



دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

دانشکده‌ی علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان:

روش بدون شبکه نقاط شکننده برای حل معادلات دیفرانسیل
با مشتقات جزئی با استفاده از ماتریس‌های سختی نقطه‌ای

نویسنده:

دنیا حقیقی

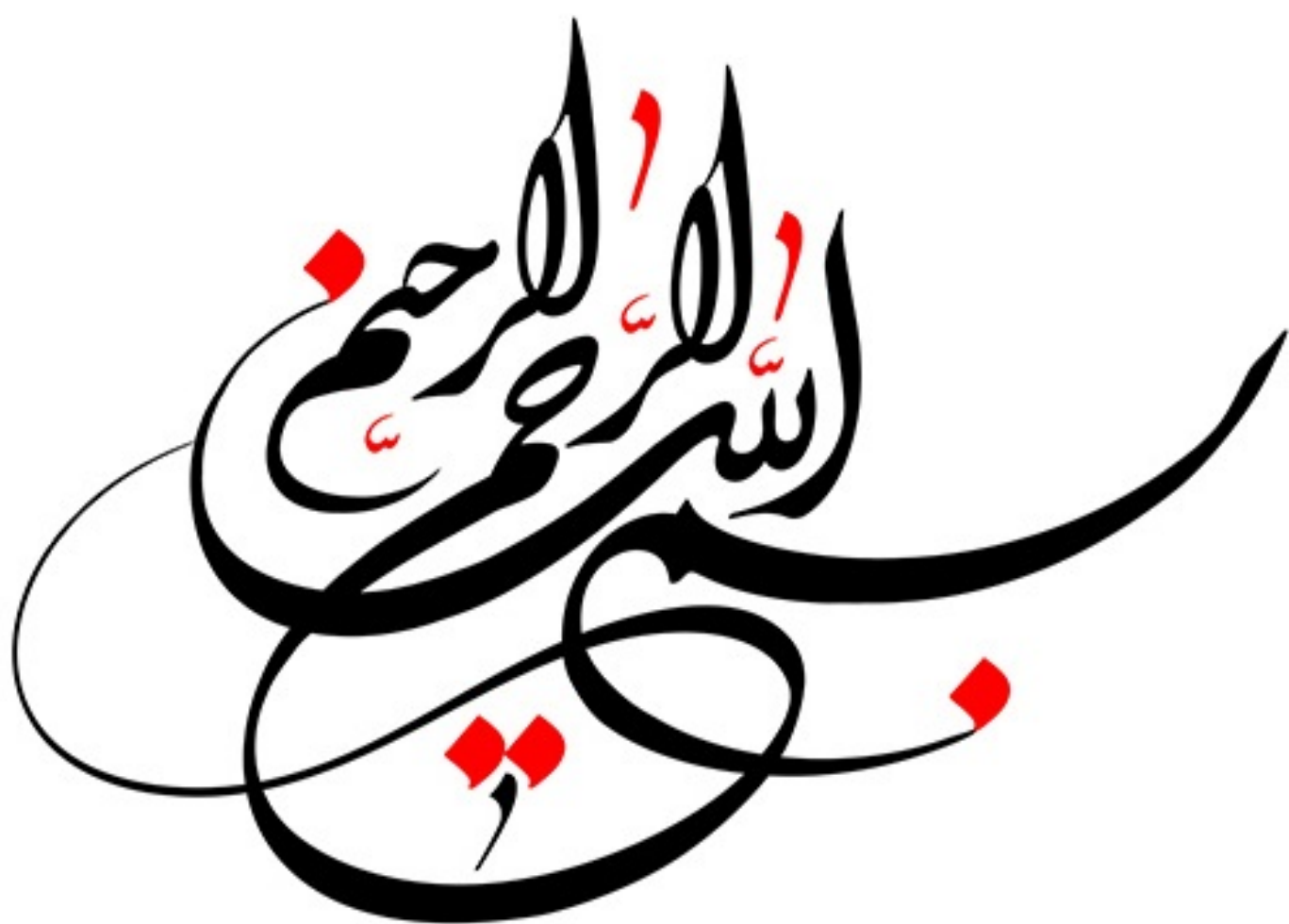
استاد راهنما:

دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور:

دکتر الیاس شیوانیان

خرداد ۱۴۰۲



تقدیم بہ

پدر عزیزم و

مادر مہربانم

صورت جلسه‌ی دفاع از رساله‌ی دکتری

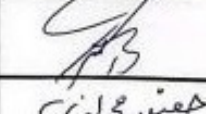
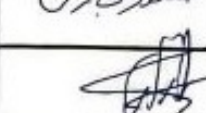
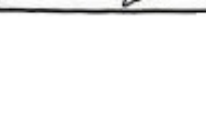
جلسه دفاع از رساله خانم دنیا حقیقی فشی دانشجوی مقطع دکتری تخصصی رشته ی ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۷۴۱۹۰۰۰۱ در روز دوشنبه مورخ ۱۴۰۲/۰۳/۲۲ تحت عنوان روش بدون شبکه نقاط شکننده برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از ماتریس های سختی نقطه ای **The Meshless Fragile Points Method (FPM) for solving partial differential equations using Points Stiffness Matrices** مصوب تاریخ ۱۳۹۹/۱۱/۰۵ تشکیل گردید و بر اساس محتوا و چگونگی ارائه پایان نامه با نمره ۱۹+۵ و با درجه :

عالی (۲۰-۱۹) ☒ بسیار خوب (۱۸-۱۷) ☐ خوب (۱۶-۱۵) ☐ بدون نیاز به اصلاحات ☐ مشروط به انجام اصلاحات ☐ غیر قابل قبول (نمره کمتر از ۱۶) ☐ مورد تصویب هیات داوران قرار گرفت.

- ۱- چنانچه اصلاحات مندرج در برگه شرح اصلاحات رساله تا پایان مهلت مقرر توسط دانشجو انجام نگرفته و به تایید استاد راهنما و نماینده تحصیلات تکمیلی نرسد، نمره دانشجو با کسر ۲ نمره، به ۱۷+۵ تغییر می یابد.
- ۲- در صورتی که دانشجو تا تاریخ ۲ ماه پس از مهلت تعیین شده در برگه شرح اصلاحات پایان نامه نسبت به انجام اصلاحات اقدام ننماید، منصرف از تحصیل شناخته خواهد شد.
- این شرایط در پایان جلسه دفاع به اطلاع دانشجو رسید.

امضای دانشجو

هیات داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	محل امضاء
استاد راهنمای اول	جناب آقای دکتر سعید عباس بندی	
استاد مشاور اول	جناب آقای دکتر الیاس شیوانیان	
استاد داور داخلی ۱	جناب آقای دکتر داود رستمی ورنوسفادزانی	
استاد داور خارجی ۱	جناب آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	
استاد داور خارجی ۲	جناب آقای دکتر عبدالرحمن رازانی	
نماینده تحصیلات تکمیلی	جناب آقای دکتر ابراهیم وطن دوست	



تعهدنامه اصالت اثر و حقوق مالکیت مادی و معنوی

- اینجانب دنیا حقیقی فشی دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی که در تاریخ ۱۴۰۲/۰۳/۲۲ از رساله خود تحت عنوان روش بدون شبکه نقاط شکنده برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از ماتریس‌های سختی نقطه‌ای با کسب درجه‌ی عالی دفاع کرده‌ام، شرعا و قانونا متعهد می‌شوم:
1. مطالب مندرج در این پایان‌نامه/رساله، حاصل تحقیق و مطالعه اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران اعم از پایان‌نامه، کتاب، مقاله و غیره استفاده کرده‌ام، با رعایت کامل امانت، مطابق مقررات، اقدام به ارجاع در متن و ذکر آن در فهرست منابع و مآخذ نموده‌ام.
 2. تمامی یا بخشی از این پایان‌نامه/رساله قبلا برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی به سایر دانشگاه‌ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.
 3. مقالات مستخرج از این پایان‌نامه/رساله کاملا حاصل کار اینجانب بوده و از هرگونه جعل داده و یا تغییر اطلاعات پرهیز کرده‌ام.
 4. از ارسال همزمان و یا تکراری مقالات مستخرج از این پایان‌نامه/رساله (با بیش از ۳۰ درصد همپوشانی) به مجلات و یا همایش‌های گوناگون خودداری نموده و می‌نمایم.
 5. انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی در زمان تحصیل یا فارغ التحصیلی باید به نام دانشگاه باشد و در مقالاتی که پس از دانش آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/رساله (با همپوشانی بیش از ۳۰ درصد) منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.
 6. کلیه حقوق مادی و معنوی حاصل از این پایان‌نامه/رساله متعلق به دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) بوده و متعهد می‌شوم هرگونه بهره‌مندی و یا نشر دستاوردهای حاصل از این تحقیق اعم از انتشار کتاب، مقاله، نرم‌افزار، ثبت اختراع، آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) و ... (چه در زمان دانشجویی و یا فراغت از تحصیل) با همکاری استاد راهنما و کسب مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین‌نامه‌های مصوب انجام شود.
 7. در صورت عدم رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه، علاوه بر اعمال ضمانت اجرای قانونی، متعهد می‌شوم ۵۰ درصد از بهای کلیه آثار منتشره را به عنوان خسارت به دانشگاه پرداخت نمایم.
 8. در صورت تخلف از تعهد اصالت اثر و حقوق مالکیت مادی و معنوی، دانشگاه می‌تواند مطابق ضوابط و مقررات مربوطه با اینجانب برخورد نماید.

نام و نام خانوادگی دانشجو: دنیا حقیقی

امضاء



سوگندنامه دانش آموختگان دکتری دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

به نام خدا

سپاس ایزد منان را که مرا مشمول الطاف خویش نمود که با طی مراحل تحصیل موفق به اخذ درجه دکتری شوم. به شکرانه این نعمت بزرگ الهی که با امکانات این مرز و بوم، فراهم و نزد اینجانب به امانت گذاشته شده است، در پیشگاه ملت ایران به کتاب آسمانی خود، قرآن کریم، سوگند یاد می کنم که :

- در سراسر زندگی حرفه ای، در راه اعتلای کشور ایران و جامعه بشری به نحو احسن قدم برداشته و در این راه از هیچ تلاشی دریغ ننمایم.
- در تمام فعالیت های تخصصی، رضای خدا را همراه با صداقت علمی و اجتماعی در نظر داشته و از موقعیت های به دست آمده در جهت رفع مشکلات جامعه استفاده کنم و در همه ی امور، منافع کشور را بر منافع فردی مقدم بدارم.
- همواره علم و دانش خود را به روز نگاه داشته و در ایفای مسئولیت و تعهدات حرفه ای در حد توان سعی و تلاش خود را به کار گیرم.
- و اینک از خداوند علیم توفیق بندگی و پای بندی به مفاد این سوگندنامه را خواستارم و از او می خواهم که مرا در ایفای رسالت علمی و انسانی خویش موفق بدارد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: دنیا حقیقی

امضاء



عنوان رساله: روش بدون شبکه نقاط شکننده برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از ماتریس‌های سختی نقطه‌ای
نام و نام خانوادگی دانشجو: دنیا حقیقی فشی

مجوز بهره برداری از پایان نامه/ رساله

کلیه حقوق اعم از چاپ، تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از نتایج این پایان نامه برای دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره) قزوین محفوظ است. بهره برداری از این پایان نامه/ رساله در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

☒ بهره برداری از این پایان نامه/ رساله برای همگان بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه/ رساله با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.

☐ بهره برداری از این پایان نامه/ رساله تا تاریخ ممنوع است.

استاد راهنما می تواند یکی از گزینه های بالا را انتخاب کند و مسئولین کتابخانه موظف به رعایت موارد تعیین شده می باشد.

استاد راهنما: دکتر سعید عباس‌بندی

تاریخ: ۱۴۰۲/۴/۱

امضاء:

باسپاس از سه وجود مقدس:

آمان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موباشان سپید شد تا ما رو سفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرما بخش وجود ما و رو شکر را همان باشند...

پدرانمان

مادرانمان

استادانمان

باسپاس از خدای یکتا که به من توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امید است که شایستگی ادامه ی این راه را داشته باشم. با نهایت احترام از استاد ارجمند و بزرگوارم، آقای دکتر سعید عباس بندی که با نکته های مهم و گفته های بلند، همواره راهنما و راهنمای اینجانب در اتمام و اكمال این پایان نامه بودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. هم چنین از زحمات استاد مشاور، آقای دکتر ایاس شیوانیان صمیمانه تشکر می نمایم. از اساتید گرامی جناب آقای دکتر داود رستمی، دکتر زهراباریک بین، دکتر سهرابعلی یوسفی و دکتر عبدالرحمن رازانی که زحمات داورانی این رساله را تقبل نمودند صمیمانه سپاسگزارم.

در ادامه از برادر عزیزم که در دوران تحصیل همواره مشوق و پشتیبان اینجانب بوده اند کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم. در انتها، از دوستان عزیزی که در این مسیر همواره باعث دلگرمی من بودند، تشکر می کنم.

چکیده

در این رساله، روش بدون شبکه نقاط شکننده برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مورد مطالعه قرار گرفته است. این روش در دسته روش‌های بدون شبکه قرار می‌گیرد و بر اساس فرمول بندی ضعیف گالرکین می‌باشد. برای افراز دامنه مساله به زیر دامنه‌ها، از نمودار ورونوی استفاده شده است به طوری که چندین نقطه به صورت یکنواخت یا غیریکنواخت در دامنه توزیع می‌کنیم که این نقاط با چندضلعی‌های ورونوی احاطه می‌شوند. روش نقاط شکننده برای گسسته سازی مکانی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار گرفته می‌شود. اگر معادلات مورد بررسی، دارای مشتق‌های زمانی باشند، از روش‌های تفاضلات محدود برای گسسته‌سازی استفاده می‌شود. در روش پیشنهادی، توابع کوششی به صورت چندجمله‌ای‌های ساده، ناپیوسته و بر پایه نقاط به دست می‌آیند. برای به دست آوردن این چندجمله‌ای‌ها از روش تفاضلات محدود تعمیم یافته بر اساس مقدار تابع کوششی در تعداد محدود نقطه در همسایگی هرکدام از نقاط دامنه استفاده می‌شود. توابع آزمون را نیز می‌توان به صورت چندجمله‌ای‌های ناپیوسته کوششی یا توابع دلتای دیراک و هویساید قرار داد. همچنین اصلاحات شار عددی برای رفع ناسازگاری ناشی از ناپیوستگی توابع کوششی به کار برده می‌شود. با توجه به اینکه ماتریس‌های سختی‌ای که از روش نقاط شکننده به دست می‌آید متقارن و پراکنده می‌باشند، در نتیجه برای شبیه‌سازی‌ها در مقیاس بزرگ بسیار مفید و کاربردی خواهد بود. با توجه به این که نمودار ورونوی برای تقسیم دامنه‌ها به زیردامنه‌ها اعمال می‌شود، این روش در دامنه‌های نامنظم و دارای ترک یا شکستگی نیز دقت خوبی دارد.

در این مطالعه، با حل برخی معادلات دیفرانسیل جزئی با روش نقاط شکننده، دقت، کارایی و پایداری این روش مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

کلیدواژه‌ها: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی؛ روش نقاط شکننده؛ روش بدون شبکه؛ اصلاحات شار عددی؛ طرح‌های تفاضلات محدود؛ روش تفاضلات محدود تعمیم یافته؛ نمودار ورونوی.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات (۲۰۱۰): اولیه: ۶۵Nxx؛ ثانویه: ۳۲W۵۰، ۸۰M۲۲، ۶۵L۱۲.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۸	فصل ۱ مقدمات و تعاریف اولیه
۸	۱.۱ انواع معادلات دیفرانسیل
۱۰	۲.۱ فضاهای سوبولوف
۱۱	۳.۱ روش گالرکین ناپیوسته
۱۲	۱.۳.۱ شارهای عددی
۱۵	فصل ۲ تعیین توابع آزمون و کوششی
	فصل ۳ روش نقاط شکننده برای حل معادله تلگراف هذلولوی دو بعدی با استفاده از ماتریس های
۲۱	سختی نقطه ای
۲۱	۱.۳ مقدمه
۲۲	۲.۳ تقریب های تفاضلی زمانی
۲۳	۱.۲.۳ آنالیز همگرایی و پایداری
۲۳	۳.۳ اصلاح های شار عددی
۲۷	۴.۳ پیاده سازی عددی روش نقاط شکننده اولیه
۲۹	۵.۳ نتایج عددی
	فصل ۴ استفاده از روش نقاط شکننده برای حل معادله مختلط و دو بعدی شرودینگر روی دامنه های
۴۰	دلخواه
۴۰	۱.۴ مقدمه
۴۱	۲.۴ اصلاح های شار عددی
۴۲	۳.۴ پیاده سازی روش نقاط شکننده اولیه

۴۳	نتایج عددی	۴۰۴
فصل ۵ مطالعه روش نقاط شکننده برای حل معادلات موج دو بعدی خطی و غیر خطی در دامنه های		
۵۶	پیچیده و ترک دار	
۵۶	مقدمه	۱۰۵
۵۷	معادله موج خطی	۲۰۵
۵۷	تقریب های تفاضلات محدود	۱۰۲۰۵
۵۷	آنالیز پایداری و همگرایی	۲۰۲۰۵
۶۰	پیاده سازی اصلاحات شار عددی	۳۰۲۰۵
۶۲	معادله موج غیرخطی	۳۰۵
۶۲	پیاده سازی عددی	۴۰۵
۶۳	روش پیشگو-اصلاحگر	۱۰۴۰۵
۶۴	نتایج عددی	۵۰۵
فصل ۶ استفاده از روش نقاط شکننده برای معادله دوبعدی تعمیم یافته دوهمساز در دامنه های دلخواه		
۸۰	مقدمه	۱۰۶
۸۱	اصلاح های شارهای عددی و پیاده سازی روش	۲۰۶
۸۳	روش نقاط شکننده گالرکین	۱۰۲۰۶
۸۳	روش نقاط شکننده هویساید	۲۰۲۰۶
۸۴	نتایج عددی	۳۰۶
۹۸	نتیجه گیری و چند پیشنهاد برای پژوهش های آتی	
۹۹	مراجع	
۱۰۸	واژه نامه ی فارسی به انگلیسی	
۱۱۱	واژه نامه ی انگلیسی به فارسی	

فهرست شکل‌ها

نام شکل	صفحه
شکل ۱۰.۱: ردهای v^+ و v^- برای زیردامنه E	۱۱
شکل ۱۰.۲: دامنه Ω ، نقاط پراکنده در دامنه و مرزهای دیریکله و نیومانی	۱۶
شکل ۲۰.۲: دامنه Ω و افراز آن به وسیله نمودار ورونوی	۱۶
شکل ۳۰.۲: دو روش برای تعریف محمل برای نقطه P	۱۷
شکل ۴۰.۲: (الف) نقطه P و همسایگی‌های آن بدون ترک. (ب) حذف کردن نقطه P_3 وقتی که یک ترک بین دو نقطه P و P_3 وجود دارد.	۱۹
شکل ۵۰.۲: نقطه P و نقاط همسایگی و ترک‌ها.	۲۰
شکل ۱۰.۳: منحنی‌های دقیق و عددی مرتبط با مثال ۱۰.۵.۳ در $x = ۰.۲۸$ برای $h_e = ۰.۱$ و $\eta = ۱/۵$ با استفاده از $N = ۶۷۶$ در زمان‌های نهایی مختلف.	۳۰
شکل ۲۰.۳: خطاهای نسبی برای مثال ۱۰.۵.۳ در $T = ۵$ و $\delta t = ۰.۰۱$ با مقادیر $h_e = \eta = ۱$	۳۱
شکل ۳۰.۳: منحنی‌های دقیق و عددی برای مثال ۱۰.۵.۳ بر اساس $N = ۶۷۶$ نقطه غیریکنواخت از دامنه برای $\eta = ۱$ ، $\delta t = ۰.۰۱$ و $T = ۳$	۳۱
شکل ۴۰.۳: منحنی‌های دقیق و عددی برای مثال ۱۰.۵.۳ با $N = ۱۰۲۰۱$ نقطه با فاصله یکسان از دامنه برای $h_e = ۱$ ، $\eta = ۱$ و $\delta t = ۰.۰۱$ و $T = ۱$	۳۲
شکل ۵۰.۳: منحنی‌های مربوط به جواب‌های دقیق و عددی برای مثال ۲۰.۵.۳ بر اساس $N = ۱۲۱$ نقطه یکنواخت برای $\delta t = ۰.۰۱$ و $T = ۵s$	۳۴
شکل ۶۰.۳: جواب‌های عددی و دقیق برای مثال ۳۰.۵.۳ در $x = ۲.۲۸$ برای $h_e = ۰.۰۷۲$ و $\eta = ۱۰$ با استفاده از $N = ۵۲۹$ در زمان‌های نهایی مختلف.	۳۵
شکل ۷۰.۳: منحنی‌های مربوط به جواب‌های عددی و دقیق برای مثال ۳۰.۵.۳ با $N = ۵۲۹$ ، $\delta t = ۰.۰۱$ و $T = ۱$	۳۶

- شکل ۸.۳: منحنی‌های خطای مربوط به مثال ۴.۵.۳ بر اساس $N = ۶۷۶$ نقطه با توزیع یکنواخت در دامنه
 ۳۷ با $\delta t = ۰.۰۱$
- شکل ۹.۳: منحنی‌های دقیق و عددی برای مثال ۵.۵.۳ بر اساس $N = ۱۲۱$ نقطه با توزیع یکنواخت از
 ۳۹ دامنه و $\delta t = ۰.۰۱$ و $T = ۳$
- شکل ۱۰.۴: خطاهای نسبی برای مثال ۱۰.۴.۴ (الف) برای $T = ۱$ و $\delta t = ۰.۰۵$ ۴۴
- شکل ۲۰.۴: مقایسه خطاهای مطلق مربوط به مثال ۱۰.۴.۴ (ب) برای $T = ۱$ ، $\delta t = ۰.۰۱$ ، $\theta = ۰.۵$ و
 ۴۵ $N = ۶۷۶$ برای نقاط یکنواخت و پراکنده.
- شکل ۳۰.۴: مقایسه قسمت موهومی جواب‌های دقیق و عددی مربوط به مثال ۱۰.۴.۴ (ب) برای $x = ۰.۶$
 ۴۷ $N = ۱۲۱$ و $\delta t = ۰.۰۱$
- شکل ۴۰.۴: مقایسه قسمت حقیقی جواب‌های دقیق و عددی مربوط به مثال ۱۰.۴.۴ (ب) برای $x = ۰.۶$
 ۴۷ $N = ۱۲۱$ و $\delta t = ۰.۰۱$
- شکل ۵۰.۴: مقایسه بخش‌های موهومی نتایج عددی و دقیق برای مثال ۲۰.۴.۴ با $\eta = ۱۱$ ، $h_e = ۰.۱$
 ۴۸ $\theta = ۰.۵۲$ ، $\delta t = ۰.۰۱$ ، $N = ۲۶۰۱$ ، $T = ۱$
- شکل ۶۰.۴: مقایسه بخش‌های حقیقی نتایج عددی و دقیق برای مثال ۲۰.۴.۴ با $\eta = ۱۱$ ، $h_e = ۰.۱$
 ۴۹ $\theta = ۰.۵۲$ ، $\delta t = ۰.۰۱$ ، $N = ۲۶۰۱$ ، $T = ۱$
- شکل ۷۰.۴: منحنی‌های خطای مربوط به مثال ۲۰.۴.۴ بر اساس نقاط منظم و نامنظم با شرایط $\theta = ۰.۵۲$
 ۴۹ $N = ۶۷۶$ و $T = ۱$ و $\delta t = ۰.۰۱$
- شکل ۸۰.۴: دامنه L شکل مربوط به مثال ۳۰.۴.۴ (الف) با $N = ۴۸۴$ نقطه با توزیع یکنواخت. ۴۹
- شکل ۹۰.۴: نسبت خطا به فاصله بین نقاط یکنواخت از هم برای مثال ۳۰.۴.۴ (الف) با $\delta t = ۰.۰۱$
 ۵۱ $T = ۱s$
- شکل ۱۰۰.۴: منحنی‌های مربوط به بخش حقیقی جواب‌های عددی و دقیق مربوط به مثال ۴۰.۴.۴ برای
 ۵۳ $h_e = ۱$ و $\eta = ۳۸$ ، $\theta = ۰.۵۴$ ، $T = ۱$ ، $N = ۶۷۶$ ، $dt = ۰.۰۱$
- شکل ۱۱۰.۴: منحنی‌های مربوط به بخش موهومی جواب‌های عددی و دقیق مربوط به مثال ۴۰.۴.۴ برای
 ۵۳ $h_e = ۱$ و $\eta = ۳۸$ ، $\theta = ۰.۵۴$ ، $T = ۵$ ، $N = ۶۷۶$ ، $dt = ۰.۰۱$
- شکل ۱۲۰.۴: دامنه مربوط به مثال ۵۰.۴.۴ با $N = ۱۰۰$ نقطه انتخابی با توزیع غیریکنواخت. ۵۴
- شکل ۱۳۰.۴: منحنی‌های مربوط به جواب‌های عددی و دقیق برای مثال ۵۰.۴.۴ با $\theta = ۰.۵$ ، $h_e = ۰.۰۰۱$
 ۵۵ $\delta t = ۰.۰۰۹۷$ و $T = ۲s$ ، $\eta = ۵۰$
- شکل ۱۰۵: دامنه Ω_1 افزاز آن برای مثال ۱ ۶۵

- شکل ۲.۵: منحنی‌های جواب‌های عددی و تحلیلی برای مثال ۱.۵.۵ در شرایط $\eta = 6 \times 10^6$, $h_e = 1$
- ۶۶ $T = 1$ و $N = 576$, $\delta t = 0.095$
- شکل ۳.۵: دامنه Ω_2 نامنظم و نمودار ورونوی مربوط به آن برای مثال ۲.۵.۵
- ۶۸ $N = 100$ و $\delta t = 0.1$, $T = 1s$
- شکل ۴.۵: جواب‌های روش نقاط شکننده و دقیق برای مثال ۲.۵.۵ در $T = 1s$ و $\delta t = 0.1$
- شکل ۵.۵: منحنی خطا برای مثال ۲.۵.۵ با استفاده از نقاط غیریکنواخت پراکنده.
- ۶۹ $N = 121$
- شکل ۶.۵: افراز دامنه Ω_3 , $-L$ شکل به وسیله $N = 121$ نقطه.
- ۷۰ $T = 1s$ و $\delta t = 0.094$
- شکل ۷.۵: جواب‌های عددی و تحلیلی مربوط به مثال ۳.۵.۵ (الف)
- ۷۱ $N = 121$
- شکل ۸.۵: خطای نسبی بر حسب تعداد نقاط برای مثال ۳.۵.۵ (الف) در $T = 1$ و $\delta t = 0.094$
- ۷۲ $T = 1$ و $\delta t = 0.05$
- شکل ۹.۵: خطای نسبی بر حسب تعداد نقاط برای مثال ۳.۵.۵ (ب)
- ۷۳ $N = 625$ با $4.5.5$ و تحلیلی مثال $4.5.5$ با $N = 625$ نقطه با توزیع غیریکنواخت
- ۷۴ $N = 625$ با $4.5.5$ و تحلیلی مثال $4.5.5$ با $N = 625$ نقطه با توزیع غیریکنواخت و $\eta = 64$, $h_e = 0.1$ و $\delta t = 0.091$
- ۷۵ $h_e = 0.1$ بر اساس نقاط یکنواخت و $4.5.5$ مثال
- شکل ۱۲.۵: منحنی جواب‌های دقیق و عددی برای مثال $4.5.5$
- ۷۶ $N = 2500$ و $T = 1$, $\eta = 9$, $\delta t = 0.09$
- شکل ۱۳.۵: منحنی‌های جواب‌های عددی و دقیق برای مثال $6.5.5$ با $N = 625$ نقطه با توزیع غیریکنواخت با شرایط $\eta = 5$, $h_e = 0.1$ و $\delta t = 0.05$
- ۷۹ $T = 1$ and $\delta t = 0.05$, $\eta = 5$, $h_e = 0.1$
- شکل ۱۰.۶: شکل‌های جواب‌های عددی روش گالرکین و نتایج دقیق برای مثال ۱.۳.۶ (ب) با $N = 10201$
- ۸۷ $h_e = 0.1$ و $\eta = 2$
- شکل ۲۰.۶: شکل‌های جواب‌های دقیق و عددی روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۲.۳.۶ (الف)
- ۹۰ $h_e = 1$ و $\eta = 10$
- شکل ۳.۶: دامنه مثال ۲.۳.۶ (ب) با $N = 576$ نقطه و نمودار ورونوی مربوط به آن.
- ۹۱ $N = 576$, $\eta = 0.1$ و $h_e = 7$
- شکل ۴.۶: تطابق جواب‌های عددی روش نقاط شکننده گالرکین با جواب‌های دقیق برای مثال ۲.۳.۶ به ازای $N = 576$, $\eta = 0.1$ و $h_e = 7$
- ۹۱ $N = 2601$ با $3.3.6$ مثال
- شکل ۵.۶: شکل‌های دقیق و عددی جواب‌های نقاط شکننده گالرکین برای مثال $3.3.6$ با $N = 2601$
- ۹۴ $\eta = h_e = 1$
- شکل ۶.۶: منحنی خطای روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال $3.3.6$ با $N = 676$ نقطه به ازای $\eta = h_e = 1$
- ۹۵ $N = 1600$ با $4.3.6$ مثال
- شکل ۷.۶: دامنه مسئله برای مثال $4.3.6$ با $N = 1600$ نقطه و نمودار ورونوی مربوط به آن

- شکل ۸.۶: منحنی خطای مربوط به روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۴.۳.۶ با $N = ۱۶۰۰$ نقطه به ازای $\eta = ۶/۸$ و $h_e = ۰/۰۱$ ۹۷
- شکل ۹.۶: رابطه بین خطای نسبی و تعداد نقاط برای مثال ۴.۳.۶ با به کارگیری روش نقاط شکننده هویساید ۹۷

فهرست جدول‌ها

نام جدول	صفحه
جدول ۱: مقایسه روش نقاط شکننده با سایر روش‌های عددی	۷
جدول ۱۰۳: شارهای عددی جریمه داخلی (IPNF)	۲۵
جدول ۲۰۳: شارهای عددی گالرکین ناپیوسته محلی	۲۶
جدول ۳۰۳: خطاهای نسبی روش پیشنهادی برای مثال ۱۰۵.۳ در $T = 1$ و $\delta t = 0.1$	۳۰
جدول ۴۰۳: خطاهای نسبی روش نقاط شکننده برای مثال ۲۰۵.۳ در $T = 1, 3, 5, 7, 10$ و $\delta t = 0.1$	
با پارامترهای پنالته $\eta = 10$ و $h_e = 0.265$	۳۴
جدول ۵۰۳: خطاهای نسبی روش نقاط شکننده برای مثال ۳۰۵.۳ در $T = 1, 5, 10, 20$ ثانیه و $\delta t = 0.1$	
با $h_e = 0.072$, $\eta = 10$ و $N = 529$	۳۵
جدول ۶۰۳: خطاهای روش نقاط شکننده مربوط به مثال ۴۰۵.۳ در $T = 1, 2, \dots, 5$ با $\delta t = 0.1$	۳۸
جدول ۷۰۳: خطاهای نسبی برای مثال ۵۰۵.۳ در $T = 1, \dots, 5, 10, 15$ با $\delta t = 0.1$	۳۹
جدول ۱۰۴: خطاهای نسبی روش برای مثال ۱۰۴.۴ (الف) در $T = 1$ و $\delta t = 0.05$ با $\theta = 0.6$	۴۴
جدول ۲۰۴: خطاهای نسبی روش نقاط شکننده برای مثال ۱۰۴.۴ (ب) در $T = 1$, $\theta = 0.5$ و $\delta t = 0.1$	
برای نقاط با توزیع یکنواخت و غیر یکنواخت	۴۶
جدول ۳۰۴: خطاهای نسبی روش برای مثال ۲۰۴.۴ با $h_e = 0.1$, $\theta = 0.52$, $\eta = 11$ و $\delta t = 0.1$	۴۸
جدول ۴۰۴: خطاهای نسبی روش پیشنهادی برای مثال ۳۰۴.۴ (الف) در $T = 1$, $\delta t = 0.1$, $\theta = 0.65$	۵۰
جدول ۵۰۴: مقادیر خطای نسبی نسبت به زمان برای مثال ۳۰۴.۴ (ب) با $N = 529$ نقطه یکنواخت،	
$T = 1$, $\theta = 0.65$, $h_e = 0.1$ و $\eta = 16$	۵۱
جدول ۶۰۴: خطاهای نسبی روش پیشنهادی برای مثال ۴۰۴.۴ در $T = 1$, $\theta = 0.52$ و $\delta t = 0.1$	۵۲
جدول ۷۰۴: خطاهای نسبی روش مربوط به مثال ۵۰۴.۴ برای $T = 1, 5, 10, 15, 20$ و $\delta t = 0.097$	
$\theta = 0.5$	۵۴
جدول ۱۰۵: خطاهای نسبی مربوط به مثال ۱۰۵.۵ برای $\delta t = 0.095$ و $N = 576$	۶۷

- جدول ۲۰۵: خطاهای نسبی مثال ۲۰۵ با $\delta t = 1\%$ برای $N = 100$ نقطه. ۶۸
- جدول ۳۰۵: خطای جواب های عددی روش پیشنهادی برای مثال ۳۰۵ (الف) در $T = 1s$ و $\delta t = 0.094\%$ ۷۱
- جدول ۴۰۵: خطای جواب های عددی روش نقاط شکننده برای مثال ۳۰۵ (ب) در $T = 1$ و $\delta t = 0.05\%$ ۷۲
- جدول ۵۰۵: خطای روش پیشنهادی برای مثال ۴۰۵ با $N = 625$ نقطه در $T = 1, 3, 5, 10, 15s$ و ۷۳
- جدول ۶۰۵: خطاهای جواب های عددی روش نقاط شکننده برای مثال ۵۰۵ در $T = 1$ و $\delta t = 0.04\%$ ۷۷
- جدول ۷۰۵: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی نسبت به زمان برای مثال ۵۰۵ با $N = 484$ نقطه ۷۷
- یکنواخت و $T = 1$ ، $h_e = 0.1$ و $\eta = 4 \times 10^4$ ۷۷
- جدول ۸۰۵: خطاهای روش پیشنهادی برای مثال ۶۰۵ با $N = 625$ نقطه در $T = 1, 5, 10, 15$ و ۷۸
- جدول ۱۰۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۱۰۳۰۶ (a) با ۸۶
- تعداد نقاط یکنواخت مختلف، $h_e = 1$ و $\eta = 0.1$ ۸۶
- جدول ۲۰۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۱۰۳۰۶ (ب) با تعداد نقاط مختلف ۸۶
- غیر یکنواخت. ۸۶
- جدول ۳۰۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۲۰۳۰۶ برای ۸۸
- تعداد نقاط مختلف با توزیع یکنواخت. ۸۸
- جدول ۴۰۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۲۰۳۰۶ برای ۸۹
- تعداد نقاط مختلف با توزیع یکنواخت. ۸۹
- جدول ۵۰۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده گالرکین و هویساید برای مثال ۲۰۳۰۶ (b) به ازای ۸۹
- $N = 576$ ، $\eta = 0.1$ و $h_e = 7$ ۸۹
- جدول ۶۰۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۳۰۳۰۶ و تعداد ۹۲
- نقاط مختلف با توزیع یکنواخت. ۹۲
- جدول ۷۰۶: نرخ های همگرایی و خطاهای جواب های روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۳۰۳۰۶ برای ۹۳
- تعداد نقاط مختلف با توزیع یکنواخت. ۹۳
- جدول ۸۰۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۴۰۳۰۶ با تعداد نقاط مختلف. ۹۳
- جدول ۹۰۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۴۰۳۰۶ با تعداد نقاط مختلف. ۹۶

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی یکی از ابزارهای مهم ریاضیات برای مدل‌سازی رفتار سیستم‌های فیزیکی، بیولوژیکی، اقتصادی و مهندسی هستند. این معادلات در بسیاری از مسائل واقعی مانند انتقال حرارت، جریان سیال، انتقال جرم و همچنین مسائل مهم در حوزه‌های مختلفی مانند مهندسی برق، مهندسی مکانیک، مهندسی شیمی، علوم زیستی و ... به کار می‌روند.

با وجود این که برخی از این معادلات به صورت تحلیلی قابل حل می‌باشند، اما بسیاری از این نوع مهم از معادلات نیز به صورت تحلیلی قابل حل نیستند و یا به دست آوردن جواب دقیق برای آن‌ها مستلزم محاسبات فراوان و پیچیده است. در این حالت، روش‌های عددی برای حل این معادلات بسیار کارآمد و حیاتی هستند. از مزایای استفاده از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی این است که این روش‌ها می‌توانند با دقت بالا مسائل پیچیده ریاضی و محاسباتی را حل کنند. همچنین این روش‌ها در تحلیل و بررسی اثرات تغییرات پارامترها و شرایط مختلف در سیستم‌های پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرند. علاوه بر این، روش‌های عددی می‌توانند به عنوان ابزاری کارآمد در پیش‌بینی رفتار سیستم‌ها و بررسی اثرات تغییرات در شرایط مختلف در آن‌ها مورد استفاده قرار گیرند.

روش‌های عددی سنتی مانند روش‌های عناصر محدود^۱ [۷]، تفاضل محدود^۲ [۳۹]، یا روش‌های حجم محدود^۳ [۱۴] انگیزه‌ای برای شبیه‌سازی‌های اولیه یک و دو بعدی مسائل مهندسی از طریق معادلات دیفرانسیل جزئی بودند. به عنوان مثال در بسیاری از مسائل، محققان تحلیل عددی از روش‌های عناصر محدود برای گسسته‌سازی بعد مکانی استفاده می‌کنند. این روش از عناصر پیوسته، توابع کوششی و آزمون پیوسته بین عنصری، مبتنی بر عنصر، محلی و چند جمله‌ای استفاده می‌کند. از آنجایی که توابع کوششی و آزمون مبتنی بر عنصر هستند، شکل ضعیف گالرکین^۴ منجر به ماتریس‌های سختی بر پایه عناصر می‌شود. بنابراین، محاسبه انتگرال‌ها در شکل ضعیف گالرکین آسان است و تقارن و پراکندگی ماتریس سختی کلی برای شبیه‌سازی‌ها در مقیاس بزرگ مناسب و کارآمد می‌باشد. با این حال، دقت روش عناصر محدود تا حد زیادی به کیفیت شبکه بستگی دارد و برای به دست آوردن جواب‌های عددی رضایت بخش، معمولاً تلاش‌های زیادی بر روی شبکه‌بندی انجام می‌شود. به خصوص، حتی اگر شبیه‌سازی‌ها با ساختار شبکه با کیفیت بالا راه‌اندازی شوند، در صورت تغییر شکل‌های بزرگ، دقت جواب‌ها به طور چشمگیری کاهش می‌یابد.

¹Finite Element Method

²Finite Difference Method

³Finite Volume Method

⁴Galarkin Weak Formulation

به منظور بررسی تشکیل ترک ها، گسیختگی و تکه تکه شدن، اغلب از روش هایی مانند لایه بندی مجدد و حذف عناصر استفاده می شود. لایه بندی مجدد به معنای تغییر ساختار مش عناصر محدود است. این تغییر می تواند در مورد تعداد، نوع، شکل، اندازه و موقعیت عناصر محدود صورت بگیرد. گسسته سازی درگیر در این روش ها مستلزم نوعی محاسبات اساسی است؛ به عنوان مثال، مثلث بندی ناحیه مورد نظر که ایجاد این شبکه ها برای مسائل با دامنه هایی با شکل پیچیده و نامنظم را به یک کار نسبتاً دشوار تبدیل می کند و برای مسائل با ابعاد بالاتر نیز مشکل می باشد.

با توجه به این محدودیت ها، روش های بدون شبکه ^۱ به عنوان روش جایگزین برای حل معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار می گیرند. در طول دهه های گذشته، طرح های تقریب مبتنی بر گره، با گسترش روش های بدون شبکه، انگیزه فوق العاده ای را در زمینه روش های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ایجاد کرده اند. یکی از دلایل توسعه روش های بدون شبکه این واقعیت است که گسسته سازی روش های بدون شبکه به طوری است که برای مقابله با تغییرات هندسی دامنه مورد بررسی در مساله، نسبت به روش هایی که بر پایه شبکه بندی هستند، مناسب تر می باشد. علاوه بر این، هزینه های محاسباتی مرتبط با تولید شبکه در رویکردهای بدون شبکه حذف می شوند، زیرا آن ها فقط بر اساس مجموعه ای از نقاط مستقل هستند. از جمله روش های بدون شبکه می توان به روش عناصر آزاد گالرکین ^۲ [۱۲] و روش بدون شبکه پتروف-گالرکین محلی ^۳ [۸] می توان اشاره کرد. در هر دو روش توابع آزمون و کوششی با استفاده از نقاط نامنظم یا یکنواخت که در دامنه توزیع شده اند به دست می آید با این تفاوت که در روش عناصر آزاد گالرکین از فضای آزمون و کوششی یکسان استفاده می شود ولی در روش پتروف-گالرکین محلی دو فضای متفاوت برای توابع آزمون و کوششی به کار گرفته می شود. در این روش ها توابع آزمون و کوششی باید در دامنه مساله پیوسته باشند و به همین دلیل معمولاً از تقریب های توابع پایه ای شعاعی ^۴ و حداقل مربعات متحرک ^۵ استفاده می شود. توابع کوششی به دست آمده توسط این تقریب ها پیچیده می باشند و اعمال شرایط مرزی را سخت می کنند. هم چنین محاسبه انتگرال گیری های فرم ضعیف مشکل خواهد بود. بنابراین استفاده از توابع آزمون و کوششی به صورت چند جمله ای های ساده، محلی و احتمالاً ناپیوسته برای یک الگوریتم عددی می تواند بیشتر مناسب باشد.

