

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه پیام‌نور

مرکز تحصیلات تکمیلی

رساله دکتری تخصصی رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

گرایش: ریاضی کاربردی

عنوان:

حل عددی معادله دیفرانسیل-جبری جزئی در کنترل تئوری با روش‌های
فاقد شبکه

استاد راهنما:

دکتر سعید عباس‌بندی

و
دکتر فهیمه سلطانیان

نگارنده:

اعظم نورافکن زنجانی

تیر ماه ۱۴۰۱

تاریخ: ۱۴۰۲/۰۶
شماره: ۷۲۳/۱۲۲۶۳
پیوست: ۱



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

صور تجلسه دفاع از رساله دکتری تخصصی (Ph.D.)

جلسه دفاع از رساله دوره دکتری تخصصی خانم/آقای اعظم نورافکن زنجانی دانشجوی رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۵۰۱۰۹۷۶۵ تحت عنوان «حل عددی معادلات دیفرانسیل جبری- جزئی در نظریه کنترل با روشهای فاقد شبکه» با حضور هیأت داوران در روز دوشنبه مورخ ۱۴۰۱/۰۴/۲۰ ساعت ۱۱ صبح در محل ساختمان مرکز تحصیلات تکمیلی برگزار و هیأت داوران پس از بررسی، رساله مذکور را به شرح زیر ارزیابی نمودند.

نمره نهایی	نمره دفاع	
۱۸,۵۰	۱۸.۵	به عدد
همه و نجاه صد	هجده و نیم	به حروف
خیلی خوب		

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه / مؤسسه	امضاء
۱	دکتر سعید عباس بندی	راهنما	استاد	بین المللی امام خمینی (ره)	
۲	دکتر فهیمه سلطانیان	راهنما دوم	استادیار	پیام نور	
۳	دکتر یوسف ادیسی	داور داخلی	استادیار	پیام نور	
۵	دکتر سهرابعلی یوسفی	داور خارجی	استاد	شهید بهشتی	
۶	دکتر حسین خبری	داور خارجی			
۷	نماینده محترم مرکز تحصیلات تکمیلی				

نمره نامبرده براساس بخشنامه ها و دستورالعمل های مربوط به دستاوردهای پژوهشی مستخرج محاسبه و در تاریخ ۱۴۰۲/۰۶/۰۶ نهایی شده است.

مهر و امضای رئیس مرکز

نام و امضای کارشناس پژوهشی مرکز



تهران، خیابان دیباجی شمالی
خیابان شهید حاج محمود نوریان
کوچه شهناز، کوچه صفا
تلفن: ۰۲۱)۲۲۲۹۵۷۴۷
دورنگار: ۰۲۱)۲۲۸۰۸۴۹۴
پست الکترونیک:
info@phd.pnu.ac.ir
نشانی الکترونیک:
WWW.phd.pnu.ac.ir

تأییدیه صحت و اصالت نتایج

باسمه تعالی

اینجانب اعظم نورافکن زنجان دانش‌آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۱۴۰۱/۰۴/۲۰ از رساله خود تحت عنوان حل عددی معادله دیفرانسیل-جبری جزئی در کنترل تئوری با روش‌های فاقد شبکه با کسب نمره ۱۸.۵ دفاع نموده‌ام، بدینوسیله متعهد می‌شوم:

(۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوط ذکر و درج کرده‌ام.

(۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

(۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره‌برداری اعم از چاپ مقاله، کتاب، ثبت اختراع و از این رساله را داشته باشم، با ذکر نام استادان راهنما و مشاور و درج نام دانشگاه پیام‌نور اقدام خواهم کرد.

(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب حقوقی ناشی از آن را می‌پذیرم و همچنین دانشگاه پیام‌نور مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار کند و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.



نام و نام خانوادگی: اعظم نورافکن زنجان

تاریخ و امضاء: ۱۴۰۱/۰۴/۲۰

سپاسگزاری

خداوند متعال را سپاس می گویم که بار دیگر توفیق کسب علم را به این حقیر عطا فرمود و سپاسگزار زحمات بی دریغ اساتید گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر سعید عباسبندی و خانم دکتر فیه سلطانیان می باشم که بارها بنی های ارزشمندشان یار و یارم اینجانب در طول دوران تحصیل در مقطع دکتری و تمامی مراحل نگارش و تدوین رساله بودند. از اینکه افتخار داشتم تا برای انجام این پژوهش از نهایت مساعدت صمیمانه شما بهره مند باشم بر خود می بالم. همچنین زحمات اساتید گرامی جناب آقای دکتر حسین خیری و جناب آقای دکتر سهراب علی یوسفی به عنوان داورهای خارجی و جناب آقای دکتر یوسف ادیسی به عنوان داور داخلی که با دقت بسیار به مطالعه رساله پرداختند و با ارائه نظرات ارزنده بسیار محبت کردند را متواضعانه ارج می نم. از همه اساتید بزرگوار و دوستان و همکارانی که عزیزم که در دوره تحصیل یار و یارم من بودند کمال تشکر را دارم. به پاس همه محبت ها و حمایت های بی دریغ پدر و مادرم ادای احترام می کنم و بر دوستان بوسه میزنم. پس یکران تقدیم خواهران و برادران مهربانم که همواره همراه و همدل من بودند. از دخترانم که بواسطه تحصیل مجبور بودم روزهای زیادی در کنارش نباشم بسیار سپاسگزارم و عاقبتاً صورت زیبایش را می بوسم.

اعظم نورافکن زنجانی
تیر ۱۴۰۱

تقدیم بہ

پدر و مادر مں، کہ دریای بیکران فداکاری و عشق برایم بوده اند،

برادران و خواهرانم، کہ ہمراہن، ہمیشگی و پشتوانہ زندگی ام بوده اند،

دختر نازنینم سامیا، تنها کنج من و امید زندگی ام.

فهرست مطالب

۱	چکیده
۲	پیش‌گفتار
۷	۱ تعاریف اولیه و معرفی روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین
۷	۱.۱ تعاریف اولیه
۷	۱.۱.۱ فضای سوبولوف
۸	۲.۱.۱ منیفلد n -بعدی
۹	۳.۱.۱ انواع شرایط مرزی
۱۱	۲.۱ فرم ضعیف عمومی (GWF) و روش باقیمانده وزن‌دار (WRM)
۱۱	۳.۱ روش باقیمانده وزن‌دار و اولین فرم ضعیف نامتقارن عمومی برای معادله دیفرانسیل
۱۲	جزئی مرتبه دوم
۱۳	۴.۱ فرمول‌بندی ضعیف محلی
۱۳	۱.۴.۱ اولین فرمول‌بندی ضعیف نامتقارن محلی ($LUSWF1$)
۱۴	۲.۴.۱ فرمول‌بندی ضعیف متقارن محلی ($LSWF1$)
۱۴	۳.۴.۱ دومین فرمول‌بندی ضعیف نامتقارن محلی ($LUSWF2$)
۱۵	۵.۱ درونیایی بدون شبکه
۱۸	۶.۱ توابع پایه‌ای شعاعی
۱۸	۱.۶.۱ توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید
۲۰	۲.۶.۱ توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده
۲۳	۲ معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی
۲۳	۱.۲ انواع معادلات دیفرانسیل-جبری
۲۳	۱.۱.۲ معادله دیفرانسیل-جبری نیمه صریح
۲۴	۲.۱.۲ معادله دیفرانسیل-جبری هسنبرگ اندازه ۲ و ۳
۲۵	۳.۱.۲ معادله دیفرانسیل-جبری بقا
۲۵	۲.۲ اندیس معادلات دیفرانسیل-جبری
۲۶	۱.۲.۲ اندیس دیفرانسیلی یا اندیس سراسری ν_d
۲۶	۲.۲.۲ اندیس اغتشاشی ν_p
۲۷	۳.۲ معادله دیفرانسیل-جبری جزئی
۲۷	۴.۲ معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی خطی
۲۹	۵.۲ اندیس معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی

۳۰	تبدیل لاپلاس و اندیس مکانی	۱.۵.۲
۳۲	تبدیل فوریه و اندیس زمانی	۲.۵.۲
۳۷	اندیس اغتشاشی	۳.۵.۲
۳۸	رابطه اندیس اغتشاشی و اندیس‌های زمانی و مکانی	۴.۵.۲
۳۹	کاربرد معادله دیفرانسیل-جبری جزئی در نظریه کنترل	۶.۲
۳۹	سیاست‌های بازسازی زیستی و زنجیره تغذیه‌ای (غذایی)	۱.۶.۲
۳۹	مدل انباشتگی خوراک آب	۲.۶.۲
۴۴	۳ حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی با روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین	
۴۴	معادله دیفرانسیل-جبری جزئی	۱.۳
۴۵	توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده	۲.۳
۴۷	انتخاب نقاط پراکنده	۱.۲.۳
۴۹	روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی	۳.۳
۴۹	روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین	۱.۳.۳
۴۹	فرمول‌بندی فرم ضعیف محلی	۲.۳.۳
۵۱	گسسته‌سازی دامنه	۳.۳.۳
۵۲	تولید معادله‌ها	۴.۳.۳
۵۳	روش‌های انتگرال‌گیری روی دیسک	۴.۳
۵۴	روش انتگرالی گاوس	۱.۴.۳
۵۵	روش گاوس لژاندر و نقطه میانی	۲.۴.۳
۵۶	MLPG۵	۵.۳
۵۷	تحلیل پایداری	۱.۵.۳
۶۱	مثال‌های عددی	۲.۵.۳
۷۲	نتیجه‌گیری	
۷۳	مراجع	
۷۸	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۸۲	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

چکیده

در این رساله، کاربرد روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی بررسی شده است. در روش پیشنهادی، دامنه اصلی را به زیردامنه‌های محلی به شکل دایره تجزیه می‌کنیم که مراکز دایره‌ها به کمک نقاط کوادراتور گوسی تعیین می‌گردند. علاوه بر این، شعاع دایره‌ها با توجه به تعداد زیردامنه‌های انتخابی عدد ثابتی در نظر گرفته می‌شوند. روش حل به گونه‌ای است که برای زیردامنه‌ها فرم ضعیف محلی را به دست می‌آوریم. در ادامه روند حل مسئله، ما از تقریب توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده به عنوان تابع آزمایش (تابع درونیاب) و از تابع پله‌ای هویساید به عنوان تابع تست (تابع وزن) استفاده می‌کنیم. همچنین، آنالیز خطا و پایداری روش ارائه شده که در تحقیقات دهه‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است را برای روش پیشنهادی مورد بررسی قرار داده‌ایم. برنامه این روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی با استفاده از نرم‌افزار متلب نوشته شده است که اجرای آن برای دو مثال ارائه شده با موفقیت همراه بوده است. در واقع، برای نشان دادن دقت و کارایی نتایج حاصل از روش پیشنهادی، نتایج عددی این مثال‌ها همراه با مقایسه آن با روش‌های قدیمی در جداول و نمودارها ارائه گردیده است.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل-جبری، معادله دیفرانسیل-جبری جزئی، روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین، توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده.

پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل (معمولی یک بعدی - جزئی دو بعدی یا سه بعدی) با شرایط مرزی اغلب تقریب‌های بسیار خوبی برای مشخصه‌های فرآیندهای فیزیکی در علوم مهندسی می‌باشند. در فرآیندهای فیزیکی که در طی زمان رخ می‌دهند، مشتقات نسبت به زمان و شرایط اولیه مقتضی نیز ممکن است به شکل معادلات دیفرانسیل ظاهر شوند. معمولاً جواب ریاضی دقیق برای مسئله‌هایی که در دامنه‌های با شکل هندسی ساده تعریف می‌شوند و عمدتاً برای مسائل خطی می‌باشند به راحتی به دست می‌آیند در حالی که اغلب فرآیندهای مهندسی در دامنه‌های هندسی پیچیده رخ می‌دهند و اکثر اوقات شامل معادلات غیرخطی می‌باشد. حل چنین مسائلی در عمل برای کمک به تحلیل‌های مهندسی، طراحی، مدل‌بندی و تکنیک‌های شبیه‌سازی کامپیوتری ضروری هستند. در واقع، هدف محققان استفاده از قدرت کامپیوترهای دیجیتال مدرن با توان محاسباتی بالا، تکنیک‌های تصویرسازی، واقعیت مجازی و همراهی تکنولوژی اطلاعات برای رسیدن به یک شبیه‌سازی نزدیک واقعیت از پدیده‌های مهندسی است.

محاسبات مهندسی توسعه بسیار زیادی در چند دهه اخیر داشته است. در بین آنها روش‌های عناصر متناهی و روش عناصر مرزی موفق بوده‌اند. اگر چه روش عناصر متناهی پایه نظری مستدلی دارد اما دارای ضعف‌هایی است که عبارتند از

- قفل کردن،
- شبکه‌بندی طولانی و خسته‌کننده،
- شبکه‌بندی مجدد در مشکلات،
- انتشار ترک،
- تغییر شکل بزرگ،
-

به دلیل مشکلاتی که در بالا ذکر شد، روش‌های بدون شبکه در حل مسائل مرزی در سه دهه اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. در واقع، این روش‌ها به عنوان جایگزینی جهت حذف مشکلات معروف در روش‌های عناصر متناهی و عناصر مرزی توجه زیادی را به خود جلب کردند. با توجه به انعطاف‌پذیری و قابلیت حذف تلاش‌های انسانی برای ایجاد شبکه‌های هندسی و شبکه‌بندی مجدد، در مسائلی که مرزهای آن در حال تغییر است یا ناپیوستگی دارند، بسیار سودمند واقع شده‌اند.

هدف اصلی روش‌های فاقد شبکه رها شدن از سختی شبکه‌بندی ساختار کلی و یا حداقل کاهش آن به وسیله تنها اضافه کردن یا حذف کردن گره‌هایی در ساختار کلی است. این ایده از روش‌های فاقد شبکه

به روش ذرات هیدرودینامیکی (SPH) برمی‌گردد. روش ذرات هیدرودینامیکی یک روش لاگرانژی^۱ فاقد شبکه است که اولین بار برای حل دینامیک گاز در آستروفیزیک توسط گینگولد^۲ و موناگان^۳ [۲۶] در سال ۱۹۷۷ ارائه شد. بعد از چاپ روش عناصر پراکنده توسط نایرولز^۴ و همکارانش [۴۳]، تحقیق روی روش‌های بدون شبکه بسیار فعال گردید. روش‌های فاقد شبکه مختلفی وجود دارند که عبارتند از

- روش عناصر آزاد گالرکین (EFG).
- روش بازتولید ذرات هسته ($RKMP$).
- روش افراز واحد عناصر متناهی ($PUFME$).
- روش اچ-پی ابری (HPC).
- روش عناصر طبیعی (NEM).
- روش فاقد شبکه گالرکین با توابع پایه‌ای شعاعی (RBF).

تفاوت‌های اساسی روش‌های فاقد شبکه ذکر شده در شیوه درونیایی تابع آزمایش است. اگرچه هیچ شبکه‌بندی‌ای در این روش‌ها برای تابع آزمایش برای متغیرهای جواب مورد نیاز نیست اما استفاده از شبکه زمینه برای انتگرال‌گیری در فرم‌های ضعیف اجتناب‌ناپذیر است و لذا روش‌های ذکر شده واقعا بدون شبکه نیستند. در سال ۱۹۹۸، روش‌های بدون شبکه محلی معادلات انتگرال مرزی ($LBIE$) و بدون شبکه محلی پترو-گالرکین^۵ ($MLPG$) توسط آتلوری^۶ و همکارانش [۱۲، ۱۱] برای حل مسائل مرزی خطی و غیرخطی ارائه شدند که واقعا بدون شبکه هستند. به طوری که هیچ شبکه‌ای در مرز یا دامنه به منظور درونیایی توابع آزمایش و تست برای متغیرهای جواب و یا برای انتگرال‌گیری فرم ضعیف مورد نیاز نیست و همه انتگرال‌های مرتبط به سادگی محاسبه می‌شوند.

در حالت کلی، برای یک معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم، سه فرم ضعیف عمومی وجود دارد؛ برای یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم، پنج فرم ضعیف عمومی وجود دارد و به همین ترتیب $(m+1)$ فرم ضعیف عمومی برای هر معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه m وجود دارد که تنها یکی از فرم‌ها متقارن و بقیه فرم‌ها نامتقارن می‌باشند. در فرم ضعیف متقارن، تابع آزمایش و تابع تست باید هر دو از یک مرتبه مشتق‌پذیر باشند اما در فرم ضعیف نامتقارن، تابع آزمایش و تابع تست از یک مرتبه مشتق‌پذیر نیستند. در روش‌های هم‌محلی، کمترین مربعات و ... از اولین فرم ضعیف غیرمتقارن سراسری و در روش‌های عناصر مرزی و جواب مرزی از دومین فرم ضعیف سراسری غیرمتقارن استفاده می‌شود.

در روش‌های فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین، فرم‌های ضعیف موضعی اساس کار می‌باشند. بر پایه فرم‌های ضعیف موضعی روی زیردامنه‌های کوچک در کل دامنه و یا روی مرزها، گونه‌های مختلفی از $MLPG/BLIE$ فرمول‌بندی شده‌اند که تفاوت آنها در روش‌های درونیایی توابع آزمایش و تست و روش‌های انتگرال‌گیری است [۷، ۲۸، ۳۶].

^۱ Lagrange

^۲ Gingold

^۳ Monaghan

^۴ Nayroles

^۵ Petrov-Galerkin

^۶ Atluri

برای حل مسائل مرزی متعدد، روش‌های فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین به کمک انتخاب‌های زیر ساخته می‌شوند:

الف: یک دسته از درونیاب‌های فاقد شبکه برای تابع آزمایش بروی صفحه،

ب: یک دسته از توابع تست بروی صفحه‌های زیرمرزی موضعی،

ج: انتخاب روش‌های انتگرال‌گیری مختلف.

گزینه‌های انتخاب برای درونیاب فاقد شبکه برای تابع به روی صفحه از دامنه سه بعدی عبارتند از:

- کمترین مربعات متحرک،

- توابع پایه‌ای شعاعی،

- افراز واحد،

- تابع شیرد^۷،

- و

همچنین، گزینه‌های زیادی برای انتخاب تابع تست روی هر صفحه زیرمرزی وجود دارند از جمله

- تابع دلتای دیراک^۸،

- کمترین مربعات متحرک،

- و

علاوه بر این، روش‌های انتگرال‌گیری می‌توانند بر پایه

- نقاط هم‌محلی،

- نقاط هالتون^۹،

- نقاط چپیشف^{۱۰}،

- و

باشند که در نهایت به یک روش فاقد شبکه واقعی منتهی می‌شوند.

البته تنوع روش‌های $MPLG/BLIE$ به روش‌های ارائه شده توسط آتلوری محدود نیست و کارهای دیگری نیز انجام شده است اما به طور خلاصه روش‌های $MPLG$ بر مبنای فرمول‌بندی ضعیف موضعی می‌توانند شامل همه روش‌های فاقد شبکه دیگر که بر پایه فرمول‌بندی سراسری هستند باشند.

