E^\alpha(s)^T K_2 E^\beta(t)}{(t-s)^\gamma} ds \\ &= (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha \int_0^t \frac{E^\alpha(s) E^\alpha(s)^T}{(t-s)^\gamma} ds K_2 E^\beta(t) \end{aligned}$$

حال با بکارگیری (۵-۵) در بالا داریم:

$$\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha A_m N A_m^T K_2 E^\beta(t)$$

که در اینجا $N = [n_{ij}]$ یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و نیز داریم:

$$n_{ij} = \Gamma(1-\gamma) \frac{\Gamma((i-1)\alpha + (j-1)\alpha + 1)}{\Gamma((i-1)\alpha + (j-1)\alpha + 2 - \gamma)} t^{(i-1)\alpha + (j-1)\alpha + 1 - \gamma}$$

با توجه به اینکه $NA_m^T K_2 E^\beta(t)$ یک $(m+1)$ بردار است لذا می‌توان این بردار را به کمک توابع اوایلر از مرتبه

کسری بسط داد.. بنابراین با فرض $V^2 = NA_n^T K_2 E^\beta(t)$ که $V^2 = [v_1^2, v_2^2, \dots, v_{m+1}^2]$ می‌توان نوشت:

$$v_j^2 = \chi_{2,j,\alpha,\beta}^T E^\alpha(t), \quad j = 1, 2, \dots, m+1.$$

در نتیجه می توان تقریب $\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds$ را به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \approx (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha A_m \Omega^2 E^\alpha(t) \quad (9-5)$$

که در اینجا Ω^2 یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Omega^2 = \begin{pmatrix} \chi_{2,1,\alpha,\beta}^T \\ \chi_{2,2,\alpha,\beta}^T \\ \vdots \\ \chi_{3,m+1,\alpha,\beta}^T \end{pmatrix}.$$

$$: \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds \quad \text{تقریب ۵-۲-۴-۲}$$

با جایگذاری $y(s)$ و $k_3(s,t)$ به ترتیب از روابط (۳-۱۰) و (۵-۴) در انتگرال بالا داریم:

$$\begin{aligned} & \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds \approx \\ &= (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) \int_0^{r(t)} E^\alpha(s) E^\alpha(s)^T ds K_3 E^\beta(t) \\ &= (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m \int_0^{r(t)} X^\alpha(s) X^\alpha(s)^T ds A_m^T K_3 E^\beta(t) \end{aligned}$$

از طرفی میدانیم که $T(s) = X^\alpha(s) X^\alpha(s)^T$ یک مانریس مربعی از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و نیز

$$T(s) = [T_{ij}] = s^{(i+j-2)\alpha}$$

لذا میتوان نوشت:

$$\int_0^{r(t)} X^\alpha(s) X^\alpha(s)^T ds = Q$$

که در اینجا Q یک ماتریس $(m+1) \times (m+1)$ بوده و

$$Q = [q_{ij}], q_{ij} = r(t)^{(i+j-2)\alpha+1}$$

بنابراین برای تقریب $\int_0^{r(t)} k_3(s, t) y(s) ds$ ، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\int_0^{r(t)} k_3(s, t) y(s) ds \approx (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m Q A_m^T K_3 E^\beta(t).$$

همانند حالت قبل، چون $(Q A_m^T K_3 E^\beta(t))$ یک $(m+1)$ بردار است لذا می توان این بردار را به کمک توابع اویلر از مرتبه کسری بسط داد. بنابراین با فرض $V^3 = Q A_m^T K_3 E^\beta(t)$ که $V^3 = [v_1^3, v_2^3, \dots, v_{m+1}^3]$ ، می توان نوشت:

$$v_j^3 = \chi_{3,j,\alpha,\beta}^T E^\alpha(t), j = 1, 2, \dots, m+1.$$

حال تقریب انتگرال فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^{r(t)} k_3(s, t) y(s) ds \approx (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m \Omega^3 E^\alpha(t), \quad (10-5)$$

که در اینجا Ω^3 یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Omega^3 = \begin{pmatrix} \chi_{3,1,\alpha,\beta}^T \\ \chi_{3,2,\alpha,\beta}^T \\ \vdots \\ \chi_{3,m+1,\alpha,\beta}^T \end{pmatrix}.$$

۳-۲-۵ تقریب جملات $g(t)y(h(s))$ و $p(t)y(t)$ در مسئله (۱-۵):

۱-۳-۲-۵-۱ تقریب $g(t)y(h(s))$: با استفاده از روابط (۴-۵) و (۸-۵) داریم:

$$g(t)y(h(s)) \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha E^\alpha(s) E^\alpha(t)^T G,$$

حال با بکارگیری رابطه (۱۶-۳) نتیجه می شود که:

$$g(t)y(h(s)) \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha \tilde{G} E^\alpha(s). \quad (۱۱-۵)$$

واضح است که ماتریس $\tilde{G}$ از جایگزین P با G در رابطه (۱۶-۳) به دست می آید که $\tilde{G} = A_m \Xi$.

۲-۳-۲-۵-۲ تقریب $p(t)y(t)$:

با استفاده از روابط (۳-۵) و (۴-۵) داریم:

$$p(t)y(t) \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) E^\alpha(s) E^\alpha(t)^T P,$$

با بکارگیری رابطه (۱۶-۳) نتیجه می شود که

$$p(t)y(t) \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) \tilde{P} E^\alpha(s), \quad (۱۲-۵)$$

و $\tilde{P} = A_m \Xi$.

حال برای ارائه روش پیشنهادی برای حل مسئله (۱-۵) تمامی تقریبها در زیر بخش بالا را در معادله (۲-۵)

جایگذاری می کنیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned} & Y^T E^\alpha(t) \square \\ & \lambda_1 (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m \Omega^1 E^\alpha(t) + \lambda_2 (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha A_m \Omega^2 E^\alpha(t) + \lambda_3 (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m \Omega^3 E^\alpha(t) \\ & + (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) A_m D^\alpha \tilde{G} E^\alpha(s) + (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) \tilde{P} E^\alpha(s) + F^T E^\alpha(s), \\ & Y^T \left(I - (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) \left[\lambda_1 A_m \Omega^1 - \lambda_2 A_m D^\alpha A_m \Omega^2 - \lambda_3 A_m \Omega^3 - A_m D^\alpha \tilde{G} - \tilde{P} \right] \right) E^\alpha(s) \square F^T E^\alpha(s), \end{aligned}$$

بنابر این دستگاه خطی زیر را نتیجه خواهیم گرفت:

$$Y^T B \square F^T, \quad (۱۳-۵)$$

که در این دستگاه داریم:

$$B = \left(I - (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) \left[\lambda_1 A_m \Omega^1 - \lambda_2 A_m D^\alpha A_m \Omega^2 - \lambda_3 A_m \Omega^3 - A_m D^\alpha \tilde{G} - \tilde{P} \right] \right).$$

با فرض معکوس پذیری ماتریس B، از حل دستگاه (۵-۱۳) میتوان Y^T را بدست آورد و سپس با جایگذاری در

$$(Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) E^\alpha(t) = y(t) \quad \text{جواب تقریبی مسئله (۵-۱) تعیین می شود.}$$

۵-۳- آنالیز خطا

در این بخش، هدف بررسی آنالیز خطا برای معادله انتگرال دیفرانسیل کسری با هسته منفرد ضعیف به شکل زیر می باشد:

$$D^\nu y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 \int_0^{r(t)} k_2(s,t)y(s) ds + p(t)y(t) + f(t), \quad (14-5)$$

$$\nu > 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1, t \in [0,1].$$

برای محاسبات از نرم “بی نهایت” تعریف شده به صورت $\|f\|_\infty = \max |f(t)|$, $f \in C[a,b]$ استفاده می کنیم.

قضیه ۵-۳-۱: فرض کنید $y(t)$ و $y_m(t)$ به ترتیب جوابهای واقعی و تقریبی معادله (۵-۱۴) در جملات توابع

اولی از مرتبه کسری باشند. همچنین فرض کنید که توابع $y(t)$ ، $p(t)$ و

$$k_i(s,t), i=1,2, (s,t) \in [0,1] \times [0,1] \text{ توابعی پیوسته باشند. اگر}$$

$$\left(|\lambda_1| M_1 \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+2-\mu)} + |\lambda_2| M_2 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} + \|p\|_\infty \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} \right) < 1 \quad (15-5)$$

در این صورت با فرض $M_1 = \|k_1\|_\infty$ و $M_2 = \|k_2\|_\infty$ داریم:

$$y_m(t) \rightarrow y(t), m \rightarrow \infty.$$

اثبات: با اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل، I^ν ، بر طرفین معادله (۵-۱۴) می توان نوشت:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i + \lambda_1 I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 I^\nu \int_0^{r(t)} k_2(s,t)y(s) ds \quad (16-5)$$

$$+ I^\nu p(t)y(t) + I^\nu f(t),$$

حال فرض کنید که $y_m(t) = Y^T E^\alpha(t)$ تقریب جواب معادله (۵-۱۴) باشند و $Y^T = [y_0, y_1, \dots, y_m]$ در