در میان روش های دیگر بدون شبکه می توان به روش ذرات هموار هیدرودینامیک ^۶ [۴۶] اشاره کرد که بر اساس فرمول بندی لاگرانژ می باشد. از این روش برای حل بسیاری از مسائل و معادلات استفاده می شود اما این روش نیز دارای محدودیت هایی می باشد. به عنوان مثال اثبات پایداری روش بسیار مشکل خواهد بود زیرا از فرم قوی استفاده می کند. هم چنین اگر ما از توابع هسته ای هموار شده ^۷ برای محاسبه مشتق های تقریبی استفاده کنیم، ممکن است ناپایداری اتفاق بیوفتد.

¹Meshless methods

²Element Free Galerkin (EFG)

³Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

⁴Radial Basis Function (RBF)

⁵Moving Least Squares (MLS)

⁶Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

⁷Smoothed Kernel Functions

بر اساس توضیحات بالا، آنالیز و مقایسه دیگر روش‌های عددی، لیتینگ دانگ^۱ و همکاریانش به منظور ارائه یک روش کلی برای حل معادلات دیفرانسیل، به طوری که توابع آزمون و کوششی چندجمله‌ای‌های ساده، محلی و ناپیوسته باشند، یک روش جدید بدون شبکه به نام روش نقاط شکننده ارائه دادند [۲۳]. این روش هم‌چنین برای مسائل دو بعدی الاستیسیته در دامنه‌های پیچیده [۷۳] و هدایت حرارتی گذرا در محیط غیرهمگن استفاده شده است [۲۸].

در روش نقاط شکننده برای دستیابی به توابع آزمون و کوششی روش تفاضلات محدود تعمیم یافته^۲، پایه شعاعی محمل فشرده^۳ یا روش مربع سازی دیفرانسیل^۴ را می‌توان به کار برد. به علت ناپیوسته بودن توابع آزمون و کوششی، اگر به طور مستقیم در فرم ضعیف گالرکین به کار برده شوند، ممکن است روش ناسازگار شود. از این رو از اصلاحات شار عددی^۵ که به طور عمده در روش‌های گالرکین ناپیوسته^۶ [۶] به کار می‌رود، استفاده می‌شود. در نتیجه با به کارگیری روش نقاط شکننده، به یک دستگاه معادلات با ماتریس ضرایبی دست پیدا می‌کنیم که متقارن و پراکنده می‌باشد. این ماتریس ضرایب به صورت مجموع ماتریس‌های سختی نقطه‌ای هستند که حاصل محاسبات و انتگرال‌گیری‌های ساده می‌باشند.

در این رساله، برای افراز دامنه به زیردامنه‌ها، معمولاً نمودار ورونوی^۷ به کار گرفته شده است که در هندسه محاسباتی و بسیاری از زمینه‌های علمی مورد توجه قرار می‌گیرند. این نمودارها یک راه حل کارآمد برای بسیاری از مسائلی هستند که به تجزیه فضا نیاز دارند [۹، ۵۵، ۵۸].

ویژگی‌های مهم روش نقاط شکننده در حالت‌های زیر خلاصه می‌شود:

۱. در این روش، توابع آزمون و کوششی به جای عناصر، مبتنی بر نقاط هستند. اگرچه ناپیوستگی‌هایی در مرزهای زیر دامنه‌های ایجاد شده توسط نمودار ورونوی رخ می‌دهد که با اعمال شارهای عددی جریمه داخلی، می‌توان این ناپیوستگی‌ها را اصلاح کرد.

۲. از آنجایی که این روش بر اساس عناصر یا شبکه نیست، مانند روش عناصر محدود تغییر شکل شبکه‌بندی‌ها باعث تغییر در دقت روش نمی‌شود.

۳. در این روش می‌توان نقاط شکننده را به صورت نامنظم بر روی دامنه مسئله توزیع کرد و با استفاده از نمودار ورونوی دامنه مسئله را به زیردامنه‌ها تقسیم کرد به طوری که هر یک از آنها فقط شامل یکی از نقاط شکننده باشد. تابع کوششی با بسط‌های سری تیلور در هر یک از زیر دامنه‌ها به دست می‌آید و با استفاده از تفاضلات محدود تعمیم یافته، مشتقات سری تیلور به دست می‌آید.

۴. اگر از بسط تیلور مرتبه اول در ابتدای روش استفاده کنیم، انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای برای انتگرال فرم

¹Leiting Dong

²Generalized Finite Difference Method

³Compactly-Supported Radial Basis

⁴Differential Quadrature Method

⁵Numerical Flux Corrections

⁶Discontinuous Galerkin (DG) Method

⁷Voronoi diagram

ضعیف گالرکین در هر زیر دامنه کافی است. هنگامی که از مشتقات مرتبه بالاتر در بسط تیلور استفاده می کنیم، انتگرال متناظر با تعداد نقاط بیشتر استفاده می شود که به راحتی قابل محاسبه است.

۵. به طور کلی، الگوریتم نقاط شکننده یک فرآیند ساده است که می تواند برای مدل سازی پدیده هایی در طبیعت که دارای ترک، شکستگی یا پارگی هستند استفاده شود. این مسائل به وسیله عناصر ایجاد شده توسط نمودار ورونوی که دو نقطه مجاور را احاطه کرده اند به راحتی قابل مدل سازی هستند. بنابراین می توان از این روش برای مطالعه پدیده هایی در طبیعت که حاوی مواد شکننده هستند استفاده کرد که دلیل نامگذاری «روش نقاط شکننده» نیز همین می باشد.

در جدول ۱ تفاوت های اصلی و مزیت های روش نقاط شکننده نسبت به روش های عناصر محدود، عناصر آزاد گالرکین، پتروف-گالرکین محلی و ذرات هموار هیدرودینامیک نشان داده شده است. مباحث مورد بررسی در رساله مطابق ذیل تدوین شده است:

فصل اول رساله به مقدمات و تعاریف اولیه اختصاص یافته است. ابتدا انواع معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مختلف تعریف شده و پس از آن فضاهای سوبولوف مورد استفاده در متن به طور خلاصه بیان می شود. همچنین، شارهای عددی و کاربرد آن ها تعریف شده است.

در فصل دوم، توابع کوششی به صورت چند جمله ای های ساده، محلی و ناپیوسته تعیین می شود. برای محاسبه آن، با استفاده از روش تفاضلات محدود تعمیم یافته، روش های به دست آوردن ∇u و تعیین نقاط همسایگی در دامنه های منظم، پیچیده و ترک دار توضیح داده شده است. برای این منظور، نقاطی در دامنه به صورت پراکنده در نظر گرفته شده و با استفاده از آن نقاط، نمودار ورونوی مشخص شده است.

فصل سوم به بدست آوردن جواب های عددی برای معادله تلگراف هذلولی گون دو بعدی با استفاده از روش پیشنهادی می پردازد. ابتدا معادله تلگراف با شرایط مرزی آن معرفی شده و گسسته سازی زمانی مسئله با استفاده از طرح های تفاضلات محدود انجام شده است. پس از آن، قضیه های همگرایی و پایداری مربوط به طرح تفاضلی زمانی بیان می شود. در ادامه، اصلاحات شار عددی روی معادله اعمال می شود و با گسسته سازی فضایی مسئله با استفاده از روش نقاط شکننده، ماتریس های سختی نقطه ای به دست می آید. حال، یک دستگاه معادلات خطی داریم که با حل آن، جواب عددی معادله دیفرانسیل به دست می آید. در بخش آخر این فصل، نتایج عددی حاصل از به کارگیری روش نقاط شکننده برای معادله تلگراف با جواب های تحلیلی مقایسه و خطاهای نسبی، زمان محاسبات و نرخ همگرایی مربوط به هر مثال گزارش شده است.

در فصل چهارم، معادله مختلط دو بعدی شرودینگر در دامنه های دلخواه حل شده است. پس از پیاده سازی روش و گسسته سازی زمانی و فضایی معادله، ماتریس های سختی و دستگاه معادلات خطی به دست آمده، نرخ همگرایی و دقت نتایج عددی حاصل از حل معادلات نمونه مختلف در دامنه های منظم و نامنظم گزارش شده است.

در فصل پنجم، روش برای معادله های موج خطی و غیرخطی در دامنه های پیچیده و ترک دار مطالعه شده است.

برای گسسته‌سازی زمانی مسئله، چند طرح تفاضلات محدود به کارگرفته شده که قضیه‌های پایداری و همگرایی مربوط به آنها نیز بیان و اثبات شده است. برای به دست آوردن یک تقریب مناسب برای بخش غیرخطی معادله موج، از یک روش پیشگو-اصلاحگر استفاده شده است. در انتها با اعمال روش نقاط شکننده روی معادله‌های خطی و غیرخطی موج به دستگاه‌های خطی دست پیدا می‌کنیم. این فصل به طور ویژه به مطالعه حل عددی معادلات به روش بدون شبکه نقاط شکننده روی دامنه‌های نامنظم و دارای ناپیوستگی می‌پردازد و جواب‌های عددی معادلات موج خطی، معادلات غیرخطی ساین-گوردون و ساین هاپیربولیک-گوردون را در این دامنه‌ها با نتایج حاصل از جواب تحلیلی مقایسه می‌کند.

در فصل ششم، معادله دوهمساز دوبعدی تعمیم‌یافته که یک معادله از مرتبه چهار می‌باشد با استفاده از روش پیشنهادی حل شده است. تابع‌های آزمون یک بار به صورت همان چندجمله‌ای‌های توابع کوششی و بار دیگر به صورت تابع هویساید در نظر گرفته شده است. بنابراین دو روش داریم که روش‌های نقاط شکننده گالرکین و هویساید نامگذاری شده است و برای هر کدام، ماتریس‌های سختی مجزا به دست می‌آید. در بخش نتایج عددی مربوط به این فصل، نتایج حاصل از دو روش با هم مقایسه شده و دقت، زمان انجام محاسبات و نرخ‌های همگرایی گزارش شده است.

مقالات مستخرج از رساله

- [1] Donya Haghighi, Saeid Abbasbandy, Elyas Shivanian, Leiting Dong, and Satya N. Atluri. "The Fragile Points Method (FPM) to solve two-dimensional hyperbolic telegraph equation using point stiffness matrices." *Engineering Analysis with Boundary Elements* 134 (2022): 11-21.
DOI: [10.1016/j.enganabound.2021.09.018](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.09.018).
- [2] Donya Haghighi, Saeid Abbasbandy, Elyas Shivanian, "Applying the meshless Fragile Points method to solve the two-dimensional linear Schrodinger equation on arbitrary domains." *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization* (2022). DOI:[10.22067/ijnao.2022.72900.1063](https://doi.org/10.22067/ijnao.2022.72900.1063).
- [3] Donya Haghighi, Saeid Abbasbandy, Elyas Shivanian, "Study of the Fragile Points Method for solving two-dimensional linear and nonlinear wave equations on complex and cracked domains. " *Engineering Analysis with Boundary Elements*. DOI: [10.1016/j.enganabound.2022.09.036](https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.09.036).
- [4] Donya Haghighi, Saeid Abbasbandy, Elyas Shivanian, " Application of the Fragile Points Method for two-dimensional generalized biharmonic equation on arbitrary domains." Under revision.

Conference Papers:

- [5] Donya Haghighi, Saeid Abbasbandy, The Fragile Points Method (FPM) for Solution of the Two-Dimensional Wave Equation using Point Stiffness Matrices, 51st annual iranian mathematics conference(aimc51), February 2021.
- [6] Donya Haghighi, Saeid Abbasbandy, Applying the Meshless Fragile Points Method (FPM) to solve Two Dimensional Linear Schrödinger Equation, 8th Seminar on Numerical Analysis and its Applications, April 2021.

جدول ۱: مقایسه روش نقاط شکننده با سایر روش‌های عددی

نام روش	فرم ضعیف یا قوی	توابع کوششی	انتگرال گیری های عددی
عناصر محدود	فرم ضعیف گالرکین	بر پایه عناصر	انتگرال گیری گاوس روی عناصرها که اگر شکل عناصر تغییر کند ممکن است روش نادقیق شود.
عناصر آزاد گالرکین	فرم ضعیف گالرکین	بر پایه نقاط به طوری که توابع کوششی پیوسته و بر اساس تقریب های توابع شعاعی، کمترین مربعات متحرک و... است.	انتگرال گیری های عددی با نقاط مربع سازی زیاد یا انتگرال گیری گره ای ثابت شده
پتروف-گالرکین محلی	فرم ضعیف پتروف- گالرکین محلی	بر پایه نقاط به طوری که توابع کوششی پیوسته هستند بر اساس تقریب های توابع شعاعی، کمترین مربعات متحرک و...	انتگرال گیری های محلی در زیردامنه های محلی با نقاط مربع سازی زیاد
ذرات هموار هیدرودینامیک	فرم قوی	هموارسازی هسته ای متغیرهای گره ای	روش هم مکانی که برای گسسته سازی فضایی ممکن است باعث ناپایداری شود.
نقاط شکننده	فرم ضعیف گالرکین با اصلاحات شار عددی	بر پایه نقاط با توابع کوششی ناپیوسته (چند جمله ای های تکه ای پیوسته)	انتگرال گیری های تحلیلی با قاعده انتگرال گیری ساده گاوس

فصل ۱

مقدمات و تعاریف اولیه

در این فصل، با تعاریف، موضوعات، علامت های اختصاری و نمادهای استفاده شده در متن رساله، آشنا می شویم.

۱.۱ انواع معادلات دیفرانسیل

۱.۱.۱ تعریف. هر رابطه ای بین تابع، متغیرهای مستقل و مشتقات تابع نسبت به متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می نامیم. معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می شوند: اگر تابع فقط یک متغیر مستقل داشته باشد، یک معادله دیفرانسیل معمولی و اگر بیش از یک متغیر مستقل داشته باشد، آن را معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می نامند. یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به طور خلاصه با PDE نشان می دهیم که شکل کلی آن به صورت زیر است:

$$F(x, y, \dots; u, u_x, u_y, \dots; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots) = 0. \quad (1.1)$$

این معادله شامل متغیرهای مستقل $x, y, \dots$ ، تابع مجهول u از متغیرهای مستقل و همچنین مشتق های جزئی $u_x, u_y, \dots; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, \dots$ است.

۲.۱.۱ تعریف. بالاترین مرتبه مشتق ظاهر شده در معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را مرتبه یک PDE می نامیم.

۳.۱.۱ تعریف. تعداد متغیرهای مستقل مکانی یک PDE، بعد آن را مشخص می کند.

۴.۱.۱ تعریف. اگر معادله دیفرانسیل (۱.۱) نسبت به u و مشتقات نسبی آن خطی باشد، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی نامیده می شود.

۵.۱.۱ تعریف. انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی، مرتبه دوم با دو متغیر مستقل: این معادلات به صورت کلی زیر است:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0. \quad (2.1)$$

که در آن ضرایب a, b, c, d, e, f و g اعدادی ثابت یا توابعی از متغیرهای مستقل x و y هستند. در حالتی که برای هر x و y داشته باشیم $g(x, y) = 0$ ، معادله همگن نامیده می‌شود و در غیر این صورت معادله ناهمگن گفته می‌شود. همچنین بر اساس ضرایب a, b, c معادله دیفرانسیل جزئی با دو متغیر مستقل به سه دسته زیر تقسیم می‌شود:

(الف) اگر $b^2 - 4ac < 0$ ، معادله را بیضوی^۱ می‌نامیم.

(ب) اگر $b^2 - 4ac = 0$ ، معادله را سهموی^۲ می‌نامیم.

(ج) اگر $b^2 - 4ac > 0$ ، معادله را هذلولوی^۳ می‌نامیم.

۶.۱.۱ تعریف. انواع عملگرها: فرض کنید $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ و متغیر زمانی $t \in \mathbb{R}^+$ باشد، آنگاه داریم:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad \text{(الف) عملگر لاپلاس^۴ :}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \quad \text{(ب) عملگر انتشار^۵ :}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \quad \text{(ج) عملگر دالامبر^۶ :}$$

همچنین یک عملگر مرتبه اول به نام عملگر گرادیان ∇ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

۷.۱.۱ مثال. در جدول زیر کلاس‌های مربوط به رایج‌ترین معادلات دیفرانسیل بیان شده است [۶۵، ۷]:

هذلولوی	سهموی	بیضوی
معادله موج	معادله گرما	معادله پتانسیل
$u_{tt} - \Delta u = 0$	$u_t - \Delta u = 0$	$\Delta u = 0$
$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$	$u_t(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0$	$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$
$a = -1, b = 0, c = 1$ $b^2 - 4ac > 0$	$b = c = 0, a = -1$ $b^2 - 4ac = 0$	$a = c = 1, b = 0$ $b^2 - 4ac < 0$

۸.۱.۱ تعریف. شرایط مرزی و اولیه: برای تضمین وجود و یکتایی جواب، یک معادله دیفرانسیل جزئی همراه با شرایط مرزی و اولیه بیان می‌شود. اگر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی همراه با شرایط اولیه باشد، به آن یک مسئله

¹Elliptic equation

²Parabolic equation

³Hyperbolic equation

⁴Laplace operator

⁵Diffusion operator

⁶d'Alembert operator

مقدار اولیه گفته می‌شود و اگر معادله علاوه بر شرایط اولیه، دارای شرایط مرزی نیز باشد، مسئله مقدار اولیه-مرزی نامیده می‌شود. در ادامه سه مورد از متداول‌ترین شرایط مرزی را بیان می‌کنیم.

شرایط مرزی دیریکله^۱: اگر شرایط مرزی فقط بر حسب مقدار تابع مجهول روی مرز دامنه معادله داده شده باشد، آن را شرایط مرزی دیریکله می‌نامند.

شرایط مرزی نیومن^۲: اگر شرایط مرزی فقط بر حسب مقدار مشتق‌های نسبی تابع مجهول روی مرز دامنه معادله باشد، آن را شرایط مرزی نیومن می‌نامند.

شرایط مرزی رابین^۳: اگر شرایط مرزی هم بر حسب مقدار تابع مجهول و هم بر حسب مقدار مشتق‌های نسبی تابع مجهول روی مرز دامنه معادله داده شده باشد، آن را شرایط مرزی رابین می‌نامند.

۲.۱ فضاهاى سوبولوف

در این بخش، ابتدا برخی نمادها و تعاریفی که در فصل‌های بعدی کاربرد هستند را شرح می‌دهیم. فرض می‌کنیم با به کار گرفتن نمودار ورونوی با استفاده از نقاط یکنواخت یا غیریکنواخت، دامنه Ω به زیر دامنه‌های $E_1, E_2, \dots, E_k$ تقسیم شده باشد. افزاز ایجاد شده به وسیله این نمودار را T_k می‌نامیم.

۱.۲.۱ تعریف. فضای سوبولوف^۴ $H^\gamma(\Omega)$. اگر $L^\gamma(\Omega)$ یک فضای لِبگ با ضرب داخلی و نرم L^γ مربوط به این فضا به صورت زیر باشد:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u v d\Omega, \quad \|u\|_{L^\gamma} = (u, u)^{1/\gamma}, \quad u, v \in L^\gamma(\Omega),$$

آنگاه فضای سوبولوف $H^\gamma(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H^\gamma(\Omega) = \{v : v \in L^\gamma(\Omega), \nabla v \in L^\gamma(\Omega)\}.$$

۲.۲.۱ تعریف. فضای سوبولوف $H^m(T_k)$. فضای $H^m(T_k)$ شامل توابع L^2 ای روی دامنه Ω است به طوری که این توابع روی زیر دامنه‌های $E_j \in \Omega, j = 1, 2, \dots, k$ ، به فضای سوبولوف $H^{m, \gamma}(E_j)$ تعلق دارند. به عبارت دیگر

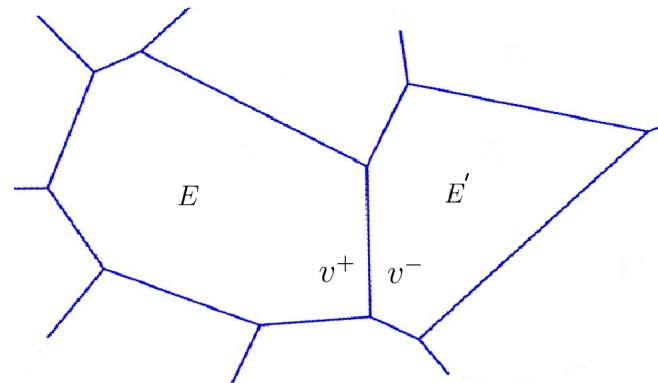
$$H^m(T_k) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{E_j} \in H^{m, \gamma}(E_j), E_j \in \Omega \right\},$$

¹Dirichlet boundary conditions

²Neumann boundary conditions

³Robin boundary conditions

⁴Sobolev Space



شکل ۱.۱: ردهای v^+ و v^- برای زیردامنه E

به طوری که

$$H^{m,\gamma}(E_j) = \{v \in L^\gamma(E_j) : D^\alpha v \in L^\gamma(E_j), |\alpha| \leq m\},$$

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d, \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i.$$

تعریف ۳.۲.۱. فضای $T(\Gamma)$ و ردهای v^+ و v^- . فرض کنید که $v \in H^\gamma(T_k)$ ، ردهای v را با v^+ و v^- نشان می‌دهیم که به ترتیب از فضای داخلی زیردامنه‌های E و E' گرفته شده‌اند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$v^+(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v(\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{n}_k), \quad v^-(\mathbf{x}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} v(\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{n}_k),$$

که $\mathbf{n}_k$ بردار نرمال یک عمود بر مرز دو زیرفضا می‌باشد. به شکل ۱.۱ توجه کنید.

ردهای v به فضای $T(\Gamma) = \Pi_{E \in T_k} L^\gamma(\partial E)$ تعلق دارند به طوری که Γ مجموع همه مرزهای زیردامنه‌های E در T_k می‌باشد. مقدار توابع در $T(\Gamma)$ روی $\Gamma_h = \Gamma \setminus \partial\Omega$ دو مقداری است و روی $\partial\Omega$ یک مقداری است [۶].

۳.۱ روش گالرکین ناپیوسته

در ریاضیات، در حوزه تحلیل عددی، روش‌های گالرکین به نام بوریس گالرکین^۱، ریاضیدان شوروی نامگذاری شده‌اند. روش‌های گالرکین، یک ابزار کلی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی است. در این روش، یک معادله دیفرانسیل با استفاده از فرمول‌بندی ضعیف، و با اعمال محدودیت‌های خطی تعیین شده توسط مجموعه‌های محدودی از توابع پایه، به یک مسئله گسسته تبدیل می‌کنند. این روش با استفاده از توابعی که برای تقریب تابع مجهول استفاده می‌شود، به دو دسته روش گالرکین پیوسته^۲ و روش گالرکین ناپیوسته^۳ تقسیم می‌شود [۷].

¹Boris Galerkin

²Continuous Galerkin method

³Discontinuous Galerkin method

در طول بیست سال گذشته، روش‌های ناپیوسته گالرکین اهمیت زیادی برای حل کارآمد و دقیق انواع مختلف معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی پیدا کرده‌اند. برخلاف روش‌های عناصر محدود گالرکین پیوسته تثبیت شده، روش‌های گالرکین ناپیوسته گسسته‌سازی پایدار را بدون نیاز به استراتژی‌های تثبیت اضافی ایجاد می‌کنند و نوسانات غیرفیزیکی را برای مسائل تحت سلطه فرارفت خطی کاهش می‌دهند. این روش بهترین ویژگی‌های روش‌های حجم محدود و اجزای محدود پیوسته را ترکیب می‌کند. روش‌های حجم محدود تنها می‌توانند از چندجمله‌ای درجه پایین‌تر استفاده کنند و روش‌های اجزای محدود پیوسته به دلیل الزامات پیوستگی به نظم بالاتری نیاز دارند. [۶۹]

در روش گالرکین ناپیوسته، ابتدا دامنه مسئله را به زیر دامنه‌هایی که می‌توانند شکل‌های مختلفی داشته باشند، تقسیم می‌کنیم. سپس تابعی را که با آن، مجهول معادله را تخمین می‌زنیم انتخاب می‌کنیم. در این روش به دلیل سادگی مشتق و انتگرال‌گیری‌ها معمولاً از توابع چندجمله‌ای استفاده می‌شود. با توجه به این که این توابع تقریب در بین عناصر و روی مرز آن‌ها دارای ناپیوستگی هستند، (در دامنه مساله به صورت تکه‌ای پیوسته می‌باشند)، برای تقریب مقادیر مجهول روی مرز از شارهای عددی استفاده می‌شود. در انتها با حل یک دستگاه، جواب عددی حاصل از روش به دست خواهد آمد [۶].

در ادامه به تعریف شارهای عددی و انواع آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۳.۱ شارهای عددی

در روش گالرکین ناپیوسته، ناپیوستگی‌ها روی مرزهای عناصر رخ می‌دهد و محاسبه مقدار تابع کوششی فقط در این ناپیوستگی‌ها مشکل خواهد بود. برای این منظور، به جای مقدار تابع کوششی، از شارهای عددی استفاده می‌شود. در این رساله نیز با توجه به این که تابع‌های کوششی را به صورت توابع چندجمله‌ای ناپیوسته روی کل دامنه در نظر گرفته‌ایم، از شارهای عددی برای تعیین مقدار این توابع روی مرزهای مربوط به چندضلعی‌های ورونوی استفاده شده است. قبل از بیان انواع شارهای عددی، عملگرهای پرش^۱ و میانگین^۲ و ... روی وجوه بین عناصر همسایه معرفی می‌شود. به وسیله این عملگرها می‌توانیم شارهای عددی را مدیریت کنیم. اگر Γ_h مجموعه تمام مرزهای داخلی باشند، Γ_D مرز شرایط دیریکله و Γ_N مرز شرایط نیومانی را مشخص کند، می‌توانیم بنویسیم:

$$\Gamma = \Gamma_h \cup \Gamma_D \cup \Gamma_N.$$

برای $q \in T(\Gamma)$ و $\varphi \in (T(\Gamma))^2$ عملگر میانگین $\{\}$ و عملگر پرش $[\]$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

¹Jump operator

²Average operator

الف) فرض کنید e مرز مشترک زیردامنه‌های E_1 و E_2 از دامنه کلی باشند، یعنی $e \in \Gamma_h$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \{q\} &= \frac{1}{\gamma}(q_1 + q_2), & [q] &= q_1 \mathbf{n}_1 + q_2 \mathbf{n}_2, \\ \{\varphi\} &= \frac{1}{\gamma}(\varphi_1 + \varphi_2), & [\varphi] &= \varphi_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \varphi_2 \cdot \mathbf{n}_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

که q_1 و q_2 رد های q و φ_1 و φ_2 رد های φ می‌باشند.

ب) اگر $e \in \Gamma_D$ یا $e \in \Gamma_N$ عملگرها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \{q\} &= q, & [q] &= q\mathbf{n}, \\ \{\varphi\} &= \varphi, & [\varphi] &= \varphi \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

با توجه به این تعاریف، لم زیر برقرار است.

۱.۳.۱ لم. (به [۳۲] مراجعه کنید.) اگر $\{\}$ و $[]$ به ترتیب عملگرهای میانگین و پرش باشند، برای $q \in T(\Gamma)$ و $\varphi \in (T(\Gamma))^2$ داریم:

$$\{\{q\}\} = \{q\}, \quad \{[q]\} = [q], \quad [[q]] = 0, \quad , [\{q\}] = 0, \quad (5.1)$$

$$\{\{\varphi\}\} = \{\varphi\}, \quad \{[\varphi]\} = [\varphi], \quad [[\varphi]] = 0, \quad , [\{\varphi\}] = 0. \quad (6.1)$$

با توجه به عملگرهای میانگین و پرش، شارهای عددی متقارن و نامتقارن تعریف می‌شوند انتخاب شارهای عددی بسیار مهم است، زیرا می‌تواند بر پایداری و دقت روش و همچنین پراکندگی و تقارن ماتریس سختی تأثیر بگذارد. در جدول ۱۰.۳ در [۶] و در منبع [۳۲] به انواع روش‌های گالرکین ناپیوسته و شارهای عددی متناظر با آن‌ها از قبیل باسی-ریبای^۱، برزی^۲، گالرکین ناپیوسته محلی^۳، جریمه داخلی^۴، و اشاره شده است. در فصل سوم جزئیات دو مورد از این شارهای عددی جریمه داخلی و شارهای عددی گالرکین ناپیوسته داخلی بیان شده است که برای محاسبات مربوط به روش نقاط شکننده، از شارهای عددی جریمه داخلی استفاده شده است. استفاده از این شارها، اولین بار توسط برامبل^۵ و نیچه^۶ و به منظور اعمال فرم ضعیف شرط مرزی دیریکله در فضای آزمون، با وارد نمودن عبارات پنالتی به فرم تغییراتی معرفی گردیدند [۱۳]. هم‌چنین بابوشکا^۷ عبارت پنالتی را برای اعمال شرایط مرزی به فرم ضعیف برای روش‌های المان محدود به کار برد. این روش بعدها در روش گالرکین ناپیوسته و برای تحمیل ناپیوستگی داخلی بین عناصر نیز به کار برده شد [۱۰].

¹Bassi-Rebay

²Brezzi

³Local Discontinuous Galerkin

⁴Interior Penalty

⁵Bramble

⁶Nitche

⁷Babuska

با به کارگیری اصلاحات شار عددی، به فرمول روش نقاط شکننده خواهیم رسید که از آن ماتریس‌های سختی نقطه‌ای را می‌توان به دست آورد.

در فصل بعدی چگونگی تعیین توابع آزمون و کوششی به وسیله روش تفاضلات محدود تعمیم‌یافته توضیح داده شده است.

فصل ۲

تعیین توابع آزمون و کوششی

در این فصل به روش تفاضلات محدود تعمیم یافته برای بدست آوردن توابع کوششی پرداخته شده است. در اکثر مثال‌های عددی این رساله، از همین توابع چند جمله‌ای ساده، محلی و ناپیوسته به عنوان تابع آزمون نیز استفاده شده است. ابتدا به تعریف توابع آزمون و کوششی می‌پردازیم:

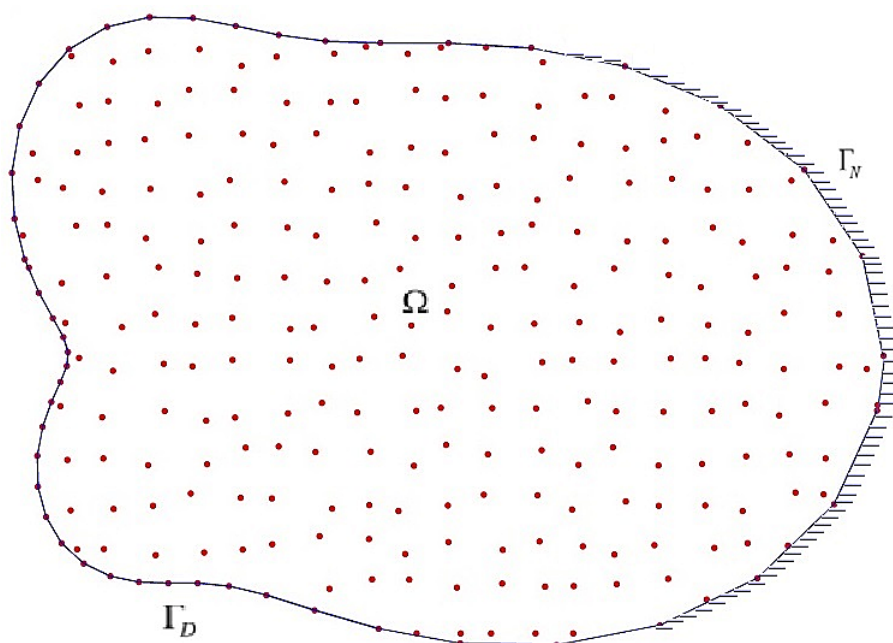
۱.۰.۲ تعریف. تابع کوششی: در روش گالرکین، تابع کوششی به تابعی اطلاق می‌شود که برای تقریب حل معادله دیفرانسیل جزئی در تحلیل اجزای محدود استفاده می‌شود. تابع کوششی از یک فضای تابعی با ابعاد محدود انتخاب می‌شود که شرایط مرزی مسئله را برآورده می‌کند. معمولاً به صورت ترکیبی خطی از توابع پایه نشان داده می‌شود که اغلب توابع چند جمله‌ای تکه‌ای هستند که در دامنه مورد نظر تعریف می‌شوند. این توابع پایه مجموعه‌ای از توابع درون‌یابی را تشکیل می‌دهند که فضای جواب را در بر می‌گیرند. تابع کوششی به گونه‌ای انتخاب می‌شود که به جواب تحلیلی معادله نزدیک باشد.

۲.۰.۲ تعریف. تابع آزمون: در فرمول‌بندی ضعیف گالرکین، تابع آزمون از همان فضای تابعی مربوط به تابع کوششی انتخاب می‌شود. برای آزمایش اعتبار جواب تقریبی استفاده می‌شود و نقش مهمی در فرآیند انتگرال‌گیری برای به دست آوردن معادلات جبری برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ایفا می‌کند.

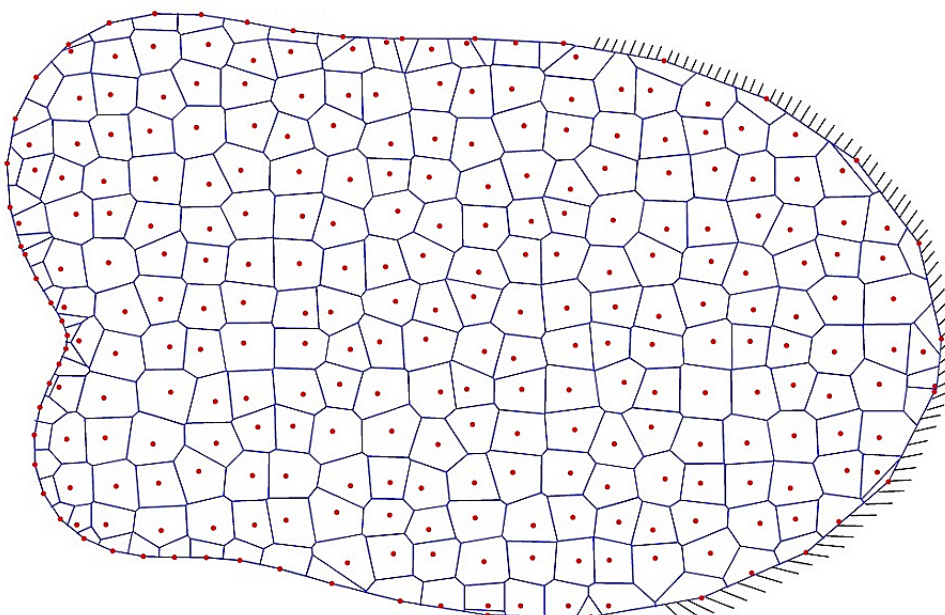
در ادامه، ابتدا دامنه مساله مورد نظر را Ω و مرز این دامنه $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ در نظر می‌گیریم به طوری که $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ، که در آن Γ_D و Γ_N به ترتیب مرزهای دیریکله و نیومانی را مشخص می‌کند. همانطور که در شکل **۱.۲** نشان داده شده است، چندین نقطه به صورت نامنظم یا منظم در داخل دامنه و مرز آن توزیع می‌شود. با استفاده از این نقاط، دامنه را به زیردامنه‌های مجاور به طوری که با هم اشتراکی نداشته باشند، تقسیم می‌کنیم. لازم به ذکر است که هر زیردامنه فقط دارای یکی از نقاط است.

برای روش نقاط شکننده، تقسیم دامنه به زیردامنه‌ها ضروری است. چندین فرآیند برای این افراز وجود دارد که در این مطالعه، معمولاً از نمودار ورونوی استفاده می‌شود (شکل **۲.۲**).

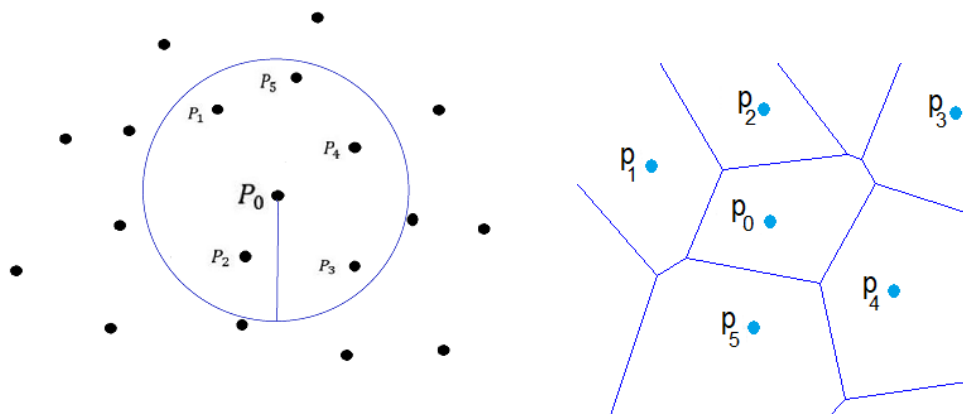
در این نمودار به هر مجموعه‌ای از نقاط ناحیه‌ای اختصاص داده می‌شود. این نواحی سلول‌های ورونوی نامیده می‌شود. برای یک مجموعه از نقاط نمودار ورونوی دامنه را به زیردامنه‌هایی تقسیم‌بندی می‌کند که برای هر نقطه از مجموعه نقاط یک زیردامنه تعریف می‌شود به طوری که تمام نقاط این زیردامنه‌ها به نقطه تولیدکننده آن زیردامنه نزدیکتر می‌باشد.



شکل ۱.۲: دامنه Ω ، نقاط پراکنده در دامنه و مرزهای دیریکله و نیومانی



شکل ۲.۲: دامنه Ω و افراز آن به وسیله نمودار ورونوی



شکل ۳.۲: دو روش برای تعریف محمل برای نقطه P_0

توجه کنید که در روش نقاط شکننده از شبکه‌بندی دامنه استفاده نمی‌شود بلکه مجموعه‌ای از نقاط تصادفی یا یکنواخت که در دامنه پراکنده شده‌اند برای گسسته‌سازی فضا به کارگرفته می‌شود. بنابراین، توابع آزمون و کوششی به صورت چند جمله‌ای محلی و ناپیوسته هستند که بر اساس این نقاط بدست می‌آیند. در هر زیردامنه از Ω تابع کوششی برحسب مقدارهای تابع مجهول در معادله و گرادیان مربوط به آن در نقاط داخلی می‌تواند تعریف شود. برای مثال اگر این تابع را u_h بنامیم در هر زیردامنه E که شامل نقطه P_0 است (شکل ۳.۲)، تابع کوششی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$u_h(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}_0, t) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^T \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t)|_{P_0}, \quad \mathbf{x} \in E. \quad (1.2)$$

در معادله بالا، u_0 مقدار u_h در P_0 و $\mathbf{x}_0$ مختصات نقطه P_0 را نشان می‌دهد. گرادیان ∇u در P_0 همچنان مجهول است که می‌توان از روش تفاضلات محدود تعمیم‌یافته برای محاسبه آن بر حسب مقدارهای u_h در نقاط همسایگی P_0 استفاده کرد. معمولاً ترجیح داده می‌شود که محمل را با رسم یک دایره اطراف نقطه P_0 تعریف کنیم به طوری نقاطی که در این دایره قرار می‌گیرند، نقاط همسایگی در نظر گرفته می‌شوند. به همین ترتیب می‌توانیم محمل دایره‌ای شکل را با مربع یا شکل‌های دیگر جایگزین کنیم. اما در این رساله، معمولاً محمل P_0 شامل همه نقاط همسایگی در زیردامنه‌های افراز می‌باشد که با زیرفضای شامل نقطه مرکزی، مرز مشترک دارند. این نقاط همسایگی $P_1, P_2, \dots, P_m$ نامیده می‌شوند (به شکل ۳.۲ توجه کنید).

در ادامه برای محاسبه گرادیان ∇u در نقطه P_0 ، با مینیم کردن وزنی زیر

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^m \left(\nabla u|_{P_0} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0)^T - (u_i - u_0) \right)^2 w_i, \quad (2.2)$$

به دست می‌آید به طوری که w_i ها نشان‌دهنده مقدار توابع وزن در نقاط P_i ها و x_i ها مختصات مرتبط با این نقاط هستند. همچنین u_i مقدار u_h در P_i ($i = 1, 2, \dots, m$) می‌باشد. برای سادگی فرض می‌کنیم که w_i ها ثابت باشند.