^۷Shepard

^۸Direct

^۹Halton

^{۱۰}Chbichef

یک معادله دیفرانسیل-جبری (DAE) به فرم زیر است:

$$f(u', u, t) = 0$$

که در آن مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial u'}$ به ازای تمام مقادیر، منفرد است و $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، که Ω یک مجموعه باز همبند است. سیستم‌های فیزیکی زیادی در ابتدا توسط معادلات دیفرانسیل-جبری مدل‌سازی می‌شوند. مهم‌ترین زمینه‌هایی که معادلات دیفرانسیل-جبری ظاهر می‌شوند عبارت است از مسائل تغییراتی، مسائل کنترل مسیر مقید، در مهندسی مکانیک مانند رباتیک، مدل‌سازی مدارهای الکتریکی و گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی توسط روش خطوط یا روش شبکه متحرک. مسائل زیادی در دنیای واقعی در ابتدا به صورت $f(u', u, t) = 0$ مدل‌سازی می‌شوند. بعضی مسائل با دست‌کاری در معادلات حاضر در دستگاه (مانند تقلیل متغیرها)، ممکن است به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شوند. با این حال دسته زیادی از مسائل هستند که چنین تقلیل برای آنها ممکن نیست. مثال‌های مربوط در منابع [۴۴، ۴۰، ۳۸] آورده شده‌اند. چنین مسائلی باید به شکل معادلات دیفرانسیل-جبری حل شوند. علاوه بر این، حتی اگر مساله اصلی به ظاهر در شکل معادله دیفرانسیل-جبری نباشد ممکن است در نهایت به فرم معادله دیفرانسیل-جبری در آید. از نظر تاریخی، اولین روش‌ها برای حل معادله دیفرانسیل-جبری تقلیل آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی بودند که نیاز به تغییرات طاقت فرسا داشتند و سپس معادلات دیفرانسیل معمولی به دست آمده توسط روش‌های عددی حل می‌شدند. در ادامه روش‌های مستقیم برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری ابداع شدند. بنابراین، لازم بود که حل‌پذیری معادلات دیفرانسیل-جبری فرمول‌بندی شده و با جزئیاتی تحلیل شوند. این مفهوم اساساً بر پایه آن است که معادلات دیفرانسیل-جبری روی زیرمنیفولدهای $\mathbb{R}^n$ تعریف می‌شوند. این جواب‌ها باید یک منیفولد از منحنی‌های انتگرال تشکیل دهند که منیفولد جواب است.

با توجه به توضیحات بالا، ساختار این رساله به شرح زیر می‌باشد.

در فصل اول، ابتدا برخی از تعاریف پایه‌ای که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را ارائه می‌کنیم. سپس مفاهیم روش فاقد شبکه پتروگالرکین از قبیل فرم ضعیف عمومی، روش باقیمانده وزن‌دار، فرمول‌بندی ضعیف محلی اعم از اولین و دومین فرم ضعیف نامتقارن و فرم ضعیف متقارن، درونیابی بدون شبکه از تابع آزمایش و تابع تست، توابع پایه‌ای شعاعی و توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده ارائه شده‌اند. در بخش توابع پایه‌ای شعاعی ابتدا به نحوه استفاده از یکی از انواع اصلی توابع پایه‌ای شعاعی یعنی نوع معین اکید مثبت می‌پردازیم. علیرغم این حقیقت که مسئله باز تولید توسط توابع پایه‌ای شعاعی همواره خوش وضع است مشکل اصلی چنین روش‌هایی در نیاز آنها به محاسبات بسیار زیاد به دلیل محمل کلی اغلب توابع شعاعی است. به این دلیل روشی را که باعث کاهش در میزان محاسبات می‌شوند را معرفی می‌کنیم و جزئیات مربوط به یکی از حالت‌های ویژه به نام توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، به عنوان مقدمه‌ای برای معرفی معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی به معرفی و بیان حالت‌هایی از معادلات دیفرانسیل معمولی پرداخته‌ایم و به عنوان مهم‌ترین مشخصه یک معادله دیفرانسیل-جبری انواع اندیس‌های آنها را بیان کرده‌ایم؛ سپس معادله دیفرانسیل-جبری جزئی را معرفی کرده و به ارائه تعریف از مدل یک معادله دیفرانسیل جبری پرداخته‌ایم. در آخر انواع مختلف از اندیس‌های یک معادله دیفرانسیل-جبری جزئی را تشریح کردیم.

در فصل سوم، روش فاقد شبکه محلی پتروگالرکین را برای معادله دیفرانسیل-جبری جزئی خطی به کار می‌بریم. همچنین، آنالیز همگرایی و پایداری روش پیشنهادی در این فصل مورد بررسی قرار گرفته است. در

انتها نیز با ارائه مثال‌های عددی و مقایسه آن با روش‌های دیگر کارایی روش را بررسی کردیم. الگوریتم‌ها توسط نرم‌افزار متلب پیاده‌سازی شده و نتایج عددی حاصل در جداول و نمودارها نشان داده شده‌اند. از این رساله، مقاله زیر استخراج شده است:

Azam Noorafkan Zanjani, Saeid Abbasbandy, Fahimeh Soltanian, Solving Partial-Differential Algebraic Equations with Fifth-Order Meshless Petrov-Galerkin Method by CS-RBFS Interpolation, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, In press.

فصل ۱

تعاریف اولیه و معرفی روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین

در این فصل ابتدا برخی از تعاریف پایه‌ای که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند را می‌آوریم. سپس در راستای بیان مفاهیم مورد نیاز در روش‌های فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین، گسسته‌سازی دامنه و معادلات انتگرال مرزی، بحث روی تنوع استراتژی‌های مدل‌بندی به کمک فرم‌های ضعیف سراسری را بیان می‌کنیم. در ادامه، بعد از معرفی روش باقیمانده وزن‌دار جهت کم کردن خطا، فرمول‌بندی‌های ضعیف محلی را معرفی می‌کنیم. سپس با معرفی به طور مختصر درونیاب‌های فاقد شبکه، به بررسی درونیابی که در این روش به کار می‌رود می‌پردازیم که در آن توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده می‌باشند.

۱.۱ تعاریف اولیه

۱.۱.۱ فضای سوبولوف

تعریف ۱.۱.۱. [۴۵] فضای برداری مختلط H را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم هرگاه به هر جفت مرتب از بردارهای x و y در H عددی مختلط مانند $\langle x, y \rangle$ به نام حاصل ضرب داخلی چنان مربوط شود که روابط زیر برقرار باشند:

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} -$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle -$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ آنگاه } x, y, z \in H -$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0, x \in H \text{ به ازای هر } -$$

$$\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle, \text{ اگر } x, y \in H \text{ و } a \text{ اسکالر باشد،} -$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0 -$$

اگر $\|x\|$ را ریشه دوم نامنفی $\langle x, x \rangle$ تعریف کنیم و با توجه به روابط قبل، نامساوی معروف کوشی شوارتز را به صورت زیر داریم:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

با تعریف فاصله بین x و y به صورت $\|x - y\|$ ، فضای H یک فضای متریک خواهد بود. هرگاه این فضای متریک تام باشد، یعنی هر دنباله کوشی^۱ در آن همگرا باشد، آنگاه فضای H یک فضای هیلبرت^۲ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. [۴۵] فرض کنید فضای توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر $\mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ با محمل فشردۀ در مجموعه باز $\Omega \in \mathbb{R}^n$ باشند. تابع μ متعلق به C_c^∞ را یک تابع تست می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. [۴۵] با در نظر گرفتن $u, v \in L_c^1$ به طوری که

$$L_c^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} | u, v \in L^1(\bar{\Omega}), \forall \bar{\Omega} \subset \Omega\}$$

و $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ یک اندیس چندگانه از مرتبه k باشد، $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ باشد، v را α امین مشتق ضعیف جزئی u می‌نامیم و به صورت

$$D^\alpha u = v$$

نمایش می‌دهیم هرگاه برای هر تابع $\mu \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \mu \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \mu \, dx.$$

تعریف ۴.۱.۱. [۴۵] فضای $W_p^k(\Omega)$ که شامل همه توابع انتگرال‌پذیر $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ می‌باشد، و به ازای هر اندیس چندگانه α که $\alpha \leq k$ است، مشتق ضعیف $D^\alpha u$ وجود داشته باشد و متعلق به $L^p(\Omega)$ باشد را یک فضای سوبولوف^۳ می‌نامیم.

۲.۱.۱ منیفلد n -بعدی

تعریف ۵.۱.۱. منیفلد n -بعدی مجموعه‌ای مانند M است همراه با خانواده‌ای از زیرمجموعه‌هایی مانند $U_\alpha \subset M$ به نام نمودارهای مختص و توابع یک به یک مانند $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ که نگاشت‌های مختص موضعی به روی زیرمجموعه‌های باز همبند $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ نامیده می‌شوند که در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$U_\alpha \cup U_\beta = M \quad (i)$$

$$f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad (ii)$$

(iii) اگر $x \in U_\alpha$ و $y \in U_\beta$ نقاط از هم جدا باشند، آنگاه زیرمجموعه‌های باز $W_1 \subset V_\alpha$ و $W_2 \subset V_\beta$ وجود دارند با $f_\alpha(x) \in W_1$ و $f_\beta(y) \in W_2$ به طوری که در رابطه

$$f_\alpha^{-1}(W_1) \cap f_\beta^{-1}(W_2) = \emptyset,$$

صدق می‌کنند.