معادله بالا $y(t)$ را با $y_m(t)$ جایگزین کنید. داریم:

$$y_m(t) = \sum_{i=0}^{\lceil \nu \rceil - 1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^\nu + \lambda_1 I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s, t) y_m(s)}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 I^\nu \int_0^{r(t)} k_2(s, t) y_m(s) ds \quad (17-5)$$

$$+ I^\nu p(t) y_m(t) + I^\nu f(t),$$

از کم کردن معادلات (5-16) و (5-17) نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$y(t) - y_m(t) = \lambda_1 I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s, t)(y(s) - y_m(s))}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 I^\nu \int_0^{r(t)} k_2(s, t)(y(s) - y_m(s)) ds$$

$$+ I^\nu p(t)(y(s) - y_m(s)),$$

$$|y(t) - y_m(t)| \leq$$

$$|\lambda_1| \left| I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s, t)(y(s) - y_m(s))}{(t-s)^\mu} ds \right| + |\lambda_2| \left| I^\nu \int_0^{r(t)} k_2(s, t)(y(s) - y_m(s)) ds \right| + |I^\nu p(t)(y(s) - y_m(s))|$$

$$\leq |\lambda_1| I^\nu \int_0^t \frac{|k_1(s, t)| |y(s) - y_m(s)|}{(t-s)^\mu} ds + |\lambda_2| I^\nu \int_0^{r(t)} |k_2(s, t)| |y(s) - y_m(s)| ds + I^\nu |p(t)| |y(s) - y_m(s)|$$

$$\leq |\lambda_1| I^\nu \int_0^t \frac{\|k_1\|_\infty \|y - y_m\|_\infty}{(t-s)^\mu} ds + |\lambda_2| I^\nu \int_0^{r(t)} \|k_2\|_\infty \|y - y_m\|_\infty ds + I^\nu \|p\|_\infty \|y - y_m\|_\infty$$

$$= \|y - y_m\|_\infty \left(|\lambda_1| M_1 I^\nu \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\mu} ds + |\lambda_2| M_2 I^\nu \int_0^{r(t)} ds + \|p\|_\infty I^\nu 1 \right)$$

با توجه به اینکه $I^{1-\mu} 1 = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\mu} ds$ و $I^\nu 1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} t^\nu$ ، لذا داریم:

$$\begin{aligned}
& |y(t) - y_m(t)| \leq \\
& \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 \Gamma(1-\mu) I^{\nu} I^{1-\mu} 1 + |\lambda_2| M_2 I^{\nu} r(t) + \|p\|_{\infty} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu} \right) \\
& \leq \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 \Gamma(1-\mu) I^{\nu+1-\mu} 1 + |\lambda_2| M_2 I^{\nu} 1 + \|p\|_{\infty} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu} \right) \\
& \leq \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+2-\mu)} t^{\nu+1-\mu} + |\lambda_2| M_2 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu} + \|p\|_{\infty} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu} \right) \\
& \leq \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+2-\mu)} + |\lambda_2| M_2 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} + \|p\|_{\infty} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} \right)
\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه زیر را داریم:

$$\|y - y_m\|_{\infty} \left(1 - \left(|\lambda_1| M_1 \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+2-\mu)} + |\lambda_2| M_2 \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} + \|p\|_{\infty} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} \right) \right) \leq 0$$

با در نظر گرفتن شرط (۵-۱۵)، حکم قضیه ثابت می شود.

۵-۴- مثالهای عددی

در این بخش چند مثال عددی برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی در بخش ۵-۲ ارائه می شود. همچنین فرض بر این است که جواب تقریبی مسائل حل شده عبارت است از $(Y^T \Pi^{\nu} + Y_0^T) E^{\alpha}(t) \square y(t)$. قابل ذکر است که محاسبات با نرم افزار Mathematica 11.3 انجام شده است.

مثال ۵-۴-۱. معادله انتگرال دیفرانسیل تاخیری کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$D^{\frac{1}{2}} y(t) = \int_0^t y(s) ds + y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{8}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} - t^2 - \frac{1}{3} t^3 - \frac{t^2}{4}, t \in [0,1].$$

با شرط اولیه $y(0) = 0$ و با جواب واقعی $y(t) = t^2$. واضح است که در این مثال $h(t) = \frac{t}{2}$. برای تعیین جواب

تقریبی این مثال، روش پیشنهادی را بکار برده و خطای مطلق را برای $m = 4, 5$ و $\alpha = 1, \frac{1}{2}$ در نقاط مختلف t در

جدول ۱ نشان دادیم. با توجه به اینکه در مثال فوق مرتبه مشتق $\frac{1}{2}$ هست لذا نتایج عددی برای $\alpha = \frac{1}{2}$ بهتر از حالت

$\alpha = 1$ شده است.

جدول ۱. خطاهای مطلق در مثال ۵-۴-۱

t	$\alpha = 1, m = 3$	$\alpha = 1, m = 4$	$\alpha = \frac{1}{2}, m = 5$
	$ y(t) - y_m(t) $		
0.1	2.7782×10^{-5}	4.1062×10^{-4}	2.1728×10^{-13}
0.2	2.1171×10^{-6}	2.3658×10^{-4}	4.0327×10^{-13}
0.3	8.2092×10^{-5}	3.1194×10^{-4}	5.7634×10^{-13}
0.4	1.8265×10^{-4}	5.7449×10^{-4}	7.9839×10^{-13}
0.5	2.4447×10^{-4}	9.6202×10^{-4}	1.1137×10^{-13}
0.6	2.5511×10^{-4}	1.4123×10^{-3}	1.5561×10^{-12}
0.7	2.4482×10^{-4}	1.8632×10^{-3}	2.1509×10^{-12}

0.8	2.8650×10^{-4}	2.2524×10^{-3}	2.9193×10^{-12}
0.9	4.9570×10^{-4}	2.5177×10^{-3}	3.8771×10^{-12}
1	1.0307×10^{-3}	2.5970×10^{-3}	5.0393×10^{-12}

مثال ۵-۴-۲. معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا از نوع پانتوگراف زیر را در نظر بگیرید [42]:

$$D^v y(t) = \int_0^t e^{x+t} y(s) ds + \int_0^{\frac{1}{4}t} s y(s) ds$$

$$+ \frac{1}{2} y(t) + y\left(\frac{1}{4}t\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t e^{\frac{1}{4}t} + \frac{t^2}{32} - \frac{1}{2} e^{3t} + e^{2t}, y(0) = 0, t \in [0,1].$$

جواب واقعی این مسئله در حالت $v=1$ عبارت است از $y(t) = e^t - 1$. برای تعیین جواب تقریبی این مثال، روش پیشنهادی را بکار برده و ماکسیمم خطای مطلق (MAEs) نتایج عددی روش پیشنهادی با نتایج مقالات [1] و [43] را در جدول ۲ مقایسه کردیم. همچنین در جدول ۳ ماکسیمم خطای مطلق نتایج عددی روش پیشنهادی را برای $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\alpha = 1$ آورده ایم. با توجه به مرتبه مشتق در این مثال، نتایج عددی برای $\alpha = 1$ بهتر از حالت $\alpha = \frac{1}{2}$ است.

جدول ۲. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی و روشهای ارائه شده در مراجع [1] و [43]

N	روش ارائه شده در [43]	M	روش ارائه شده در [1]	M	روش پیشنهاد شده برای $\alpha = 1$
ماکسیمم خطای مطلق					
10	2.2328×10^{-4}	4	1.3772×10^{-4}	4	5.1681×10^{-5}
20	4.7215×10^{-6}	6	1.6885×10^{-7}	5	2.6343×10^{-6}

60	2.2096×10^{-8}	8	1.1029×10^{-10}	6	1.9487×10^{-6}
----	-------------------------	---	--------------------------	---	-------------------------

جدول ۳. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی برای $\alpha = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$

m	ماکسیمم خطای مطلق	
	$\alpha = 1$	$\alpha = \frac{1}{2}$
4	5.1681×10^{-4}	4.17961×10^{-3}
5	2.6343×10^{-6}	8.5267×10^{-4}
6	1.9487×10^{-7}	1.3318×10^{-4}

مثال ۳-۴-۵. این مثال هم به حل معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا از نوع پانتوگراف زیر می پردازد:

$$D^{\nu} y(t) = \int_0^t e^{x+t} y(s) ds + \int_0^{\frac{1}{4}t} sy(s) ds + g(t), y(0) = 0, t \in [0,1],$$

که در اینجا داریم:

$$g(t) = 2t - \frac{9}{16}t^2 - \frac{1}{45}t^3 - t^2 e^{2t} + 2te^{2t} - 2e^{2t} + 2e^t$$

جواب واقعی این مثال برای $\nu = 1$ برابر است با $y(t) = t^2$. در جدول ۴، مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف α و m آورده شده است.

جدول ۳. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی برای $\alpha = 1$ و $\alpha = \frac{1}{2}$

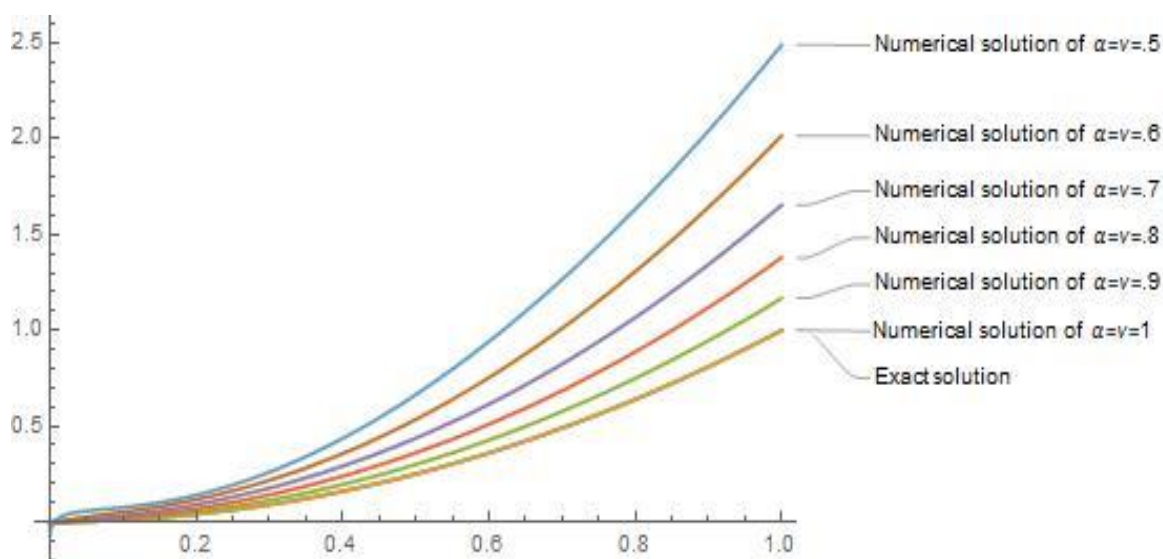
M	ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی	
	$\alpha = \frac{1}{2}$	$\alpha = 1$