با توجه به تساوی‌های $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$ و $(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o) = (x_i - x_o, y_i - y_o)$ با مشتق گرفتن از $\mathbf{J}$ نسبت به ∇u و مساوی صفر قرار دادن معادلات حاصل داریم:

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x} (x_i - x_o) + \frac{\partial u}{\partial y} (x_i - x_o)(y_i - y_o) \right) = \sum_{i=1}^m (u_i - u_o) (x_i - x_o), \quad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x} (x_i - x_o)(y_i - y_o) + \frac{\partial u}{\partial y} (y_i - y_o)(y_i - y_o) \right) = \sum_{i=1}^m (u_i - u_o) (y_i - y_o). \quad (4.2)$$

بر طبق روابط بالا، اگر قرار دهیم:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 - x_o & y_1 - y_o \\ x_2 - x_o & y_2 - y_o \\ \dots & \dots \\ x_m - x_o & y_m - y_o \end{bmatrix},$$

آنگاه می‌توان نتیجه گرفت

$$A^T A \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = A^T \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} - u_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\nabla u = (A^T A)^{-1} A^T (\mathbf{u}_m - u_o \mathbf{I}_m) \quad (5.2)$$

به طوری که

$$\mathbf{u}_m = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_{m \times 1}.$$

در معادله (۵.۲) $\mathbf{u}_m - u_o \mathbf{I}_m$ می‌تواند به صورت زیر نیز نوشته شود:

$$\mathbf{u}_m - u_o \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix} - u_o \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - u_o \\ u_2 - u_o \\ \dots \\ u_m - u_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix},$$

در این صورت تساوی‌های زیر را داریم:

$$\mathbf{B} = (A^T A)^{-1} A^T \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{m \times (m+1)}, \quad \mathbf{u}_E = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

بنابراین معادله (۵.۲) در نقطه P_0 به صورت زیر به دست می‌آید:

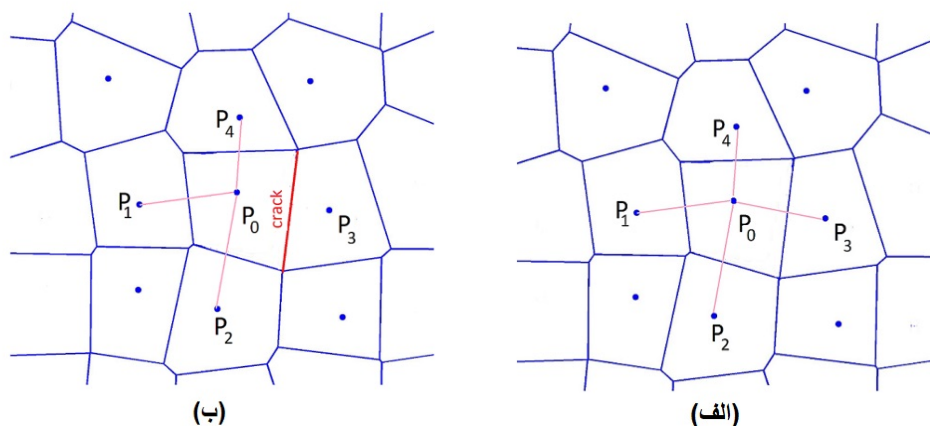
$$\nabla u = \mathbf{B} \mathbf{u}_E. \quad (۶.۲)$$

همچنین با جاگذاری (۶.۲) در (۱.۲) رابطه میان u_h و $\mathbf{u}_E$ به صورت زیر به دست خواهد آمد

$$u_h = \mathbf{N} \mathbf{u}_E, \quad \forall \mathbf{x} \in E_0, \quad (۷.۲)$$

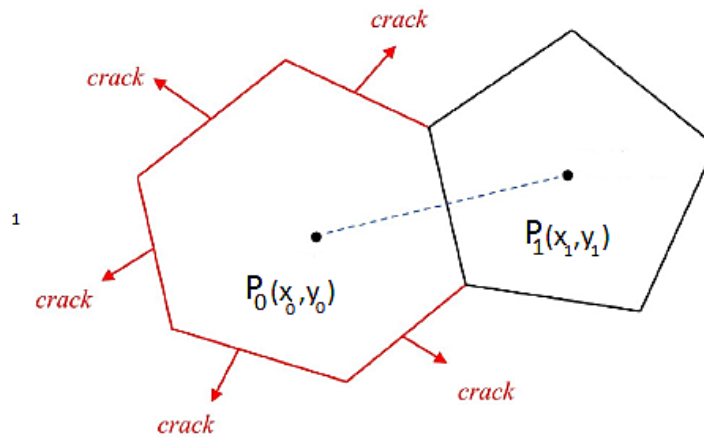
به طوری که

$$\mathbf{N} = [\mathbf{x} - \mathbf{x}_0] \mathbf{B} + [1, 0, \dots, 0]_{1 \times (m+1)}.$$



شکل ۴.۲: (الف) نقطه P_0 و همسایگی‌های آن بدون ترک. (ب) حذف کردن نقطه P_3 وقتی که یک ترک بین دو نقطه P_0 و P_3 وجود دارد.

در مسائلی که در دامنه مورد بررسی مربوط به آن‌ها ترک یا شکستگی وجود دارد، نقاط اطراف این ترک‌ها از همسایگی و محمل یکدیگر حذف می‌شوند. بر طبق شکل ۴.۲ (الف) نقطه P_0 دارای ۴ نقطه همسایگی است. اگر یک ترک بین این نقطه و یکی از نقاط همسایگی وجود داشته باشد، مطابق با شکل ۴.۲ (ب) آن نقطه از مجموعه



شکل ۵.۲: نقطه P_0 و نقاط همسایگی و ترک ها.

نقاط همسایگی حذف خواهد شد. در حالت خاص، اگر ترک های دامنه مسئله به طوری باشند که P_0 فقط دارای یک نقطه همسایگی باشد، (همانطور که در شکل ۵.۲ نشان داده شده است)، آنگاه $(A^T A)^{-1}$ در معادله (۵.۲) دارای کمبود رتبه خواهد شد و روش تفاضلات محدود تعمیم یافته را نمی توان به کار برد. در این حالت خاص، ∇u به طور مستقیم با استفاده از فرمول زیر به دست می آید:

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_1 - u_0}{L} \cdot \frac{x_1 - x_0}{L} \\ \frac{u_1 - u_0}{L} \cdot \frac{y_1 - y_0}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x_1 - x_0}{L^2} & \frac{x_1 - x_0}{L^2} \\ -\frac{y_1 - y_0}{L^2} & \frac{y_1 - y_0}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix}, \quad (۸.۲)$$

به طوری که L فاصله بین نقطه مرکزی از نقطه همسایگی است.

این فرمول به طور عمده در روش های بدون شبکه ذرات و روش نیمه ضمنی ذرات متحرک به کار گرفته شده است [۷۳].

برطبق محاسبات بالا، ماتریس N تابع شکل متناظر با u_h در E_0 است که به وسیله نقاط همسایگی $P_1, P_2, \dots, P_m$ به دست می آید. بنابراین تابع کوششی u_h برای هر زیر دامنه $E \in \Omega$ می تواند محاسبه شود.

با داشتن توابع کوششی و آزمون، در فصل بعدی معادله هذلولی گون دوبعدی تلگراف با استفاده از روش نقاط شکننده مطالعه شده و جواب های حاصل از به کارگیری این روش با جواب های دقیق مقایسه شده است.

فصل ۳

روش نقاط شکننده برای حل معادله تلگراف هذلولوی دو بعدی با استفاده از ماتریس های سختی نقطه ای

۱.۳ مقدمه

در این فصل معادله تلگراف به عنوان یک معادله دیفرانسیل جزئی بسیار مهم با روش نقاط شکننده مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. این معادله برای اولین بار توسط هویساید در سال ۱۸۷۶ به دست آمد [۵۴]. معادله تلگراف در بسیاری از زمینه های علوم و مهندسی کاربرد دارد؛ به عنوان مثال به انتقال سیگنال های دیجیتال و آنالوگ [۳۴]، انتشار موج [۷۱]، نظریه راه رفتن تصادفی [۱۱]، امواج میکروویو، و میدان های فرکانس رادیویی [۵۷] می توان اشاره کرد. بنابراین تحلیل معادله تلگراف با استفاده از روش های عددی دارای اهمیت است که مقالات زیر برای مطالعه بیشتر توصیه می شود [۱، ۲، ۱۸، ۴۵، ۴۹، ۵۶، ۶۰].

در این مطالعه، معادله تلگراف زیر را در نظر می گیریم [۵۲]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) + \gamma \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \beta^2 u(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

که در آن $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ، $t \in (0, T)$ و ∇ عملگر گرادیان می باشد. در معادله بالا α و β اعداد ثابت و مثبت هستند و حالت کلی شرایط مرزی و اولیه به صورت زیر است:

$$u(\mathbf{x}, 0) = g_1(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = g_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$u(\mathbf{x}, t) = h_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad t \in (0, T), \quad (3.3)$$

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = h_2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad t \in (0, T). \quad (4.3)$$

مرزهای Γ_D و Γ_N به ترتیب مرزهای دیریکله و نیومانی می باشند به طوری که روابط $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ و $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ برقرار است و همچنین n بردار واحد نرمال خارجی برای $\partial\Omega$ می باشد.

۲.۳ تقریب‌های تفاضلی زمانی

در این بخش، برای تقریب مشتقات زمانی در معادله، می‌توانیم تقریب گام‌های زمانی را اعمال کنیم. برای این منظور فرض کنید

$$t_n = n\delta t, \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

که T زمان نهایی و $\delta t = \frac{T}{N}$ گام زمانی است. در ادامه در معادله (۱.۳) از طرح‌های تفاضلات محدود زیر استفاده می‌کنیم. اگر $u^k(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, k\delta t) = u(\mathbf{x}, t_n)$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t_n) &= \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - 2u^n(\mathbf{x}) + u^{n-1}(\mathbf{x})}{\delta t^2} + O(\delta t^2), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t_n) &= \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u^{n-1}(\mathbf{x})}{2\delta t} + O(\delta t^2), \\ u(\mathbf{x}, t_n) &= \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) + u^n(\mathbf{x}) + u^{n-1}(\mathbf{x})}{3} + O(\delta t^2), \\ \nabla^2 u(\mathbf{x}, t_n) &= \frac{\nabla^2 u^{n+1}(\mathbf{x}) + \nabla^2 u^n(\mathbf{x}) + \nabla^2 u^{n-1}(\mathbf{x})}{3} + O(\delta t^2). \end{aligned}$$

با جایگذاری تقریب‌های فوق در معادله (۱.۳)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - 2u^n(\mathbf{x}) + u^{n-1}(\mathbf{x})}{\delta t^2} \\ &+ 2\alpha \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u^{n-1}(\mathbf{x})}{2\delta t} + \beta \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) + u^n(\mathbf{x}) + u^{n-1}(\mathbf{x})}{3} \\ &= \frac{\nabla^2 u^{n+1}(\mathbf{x}) + \nabla^2 u^n(\mathbf{x}) + \nabla^2 u^{n-1}(\mathbf{x})}{3} + f^n(\mathbf{x}) + R, \end{aligned}$$

که در آن $f^k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, k\delta t)$. با ساده‌سازی معادله بالا و صرف نظر کردن از خطای R ، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \alpha\delta t + \frac{\beta^2\delta t^2}{3}\right) U^{n+1}(\mathbf{x}) - \frac{\delta t^2}{3} \nabla^2 U^{n+1}(\mathbf{x}) = \left(2 - \frac{\beta^2\delta t^2}{3}\right) U^n(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{\delta t^2}{3} \nabla^2 U^n(\mathbf{x}) - \left(1 - \alpha\delta t + \frac{\beta^2\delta t^2}{3}\right) U^{n-1}(\mathbf{x}) + \frac{\delta t^2}{3} \nabla^2 U^{n-1}(\mathbf{x}) \\ &+ \delta t^2 f^n(\mathbf{x}), \quad n = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.3)$$

که $U^n(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}, t_n)$ جواب عددی و تقریبی معادله است. در زیربخش بعدی، قضایای مربوط به همگرایی و پایداری تقریب تفاضلاتی زمانی را بیان می‌کنیم.

۱.۲.۳ آنالیز همگرایی و پایداری

در این قسمت قبل از بیان قضایای پایداری و همگرایی، فضای تابعی $H^2(\Omega)$ را در نظر می‌گیریم به طوری که ضرب داخلی مرتبط با فضاها $L^2(\Omega)$ و $H^2(\Omega)$ به ترتیب به صورت زیر است:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (u, v)_1 = (u, v) + (\nabla u, \nabla v),$$

و برطبق این ضرب های داخلی، نرم های زیر تعریف می‌شوند:

$$\|u\|_{L^2} = (u, v)^{1/2}, \quad \|u\|_1 = (u, v)^{1/2} + (\nabla u, \nabla v)^{1/2}.$$

۱.۲.۳ قضیه. برای یک گام زمانی به اندازه کافی کوچک $0 < \delta t < T$ طرح تفاضل محدود زمانی برای معادله (۵.۳) به طور نامشروط پایدار است و برای ثابت مثبت c داریم:

$$\|U^{n+1}\|_1 \leq c(\|u^0\|_1 + \|u_t^0\|_1), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

به طوری که

$$u(\mathbf{x}, 0) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = u_t^0(\mathbf{x}).$$

□

برهان. به منبع [۳۳] مراجعه کنید.

۲.۲.۳ قضیه. اگر $u^n = u(\mathbf{x}, t_n)$ جواب دقیق معادله تلگراف (۱.۳) باشد، به طوری که $u_{ttt}^0 \in H^1(\Omega)$ و $U^n = U(\mathbf{x}, t_n)$ جواب تقریبی به دست آمده به وسیله طرح تفاضلی (۵.۳) باشد، آنگاه داریم:

$$\|u^n - U^n\|_1 \leq \delta t (c_n + c'_n \|u_{ttt}^0\|_1),$$

که در آن، c_n و c'_n ثابت های مثبت مستقل از گام زمانی δt می‌باشند.

□

برهان. به منبع [۳۳] مراجعه کنید.

۳.۳ اصلاح های شار عددی

ناپیوستگی تابع های آزمون و کوششی باعث ناپایداری و ناسازگاری در روش های نقاط شکننده می‌شود. برای مقابله با این موضوع، شارهای عددی که بیشتر در روش های گالرکین ناپیوسته استفاده شده اند، اعمال می‌شوند. در این بخش از اصلاحات شار عددی جریمه داخلی استفاده کرده‌ایم.

معادله تلگراف (۱.۳)-(۴.۳) را می توانیم به صورت ترکیبی زیر بازنویسی کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = \nabla u(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ -\nabla \cdot \sigma = -\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(\mathbf{x}, t) - \gamma \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) - \beta^\gamma u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = h_\gamma(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \sigma \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = h_\gamma(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_N. \\ u(\mathbf{x}, \circ) = g_\gamma(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, \circ) = g_\gamma(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (۶.۳)$$

با ضرب کردن معادله اول و دوم (۶.۳) به ترتیب در توابع آزمون τ و ν و انتگرال گیری روی زیردامنه E فرم های ضعیف محلی متناظر با آن ها را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \int_E \sigma_h \cdot \tau d\Omega &= \int_E \nabla u_h(\mathbf{x}, t) \cdot \tau d\Omega, \\ \int_E -\nabla \cdot \sigma \nu d\Omega &= \int_E -\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega - \gamma \alpha \int_E \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega \\ &\quad - \beta^\gamma \int_E u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \int_E f(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \end{aligned}$$

توجه کنید که $\tau, \nu \in H^1(\Omega)$ و با استفاده از فرمول گرین داریم:

$$\int_E \sigma_h \cdot \tau d\Omega = - \int_E u_h \nabla \cdot \tau d\Omega + \int_{\partial E} \hat{u}_h \mathbf{n} \cdot \tau d\Gamma, \quad (۷.۳)$$

$$\begin{aligned} \int_E \sigma_h \cdot \nabla \nu &= \int_{\partial E} \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} \nu d\Gamma - \int_E \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega - \gamma \alpha \int_E \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega \\ &\quad - \beta^\gamma \int_E u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \int_E f(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

در معادلات بالا مقادیر $\hat{\sigma}_h$ و $\hat{u}_h$ مقدار تقریبی σ_h و u_h را روی ∂E نشان می دهد. این مقادیر شارهای عددی نامیده می شود.

معادلات (۷.۳) و (۸.۳) برای هر زیردامنه برقرار می باشند. بنابراین با جمع بستن این معادلات روی همه ی زیردامنه ها داریم:

$$\int_\Omega \sigma_h \cdot \tau d\Omega = - \int_\Omega u_h \nabla \cdot \tau d\Omega + \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \hat{u}_h \mathbf{n} \cdot \tau d\Gamma, \quad (۹.۳)$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sigma_h \cdot \nabla \nu d\Omega &= \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} \nu d\Gamma - \int_\Omega \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega - \gamma \alpha \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega \\ &\quad - \beta^\gamma \int_\Omega u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \int_\Omega f(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

در ادامه برای ساده سازی معادلات (۹.۳) و (۱۰.۳) از عمگرهای میانگین و پرش استفاده می کنیم و برای این منظور که معادله را فقط بر حسب u_h یا σ_h به دست آوریم، از شارهای عددی مختلفی از جمله شارهای عددی محلی ناپیوسته گالرکین و شارهای عددی جریمه داخلی می توان استفاده کرد. به عنوان مثال در جدول ۱.۳ به شارهای عددی جریمه داخلی اشاره شده است که معادله حاصل را می توان فقط بر حسب u_h به دست آورد. با استفاده از این شارهای عددی، به یک روش نقاط شکننده دست پیدا می کنیم که روش نقاط شکننده اولیه^۱ نام گذاری شده است. همچنین با استفاده از شارهای عددی گالرکین ناپیوسته محلی^۲ که در جدول ۲.۳ ذکر شده است، به یک روش نقاط شکننده بر حسب u_h و σ_h می رسمیم که روش نقاط شکننده ترکیبی^۳ نام دارد و در [۲۳] به آن اشاره شده است. در این مطالعه با توجه به نزدیک بودن جواب های هر دو روش، فقط به روش نقاط شکننده اولیه پرداخته شده است و از شارهای عددی جریمه داخلی استفاده شده است.

جدول ۱.۳: شارهای عددی جریمه داخلی (IPNF)

شارهای عددی	روی مرز Γ_h	روی مرز Γ_D	روی مرز Γ_N
$\hat{u}_h$	$\{u_h\}$	$h_\gamma(\mathbf{x}, t)$	u_h
$\hat{\sigma}_h$	$\{\nabla u_h\} - \frac{\eta}{h_e} [u_h]$	$\nabla u_h - \frac{\eta}{h_e} (u_h - h_\gamma(\mathbf{x}, t)) \mathbf{n}$	$h_\gamma(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$

¹FPM-Primal method

²Local Discontinuous Galerkin (LDG) Numerical Fluxes

³FPM-mixed method

جدول ۲.۳: شارهای عددی گالرکین ناپیوسته محلی

شارهای عددی	روی مرز Γ_h	روی مرز Γ_D	روی مرز Γ_N
$\hat{u}_h$	$\{u_h\} - \beta \cdot [u_h]$	$h_\vee(\mathbf{x}, t)$	u_h
$\hat{\sigma}_h$	$\{\nabla \sigma_h\} + \beta \cdot [\sigma_h] - \frac{\eta}{h_e} [u_h]$	$\sigma_h - \frac{\eta}{h_e} (u_h - h_\vee(\mathbf{x}, t)) \mathbf{n}$	$h_\vee(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$

بنابراین با توجه به تعاریف و توضیحات فوق، به سادگی اثبات می‌شود که برای هر $q \in T(\Gamma)$ و $\varphi \in [T(\Gamma)]^\vee$ داریم:

$$\sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} q \varphi \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma} [q] \cdot \{\varphi\} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \{q\} [\varphi] d\Gamma. \quad (11.3)$$

در نتیجه با به کارگیری معادله (۱۱.۳) برای مجموع های $\sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \hat{u}_h \mathbf{n} \cdot \tau d\Gamma$ و $\sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} \nu d\Gamma$ معادلات (۹.۳) و (۱۰.۳) می‌توانند به سادگی به صورت زیر بازنویسی شوند:

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau d\Omega = - \int_{\Omega} u_h \nabla \cdot \tau d\Omega + \int_{\Gamma} [\hat{u}] \cdot \{\tau\} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \{\hat{u}\} [\tau] d\Gamma, \quad (12.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla \nu d\Omega &= \int_{\Gamma} \{\hat{\sigma}\} \cdot [\nu] d\Gamma - \int_{\Gamma_h} [\hat{\sigma}] \{\nu\} d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\partial^\vee u}{\partial t^\vee}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega \\ &- \vee \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega - \beta^\vee \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \end{aligned} \quad (13.3)$$

برطبق معادلات بالا، تساوی زیر برقرار است:

$$- \int_{\Omega} \nabla \cdot \tau u_h d\Omega = \int_{\Omega} \tau \cdot \nabla u_h d\Omega - \int_{\Gamma} [u_h] \cdot \{\tau\} d\Gamma - \int_{\Gamma_h} \{u_h\} [\tau] d\Gamma. \quad (14.3)$$

با جایگذاری معادله (۱۴.۳) در معادله (۱۲.۳) و همچنین برابر قرار دادن $\nabla \nu = \tau$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla \nu d\Omega &= \int_{\Omega} \nabla \nu \cdot \nabla u_h d\Omega + \int_{\Gamma} [\hat{u} - u_h] \cdot \{\nabla \nu\} d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_h} \{\hat{u} - u_h\} [\nabla \nu] d\Gamma. \end{aligned} \quad (۱۵.۳)$$

در نهایت با جایگذاری (۱۵.۳) در معادله (۱۳.۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla \nu \cdot \nabla u_h d\Omega + \int_{\Gamma} ([\hat{u} - u_h] \cdot \{\nabla \nu\} - \{\hat{\sigma}\} \cdot [\nu]) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_h} (\{\hat{u} - u_h\} [\nabla \nu] - [\hat{\sigma}] \{\nu\}) d\Gamma = - \int_{\Omega} \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial t^{\gamma}}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega \quad (۱۶.۳) \\ &- \gamma \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega - \beta^{\gamma} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۱.۳.۱ و شارهای عددی جریمه داخلی در جدول ۱.۳ با جایگذاری $\hat{u}_h$ و $\hat{\sigma}_h$ در معادله (۱۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned} &\sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot \nabla \nu d\Omega - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e (\{\nabla u_h\} [\nu] + \{\nabla \nu\} [u_h]) d\Gamma \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\eta}{h_e} \int_e [\nu] [u_h] d\Gamma = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega \\ &+ \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \nu - \nabla \nu \cdot \mathbf{n} \right) h_{\gamma}(\mathbf{x}, t) d\Gamma + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \nu h_{\gamma}(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\ &- \int_{\Omega} \frac{\partial^{\gamma} u}{\partial t^{\gamma}}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega - \gamma \alpha \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega - \beta^{\gamma} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \end{aligned} \quad (۱۷.۳)$$

معادله بالا فرمول روش نقاط شکننده اولیه می‌باشد. در بخش بعدی، ماتریس‌های سختی نقطه ای که با استفاده از معادله (۱۷.۳) به دست می‌آید را بیان می‌کنیم.

۴.۳ پیاده‌سازی عددی روش نقاط شکننده اولیه

در این بخش، پیاده‌سازی عددی روش نقاط شکننده اولیه بررسی خواهد شد. فرم ماتریسی این روش به صورت زیر می‌تواند باشد:

$$(\mathbf{K} + \beta^{\gamma} \mathbf{C}) \mathbf{u} + \mathbf{C} \ddot{\mathbf{u}} + \gamma \alpha \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (۱۸.۳)$$

با قرار دادن مقدار $\mathbf{B}$ به جای $\nabla \nu$ و ∇u و همچنین مقدار $\mathbf{N}$ به جای u_h و ν در معادله (۱۷.۳)، ماتریس‌های

سختی نقطه ای به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \int_E \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad E \in \Omega, \\ \mathbf{K}_E &= \int_E \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega, \quad E \in \Omega, \end{aligned} \quad (۱۹.۳)$$

و ماتریس های سختی مرزی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_h &= \frac{-1}{2} \int_e (\mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 d\Gamma \\ &+ \frac{-1}{2} \int_e (\mathbf{B}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 d\Gamma \\ &+ \frac{-1}{2} \int_e (\mathbf{B}_3^T \mathbf{n}_3^T \mathbf{N}_3 + \mathbf{N}_3^T \mathbf{n}_3 \mathbf{B}_3) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3 d\Gamma \\ &+ \frac{-1}{2} \int_e (\mathbf{B}_4^T \mathbf{n}_4^T \mathbf{N}_4 + \mathbf{N}_4^T \mathbf{n}_4 \mathbf{B}_4) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_4^T \mathbf{N}_4 d\Gamma, \quad e \in \partial E_1 \cap \partial E_2, \\ \mathbf{K}_D &= - \int_e (\mathbf{B}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{B}) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (۲۰.۳)$$

هم چنین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} F_E &= \int_E \mathbf{N}^T f(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad E \in \Omega, \\ F_N &= \int_e \mathbf{N}^T h_2(\mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad e \in \Gamma_N, \\ F_D &= \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \mathbf{N}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{n} \right) h_1(\mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D. \end{aligned} \quad (۲۱.۳)$$

با استفاده از تقریبات تفاضلی زمانی که بیان شد، داریم:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} + \beta^2 \mathbf{C}) \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{3} \right) + \mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{\delta t^2} \right) \\ + \alpha \mathbf{C} \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}}{\delta t} \right) = \mathbf{F}^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (۲۲.۳)$$

در دستگاه معادلات بالا، عبارت سمت راست به معنای محاسبه F_E ، F_N و F_D در گام زمانی n می‌باشد. در بخش بعدی، دقت و سازگاری روش نقاط شکننده با چند مثال نشان داده شده است.

۵.۳ نتایج عددی

در این بخش چند مثال عددی برای بررسی دقت و کارایی روش حاضر مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت. مثال های این قسمت در نرم افزار متلب روی لپ تاپ Core i5، ۲/۶۷ گیگاهرتز سرعت پردازنده با ۴ گیگابایت حافظه اجرا شده اند. خطاهای نسبی ای که در این بخش استفاده شده اند، به صورت زیر تعریف می شوند:

$$r_o = \frac{\|u^h - u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}, \quad r_\nabla = \frac{\|\nabla u^h - \nabla u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^2}}.$$

۱.۵.۳ مثال. در این مثال، روش نقاط شکننده را برای حل معادله دو بعدی تلگراف (۱.۳) با

$$f(x, y, t) = (-\gamma \cos t - \gamma \alpha \sin(t) + \beta^2 \cos(t)) \sinh(x) \sinh(y), \quad \Omega = [0, 1] \times [0, 1],$$

شرایط اولیه

$$u(x, y, 0) = \sinh(x) \sinh(y), \quad u_t(x, y, 0) = 0,$$

و شرایط مرزی زیر

$$\begin{cases} \nabla u \cdot n(0, y, t) = -\cos(t) \sinh(y), & \nabla u \cdot n(1, y, t) = \cos(t) \cosh(1) \sinh(y), \\ \nabla u \cdot n(x, 0, t) = -\cos(t) \sinh(x), & \nabla u \cdot n(x, 1, t) = \cos(t) \cosh(1) \sinh(x). \end{cases}$$

بررسی می کنیم. جواب دقیق این معادله بر طبق [۶۴] به صورت زیر می باشد:

$$u(x, y, t) = \cos(t) \sinh(x) \sinh(y).$$

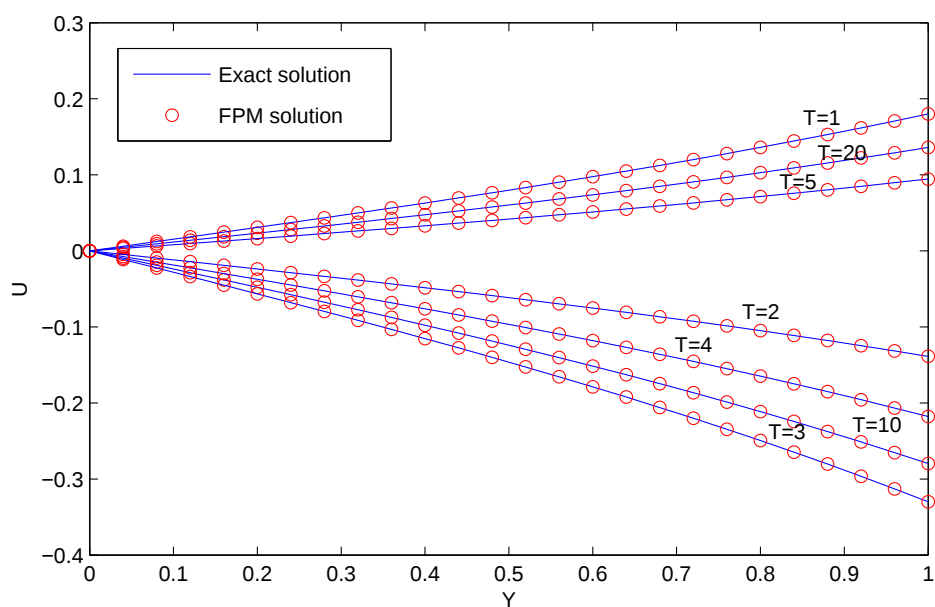
در جدول ۲.۳ خطاهای نسبی برای تعداد نقاط مختلف از دامنه که به طور یکنواخت توزیع شده اند به طوری که $\alpha = 10$ و $\beta = 5$ نشان داده شده است. بر طبق نتایج این جدول، می توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی پایدار بوده و برای تعداد نقاط مختلف از دامنه مساله دقت مناسبی دارد.

در ادامه، بر طبق شکل ۱.۳ می توان نتیجه گرفت که روش نقاط شکننده برای زمان های مختلف دارای دقت مناسب می باشد. همچنین شکل ۲.۳ رابطه بین تعداد نقاط و خطای نسبی را نشان می دهد که با افزایش تعداد نقاط، خطاهای نسبی کاهش می یابد.

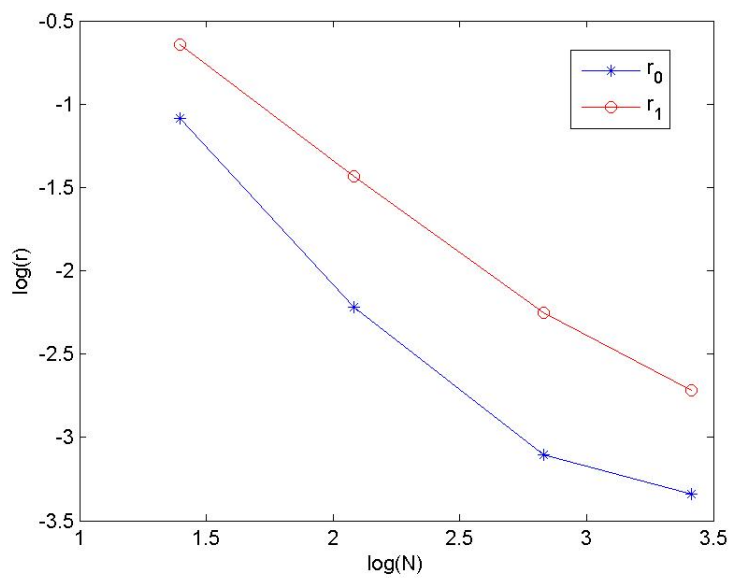
در ادامه شکل ۳.۳ برای $N = 676$ که به صورت پراکنده و نامنظم در دامنه تعیین شده اند و شکل ۴.۳ برای تعداد نقاط $N = 10201$ که با فاصله های یکسان از هم انتخاب شده اند، منحنی های دقیق و عددی رسم شده است که نشان دهنده مناسب بودن روش برای توزیع نامنظم نقاط می باشد و همچنین با انتخاب تعداد بسیار زیاد نقاط از دامنه نیز هم چنان روش نقاط شکننده دارای دقت مناسب است.

جدول ۳.۳: خطاهای نسبی روش پیشنهادی برای مثال ۱.۵.۳ در $T = 1$ و $\delta t = 0.1$.

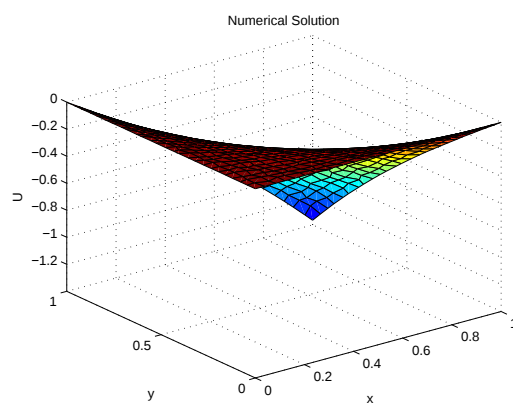
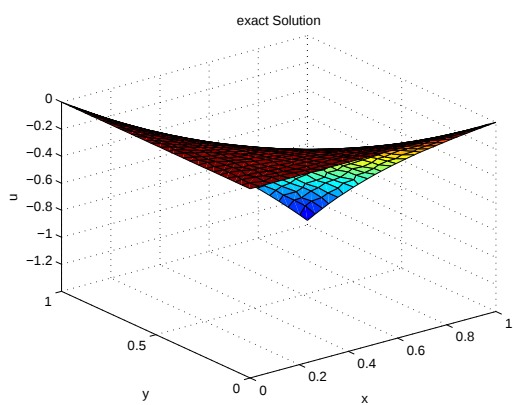
تعداد نقاط	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
$N = 25$	$h_e = 1$	$r_o = 1.726134 \times 10^{-2}$	0.83
	$\eta = 2.35$	$r_1 = 4.812464 \times 10^{-2}$	
$N = 121$	$h_e = 1$	$r_o = 2.176190 \times 10^{-3}$	1.98
	$\eta = 2.6$	$r_1 = 9.903492 \times 10^{-3}$	
$N = 676$	$h_e = 0.1$	$r_o = 2.465642 \times 10^{-4}$	11.93
	$\eta = 1.5$	$r_1 = 2.745213 \times 10^{-3}$	
$N = 2601$	$h_e = 1$	$r_o = 4.933884 \times 10^{-4}$	92.02
	$\eta = 1$	$r_1 = 1.936950 \times 10^{-3}$	



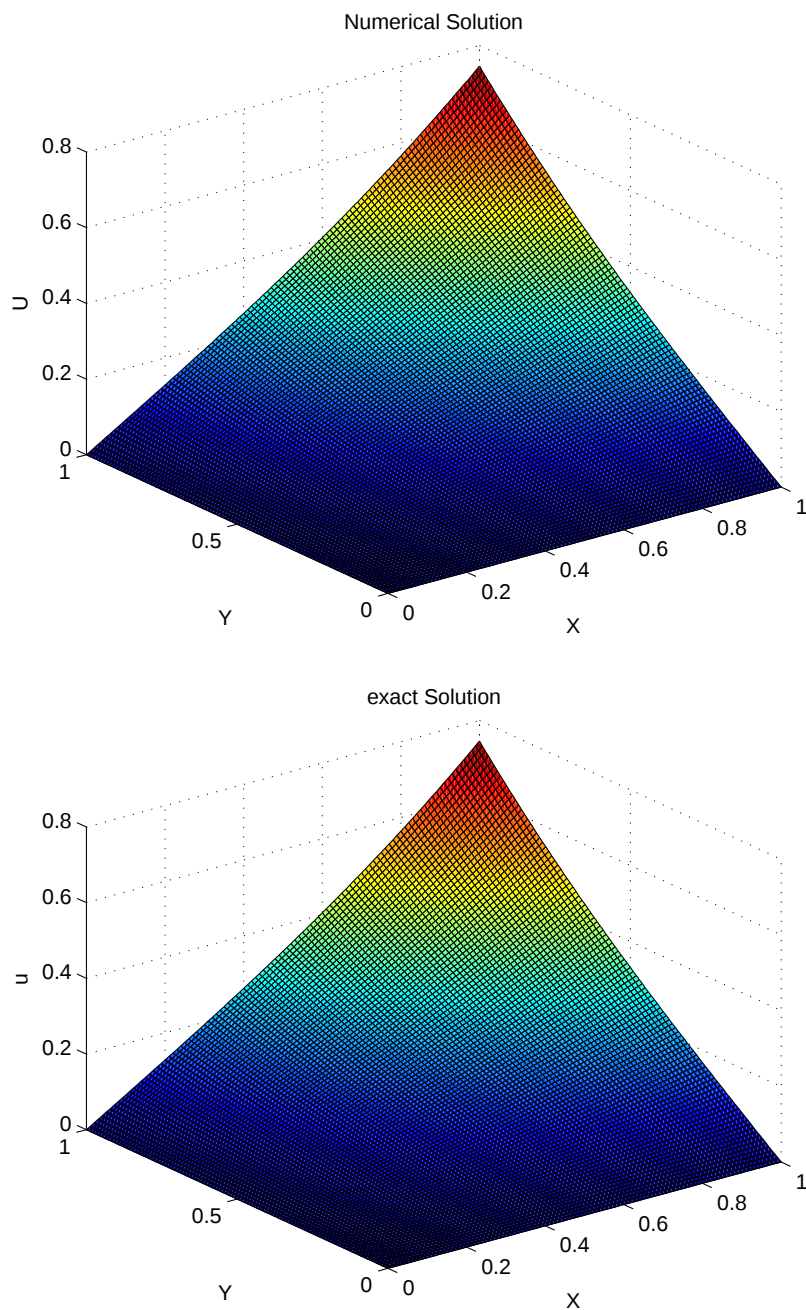
شکل ۱.۳: منحنی های دقیق و عددی مرتبط با مثال ۱.۵.۳ در $x = 0.28$ برای $h_e = 0.1$ و $\eta = 1.5$ با استفاده از $N = 676$ در زمان های نهایی مختلف.



شکل ۲.۳: خطاهای نسبی برای مثال ۱.۵.۳ در $T = 5$ و $\delta t = 10^{-6}$ با مقادیر $\eta = 1$ و $h_e = \eta$.



شکل ۳.۳: منحنی‌های دقیق و عددی برای مثال ۱.۵.۳ بر اساس $N = 676$ نقطه غیریکنواخت از دامنه برای $\eta = 1$ ، $T = 3$ و $\delta t = 10^{-6}$.



شکل ۴.۳: منحنی های دقیق و عددی برای مثال ۱.۵.۳ با $N = 10201$ نقطه با فاصله یکسان از دامنه برای $h_e = 1$ ، $T = 1$ و $\delta t = 0.1$ ، $\eta = 1$

۲.۵.۳ مثال. در این مثال، معادله دو بعدی تلگراف (۱.۳) با پارامترهای $\alpha = \beta = 1$ ، و

$$f(x, y, t) = -2 + x^2 + y^2 + t$$

و جواب دقیق [۱۹]

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + t$$

در نظر می‌گیریم. شرایط اولیه به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad u_t(x, y, 0) = 1.$$

برای این مثال، شرایط مرزی را به دو صورت زیر بررسی می‌کنیم:

$$(a) \begin{cases} u(0, y, t) = y^2 + t, & u(1, y, t) = 1 + y^2 + t, \\ u(x, 0, t) = x^2 + t, & u(x, 1, t) = 1 + x^2 + t, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} u(0, y, t) = y^2 + t, & \nabla u \cdot n(1, y, t) = 2, \\ u(x, 0, t) = x^2 + t, & \nabla u \cdot n(x, 1, t) = 2. \end{cases}$$

در جدول ۴.۳ خطاهای نسبی برای $T = 1, 3, 5, 7, 10$ ثانیه با ضرایب پنالته $\eta = 10^{-6}$ ، $h_e = 0.265$ و $N = 121$ بیان شده است. با مقایسه نتایج جدول ۴.۳ با نتایج حاصل از روش ارائه شده در [۱۹]، [۳۵] و [۲۰] میتوان نتیجه گرفت که روش نقاط شکننده دقت مشابهی را در زمان قابل توجهی کمتر به دست می‌آورد. همچنین همانطور که در شکل ۵.۳ دیده می‌شود، با انتخاب $N = 121$ نقطه که به طور یکنواخت در دامنه توزیع شده اند، منحنی‌های مربوط به جواب عددی حاصل و دقیق کاملاً منطبق بر هم می‌باشند.

۳.۵.۳ مثال. در این مثال، معادله تلگراف در مثال قبل را روی یک دامنه دایره‌ای به صورت زیر :

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\},$$

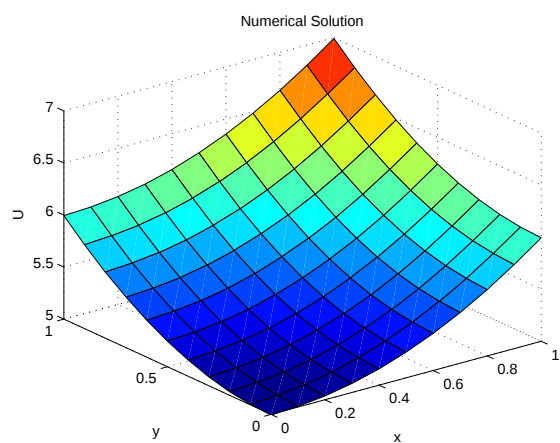
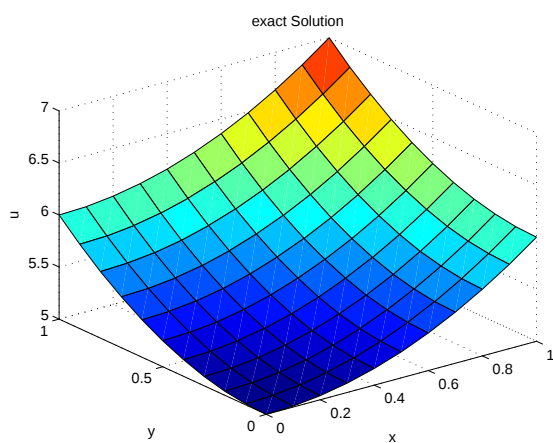
و شرایط مرزی

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + t, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

در نظر می‌گیریم. با قرار دادن $N = 529$ نقطه روی این دایره و مرز آن و همچنین پارامترهای پنالته $\eta = 10^{-6}$ و $h_e = 0.07$ ، می‌توانیم جواب‌های عددی را با دقت قابل قبولی بدست آوریم. برخی از خطاهای نسبی در جدول ۵.۳ نشان داده شده است. در ادامه، شکل ۶.۳ مطابقت جواب‌های عددی و دقیق را نشان می‌دهد و همچنین نمودار جواب‌های عددی و دقیق برای $T = 1$ ثانیه در شکل ۷.۳ رسم شده‌اند. این شکل‌ها کارایی روش را برای دامنه دایره‌ای شکل نشان می‌دهد.