^۱Cauchy

^۲Hilbert

^۳Sobolev

نمودارهای مختص $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ برای منیفلد M یک ساختار توپولوژیکی القا می کنند. عمدتاً برای هر زیرمجموعه باز $W \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ نیاز داریم که $f_\alpha^{-1}(W)$ زیرمجموعه بازی از M باشد. این مجموعه‌ها پایه‌ای برای فضای توپولوژیکی روی M محسوب می شوند. بنابراین $U \in M$ یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ یک همسایگی از x وجود داشته باشد که درون U باشد، بنابراین $x \in f_\alpha^{-1}(W) \subset U$ جایی که $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ یک نمودار مختص شامل x است و W زیرمجموعه بازی از V_α است. سومین نیاز اساسی در تعریف منیفلد، اصل موضوع جداسازی هاسدورف است یعنی برای نقاط متمایز y و x در M ، مجموعه‌های باز جدا از هم U_1 و U_2 ، به ترتیب شامل x و y وجود دارند. به عنوان مثال، $\mathbb{R}^n$ ساده‌ترین منیفلد n -بعدی است و تنها یک نمودار مختص $U = \mathbb{R}^n$ با نگاشت مختص موضعی داده شده به وسیله $f = I : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد. در حالت کلی‌تر، هر زیرمجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^n$ یک منیفلد n -بعدی، با یک نمودار مختص داده شده به وسیله خود U و نگاشت همانی به عنوان نگاشت مختص موضعی می باشد.

تعریف ۶.۱.۱. اگر تابع $g(x)$ در نامساوی زیر

$$|g(x) - g(y)| \leq M|x - y|^k$$

برای همه نقاط دامنه صدق کند به طوری که $0 \leq k \leq 1$ مستقل از h باشد، آنگاه تابع g دارای شرط لیپشیتز از مرتبه k است. M ثابت لیپشیتز^۴ نامیده می شود. مفهوم پیوسته لیپشیتز، مفهومی ضعیف‌تر از مشتق پذیری و قوی‌تر از پیوستگی است. برای مثال به جدول زیر توجه کنید.

تابع	پیوسته	پیوسته لیپشیتز	مشتق پذیر
$\sqrt{x}$	هست	نیست	نیست
$ x $	هست	هست	نیست

۳.۱.۱ انواع شرایط مرزی

شرایط مرزی محدودیت‌های ضروری برای جواب یک مساله مقدار مرزی هستند. برای حل یک معادله معمولی و جزئی نیاز به شرایط مرزی است. با توجه به تنوع شرایط مرزی، انتخاب نوع شرایط مرزی نقش اساسی در راه حل یک مساله محاسباتی دارد. اعمال شرایط مرزی ممکن است منجر به واگرایی جواب و یا همگرایی به جواب نادرست شود.

شرط مرزی دیریکله

این شرط، مقداری را که تابع مجهول باید در مرز Γ اخذ نماید مشخص می کند. به عنوان مثال، برای تابع $\Psi(x, t)$ که نشان دهنده جابجایی یک رشته در حال نوسان است که دو انتهای آن در $x = 0$ و $x = l$ ثابت نگه داشته شده است، آنگاه $\Psi(0, t)$ و $\Psi(l, t)$ شرایط دیریکله هستند.

^۴Lipschitz

شرط مرزی نیومن

این شرط، مقداری که مشتق تابع مجهول باید در جهت عمود بر مرز Γ اخذ نماید را مشخص می‌کند که به صورت $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ نوشته می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \nabla(\Psi) \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \right) \cdot \mathbf{n},$$

که در آن $\mathbf{n}$ بردار عمود برونسو بر مرز Γ است. برای مثال، به فرض تابع $\Psi(x, t)$ نشان دهنده دما در یک میله به طول l باشد. اگر میله در نقاط $x = 0$ و $x = l$ کاملاً عایق‌بندی شده باشد، آنگاه شارش گرما در این نقاط برابر صفر است. از قانون رسانایی گرمایی فوری، نتیجه می‌شود که شرایط مرزی مناسب عبارتند از

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n}(l, t) = 0,$$

که شرایط مرزی نیومن هستند.

شرط مرزی رابینز

شرایط مرزی رابینز یک ترکیب وزن‌دار از شرایط مرزی دیریکله و شرایط مرزی نیومن در تمام قسمت‌های مرز است. فرم کلی چنین شرایط مرزی به صورت زیر است:

$$\alpha \Psi + \beta \frac{\partial \Psi}{\partial n} = q.$$

برای مثال، فرض کنید تابع $\Psi(x, t)$ نشان دهنده دما در یک میله به طول l باشد. آنگاه شرایط مرزی ممکن است شرایط رابینز به فرم زیر باشند:

$$\Psi(0, t) + \frac{\partial \Psi}{\partial n}(0, t) = 0, \quad \Psi(l, t) + \frac{\partial \Psi}{\partial n}(l, t) = 0.$$

شرط مرزی آمیخته

هرگاه مرز به گونه‌ای باشد که در قسمتی شرایط مرزی دیریکله و در قسمت دیگر شرایط مرزی نیومن لحاظ گردد شرایط مرزی آمیخته نامیده می‌شوند. برای مثال، تابع $\Psi(x, t)$ را که نشان دهنده دما در یک میله به طول l است را در نظر می‌گیریم. اگر انتهای میله را در آب با دمای ثابت قرار دهیم و انتهای دیگر به یک منبع گرما با نرخ انتقال گرمای ثابت متصل باشد. آنگاه، شرایط مرزی آمیخته به شکل زیر خواهند بود:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}(l, t) = c_1, \quad \Psi(0, t) = c_2,$$

که c_1 و c_2 مقادیر ثابت هستند.

شرط مرزی کوشی

شرایط مرزی کوشی زیاد مرسوم نیستند، اما به صورت ایده‌آل روی مسائلی اعمال می‌گردد که اطمینان بدهد جواب منحصر به فردی برای مساله وجود دارد. مثلاً برای تابع ذکر شده در بالا $\Psi(x, t)$ ، شرایط

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n}(0, t) = c_1, \quad \Psi(0, t) = c_2,$$

شرایط مرزی کوشی هستند.

ملاحظه ۷.۱.۱. شرایط مرزی را می‌توان به دو دسته شرایط مرزی اساسی و شرایط مرزی طبیعی تقسیم کرد. شرایط مرزی اساسی شرایطی هستند که مقدار یک متغیر را در مرز مشخص می‌کنند و به طور صریح اعمال می‌شوند تا مساله حل گردد. که شرایط مرزی دیریکله به این دسته تعلق دارند. شرایط مرزی طبیعی بدون حضور شرایط خارجی، خود به خود برقرار هستند و مقدار مشتق برای یک متغیر در مرز را مشخص می‌کنند مثل شرایط مرزی نیومن که متعلق به این دسته هستند.

۲.۱ فرم ضعیف عمومی (GWF) و روش باقیمانده وزن دار (WRM)

معادله خطی پواسون در فضای دو بعدی را در نظر بگیرید که روی دامنه Ω با مرز Γ تعریف شده است. این معادله را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\nabla^2 \Psi(x) = P(x) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega, \quad (1.1)$$

که P تابع منبع معلوم است و دامنه Ω با مرز $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ دارای شرایط مرزی

$$\Psi = \bar{\Psi} \quad \text{روی } \Gamma_u, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = \bar{q} = q \quad \text{روی } \Gamma_q, \quad (3.1)$$

محصور شده است که (۲.۱) شرط مرزی دیریکله و (۳.۱) شرط مرزی نیومن^۵ می‌باشد. فرض کنید $\Phi(x)$ تابع آزمایش باشد که به عنوان یک جواب تقریبی از مساله (۱.۱) در نظر گرفته شده است. در این صورت، با جایگزینی Φ در معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی، روابط زیر را برای مانده‌های خطا به دست می‌آوریم.

• خطای داخلی:

$$R_\Omega(x) = \nabla^2 \Phi(x) - P(x) \neq 0. \quad (4.1)$$

• خطای مرزی:

$$\begin{cases} R_u = \Phi(x) - \bar{\Phi} \neq 0, & \text{روی } \Gamma_u \\ R_q = \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \bar{q} \neq 0, & \text{روی } \Gamma_q \end{cases},$$

که

- Γ_q قسمتی از مرز است که شرایط مرزی طبیعی روی آن تعریف شده است،

- Γ_u قسمتی از مرز است که شرایط مرزی ضروری روی آن تعریف شده است،

- L قسمتی از مرز است که شرطی روی آن تعریف نشده است.

^۵Neuman

بهترین تابع تقریب آزمایش به طور مشخص زمانی حاصل می شود که باقیمانده ها صفر شوند. بنابراین، تابع آزمایش در نظر گرفته شده باید حداقل شرایطی را شامل شوند که فرآیند صفر شدن معنی داشته باشد. به توابعی که این شرایط را دارا هستند توابع مجاز می گوئیم. به طور مثال، تابع Φ در معادله (۴.۱) باید دوبار مشتق پذیر باشد و مشتق آن باید پیوسته باشد زیرا در غیر این صورت مشتق دوم آن ممکن است نامتناهی شود و باقیمانده در این نقاط نامتناهی و بی معنی خواهد بود.

روش های مختلفی برای کم کردن خطاهای R_1 ، R_{2q} و R_{2u} تا حد امکان کوچک وجود دارد که در حد، باقیمانده ها را روی دامنه سراسری Ω صفر می کنند از جمله

- روش نقاط هم محلی.

- روش خطای مربعات انتگرال وزن دار.

- روش خطای انتگرال/میانگین زیر دامنه ای.

- روش حجم متناهی.

- روش باقیمانده وزن دار.

در ادامه، به بررسی روش باقیمانده وزن دار می پردازیم.