2	1.5226×10^{-1}	1.0861×10^{-4}
4	3.4520×10^{-5}	2.57190×10^{-7}
6	4.5311×10^{-7}	3.9051×10^{-11}

مثال ۴-۴-۵. معادله انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری با هسته منفرد ضعیف زیر را در نظر بگیرید:

$$D^{\nu} y(t) = \int_0^t \frac{sy(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^t \frac{sy\left(\frac{1}{2}s\right)}{(t-s)^{\frac{1}{3}}} ds + y\left(\frac{1}{2}t\right) + 2t - \frac{32}{35}t^{\frac{7}{2}} - \frac{243}{1760}t^{\frac{11}{3}} - \frac{1}{4}t^2, \quad t \in [0,1].$$

جواب واقعی این مثال برای $\nu=1$ برابر است با $y(t)=t^2$. پس از اعمال روش پیشنهادی با $\nu=\alpha=1$ و $m=3$ ما کسیم خطای مطلق 5.5511×10^{-11} را نتیجه گرفتیم. در شکل ۱، جوابهای عددی این مثال را برای مقادیر مختلف ν و α آوردیم. نتایج عددی نشان می دهند که با نزدیک شدن مقادیر α و ν به عدد یک، جوابهای عددی نیز به جواب واقعی در حالت $\nu=1$ همگرا می شود. لذا روش پیشنهادی می تواند روش مناسبی برای حل این نوع معادلات باشد.



شکل ۱. گراف جوابهای عددی و واقعی مثال ۴-۴-۵ برای مقادیر مختلف ν و α .

۵-۵ نتیجه گیری

در این فصل یک روش عددی برای تعیین جواب عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری خطی با هسته ضعیف ارائه شد. در این روش با بکارگیری ماتریس های عملیاتی مبتنی بر توابع اویلر از مرتبه کسری و نیز تقریب تمامی جملات مسئله اصلی، مسئله داده شده به یک دستگاه معادلات خطی برگردانده شد. با حل این دستگاه، جواب تقریبی مسئله اصلی بدست آمد. در ادامه آنالیز خطا بررسی شد. در آخر فصل، چند مثال عددی برای نشان دهنده دقت و کارایی روش پیشنهاد شده ارائه شد. نتایج عددی نشان می دهد که روش پیشنهاد شده در این فصل روش مناسبی برای حل این نوع مسائل می باشد.

فصل ۶

روش عددی برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری و تاخیری غیرخطی
مبتنی بر ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب چندجمله ای
های چبیشف نوع اول انتقال یافته

۱-۶ مقدمه

در این فصل، یک روش جدید برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل تأخیری کسری غیرخطی با هسته منفرد ضعیف زیر ارائه می شود:

$$\begin{cases} D^\nu y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)F(y(s))}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds + \lambda_3 \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds \\ + \lambda_4 \int_0^{r(t)} k_4(s,t)y(h(s))ds + w(t)y(h(s)) + p(t)G(y(t)) + f(t), \quad \nu > 0, \quad 0 < \mu, \gamma < 1, \quad (1-6) \\ y^{(j)}(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \lceil \nu \rceil, \quad t \in [0, 1], \end{cases}$$

که در این معادله توابع w, f و نیز $r, h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ توابع پیوسته و معلومی هستند. همچنین $k_1(s, t), k_2(s, t), k_3(s, t), k_4(s, t)$ هسته هایی هستند که در $[0, 1] \times [0, 1]$ تعریف شده اند. همچنین $y_0^{(i)}, i = 1, 2, \dots, \lceil \nu \rceil$ و $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ اعداد ثابتی بوده و D^ν نشانگر عملگر مشتق کسری کاپوچو می باشد. در کل این فصل فرض بر این است که

$$G(t) = t^n, F(t) = t^l, \quad l, n \in \mathbb{N}.$$

معادلات از نوع (۱-۶) می تواند در دسته معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترا از نوع پانتوگراف [42]، معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری منفرد و معادلات دیفرانسیل کسری تأخیری قرار گیرد. معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری منفرد در مدل بندی ریاضی پدیده های مختلف مثل مسائل مربوط به انتقال حرارت، تعادل تابشی، کشش و مکانیک شکستگی ظاهر می شوند [44-46]. همچنین معادلات پانتوگراف در زمینه های مختلف علوم نظیر اخترفیزیک، اقتصاد، کنترل، زیست شناسی و الکتروپدینامیک نقش مهمی ایفا می کنند [42, 48-51]. کاربردهای معادلات دیفرانسیل تأخیر را می توان در سیستمهای مختلف فنی از جمله کنترل اتوماتیک، زیست شناسی و شبکه های هیدرولیکی، خطوط انتقال طولانی، اقتصاد و زیست شناسی نیز مشاهده کرد. بنابراین بررسی و حل این گونه معادلات حائز اهمیت است [52, 53]. با توجه به اینکه روش تحلیلی برای حل این نوع از معادلات وجود ندارد و یا اینکه خیلی پیچیده هست لذا توسعه روشهای عددی برای حل این نوع معادلات اجتناب ناپذیر است. برای این منظور، در این فصل، چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته را برای ساختن روش عددی برای حل معادلات از نوع (۱-۶) بکار می بریم. ابتدا ماتریس عملیاتی عملگر انتگرال کسری

چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته را بدست آورده سپس مشتق کسری جواب مسئله (۶-۱) و نیز جواب این مسئله را با سری از جملات چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته تقریب می زنیم. در آخر با نوشتن شکل برداری تمامی جملات مسئله (۶-۱) به کمک چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته، یک دستگاه معادلات غیرخطی را بدست می آوریم. با حل این دستگاه، جواب مسئله را به صورت سری جواب با جملات چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته ارائه می دهیم.

۶-۲ روش پیشنهادی

در این بخش روش پیشنهادی برای حل مسئله (۶-۱) را ارائه میدهیم. همانند فصل ۵ بخش ۵-۲، تمامی جملات معلوم و نامعلوم در این مسئله را به کمک چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته و نیز ماتریسهای عملیاتی مبتنی بر این توابع را تقریب زده و نمایش ماترسی هر کدام از این جملات را می نویسیم.

۶-۲-۱ تقریب جملات مسئله (۶-۱)

در این قسمت، به کمک چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته و مباحث فصل چهارم، تمامی جملات معلوم و نامعلوم در معادله

$$D^{\nu} y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)y(s)}{(t-s)^{\mu}} ds + \lambda_2 \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^{\gamma}} ds + \lambda_3 \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s) ds + g(t)y(h(s)) + p(t)y(t) + f(t), \quad (2-6)$$

را تقریب می زنیم. داریم:

$$\begin{aligned} D^{\nu} y(t) &\square \sum_{i=0}^m y_i T_i^*(t) = Y^T T^{*,m}(t) = T^{*,m}(t)^T Y, \\ p(t) &\square \sum_{i=0}^m p_i T_i^*(t) = P^T T^{*,m}(t), \\ w(t) &\square \sum_{i=0}^m w_i T_i^*(t) = W^T T^{*,m}(t), \\ f(t) &\square \sum_{i=0}^m f_i T_i^*(t) = F^T T^{*,m}(t), \\ k_q(s,t) &\square \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n k_{ij}^{(q)} T_i^*(s) T_j^*(t) = T^{*,m}(s)^T K_q T^{*,m}(t), \quad q = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (3-6)$$

از معادله (۳-۶) داریم:

$$D^\nu y(t) \square Y^T T^{*,m}(t)$$

حال از اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل بر معادله بالا نتیجه می شود:

$$I^\nu D^\nu y(t) \square I^\nu Y^T T^{*,m}(t) = Y^T I^\nu T^{*,m}(t) \Rightarrow y(t) - \sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i \square Y^T I^\nu T^{*,m}(t) = Y^T \Pi^\nu T^{*,m}(t)$$

که در اینجا Π^ν ماتریس عملیانی انتگرال کسری ریمان-لیوویل چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته هست که در فصل چهارم بدست آمده است. همچنین با بسط $\sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i$ در جملات چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته ، داریم:

$$\sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i \square Y_0^T T^{*,m}(t),$$

بنابراین تقریب جواب معادله (۱-۶) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y(t) \square Y^T \Pi^\nu T^{*,m}(t) + Y_0^T T^{*,m}(t) = (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) T^{*,m}(t). \quad (۴-۶)$$

۲-۲-۶ تقریب جملات شامل انتگرال در مسئله (۱-۶)

قبل از اینکه تقریب جملات شامل انتگرال در مسئله (۱-۶) را بدست آوریم حاصل انتگرال

$$\int_0^t \frac{T^{*,m}(s) T^{*,m}(s)^T}{(t-s)^\mu} ds \text{ را تعیین می کنیم.}$$

$$\int_0^t \frac{T^{*,m}(s) T^{*,m}(s)^T}{(t-s)^\mu} ds \quad \text{۱-۲-۲-۶ شکل ماتریسی}$$

در فصل ۴ دیدیم که

$$T^{*,m}(t) = A_m X(t), \quad X(t) = [1, t, \dots, t^m]^T.$$

واضح است که حاصل $T^{*,m}(s) T^{*,m}(s)^T$ یک ماتریس $(m+1) \times (m+1)$ خواهد بود. بنابراین می توان نتیجه گرفت که:

$$\int_0^t \frac{T^{*,m}(s)I^{*,m}(s)^T}{(t-s)^\mu} ds = \int_0^t \frac{A_m X(s)X(s)^T A_m^T}{(t-s)^\mu} ds = A_m \int_0^t \frac{X(s)X(s)^T}{(t-s)^\mu} ds A_m^T$$