جدول ۴.۳: خطاهای نسبی روش نقاط شکننده برای مثال ۲.۵.۳ در $T = 1, 3, 5, 7, 10$ و $\delta t = 0.1$ با پارامترهای پناستی $h_e = 0.265$ و $\eta = 10$

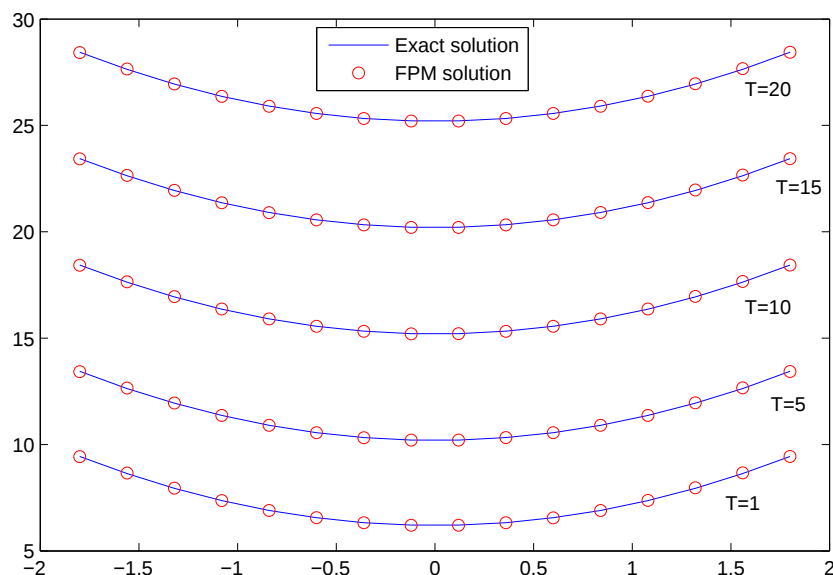
T	خطای نسبی (الف)	CPU time(s)	خطای نسبی (ب)	CPU time(s)
۱	$r_0 = 1.452730 \times 10^{-3}$ $r_1 = 4.490215 \times 10^{-2}$	۱.۸۱	$r_0 = 2.288786 \times 10^{-3}$ $r_1 = 4.750044 \times 10^{-2}$	۱.۸۴
۳	$r_0 = 9.24888 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.764024 \times 10^{-2}$	۴.۷۸	$r_0 = 8.582608 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.219099 \times 10^{-2}$	۴.۸۰
۵	$r_0 = 5.647982 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.708557 \times 10^{-2}$	۷.۶۸	$r_0 = 5.630367 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.234865 \times 10^{-2}$	۷.۶۵
۷	$r_0 = 4.215512 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.714478 \times 10^{-2}$	۱۰.۵۸	$r_0 = 4.156439 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.232312 \times 10^{-2}$	۱۰.۵۷
۱۰	$r_0 = 3.030535 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.714037 \times 10^{-2}$	۱۴.۷۶	$r_0 = 2.991813 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.232757 \times 10^{-2}$	۱۴.۹۰



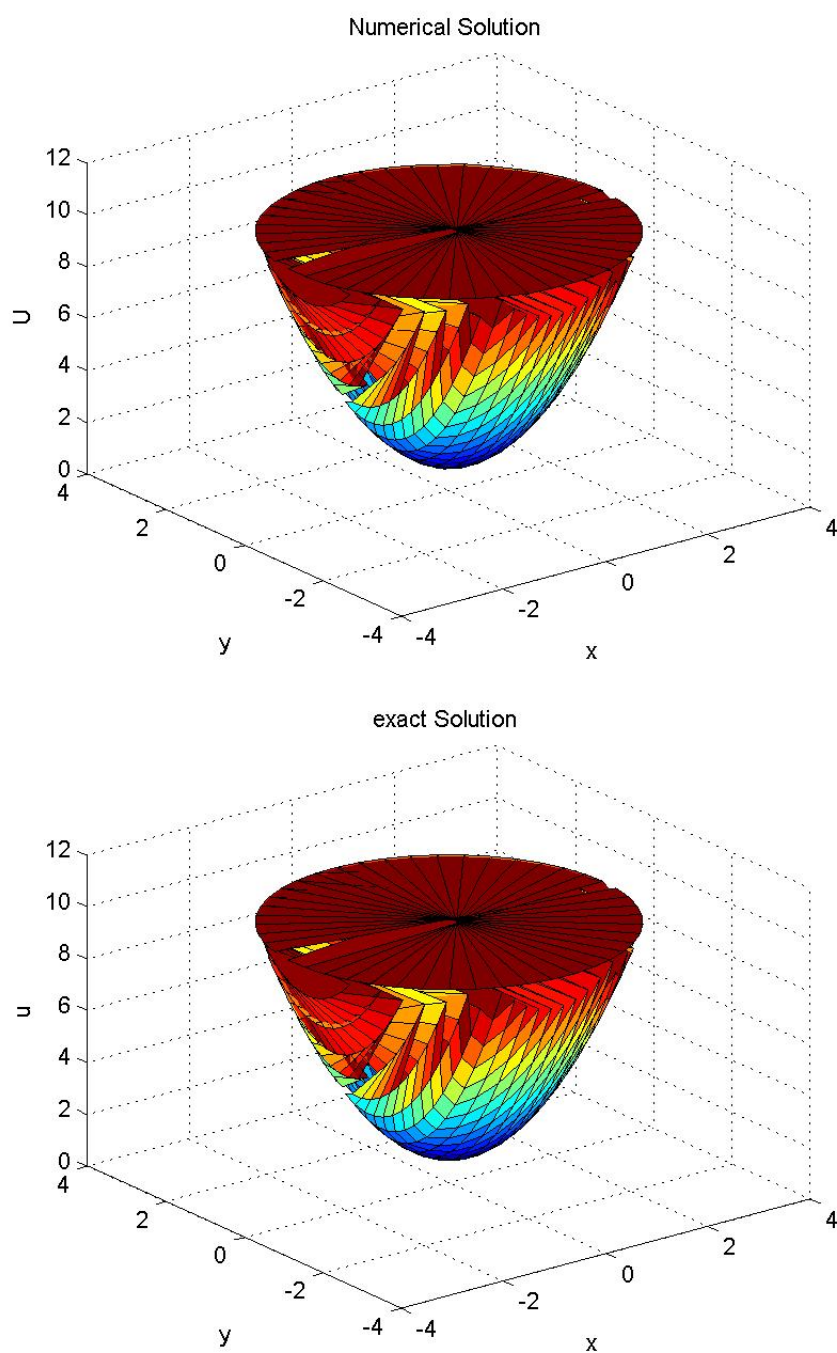
شکل ۵.۳: منحنی‌های مربوط به جواب‌های دقیق و عددی برای مثال ۲.۵.۳ بر اساس $N = 121$ نقطه یکنواخت برای $T = 5s$ و $\delta t = 0.1$

جدول ۵.۳: خطاهای نسبی روش نقاط شکننده برای مثال ۳.۵.۳ در $T = 1, 5, 10, 20$ ثانیه و $\delta t = 0.1$ با $h_e = 0.72$ ، $N = 529$ و $\eta = 10$.

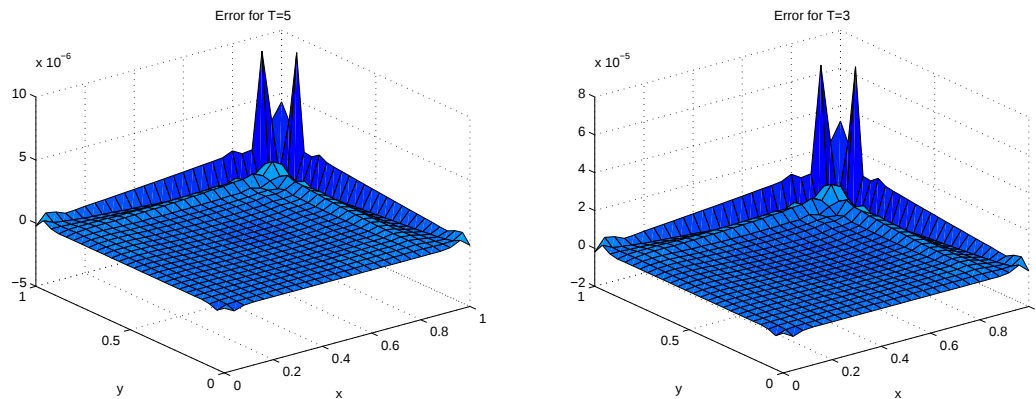
T	خطاهای نسبی	CPU time(s)
1	$r_o = 2.837736 \times 10^{-3}$ $r_1 = 4.189698 \times 10^{-2}$	11.69
5	$r_o = 1.802355 \times 10^{-3}$ $r_1 = 4.136589 \times 10^{-2}$	45.23
10	$r_o = 1.202193 \times 10^{-3}$ $r_1 = 4.137459 \times 10^{-2}$	92.05
15	$r_o = 8.999224 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.137454 \times 10^{-2}$	138.52
20	$r_o = 7.184170 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.137454 \times 10^{-2}$	172.49



شکل ۶.۳: جواب‌های عددی و دقیق برای مثال ۳.۵.۳ در $x = 2/28$ برای $h_e = 0.72$ و $\eta = 10$ با استفاده از $N = 529$ در زمان‌های نهایی مختلف.



شکل ۷.۳: منحنی‌های مربوط به جواب‌های عددی و دقیق برای مثال ۳.۵.۳ با $N = 529$ ، $\delta t = 0.01$ ، و $T = 1$.



شکل ۸.۳: منحنی های خطای مربوط به مثال ۴.۵.۳ بر اساس $N = ۶۷۶$ نقطه با توزیع یکنواخت در دامنه با $\delta t = ۰/۰۱$.

۴.۵.۳ مثال. اگر در معادله تلگراف در دامنه منظم $\Omega = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ ، $N = ۶۷۶$ نقطه با فاصله برابر با مقادیر $\alpha = ۱۰$ و $\beta = ۵$ در نظر بگیریم، در نتیجه

$$f(x, y, t) = (-2\alpha + \beta^2 - 1) \exp(-t) \sinh(x) \sinh(y)$$

و جواب دقیق [۳۵] به صورت زیر می باشد:

$$u(x, y, t) = \exp(-t) \sinh(x) \sinh(y).$$

شرایط مرزی و اولیه را نیز به صورت زیر داریم:

$$u(x, y, ۰) = \sinh(x) \sinh(y), \quad u_t(x, y, ۰) = -\sinh(x) \sinh(y),$$

$$\begin{cases} u(۰, y, t) = ۰, & u(۱, y, t) = \exp(-t) \sinh(۱) \sinh(y), \\ u(x, ۰, t) = ۰, & u(x, ۱, t) = \exp(-t) \sinh(۱) \sinh(x). \end{cases}$$

همانطور که دیده می شود، جدول ۶.۳ روش پیشنهادی برای این مثال دارای دقت خوب و با توجه به تعداد نقاط استفاده شده دارای زمان محاسباتی کوتاهی می باشد. در مقایسه با [۵۶] و [۳۵] روش نقاط شکننده دقت مشابه را در زمان کمتری به دست می آورد. هم چنین در مقایسه با [۵۲] روش تقریباً همان دقت را دارد. در شکل ۸.۳ خطاهای مطلق برای $T = ۳$ و $T = ۵$ نشان داده شده است.

۵.۵.۳ مثال. معادله تلگراف (۱.۳) در دامنه $\Omega = [۰, ۱] \times [۰, ۱]$ برای $\alpha = \beta = ۱$ و $N = ۱۲۱$ نقطه با شرایط مرزی ترکیبی به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot n(۰, y, t) &= \frac{-1}{1+y+t}, & u(۱, y, t) &= \log(2+y+t), & ۰ \leq y \leq ۱, \\ u(x, ۰, t) &= \log(1+x+t), & u(x, ۱, t) &= \log(2+x+t), & ۰ \leq x \leq ۱, \end{aligned}$$

جدول ۶.۳: خطاهای روش نقاط شکننده مربوط به مثال ۴.۵.۳ در $T = 1, 2, \dots, 5$ با $\delta t = 0.1$.

T	پارامترها	خطاهای نسبی	خطاهای مطلق با نرم ۲ و بی نهایت	CPU time(s)
۱	$\eta = 12.7$ $h_e = 0.1$	$r_o = 3.260248 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.183512 \times 10^{-3}$	$L_2 = 8.687116 \times 10^{-4}$ $L_\infty = 1.531660 \times 10^{-3}$	۱۱/۴۶
۲	$\eta = 10.8$ $h_e = 0.1$	$r_o = 1.861659 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.559595 \times 10^{-3}$	$L_2 = 2.251231 \times 10^{-4}$ $L_\infty = 6.296192 \times 10^{-4}$	۱۸/۵۶
۳	$\eta = 10.6$ $h_e = 0.1$	$r_o = 1.857039 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.651193 \times 10^{-3}$	$L_2 = 8.190442 \times 10^{-5}$ $L_\infty = 2.369633 \times 10^{-4}$	۲۵/۳۷
۴	$\eta = 10.5$ $h_e = 0.1$	$r_o = 1.888243 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.676835 \times 10^{-3}$	$L_2 = 3.029708 \times 10^{-5}$ $L_\infty = 8.786844 \times 10^{-5}$	۳۲/۱۶
۵	$\eta = 10.5$ $h_e = 0.1$	$r_o = 1.883742 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.678888 \times 10^{-3}$	$L_2 = 1.118685 \times 10^{-5}$ $L_\infty = 3.232480 \times 10^{-5}$	۳۸/۷۴

و

$$f(x, y, t) = \frac{1}{(1+t+x+y)^2} + 2\alpha \frac{1}{(1+t+x+y)} + \beta^2 \log(1+t+x+y),$$

بررسی می‌شود. هم‌چنین جواب دقیق به صورت $u(x, y, t) = \log(1+t+x+y)$ ، و شرایط اولیه به صورت زیر می‌باشد:

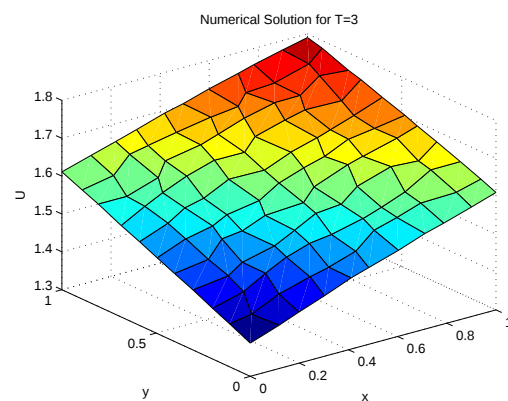
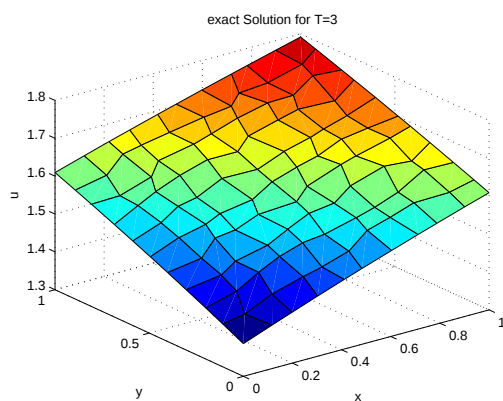
$$u(x, y, 0) = \log(1+x+y), \quad u_t(x, y, 0) = \frac{1}{1+x+y}.$$

با مقایسه نتایج جدول ۷.۳ با نتایج [۶۴]، روش نقاط شکننده در این رساله دقت کمتری دارد، اما از نظر زمان محاسبه، عملکرد بهتری دارد. هم‌چنین در مقایسه با [۳۵] و [۲۰] روش پیشنهادی دارای خطاهای نسبی مشابه و زمان محاسباتی کمتری است. همچنین این روش دارای دقت و زمان محاسباتی مشابه روش ارائه شده در [۵۲] می‌باشد. نمودارهای جواب‌های عددی و دقیق برای $N = 121$ نقطه با توزیع غیریکنواخت در $T = 3$ در شکل ۹.۳ نشان داده شده است. بنابراین از نتایج جدول و شکل‌های مربوط به این مثال می‌توان نتیجه گرفت که روش نقاط شکننده از نظر دقت و زمان محاسباتی پایدار و قابل قبول است.

بنابراین همان‌طور که در نتایج عددی بدست آمده از حل معادله تلگراف با استفاده از روش نقاط شکننده مشاهده می‌شود، این روش در زمان کوتاهی به دقت خوبی دست می‌یابد و هزینه محاسباتی زیادی ندارد. هم‌چنین برای توزیع نامنظم نقاط، تعداد نقاط خیلی زیاد و دامنه‌های مختلف نتایج خوبی به دست آمد. در فصل بعد، این روش را روی دامنه‌های دلخواه و معادله‌های مختلط به کار می‌بریم.

جدول ۷.۳: خطاهای نسبی برای مثال ۵.۵.۳ در $T = 1, \dots, 5, 10, 15$ با $\delta t = 0.1$.

T	پارامترهای محاسباتی	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۱	$\eta = 9.9$	$r_o = 7.581528 \times 10^{-3}$	۱.۵۶
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 6.914406 \times 10^{-2}$	
۲	$\eta = 11.1$	$r_o = 8.581450 \times 10^{-4}$	۲.۷۰
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 2.46065 \times 10^{-2}$	
۳	$\eta = 19.8$	$r_o = 9.256741 \times 10^{-4}$	۳.۷۰
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 2.796812 \times 10^{-2}$	
۴	$\eta = 10.5$	$r_o = 5.167512 \times 10^{-4}$	۴.۹۷
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 2.315286 \times 10^{-2}$	
۵	$\eta = 19$	$r_o = 2.967136 \times 10^{-4}$	۶.۰۳
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 1.887492 \times 10^{-2}$	
۱۰	$\eta = 19$	$r_o = 8.904458 \times 10^{-5}$	۱۱.۸۳
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 1.235270 \times 10^{-2}$	
۱۵	$\eta = 19$	$r_o = 5.744901 \times 10^{-5}$	۱۷.۳۶
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 8.816355 \times 10^{-3}$	



شکل ۹.۳: منحنی‌های دقیق و عددی برای مثال ۵.۵.۳ بر اساس $N = 121$ نقطه با توزیع یکنواخت از دامنه و $\delta t = 0.1$ و $T = 3$.

فصل ۴

استفاده از روش نقاط شکننده برای حل معادله مختلط و دو بعدی شرودینگر روی دامنه های دلخواه

۱.۴ مقدمه

در این بخش، روش نقاط شکننده برای یافتن جواب های عددی معادله مختلط و دو بعدی شرودینگر روی دامنه های دلخواه منظم و نامنظم به کار گرفته شده است. حل معادله شرودینگر در محاسبات دینامیک کوانتومی بسیار مهم است و به عنوان مدلی که چندین پدیده شیمیایی و فیزیکی مهم را توصیف می کند، [۶۶] مورد توجه بسیاری قرار گرفته است. این معادله از معادله موج برداری میدان الکتریکی که بر انتشار امواج الکترومغناطیسی در یک محیط ناهمگن حاکم است، گرفته شده است [۴۰]. این معادله در آکوستیک زیر آب، اپتیک و طراحی دستگاه های الکترونیک نوری نیز قابل استفاده است [۲۱].

در ادامه معادله دو بعدی وابسته به زمان شرودینگر به فرم زیر را بررسی می کنیم:

$$-i\frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) = \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) + w(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.4)$$

با شرایط اولیه

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

و شرایط مرزی

$$u(\mathbf{x}, t) = h_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = h_2(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (3.4)$$

که در معادله بالا، $w(\mathbf{x})$ یک تابع پتانسیل دلخواه است.

۲.۴ اصلاح های شار عددی

معادله شرویدینگر (۱.۴)-(۳.۴) با استفاده از فرم ترکیبی به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma(\mathbf{x}, t) = \nabla u(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ -\nabla \cdot \sigma(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + w(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) = h_1(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ \sigma \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = h_2(\mathbf{x}, t), & \mathbf{x} \in \Gamma_N. \\ u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{array} \right. \quad (۴.۴)$$

با ضرب کردن معادلات اول و دوم در توابع آزمون ν و τ به ترتیب و انتگرال گرفتن روی زیردامنه E داریم:

$$\int_E \sigma_h \cdot \tau d\Omega = \int_E \nabla u_h(\mathbf{x}, t) \cdot \tau d\Omega, \quad (۵.۴)$$

$$\int_E -\nabla \cdot \sigma \nu d\Omega = i \int_E \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \int_E w(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega \quad (۶.۴)$$

با استفاده از فرمول گرین و با جمع کردن این معادلات روی همه ی زیر دامنه ها داریم:

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau d\Omega = - \int_{\Omega} u_h \nabla \cdot \tau d\Omega + \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \hat{u}_h \mathbf{n} \cdot \tau d\Gamma, \quad (۷.۴)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla \nu d\Omega = \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} \nu d\Gamma + i \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \int_{\Omega} w(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \quad (۸.۴)$$

در معادله بالا $\hat{\sigma}_h$ و $\hat{u}_h$ نشان دهنده تقریب های σ_h و u_h روی ∂E می باشد که همان مقادیر شارهای عددی هستند. برای ساده سازی معادلات (۷.۴) و (۸.۴) از عملگرهای میانگین و پرش استفاده می شود که به وسیله آنها می توان مقادیر شارهای عددی را مدیریت کرد. با توجه به اینکه $\Gamma = \Gamma_h + \Gamma_D + \Gamma_N$ که مجموعه همه مرزهای داخلی می باشد، و با جایگذاری شارهای عددی جریمه داخلی از جدول ۱.۳ در بخش قبلی داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot \nabla \nu d\Omega - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e (\{\nabla u_h\}[\nu] + \{\nabla \nu\}[u_h]) d\Gamma \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\eta}{h_e} \int_e [\nu][u_h] d\Gamma = \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \nu - \nabla \nu \cdot \mathbf{n} \right) h_1(\mathbf{x}, t) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} w(\mathbf{x})u(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \nu h_2(\mathbf{x}, t) d\Gamma + i \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \nu d\Omega. \end{aligned}$$

معادله بالا، فرمول روش نقاط شکننده اولیه برای به دست آوردن جواب های عددی معادله شرویدینگر است.

۳.۴ پیاده سازی روش نقاط شکننده اولیه

فرم ماتریسی روش پیشنهادی برای معادله شرودینگر می تواند به صورت زیر باشد:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{W})\mathbf{u} - i\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}. \quad (9.4)$$

با استفاده از روش θ وزنی [۶۷]، معادله بالا می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$(\mathbf{K} - \mathbf{W})(\theta \mathbf{u}^{n+1} + (1 - \theta)\mathbf{u}^n) - i\mathbf{C}\left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t}\right) = \mathbf{F}^n. \quad (10.4)$$

در معادله (۱۰.۴)، $\mathbf{u}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, k\delta t)$ ، که δt گام زمانی و $0 \leq \theta \leq 1$ می باشد. با جایگذاری $\mathbf{B}$ به جای ∇u و همچنین $\mathbf{N}$ به جای u_h و ν در فرمول نقاط شکننده اولیه، ماتریس های سختی نقطه ای $\mathbf{K}$ ، $\mathbf{C}$ ، $\mathbf{W}$ و همچنین بردار سمت راست $\mathbf{F}$ به صورت زیر به دست می آیند:

$$\mathbf{W} = \int_E \mathbf{N}^T \mathbf{N} w(\mathbf{x}) d\Omega, \quad \mathbf{C} = \int_E \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{K}_E = \int_E \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega, \quad E \in \Omega, \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_h = & \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 d\Gamma \\ & + \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 d\Gamma \\ & + \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2 d\Gamma \\ & + \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_1 d\Gamma, \quad e \in \partial E_1 \cap \partial E_2, \\ \mathbf{K}_D = & - \int_e (\mathbf{B}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{B}) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_N = & \int_e \mathbf{N}^T h_2(\mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad e \in \Gamma_N, \\ \mathbf{F}_D = & \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \mathbf{N}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{n} \right) h_1(\mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D. \end{aligned} \quad (13.4)$$

با استفاده از این ماتریس های سختی نقطه ای، بردارهای سمت راست و دستگاه حاصل از معادله (۱۰.۴) به جواب های عددی حاصل از روش نقاط شکننده برای معادله شرودینگر دست پیدا می کنیم.

۴.۴ نتایج عددی

در این بخش، برخی مثال‌های عددی را مطالعه می‌کنیم و با استفاده از نتایج به دست آمده از به کار گرفتن روش نقاط شکننده روی این مثال‌ها دقت و پایداری روش ارزیابی می‌شود. برنامه‌های این قسمت در نرم افزار متلب روی لپ تاپ Core i5، ۲/۶۷ گیگاهرتز سرعت پردازنده با ۴ گیگابایت حافظه اجرا شده اند.

خطاهای نسبی‌ای که در این بخش استفاده شده و همچنین مرتبه‌های همگرایی نسبت به بعد فضایی و زمانی مسائل با فرمول‌های زیر به دست آمده اند:

$$r_o = \frac{\|u_h - u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}, \quad r_1 = \frac{\|\nabla u_h - \nabla u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^2}},$$

$$C - order(space) = \frac{\log_{10} \left(\frac{e_1}{e_2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)}, \quad C - order(time) = \frac{\log_{10} \left(\frac{e_1}{e_2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{\delta t_1}{\delta t_2} \right)},$$

به طوری که h_1 و δt_1 متناظر است با e_1 و h_2 و δt_2 مربوط به خطای e_2 می‌باشد. در مثال‌های عددی خطاهای e_1 و e_2 همان خطای r_o در نظر گرفته شده اند. توجه کنید که h_1 و h_2 فاصله نقاط را نشان می‌دهد.

۱.۴.۴ مثال. الف) ابتدا معادله (۱.۴) را با تابع پتانسیل و جواب دقیق

$$w(x, y) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{y^2}, \quad u(x, y, t) = e^{it} x^2 y^2,$$

در ناحیه $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ بررسی می‌کنیم. شرایط مرزی و اولیه با استفاده از جواب دقیق به دست می‌آید [۲۹، ۶۶]. در جدول ۱.۴ خطاهای نسبی برای تعداد نقاط مختلف از دامنه که به طور یکنواخت انتخاب شده اند، نشان داده شده است و تمام شرایط مرزی به صورت دیریکله در نظر گرفته شده است. این جدول دقت و پایداری روش نقاط شکننده را مشخص می‌کند و هرچه تعداد نقاط بیشتر می‌شود، دقت روش بهبود می‌یابد. این موضوع را شکل ۱.۴ نیز به خوبی نشان می‌دهد.

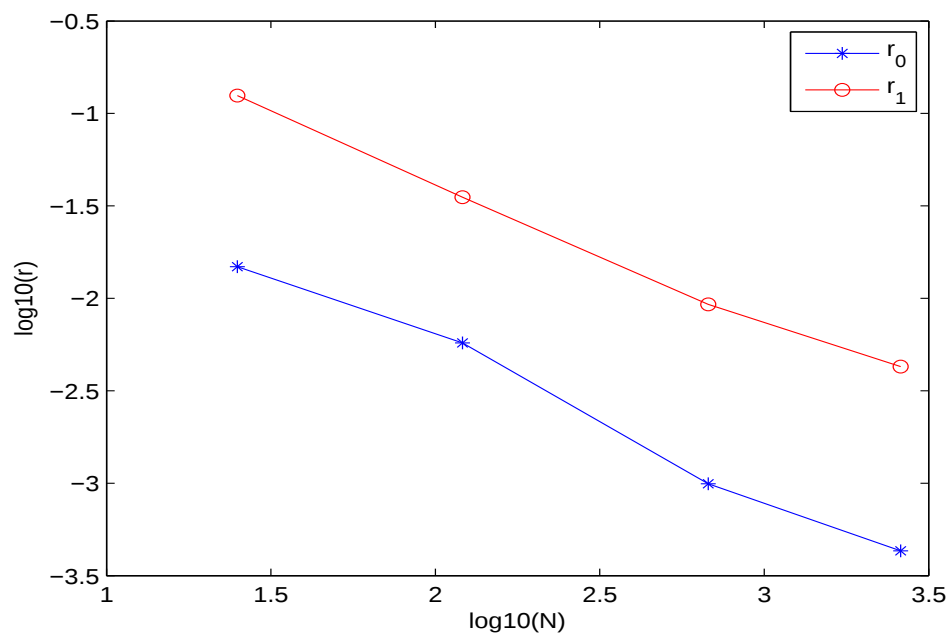
ب) در ادامه این مثال را با شرایط مرزی زیر بررسی می‌کنیم:

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = 0, \quad \nabla u \cdot \mathbf{n}(1, y, t) = 2e^{it} y^2, \quad u(x, 1, t) = e^{it} x^2,$$

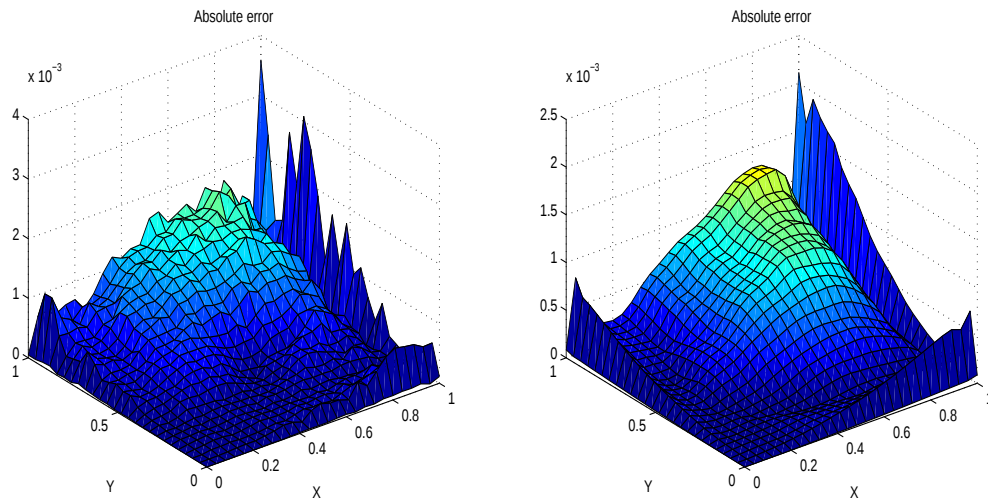
جدول ۲.۴ خطاهای نسبی برای تعداد نقاط مختلف که به طور یکنواخت و غیر یکنواخت روی دامنه مسئله توزیع شده اند را گزارش می‌کند. با مقایسه نتایج متوجه می‌شویم که در این مثال نحوه توزیع امتیازات تأثیر چندانی بر دقت روش

جدول ۱.۴: خطاهای نسبی روش برای مثال ۱.۴.۴ (الف) در $T = 1$ و $\delta t = 0.05$ با $\theta = 0.6$.

h	N	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)	C-order
0.25	25	$h_e = 0.1$ $\eta = 2.5$	$r_0 = 3.942832 \times 10^{-2}$ $r_1 = 2.523913 \times 10^{-1}$	0.31	-
0.1	121	$h_e = 0.1$ $\eta = 4$	$r_0 = 5.73321 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.52258 \times 10^{-2}$	0.63	2/1.44
0.04	676	$h_e = 0.1$ $\eta = 9$	$r_0 = 9.91802 \times 10^{-4}$ $r_1 = 9.26574 \times 10^{-3}$	9.34	1/9.148
0.02	2601	$h_e = 0.1$ $\eta = 9$	$r_0 = 4.30894 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.27138 \times 10^{-3}$	163	1/20.27



شکل ۱.۴: خطاهای نسبی روش برای مثال ۱.۴.۴ (الف) برای $T = 1$ و $\delta t = 0.05$.



شکل ۲.۴: مقایسه خطاهای مطلق مربوط به مثال ۱.۴.۴ (ب) برای $T = 1$, $\delta t = 0.01$, $\theta = 0.5$ و $N = 676$ برای نقاط یکنواخت و پراکنده.

ندارد. همچنین شکل ۲.۴ منحنی های مربوط به خطای مطلق را برای $N = 676$ نقطه که به صورت یکنواخت و غیریکنواخت توزیع شده اند، نشان می دهد. شکل های ۳.۴ و ۴.۴ دقت مناسب روش شکنده را برای زمان های مختلف در شرایطی که $x = 0.6$, $\theta = 0.51$, $\delta t = 0.01$, $N = 121$, $h_e = 0.1$ و $\eta = 4$ مشخص می کند. بنابراین، با توجه به این نتایج، روش دارای دقت مناسب برای شرایط مرزی مختلف است. علاوه بر این، با افزایش زمان نهایی، دقت حفظ شده و روش پایدار است. در مقایسه با [۷۴] و [۷۵] روش پیشنهادی تقریباً به همان دقت در زمان بسیار کمتری دست می یابد.

۲.۴.۴ مثال. در این مثال، معادله (۱.۴) با $N = 676$ نقطه که به طور یکنواخت در دامنه $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ توزیع شده اند، در نظر گرفته می شود به طوری که:

$$w(x, y) = -\frac{4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y + \beta^2 - 4\beta + 2}{\beta^2},$$

$$u(x, y, t) = \exp\left(-\frac{(x - 0.5)^2}{\beta} - \frac{(y - 0.5)^2}{\beta} - it\right).$$

با شرایط مرزی دیریکله برای $\delta t = 0.01$, $\theta = 0.52$ و $\beta = 2$ خطاهای نسبی مربوط به زمان های نهایی مختلف در جدول ۳.۴ نشان داده شده است که پایداری روش را نسبت به زمان مشخص می کند. در ادامه، شکل های ۵.۴ و ۶.۴ منحنی های بخش حقیقی و موهومی جواب های دقیق و عددی را برای $N = 2601$ نقطه با فاصله یکسان و $h_e = 0.1$ و $\eta = 11$ به تصویر می کشد. این شکل ها بیانگر این هستند که روش برای تعداد زیادی از نقاط نیز دقیق

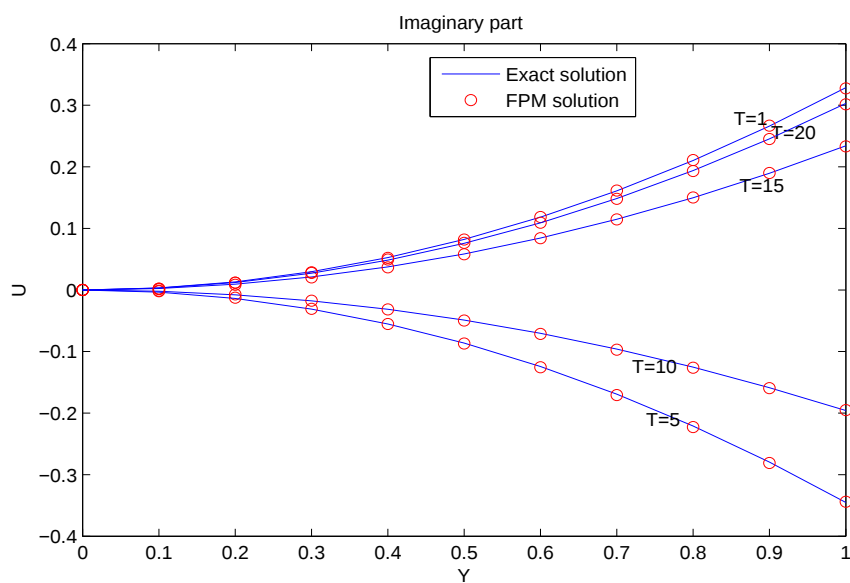
جدول ۲.۴: خطاهای نسبی روش نقاط شکننده برای مثال ۱.۴.۴ (ب) در $T = 1$ ، $\theta = 0.5$ و $\delta t = 0.1$ برای نقاط با توزیع یکنواخت و غیر یکنواخت.

نقاط یکنواخت

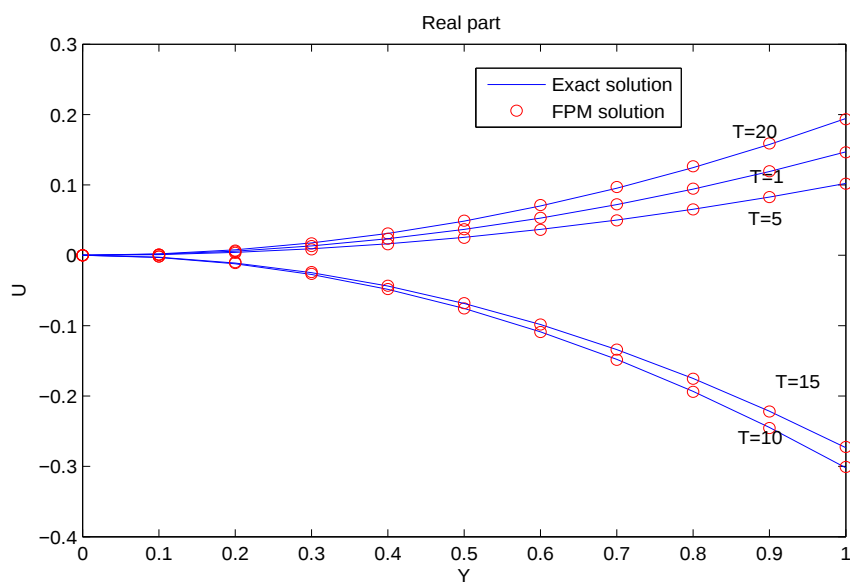
h	N	خطاهای نسبی	CPU time(s)
0.25	25	$r_0 = 6.476626 \times 10^{-2}$ $r_1 = 2.636926 \times 10^{-1}$	0.40
0.1	121	$r_0 = 5.763461 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.419285 \times 10^{-2}$	1.08
0.04	676	$r_0 = 2.552031 \times 10^{-3}$ $r_1 = 1.216389 \times 10^{-2}$	27.9

نقاط غیر یکنواخت

N	خطاهای نسبی	CPU time(s)
25	$r_0 = 4.273177 \times 10^{-2}$ $r_1 = 1.484748 \times 10^{-1}$	0.33
121	$r_0 = 9.238729 \times 10^{-3}$ $r_1 = 9.161839 \times 10^{-2}$	0.94
676	$r_0 = 2.423225 \times 10^{-3}$ $r_1 = 1.216389 \times 10^{-2}$	27.7



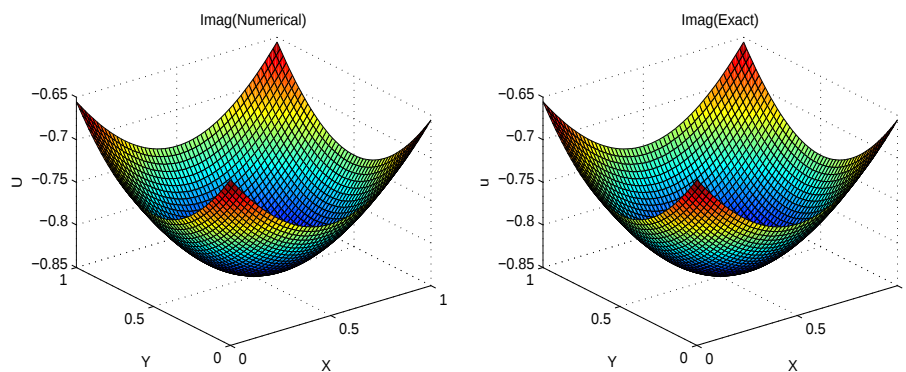
شکل ۳.۴: مقایسه قسمت موهومی جواب‌های دقیق و عددی مربوط به مثال ۱.۴.۴ (ب) برای $x = 0.6$ ، $\delta t = 0.1$ و $N = 121$.



شکل ۴.۴: مقایسه قسمت حقیقی جواب‌های دقیق و عددی مربوط به مثال ۱.۴.۴ (ب) برای $x = 0.6$ ، $\delta t = 0.1$ و $N = 121$.

جدول ۳.۴: خطاهای نسبی روش برای مثال ۲.۴.۴ با $h_e = 0.1$, $\theta = 0.52$, $\eta = 11$ و $\delta t = 0.1$.

T	r_1	r_o	CPU time(s)
۱	1.18535×10^{-2}	1.85272×10^{-4}	۲۸.۳
۵	2.00094×10^{-2}	3.84086×10^{-4}	۹۹.۵
۱۰	2.10124×10^{-2}	5.48035×10^{-4}	۲۰۱.۳
۱۵	2.07114×10^{-2}	5.00376×10^{-4}	۲۸۱.۵



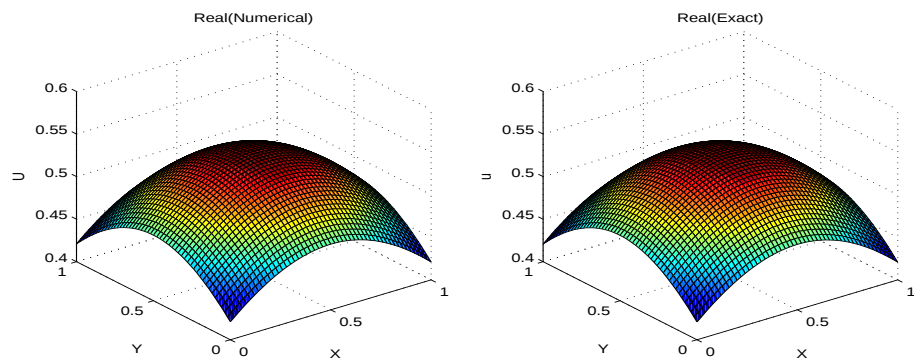
شکل ۵.۴: مقایسه بخش های موهومی نتایج عددی و دقیق برای مثال ۲.۴.۴ با $h_e = 0.1$, $\eta = 11$, $\theta = 0.52$, $T = 1$, $N = 2601$, $\delta t = 0.1$.