۳.۱ روش باقیمانده وزن دار و اولین فرم ضعیف نامتقارن عمومی برای معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم

می دانیم اگر تابع $F(x)$ در شرط

$$\int_{\Omega} F(x) \mu(x) d\Omega = 0 \quad (5.1)$$

برای همه $\mu(x)$ ها روی Ω صدق کند آنگاه $F(x) \cong 0$. بنابراین، می توانیم تابع آزمایش $\Phi(x)$ را طوری پیدا کنیم که $R_i(\Phi(x)) = 0$ برای $i = 1, 2$. با به کار بردن فرم ضعیف (۵.۱) داریم:

$$\int_{\Omega} R_i(\Phi(x)) \mu(x) d\Omega = 0, \quad (6.1)$$

که $\Phi(x)$ تابع مجاز می باشد و $\mu(x)$ ها همان توابع تست خواهند بود. به طور کلی، تابع آزمایش $\Phi(x)$ به صورت ترکیب خطی از توابع پایه ای Φ_i با ضرایب نامشخص χ_i انتخاب می شوند:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^N \chi_i \Phi_i.$$

و تابع تست $\mu(x)$ که به صورت

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^N \eta_i \mu_i$$

انتخاب می‌شوند که η_i ها ضرایب نامشخص و μ_i ها توابع پایه‌ای هستند. بهترین تقریب وقتی به دست می‌آید که ترکیب Φ_i ها در فرم ضعیف (۶.۱) انتخاب شده صدق کند. معادله باقیمانده وزن‌دار داخلی برای معادله پواسون را در نظر می‌گیریم:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 \Phi(x) - P(x)) \mu(x) d\Omega = 0, \quad (7.1)$$

که Φ باید دوبار مشتق‌پذیر و Φ' پیوسته باشند. در ضمن نیازی به پیوسته بودن تابع μ نیست. بنابراین، شرایط برای Φ و μ نامتقارن هستند.

۴.۱ فرمول‌بندی ضعیف محلی

اغلب روش‌های فاقد شبکه مانند EFG بر پایه فرم ضعیف سراسری روی کل دامنه Ω است. اما در روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین، از فرم ضعیف محلی روی هر یک از زیردامنه‌های موضعی Ω_s که به طور کامل داخل دامنه سراسری Ω واقع شده‌اند استفاده می‌شود. در واقع این مهم‌ترین مشخصه متمایز روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین است. قابل ذکر است که زیردامنه‌های محلی می‌توانند هر شکل دلخواهی داشته باشند.

اگرچه یک تقریب خاص از فرم ضعیف محلی نتیجه مشابه معادلات گسسته‌سازی شده از تقریب گالرکین برای فرم ضعیف سراسری را می‌دهد، اما فرم ضعیف محلی یک مفهوم واضح برای انتگرال‌گیری فاقد شبکه محلی از فرم ضعیف را ارائه می‌کند که هیچ نیازی به تقسیمات زمینه‌ای برای انتگرال‌گیری روی کل دامنه نیست. همچنین، این روش منجر به راه طبیعی برای ایجاد ماتریس سختی سراسری است. ماتریس سختی از طریق انتگرال‌گیری روی شبکه‌های همجوار با سرهم کردن مولفه‌هایی در شبکه به دست نمی‌آید، بلکه از طریق انتگرال‌گیری روی زیردامنه‌های محلی حاصل می‌شود. زیردامنه‌های محلی تشکیل یک شبکه پیوسته سراسری را نمی‌دهند و گاهی ممکن است که با هم اشتراک داشته باشند. به عنوان پایه، برای روش‌های واقعا بدون شبکه، سه فرمول‌بندی ضعیف موضعی از معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را بیان می‌کنیم.

۱.۴.۱ اولین فرمول‌بندی ضعیف نامتقارن محلی ($LUSWF$)

توجه داشته باشید که مساله (۱.۱) را به فرم زیر می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega_s} (\nabla^2 \Phi - P) \mu d\Omega = 0, \quad (8.1)$$

که در آن Φ باید دوبار مشتق‌پذیر بوده و Φ' پیوسته باشند در حالی که هیچ نیازی به پیوستگی یا مشتق‌پذیری تابع μ نیست. بنابراین، معادله (۸.۱) را به عنوان اولین فرم ضعیف نامتقارن محلی $LUSWF$ در نظر می‌گیریم.

در این حالت، روش هم‌محلی یا روش جریمه یا سایر روش‌ها برای برقراری شرایط مرزی طبیعی و اساسی استفاده می‌شود.

۲.۴.۱ فرمول‌بندی ضعیف متقارن محلی (LSWF۱)

برای کاهش نیاز به مشتق‌پذیری از مرتبه‌های بالاتر، می‌توانیم از معادله (۸.۱) به روش جزء به جزء انتگرال بگیریم. در واقع با جایگذاری رابطه

$$(\nabla^2 \Phi) \mu = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mu \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

در معادله (۸.۱) داریم:

$$\int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mu - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \mu \right) d\Omega = 0,$$

که با وارد کردن شرایط مرزی اساسی به کمک پارامتر جریمه، داریم:

$$\int_{\Gamma_s} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mu d\Gamma - \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + P \mu \right) d\Omega - \eta \int_{\Gamma_u} (\Phi - \bar{\Phi}) \mu d\Omega = 0.$$

در آخر با جایگذاری شرایط مرزی طبیعی، اولین فرم ضعیف متقارن محلی برای معادله (۸.۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$\int_{L_s} \mathbf{q} \mu d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{q} \mu d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{\mathbf{q}} \mu d\Gamma - \int_{\Omega_s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial x} + P \mu \right) d\Omega - \eta \int_{\Gamma_u} (\Phi - \bar{\Phi}) \mu d\Omega = 0, \quad (9.1)$$

که در آن η پارامتر جریمه است و برای اعمال شرایط مرزی اساسی به کار رفته است. معادله (۹.۱) به شرایط یکسانی برای تابع آزمایش Φ و تابع تست μ در درون زیردامنه Ω_s نیاز دارد. لازم به یادآوری است که هر دو این توابع پیوسته و یک‌بار مشتق‌پذیر می‌باشند. همچنین، شایان ذکر است که

$$\Gamma_s = \Gamma_{su} \cap \Gamma_{sq} \cap L_s,$$

$$L_s = L \cap \Gamma_s,$$

$$\Gamma_{su} = \Gamma_u \cap \Gamma_s,$$

$$\Gamma_{sq} = \Gamma_q \cap \Gamma_s,$$

$$\Gamma_{su} \cap \Gamma_{sq} = \emptyset,$$

که Ω_s زیردامنه در نظر گرفته شده و محصور به مرز Γ_s می‌باشد.

۳.۴.۱ دومین فرمول‌بندی ضعیف نامتقارن محلی (LUSWF۲)

برای کاهش مشتق‌پذیری در معادله (۹.۱)، با دو بار انتگرال‌گیری جزء به جزء به صورت زیر

$$(\nabla^2 \Phi) \mu = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \cdot \mu = \frac{\partial \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \mu \right)}{\partial x} - \Phi \frac{\partial \mu}{\partial x} + \Phi \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}.$$

برای به دست آوردن فرم ضعیف نامتقارن دوم (LUSWF۲)، داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{L_s} q \mu d\Gamma - \int_{L_s} \Phi \frac{\partial \mu}{\partial x} n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} q \mu d\Gamma - \int_{\Gamma_{sq}} \Phi \frac{\partial \mu}{\partial x} n_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{su}} \bar{\Phi} \frac{\partial \mu}{\partial x} n_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} d\Omega - \int_{\Omega_s} P \mu d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (10.1)$$

که تابع تست μ باید دوبار مشتق پذیر باشد و μ' پیوسته باشد در حالی که نیازی به پیوسته بودن تابع آزمایش نیست. بنابراین، شرایط مورد نیاز برای Φ و μ نامتقارن است و فرم ضعیف محلی (۱۰.۱) را به عنوان دومین فرم ضعیف محلی نامتقارن در نظر می گیریم.

۵.۱ درونیایی بدون شبکه

در روش های فاقد شبکه لازم است برای حفظ ویژگی های محلی، درونیاب فاقد شبکه در شرایط زیر صدق کند:

- شرط اول: محلی بودن،
- شرط دوم: پیوستگی،
- شرط سوم: سازگاری.

همچنین، حساسیت روش های درونیایی بدون شبکه به تعداد گره ها در هر دامنه درونیایی باید به اندازه کافی کم باشد تا در اضافه یا حذف کردن گره ها آزادی عمل داشته باشیم و روش نسبت به حذف یا اضافه کردن گره حساسیت نشان ندهد. شرط محلی بودن برای کارایی روش حیاتی است تا از ایجاد ماتریس سختی سراسری جلوگیری شود. شرط پیوستگی برای انتگرال پذیر بودن فرم ضعیف ضروری است. شرط سوم به مرتبه معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته است و در نهایت هر دو شرط دوم و سوم به همگرایی فرم ضعیف مبتنی بر درونیایی مربوط می باشند.

روش های درونیایی بدون شبکه متعددی موجود هستند که می توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱: تابع شپرد: که فقط سازگاری مرتبه صفر دارند.

۲: درونیایی کمترین مربعات متحرک MLS : که حالت کلی و ضمنی از (۱) است که در آن توابع سازگاری مرتبه بالاتری دارند.

۳: روش افراز واحد: که حالت صریح کلی از (۱) است.

۴: روش بازتولید ذرات هسته: که همان روش MLS است که تابع وزن و هسته در MLS یکی است و روشی با سازگاری بالاتر با همان پایه MLS است.

۵: روش توابع پایه ای شعاعی: که از نقاط پراکنده در دامنه استفاده می کند و توابع تست و آزمایش مورد نظر را تولید می کند.

ملاحظه ۱.۵.۱. منظور از سازگاری مرتبه t ام یک شرطی است که تابع آزمایش گره ای می تواند دقیقاً یک، یک جمله ای مرتبه t ام را نمایش دهد (مختصات فضایی). بنابراین، سازگاری مرتبه صفر یعنی تابع آزمایش توانایی نمایش دقیقاً یک تابع ثابت را دارد.