با فرض $\Delta = X(s)X(s)^T$ به عنوان یک ماتریس $(m+1) \times (m+1)$ ، درآیه این ماتریس به شکل زیر خواهند بود:

$$\Delta(s) = [\Delta_{ij}], \quad \Delta_{ij} = s^{i+j-2}.$$

همانند فصل پنجم، میتوان نوشت:

$$\int_0^t \frac{s^{(i+j-2)}}{(t-s)^\mu} ds = \Gamma(1-\mu) I^{1-\mu} t^{(i+j-2)} = \Gamma(1-\mu) \frac{\Gamma(i+j-2+1)}{\Gamma(i+j-2+2-\mu)} t^{i+j-2+1-\mu}$$

در نتیجه

$$\int_0^t \frac{T^{*,m}(s)I^{*,m}(s)^T}{(t-s)^\mu} ds = A_m M A_m^T \quad (5-6)$$

که در اینجا $M = [m_{ij}]$ یک ماتریس $(m+1) \times (m+1)$ بوده و نیز داریم:

$$m_{ij} = \Gamma(1-\mu) \frac{\Gamma(i+j-1)}{\Gamma(i+j-\mu)} t^{i+j-2+1-\mu}. \quad (6-6)$$

$$F(y(t)) = y^l(t) \text{ -تقریب ۲-۲-۲-۶}$$

برای تقریب $F(y(t)) = y^l(t)$ از تقریب $y(t) \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) I^{*,m}(t)$ استفاده می کنیم. داریم:

$$F(y(t)) = y^l(t) \square \left((Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) I^{*,m}(t) \right)^l.$$

برای راحتی، فرض می کنیم

$$b^T = (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T)$$

بنابراین

$$F(y(t)) = y^l(t) \square \left(b^T I^{*,m}(t) \right)^l.$$

با محاسبات ساده می توان نتیجه زیر را برای $l = 2, 3, \dots$ گرفت:

$$\begin{aligned}
 y^2(t) &\square \left(b^T T^{*,m}(t) \right) \left(T^{*,m}(t)^T b \right) = b^T T^{*,m}(t) I^{*,m}(t)^T b = b^T \tilde{b} T^{*,m}(t), \\
 y^3(t) &= y^2(t) y(t) \square b^T \tilde{b} T^{*,m}(t) \left(T^{*,m}(t)^T b \right) = b^T \tilde{b}^2 T^{*,m}(t), \\
 y^4(t) &= y^3(t) y(t) \square b^T \tilde{b}^2 T^{*,m}(t) \left(T^{*,m}(t)^T b \right) = b^T \tilde{b}^3 T^{*,m}(t), \\
 y^l(t) &\square b^T \tilde{b}^{l-1} T^{*,m}(t).
 \end{aligned} \tag{۷-۶}$$

$$\int_0^t \frac{k_1(s, t) F(y(s))}{(t-s)^\mu} ds \quad \text{تقریب ۶-۲-۳}$$

برای تقریب $\int_0^t \frac{k_1(s, t) F(y(s))}{(t-s)^\mu} ds$ از روابط (۶-۳) و (۶-۷) استفاده کرده و به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned}
 \int_0^t \frac{k_1(s, t) y^l(s)}{(t-s)^\mu} ds &\square \int_0^t \frac{b^T \tilde{b}^{l-1} T^{*,m}(t) I^{*,m}(t)^T K_1 T^{*,m}(t)}{(t-s)^\mu} ds \\
 &= b^T \tilde{b}^{l-1} \int_0^t \frac{T^{*,m}(t) I^{*,m}(t)^T}{(t-s)^\mu} ds K_1 T^{*,m}(t)
 \end{aligned}$$

حال با بکارگیری (۶-۵) در رابطه بالا داریم:

$$\int_0^t \frac{k_1(s, t) y^l(s)}{(t-s)^\mu} ds \square b^T \tilde{b}^{l-1} A_m M A_m^T K_1 T^{*,m}(t)$$

با توجه به اینکه $MA_m^T K_1 T^{*,m}(t)$ یک $(m+1)$ بردار است می توان این بردار را به کمک چندجمله ایهای

چبیشف نوع اول انتقال یافته بسط داد. بنابراین با فرض $V^1 = MA_m^T K_1 T^{*,m}(t)$ که $V^1 = [v_1^1, v_2^1, \dots, v_{m+1}^1]$ ،

می توان نوشت:

$$v_j^1 = \phi_{1,j}^T T^{*,m}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m+1.$$

در نتیجه می توان تقریب $\int_0^t \frac{k_1(s,t)F(y(s))}{(t-s)^\mu} ds$ را به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^t \frac{k_1(s,t)y^l(s)}{(t-s)^\mu} ds \approx b^T \tilde{b}^{l-1} A_m \Phi^T T^{*,m}(t). \quad (۸-۶)$$

بدیهی است که

$$\Phi^1 = \begin{pmatrix} \phi_{1,1}^T \\ \phi_{1,2}^T \\ \vdots \\ \phi_{1,m+1}^T \end{pmatrix}.$$

$$\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \quad \text{تقریب ۴-۲-۲-۶}$$

برای تقریب $\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds$ روابط (۴-۱۵) و (۴-۴) را بکار برده و می نویسیم:

$$\begin{aligned} y(s) &\approx b^T T^{*,m}(s) \Rightarrow \\ y(h(s)) &\approx b^T T^{*,m}(h(s)) \approx b^T A_m H T^{*,m}(t). \end{aligned} \quad (۹-۶)$$

بکارگیری (۸-۵) در انتگرال فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds &\approx \int_0^t \frac{b^T A_m H T^{*,m}(s) I^{*,m}(s)^T K_2 T^{*,m}(s)}{(t-s)^\gamma} ds \\ &= b^T A_m H \int_0^t \frac{T^{*,m}(s) I^{*,m}(s)^T}{(t-s)^\gamma} ds K_2 T^{*,m}(t) \end{aligned}$$

حال با بکارگیری (۵-۶) در بالا داریم:

$$\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \approx b^T A_m H A_m M A_m^T K_2 T^{*,m}(t)$$

که در اینجا ماتریس $M = [m_{ij}]$ در رابطه (۶-۶) تعریف شده است. با توجه به اینکه $MA_m^T K_2 T^{*,m}(t)$ یک

$(m+1)$ بردار است لذا می توان این بردار را به کمک چند جمله ایهای چیشف نوع اول انتقال یافته بسط داد.

بنابراین با فرض $V^2 = MA_m^T K_2 T^{*,m}(t)$ که $V^2 = [v_1^2, v_2^2, \dots, v_{m+1}^2]$ ، می توان نوشت:

$$v_j^2 = \phi_{2,j}^T T^{*,m}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m+1.$$

در نتیجه می توان تقریب $\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds$ را به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \approx b^T A_m H A_m \Phi^2 T^{*,m}(t) \quad (10-6)$$

که در اینجا Φ^2 یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi^2 = \begin{pmatrix} \phi_{2,1}^T \\ \phi_{2,2}^T \\ \vdots \\ \phi_{3,m+1}^T \end{pmatrix}.$$

$$: \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds \quad \text{تقریب ۵-۲-۲-۶}$$

با جایگذاری $y(s)$ و $k_3(s,t)$ به ترتیب از روابط (۳-۶) و (۴-۶) در انتگرال بالا داریم:

$$\begin{aligned} & \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds \approx \\ & = b^T \int_0^{r(t)} T^{*,m}(s) T^{*,m}(s)^T ds K_3 T^{*,m}(t) \\ & = b^T A_m \int_0^{r(t)} X(s) X(s)^T ds A_m^T K_3 T^{*,m}(t) \end{aligned}$$

از طرفی میدانیم که $\Delta(s) = X(s)X(s)^T$ یک مانریس مربعی از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و نیز

$$\Delta(s) = [\Delta_{ij}] = s^{(i+j-2)}$$

لذا میتوان نوشت:

$$\int_0^{r(t)} X(s)X(s)^T ds = Q$$

که در اینجا Q یک ماتریس $(m+1) \times (m+1)$ بوده و

$$Q = [q_{ij}], q_{ij} = \frac{r(t)^{i+j-1}}{i+j-1}$$

بنابراین برای تقریب $\int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds$ ، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds \approx b^T A_m Q A_m^T K_3 T^{*,m}(t).$$

همانند حالت قبل، چون $b^T A_m Q A_m^T K_3 T^{*,m}(t)$ یک $(m+1)$ بردار است لذا می توان این بردار را به کمک چندجمله ایهای چبیشف نوع اول انتقال یافته بسط داد. بنابراین با فرض $V^3 = Q A_m^T K_3 T^{*,m}(t)$ که $V^3 = [v_1^3, v_2^3, \dots, v_{m+1}^3]$ می توان نوشت:

$$v_j^3 = \phi_{3,j}^T T^{*,m}(t), j = 1, 2, \dots, m+1.$$

حال تقریب انتگرال فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s)ds \approx b^T A_m \Phi^3 T^{*,m}(t), \quad (11-6)$$

که در اینجا Φ^3 یک ماتریس از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ بوده و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi^3 = \begin{pmatrix} \phi_{3,1}^T \\ \phi_{3,2}^T \\ \vdots \\ \phi_{3,m+1}^T \end{pmatrix}.$$

$$: \int_0^{r(t)} k_4(s,t)y(h(s))ds \quad \text{تقریب ۶-۲-۲-۶}$$

با توجه به اینکه در زیربخشهای قبلی توضیحات کافی ارائه شده است لذا بدون توضیح تقریب زیر را نتیجه می گیریم:

$$\int_0^{r(t)} k_4(s, t) y(h(s)) ds \approx b^T A_m H A_m^T K_4 T^{*,m}(t). \quad (12-6)$$

فرض کنید

$$V^4 = [v_1^4, v_2^4, \dots, v_{m+1}^4] = Q A_m^T K_4 T^{*,m}(t)$$

که در اینجا داریم:

$$v_j^4 = \phi_{4,j}^T T^{*,m}(t), \quad j = 1, 2, \dots, m+1,$$

در این صورت تقریب فوق به شکل زیر نتیجه خواهد شد:

$$\int_0^{r(t)} k_4(s, t) y(h(s)) ds \approx b^T A_m H A_m \Phi^4 T^{*,m}(t) \quad (13-6)$$

که در این تقریب ماتریس Φ^4 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Phi^4 = \begin{pmatrix} \phi_{4,1}^T \\ \phi_{4,2}^T \\ \vdots \\ \phi_{4,m+1}^T \end{pmatrix}.$$

۳-۲-۵ تقریب جملات $w(t)y(h(t))$ و $p(t)G(y(t))$ در مسئله (۱-۶):

۵-۲-۳-۱-تقریب $w(t)y(h(s))$: با استفاده از روابط (۳-۶) و (۴-۶) داریم:

$$w(t)y(h(s)) \approx b^T A_m H T^{*,m}(t) T^{*,m}(t)^T W,$$

حال با بکارگیری رابطه (۳-۱۶) نتیجه می شود که:

$$w(t)y(h(s)) \approx b^T A_m H \tilde{W} T^{*,m}(t). \quad (14-6)$$

واضح است که نحوه تعیین ماتریس $\tilde{W}$ در روابط (۴-۲۳) و (۴-۲۴) بطور کامل توضیح داده شده است.