است. هم چنین منحنی های مربوط به خطا با $N = 676$ نقطه یکنواخت و غیریکنواخت در شکل ۷.۴ ارائه شده است. همانطور که این شکل نشان می دهد، در شرایط مشابه، خطای روش پیشنهادی برای نقاط با توزیع یکنواخت کمتر است.

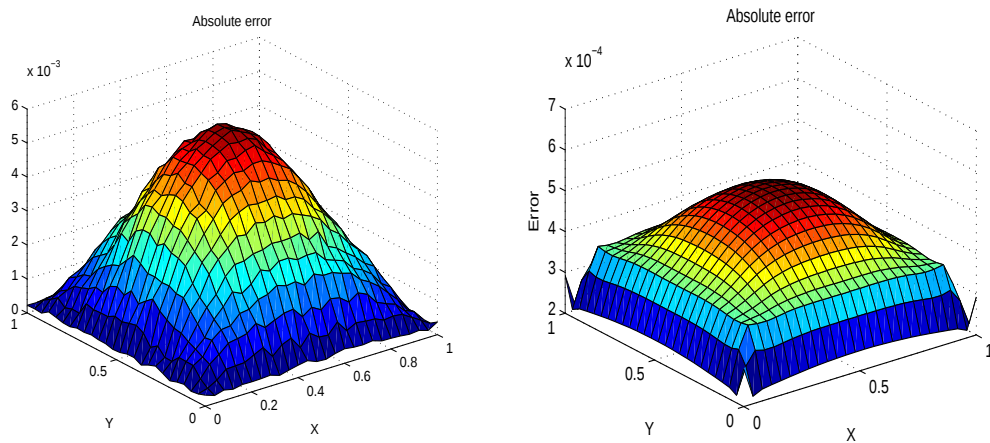
۳.۴.۴ مثال. الف) حال مثال قبلی را در یک دامنه L شکل که دارای مرزهای زیر است حل می کنیم:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \{0\} \times [0, 1], & \Omega_2 &= \{0.36\} \times [0.52, 1], \\ \Omega_3 &= [0, 1] \times \{0\}, & \Omega_4 &= [0.36, 1] \times \{0.52\}, \\ \Omega_5 &= \{1\} \times [0, 0.52], & \Omega_6 &= [1, 0.36] \times \{1\}.\end{aligned}$$

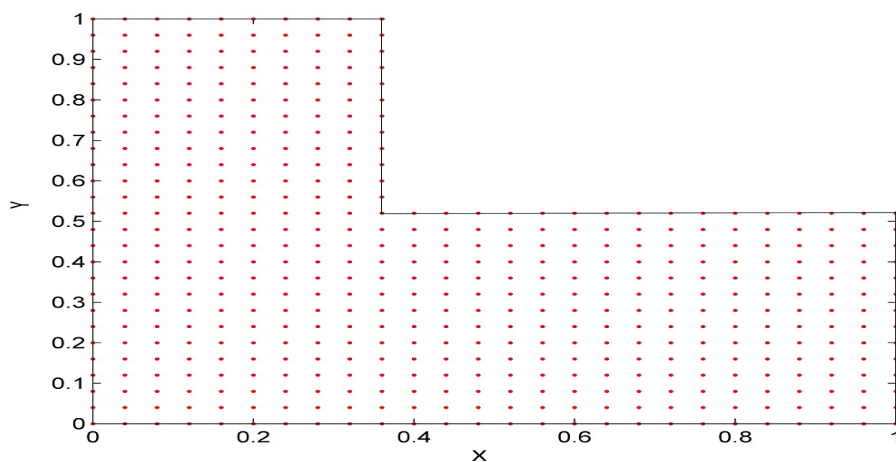
شکل ۸.۴: توزیع $N = 484$ نقطه را در این دامنه نشان می دهد. اگر شرایط مرزی را به طور کامل دیریکله در نظر بگیریم، جدول ۴.۴ را برای تعداد نقاط مختلف از دامنه داریم که این نقاط به طور یکنواخت انتخاب شده اند. همانطور که این جدول نشان می دهد، با توجه به تعداد نقاط، نتایج عددی از دقت خوبی برخوردار است که در زمان کوتاهی به دست می آید. شکل ۹.۴ نیز رابطه بین فاصله بین نقاط را با خطای نسبی نشان می دهد.



شکل ۴.۶: مقایسه بخش های حقیقی نتایج عددی و دقیق برای مثال ۲.۴.۴ با $\eta = 11$, $h_e = 0.1$, $\theta = 0.52$, $\delta t = 0.01$, $T = 1$, $N = 2601$.



شکل ۴.۷: منحنی های خطای مربوط به مثال ۲.۴.۴ بر اساس نقاط منظم و نامنظم با شرایط $\theta = 0.52$, $N = 676$ و $\delta t = 0.01$ و $T = 1$.



شکل ۴.۸: دامنه L شکل مربوط به مثال ۳.۴.۴ (الف) با $N = 484$ نقطه با توزیع یکنواخت.

جدول ۴.۴: خطاهای نسبی روش پیشنهادی برای مثال ۳.۴.۴ (الف) در $T = 1$ ، $\delta t = 0.1$ ، $\theta = 0.65$.

تعداد نقاط	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۴۹	$h_e = 1$	$r_o = 4.796603 \times 10^{-3}$	۰/۶۹
	$\eta = 75$	$r_1 = 1.608921 \times 10^{-1}$	
۱۲۱	$h_e = 0.501$	$r_o = 3.516616 \times 10^{-3}$	۱/۲۰
	$\eta = 190$	$r_1 = 1.044712 \times 10^{-1}$	
۴۸۴	$h_e = 0.1$	$r_o = 3.649402 \times 10^{-4}$	۱۲/۶۰
	$\eta = 75$	$r_1 = 2.631145 \times 10^{-2}$	
۱۸۴۹	$h_e = 0.01$	$r_o = 3.196693 \times 10^{-4}$	۲۸۰/۷۲
	$\eta = 27$	$r_1 = 1.131135 \times 10^{-2}$	

(ب) یک دامنه دایره ای به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

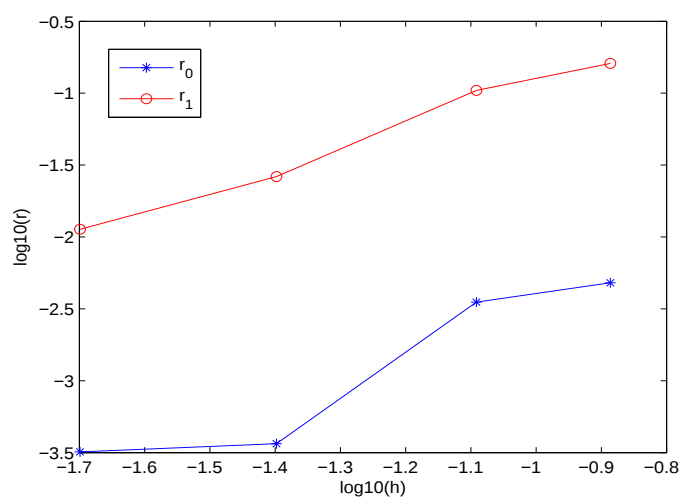
$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\},$$

و معادله را با روش نقاط شکننده حل می‌کنیم. جدول ۵.۴ مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی را نسبت به زمان نشان می‌دهد. با توجه به این جدول نیازی به کاهش بیش از حد گام زمانی نیست، زیرا کوچکتر کردن آن تاثیر زیادی در دقت ندارد و باید با تغییر پارامترهای دیگر یا تعداد نقاط، دقت را ارتقا دهیم. همچنین با توجه به دامنه دایره‌ای و تعداد نقاط استفاده شده، خطاهای نسبی به دست آمده قابل قبول بوده و در زمان کوتاهی به دست می‌آیند. ۴.۴.۴ مثال. در این مثال معادله وابسته به زمان شرودینگر (۱.۴)-(۳.۴) با شرط اولیه، تابع پتانسیل و جواب تحلیلی به صورت

$$u(x, y, 0) = \sin(x) \sin(y), \quad w(x, y) = 3,$$

$$u(x, y, t) = e^{it} \sin(x) \sin(y), \quad (x, y) \in \Omega = [0, \pi] \times [0, \pi], \quad t \in [0, T],$$

در نظر می‌گیریم. شرایط مرزی به صورت دیریکله فرض شده است که روی همه‌ی مرزها صفر می‌باشند. همانطور که دیده می‌شود، در جدول ۶.۴، برای تعداد نقاط مختلف، روش نقاط شکننده دارای دقت خوبی است. همچنین شکل‌های



شکل ۹.۴: نسبت خطا به فاصله بین نقاط یکنواخت از هم برای مثال ۳.۴.۴ (الف) با $\delta t = 10^{-1}$ ، $T = 1$ s.

جدول ۵.۴: مقادیر خطای نسبی نسبت به زمان برای مثال ۳.۴.۴ (ب) با $N = 529$ نقطه یکنواخت، $\theta = 0.65$ ، $T = 1$ ، $h_e = 10^{-1}$ و $\eta = 16$.

δt	r_0	r_1	CPU time(s)
10^{-1}	1.261254×10^{-2}	6.19296×10^{-2}	۶.۸۸
10^{-2}	7.115889×10^{-3}	4.330438×10^{-2}	۹.۰۴
10^{-3}	3.882812×10^{-3}	3.440278×10^{-2}	۱۳.۶۷
10^{-4}	3.042351×10^{-3}	3.105425×10^{-2}	۲۳.۲۶

جدول ۴.۴: خطاهای نسبی روش پیشنهادی برای مثال ۴.۴.۴ در $T = 1$ ، $\theta = 0.52$ و $\delta t = 0.1$.

CPU time(s)	خطاهای نسبی	پارامترها	تعداد نقاط	h
0.41	$r_0 = 1.797325 \times 10^{-2}$ $r_1 = 1.185351 \times 10^{-1}$	$h_e = 0.1$ $\eta = 1$	25	0.25
0.97	$r_0 = 1.89251 \times 10^{-3}$ $r_1 = 1.92942 \times 10^{-2}$	$h_e = 0.1$ $\eta = 2.7$	121	0.1
9.47	$r_0 = 6.02710 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.150509 \times 10^{-3}$	$h_e = 0.1$ $\eta = 3.8$	676	0.04
107	$r_0 = 4.561287 \times 10^{-4}$ $r_1 = 6.729947 \times 10^{-3}$	$h_e = 0.1$ $\eta = 2$	2601	0.02

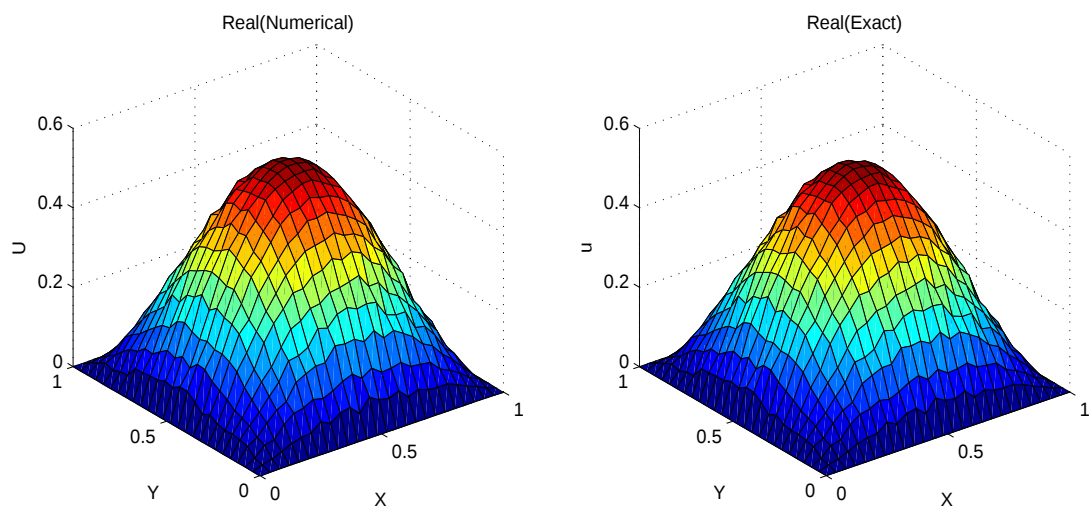
۱۰.۴ و ۱۱.۴ منحنی های مربوط به جواب های دقیق و عددی را با استفاده از $N = 676$ نقطه غیریکنواخت برای $T = 1, 3$ با در نظر گرفتن $h_e = 0, 1$ و $\eta = 3.8$ را نشان می دهد. این شکل ها دقت روش را برای حالتی که نقاط به طور غیریکنواخت در دامنه توزیع شده اند نشان می دهد. در مقایسه با [۳۶] روش پیشنهادی، دقت و زمان محاسباتی بهتری را گزارش می کند.

۵.۴.۴ مثال. برای آخرین مثال این بخش، معادله شرودینگر را با جواب دقیق و شرط اولیه زیر بررسی می کنیم:

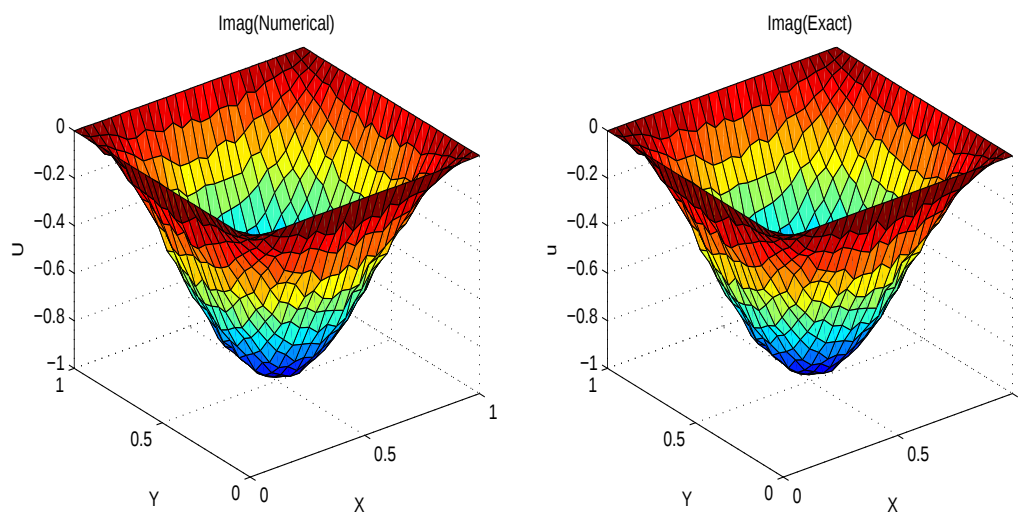
$$u(x, y, t) = e^{(-it)} (\sin(x) + \cos(y)), \quad u(x, y, 0) = (\sin(x) + \cos(y)).$$

این معادله با استفاده از روش نقاط شکننده روی حوزه آمیب مانند پیوسته مطابق شکل ۱۲.۴ و با استفاده از $N = 100$ نقطه با توزیع غیر یکنواخت از دامنه حل شده است. جدول ۷.۴ خطاهای نسبی و زمان محاسبات را در زمان های نهایی مختلف نشان می دهد. با توجه به یکنواخت نبودن نقاط و دامنه مسئله در این مثال، روش دارای دقت خوبی است. همچنین نمودارهای مربوط به جواب های عددی و دقیق برای $T = 2$ در شکل ۱۳.۴ ارائه شده اند که مناسب بودن روش برای دامنه های نامنظم را تایید می کند.

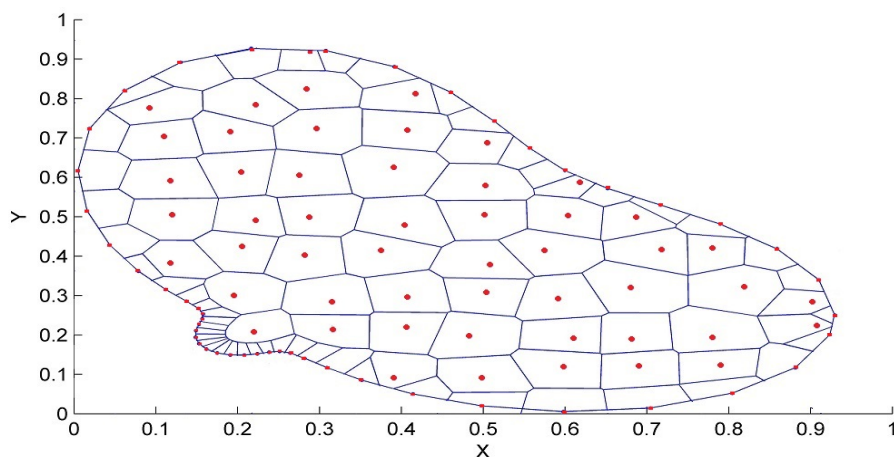
بنابراین در این فصل روش نقاط شکننده اولیه برای معادله دو بعدی و مختلط شرودینگر به کار گرفته شد و نتایج خوبی از نظر دقت و سرعت محاسبات عددی به دست آمد. در فصل بعدی، به مطالعه معادلات موج خطی و غیرخطی روی انواع دامنه ها به ویژه دامنه های دارای ترک و شکستگی می پردازد.



شکل ۱۰.۴: منحنی های مربوط به بخش حقیقی جواب های عددی و دقیق مربوط به مثال ۴.۴.۴ برای $dt = 0.1$, $h_e = 1$ و $\eta = 38, \theta = 0.54, T = 1, N = 676$.



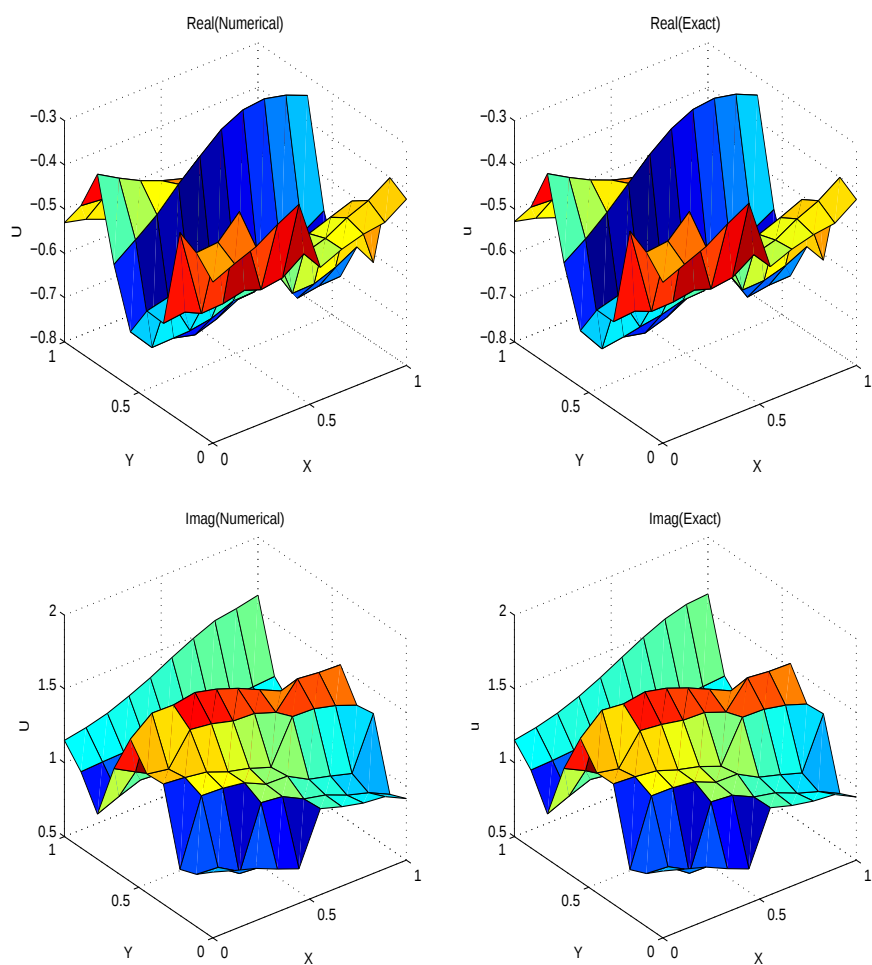
شکل ۱۱.۴: منحنی های مربوط به بخش موهومی جواب های عددی و دقیق مربوط به مثال ۴.۴.۴ برای $dt = 0.1$, $h_e = 1$ و $\eta = 38, \theta = 0.54, T = 5, N = 676$.



شکل ۴.۱۲: دامنه مربوط به مثال ۴.۴.۵ با $N = 100$ نقطه انتخابی با توزیع غیریکنواخت.

جدول ۴.۷: خطاهای نسبی روش مربوط به مثال ۴.۴.۵ برای $T = 1, 5, 10, 15, 20$ ، $\delta t = 0.0097$ و $\theta = 0.5$.

T	پارامترها	r_0	r_1	CPU time(s)
۱	$\eta = 215$ ، $h_e = 0.001$	5.697623×10^{-3}	9.610123×10^{-2}	۱/۰۶
۵	$\eta = 600$ ، $h_e = 0.001$	6.276758×10^{-3}	9.613064×10^{-2}	۳/۲۲
۱۰	$\eta = 500$ ، $h_e = 0.001$	6.286391×10^{-3}	9.620433×10^{-2}	۶/۰۵
۱۵	$\eta = 550$ ، $h_e = 0.001$	6.282664×10^{-3}	9.618269×10^{-2}	۸/۶۹
۲۰	$\eta = 600$ ، $h_e = 0.001$	6.279557×10^{-3}	9.616465×10^{-2}	۱۱/۳۳



شکل ۱۳.۴: منحنی‌های مربوط به جواب‌های عددی و دقیق برای مثال ۴.۴ با $\theta = 0.5$ ، $h_e = 0.01$ ، $T = 2s$ ، $\eta = 0.5$ و $\delta t = 0.0097$.

فصل ۵

مطالعه روش نقاط شکننده برای حل معادلات موج دو بعدی خطی و غیر خطی در دامنه های پیچیده و ترک دار

۱.۵ مقدمه

در بخش حاضر، ما روش نقاط شکننده بدون شبکه را برای معادلات موج دوبعدی خطی و غیرخطی در حوزه های نامنظم و پیچیده ارائه می کنیم. علاوه بر این، مسئله هایی که مربوط به دامنه هایی دارای ترک، شکستگی یا هر نوع ناپیوستگی دیگری هستند مورد بررسی قرار گرفته است.

معادله موج در زمینه های علوم و مهندسی استفاده می شود. جواب های عددی معادله موج برای شبیه سازی امواج صوتی، الکترومغناطیسی یا الاستیک وابسته به زمان مهم هستند. معادله موج اسکالر دو بعدی مدل مناسبی برای توصیف چنین پدیده های موجی است. [۲۶].

این بخش معادله موج را در دو بعد به صورت زیر بررسی می کند:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u(x, y, t) + \beta G(u) + f(x, y, t) \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad (1.5)$$

که شرایط اولیه

$$u(x, y, 0) = g_1(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g_2(x, y), \quad (2.5)$$

و شرایط مرزی نیز به صورت زیر می باشند:

$$u(x, y, t) = h_D(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_D, \quad t \in (0, T), \quad (3.5)$$

$$\nabla u \cdot n(x, y, t) = h_N(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma_N, \quad t \in (0, T). \quad (4.5)$$

در معادله بالا، $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ و $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ نشان دهنده بردار نرمال خارجی مرز دامنه $\partial\Omega$ می باشد. همچنین در معادله (۱.۵)، α ثابتی است که سرعت انتشار موج را نشان می دهد و β چگالی جریان جوزفسون را مشخص می کند که در مثال های عددی ثابت در نظر گرفته شده است.

در ادامه دو بخش اساسی مربوط به معادله را مطالعه خواهیم کرد: معادلات موج خطی و معادلات موج غیرخطی.

۲.۵ معادله موج خطی

برای سادگی در محاسبات، ابتدا معادله موج خطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم $\beta = 0$ باشد. در زیر بخش بعدی، گسسته سازی زمانی معادله موج خطی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۲.۵ تقریب‌های تفاضلات محدود

در این مطالعه از طرح گام زمانی برای گسسته سازی معادله موج در بعد زمانی استفاده شده است. برای این منظور، برطبق روش θ -وزنی، معادله (۱.۵) به صورت زیر گسسته سازی می‌شود:

$$\frac{u(x, y, t + \delta t) - 2u(x, y, t) + u(x, y, t - \delta t))}{\delta t^2} = \alpha^2 (\theta \Delta u(x, y, t + \delta t) + (1 - \theta) \Delta u(x, y, t)) + f(x, y, t + \delta t) + R, \quad (5.5)$$

که $u^n = u(x, y, t^n)$ تقریب $U^n = U(x, y, t^n)$ اگر δt نیز گام زمانی است. اگر $|R| \leq C\delta t$ ، $0 \leq \theta \leq 1$ و $n = 0, 1, \dots, N$ و $t^n = n \cdot \delta t$ ، باشد، به صورت بازنویسی شده، معادله (۵.۵) می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\frac{U(x, y, t + \delta t) - 2U(x, y, t) + U(x, y, t - \delta t))}{\delta t^2} = \alpha^2 (\theta \Delta U(x, y, t + \delta t) + (1 - \theta) \Delta U(x, y, t)) + f(x, y, t + \delta t). \quad (6.5)$$

همچنین به صورت ساده تر می‌توان نوشت:

$$U^{n+1} - (\delta t)^2 \alpha^2 \theta \Delta U^{n+1} = 2U^n + (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) \Delta U^n - U^{n-1} + (\delta t)^2 f^{n+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.5)$$

در همه مثال‌های عددی $\theta = 0.5$ استفاده شده است. بررسی قضایای پایداری و همگرایی مرتبط با این طرح زمانی نیمه گسسته در بخش بعدی آمده است.

۲.۲.۵ آنالیز پایداری و همگرایی

در این زیربخش، پایداری و همگرایی طرح تفاضل محدود (۷.۵) را ارائه می‌دهیم.

۱.۲.۵ قضیه. فرض کنید $U^j \in H_*^1(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, N-1$ و $\frac{\partial U^j}{\partial x}$ و $\frac{\partial U^j}{\partial y}$ تابع یکنواخت نسبت به زمان هستند، آنگاه طرح تفاضلی زمانی تعریف شده به وسیله (۷.۵) پایدار است و رابطه زیر برای مقدار ثابت و مثبت c برقرار است:

$$\|U^{k+1}\| \leq c(\|u^0\| + \delta t \|u_t^0\|). \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

برهان. با استفاده از استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت مسئله و تاثیری روی نتیجه اثبات، $f \equiv 0$ قرار می‌دهیم. ابتدا $n = 0$ در نظر می‌گیریم و از معادله (۷.۵) داریم:

$$U^1 - (\delta t)^2 \alpha^2 \theta \Delta U^1 = 2u^0 + (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) \Delta u^0 - U^{-1}. \quad (۸.۵)$$

اگر $U^{-1} = u^0 - \delta t u_t^0$ ، آنگاه داریم:

$$U^1 - (\delta t)^2 \alpha^2 \theta \Delta U^1 = u^0 + (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) \Delta u^0 + \delta t u_t^0. \quad (۹.۵)$$

با ضرب کردن معادله (۹.۵) در U^1 ، انتگرال‌گیری روی Ω و استفاده از فرمول گرین داریم:

$$\begin{aligned} (U^1, U^1) + (\delta t)^2 \alpha^2 \theta (\nabla U^1, \nabla U^1) \\ = (u^0, U^1) - (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) (\nabla u^0, \nabla U^1) + \delta t (u_t^0, U^1). \end{aligned} \quad (۱۰.۵)$$

در معادله بالا، از این مسئله که $U^1 \in H_*^1(\Omega)$ استفاده شده است. به این دلیل که $\frac{\partial U^j}{\partial x}$ و $\frac{\partial U^j}{\partial y}$ نسبت به زمان یکنواخت هستند پس: $(\nabla u^0, \nabla U^1) > 0$ و ضریب $(\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta)$ مثبت است، معادله (۱۰.۵) به رابطه زیر می‌رسد:

$$\|U^1\|^2 \leq (u^0, U^1) + \delta t (u_t^0, U^1).$$

با استفاده از نابرابری شوارتز، به دست می‌آوریم:

$$\|U^1\| \leq \|u^0\| + \delta t \|u_t^0\|. \quad (۱۱.۵)$$

حال فرض می‌کنیم برای $n = 1, 2, \dots, k$ و عدد ثابت و مثبت c رابطه زیر برقرار است:

$$\|U^k\| \leq c_0(\|u^0\| + \delta t \|u_t^0\|). \quad (۱۲.۵)$$

اکنون برای اثبات حکم این قضیه کافی است برای $n = k+1$ اثبات شود. در (۷.۵)، ما قرار می‌دهیم $n = k+1$ و با استفاده از فرمول گرین و ضرب کردن به وسیله U^{k+1} داریم:

$$\begin{aligned} (U^{k+1}, U^{k+1}) + (\delta t)^2 \alpha^2 \theta (\nabla U^{k+1}, \nabla U^{k+1}) \\ = 2(U^k, U^{k+1}) - (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) (\nabla U^k, \nabla U^{k+1}) - (U^{k-1}, U^{k+1}). \end{aligned} \quad (۱۳.۵)$$

با توجه به نابرابری شوارتز و مفروضات قضیه:

$$\|U^{k+1}\| \leq 2\|U^k\| + \|U^{k-1}\|. \quad (۱۴.۵)$$

بنابراین با توجه به فرض قضیه داریم:

$$\|U^{k+1}\| \leq c(\|u^\circ\| + \delta t \|u_t^\circ\|). \quad (۱۵.۵)$$

□

۲.۲.۵ قضیه. با فرض های قضیه قبل، اگر $u^n = u(x, y, t_n)$ جواب دقیق معادله ۱.۵ و $U^n = U(x, y, t_n)$ جواب تقریبی آن باشد که با استفاده از طرح تفاضلات محدود (۷.۵) به دست می آید، آنگاه تخمین خطای زیر را داریم:

$$\|u^n - U^n\| \leq \delta t^2 (c_1 \|u_{tt}^\circ\| + c_2 \delta t), \quad (۱۶.۵)$$

که ثابت های c_1 و c_2 مستقل از δt و $u_{tt}^\circ \in H^2(\Omega)$ می باشند.

برهان. اگر قرار دهیم $e^n = u^n - U^n$ ، با تفریق کردن (۶.۵) از (۵.۵) داریم:

$$\begin{aligned} e^{n+1} - (\delta t)^2 \alpha^2 \theta \Delta e^{n+1} &= 2e^n + (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) \Delta e^n \\ &- e^{n-1} + (\delta t)^2 R, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad |R| \leq c \delta t. \end{aligned} \quad (۱۷.۵)$$

اگر معادله بالا را در e^{n+1} ضرب کنیم، برای $n = 0, 1, \dots, N-1$ و با استفاده از فرمول گرین به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} (e^{n+1}, e^{n+1}) + (\delta t)^2 \alpha^2 \theta (\nabla e^{n+1}, \nabla e^{n+1}) &= 2(e^n, e^{n+1}) \\ &- (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) (\nabla e^n, \nabla e^{n+1}) - (e^{n-1}, e^{n+1}) + (\delta t)^2 (R, e^{n+1}). \end{aligned} \quad (۱۸.۵)$$

برای $n = 0$ در معادله بالا، توجه کنید که:

$$e^{-1} = u^{-1} - U^{-1} = u^{-1} - u^\circ + \delta t u_t^\circ = \frac{\delta t^2}{2} u_{tt}^\circ - \frac{\delta t^3}{3!} u_{ttt}^\circ + \dots$$

در نتیجه معادله (۱۸.۵) برای $n = 0$ به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} (e^1, e^1) + (\delta t)^2 \alpha^2 \theta (\nabla e^1, \nabla e^1) &= 2(e^0, e^1) \\ &- (\delta t)^2 \alpha^2 (1 - \theta) (\nabla e^0, \nabla e^1) - \frac{\delta t^2}{2} (u_{tt}^\circ, e^1) + (\delta t)^2 (R, e^1). \end{aligned} \quad (۱۹.۵)$$

حال با استفاده از مفروضات قضیه و نابرابری شوارتز داریم:

$$\|e^1\| \leq \frac{\delta t^2}{2} \|u_{tt}^\circ\| + c \delta t^3. \quad (۲۰.۵)$$

بنابراین معادله (۱۶.۵) برای $n = 0$ برقرار است. اگر فرض استقراء ریاضی به صورت زیر معتبر باشد:

$$\|e^j\| \leq \delta t^\gamma (c_1 \|u_{tt}^0\| + c_2 \delta t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (21.5)$$

برای اثبات کافی است در معادله (۱۸.۵) قرار دهیم $j = n + 1$ و به طور مشابه به نابرابری زیر می‌رسیم:

$$\|e^{n+1}\| \leq 2\|e^n\| + \|e^{n-1}\|. \quad (22.5)$$

در نتیجه با استفاده از فرضیه استقراء ریاضی ثابت می‌شود که:

$$\|e^{n+1}\| \leq \delta t^\gamma (c_1 \|u_{tt}^0\| + c_2 \delta t), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (23.5)$$

□

بر طبق این قضیه، اگر گام زمانی $\delta t \rightarrow 0$ آنگاه $\|e^{n+1}\| \rightarrow 0$. بنابراین طرح تفاضلی (۷.۵) همگراست.

۳.۲.۵ پیاده‌سازی اصلاحات شار عددی

همانطور که در بخش‌های قبل گفته شد، در روش نقاط شکننده، چند جمله‌ای‌های آزمون و کوششی ناپیوسته هستند. این ناپیوستگی‌ها ممکن است باعث ناسازگاری و ناپایداری در روش شود. اصلاحات شار عددی برای دستیابی به این امر اعمال می‌شود.

معادله موج و شرایط مرزی (۱۰.۵) - (۴.۵) به طور مشابه به صورت ترکیبی زیر نوشته می‌شود:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma = \nabla u(x, y, t), & \text{in } \Omega, \\ -\alpha^\gamma \nabla \cdot \sigma = -\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, y, t) + f(x, y, t), & \text{in } \Omega, \\ \sigma \cdot n(x, y, t) = h_N(x, y, t), & \text{in } \Gamma_N, \\ u(x, y, t) = h_D(x, y, t), & \text{in } \Gamma_D. \end{array} \right. \quad (24.5)$$

در روابط فوق، معادلات اول و دوم در توابع آزمون $\tau, \nu \in H^1(\Omega)$ و با انتگرال گرفتن از آن‌ها روی هر $E_0 \in \Omega$ فرم ضعیف این معادلات به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \int_{E_0} \sigma_h \cdot \tau d\Omega &= \int_{E_0} \nabla u_h(x, y, t) \cdot \tau d\Omega, \\ \int_{E_0} -\alpha^\gamma \nabla \cdot \sigma \nu d\Omega &= \int_{E_0} -\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, y, t) \nu d\Omega + \int_{E_0} f(x, y, t) \nu d\Omega. \end{aligned}$$

با جمع کردن این معادلات روی همه ی زیر دامنه ها و برطبق فرمول گرین،

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau d\Omega = - \int_{\Omega} u_h \nabla \cdot \tau d\Omega + \sum_{E_* \in \Omega} \int_{\partial E_*} \hat{u}_h n \cdot \tau d\Gamma, \quad (25.5)$$

$$\alpha^\gamma \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla \nu = \alpha^\gamma \sum_{E_* \in \Omega} \int_{\partial E_*} \hat{\sigma}_h \cdot n \nu d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, y, t) \nu d\Omega + \int_{\Omega} f(x, y, t) \nu d\Omega, \quad (26.5)$$

که مقدارهای $\hat{\sigma}_h$ و $\hat{u}_h$ شارهای عددی هستند و نشان دهنده تقریب های σ_h و u_h روی ∂E می باشند. با توجه به تعریف های عملگرهای میانگین و پرش، اگر قرار دهیم

$$\Gamma = \Gamma_h + \Gamma_D + \Gamma_N,$$

که Γ_h مجموعه همه ی مرزهای داخلی است، معادله زیر برای همه ی $q \in T(\Gamma)$ و $\varphi \in [T(\Gamma)]^\gamma$ برقرار است:

$$\sum_{E_* \in \Omega} \int_{\partial E_*} q \varphi \cdot n d\Gamma = \int_{\Gamma} [q] \cdot \{\varphi\} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \{q\} [\varphi] d\Gamma. \quad (27.5)$$

با استفاده از معادله بالا، معادلات (25.5) و (26.5) را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\int_{\Omega} \sigma_h \cdot \tau d\Omega = - \int_{\Omega} u_h \nabla \cdot \tau d\Omega + \int_{\Gamma} [\hat{u}] \cdot \{\tau\} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \{\hat{u}\} [\tau] d\Gamma, \quad (28.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha^\gamma \int_{\Omega} \sigma_h \cdot \nabla \nu d\Omega &= \alpha^\gamma \int_{\alpha} \Gamma \{\hat{\sigma}\} \cdot [\nu] d\Gamma - \alpha^\gamma \int_{\Gamma_h} [\hat{\sigma}] \{\nu\} d\Gamma \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, y, t) \nu d\Omega + \int_{\Omega} f(x, y, t) \nu d\Omega. \end{aligned} \quad (29.5)$$

در روش نقاط شکننده، شارهای عددی مختلف می تواند به کار گرفته شوند. در این بخش نیز از شارهای عددی جریمه داخلی انتخاب شده است که یک معادله فقط بر حسب u_h را نتیجه می دهد. (به جدول ۱۰۳ نگاه کنید.) با استفاده از مقادیر این شارهای عددی و قرار دادن آنها در معادلات (28.5) و (29.5)، داریم:

$$\begin{aligned} &\alpha^\gamma \sum_{E_* \in \Omega} \int_{E_*} \nabla u_h \cdot \nabla \nu d\Omega - \alpha^\gamma \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e (\{\nabla u_h\} [\nu] + \{\nabla \nu\} [u_h]) d\Gamma \\ &+ \alpha^\gamma \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\eta}{h_e} \int_e [\nu] [u_h] d\Gamma = \alpha^\gamma \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \nu - \nabla \nu \cdot \mathbf{n} \right) h_D(x, y, t) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} f(x, y, t) \nu d\Omega + \alpha^\gamma \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \nu h_N(x, y, t) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}(x, y, t) \nu d\Omega. \end{aligned} \quad (30.5)$$

با حل معادله (۳۰.۵) که حاصل از روش نقاط شکننده اولیه است و استفاده از ماتریس های سختی نقطه ای مربوط به آن، معادله موج حل می شود.

۳.۵ معادله موج غیرخطی

در این بخش، معادله موج غیرخطی را مطالعه می کنیم. اگر $\beta \neq 0$ در معادله (۱.۵) در نظر بگیریم، آنگاه فرمول روش نقاط شکننده اولیه (۳۰.۵) به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \alpha^* \sum_{E^* \in \Omega} \int_{E^*} \nabla u_h \cdot \nabla \nu d\Omega - \alpha^* \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e (\{\nabla u_h\} [\nu] + \{\nabla \nu\} [u_h]) d\Gamma \\ & + \alpha^* \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\eta}{h_e} \int_e [\nu] [u_h] d\Gamma = \alpha^* \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \nu - \nabla \nu \cdot \mathbf{n} \right) h_D(x, y, t) d\Gamma \\ & + \alpha^* \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \nu h_N(x, y, t) d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) \nu d\Omega \\ & + \int_{\Omega} f(x, y, t) \nu d\Omega + \beta \int_{\Omega} G(\tilde{u}) \nu d\Omega. \end{aligned} \quad (31.5)$$

در انتگرال $\int_{\Omega} G(\tilde{u}) \nu d\Omega$ در معادله بالا، $\tilde{u}$ برای به دست آوردن یک مجموعه خطی از معادلات باید تقریب شود. برای این منظور در بخش بعدی یک طرح ساده پیشگو-اصلاحگر ارائه شده است.

۴.۵ پیاده سازی عددی

در این بخش، ماتریس های سختی نقطه ای که با استفاده از روش نقاط شکننده اولیه برای حل معادله موج دوبعدی به دست می آید، بیان می شوند. معادله (۳۱.۵) می تواند به فرم ماتریسی زیر بیان شود:

$$\alpha^* \mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{H}_1 \ddot{\mathbf{u}} - \beta \mathbf{H}_2 G(\tilde{u}) = \mathbf{F}. \quad (32.5)$$

برطبق روابط (۶.۲) و (۷.۲)، ماتریس های سختی نقطه ای زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1 &= \int_E \mathbf{M}^T \mathbf{M} d\Omega, \quad \mathbf{H}_2 = \int_E \mathbf{M}^T d\Omega \quad E \in \Omega, \\ \mathbf{K}_E &= \int_E \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega, \quad E \in \Omega, \end{aligned} \quad (33.5)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_h &= \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_1 d\Gamma \\
&+ \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_2 d\Gamma \\
&+ \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_2 d\Gamma \\
&+ \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{M}_2^T \mathbf{M}_1 d\Gamma, \quad e \in \partial E_1 \cap \partial E_2, \\
\mathbf{K}_D &= - \int_e (\mathbf{B}^T \mathbf{n}^T \mathbf{M} + \mathbf{M}^T \mathbf{n} \mathbf{B}) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{M}^T \mathbf{M} d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D.
\end{aligned} \tag{۳۴.۵}$$

علاوه بر این، معادلات زیر را نیز داریم:

$$\begin{aligned}
F_N &= \int_e \mathbf{M}^T h_N(\mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad e \in \Gamma_N, \\
F_E &= \int_E \mathbf{M}^T f(\mathbf{x}, t) d\Omega, \quad E \in \Omega, \\
F_D &= \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \mathbf{M}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{n} \right) h_D(\mathbf{x}, t) d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D.
\end{aligned} \tag{۳۵.۵}$$

با استفاده از بخش ۱.۲.۵، می‌توانیم معادلات گسسته زیر به روش زیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
(\alpha^\gamma \theta (\delta t)^\gamma \mathbf{K} + \mathbf{H}_1) u^{n+1} &= (\gamma \mathbf{H}_1 - \alpha^\gamma (1 - \theta) (\delta t)^\gamma \mathbf{K}) u^n \\
&- \mathbf{H}_1 u^{n-1} + \beta \mathbf{H}_2 G(\tilde{u}) + F^{n+1},
\end{aligned} \tag{۳۶.۵}$$

که F^{n+1} به معنای محاسبه F_N ، F_E و F_D در گام زمانی $(n+1)$ ام می‌باشد. با حل کردن دستگاه معادلات (۳۶.۵) می‌توانیم به جواب‌های عددی روش نقاط شکننده دست یابیم. اما ابتدا به منظور محاسبه $\tilde{u}$ ، یک روش پیشگو-اصلاحگر معرفی می‌شود.