پنج روش درونیایی بدون شبکه که در بالا ذکر شد به صورت خلاصه در جدول ۱.۱ آورده شده اند. یکی از ویژگی های قابل توجه در روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین این است که توابع تست و آزمایش می توانند از فضاهای مختلفی انتخاب شوند و لازم نیست که هر دو از یک فضا انتخاب شوند. توابع آزمایش را می توان یکی از موارد زیر انتخاب کرد:

روش	تابع	خاصیت دلتای کرونگر	پیوستگی
<i>MLS or RKPM</i>	$\Phi^I(X) = \sum_{j=1}^m P_j(X)[A^{-1}(X)B(X)]_{jI}$	ندارد	C^1
تابع شپرد	$\Phi_o^I(X) = \frac{\omega_I(X)}{\sum_{j=1}^N \omega_J(X_o)}$ ($\omega_I(X)$ تابع وزن اسپلاین مرتبه چهارم)	ندارد	C^1
<i>PU</i>	$u^h(X) = \sum_{I=1}^N \sum_{j=1}^m \Phi_o^I(X) P_j(X) \beta_{jI}$	ندارد	C^1
<i>RBF</i>	$\Phi^I(X) = \sum_{j=1}^N r_{jI}$	دارد	C^{2k}

جدول ۱.۱: درونیاب‌های بدون شبکه

الف) روش کمترین مربعات متحرک یا روش بازتولید ذرات هسته،

ب) روش افراز واحد،

پ) تابع شپرد،

ت) توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده،

ث) روش درونیابی محلی نقاط،

و توابع تست می‌توانند کاملاً متفاوت باشند و ممکن است متناظر با هر یک از موارد زیر باشند:

الف) روش کمترین مربعات متحرک،

ب) روش افراز واحد،

پ) تابع شپرد،

ت) توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده،

ث) تابع پله‌ای هویساید^۶،

ج) تابع دلتای دیراک،

چ) تابع وزنی گوس^۷ از *MLS*،

^۶Heaviside

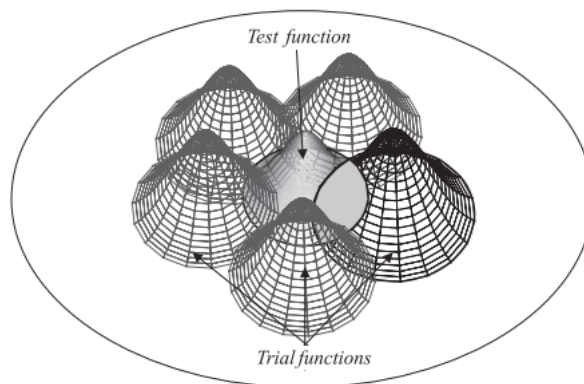
^۷Gauss

(ح) فرم خاصی از جواب پایه‌ای،

(خ) معادله دیفرانسیلی،

(د) روش درونیایی محلی نقاط.

به دلیل داشتن انتخاب‌های مختلف از تابع تست و آزمایش، می‌توانیم تعداد زیادی از روش‌های فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین تولید کنیم. در ضمن، اندازه‌ها و یا اشکال زیردامنه‌هایی که توابع تست و آزمایش محلی روی آنها به ترتیب غیرصفر هستند ممکن است متفاوت باشند. در شکل ۱.۱، توصیف شماتیک توابع تست و آزمایش در روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۱: توصیف شماتیک توابع تست و آزمایش در روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین

تابع تست روی هر Ω_s می‌تواند به روش‌های متعددی انتخاب شوند. انتخاب‌های متفاوت از توابع تست که منجر به روش‌های متفاوت فاقد شبکه پترو-گالرکین $MLPG$ شده‌اند را در ادامه بیان می‌کنیم.

$MLPG_1$: تابع تست روی Ω_s همانند تابع وزن در تقریب MLS است. در نتیجه، روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین از فرم ضعیف متقارن محلی استفاده می‌کند.

$MLPG_2$: تابع تست روی Ω_s ، تابع دلتای دیراک هم‌محلی است. در نتیجه، روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین از فرم ضعیف غیرمتقارن محلی استفاده می‌کند.

$MLPG_3$: تابع تست روی Ω_s همانند تابع خطا در معادله دیفرانسیل، از کمترین مربعات گسسته استفاده می‌کند که در نتیجه از فرم ضعیف غیرمتقارن محلی استفاده می‌شود.

$MLPG_4$: تابع تست روی Ω_s ، جواب اساسی بهبودیافته معادله دیفرانسیل است و در نتیجه، روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین بر اساس فرم ضعیف غیرمتقارن محلی می‌باشد.

$MLPG_5$: تابع تست روی Ω_s ، تابع پله‌ای هویساید (روی هر زیردامنه مقدار ثابت) است. در نتیجه، روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین بر اساس فرم ضعیف متقارن موضعی خواهد بود.

$MLPG_6$: تابع تست روی Ω_s با تابع آزمایش یکسان است که روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین با روش گالرکین هم‌ارز می‌شود و بر اساس یک فرم ضعیف متقارن است.

روش‌های $MLPG_1$ تا $MLPG_6$ به طور خلاصه در جدول ۲.۱ معرفی شده‌اند.

روش	تابع تست در Ω_{te}	فرم ضعیف در هر تابع آزمایش و تابع تست	انتگرال‌گیری برای محاسبه فرم ضعیف
$MLPG_1$	تابع وزن MLS	فرم ضعیف متقارن موضعی	انتگرال‌گیری دامنه
$MLPG_2$	دلتای کرونکر	اولین فرم ضعیف موضعی غیرمتقارن	ندارد
$MLPG_3$	کمترین مربعات	اولین فرم ضعیف موضعی غیرمتقارن	انتگرال‌گیری دامنه
$MLPG_4$	جواب اساسی u^*	دومین فرم ضعیف موضعی غیرمتقارن	انتگرال‌گیری مرزی منفرد
$MLPG_5$	تابع پله‌ای هویساید	فرم ضعیف متقارن موضعی	انتگرال‌گیری مرزی عادی
$MLPG_6$	مشابه تابع آزمایش	فرم ضعیف متقارن موضعی	انتگرال‌گیری دامنه

جدول ۲.۱: حالت‌های مختلف برای روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین

۶.۱ توابع پایه‌ای شعاعی

با توجه به این‌که در این رساله از پنجمین روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین استفاده می‌کنیم که در آن از درونیاب بدون شبکه توابع پایه‌ای شعاعی استفاده می‌شود، در ادامه به ارائه جزئیات بیشتری از توابع پایه‌ای شعاعی می‌پردازیم و توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید و توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده معرفی می‌شوند.

۱.۶.۱ توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید

هسته‌های معین مثبت

تعریف ۱.۶.۱. هسته حقیقی: اگر $\Omega \subset \mathbb{R}$ مجموعه ناتهی دلخواهی باشد آنگاه $\phi : \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ یک هسته حقیقی نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۶.۱. هسته متقارن: هسته ϕ متقارن است اگر $\phi(x, y) = \phi(y, x)$ برای همه x و y ‌های در Ω برقرار باشد.

اگر Ω دارای ساختار هندسی خاصی باشد آنگاه ممکن است هسته شکل ساده‌تری بگیرد که آن را تحت تبدیلات هندسی روی Ω پایا نگه می‌دارد. به عنوان مثال، هسته‌های به فرم

- $\phi(x - y)$ روی گروه‌های آبدی تحت انتقال پایا هستند.

- $\phi(x^T y)$ روی کره‌های چندمتغیره، ناحیه‌ای هستند.

- $\phi(\|x - y\|_2)$ روی $\mathbb{R}^n$ شعاعی هستند.

تعریف ۳.۶.۱. تابع پایه‌ای شعاعی: هسته $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پایه‌ای $\zeta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $\phi(x) = \zeta(\delta)$ با $\|x\| = \delta$ و $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی L_2 روی $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۴.۶.۱. هسته معین مثبت: هسته متقارن ϕ روی $\mathbb{R}^n$ معین مثبت است اگر و تنها اگر برای تمام زیرمجموعه‌های متناهی $S = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ از نقاط متمایز Ω ، ماتریس $A_{\phi, S}$ با درایه‌های $\phi(x_i, x_j)$ که $1 \leq i, j \leq m$ است معین مثبت باشد یعنی

$$c^T \cdot A_{\phi, S} \cdot c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m c_i c_j \phi(x_i, x_j) \geq 0. \quad (11.1)$$

برای هر $c \in \mathbb{R}^m$.

هر گاه تنها برداری که نامعادله (۱۱.۱) را به یک تساوی با صفر تبدیل می‌کند بردار صفر باشد آنگاه هسته ϕ معین اکید مثبت خواهد است.

همچنین، از تعریف قبل می‌توان بررسی کرد که تمام مقادیر ویژه یک ماتریس معین مثبت هستند و بنابراین، یک ماتریس معین مثبت نامنفرد است. بر این اساس، بهتر است از هسته‌های معین مثبت اکید به عنوان توابع پایه‌ای شعاعی استفاده کنیم یعنی

$$\begin{aligned} \phi_k(\mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_k), \\ f(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m c_i \phi_i(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

توابع پایه‌ای معین مثبت اکید

در اینجا، فرض را بر این می‌گیریم که هیچ ترجیحی در جهت داده‌ها وجود ندارد یعنی تابع بازسازی شده مستقل از دوران است. این فرض موجب می‌شود که از هسته شعاعی روی $\mathbb{R}^n$ استفاده شود که توابع پایه‌ای شعاعی خوانده می‌شوند. بنابراین، توابع پایه‌ای شعاعی را در ادامه بیان می‌کنیم. که $\zeta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع معین مثبت است.