۵-۲-۳-۲- تقریب $p(t)G(y(t))$:

با استفاده از روابط (۳-۶) و (۴-۶) داریم:

$$p(t)G(y(t)) = p(t)y^n(t) \square b^T \tilde{b}^{n-1} T^{*,m}(t) T^{*,m}(t)^T P,$$

همانند آنچه که در روابط (۲۳-۴) و (۲۴-۴) توضیح داده شده است می توان نوشت:

$$p(t)G(y(t)) \square b^T \tilde{b}^{n-1} \tilde{P} T^{*,m}(t). \quad (۱۵-۶)$$

حال با بکارگیری معادلات (۳-۶)، (۸-۶)، (۱۰-۶)، (۱۱-۶)، (۱۳-۶)، (۱۴-۶) و (۱۵-۶) در مسئله (۱-۶)،

روش پیشنهادی برای حل این مسئله را می توان ارائه داد. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} & Y^T T^{*,m}(t) \square \\ & \lambda_1 b^T \tilde{b}^{l-1} A_m \Phi^1 T^{*,m}(t) + \lambda_2 b^T A_m H A_m \Phi^2 T^{*,m}(t) + \lambda_3 b^T A_m \Phi^3 T^{*,m}(t) + \lambda_4 b^T A_m H A_m \Phi^4 T^{*,m}(t) \\ & + b^T A_m H \tilde{W} T^{*,m}(t) + b^T \tilde{b}^{n-1} \tilde{P} T^{*,m}(t) + F^T T^{*,m}(t), \\ & Y^T \left(I - (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) \left[\lambda_1 A_m \Omega^1 - \lambda_2 A_m D^\alpha A_m \Omega^2 - \lambda_3 A_m \Omega^3 - A_m D^\alpha \tilde{G} - \tilde{P} \right] \right) E^\alpha(s) \square F^T E^\alpha(s), \end{aligned}$$

با ساده نویسی رابطه بالا معادله زیر را نتیجه می گیریم:

$$Y^T - b^T \left(\lambda_1 \tilde{b}^{l-1} A_m \Phi^1 + \lambda_2 A_m H A_m \Phi^2 + \lambda_3 A_m \Phi^3 + \lambda_4 A_m H A_m \Phi^4 + A_m H + \tilde{b}^{n-1} \tilde{P} \right) \square F^T \quad (۱۶-۶)$$

که در این معادله داریم:

$$b^T = (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T).$$

واضح است که دستگاه (۱۶-۶) یک دستگاه معادلات غیرخطی بوده و با حل این دستگاه می توان Y را تعیین

کرده و سپس جواب تقریبی مسئله (۱-۶) را به صورت زیر ارائه کرد:

$$y(t) \square (Y^T \Pi^\nu + Y_0^T) T^{*,m}(t). \quad (۱۷-۶)$$

۶-۳- آنالیز خطا

در این بخش، هدف بررسی آنالیز خطا برای معادله انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری غیرخطی با هسته منفرد

ضعیف زیر می باشد:

$$D^\nu y(t) = \lambda_1 \int_0^t \frac{k_1(s,t)F(y(s))}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds + \lambda_3 \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s) ds \\ + \lambda_4 \int_0^{r(t)} k_4(s,t)y(h(s)) ds + w(t)y(h(s)) + p(t)G(y(t)) + f(t), \quad (۱۸-۶)$$

$$\nu > 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1, t \in [0,1].$$

برای محاسبات از نرم “بینهایت” یعنی $\|f\|_\infty = \max |f(t)|$, $f \in C[a,b]$ استفاده می کنیم.

قضیه ۱-۳-۶: فرض کنید $y(t)$ و $y_m(t)$ به ترتیب جوابهای واقعی و تقریبی معادله (۱۸-۶) در جملات چندجمله ایهای چیشف نوع اول انتقال یافته باشند. همچنین فرض کنید توابع $y(t)$ ، $p(t)$ و $k_i(s,t)$, $i=1,2,3,4$, $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$ $L_1, L_2, L_3 \in R$ مثبت موجود باشند بطوریکه شرایط زیر برقرار باشند:

$$\begin{aligned} 1) & \|F(y) - F(y_m)\| \leq L_1 \|y - y_m\|, \\ 2) & \|G(y) - G(y_m)\| \leq L_2 \|y - y_m\|, \\ 3) & \|y(h) - y_m(h)\| \leq L_3 \|y - y_m\| \\ 4) & \left(|\lambda_1| M_1 \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\gamma+2-\mu)} + |\lambda_2| M_2 L_3 \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\gamma-\nu+2)} + (|\lambda_3| M_3 + |\lambda_4| M_4 L_3 + \|w\|_\infty + \|p\|_\infty) \frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \right) < 1, \end{aligned}$$

در این صورت با فرض $M_1 = \|k_1\|_\infty$ و $M_3 = \|k_3\|_\infty$ داریم:

$$y_m(t) \rightarrow y(t), m \rightarrow \infty.$$

اثبات: با اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل، I^ν ، بر طرفین معادله (۱۸-۶) می توان نوشت:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^i + \lambda_1 I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s,t)F(y(s))}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 I^\nu \int_0^t \frac{k_2(s,t)y(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \\ + \lambda_3 I^\nu \int_0^{r(t)} k_3(s,t)y(s) ds + \lambda_4 I^\nu \int_0^{r(t)} k_4(s,t)y(h(s)) ds + I^\nu w(t)y(h(s)) \quad (۱۹-۶) \\ + I^\nu p(t)G(y(t)) + I^\nu f(t),$$

حال فرض کنید که $y_m(t) = Y^T T^{*,m}(t)$ تقریب جواب معادله (۱۸-۶) باشند و $Y^T = [y_0, y_1, \dots, y_m]$ با

جایگزینی $y(t)$ با $y_m(t)$ در معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned}
y_m(t) = & \sum_{i=0}^{[\nu]-1} \frac{y^{(i)}(0^+)}{i!} t^m + \lambda_1 I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s,t) F(y_m(s))}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 I^\nu \int_0^t \frac{k_2(s,t) y_m(h(s))}{(t-s)^\gamma} ds \\
& + \lambda_3 I^\nu \int_0^{r(t)} k_3(s,t) y_m(s) ds + \lambda_4 I^\nu \int_0^{r(t)} k_4(s,t) y_m(h(s)) ds + I^\nu w(t) y_m(h(s)) \quad (20-6) \\
& + I^\nu p(t) G(y_m(t)) + I^\nu f(t),
\end{aligned}$$