۱.۴.۵ روش پیشگو-اصلاحگر

این بخش از یک روش پیشگو-اصلاحگر برای به دست آوردن یک تقریب خوب برای بخش غیرخطی $G(\tilde{u})$ در معادله (۳۶.۵) استفاده می‌کند. در گام اول زمانی؛ یعنی زمانی که $u^\circ, n=0$ و $u^\circ, n=0$ به وسیله شرایط اولیه (۲.۵)، به صورت زیر تعیین شود:

$$u^\circ = g_1, \quad u^{-1} = u^\circ - \delta t g_2.$$

به منظور رسیدگی به غیر خطی بودن، برای هر مرحله زمانی؛ به عنوان مثال گام زمانی $n + 1$ ، قرار می‌دهیم:

$$\tilde{u} = u^n.$$

در این حالت، معادله (۳۶.۵) به عنوان یک دستگاه معادلات جبری خطی برای مجهول $u^{(n+1),\circ} = u^{(n+1)}$ حل می‌شود. با محاسبات مجدد،

$$\tilde{u} = \frac{1}{3} [u^{(n+1),\circ} + u^{(n)} + u^{(n-1)}].$$

این $\tilde{u}$ جدید به معادله (۳۶.۵) اجازه می‌دهد که برای به دست آمدن مجهول $u^{(n+1),1}$ حل شود. ما هنوز در گام زمانی $n + 1$ هستیم و با تکرار کردن محاسبات بین $\tilde{u}$ و تخمین زدن مقدارهای تقریبی مجهول $u^{(n+1),l}$ و قرار دادن:

$$\tilde{u} = \frac{1}{3} [u^{(n+1),l} + u^{(n)} + u^{(n-1)}].$$

تکرارها تا زمانی ادامه پیدا می‌کنند که کمیت مجهول همگرا به تعداد مشخصی از ارقام مشخص باشد. برای مثال، در اینجا شرایط توقف تکرارها در هر گام زمانی وجود دارد

$$\|u^{(n+1),l} - u^{(n+1),l-1}\| \leq \varepsilon,$$

که ε یک عدد ثابت و کوچک است. بعد از اینکه این شرط برآورده شد، داریم:

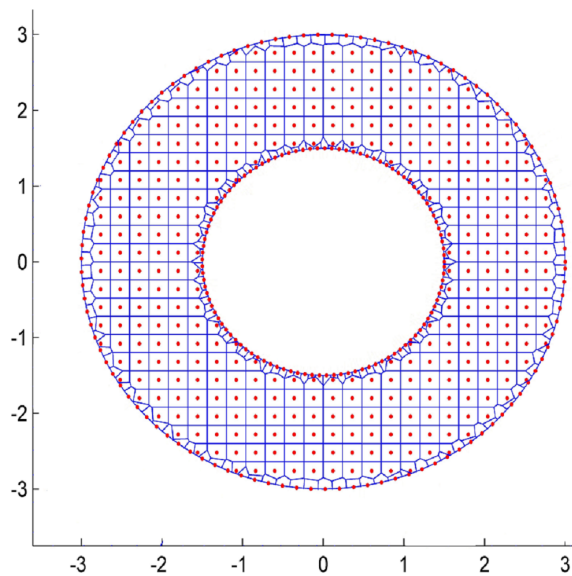
$$u^{(n+1)} = u^{(n+1),l},$$

و ما به گام زمانی بعدی می‌رویم. این پروسه تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که به زمان نهایی دست پیدا کنیم. در بخش بعدی چندین مثال برای حل معادلات موج خطی و غیرخطی در مورد انواع دامنه های پیچیده و نامنظم و همچنین ناحیه هایی که دارای ترک هستند آورده شده است.

۵.۵ نتایج عددی

ارزیابی دقت روش پیشنهادی با شش مثال در این بخش نشان داده شده است. مثال های این قسمت در نرم افزار متلب ۲۰۲۰ روی لپ تاپ Core i۷، ۲/۸ گیگاهرتز سرعت پردازنده با ۱۶ گیگابایت حافظه اجرا شده اند. خطاهای نسبی ای که در این بخش استفاده شده اند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r_{\circ} = \frac{\|u^h - u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}, \quad r_{\backslash} = \frac{\|\nabla u^h - \nabla u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^2}}.$$



شکل ۱.۵: دامنه Ω_1 افراز آن برای مثال ۱

۱.۵.۵ مثال. در اولین مثال، ما معادله موج (۱.۵) در دامنه زیر ارزیابی می‌کنیم:

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

جواب دقیق $u(x, y, t) = (x^2 + y^2 + t^2)e^t$ و $\alpha = 10^3$. در این مثال، $N = 576$ نقطه که در شکل ۱.۵ نشان داده شده اند را بررسی می‌کنیم به طوری که شرایط مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_t(x, y, 0) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \Omega_1, \\ u(x, y, t) &= (x^2 + y^2 + t^2)e^t, \quad (x, y) \in \partial\Omega_1, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

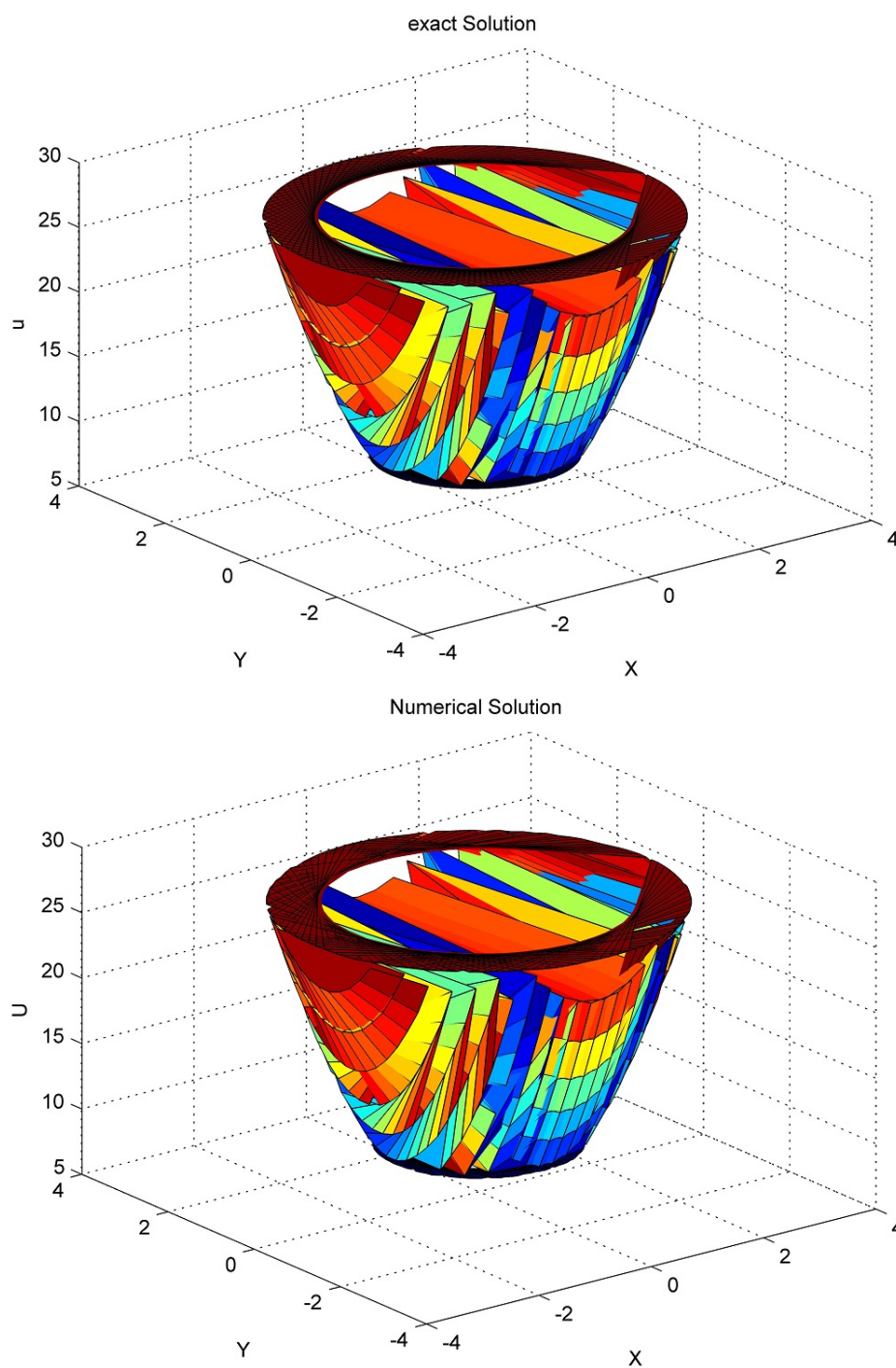
برای این مثال دقت روش نقاط شکننده در زمان‌های نهایی مختلف در جدول ۱.۵ نشان داده شده است. می‌بینید که دقت قابل قبولی در زمان‌های محاسباتی نسبتاً خوب به دست می‌آید. همچنین سودمندی و دقت این روش با منحنی‌های مربوط به جواب‌های عددی و دقیق این مثال در شکل ۲.۵ نمایش داده شده است.

۲.۵.۵ مثال. فرض کنید معادله موج ناهمگنی را به صورت زیر داشته باشیم:

$$u_{tt}(x, y, t) = \nabla^2 u(x, y, t) + \cos(x), \quad t \in (0, T), \quad (x, y) \in \Omega_2.$$

در این مسئله، شرایط اولیه و جواب دقیق به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} u_t(x, y, 0) &= \sin(y), \quad (x, y) \in \Omega_2, \\ u(x, y, 0) &= \cos(x), \quad u(x, y, t) = \cos(x) + \sin(y) \sin(t), \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$



شکل ۲.۵: منحنی های جواب های عددی و تحلیلی برای مثال ۱.۵.۵ در شرایط $h_e = 1$, $\eta = 6 \times 10^6$, $\delta t = 0.0095$, $T = 1$ و $N = 576$.

جدول ۱.۵: خطاهای نسبی مربوط به مثال ۱.۵.۵ برای $\delta t = 0.095$ و $N = 576$.

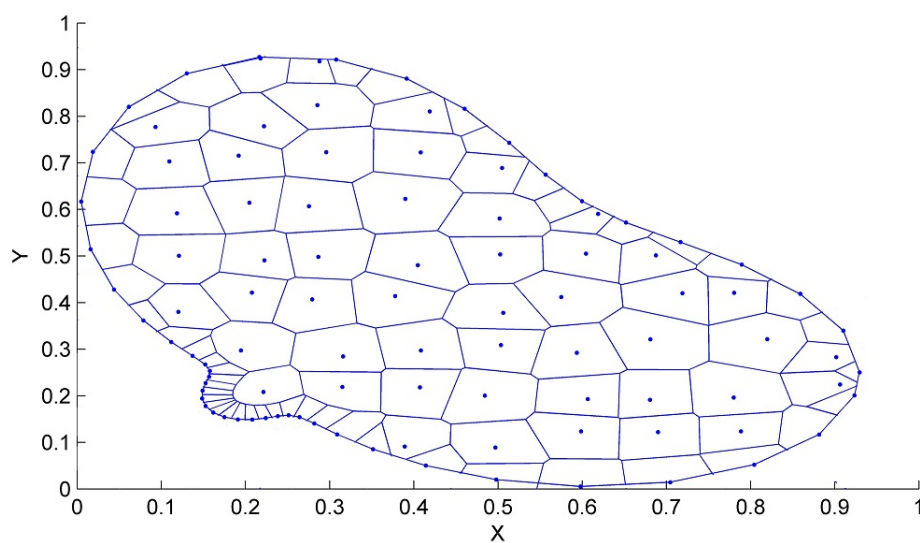
T	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۱	$\eta = 6 \times 10^6$ $h_e = 1$	$r_0 = 3.362046 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.583403 \times 10^{-2}$	۲.۷۴
۳	$\eta = 3.7 \times 10^6$ $h_e = 1$	$r_0 = 2.538862 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.344002 \times 10^{-2}$	۶.۷۴
۵	$\eta = 6.5 \times 10^6$ $h_e = 1$	$r_0 = 3.334959 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.946050 \times 10^{-2}$	۹.۳۰
۱۰	$\eta = 3.6 \times 10^6$ $h_e = 1$	$r_0 = 3.788412 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.870920 \times 10^{-2}$	۱۸.۷۴
۱۵	$\eta = 4 \times 10^6$ $h_e = 1$	$r_0 = 4.142852 \times 10^{-4}$ $r_1 = 4.831546 \times 10^{-2}$	۲۷.۸۳

این مثال در یک دامنه فیزیکی شبه آمیب همانطور که در شکل ۳.۵ نشان داده شده است، بررسی می‌شود. تمام شرایط مرزی را به صورت دیریکله فرض کرده و $N = 100$ نقطه که در دامنه پراکنده هستند را در نظر می‌گیریم. جدول ۲.۵ خطاهای نسبی را در زمان‌های مختلف $T = 1, 3, 5, 10, 15$ گزارش می‌کند. همانطور که مشاهده می‌شود با توجه به تعداد نقاط انتخاب شده برای این دامنه، روش از دقت مناسب و همچنین سرعت محاسبات بالایی برخوردار است. در شکل ۵.۵ خطای مطلق مربوط به $T = 5$ نشان داده شده است و همچنین در شکل ۴.۵ نمودارهای جواب‌های تحلیلی و عددی ارائه شده است که دقت روش نقاط شکننده برای این مثال را مشخص می‌کند.

۳.۵.۵ مثال. در این مثال، دو معادله موج مختلف روی دامنه $-L$ شکل مطالعه شده است (شکل ۶.۵) و جواب‌های عددی حاصل از به کارگیری روش نقاط شکننده با جواب دقیق مقایسه خواهد شد. معادله موج را با شرایط مرزی دیریکله به دو صورت زیر بررسی می‌کنیم:

$$(a) \begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = \nabla^2 u(x, y, t) + (12t^2 + 2y + \sin(x) \sin(y) \sin(t)), \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = \sin(x) \sin(y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{cases}$$

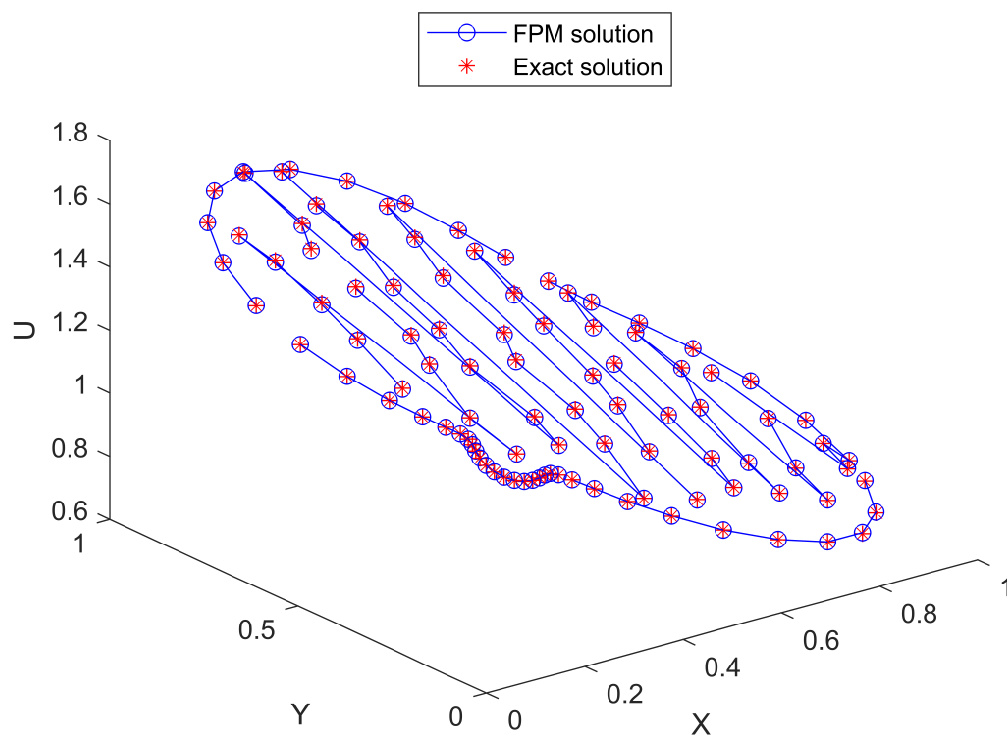
$$(b) \begin{cases} u_{tt}(x, y, t) = \nabla^2 u(x, y, t) + \cos(x), \\ u(x, y, 0) = \cos(x), \quad u_t(x, y, 0) = \sin(y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T), \end{cases}$$



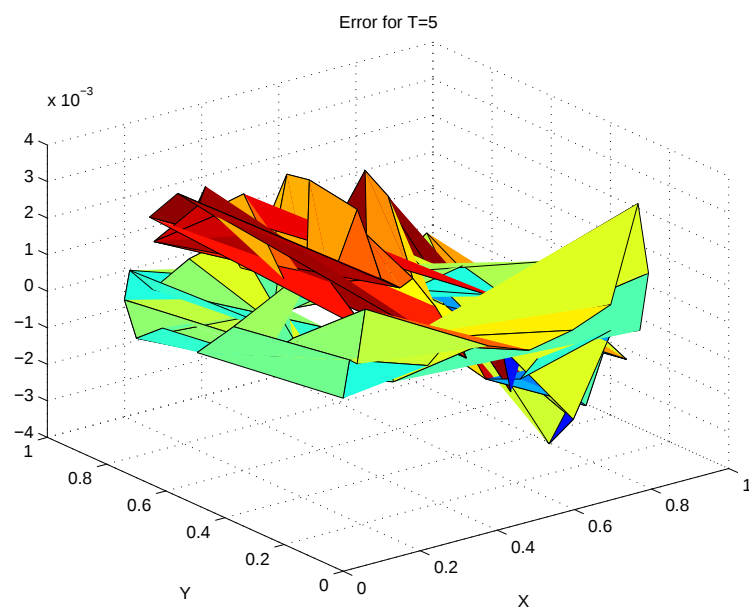
شکل ۳.۵: دامنه Ω_2 نامنظم و نمودار ورونوی مربوط به آن برای مثال ۲.۵.۵.

جدول ۲.۵: خطاهای نسبی مثال ۲.۵.۵ با $\delta t = 0.01$ برای $N = 100$ نقطه.

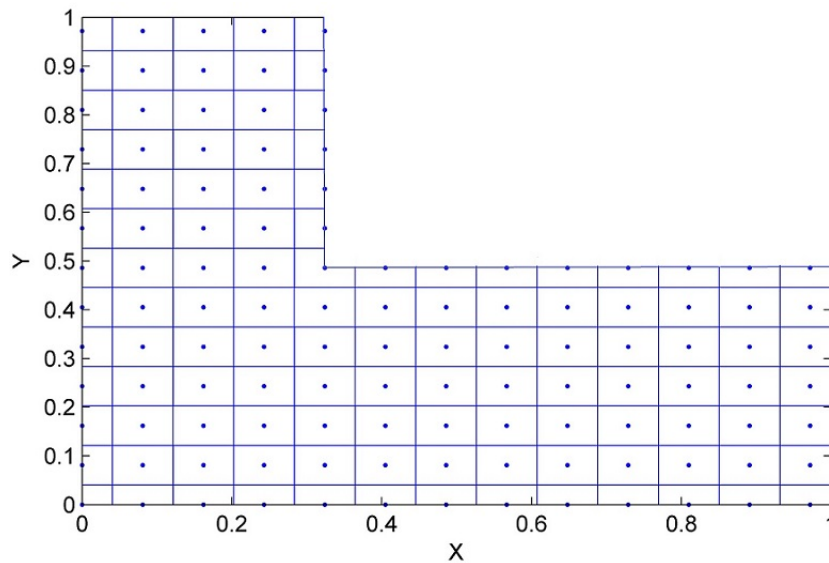
T	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۱	$\eta = 15$ $h_e = 0.01$	$r_0 = 3.136487 \times 10^{-3}$ $r_1 = 5.614673 \times 10^{-2}$	0.75
۳	$\eta = 15$ $h_e = 0.01$	$r_0 = 2.676575 \times 10^{-3}$ $r_1 = 9.223870 \times 10^{-2}$	1.25
۵	$\eta = 15$ $h_e = 0.01$	$r_0 = 3.778888 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.306851 \times 10^{-2}$	1.43
۱۰	$\eta = 9$ $h_e = 0.01$	$r_0 = 3.138723 \times 10^{-3}$ $r_1 = 5.606131 \times 10^{-2}$	1.94
۱۵	$\eta = 3$ $h_e = 0.01$	$r_0 = 3.161337 \times 10^{-3}$ $r_1 = 7.082186 \times 10^{-2}$	2.78



شکل ۴.۵: جواب های روش نقاط شکننده و دقیق برای مثال ۲.۵.۵ در $T = 1s$ ، $\delta t = 0.01$ و $N = 100$.



شکل ۵.۵: منحنی خطا برای مثال ۲.۵.۵ با استفاده از نقاط غیربکناخت پراکنده.



شکل ۵.۶: افراز دامنه Ω_3 ، L -شکل به وسیله $N = 121$ نقطه.

جواب های عددی برای این دو معادله به ترتیب به صورت زیر می باشد:

$$u(x, y, t) = \sin(x) \sin(y) \sin(t) + t^2 y + t^4, \quad (x, y) \in \Omega_3, \quad t \in (0, T),$$

$$u(x, y, t) = \cos(x) + \sin(y) \sin(t), \quad (x, y) \in \Omega_3, \quad t \in (0, T).$$

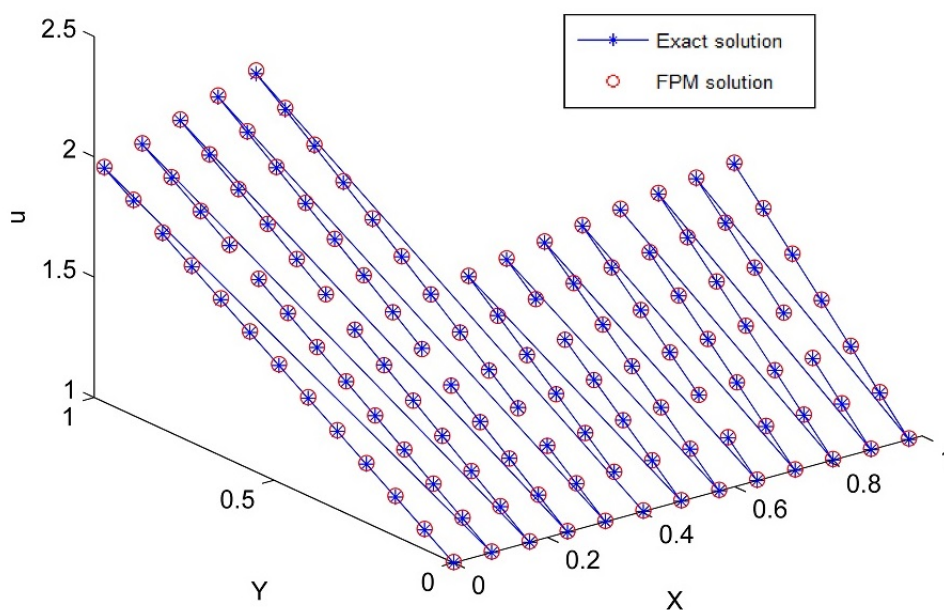
می باشد. شکل ۷.۵ انطباق جواب های عددی و تحلیلی را برای $N = 121$ نقطه در $T = 1$ و $\delta t = 0.0094$ نشان می دهد. جدول های ۳.۵ و ۴.۵ به ترتیب خطاهای نسبی معادلات الف و ب را در زمان های نهایی مختلف گزارش می کند. همانطور که مشاهده می شود با توجه به تعداد نقاط استفاده شده دقت خوبی در زمان های کوتاه حاصل شده است. هم چنین شکل های ۸.۵ و ۹.۵ نشان می دهد که با افزایش تعداد نقاط، خطاها کاهش می یابد.

۴.۵.۵ مثال. به عنوان آخرین مثال از معادله موج خطی، معادله

$$u_{tt}(x, y, t) = \nabla^2 u(x, y, t) + \cos(x), \quad (x, y) \in \Omega_4, \quad t \in (0, T),$$

روی یک دامنه مربعی $\Omega_4 = [0, 1] \times [0, 1]$ که یک ترک به صورت $[0.5, 0.57] \times [0, 0.99]$ دارد و همانطور که در شکل ۱۰.۵ دیده می شود، این ترک در سمت چپ دامنه مسئله بزرگتر شده است (توجه داشته باشید که در این مثال این ترک یا شکستگی در دامنه را بزرگ در نظر می گیریم تا نتایج به خوبی در شکل نهایی نمایش داده شود).

در ادامه، ابتدا فرض می کنیم $N = 625$ نقطه داشته باشیم و گام زمانی $\delta t = 0.0091$ باشد. خطاهای نسبی در جدول ۵.۵، مشخص می کند که روش دارای دقت مناسب و در طول زمان پایدار است. منحنی های دقیق و عددی برای $T = 1$ و $\delta t = 0.0091$ در شکل ۱۱.۵ ارائه شده است که نشان می دهد این منحنی ها کاملاً بر هم منطبق هستند. هم چنین برای ارزیابی روش برای تعداد نقاط بیشتر، همین مسئله را برای $N = 2500$ نقطه که به طور



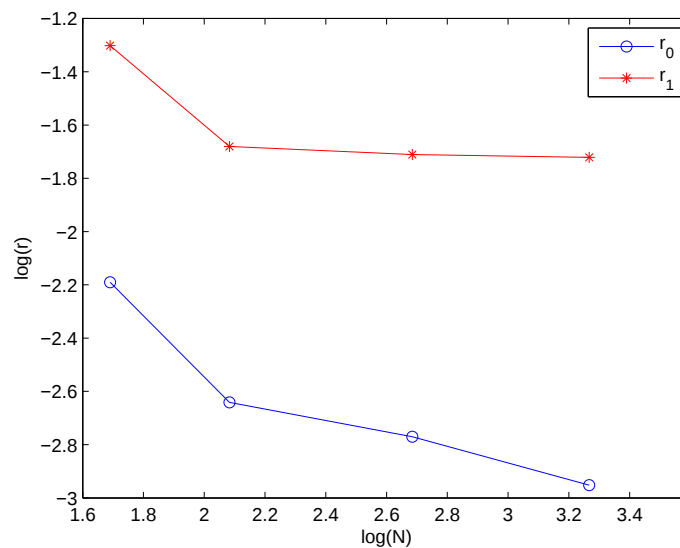
شکل ۷.۵: جواب های عددی و تحلیلی مربوط به مثال ۳.۵.۵ (الف) در $T = 1s$ ، $\delta t = 0.0094$ و $N = 121$.

جدول ۳.۵: خطای جواب های عددی روش پیشنهادی برای مثال ۳.۵.۵ (الف) در $T = 1s$ و $\delta t = 0.0094$.

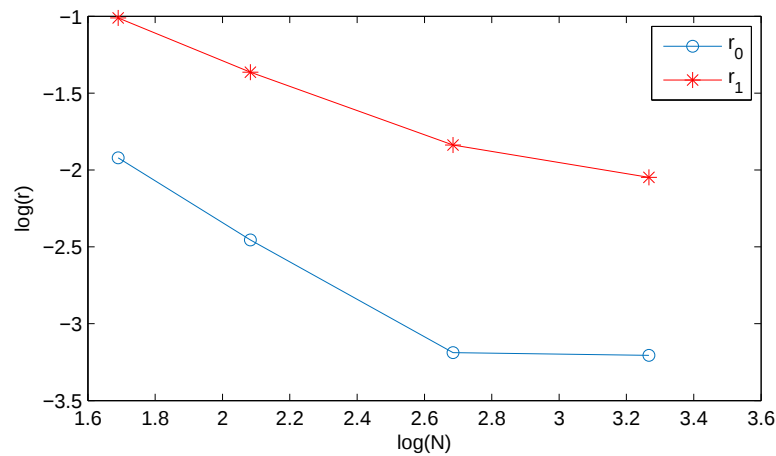
تعداد نقاط	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۴۹	$\eta = 2.5 \times 10^5$	$r_0 = 6.455704 \times 10^{-3}$	۰.۷۸
	$h_e = 1$	$r_1 = 4.989569 \times 10^{-2}$	
۱۲۱	$\eta = 1 \times 10^5$	$r_0 = 2.283294 \times 10^{-3}$	۰.۹۴
	$h_e = 1$	$r_1 = 2.087879 \times 10^{-2}$	
۴۸۴	$\eta = 1.8 \times 10^3$	$r_0 = 1.697522 \times 10^{-3}$	۲.۲۳
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 1.947587 \times 10^{-2}$	
۱۸۴۹	$\eta = 6 \times 10^3$	$r_0 = 1.116268 \times 10^{-3}$	۳۱.۲۱
	$h_e = 1$	$r_1 = 1.899154 \times 10^{-2}$	

جدول ۴.۵: خطای جواب‌های عددی روش نقاط شکننده برای مثال ۳.۵.۵ (ب) در $T = 1$ و $\delta t = 0.005$.

تعداد نقاط	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۴۹	$\eta = 1850$ $h_e = 1$	$r_0 = 1.198266 \times 10^{-2}$ $r_1 = 9.753488 \times 10^{-2}$	۰.۷۵
۱۲۱	$\eta = 800$ $h_e = 1$	$r_0 = 3.504819 \times 10^{-3}$ $r_1 = 4.329853 \times 10^{-2}$	۱.۰۳
۴۸۴	$\eta = 310$ $h_e = 1$	$r_0 = 6.487739 \times 10^{-4}$ $r_1 = 1.454859 \times 10^{-2}$	۳.۳۱
۱۸۴۹	$\eta = 800$ $h_e = 1$	$r_0 = 6.218028 \times 10^{-4}$ $r_1 = 8.946894 \times 10^{-3}$	۵۵.۲۱



شکل ۸.۵: خطای نسبی بر حسب تعداد نقاط برای مثال ۳.۵.۵ (الف) در $T = 1$ و $\delta t = 0.004$.



شکل ۹.۵: خطای نسبی بر حسب تعداد نقاط برای مثال ۳.۵.۵ (ب) در $T = 1$ و $\delta t = 0.05$.

یکنواخت از دامنه انتخاب شده اند حل کرده ایم. شکل ۱۲.۵ جواب های عددی و تحلیلی مربوط به آن را برای $T = 1$ و گام زمانی $\delta t = 0.09$ نشان می دهد.

۵.۵.۵ مثال. در این مثال، جواب های عددی معادله ساین-گوردون دو بعدی غیرخطی

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u(x, y, t) + \sin(u) \quad (x, y) \in \Omega.$$

در یک دامنه $-L$ شکل مطابق مثال ۳.۵.۵ را مورد مطالعه قرار می دهیم. شرایط مرزی را به صورت دیریکله در نظر می گیریم و شرایط اولیه به صورت زیر است:

$$u(x, y, 0) = 4 \tan^{-1}(\exp(x + y)), \quad u_t(x, y, 0) = \frac{4 \exp(x + y)}{1 + \exp(2x + 2y)}.$$

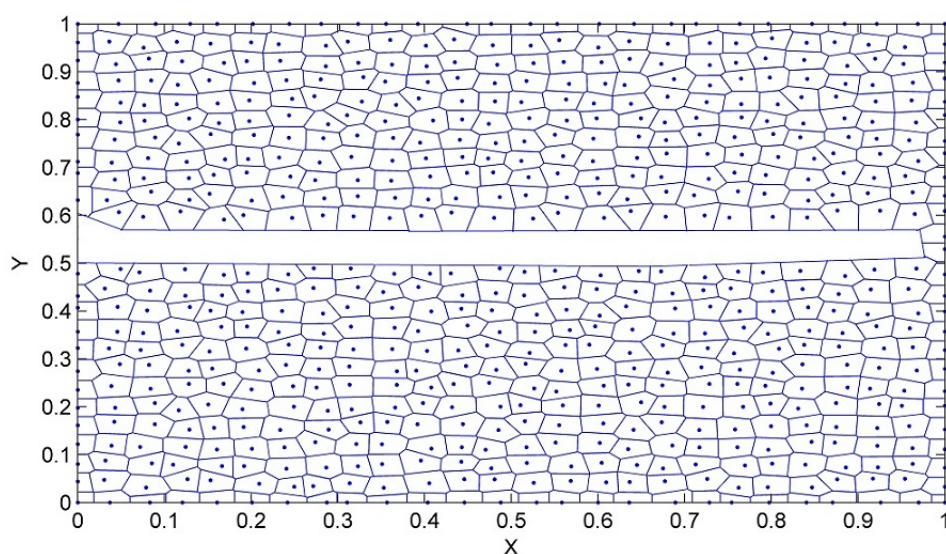
هم چنین جواب دقیق $u(x, y, 0) = 4 \tan^{-1}(\exp(x + y - t))$ [۶۱] می باشد.

جدول ۶.۵ و ۷.۵ دقت این روش و مرتبه های همگرایی را نسبت به زمان گزارش می کند که به وسیله فرمول های

زیر محاسبه می شود:

$$C - order = \frac{\log_{10} \left(\frac{e_1}{e_2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{\delta t_1}{\delta t_2} \right)},$$

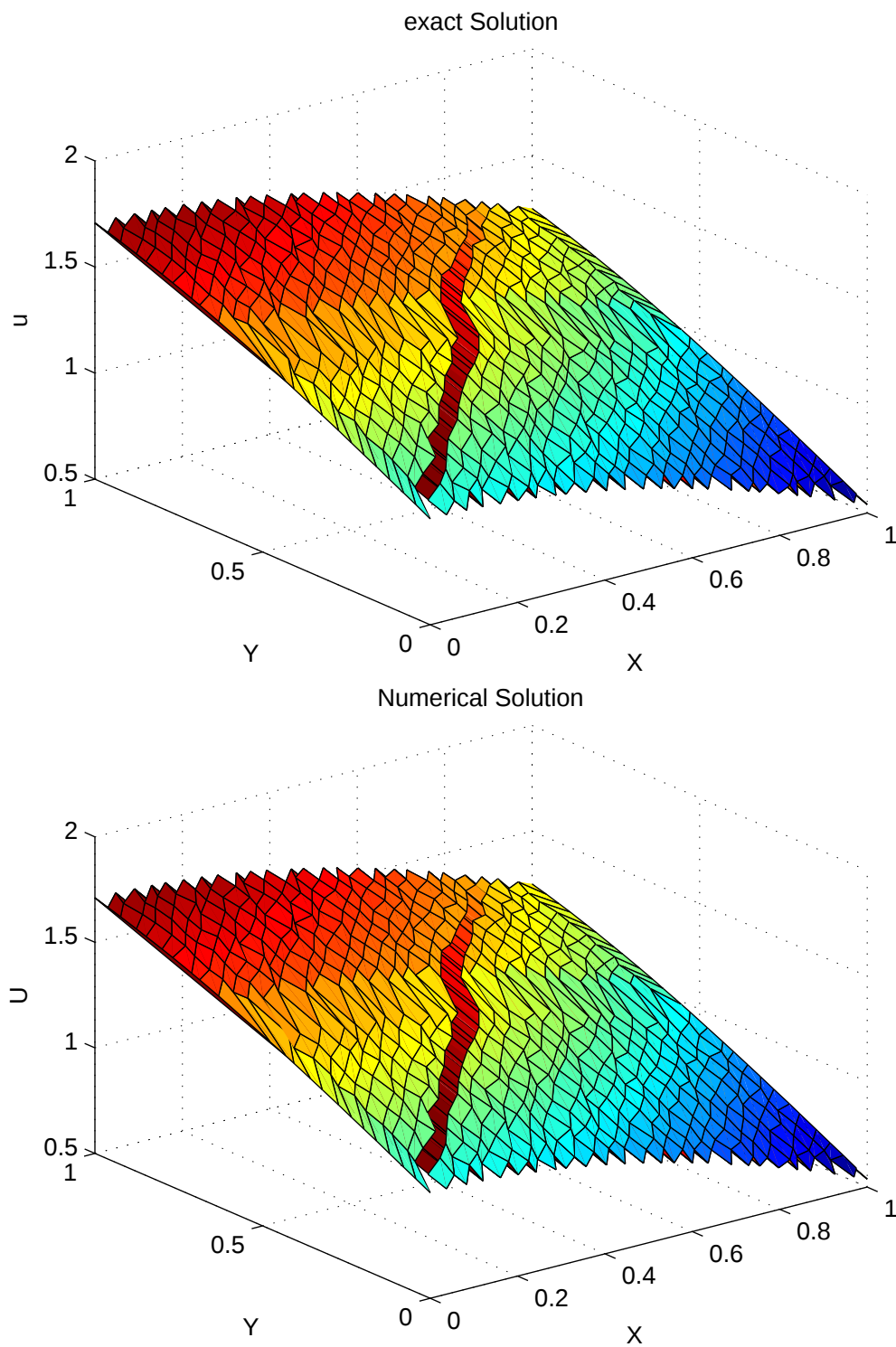
به قسمی که δt_1 و δt_2 به ترتیب متناظر است با e_1 و e_2 می باشد. توجه کنید که خطاهای e_1 و e_2 را خطای نسبی r_0 در نظر می گیریم. بنابراین این روش برای مسائل غیرخطی جواب های مناسبی دارد و در طول زمان از نرخ همگرایی بالایی برخوردار است (جدول ۷.۵).



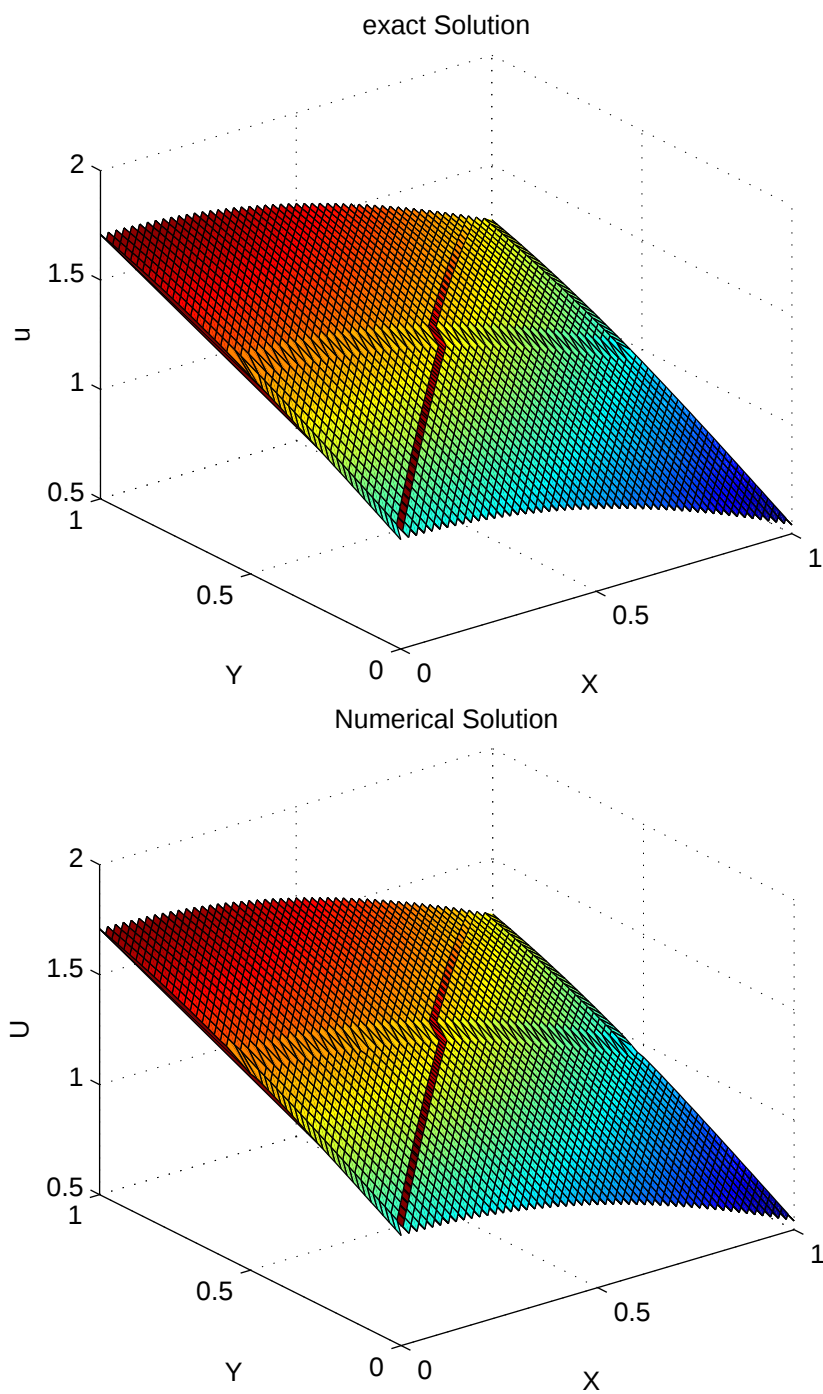
شکل ۱۰.۵: دامنه Ω_4 ترک دار برای مثال ۴.۵.۵ با $N = 625$ نقطه با توزیع غیریکنواخت

جدول ۵.۵: خطای روش پیشنهادی برای مثال ۴.۵.۵ با $N = 625$ نقطه در $T = 1, 3, 5, 10, 15s$ و $\delta t = 0.0091$.