شیوه‌های متعددی برای تولید توابع پایه‌ای شعاعی وجود دارد که در [۵۳] با جزئیات بیان شده‌اند. در جدول ۳.۱، توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید مرسوم آورده شده‌اند. با به کار بردن توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید، تابع f به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M c_i \cdot \zeta(\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_i\|),$$

که در آن c_i ضرایب RBf نامیده می‌شوند، $\hat{x}_i$ مرکز خوانده می‌شود و M تعداد عناصر در توابع پایه‌ای است. در حالت درونیایی، تعداد پایه‌ها برابر تعداد داده‌هاست یعنی $M = m$ و محل داده‌ها به عنوان مرکزها استفاده می‌شوند یعنی $\hat{x}_i = x$ ، در حالی که $M \leq m$ و مراکز می‌تواند زیرمجموعه‌ای از محل داده‌ها باشد یا یک مجموعه از نقاط متمایز و متفاوت با محل داده‌ها در نظر گرفته شود.

اسم	$\zeta(r)$	پارامترها
گاوسی	$e^{-\beta r^2}$	$\beta > 0$
سوبولف اسپلاین‌ها	$r^\nu K_\nu(r)$ که K_ν تابع کروی بسل است	$\nu > 0$
معکوس مربعاتی	$(r^2 + c^2)^{-\frac{\beta}{2}}$	$\beta > \frac{n}{2}$
محمل فشرده	$\mu(1-r)^l \cdot P(r)$ که μ تابع هویساید است	$l > [\frac{n}{2}] + 1$

جدول ۳.۱: توابع پایه‌ای شعاعی مرسوم

۲.۶.۱ توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده

بر اساس قضیه‌ای در [۴۷]، توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده تک متغیره $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$: ζ نمی‌تواند به ازای تمام ابعاد معین مثبت باشد. بنابراین، مجبور هستیم که وابستگی ζ به بعد فضا یعنی n را بپذیریم. با به کار بردن توابع پایه‌ای شعاعی و با توجه به این که این توابع مثبت هستند، تابع بازسازی شده f می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m c_i \cdot \zeta_s(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\|),$$

که s اندازه محمل است و $\zeta_s(\delta) = \zeta(\frac{\delta}{s})$. وندلند^۸ [۵۲] یک خانواده معروف $\zeta_{n,p}$ از توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده معرفی کرده است که به فرم چندجمله‌ای با درجه مینیمال برای بعد فضای n بیان می‌شوند و پیوستگی آنها C^{2p} است.

^۸Wendland

توابع $\zeta_{n,p}$ برای $p = 0, 1, 2, 3$ که توسط وندلند معرفی شدند دارای شکل زیر هستند:

$$\zeta_{n,0} = (1 - \delta)_+^l,$$

$$\zeta_{n,1} = (1 - \delta)_+^{l+1}[(l+1)\delta + 1],$$

$$\zeta_{n,2} = (1 - \delta)_+^{l+2}[(l^2 + 4l + 1)\delta^2 + (3l + 6)\delta + 3],$$

$$\zeta_{n,3} = (1 - \delta)_+^{l+3}[(l^3 + 9l^2 + 23l + 15)\delta^3 + (6\delta^2 + 36\delta + 45)\delta^2 + (15l + 45)\delta + 15],$$

که در آن $l = [\frac{n}{p}] + p + 1$.

و^۹ [۵۴] روش دیگری ارائه کرده است که توسط تلفیق توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده، توابع مشابهی ساخته شده‌اند که برای برآورده کردن هموار بودن و بعد مورد نظر، چندجمله‌ای با درجه بالاتری را تولید می‌کند.

$$\zeta = (1 - \delta)_+^5,$$

$$\zeta = (1 - \delta)_+^5(\delta^4 + 5\delta^3 + 9\delta^2 + 5\delta + 1),$$

$$\zeta = (1 - \delta)_+^4(3\delta^3 + 12\delta^2 + 16\delta + 4),$$

$$\zeta = (1 - \delta)_+^3(3\delta^2 + 9\delta + 8),$$

$$\zeta = (1 - \delta)_+^6(5\delta^5 + 30\delta^4 + 72\delta^3 + 82\delta^2 + 36\delta + 6),$$

$$\zeta = (1 - \delta)_+^7(35\delta^6 + 245\delta^5 + 720\delta^4 + 1120\delta^3 + 928\delta^2 + 336\delta + 48),$$

$$\zeta = (1 - \delta)_+^6(35\delta^5 + 210\delta^4 + 515\delta^3 + 640\delta^2 + 38\delta + 64),$$

$$\zeta = (1 - \delta)_+^5(35\delta^4 + 175\delta^3 + 345\delta^2 + 325\delta + 128),$$

ملاحظه ۵.۶.۱. قابل ذکر است که نماد $(1 - \delta)_+^k$ به معنی این است که تابع در نقاطی که $1 - \delta < 0$ برابر صفر است.

^۹ Wu

همچنین، توابع پایه‌ای معرفی شده توسط بوهمن^{۱۰} [۱۶] به صورت زیر است:

$$\zeta = \begin{cases} \frac{1}{4} + \delta^2 - \frac{4}{3}\delta^3 + 2\delta^2 \log \delta & 0 \leq r_i \leq 1 \\ 0 & 1 \leq r_i \end{cases}$$

$$\zeta = \begin{cases} \frac{1}{15} + \frac{19}{6}\delta^2 - \frac{16}{3}\delta^3 + 3\delta^4 - \frac{16}{15}\delta^5 + \frac{1}{6}\delta^6 + 2\delta^2 \log(\delta) & 0 \leq r_i \leq 1 \\ 0 & 1 \leq r_i \end{cases}$$

پیوستگی	$\zeta(\delta)$	بعد n
C^0	$\zeta_{1,0}(\delta) = \mu(1 - \delta)$	بعد $n = 1$
C^2	$\zeta_{2,1}(\delta) = \mu(1 - \delta)^3(3\delta + 1)$	
C^4	$\zeta_{3,1}(\delta) = \mu(1 - \delta)^5(38\delta^2 + 5\delta + 1)$	
C^0	$\zeta_{2,0}(\delta) = \mu(1 - \delta)^2$	بعد $n = 3$
C^2	$\zeta_{3,1}(\delta) = \mu(1 - \delta)^4(4\delta + 1)$	
C^4	$\zeta_{4,2}(\delta) = \mu(1 - \delta)^6(35\delta^2 + 18\delta + 3)$	
C^0	$\zeta_{3,0}(\delta) = \mu(1 - \delta)^3$	بعد $n = 5$
C^2	$\zeta_{4,1}(\delta) = \mu(1 - \delta)^5(5\delta + 1)$	
C^4	$\zeta_{5,2}(\delta) = \mu(1 - \delta)^7(16\delta^2 + 7\delta + 1)$	

جدول ۴.۱: توابع $\zeta_{n,p}$ معرفی شده توسط وندلند برای چند حالت مختلف.

^{۱۰}Buhmann

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی

در این فصل، با توجه به اینکه شکل کلی معادله و اندیس یک معادله دیفرانسیل-جبری در انتخاب روش حل بسیار موثر است به بیان حالت‌های خاصی از (۱.۲) و انواع مختلف اندیس‌های آن می‌پردازیم. سپس تعریفی از معادله دیفرانسیل-جبری با مشتقات جزئی ارائه می‌دهیم. بعد از معرفی انواع شرایط مرزی، معادله دیفرانسیل-جبری با مشتقات جزئی خطی را که موضوع اصلی رساله است را معرفی می‌کنیم. در آخر به معرفی انواع اندیس‌های یک معادله دیفرانسیل-جبری با مشتقات جزئی می‌پردازیم.

۱.۲ انواع معادلات دیفرانسیل-جبری

معادله دیفرانسیل جبری را در حالت کلی به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(u', u, t) = 0, \quad (1.2)$$

که در آن مشتق جزئی $\frac{\partial f}{\partial u'}$ به ازای تمام مقادیر، منفرد است و $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، که Ω یک مجموعه باز همبند است. معادله (۱.۲) حالت کلی معادله دیفرانسیل-جبری است که معادله دیفرانسیل-جبری تماماً ضمنی نامیده می‌شود. حالت‌های خاص متعددی از (۱.۲) وجود دارند و یک روش خاص برای حل آنها ممکن است به شکل کلی آنها وابسته باشد.

۱.۱.۲ معادله دیفرانسیل-جبری نیمه صریح

یکی از حالت‌های پرکاربرد، حالت نیمه صریح از معادله دیفرانسیل-جبری است که به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} u'_1 = g_1(u_1, u_2, t) & (a), \\ 0 = g_2(u_1, u_2, t) & (b), \end{cases} \quad (2.2)$$

که (۲.۲)-(b) معادله جبری محض و نشان دهنده یک محدودیت است. همچنین، یک معادله دیفرانسیل-جبری ممکن است دارای محدودیت پنهان باشد که فقط پس از دست‌کاری معادلات به دست می‌آید. با استفاده از معادله دیفرانسیل-جبری نیمه صریح، رابطه بین این معادله و معادله دیفرانسیل معمولی را نشان می‌دهیم.