از کم کردن معادلات (۱۹-۶) و (۲۰-۶) نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
y(t) - y_m(t) = & \lambda_1 I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s,t) (F(y(s)) - F(y_m(s)))}{(t-s)^\mu} ds + \lambda_2 I^\nu \int_0^t \frac{k_2(s,t) (y(h(s)) - F(y_m(s)))}{(t-s)^\gamma} ds \\
& + \lambda_3 I^\nu \int_0^{r(t)} k_3(s,t) (y(s) - y_m(s)) ds + \lambda_4 I^\nu \int_0^{r(t)} k_4(s,t) (y(h(s)) - y_m(h(s))) ds \\
& + I^\nu w(t) (y(h(s)) - y_m(h(s))) + I^\nu p(t) (G(y(t)) - G(y_m(t))), \\
|y(t) - y_m(t)| \leq & |\lambda_1| \left| I^\nu \int_0^t \frac{k_1(s,t) (F(y(s)) - F(y_m(s)))}{(t-s)^\mu} ds \right| + |\lambda_2| \left| I^\nu \int_0^t \frac{k_2(s,t) (y(h(s)) - F(y_m(s)))}{(t-s)^\gamma} ds \right| \\
& + |\lambda_3| \left| I^\nu \int_0^{r(t)} k_3(s,t) (y(s) - y_m(s)) ds \right| + |\lambda_4| \left| I^\nu \int_0^{r(t)} k_4(s,t) (y(h(s)) - y_m(h(s))) ds \right| \\
& + |I^\nu w(t) (y(h(s)) - y_m(h(s)))| + |I^\nu p(t) (G(y(t)) - G(y_m(t)))|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq |\lambda_1| I^\nu \int_0^t \frac{|k_1(s, t)| |(F(y(s)) - F(y_m(s)))|}{(t-s)^\mu} ds + |\lambda_2| I^\nu \int_0^t \frac{|k_2(s, t)| |(y(h(s)) - F(y_m(s)))|}{(t-s)^\gamma} ds \\
&\quad + |\lambda_3| I^\nu \int_0^{r(t)} |k_3(s, t)| |(y(s) - y_m(s))| ds + |\lambda_4| I^\nu \int_0^{r(t)} |k_4(s, t)| |(y(h(s)) - y_m(h(s)))| ds \\
&\quad + I^\nu \|w(t)\| |(y(h(s)) - y_m(h(s)))| + I^\nu \|p(t)\| |(G(y(t)) - G(y_m(t)))| \\
&\leq |\lambda_1| I^\nu \int_0^t \frac{\|k_1\|_\infty L_1 \|y - y_m\|_\infty}{(t-s)^\mu} ds + |\lambda_2| I^\nu \int_0^t \frac{\|k_2\|_\infty L_3 \|y - y_m\|_\infty}{(t-s)^\gamma} ds \\
&\quad + |\lambda_3| I^\nu \int_0^{r(t)} \|k_3\|_\infty \|y - y_m\|_\infty ds + |\lambda_4| I^\nu \int_0^{r(t)} \|k_4\|_\infty L_3 \|y - y_m\|_\infty ds \\
&\quad + I^\nu \|w\|_\infty L_3 \|y - y_m\|_\infty + I^\nu \|p\|_\infty L_2 \|y - y_m\|_\infty \\
&= \|y - y_m\|_\infty \left(|\lambda_1| M_1 L_1 I^\nu \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\mu} + |\lambda_2| M_2 L_3 I^\nu \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\gamma} + |\lambda_3| M_3 I^\nu \int_0^{r(t)} ds + |\lambda_4| M_4 L_3 I^\nu \int_0^{r(t)} ds \right. \\
&\quad \left. + \|w\|_\infty L_3 I^\nu 1 + \|p\|_\infty L_2 I^\nu 1 \right).
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\mu} = \Gamma(1-\mu) I^{1-\mu} 1$ می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&\|y - y_m\|_\infty \leq \\
&\|y - y_m\|_\infty \left(|\lambda_1| M_1 L_1 \Gamma(1-\mu) I^\nu I^{1-\mu} 1 + |\lambda_2| M_2 L_3 \Gamma(1-\gamma) I^\nu I^{1-\gamma} 1 + |\lambda_3| M_3 I^\nu r(t) + |\lambda_4| M_4 L_3 I^\nu r(t) \right. \\
&\quad \left. + \|w\|_\infty L_3 I^\nu 1 + \|p\|_\infty L_2 I^\nu 1 \right) \\
&= \|y - y_m\|_\infty \left(|\lambda_1| M_1 L_1 \Gamma(1-\mu) I^{1-\mu+\nu} 1 + |\lambda_2| M_2 L_3 \Gamma(1-\gamma) I^{1-\gamma+\nu} 1 + |\lambda_3| M_3 I^\nu r(t) + |\lambda_4| M_4 L_3 I^\nu r(t) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|w\|_{\infty} L_3 I^{\nu} 1 + \|p\|_{\infty} L_2 I^{\nu} 1) \\
& \leq \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 L_1 \Gamma(1-\mu) I^{1-\mu+\nu} 1 + |\lambda_2| M_2 L_3 \Gamma(1-\gamma) I^{1-\gamma+\nu} 1 + |\lambda_3| M_3 I^{\nu} 1 + |\lambda_4| M_4 L_3 I^{\nu} 1 \right. \\
& \quad \left. + \|w\|_{\infty} L_3 I^{\nu} 1 + \|p\|_{\infty} L_2 I^{\nu} 1 \right) \\
& = \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 L_1 \Gamma(1-\mu) I^{1-\mu+\nu} 1 + |\lambda_2| M_2 L_3 \Gamma(1-\gamma) I^{1-\gamma+\nu} 1 \right. \\
& \quad \left. + (|\lambda_3| M_3 + |\lambda_4| M_4 L_3 + \|w\|_{\infty} L_3 + \|p\|_{\infty} L_2) I^{\nu} 1 \right) \\
& = \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 L \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+2-\mu)} t^{\nu+1-\mu} + |\lambda_2| M_2 L_3 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma+\nu)} t^{1-\gamma+\nu} \right. \\
& \quad \left. + (|\lambda_3| M_3 + |\lambda_4| M_4 L_3 + \|w\|_{\infty} L_3 + \|p\|_{\infty} L_2) \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} t^{\nu} \right) \\
& \leq \|y - y_m\|_{\infty} \left(|\lambda_1| M_1 L \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+2-\mu)} + |\lambda_2| M_2 L_3 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma+\nu)} \right. \\
& \quad \left. + (|\lambda_3| M_3 + |\lambda_4| M_4 L_3 + \|w\|_{\infty} L_3 + \|p\|_{\infty} L_2) \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} \right)
\end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
& \|y - y_m\|_{\infty} \times \\
& \left(1 - \left(|\lambda_1| M_1 L \frac{\Gamma(1-\mu)}{\Gamma(\nu+2-\mu)} + |\lambda_2| M_2 L_3 \frac{\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma+\nu)} + (|\lambda_3| M_3 + |\lambda_4| M_4 L_3 + \|w\|_{\infty} L_3 + \|p\|_{\infty} L_2) \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\nu+1)} \right) \right) \leq 0
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن شرط (۴)، حکم قضیه ثابت می شود.

۴-۶- مثالهای عددی

برای نشان دادن کارایی و دقت روش پیشنهادی در این فصل چند مثال عددی ارائه می شود. محاسبات عددی با نرم افزار Mathematica 11.3 انجام گرفته است. جواب تقریبی مسائل حل شده عبارت است از

$$y(t) \approx (Y^T \Pi^v + Y_0^T) T^{*,m}(t)$$

مثال ۴-۶-۱. معادله انتگرال دیفرانسیل تاخیری کسری با هسته منفرد ضعیف زیر را در نظر بگیرید:

$$D^{\frac{1}{2}} y(t) = \int_0^t \frac{y^2(x)}{(t-x)^{\frac{1}{2}}} dx + \int_0^t y^2(x) dx + y(t) + y\left(\frac{t}{2}\right) + f(t), \quad t \in [0,1],$$

با شرط اولیه $y(0) = 0$ ، جواب واقعی $y(t) = t^2$ و

$$f(t) = \frac{8}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} - t^2 - \frac{1}{5} t^5 - \frac{t^2}{4} - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5.5)} t^{4.5}.$$

با بکارگیری روش پیشنهادی در این فصل، جواب عددی این مثال را به کمک چند جمله ای های چیشف نوع اول انتقال یافته بدست آورده و خطای مطلق را برای $m = 2, 4, 8$ در نقاط مختلف t در جدول ۱ نشان دادیم.

جدول ۱. خطاهای مطلق در مثال ۶-۴-۱

t	m = 2	m = 4	m = 8
	$ y(t) - y_m(t) $		
0.1	1.7479×10^{-3}	1.9660×10^{-4}	7.7083×10^{-6}
0.2	3.3353×10^{-3}	3.1090×10^{-4}	1.2432×10^{-5}
0.3	4.0676×10^{-3}	4.0094×10^{-4}	2.8632×10^{-5}
0.4	3.9449×10^{-3}	4.6192×10^{-4}	2.2303×10^{-5}
0.5	2.9671×10^{-3}	5.4669×10^{-4}	2.3527×10^{-5}
0.6	1.1342×10^{-3}	7.6566×10^{-4}	5.5665×10^{-5}
0.7	1.5536×10^{-3}	1.2869×10^{-3}	9.4956×10^{-5}
0.8	5.0966×10^{-3}	2.3361×10^{-3}	1.2738×10^{-4}
0.9	9.4946×10^{-3}	4.1965×10^{-3}	2.2419×10^{-4}
1	1.4748×10^{-2}	7.2091×10^{-3}	4.1218×10^{-4}

مثال ۶-۴-۲. معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا-فردهلم با هسته ضعیف زیر را در نظر بگیرید [54]:

$$D^{\frac{1}{4}}y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{y(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \frac{1}{3} \int_0^1 (t-s)y(s)ds + g(t), \quad y(0) = 0, \quad t \in [0,1].$$

جواب واقعی این مسئله عبارت است از $y(t) = t^3 + t^2$. در جدول ۲، ماکسیمم خطای مطلق (MAEs) نتایج عددی روش پیشنهادی را برای مقادیر مختلف m نشان داده ایم. همچنین مقایسه نتایج عددی روش پیشنهادی برای $m = 6, 12$ با نتایج عددی روشهای پیشنهاد شده در مقالات [54] و [55] در جدول ۳ آورده شده است.

جدول ۲. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق برای مقادیر $m = 2, 4, 6, 9$ در مثال ۶-۴-۲

m	ماکسیمم خطای مطلق
2	4×10^{-1}
4	5.4×10^{-5}
6	1.5×10^{-5}
9	4.1×10^{-6}

جدول ۳. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی با $m = 6, 12$ و روشهای ارائه شده در مراجع [54] و

[55]

روش	$m = 6$	$m = 12$
هم محلی ژاکوبی با $\alpha = -0.5, \beta = 1$ [54]	2.4623×10^{-4}	2.7321×10^{-5}
هم محلی توابع بلاک پالس [55]	1.35×10^{-1}	7.25×10^{-2}
پیشنهاد شده	1.5×10^{-5}	4×10^{-6}

مثال ۶-۴-۳. این مثال به حل معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا غیرخطی زیر می پردازد:

$$D^{\nu} y(t) = \int_0^t y^2(s) ds + \int_0^t e^{s+t} y(s) ds + \int_0^{\frac{1-t}{4}} s y(s) ds + y\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{1}{2} y(t) + g(t), \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

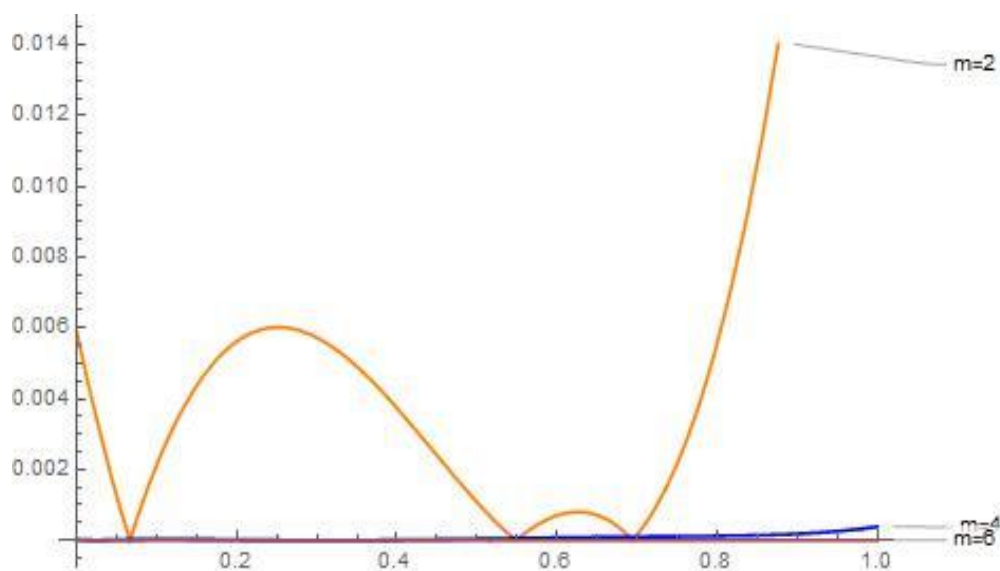
که در اینجا داریم:

$$g(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t e^{\frac{1}{4}t} + \frac{t^2}{32} - \frac{1}{2} e^{3t} + e^{2t} - (e^t - 1)^2 - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{1}{2} - t + 2 + 2e^t + 2.$$

جواب واقعی این مثال برای $v=1$ برابر است با $y(t)=e^t-1$. در جدول ۴، مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف m آورده شده است. واضح است که با افزایش m خطای مطلق کم می شود. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف m در شکل ۱ آورده شده است.