T	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۱	$\eta = 64$	$r_o = 9.215583 \times 10^{-4}$	۳/۲۲
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 2.838123 \times 10^{-2}$	
۳	$\eta = 32$	$r_o = 1.124771 \times 10^{-3}$	۷/۶۳
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 2.889221 \times 10^{-2}$	
۵	$\eta = 95$	$r_o = 4.762421 \times 10^{-3}$	۱۲/۱۵
	$h_e = 0.1$	$r_1 = 2.110214 \times 10^{-2}$	
۱۰	$\eta = 14$	$r_o = 3.914474 \times 10^{-3}$	۲۳/۰۵
	$h_e = 0.01$	$r_1 = 2.473421 \times 10^{-2}$	
۱۵	$\eta = 10$	$r_o = 1.057143 \times 10^{-3}$	۳۴/۰۲
	$h_e = 0.01$	$r_1 = 2.350718 \times 10^{-2}$	



شکل ۱۱.۵: منحنی های مربوط به جواب های عددی و تحلیلی مثال ۴.۵.۵ با $N = 625$ نقطه با توزیع غیریکنواخت و $T = 1$ و $\delta t = 0.091$, $\eta = 64$, $h_e = 0.1$



شکل ۱۲.۵: منحنی جواب‌های دقیق و عددی برای مثال ۴.۵.۵ بر اساس نقاط یکنواخت و $\delta t = 0.009$, $h_e = 0.1$ و $N = 2500$ و $T = 1$, $\eta = 9$.

جدول ۶.۵: خطاهای جواب های عددی روش نقاط شکننده برای مثال ۵.۵.۵ در $T = 1$ و $\delta t = 0.004$.

N	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)
۴۹	$\eta = 2 \times 10^4$ $h_e = 1$	$r_o = 3.480308 \times 10^{-3}$ $r_1 = 3.339202 \times 10^{-2}$	۰.۷۳
۱۲۱	$\eta = 9 \times 10^4$ $h_e = 1$	$r_o = 2.101576 \times 10^{-3}$ $r_1 = 1.540799 \times 10^{-2}$	۰.۹۱
۴۸۴	$\eta = 4 \times 10^4$ $h_e = 0.1$	$r_o = 9.842100 \times 10^{-4}$ $r_1 = 1.516945 \times 10^{-2}$	۰.۹۸

جدول ۷.۵: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی نسبت به زمان برای مثال ۵.۵.۵ با $N = 484$ نقطه یکنواخت و $T = 1$ ، $h_e = 0.1$ و $\eta = 4 \times 10^4$.

δt	r_o	r_1	CPU time(s)	C-order
۰.۰۳۲	4.193539×10^{-2}	7.334487×10^{-1}	۱.۳۲	-
۰.۰۱۶	1.991860×10^{-2}	4.659458×10^{-1}	۲.۳۷	۱.۰۷۴۱
۰.۰۰۸	5.628626×10^{-3}	1.824365×10^{-1}	۳.۰۷	۱.۸۲۳۳
۰.۰۰۴	9.842100×10^{-4}	1.516945×10^{-2}	۵.۱۴	۲.۵۱۵۷

جدول ۸.۵: خطاهای روش پیشنهادی برای مثال ۶.۵.۵ با $N = 625$ نقطه در $T = 1, 5, 10, 15$ و $\delta t = 0.005$.

CPU time(s)	خطاهای نسبی	پارامترها	T
۷.۷۰	$r_0 = 2.404970 \times 10^{-3}$	$\eta = 50$	۱
	$r_1 = 5.932846 \times 10^{-2}$	$h_e = 0.1$	
۳۲.۲۴	$r_0 = 3.438056 \times 10^{-3}$	$\eta = 55$	۵
	$r_1 = 6.239803 \times 10^{-2}$	$h_e = 0.1$	
۶۸.۶۲	$r_0 = 2.311563 \times 10^{-3}$	$\eta = 40$	۱۰
	$r_1 = 6.034663 \times 10^{-2}$	$h_e = 0.1$	
۹۶.۲۱	$r_0 = 3.669151 \times 10^{-3}$	$\eta = 50$	۱۵
	$r_1 = 5.551053 \times 10^{-2}$	$h_e = 0.1$	

۶.۵.۵ مثال. در این مثال، معادله غیرخطی ساین هایپربولیک-گوردون به فرم زیر

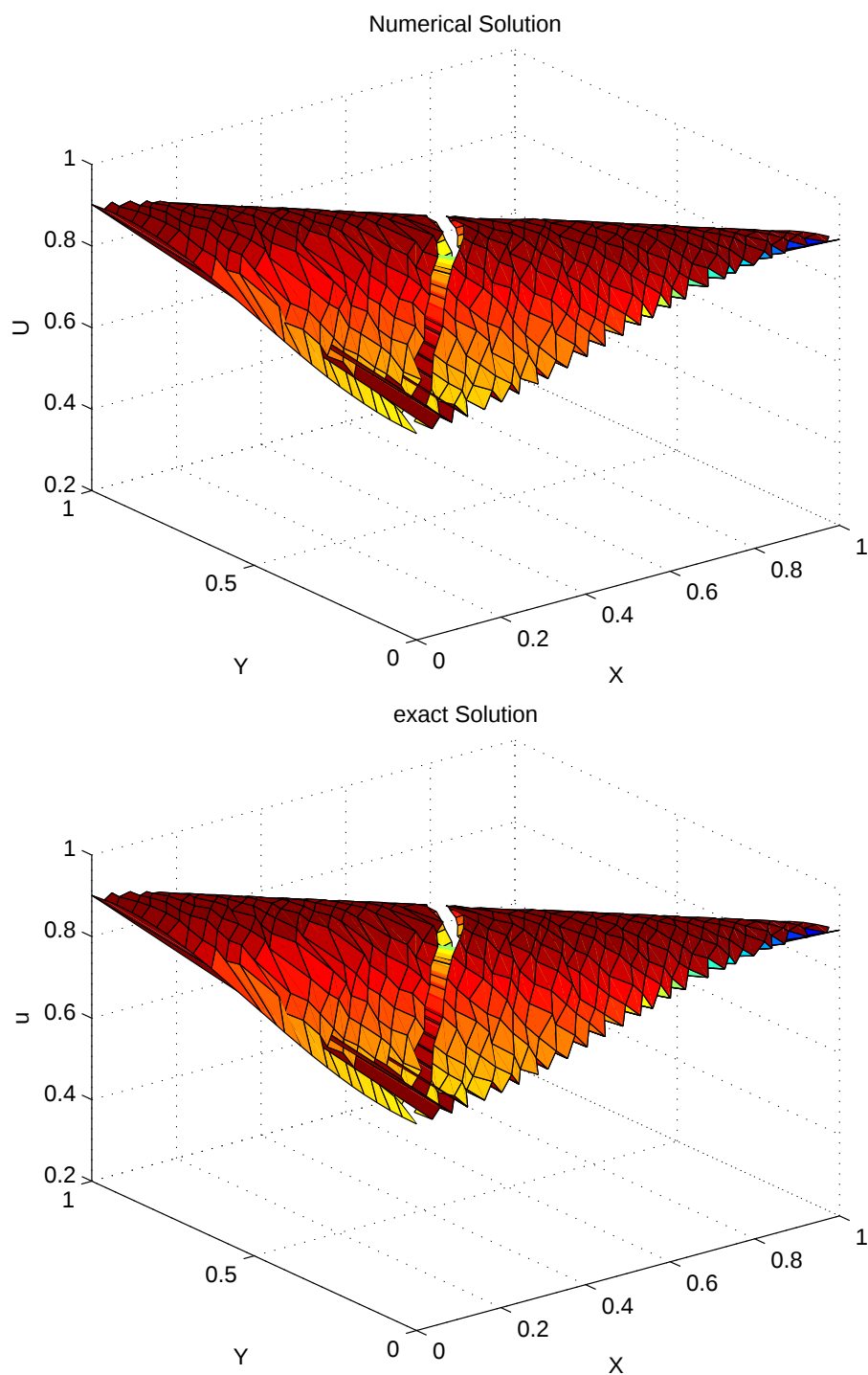
$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u(x, y, t) - \sinh(u) + f(x, y, t) \quad (x, y) \in \Omega_f.$$

را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. جواب دقیق مسئله به صورت زیر است [۲۲]:

$$u(x, y, t) = \sin(t) * (\operatorname{sech}(-x - y + 1))^2 + \operatorname{sech}(x + y + 1)^2,$$

و شرایط مرزی و اولیه و همچنین $f(x, y, t)$ با استفاده از جواب تحلیلی به دست می‌آیند. جدول ۸.۵ خطاهای نسبی برای این مثال را نشان می‌دهد و شکل ۱۳.۵ مطابقت جواب های عددی و دقیق را در $T = 1$ مشخص می‌کند.

بنابراین با توجه به معادلات خطی و غیرخطی حل شده در این بخش، روش نقاط شکننده از دقت، نرخ همگرایی و زمان محاسباتی خوبی برخوردار است. همچنین برای حل معادلات از نظر هندسه‌ی دامنه، ترک خوردگی، شکستگی یا شکاف و ... محدودیتی نداریم.



شکل ۱۳.۵: منحنی های جواب های عددی و دقیق برای مثال ۶.۵.۵ با $N = 625$ نقطه با توزیع غیریکنواخت با شرایط $T = 1$ and $\delta t = 0.005, \eta = 5, h_e = 0.1$

فصل ۶

استفاده از روش نقاط شکننده برای معادله دوبعدی تعمیم یافته دوهمساز در دامنه های دلخواه

۱.۶ مقدمه

در این بخش، معادله دوهمساز تعمیم یافته به صورت عددی با استفاده از دو روش نقاط شکننده حل شده است. در معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، بین توابع و مشتقات آنها روابطی وجود دارد و با توجه به اینکه توابع یک کمیت فیزیکی را نشان می‌دهند و مشتقات میزان تغییر آن را مشخص می‌کنند، از این معادلات دیفرانسیل در مدل‌سازی پدیده‌های زندگی واقعی و فرآیندهای فیزیکی مختلف استفاده می‌شود.

هر سه معادله، معادله لاپلاس، معادله انتشار و معادله موج در مرتبه دوم قرار دارند و به ترتیب بیانگر معادلات بنیادی بیضوی، سهمی و هذلولی هستند. با پیچیده‌تر شدن فرآیندها و پدیده‌هایی که باید مدل‌سازی شوند، انتظار می‌رود که معادلات دیفرانسیل که باید این پدیده‌ها را توصیف کنند، مرتبه بالاتری داشته باشند. یکی از این معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات دوهمساز است که برای مدل‌سازی پدیده‌های پیچیده تری که در علم و مهندسی با آن مواجه هستیم، استفاده می‌شود. توابعی که دوهمساز هستند معادله لاپلاس را دو بار به صراحت ارضا می‌کنند. از جمله کاربردهای معادله دوهمساز می‌توان به در نظر گرفتن فرآیندهای فیزیکی و مکانیکی مانند جامدات و سیالات [۵۹] اشاره کرد.

در این مطالعه، معادله دوهمساز دوبعدی تعمیم یافته با فرمول‌بندی زیر بررسی شده است:

$$\Delta^2 u(x, y) + \alpha \Delta u(x, y) + \beta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1.6)$$

و شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$u(x, y) = g_1(x, y), \quad \Delta u(x, y) = h_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_D, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g_2(x, y), \quad \frac{\partial \Delta u}{\partial n}(x, y) = h_2(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_N. \quad (3.6)$$

در معادله بالا، Γ_D و Γ_N به ترتیب نشان دهنده مرزهای دیریکله و نیومانی است به طوری که $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ و $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

۲.۶ اصلاح‌های شارهای عددی و پیاده‌سازی روش

در این بخش، ابتدا معادله دوهمساز تعمیم‌یافته و شرایط مرزی (۱.۶)-(۳.۶) را به دو معادله مجزا با شرایط مرزی مشخص تبدیل می‌کنیم.

برای این، یک معادله میانی $V = \Delta u$ معرفی می‌کنیم و در نتیجه معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \Delta V(x, y) + \alpha V(x, y) + \beta u(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ V(x, y) = h_1(x, y), & (x, y) \in \Gamma_D, \quad \frac{\partial V}{\partial n}(x, y) = h_2(x, y), & (x, y) \in \Gamma_N, \end{cases} \quad (۴.۶)$$

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = V(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = g_1(x, y), & (x, y) \in \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g_2(x, y), & (x, y) \in \Gamma_N. \end{cases} \quad (۵.۶)$$

با توجه به قضیه ۱.۲ در [۴۴] برابری جواب‌های دو معادله (۴.۶) و (۵.۶) با جواب‌های معادلات (۱.۶)-(۳.۶) در فضای سوبولوف $H^2(\Omega)$ را تایید می‌کند. با ضرب کردن توابع آزمون σ_1 و σ_2 در معادلات (۴.۶) و (۵.۶) فرم ضعیف آن‌ها در هر زیرفضای $E \in \Omega$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_E \Delta V_h \sigma_1 d\Omega + \alpha \int_E V_h \sigma_1 d\Omega + \beta \int_E u_h \sigma_1 d\Omega = \int_E f \sigma_1 d\Omega, \quad (۶.۶)$$

$$\int_E \Delta u_h \sigma_2 d\Omega = \int_E V_h \sigma_2 d\Omega, \quad (۷.۶)$$

u_h و V_h توابع کوششی هستند و با استفاده از فرمول گرین داریم:

$$\begin{aligned} \int_E \nabla V_h \nabla \sigma_1 d\Omega &= \int_{\partial E} \nabla \hat{V}_h n \cdot \sigma_1 d\Gamma + \alpha \int_E V_h \sigma_1 d\Omega \\ &+ \beta \int_E u_h \sigma_1 d\Omega - \int_E f \sigma_1 d\Omega, \end{aligned} \quad (۸.۶)$$

$$\int_E \nabla u_h \nabla \sigma_2 d\Omega = \int_{\partial E} \nabla \hat{u}_h n \cdot \sigma_2 d\Gamma - \int_E V_h \sigma_2 d\Omega. \quad (۹.۶)$$

در معادلات بالا، $\hat{V}_h$ و $\hat{u}_h$ شارهای عددی هستند که مقادیر تقریبی V_h و u_h را روی مرز ∂E تعیین می‌کنند. این معادلات برای هر زیردامنه‌ای برقرار هستند. بنابراین مجموع تمام این معادلات را روی تمام زیر دامنه‌های $E \in \Omega$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla V_h \nabla \sigma_1 d\Omega &= \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \nabla \hat{V}_h n \cdot \sigma_1 d\Gamma + \alpha \int_{\Omega} V_h \sigma_1 d\Omega \\ &+ \beta \int_{\Omega} u_h \sigma_1 d\Omega - \int_{\Omega} f \sigma_1 d\Omega, \end{aligned} \quad (۱۰.۶)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla \sigma_v d\Omega = \sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} \nabla \hat{u}_h n \cdot \sigma_v d\Gamma - \int_{\Omega} V_h \sigma_v d\Omega. \quad (11.6)$$

برای تعیین مقدارهای شارهای عددی نیز مشابه قبل از عملگرهای پرش و میانگین استفاده می‌شود. با استفاده از این عملگرها، رابطه زیر با استفاده از محاسبات ساده برای $q \in T(\Gamma)$ و $\varphi \in [T(\Gamma)]^2$ به دست می‌آید:

$$\sum_{E \in \Omega} \int_{\partial E} q \varphi \cdot n d\Gamma = \int_{\Gamma} [q] \cdot \{\varphi\} d\Gamma + \int_{\Gamma_h} \{q\} [\varphi] d\Gamma. \quad (12.6)$$

با استفاده از معادله بالا و قرار دادن شارهای عددی جریمه داخلی در جدول ۱.۳، معادلات (۱۰.۶) و (۱۱.۶) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla V_h \cdot \nabla \sigma_v d\Omega - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e (\{\nabla V_h\} [\sigma_v] + \{\nabla \sigma_v\} [V_h]) d\Gamma \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\eta}{h_e} \int_e [\sigma_v] [V_h] d\Gamma = \int_{\Omega} -f \sigma_v d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \sigma_v h_v d\Gamma \\ & + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \sigma_v - \nabla \sigma_v \cdot \mathbf{n} \right) h_v d\Gamma + \alpha \int_{\Omega} V_h \sigma_v d\Omega + \beta \int_{\Omega} u_h \sigma_v d\Omega \end{aligned} \quad (13.6)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \Omega} \int_E \nabla u_h \cdot \nabla \sigma_v d\Omega - \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \int_e (\{\nabla u_h\} [\sigma_v] + \{\nabla \sigma_v\} [u_h]) d\Gamma \\ & + \sum_{e \in \Gamma_h \cup \Gamma_D} \frac{\eta}{h_e} \int_e [\sigma_v] [u_h] d\Gamma = \int_{\Omega} -V_h \sigma_v d\Omega + \sum_{e \in \Gamma_N} \int_e \sigma_v g_v d\Gamma \\ & + \sum_{e \in \Gamma_D} \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \sigma_v - \nabla \sigma_v \cdot \mathbf{n} \right) g_v d\Gamma \end{aligned} \quad (14.6)$$

جواب معادلات دوهمساز می‌تواند با کمک حل دستگاه معادلات به فرم ماتریسی زیر به دست بیاید:

$$-\beta C u + (K - \alpha C) V = F, \quad (15.6)$$

$$K u + C V = R.$$

در نتیجه دستگاه معادلات خطی زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} -\beta C & K - \alpha C \\ K & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ R \end{bmatrix}. \quad (16.6)$$

ادامه مباحث این بخش، با استفاده از توابع آزمون به فرم چند جمله‌ای‌های کوششی و تابع پله‌ای هویساید به دو زیر بخش زیر می‌رسد که دو روش نقاط شکننده گالرکین و نقاط شکننده هویساید را توضیح می‌دهد.

۱.۲.۶ روش نقاط شکننده گالرکین

در این زیربخش، توابع آزمون را همان چندجمله‌ای‌های کوششی V_h و u_h در نظر می‌گیریم،

$$\mathbf{C} = \int_E \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{K}_E = \int_E \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\Omega, \quad E \in \Omega, \quad (۱۷.۶)$$

و داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_h &= \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1 d\Gamma \\ &+ \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2 d\Gamma \\ &+ \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_1^T \mathbf{n}_1^T \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_2^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_2 d\Gamma \\ &+ \frac{-1}{\gamma} \int_e (\mathbf{B}_2^T \mathbf{n}_2^T \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_1 d\Gamma, \quad e \in \partial E_1 \cap \partial E_2, \\ \mathbf{K}_D &= - \int_e (\mathbf{B}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N} + \mathbf{N}^T \mathbf{n} \mathbf{B}) d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (۱۸.۶)$$

به طور مشابه، برای معادله (۱۳.۶)، بردار سمت راست دستگاه معادلات را به صورت زیر می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} F_E &= - \int_E \mathbf{N}^T f d\Omega, \quad E \in \Omega, \quad F_N = \int_e \mathbf{N}^T h_2 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_N, \\ F_D &= \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \mathbf{N}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{n} \right) h_1 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (۱۹.۶)$$

و برای معادله (۱۴.۶)، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$R_N = \int_e \mathbf{N}^T g_2 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_N, \quad R_D = \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \mathbf{N}^T - \mathbf{B}^T \mathbf{n} \right) g_1 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D. \quad (۲۰.۶)$$

اگر روابط فوق برای ماتریس ضرایب و بردار سمت راست استفاده شود، روش نقاط شکننده گالرکین به دست می‌آید.

۲.۲.۶ روش نقاط شکننده هویساید

همانطور که قبلاً بیان شد، در این زیربخش از تابع پله‌ای هویساید به جای تابع آزمون استفاده می‌شود. اگر این تابع به صورت زیر تعریف شود:

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in E, \\ 0, & o.w, \end{cases}$$

و به جای توابع آزمون σ_1 و σ_2 در معادلات (۱۳.۶) و (۱۴.۶) قرار داده شود، خواهیم داشت:

$$\mathbf{C} = \int_E \tilde{N}^T \mathbf{N} d\Omega, \quad \mathbf{K}_E = \mathbf{0}, \quad E \in \Omega, \quad (21.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_h &= \frac{-1}{\gamma} \int_e \tilde{N}_1^T \mathbf{n}_1 \mathbf{B}_1 d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \tilde{N}_1^T \mathbf{N}_1 d\Gamma + \frac{-1}{\gamma} \int_e \tilde{N}_2^T \mathbf{n}_2 \mathbf{B}_2 d\Gamma \\ &+ \frac{\eta}{h_e} \int_e \tilde{N}_2^T \mathbf{N}_2 d\Gamma + \frac{-1}{\gamma} \int_e \tilde{N}_3^T \mathbf{n}_3 \mathbf{B}_3 d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \tilde{N}_3^T \mathbf{N}_3 d\Gamma \\ &+ \frac{\eta}{h_e} \int_e \tilde{N}_4^T \mathbf{N}_4 d\Gamma, \quad e \in \partial E_1 \cap \partial E_2, \\ \mathbf{K}_D &= - \int_e \tilde{N}^T \mathbf{n} \mathbf{B} d\Gamma + \frac{\eta}{h_e} \int_e \tilde{N}^T \mathbf{N} d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (22.6)$$

$$\begin{aligned} F_E &= - \int_E \tilde{N}^T f d\Omega, \quad E \in \Omega, \quad F_N = \int_e \tilde{N}^T h_2 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_N, \\ F_D &= \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \tilde{N}^T \right) h_1 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D, \end{aligned} \quad (23.6)$$

$$R_N = \int_e \tilde{N}^T g_2 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_N, \quad R_D = \int_e \left(\frac{\eta}{h_e} \tilde{N}^T \right) g_1 d\Gamma, \quad e \in \Gamma_D, \quad (24.6)$$

که در این روابط $\tilde{N} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]_{(1,m+1)}$

بر اساس روابط (۲۱.۶) تا (۲۴.۶)، ماتریس‌های سختی نقطه ای و بردارهای سمت راست دستگاه معادلات (۱۶.۶) به دست می‌آید.

۳.۶ نتایج عددی

در این بخش، کارایی، دقت و سرعت محاسباتی روش‌های نقاط شکننده ارزیابی می‌شوند. کدهای متلب مربوط به این بخش در متلب ۲۰۲۰ روی لپ تاپ Core i7، ۲/۸۰ گیگاهرتز سرعت پردازنده با ۱۶ گیگابایت حافظه پیاده سازی شده‌اند.

در جداول N و h به ترتیب تعداد نقاط انتخاب شده از دامنه و فاصله بین نقاط را در صورت توزیع یکنواخت نقاط نشان می‌دهد. همچنین مقادیر خطاهای نسبی و نرخ همگرایی از فرمول‌های زیر به دست می‌آید:

$$r_0 = \frac{\|u^h - u\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}, \quad r_1 = \frac{\|\nabla u^h - \nabla u\|_{L^2}}{\|\nabla u\|_{L^2}}, \quad C - order = \frac{\log_{10} \left(\frac{e_1}{e_2} \right)}{\log_{10} \left(\frac{h_1}{h_2} \right)},$$

که خطاهای e_1 و e_2 را همان خطای نسبی r_0 در محاسبات قراردادیم.

۱.۳.۶ مثال. معادله دوهمساز

$$\Delta^2 u = 4 \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

را با شرایط مرزی زیر در نظر می‌گیریم:

$$(a) \begin{cases} \Delta u(\circ, y) = \Delta u(1, y) = \Delta u(x, \circ) = \Delta u(x, 1) = \circ, \\ u(\circ, y) = u(1, y) = u(x, \circ) = u(x, 1) = \circ, \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \nabla(\Delta u(\circ, y)) \cdot n = \frac{2}{\pi} \sin(\pi y), \Delta u(1, y) = \Delta u(x, \circ) = \Delta u(x, 1) = \circ, \\ \nabla(u(\circ, y)) \cdot n = -\frac{1}{\pi} \sin(\pi y), u(1, y) = u(x, \circ) = u(x, 1) = \circ, \end{cases}$$

با استفاده از روش پیشنهادی در این مطالعه، جواب‌های عددی و دقیق معادلات با هم مقایسه خواهد شد که جواب دقیق به صورت زیر است:

$$u = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

و جدول‌های ۱.۶ و ۲.۶ به این منظور ارائه شده‌اند. در جدول اول، نتایج حل این مثال با شرایط مرزی (a) و نقاط دامنه با فاصله یکسان توزیع شده است که همانطور که مشخص است روش نقاط شکننده گالرکین در زمان بسیار کوتاهی از دقت خوبی برخوردار است و جدول نرخ همگرایی خوبی را گزارش می‌کند. جدول ۲.۶ همچنین دقت مناسب روش را با مقادیر خطای نسبی برای نقاط با فاصله‌های نابرابر و شرایط مرزی (b) نشان می‌دهد. همچنین شکل ۱.۶ نمودارهای جواب‌های دقیق و عددی را نشان می‌دهد که مشابه یکدیگر هستند، افزایش تعداد نقاط دقت روش را بهبود می‌بخشد و پایداری روش حفظ می‌شود.

۲.۳.۶ مثال. معادله دوهمساز تعمیم یافته

$$\Delta^2 u + 64 \Delta u + u = f(x, y)$$

که دارای جواب دقیق و $f(x, y)$ به صورت زیر است در نظر می‌گیریم:

$$u(x, y) = 27x(x-1)^2 - 4(2y-1)^2$$

$$f(x, y) = 10368x + 27x(x-1)^2 - 4(2y-1)^2 - 8960$$

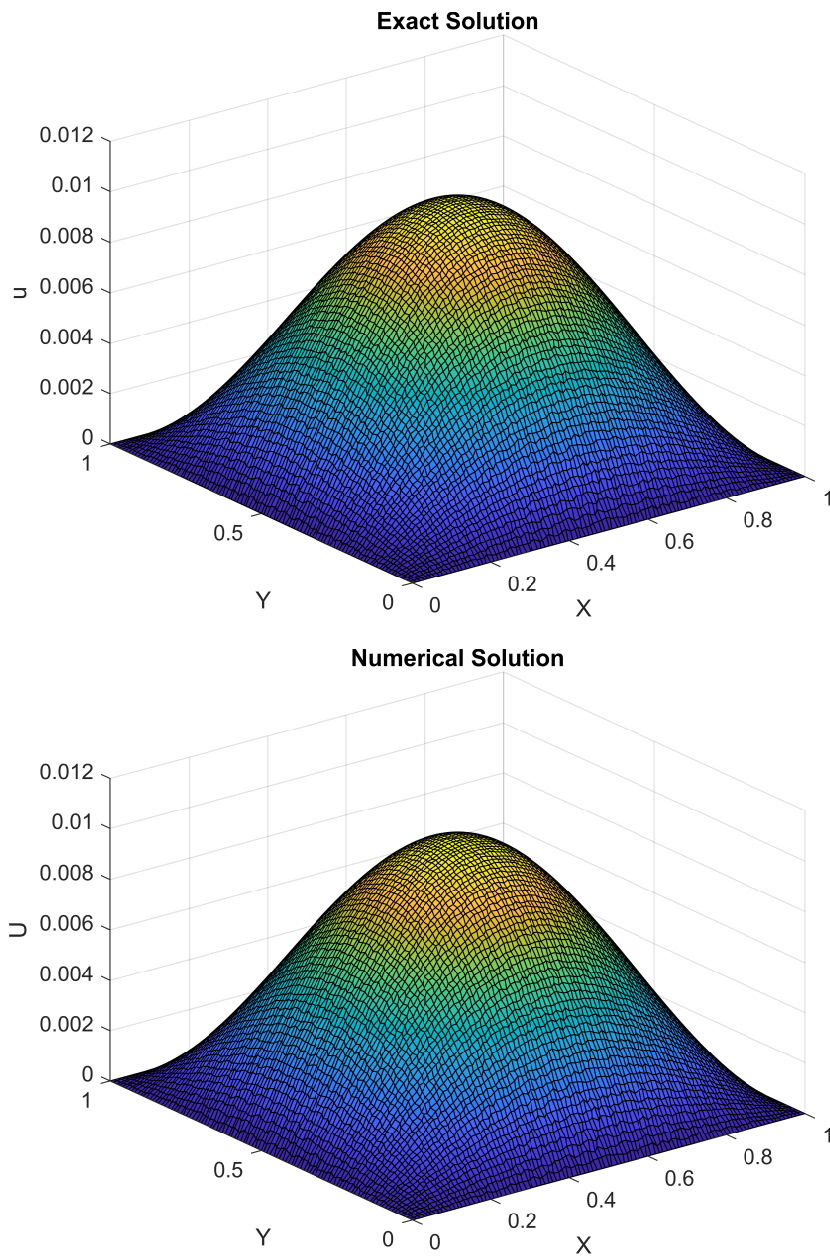
الف) ابتدا دامنه مسئله را $[0, 1] \times [0, 1]$ در نظر گرفتیم و روش‌های بدون شبکه گالرکین و هویساید را برای تعداد نقاط مختلف اعمال کردیم. نتایج در جداول ۳.۶ و ۴.۶ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، در شرایط مشابه، برای تعداد نقاط بالاتر، روش هویساید کمی دقیق‌تر است. در این مثال، ما شرایط مرزی را به صورت نیومانی

جدول ۱.۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۱.۳.۶ (a) با تعداد نقاط یکنواخت مختلف، $h_e = 1$ و $\eta = 0.1$.

h	N	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)	C-order
0.25	25	$\eta = 0.1$ $h_e = 0.25$	$r_0 = 1.638582 \times 10^{-1}$ $r_1 = 3.949793 \times 10^{-1}$	0.0043	-
0.1	121	$\eta = 0.1$ $h_e = 0.1$	$r_0 = 2.974556 \times 10^{-2}$ $r_1 = 4.802823 \times 10^{-2}$	0.0073	1.8622
0.04	676	$\eta = 0.1$ $h_e = 0.04$	$r_0 = 5.084409 \times 10^{-3}$ $r_1 = 8.304141 \times 10^{-3}$	0.054	1.9279
0.02	2601	$\eta = 0.1$ $h_e = 0.02$	$r_0 = 1.294827 \times 10^{-3}$ $r_1 = 2.133566 \times 10^{-3}$	0.53	1.9733
0.01	10201	$\eta = 0.1$ $h_e = 0.01$	$r_0 = 3.264398 \times 10^{-4}$ $r_1 = 5.400128 \times 10^{-4}$	12.74	1.9879

جدول ۲.۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۱.۳.۶ (ب) با تعداد نقاط مختلف غیر یکنواخت.

N	پارامترها	r_0	r_1	CPU time(s)
25	$h_e = 0.36, \eta = 0.7$	1.548369×10^{-1}	4.881160×10^{-1}	0.0031
121	$h_e = 0.17, \eta = 0.45$	3.983948×10^{-2}	1.273845×10^{-1}	0.0093
676	$h_e = 0.076, \eta = 0.4$	7.659591×10^{-3}	4.347997×10^{-2}	0.085
2601	$h_e = 0.039, \eta = 0.5$	2.076365×10^{-3}	2.099395×10^{-2}	0.77
10201	$h_e = 0.019, \eta = 0.4$	5.352207×10^{-4}	1.045156×10^{-2}	15.12



شکل ۱۰۶: شکل‌های جواب‌های عددی روش گالرکین و نتایج دقیق برای مثال ۱۰۳.۶ (ب) با $N = 10201$ نقطه با توزیع غیریکنواخت برای $\eta = 2$ و $h_e = 0.1$.

جدول ۳.۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۲.۳.۶ برای تعداد نقاط مختلف با توزیع یکنواخت.

h	N	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)	C-order
۰/۲۵	۲۵	$\eta = ۱/۷۵$ $h_e = ۰/۲۵$	$r_0 = ۲/۲۱۰۲۳۳ \times ۱۰^{-۱}$ $r_1 = ۶/۶۴۸۱۱۸ \times ۱۰^{-۱}$	۰/۰۰۱۶	-
۰/۱	۱۲۱	$\eta = ۰/۵$ $h_e = ۰/۱$	$r_0 = ۳/۳۷۵۱۰۵ \times ۱۰^{-۲}$ $r_1 = ۱/۱۵۷۷۴۵ \times ۱۰^{-۱}$	۰/۰۰۶۸	۲/۰۸۸۶
۰/۰۴	۶۷۶	$\eta = ۰/۵$ $h_e = ۰/۰۴$	$r_0 = ۶/۶۸۹۰۸۰ \times ۱۰^{-۳}$ $r_1 = ۲/۸۷۸۴۷۴ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۶۹	۱/۷۶۶۹
۰/۰۲	۲۶۰۱	$\eta = ۰/۱$ $h_e = ۰/۰۲$	$r_0 = ۱/۸۱۶۷۵۱ \times ۱۰^{-۳}$ $r_1 = ۹/۴۲۵۳۵۴ \times ۱۰^{-۳}$	۱/۰۷	۱/۸۷۹۷
۰/۰۱	۱۰۲۰۱	$\eta = ۰/۱$ $h_e = ۰/۰۱$	$r_0 = ۴/۶۶۶۳۶۴ \times ۱۰^{-۴}$ $r_1 = ۳/۳۴۰۷۰۱ \times ۱۰^{-۳}$	۴۰/۱۶	۱/۹۶۱۰

قرار داده ایم. شکل ۲.۶ میزان دقت جواب ها را نسبت به تعداد نقاط انتخاب شده نشان می دهد. (ب) در ادامه دامنه مثال به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} : ۰/۵^2 \leq x^2 + y^2 \leq ۱\}.$$

نقاط انتخاب شده از این دامنه و نمودار ورونوی مربوطه در شکل ۳.۶ ارائه شده است. در شرایط مرزی کاملاً دیریکله، جدول ۵.۶ مقادیر خطاهای نسبی هر دو روش را با $N = ۵۷۶$ نقطه از این دامنه نشان می دهد و نشان می دهد که روش هویساید دقیق تر است. همچنین انطباق جواب های عددی و دقیق در شکل ۴.۶ نشان داده شده است.

۳.۳.۶ مثال. در این مثال، ما هر دو روش نقاط شکننده گالرکین و هویساید را برای معادله دوهمساز تعمیم یافته زیر اعمال می کنیم:

$$\Delta^2 u - ۱۲\Delta u - ۷۲u = f(x, y).$$

در این مثال، تمام شرایط مرزی به عنوان نیومانی در نظر گرفته شده است. شرط مرزی و همچنین $f(x, y)$ با استفاده از جواب دقیق که به صورت زیر بدست می آید:

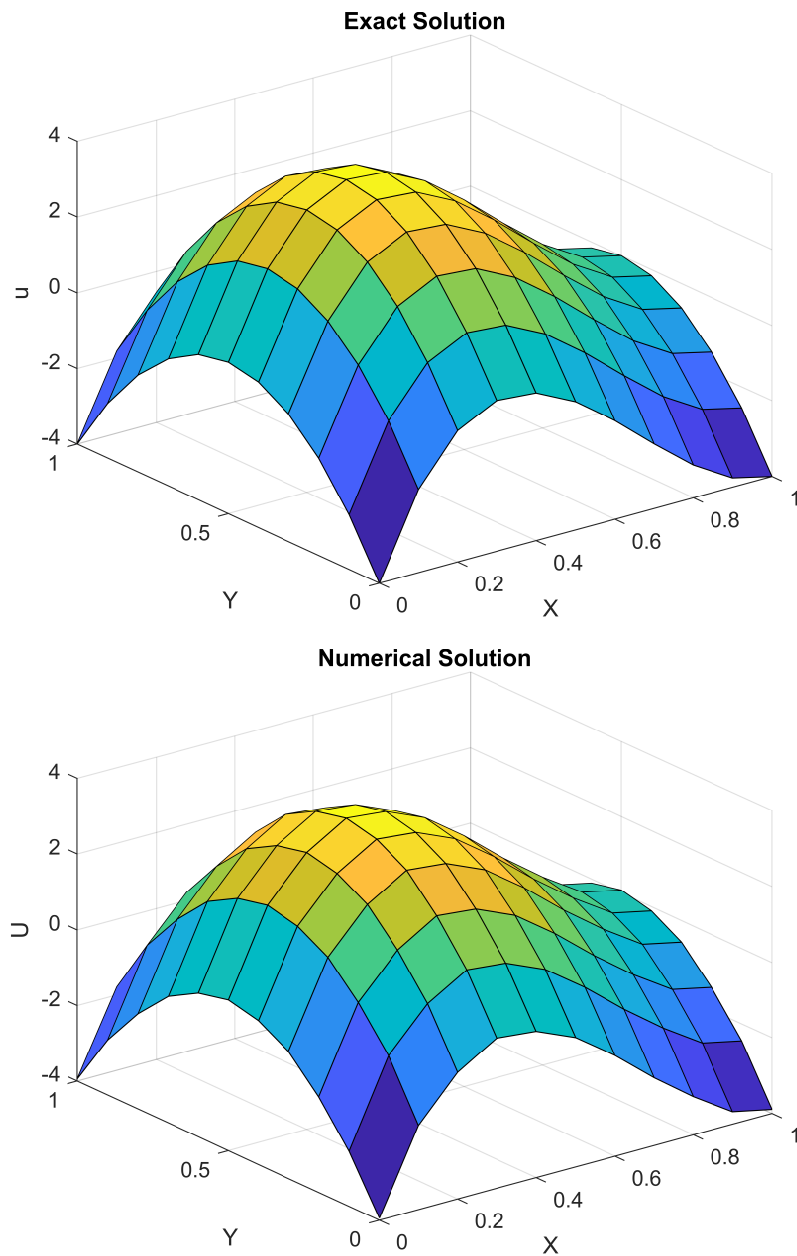
$$u(x, y) = (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2.$$

جدول ۴.۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۲.۳.۶ برای تعداد نقاط مختلف با توزیع یکنواخت.

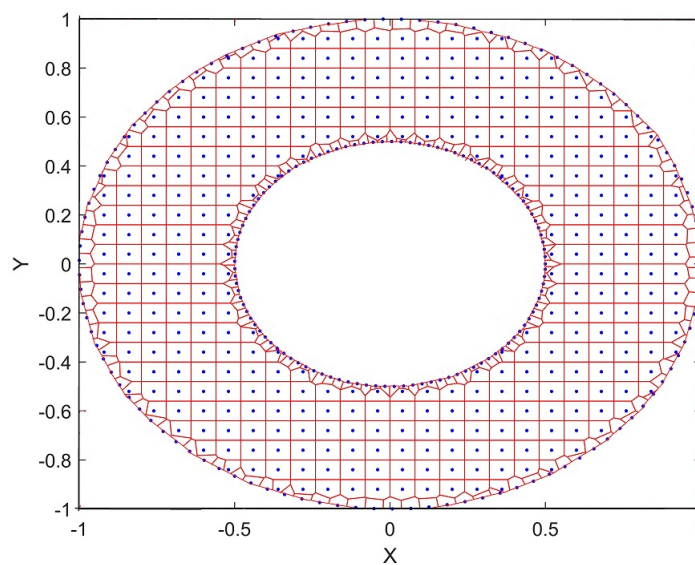
h	N	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)	C-order
۰/۲۵	۲۵	$\eta = ۰/۵۲$ $h_e = ۰/۲۵$	$r_0 = ۲/۳۵۸۹۵۵ \times ۱۰^{-۱}$ $r_1 = ۲/۸۱۱۸۵۹ \times ۱۰^{-۱}$	۰/۰۰۱۵	-
۰/۱	۱۲۱	$\eta = ۰/۵$ $h_e = ۰/۱$	$r_0 = ۴/۹۹۱۵۲۵ \times ۱۰^{-۲}$ $r_1 = ۸/۸۹۸۰۷۶ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۰۶۳	۱/۶۹۴۹
۰/۰۴	۶۷۶	$\eta = ۱/۱$ $h_e = ۰/۰۴$	$r_0 = ۶/۰۹۱۲۳۵ \times ۱۰^{-۳}$ $r_1 = ۲/۸۷۴۹۰۱ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۶۷	۲/۲۹۵۶
۰/۰۲	۲۶۰۱	$\eta = ۰/۸۵$ $h_e = ۰/۰۲$	$r_0 = ۱/۶۱۴۸۱۹ \times ۱۰^{-۳}$ $r_1 = ۸/۸۸۱۱۳۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱/۰۵	۱/۹۱۵۴
۰/۰۱	۱۰۲۰۱	$\eta = ۱$ $h_e = ۰/۰۱$	$r_0 = ۳/۸۵۰۹۳۵ \times ۱۰^{-۴}$ $r_1 = ۳/۳۸۲۲۷۸ \times ۱۰^{-۳}$	۳۷/۱۳	۲/۰۶۸۱

جدول ۵.۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده گالرکین و هویساید برای مثال ۲.۳.۶ (b) به ازای $N = ۵۷۶$ ، $\eta = ۰/۰۱$ و $h_e = ۷$.

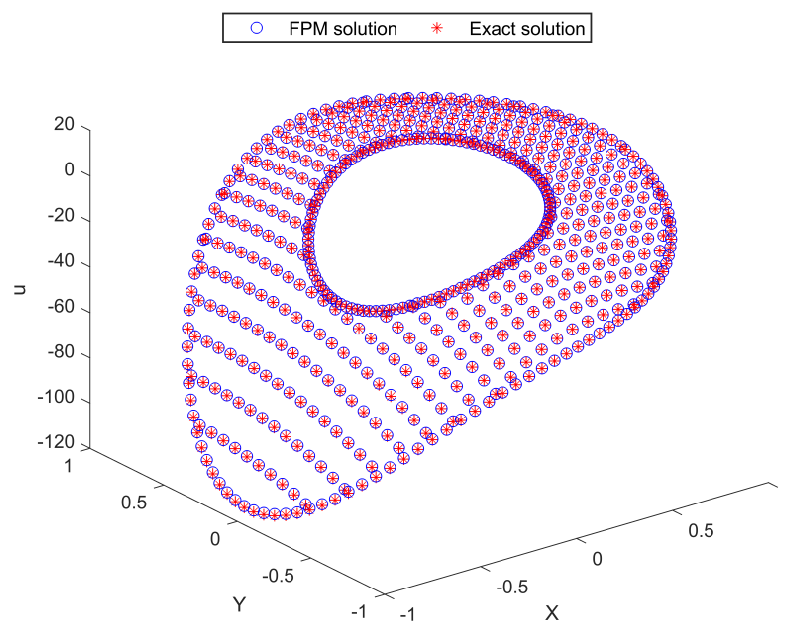
روش	η	r_0	r_1	CPU time(s)
گالرکین	۵۴	$۵/۸۶۳۷۷۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۵۳۸۴۶۰ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۷۳
هویساید	۵۸	$۲/۸۷۳۹۴۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۶۵۲۸۴۳ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۷۲



شکل ۲.۶: شکل‌های جواب‌های دقیق و عددی روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۲.۳.۶ (الف) $N = 121$ نقطه یکنواخت به ازای $\eta = 10$ و $h_e = 1$.



شکل ۳.۶: دامنه مثال ۲.۳.۶ (ب) با $N = 576$ نقطه و نمودار ورونوی مربوط به آن.



شکل ۴.۶: تطابق جواب‌های عددی روش نقاط شکنده گالرکین با جواب‌های دقیق برای مثال ۲.۳.۶ به ازای $N = 576$ ،
 $\eta = 1^\circ$ و $h_e = 7$.

جدول ۶.۶: مقادیر خطای نسبی و مرتبه های همگرایی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۳.۳.۶ و تعداد نقاط مختلف با توزیع یکنواخت.

h	N	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)	C-order
۰/۲۵	۲۵	$\eta = ۰/۱$ $h_e = ۰/۲۵$	$r_0 = ۳/۰۴۰۷۱۶ \times ۱۰^{-۲}$ $r_1 = ۳/۰۹۵۷۶۵ \times ۱۰^{-۱}$	۰/۰۰۲	-
۰/۱	۱۲۱	$\eta = ۰/۱۱$ $h_e = ۰/۱$	$r_0 = ۱/۲۹۹۲۲۳ \times ۱۰^{-۲}$ $r_1 = ۸/۷۲۷۵۳۳ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۱۷	۰/۹۲۸۰
۰/۰۴	۶۷۶	$\eta = ۰/۱$ $h_e = ۰/۰۴$	$r_0 = ۲/۷۹۵۱۱۹ \times ۱۰^{-۳}$ $r_1 = ۲/۲۵۲۶۱۰ \times ۱۰^{-۲}$	۰/۰۰۸	۱/۶۷۶۸
۰/۰۲	۲۶۰۱	$\eta = ۰/۰۲$ $h_e = ۰/۰۲$	$r_0 = ۷/۷۷۳۷۵۲ \times ۱۰^{-۴}$ $r_1 = ۷/۷۲۶۲۱۹ \times ۱۰^{-۳}$	۱/۱۲	۱/۸۴۲۴
۰/۰۱	۱۰۲۰۱	$\eta = ۰/۱$ $h_e = ۰/۰۱$	$r_0 = ۱/۹۷۶۶۵۵ \times ۱۰^{-۴}$ $r_1 = ۲/۸۳۸۴۷۰ \times ۱۰^{-۳}$	۳۹/۶۰	۱/۹۷۵۵

جداول ۶.۶ و ۷.۶ مقادیر خطاهای نسبی و نرخ همگرایی را برای یک دامنه مربعی $[۰, ۱] \times [۰, ۱]$ برای تعداد نقاط مختلف از دامنه با فاصله یکسان ارائه شده اند.

با توجه به این مقادیر، برای تعداد نقاط بیشتر، روش نقاط شکننده هویساید خطاهای عددی کمتری را نشان می دهد. شکل های ۵.۶ و ۶.۶ همچنین به دقت بالای روش نقاط شکننده گالرکین اشاره می کنند.

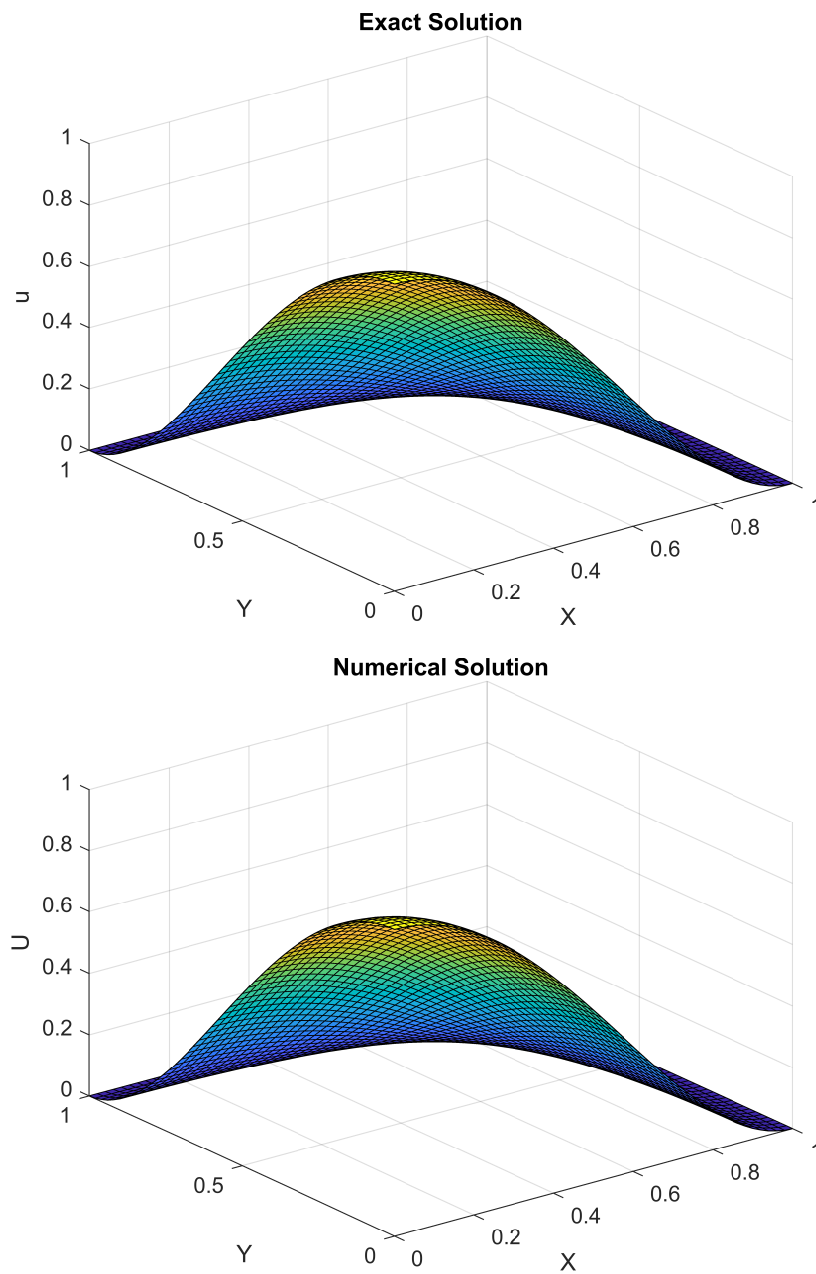
۴.۳.۶ مثال. به عنوان مثال آخر، همان مثال قبلی را در یک دامنه نامنظم همانطور که در شکل ۷.۶ نشان داده شده است با تعداد نقاط مختلف حل می کنیم. همه شرایط مرزی را به صورت دیریکله در نظر گرفته شده است و نتایج روش نقاط شکننده گالرکین را در جدول ۸.۶ نشان داده شده است. شکل ۸.۶ منحنی خطای مربوط به روش نقاط شکننده هویساید را برای $N = ۱۶۰۰$ نشان می دهد که ثابت می کند که روش دقت خوبی دارد. شکل ۹.۶ رابطه بین تعداد نقاط و خطا را در این روش نشان می دهد که با افزایش تعداد نقاط، خطا کاهش می یابد.

جدول ۷.۶: نرخ‌های همگرایی و خطاهای جواب‌های روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۳.۳.۶ برای تعداد نقاط مختلف با توزیع یکنواخت.

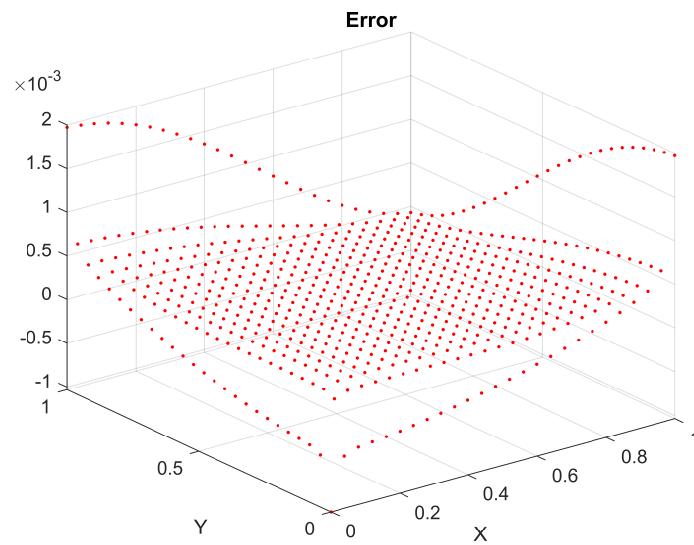
h	N	پارامترها	خطاهای نسبی	CPU time(s)	C-order
۰/۲۵	۲۵	$\eta = 10$	$r_0 = 7.584464 \times 10^{-2}$	۰/۰۰۱۵	-
		$h_e = 0.25$	$r_1 = 3.601166 \times 10^{-1}$		
۰/۱	۱۲۱	$\eta = 25$	$r_0 = 8.358711 \times 10^{-3}$	۰/۰۰۷۵	۲/۴۰۶۹
		$h_e = 2$	$r_1 = 9.919481 \times 10^{-2}$		
۰/۰۴	۶۷۶	$\eta = 70$	$r_0 = 9.029899 \times 10^{-4}$	۰/۰۹۶	۲/۴۲۸۶
		$h_e = 0.04$	$r_1 = 2.697521 \times 10^{-2}$		
۰/۰۲	۲۶۰۱	$\eta = 130$	$r_0 = 2.269002 \times 10^{-4}$	۱/۲۱	۱/۹۹۲۷
		$h_e = 0.02$	$r_1 = 9.230697 \times 10^{-3}$		
۰/۰۱	۱۰۲۰۱	$\eta = 280$	$r_0 = 4.856218 \times 10^{-5}$	۳۸/۵	۲/۲۲۴۲
		$h_e = 0.01$	$r_1 = 3.402286 \times 10^{-3}$		

جدول ۸.۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۴.۳.۶ با تعداد نقاط مختلف.

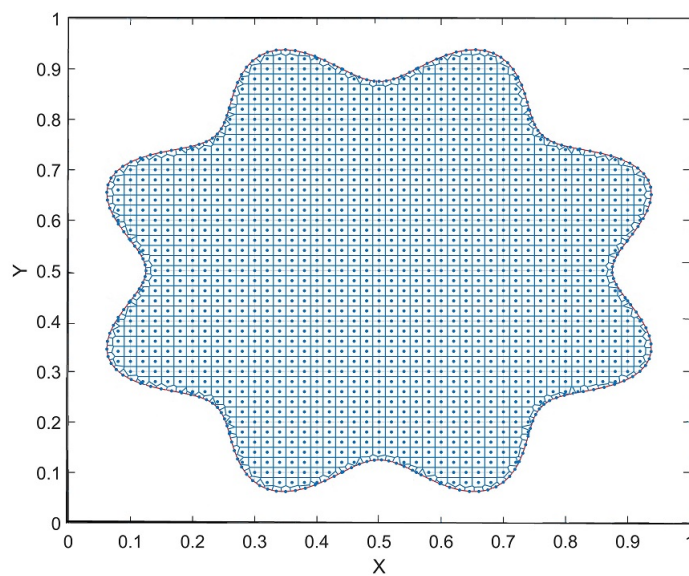
N	پارامترها	r_0	r_1	CPU time(s)
۳۶	$h_e = 0.25, \eta = 22$	4.664196×10^{-2}	2.198427×10^{-1}	۰/۰۰۳
۱۲۱	$h_e = 0.1, \eta = 20$	2.359995×10^{-2}	9.839803×10^{-2}	۰/۰۳۱
۴۰۰	$h_e = 0.04, \eta = 60$	5.072473×10^{-3}	3.908657×10^{-2}	۰/۰۴
۱۶۰۰	$h_e = 0.02, \eta = 90$	1.037447×10^{-3}	1.224069×10^{-2}	۰/۵۸



شکل ۵.۶: شکل‌های دقیق و عددی جواب‌های نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۳.۳.۶ با $N = ۲۶۰۱$ نقطه یکنواخت به ازای $\eta = h_e = ۱$.



شکل ۶.۶: منحنی خطای روش نقاط شکننده گالرکین برای مثال ۳.۳.۶ با $N = ۶۷۶$ نقطه به ازای $\eta = h_e = ۱$.

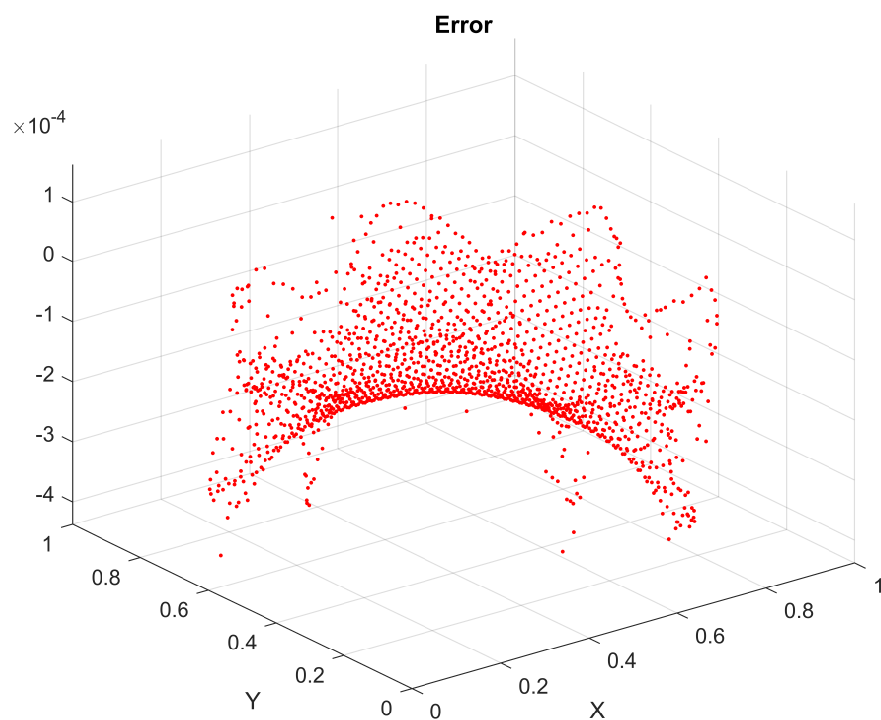


شکل ۷.۶: دامنه مسئله برای مثال ۴.۳.۶ با $N = ۱۶۰۰$ نقطه و نمودار ورونوی مربوط به آن

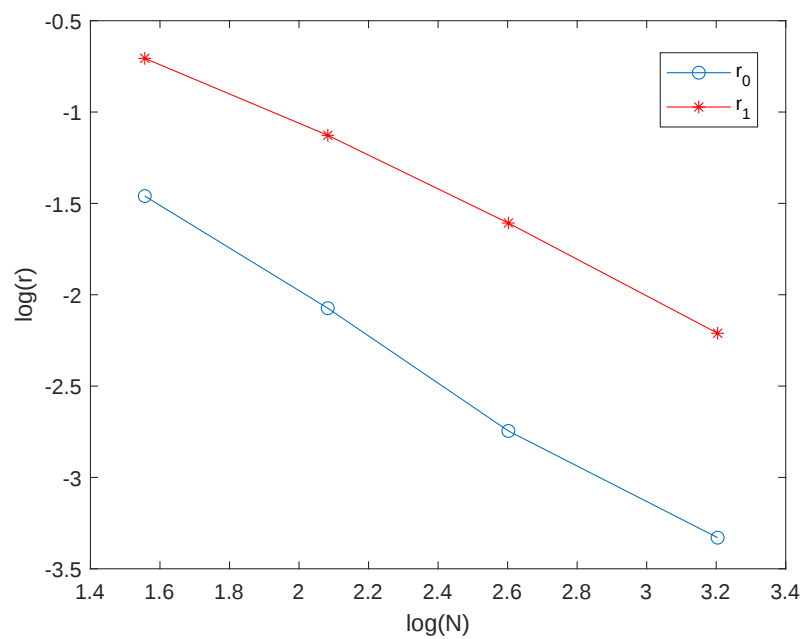
جدول ۹.۶: مقادیر خطای نسبی روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۴.۳.۶ با تعداد نقاط مختلف.

N	پارامترها	r_0	r_1	CPU time(s)
۳۶	$h_e = 0.25, \eta = 30$	3.468503×10^{-2}	1.968026×10^{-1}	۰.۰۰۲۷
۱۲۱	$h_e = 0.1, \eta = 50$	8.437529×10^{-3}	7.458535×10^{-2}	۰.۰۱۱
۴۰۰	$h_e = 0.04, \eta = 85$	1.800541×10^{-3}	2.574259×10^{-2}	۰.۰۴۲
۱۶۰۰	$h_e = 0.02, \eta = 150$	4.680598×10^{-4}	6.153791×10^{-3}	۰.۳۹

بنابراین، با توجه به نتایج عددی و شکل‌های این بخش، نتیجه می‌گیریم که برای معادلات از مرتبه‌های بالاتر نیز روش نقاط شکننده را می‌توان به کار برد. هم‌چنین برای دامنه‌های پیچیده‌تر هم نتایج با دقت مناسبی به دست آمد. از طرفی، این فصل نشان می‌دهد که با تغییر تابع آزمون، می‌توان روش نقاط شکننده را تغییر داده و محاسبات را کاهش دهیم.



شکل ۸.۶: منحنی خطای مربوط به روش نقاط شکننده هویساید برای مثال ۴.۳.۶ با $N = 1600$ نقطه به ازای $\eta = 6/8$ و $h_e = 0.01$.



شکل ۹.۶: رابطه بین خطای نسبی و تعداد نقاط برای مثال ۴.۳.۶ با به کارگیری روش نقاط شکننده هویساید

نتیجه‌گیری و چند پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی

از نتایج فصل‌های این رساله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

(الف) روش برای معادلات هذلولی‌گون دارای دقت و سرعت محاسبات بالایی می‌باشد. همچنین نشان داده شد که روش نسبت به افزایش تعداد نقاط و زمان پایدار است. علاوه بر این، روش برای معادلات غیرخطی نیز قابل اجرا بود و نتایج خوبی را ارائه داد.

(ب) در این روش نقاط به طور نامنظم در دامنه توزیع شده و برای تقسیم دامنه به زیردامنه‌ها از نمودار ورونوی استفاده می‌کند به طوری که هر زیردامنه، تنها شامل یکی از نقاط است. برای به دست آوردن تابع کوششی در هر کدام از زیر دامنه‌ها از نقاط در سلول‌های ورونوی مجاور استفاده می‌شود. از طرف دیگر با استفاده از روش گالرکین فرم ضعیف در روش نقاط شکننده به ماتریس‌های سختی بر پایه نقاط می‌رسیم. بنابراین نسبت به روش‌هایی که بر اساس عناصر می‌باشند، توابع کوششی ساده‌تر و به صورت چندجمله‌ای‌های ساده، محلی و ناپیوسته به دست آمده است. از این رو محاسبات به میزان زیادی کاهش یافته است.

(ج) این روش برای دامنه‌های پیچیده و ناهموار به کار برده شد و نتایج خوبی ارائه داده شد. همچنین در مسائلی که در دامنه آنها ترک و شکستگی وجود داشت نیز به جواب‌های عددی قابل قبولی دست پیدا کردیم.

(د) روش نقاط شکننده برای معادلات با مرتبه‌های بالاتر نیز به کار برده شد. در این حالت، توابع آزمون را نیز تغییر دادیم و نتایج بهتری را به دست آوردیم. همچنین با تغییر تابع آزمون، محاسبات کاهش پیدا کرد.

برای دانشجویانی که به روش‌های عددی به ویژه روش‌های بدون شبکه علاقمند هستند، پیشنهاد می‌شود:

(الف) این روش را برای معادلات با کاربردهای مهندسی، پزشکی و زیستی به کار برده و برای معادلات پیچیده‌تری این روش را به کار گیرند.

(ب) برای معادلات مهم کسری این روش را به کار می‌توان برد.

(ج) بررسی کنید آیا می‌توان روش بدون شبکه نقاط شکننده را برای معادلاتی که در مختصات کروی بیان می‌شوند حل کرد؟

- [1] S. Abbasbandy, H.R. Ghehsarehb, A new semi-analytical solution of the telegraph equation with integral condition, Z. Nat. Forsch. A. J. Phys. Sci. 66(12) (2011) 760-768.
- [2] S. Abbasbandy, H.R. Ghehsareh, I. Hashim, A. Alsaedi, A comparison study of meshfree techniques for solving the two-dimensional linear hyperbolic telegraph equation, Eng. Anal. Bound. Elem. 47 (2014) 10-20.
- [3] S. Abbasbandy, E. Shivanian, K.H. AL-Jizani, S.N. Atluri, Pseudospectral meshless radial point interpolation for generalized biharmonic equation subject to simply supported and clamped boundary conditions, Engineering Analysis with Boundary Elements. 125 (2021) 23-32.
- [4] H. Adibi, J. Es'haghi, Numerical solution for biharmonic equation using multi-level radial basis functions and domain decomposition methods, Applied mathematics and computation. 186(1) (2007) 246-255.
- [5] D. Appelo and T. Hagstrom, A new discontinuous galerkin formulation for wave equations in second-order form, SIAM. J. Numer. Anal. 53(6) (2015) 2705–2726.
- [6] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L.D. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM. J. Numer. Anal. 39(5) (2002) 1749-1779.
- [7] M. Asadzadeh, An introduction to the finite element method (FEM) for differential equations, Chalmers: Lecture notes. (2010).

-
- [8] S.N. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Comput. Mech.* 22(2) (1998) 117-127.
- [9] F. Aurenhammer, Voronoi diagrams a survey of a fundamental geometric data structure, *ACM. Comput. Surv. (CSUR)* 23(3) (1991) 345-405.
- [10] I. Babuska, The finite element method with penalty. *Mathematics of computation*, 27(122), (1973) 221-228.
- [11] J. Banasiak, J.R. Mika, Singularly perturbed telegraph equations with applications in the random walk theory, *Int. J. Stochastic. Anal.* 11(1) (1998) 9-28.
- [12] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, Element free Galerkin methods, *Int. J. Numer. Methods. Eng.* 37(2) (1994) 229-256.
- [13] J. H. Bramble, and Joachim A. Nitsche, A generalized Ritz-least-squares method for Dirichlet problems, *SIAM. J. Numer. Anal.* 10(1) (1973) 81-93.
- [14] J.C. Chai, H.S. Lee, S.V. Patankar, Finite volume method for radiation heat transfer, *J. Thermophys. Heat. Trans.* 8(3) (1994) 419-425.
- [15] S. Chantasiriwan, Solutions to harmonic and biharmonic problems with discontinuous boundary conditions by collocation methods using multiquadrics as basis functions, *International communications in heat and mass transfer*. 34(3) (2007) 313-320.
- [16] B. Cockburn and V. Quenneville-Belair, Uniform-in-time superconvergence of the HDG methods for the acoustic wave equation, *Math. Comput.* 285(83) (2014) 65-85.
- [17] L. C. Cowsat, T. F. Dupont, and M. F. Wheeler, A priori estimates for mixed finite element methods for the wave equation, *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.* 82(1-3) (1990) 205-222.

-
- [18] M. Dehghan, R. Salehi, A method based on meshless approach for the numerical solution of the two space dimensional hyperbolic telegraph equation, *Math. Methods. Appl. Sci.* 35(10) (2012) 1220-1233.
 - [19] M. Dehghan, A. Shokri, A meshless method for numerical solution of a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions, *Numer. Methods. Partial. Differ. Equ.* 25(2) (2009) 494-506.
 - [20] M. Dehghan, A. Ghesmati, Combination of meshless local weak and strong (MLWS) forms to solve the two dimensional hyperbolic telegraph equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 34(4) (2010) 324-336.
 - [21] M., Dehghan, F., Emami-Naeini, The Sinc-collocation and Sinc-Galerkin methods for solving the two-dimensional Schrödinger equation with nonhomogeneous boundary conditions. *Appl. Math. Mode.* 37(22) (2013) 9379-9397.
 - [22] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi, The numerical solution of the two-dimensional sinh-Gordon equation via three meshless methods, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 51 (2015) 220-235.
 - [23] L. Dong, T. Yang, K. Wang, S.N. Atluri, A new Fragile Points Method (FPM) in computational mechanics, based on the concepts of Point Stiffnesses and Numerical Flux Corrections, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 107 (2019) 124-133.
 - [24] G.E. Fasshauer, *Meshfree approximation methods with MATLAB*, World Scientific. 6 (2007).
 - [25] A. L. Fogelson, J. P. Keener, Immersed interface methods for Neumann and related problems in two and three dimensions, *SIAM. J. Sci. Comput.* 22(5) (2000) 1630-1654.
 - [26] M. J. Grote, A. Schneebeli, and D. Schotzau, Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation, *SIAM J. Numer. Anal.* 44(6) (2006) 2408-2431.

-
- [27] Y. Guan, S.N. Atluri, Meshless fragile points methods based on Petrov-Galerkin weak-forms for transient heat conduction problems in complex anisotropic non-homogeneous media, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 122(16) (2021) 4055-4092.
 - [28] Y. Guan, R. Grujicic, X. Wang, L. Dong, S.N. Atluri, A new meshless “fragile points method” and a local variational iteration method for general transient heat conduction in anisotropic nonhomogeneous media. Part II: Validation and discussion, *Numer. Heat. Trans. Part B: Fundamentals* (2020) 1-24.
 - [29] Z. Gao, S. Xie, Fourth-order alternating direction implicit compact finite difference schemes for two-dimensional Schrödinger equations. *Appl. Numer. Math.* 61(4) (2011) 593-614.
 - [30] D.Haghighi, S. Abbasbandy, E. Shivanian, L. Dong, S.N. Atluri, The Fragile Points Method (FPM) to solve two-dimensional hyperbolic telegraph equation using point stiffness matrices, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 134 (2022) 11-21.
 - [31] D.Haghighi, S. Abbasbandy, E. Shivanian, Applying the meshless Fragile Points method to solve the two-dimensional linear Schrodinger equation on arbitrary domains, *Iran. j. numer. anal. optim.* 13(1) (2023) 1-18.
 - [32] R. Hartmann, Numerical analysis of higher order discontinuous Galerkin finite element methods, (2008) 1-107.
 - [33] E. Hesameddini, E. Asadolahifard, A new spectral Galerkin method for solving the two dimensional hyperbolic telegraph equation, *Comput. Math. with Appl.* 72(7) (2016) 1926-1942.
 - [34] P. M. Jordan, A. Puri, Digital signal propagation in dispersive media, *J. Appl. Phys.* 85(3) (1999) 1273-1282.
 - [35] R. Jiwari, S. Pandit, R. C. Mittal, A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions, *Appl. Math. Comput.* 218(13) (2012) 7279-7294.

-
- [36] N. İ. Karabaş, S. Ö. Korkut, G. Tanoglu, I. Aziz, An efficient approach for solving nonlinear multidimensional Schrödinger equations. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 132 (2021) 263-270.
 - [37] M. Lei, C.N. Sam, Y.C. Hon, Generalized Finite Integration Method with Volterra operator for multi-dimensional biharmonic equations, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 111 (2020) 22-31.
 - [38] R. J. LeVeque, Z. L. Li, The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources, *SIAM J. Numer. Anal.* 31(4) (1994) 1019–1044.
 - [39] R.J. LeVeque, Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems, *Society. Ind. Appl. Math.* (2007).
 - [40] M. Levy, Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. 45 *IET*, (2000).
 - [41] J. Li, Application of radial basis meshless methods to direct and inverse biharmonic boundary value problems, *Commun. numer. methods eng.* 21(4) (2005) 169-182.
 - [42] Z. Li, The immersed interface method using a finite element formulation, *Appl. Numer. Math.* 27(3) (1998) 253-267.
 - [43] Z. Li, K. Ito, M.C. Lai, An augmented approach for Stokes equations with a discontinuous viscosity and singular forces, *Comput. Fluids.* 36(3) (2007) 622-635.
 - [44] M. Li, G. Amazzar, A. Naji, C.S. Chen, Solving biharmonic equation using the localized method of approximate particular solutions, *International Journal of Computer Mathematics*, 91(8) (2014) 1790-1801.

-
- [45] C.Y. Lin, M.H. Gu, D.L. Young, The time-marching method of fundamental solutions for multi-dimensional telegraph equations, *CMC: Comput. Mater. Continua* 18 (2010) 43-68.
 - [46] M.B. Liu, G.R. Liu, Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments, *Arch. Comput. Methods. Eng.* 17(1) (2010) 25-76.
 - [47] G.R. Liu, Y.T. Gu, An introduction to meshfree methods and their programming, Springer Science. (2005).
 - [48] Y.C. Liu, C.M. Fan, W. Yeih, C.Y. Ku, C.L. Chu, Numerical solutions of two-dimensional Laplace and biharmonic equations by the localized Trefftz method, *Comput. Math. with Appl.* 88 (2021) 120-134.
 - [49] W. Ma, B. Zhang, H. Ma, A meshless collocation approach with barycentric rational interpolation for two-dimensional hyperbolic telegraph equation, *Appl. Math. Comput.* 279 (2016) 236-248.
 - [50] N. Mai-Duy, T. Tran-Cong, Solving biharmonic problems with scattered-point discretization using indirect radial-basis-function networks, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 30(2) (2006) 77-87.
 - [51] N. Mai-Duy, T. Tran-Cong, R.I. Tanner, A domain-type boundary-integral-equation method for two-dimensional biharmonic Dirichlet problem, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 30(10) (2006) 809-817.
 - [52] R. C. Mittal, R. Bhatia, A numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation by modified B-spline differential quadrature method, *Appl. Math. Comput.* 244 (2014) 976-997.
 - [53] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *Int. J. Numer. Methods. Eng.* 46(1) (1999) 131-150.
 - [54] P.J. Nahin, Oliver Heaviside The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London. (2002).

-
- [55] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S.N. Chiu, Concepts and applications of Voronoi diagrams, John Wiley, Chichester. 2000.
 - [56] D. Rostamy, M. Emamjome, S. Abbasbandy, A meshless technique based on the pseudospectral radial basis functions method for solving the two-dimensional hyperbolic telegraph equation, Eur. Phys. J. Plus. 132(6) (2017) 1-11.
 - [57] G. Roussy, J.A. Pearce, Foundations And Industrial Applications Of Microwaves And Radio Frequency Fields. Physical And Chemical Processes, Proceedings of the 6th International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipments. 1 (1998).
 - [58] T. Segaran, Programming collective intelligence: building smart web 2.0 applications, O'Reilly Media, Inc. (2007).
 - [59] A.P. Selvadurai, Partial differential equations in mechanics 2: the biharmonic equation, Poisson's equation, Springer Science and Business Media. (2) (2000).
 - [60] E. Shivanian, S. Abbasbandy, M.S. Alhuthali, H.H. Alsulami, Local integration of 2-D fractional telegraph equation via moving least squares approximation, Eng. Anal. Bound. Elem. 56 (2015) 98-105.
 - [61] H. S. Shukla, M.Tamsir, V. K. Srivastava, Numerical simulation of two dimensional sine-Gordon solitons using modified cubic B-spline differential quadrature method, AIP Advances, 5(1) (2015) 017121.
 - [62] N. Sukumar, D. L. Chopp, N. Moes, T. Belytschko, Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite element method, Comput. Methods. Appl. Mech. Eng. 190(46-47) (2001) 6183-6200.
 - [63] E. Shivanian, A meshless method based on radial basis and spline interpolation for 2-D and 3-D inhomogeneous biharmonic BVPs, Zeitschrift für Naturforschung A. 70(8) (2015) 673-682.

-
- [64] B.K. Singh, P. Kumar, An algorithm based on a new DQM with modified extended cubic B-splines for numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation, *Alexandria Eng. J.* 57(1) (2018) 175-191.
 - [65] W. A. Strauss, *Partial differential equations: An introduction*. John Wiley and Sons, (2007).
 - [66] M. Subaşı, On the finite differences schemes for the numerical solution of two dimensional Schrödinger equation, *Numer. Meth. for Partial Differential Equations: An Int. J.* 18.6 (2002) 752-758.
 - [67] Z. F. Tian, PX. Yu, High-order compact ADI (HOC-ADI) method for solving unsteady 2D Schrödinger equation. *Comput. Phys. Commun.* 181(5) (2010) 861-868.
 - [68] L.N. Trefethen, *Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations*, SIAM. (1996).
 - [69] M. Uzunca, *Adaptive discontinuous Galerkin methods for non-linear reactive flows*. Birkhauser. (2016).
 - [70] K. Wang, B. Shen, M. Li, L. Dong, S.N. Atluri, A Fragile Points Method, with an interface debonding model, to simulate damage and fracture of U-notched structures, *Int. J. Numer. Methods. Eng.* 123(8) (2022) 1736-1759.
 - [71] V.H. Weston, S. He, Wave splitting of the telegraph equation in R3 and its application to inverse scattering, *Inverse Problems*. 9(6) (1993) 789-812.
 - [72] L.C. Wrobel, *The Boundary Element Method, Volume 1: Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. Vol. 1. John Wiley & Sons. (2002).
 - [73] T. Yang, L. Dong, S.N. Atluri, A simple Galerkin meshless method, the Fragile Points method using point stiffness matrices, for 2D linear elastic problems in complex domains with crack and rupture propagation, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 122(2) (2021) 348-385.

-
- [74] L. W. Zhang, et al. The improved complex variable element-free Galerkin method for two-dimensional Schrödinger equation. *Comput. Math. with Appl.* 68(10) (2014) 1093-1106.
- [75] S.Zhang, S. Chen, A meshless symplectic method for two-dimensional Schrödinger equation with radial basis functions. *Comput. Math. with Appl.* 72(9) (2016) 2143-2150.
- [76] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, J.Z. Zhu, *The finite element method: its basis and fundamentals*, Elsevier. (2005).
- [77] X. Li, J. Zhu, S. Zhang, A meshless method based on boundary integral equations and radial basis functions for biharmonic-type problems. *Applied mathematical modelling.* 35(2) (2011) 737-751.
- [78] X. Li, J. Zhu, A Galerkin boundary node method for biharmonic problems, *Engineering analysis with boundary elements.* 33(6) (2009) 858-865.

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

ا

Numerical Flux corrections

اصلاحات شار عددی

ب

Biharmonic

بای هارمونیک

پ

Stability

پایداری

Jump

پرش

ت

Test function

تابع آزمون

Dirac delta function

تابع دلتای دیراک

Trial function

تابع کوششی

Heaviside step function

تابع گامی هویساید

Compactly-Supported Radial Basis

توابع شعاعی محمل فشرده

Hyperbolic equation

تابع هذلولی‌گون

خ

Absolute error

خطای مطلق

Relative error

خطای نسبی

ر

predictor-corrector method	روش پیشگو اصلاحگر
Differential Quadrature Method	روش مربع سازی دیفرانسیل
Element Free Galerkin (EFG)	روش عناصر آزاد گالرکین
Fragile Points Method (FPM)	روش نقاط شکننده
Finite Element Method (FEM)	روش عناصر محدود
Finite Volume Method (FVM)	روش حجم محدود
Generalized Finite Difference method	روش تفاضلات محدود تعمیم یافته
Meshless method	روش بدون شبکه
Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)	روش بدون شبکه پتروف گالرکین محلی
Moving Least Squares (MLS)	روش حداقل مربعات متحرک
Radial Basis Function (RBF)	روش تابع پایه ای شعاعی
Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)	روش ذرات هموار هیدرودینامیک

س

consistency	سازگاری
-------------	---------

ش

Interior Penalty numerical fluxes	شارهای عددی جریمه داخلی
Robin boundary conditions	شرایط مرزی رابین

ط

Finite Difference schemes	طرح های تفاضلات محدود
---------------------------	-----------------------

ع

Average operator	عملگر میانگین
d'Alembert operator	عملگر دالامبر
Diffusion operator	عملگر انتشار
Laplace operator	عملگر لاپلاس

ف

Sobolev space	فضای سوبولوف
Galerkin weak form	فرم ضعیف گالرکین

Strong form

فرم قوی

م

symmetric

متقارن

Elliptic equation

معادله بیضوی

Average

میانگین

Parabolic equation

معادله سهموی

Partial Differential Equation (PDE)

معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی

Shrodinger equation

معادله شرودینگر

Wave equation

معادله موج

Telegraph equation

معادله تلگراف

ن

Voronoi Diagram

نمودار ورونوی

ه

convergency

همگرایی

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

A

Absolute error

خطای مطلق

Average operator

عملگر میانگین

B

Biharmonic equation

معادله بای هارمونیک

C

Compactly-Supported Radial Basis

توابع شعاعی محمل فشرده

convergency

همگرایی

consistency

سازگاری

D

d'Alembert operator

عملگر دالامبر

Differential Quadrature Method

روش مربع سازی دیفرانسیل

Diffusion operator

عملگر انتشار

Dirac delta function

تابع دلتای دیراک

E

Elliptic equation

معادله بیضوی

Element Free Galerkin (EFG)

روش عناصر آزاد گالرکین

F

Finite Difference scheme	طرح های تفاضلات محدود
Fragile Points Method (FPM)	روش نقاط شکننده
Finite Element Method (FEM)	روش عناصر محدود
Finite Volume Method (FVM)	روش حجم محدود

G

Galerkin weak form	فرم ضعیف گالرکین
Generalized Finite Difference method	روش تفاضلات محدود تعمیم یافته

H

Heaviside step function	تابع گامی هویساید
Hyperbolic equation	تابع هذلولی گون

I

Interior Penalty numerical fluxes	شارهای عددی جریمه داخلی
-----------------------------------	-------------------------

J

Jump operator	عملگر پرش
---------------	-----------

L

Laplace operator	عملگر لاپلاس
------------------	--------------

M

Meshless method	روش بدون شبکه
Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)	روش بدون شبکه پتروف گالرکین محلی
Moving Least Squares (MLS)	روش حداقل مربعات متحرک

N

Numerical Flux corrections	اصلاحات شار عددی
----------------------------	------------------

P

Parabolic equation	معادله سهموی
--------------------	--------------

Partial Differential Equation (PDE)

معادله دیفرانسیل با مشتق جزئی

predictor-corrector method

روش پیشگو اصلاحگر

R

Relative error

خطای نسبی

Robin boundary conditions

شرایط مرزی رابین

Radial Basis Function (RBF)

روش تابع پایه ای شعاعی

S

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

روش ذرات هموار هیدرودینامیک

Sobolev space

فضای سوبولوف

Shrodinger equation

معادله شرودینگر

Stability

پایداری

Strong form

فرم قوی

symmetric

متقارن

T

Telegraph equation

معادله تلگراف

Test function

تابع آزمون

Trial function

تابع کوششی

V

Voronoi Diagram

نمودار ورونوی

W

Wave equation

معادله موج

Abstract

In this thesis, the meshless Fragile Points Method (FPM) is studied for solving partial differential equations (PDE). This method is in the category of meshless methods and is based on Galerkin weak form. To divide the domain of the problem into sub-domains, the Voronoi diagram has been used so that several points are uniformly or non-uniformly distributed in the domain, and these points are surrounded by Voronoi polygons. The Fragile Points Method is used for spatial discretization of partial differential equations. If the investigated equations have time derivatives, finite difference methods are applied to deal with them. In the proposed method, trial functions are obtained as simple, local, discontinuous, and point-based polynomials. In order to obtain these polynomials, the Generalized Finite Difference (GFD) method is used, and the value of the trial function is based on a finite number of fragile points in the neighborhood of each domain point. The test functions can also be put in the form of discontinuous trial polynomials, Dirac delta, and Heaviside step functions. Also, numerical flux corrections are used to solve the inconsistency caused by the discontinuity of trial functions. Considering that the stiffness matrices obtained from the Fragile Points Method are symmetrical and scattered, it will be very useful and practical for large-scale simulations. Because the Voronoi diagram is applied to divide domains into subdomains, this method is accurate in irregular domains with cracks or fractures. In this study, this method's accuracy, efficiency, and stability will be evaluated by solving some partial differential equations with the Fragile Points method.

Keywords: Partial Differential Equation; Fragile Points Method; Meshless Method;

Numerical Flux Corrections; Finite Difference Scheme; Generalized Finite Difference; Voronoi Diagram.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 47H10; Secondary: 54H25, 54E15, 05C20.

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

Faculty of Sciences
Department of Mathematics

**Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics**

Title:
**The Meshless Fragile Points Method
(FPM) for solving partial differential
equations using Point Stiffness Matrices**

Author:
Donya Haghighi

Supervisor:
Dr. Saeid Abbasbandy

Advisor:
Dr. Elyas Shivanian

June 2023