جدول ۴. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق برای مقادیر $m=2,4,6$ در مثال ۳-۴-۶

m	ماکسیمم خطای مطلق
2	1.4×10^{-2}
4	3.34×10^{-4}
6	8.75×10^{-7}



شکل ۱. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی برای مقادیر $m=2,4,6$ در مثال ۳-۴-۶

مثال ۴-۴-۶. معادله انتگرال دیفرانسیل از نوع پانتوگراف زیر را در نظر بگیرید [42,56]:

$$D^v y(t) = \int_0^t e^{s+t} y(s) ds + \int_0^{\frac{1}{4}} s y(s) ds + y\left(\frac{t}{4}\right) + \frac{1}{2} y(t) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} t e^{\frac{1}{4}t} + \frac{t^2}{32} - \frac{1}{2} e^{3t} + e^{2t}, y(0) = 0, t \in [0,1].$$

جواب واقعی این مثال برای $\nu = 1$ برابر است با $y(t) = e^t - 1$. در جدول ۵، مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی و روشهای پیشنهاد شده در مراجع [56]، [43] و [42] آورده شده است.

جدول ۵. مقایسه ماکسیمم خطای مطلق روش پیشنهادی و روشهای ارائه شده در مراجع [42]، [43] و [56]

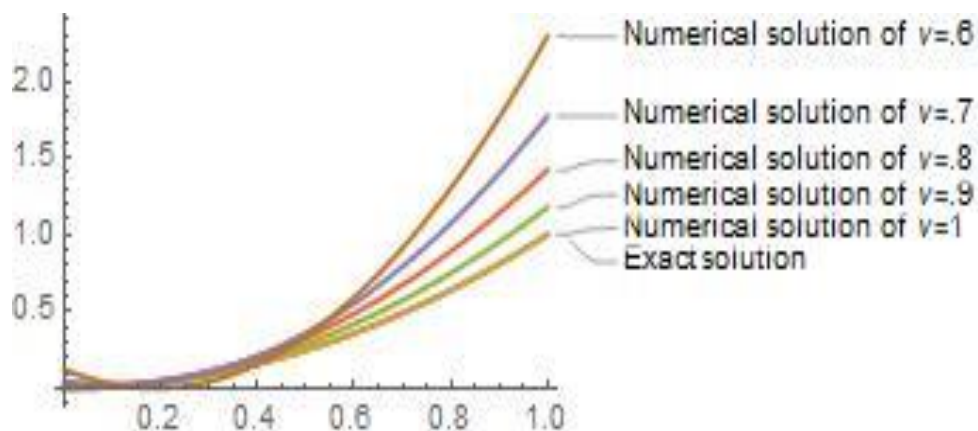
برای مثال ۳-۴-۶

روش [43]		روش [42]		روش [56]		روش پیشنهاد شده	
N	MAEs	M	MAEs	m	MAEs	m	MAEs
10	2.2328×10^{-4}	4	1.3772×10^{-4}	4	5.1681×10^{-5}	4	5.4496×10^{-5}
20	4.7215×10^{-6}	6	1.6885×10^{-7}	5	2.6343×10^{-6}	5	4.0071×10^{-7}
60	2.2098×10^{-8}	8	1.1029×10^{-10}	6	1.9487×10^{-6}	6	4.6035×10^{-8}

مثال ۵-۴-۶. معادله انتگرال دیفرانسیل تاخیری کسری غیرخطی با هسته منفرد ضعیف زیر را در نظر بگیرید:

$$D^\nu y(t) = \int_0^t \frac{y^2(s)}{(t-s)^{\frac{1}{2}}} ds + \int_0^t \frac{sy\left(\frac{1}{2}s\right)}{(t-s)^{\frac{1}{3}}} ds + y\left(\frac{1}{2}t\right) + 2t - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{24}{\Gamma(5)} t^{\frac{9}{2}} - \frac{243}{1760} t^{\frac{11}{3}} - \frac{1}{4} t^2, \quad t \in [0,1].$$

جواب واقعی این مثال برای $\nu = 1$ برابر است با $y(t) = t^2$. پس از اعمال روش پیشنهادی با $m = 2$ ماکسیمم خطای مطلق 6.3×10^{-13} را نتیجه گرفتیم. در شکل ۲، جوابهای عددی این مثال را برای مقادیر مختلف ν و $m = 2$ آوردیم. نتایج نشان می دهد که با نزدیک شدن مقادیر ν به عدد $\nu = 1$ ، جوابهای عددی نیز به جواب واقعی در حالت $\nu = 1$ همگرا می شوند.



شکل ۲. گراف جوابهای عددی و واقعی مثال ۴-۵-۶ برای مقادیر مختلف v با $m = 2$.

۵-۶ نتیجه گیری

در این فصل یک روش عددی مبتنی بر ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته برای تعیین جواب عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری غیر خطی با هسته ضعیف ارائه شد. ابتدا ماتریسهای عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب چندجمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته و نیز نمایش ماتریسی توابع دارای تاخیر محاسبه و ارائه شد. سپس با جایگذاری تقریب تمامی جملات مسئله اصلی، مسئله داده شده به یک دستگاه معادلات خطی برگردانده شد. در ادامه آنالیز خطای روش پیشنهادی بررسی شد. در آخر فصل چند مثال عددی جهت نشان دادن قابلیت بکارگیری، دقت و کارایی روش پیشنهاد شده بررسی شد. نتایج عددی نشان دهنده مناسب بودن روش پیشنهادی برای حل این دسته از معادلات می باشد.

نتایج و پیشنهادات

در این پایان نامه حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل تاخیری کسری با هسته منفرد ضعیف را با استفاده از ماتریس های عملیاتی بر اساس توابع اویلر از مرتبه کسری و نیز چند جمله ای های چبیشف نوع اول انتقال یافته مورد بررسی قرار دادیم. در این دو روش معادله مورد بررسی به یک دستگاه معادلات جبری خطی و یا غیر خطی تبدیل می شود که با حل این دستگاه جبری، جواب تقریبی معادله ارائه می شود. آنالیز خطا را برای روش های پیشنهاد شده ارائه کرده و با چند مثال (خطی و غیر خطی) دقت و کارایی روش ها را نشان دادیم.

به عنوان کار بعدی می توان توابع چبیشف از نوع اول انتقال یافته از مرتبه کسری را ساخته و سپس ماتریس های عملیاتی انتگرال گیری کسری و ضرب این توابع را برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل کسری تاخیری کسری با هسته منفرد ضعیف بکار برد. به نظر می رسد که می توان تابع کسری متناظر به هر چندجمله ای را ساخته و سپس برای حل این نوع معادلات بکار برد.

References

- 1- Magin, R. L., 2004, Fractional calculus in bioengineering, Crit. Rev. Biomed. Eng. Vol. 32 N. 1, pp. 91-104.
- 2- Alipour, M., and Rostamy, D., 2013, BPs operational matrices for solving time varying fractional optimal control problems, The Journal of Mathematics and Computer Science, Vol. 6, pp. 292-304.
- 3- He, J. H., 1998, Nonlinear oscillation with fractional derivative and its applications, in: International Conference on Vibrating Engineering 98, China, pp. 288-291.
- 4- Panda, R., Dash, M., 2006, Fractional generalized splines and signal processing. Signal Process; Vol. 86, N. 23, pp. 40–50.
- 5- Rossikhin, Y. A., Shitikova, M. V., 1997, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. Appl. Mech. Rev; Vol. 50, pp. 15–67.
- 6- Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I., 1993, Fractional integral and derivatives, Theory and application.
- 7- Miller, K., Ross, B., 1993, An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations, John Wiley & Sons, Inc.
- 8- Yuan, H.: Some new results on products of Apostol-Bernoulli and Apostol-Euler polynomials. J. Math. Anal. Appl. 431, 34--46 (2015).
- 9- Yanxin Wang, Li Zhuang, Zhi Wang, Fractional-order Euler functions for solving fractional integro-differential equations with weakly singular kernel, Advances in Difference Equations (2018) 2018:254.
- 10- A. H. Bhrawy, A. S. Alofi, The operational matrix of fractional integration for shifted Chebyshev polynomials, Applied Mathematical Letters, 26 (2013), 25-31.
- 11- M. Ichise, Y. Nagayanagi, T. Kojima, An analog simulation of noninteger order transfer functions for analysis of electrode process. J. Electroanal. Chem. 33, 253--265 (1971).
- 12- M. Hajipour, A. Jajarmi, D. Baleanu, An efficient nonstandard finite difference scheme for a class of fractional chaotic systems. J. Comput. Nonlinear Dyn. 13(2), 021013 (2018).
- 13- D. Baleanu, A. Jajarmi, J.H. Asad, T. Blaszczyk, The motion of a bead sliding on a wire in fractional sense. Acta Phys. Pol. A 131(6), 1561--1564 (2017).
- 14- A. Jajarmi, M. Hajipour, E. Mohammadzadeh, D. Baleanu, A new approach for the nonlinear fractional optimal control problems with external persistent disturbances. J. Franklin Inst. 355(9), 3938--3967 (2018).
- 15- D. Baleanu, A. Jajarmi, M. Hajipour, On the nonlinear dynamical systems within the generalized fractional derivatives with Mittag-Leffler kernel. Nonlinear Dyn. (2018).

<https://doi.org/10.1007/s11071-018-4367-y>.

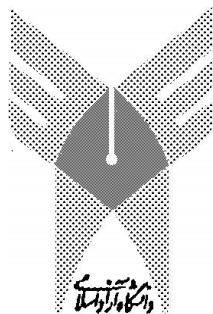
- 16- D. Sierociuk, A. Dzieliński, G. Sarwas, I. Petras, I. Podlubny, T. Skovranek, Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. A* 371, 20120146 (2013).
- 17- X.J. Yang, New rheological problems involving general fractional derivatives within nonsingular power-law kernel. *Proc. Rom. Acad., Ser. A: Math. Phys. Tech. Sci. Inf. Sci.* 19(1), 45--52 (2018).
- 18- G.A.O. Feng, S.T. Mohyud-Din, On linear viscoelasticity within general fractional derivatives without singular kernel. *Therm. Sci.* 21(1), S335--S342 (2017).
- 19- Yang, X.J.: New general fractional-order rheological models with kernels of Mittag-Leffler functions. *Rom. Rep. Phys.* 69(4), 118 (2017).
- 20- F. Gao, X.J. Yang, Fractional Maxwell fluid with fractional derivative without singular kernel. *Therm. Sci.* 20(3), 871--877 (2016).
- 21- X.J. Yang, F.E.N.G. Gao, H.M. Srivastava, New rheological models within local fractional derivative. *Rom. Rep. Phys.* 69(3), 113 (2017).
- 22- X.J. Yang, F. Gao, H.M. Srivastava, Exact travelling wave solutions for the local fractional two-dimensional Burgers-type equations. *Comput. Math. Appl.* 73(2), 203--210 (2017).
- 23- X.J. Yang, D. Baleanu, F. Gao, New analytical solutions for Klein-Gordon and Helmholtz equations in fractal dimensional space. *Proc. Rom. Acad., Ser. A: Math. Phys. Tech. Sci. Inf. Sci.* 18(3), 231--238 (2017).
- 24- Y.X. Wei, Y.P. Chen, Legendre spectral collocation method for neutral and high-order Volterra integro-differential equation. *Appl. Numer. Math.* 81, 15--29 (2014).
- 25- V.D. Gejji, H. Jafari, Solving a multi-order fractional differential equation using Adomian decomposition. *Appl. Math. Comput.* 189, 541--548 (2007).
- 26- L. N. Song, W. G. Wang, A new improved Adomian decomposition method and its application to fractional differential equations. *Appl. Math. Model.* 37, 1590--1598 (2013).
- 27- I. Hashim, O. Abdulaziz, S. Momani, Homotopy analysis method for fractional IVPs. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14, 674--684 (2009).
- 28- Y.H.X. Zhang, B. Tang, Homotopy analysis method for higher-order fractional integro-differential equations. *Comput. Math. Appl.* 62, 3194--3203 (2011).
- 29- L. Zhu, Q. B. Fan, Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 17(6), 2333--2341 (2012).
- 30- Y. X. Wang, Q. B. Fan, The second kind Chebyshev wavelet method for solving fractional differential equation. *Appl. Math. Comput.* 218, 8592--8601 (2012).

- 31- Y.X. Wang, L. Zhu, SCW method for solving the fractional integro-differential equations with a weakly singular kernel. *Appl. Math. Comput.* 275, 72--80 (2016).
- 32- Y. X. Wang, L. Zhu, Solving nonlinear Volterra integro-differential equations of fractional order by using Euler wavelet method. *Adv. Differ. Equ.* 2017, 27 (2017).
- 33- D. Baleanu, R. Darzi, B. Agheli, A reliable mixed method for singular integro-differential equations of non-integer order. *Math. Model. Nat. Phenom.* 13(1), 4 (2018).
- 34- M.R. Eslahchi, M. Dehghan, M. Parvizi, Application of the collocation method for solving nonlinear fractional integro-differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* 257, 105--128 (2014).
- 35- P. Mokhtary, Reconstruction of exponentially rate of convergence to Legendre collocation solution of a class of fractional integro-differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* 279, 145--158 (2015).
- 36- X. Ma, C. Huang, Spectral collocation method for linear fractional integro-differential equations. *Appl. Math. Model.* 38, 1434--1448 (2014).
- 37- A. H. Bhrawy, Y. A. Alhamed, D. Baleanu, New spectral techniques for systems of fractional differential equations using fractional-order generalized Laguerre orthogonal functions. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 17, 1138--1157 (2014).
- 38- S. Yuzbasi, Numerical solutions of fractional Riccati type differential equations by means of the Bernstein polynomials. *Comput. Appl. Math.* 219, 6328--6343 (2013).
- 39- S. Kazem, S. Abbasbandy, K. Sunil, Fractional-order Legendre functions for solving fractional-order differential equations. *Appl. Math. Model.* 37, 5498--5510 (2013).
- 40- P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, Fractional-order Bernoulli wavelets and their applications. *Appl. Math. Model.* 40, 8087--8107 (2016).
- 41- Y. Wang, Li Zhuand, Zhi Wang, Fractional-order Euler functions for solving fractional integro-differential equations with weakly singular kernel, *Advances in Difference Equations* (2018) 2018:254.
- 42- S. S. Ezz-Eldien, E. H. Doha, Fast and precise spectral method for solving pantograph type Volterra integro-differential equations, *Numer. Algor.* <https://doi.org/10.1007/s11075-018-0535-x>.
- 43- J. Zhao, Y. Cao, Y. Xu, Sinc numerical solution for pantograph Volterra delay-integro-differential equation. *Int. J. Comput. Math.* 94, 853--865 (2017).
- 44- B.Q. Tang, X.F. Li, Solution of a class of volterra integral equations with singular and weakly singular kernels, *Appl. Math. Comput.* 199 (2008) 406--413.
- 45- P.K. Kythe, P. Puri, *Computational Method for Linear Integral Equations*, Birkhauser, Boston, 2002.
- 46- V.V. Zozulya, P.I. Gonzalez-Chi, Weakly singular, singular and hypersingular integrals in 3-d elasticity and fracture mechanics, *J. Chin. Inst. Eng.* 22 (1999) 763--775.

- 47- D. Trif, Direct operatorial tau method for pantograph-type equations. Appl. Math. Comput. 219, 2194--2203 (2012).
- 48- S. Yuzbasi, E. Gok, Sezer, M.: Residual correction of the Hermite polynomial solutions of the generalized pantograph equations. Trends Math. Sci. 3(2), 118-125 (2015)
- 49- Ezz-Eldien, S.S., On solving systems of multi-pantograph equations via spectral tau method. Appl. Math. Comput. 321, 63--73 (2018).
- 50- F. Shakeri, M. Dehghan, Application of the decomposition method of Adomian for solving the pantograph equation of order m. Z Naturforsch. A 65a, 453--460 (2010).
- 51- S. Yuzbasi, E. Gok, M. Sezer, Laguerre matrix method with the residual error estimation for a class of delay differential equations. Math. Meth. Appl. Sci. 37, 453--463 (2014).
- 52- S. Yuzbasi, E. Gok, M. Sezer, Residual correction of the Hermite polynomial solutions of the generalized pantograph equations. Trends Math. Sci. 3(2), 118-125 (2015)
- 53- R. L. Magin, Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues, Comput. Math. Appl. 59 (2010) 1586-1226.
- 54- J. Biazar, K. Sadri, Solution of weakly singular fractional integro-differential equations by using a new operational approach, Journal of Computational and Applied Mathematics, 352 (2019) 453-477. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.12.008>.
- 55- F. Mohammadi, Fractional integro-differential equation with a weakly singular kernel by using block pulse functions, U.P.B. Sci. Bull. Ser. A 79 (1) (2017) 57--66.
- 56- S. Rezaeyk, S. Abbasbandy, E. Shivanian, Solving fractional-order delay integro-differential equations using operational matrix based on fractional-order Euler polynomials, Math Sci (2020). <https://doi.org/10.1007/s40096-020-00320-1>.

Abstract

The main purpose of this theses is to numerically solve the weakly singular fractional delay integro-differential equations with the initial conditions based on the operational matrices of fractional-order Euler polynomials and shifted Chebyshev polynomials of the first kind. For this purpose, we first obtain the operational matrices of fractional integration of these two polynomials as well as the delay functions. Then, by approximating the fractional derivative of the solution of the problem with the help of a series solution of these two polynomials and also by using the operational matrix of the fractional integration, we obtain the matrix form of the approximate solution of the problem. By using the matrix form of all known sentences of the problem and also by applying the obtained operational matrices, we turn the problem into a system of linear or non-linear algebraic equations. By solving the obtained system, the approximate solution the original problem is obtained in the form of a series solution of the polynomials. We investigate the error analysis of the proposed methods and finally provide some numerical examples to show the efficiency of the proposed methods and compare the results with other methods.



Islamic Azad University, Karaj Branch

Faculty of Sciences, Department of Mathematics

Ph.D Theses in Applied Mathematics, Numerical Analysis

Title:

**Numerical solution of delay fractional integro-differential equations via
fractional-order functions**

Supervisors:

Prof. Saeid Abbasbandy

Dr. Elyas Shivanian

Advisor:

Dr. Hesameddin Derilli

By:

Saeideh Rezaabeyk

August 2020