فرض کنید معادله (۲.۲) حل پذیر بوده و (۲.۲)-(b) نسبت به t مشتق پذیر باشد.

$$\circ = \frac{\partial g_2}{\partial u_1} \cdot u' + \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \cdot u'_2 + \frac{\partial g_2}{\partial t} \quad (3.2)$$

اگر $\frac{\partial g_2}{\partial u_2}$ نامنفرد است آنگاه از رابطه (۳.۲) داریم:

$$\begin{aligned} u'_2 &= -\left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1} \cdot u'_1 + \frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \\ &= \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_2}\right)^{-1} \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_1} \cdot g_1(u_1, u_2, t) + \frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

بنابراین، (۲.۲)-(a) به همراه (۴.۲) یک معادله دیفرانسیل معمولی را به دنبال دارد. اگر فرض کنیم که معادله دیفرانسیل معمولی حل پذیر است و یک جواب معادله دیفرانسیل معمولی در (۲.۲)-(b) برای $t = t_0$ صدق کند آنگاه این جواب باید در معادله دیفرانسیل-جبری نیز با مفروضات حل پذیری صدق نماید.

۲.۱.۲ معادله دیفرانسیل-جبری هسبرگ اندازه ۲ و ۳

یک فرم خاص معادله دیفرانسیل جبری، یک معادله دیفرانسیل جبری در فرم هسبرگ است. فرم های هسبرگ^۱ از اندازه ۲ و ۳ از حالت های خیلی مرسوم هستند. فرم هسبرگ از اندازه دو به صورت زیر است:

$$\begin{cases} u'_1 = g_1(u_1, u_2, t) & (a), \\ \circ = g_2(u_1, t) & (b), \end{cases} \quad (5.2)$$

که در آن $\frac{\partial g_2}{\partial u_1}$ و $\frac{\partial g_1}{\partial u_2}$ نامنفرد هستند.

همچنین، فرم هسبرگ از اندازه سه به صورت زیر است:

$$\begin{cases} u'_1 = g_1(u_1, u_2, u_3, t), \\ u'_2 = g_2(u_1, u_2, t), \\ \circ = g_3(u_2, t), \end{cases}$$

که در آن $\frac{\partial g_2}{\partial u_1}$ ، $\frac{\partial g_2}{\partial u_2}$ و $\frac{\partial g_3}{\partial u_2}$ نامنفرد هستند.

توجه شود که در حالت کلی هیچ یک از این ماتریس های مشتقات جزئی مربعی نیستند.

معادلات دیفرانسیل-جبری به فرم هسبرگ از معادلات مهم در مکانیک و مسائل تغییراتی هستند. همچنین، معادلات دیفرانسیل-جبری با فرم هسبرگ همگن از نقطه نظر توسعه پکیج های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری دارای اهمیت است. برنامه هایی مانند $RADAU5$ را می توان برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری به کار برد. برای توضیحات بیشتر، منبع [۲۹] را ببینید.

^۱Hesenberg

۳.۱.۲ معادله دیفرانسیل-جبری بقا

چهارمین فرم خاص از معادلات دیفرانسیل-جبری، یک معادله دیفرانسیل-جبری بقا است که دلیل نامگذاری آن به این جهت است که چنین معادلات دیفرانسیل-جبری عموماً در تحلیل قوانین بقا ظاهر می‌شوند. شکل کلی این معادلات دیفرانسیل-جبری به صورت زیر است:

$$[h(u(t))]' = g(t) \quad (۶.۲)$$

یا

$$h_u(u(t))u'(t) = g(t). \quad (۷.۲)$$

البته تبدیل معادلات دیفرانسیل-جبری فرم (۶.۲) به شکل نیمه صریح (۲.۲) امکان‌پذیر است اما با این کار عمدتاً اندیس معادله دیفرانسیل-جبری افزایش می‌یابد. اندیس یکی از مهم‌ترین مشخصه‌ها در معادلات دیفرانسیل-جبری خطی و غیرخطی است و در ادامه به بیان انواع اندیس یک معادله دیفرانسیل-جبری می‌پردازیم.

۲.۲ اندیس معادلات دیفرانسیل-جبری

با توجه به معادلات دیفرانسیل-جبری نیمه صریح فرم (۲.۲)، اگر $\frac{\partial g_1}{\partial u_2}$ نامنفرد باشد آنگاه معادله (۲.۲) را تنها با یک مشتق‌گیری از (۲.۲)-(b) می‌توانیم به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم. چنین معادله دیفرانسیل-جبری نیمه صریح با چنین ویژگی‌هایی دارای اندیس یک است. اگر $\frac{\partial g_1}{\partial u_2}$ منفرد باشد آنگاه با دست‌کاری جبری و تغییر مختصات می‌توانیم (۳.۲) را به فرم (۲.۲)-(b) با u_1 و u_2 متفاوت بازنویسی کنیم. از این محدودیت جدید مشتق می‌گیریم و نگاه می‌کنیم که آیا به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود یا خیر. اگر چنین باشد معادله دیفرانسیل-جبری اصلی از اندیس ۲ است در غیر این صورت به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا در نهایت یک معادله دیفرانسیل معمولی به دست می‌آوریم. هر بار مشتق‌گیری از محدودیت (۲.۲)-(b) اندیس معادله دیفرانسیل-جبری را یک واحد اضافه می‌کند و بنابراین، تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۲.۲. کمترین تعداد دفعاتی که تمام یا بخشی از (۱.۲) نسبت به t مشتق‌گیری شده تا اینکه u' را به عنوان تابع پیوسته‌ای از u و t معین نماید اندیس معادله دیفرانسیل-جبری (۱.۲) است.

مثال ۲.۲.۲. معادله دیفرانسیل-جبری نیمه صریح زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_1' + u_3 = f_1 & (a), \\ u_2' + u_1 = f_2 & (b), \\ u_2 = f_3 & (c). \end{cases} \quad (۸.۲)$$

اگر از (۸.۲)-(a) یک بار، از (۸.۲)-(b) دو بار و از (۸.۲)-(c) سه بار مشتق بگیریم آنگاه

$$\begin{cases} u_1'' + u_3' = f_1', \\ u_2''' + u_1'' = f_2'', \\ u_2''' = f_3'''. \end{cases}$$

در این صورت، از معادلات بالا داریم:

$$u'_3 = f'_1 - f''_2 + f'''_3.$$

اگر از (۸.۲-b) یک بار و از (۸.۲-c) دو بار مشتق بگیریم آنگاه

$$\begin{cases} u''_2 + u'_1 = f'_2, \\ u''_3 = f''_3. \end{cases}$$

در این صورت، از معادلات بالا داریم:

$$u'_1 = f'_2 + f''_3.$$

همچنین، با یک بار مشتق‌گیری از (۸.۲-c) داریم:

$$u'_2 = f'_3.$$

با توجه به اینکه حداقل سه بار مشتق‌گیری برای محاسبه u' انجام دادیم می‌توان گفت که معادله از اندیس ۳ است.

۱.۲.۲ اندیس دیفرانسیلی یا اندیس سراسری ν_d

مشتق‌گیری توصیف شده در بالا به معادلات آرایه مشتق معروف است که نقش مهمی در تحلیل معادلات دیفرانسیل-جبری و نیز در توسع الگوریتم‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل-جبری دارد. معادلات آرایه مشتق به صورت زیر هستند:

$$\left[\begin{array}{c} F(u', u, t) \\ F_t(u', u, t) + F_u(u', u, t).u' + F_{u'}(u', u, t).u'' \\ \frac{d^k}{dt^k} F(u', u, t) \end{array} \right] = G_k(u', u, t, \omega) = 0, \quad (9.2)$$

که در آن $\omega = [u^{(2)}, \dots, u^{(k+1)}]$. در قسمت‌های بعدی، عموماً اندیس k را برای سادگی و نمادگذاری حذف می‌کنیم. همان‌گونه که تعریف ۱.۲.۲ بیان می‌کند، اندیس معادله دیفرانسیل-جبری (۱.۲) برابر با k است هرگاه $G_k = 0$. به این ترتیب اندیس دیفرانسیلی یا سراسری ν_d را داریم.

۲.۲.۲ اندیس اغتشاشی ν_p

اندیس اغتشاشی ν_p که در [۲۹] ارائه شده است به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. معادله دیفرانسیل-جبری (۱.۲) دارای اندیس اغتشاشی ν_p به همراه جواب u روی بازه $I = [0, T]$ است اگر ν_p کمترین عدد باشد به طوری که اگر

$$F(\hat{u}', \hat{u}, t) = \delta(t) \quad (10.2)$$

برای δ به اندازه کافی هموار باشد آنگاه یک برآورد

$$\|\hat{u}(t) - u(t)\| \leq C(\|\hat{u}(0) - u(0)\| + \|\delta\|_{\nu_{p-1}}^t)$$

در نرم $\|\cdot\|_{\nu_{p-1}}$ وجود دارد که ثابت C به F ، T و u وابسته است.

در منبع [۱۸]، نشان داده شده است که هر دوی اندیس دیفرانسیلی و اغتشاشی برای معادله دیفرانسیل-جبری غیرخطی تماماً صریح (۱.۲) به طور معناداری متفاوت می‌باشند.

۳.۲ معادله دیفرانسیل-جبری جزئی

یک معادله دیفرانسیل-جبری جزئی، یک دستگاه معادلات با مشتقات جزئی ناقص است که با یک دسته از معادلات جبری کامل می‌شود و در حالت کلی به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$F(Z, Y, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_k}, \dots, \mathbf{x}) = 0 \quad (11.2)$$

که در آن

- F دسته‌ای از توابع دلخواه است،

- $\mathbf{x}$ دسته‌ای از متغیرهای مستقل است،

- Y دسته‌ای از متغیرهای وابسته است که مشتقات جزئی آنها در دستگاه وجود دارد،

- Z دسته‌ای از متغیرهای وابسته است که مشتقات جزئی برای آنها در دستگاه وجود ندارد.

قابل ذکر است که رابطه بین معادله دیفرانسیل-جبری جزئی و یک معادله دیفرانسیل-جبری همانند رابطه بین یک معادله دیفرانسیل جزئی و یک معادله دیفرانسیل معمولی است. همچنین، حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی معمولاً در حالت‌های خاص‌تر و ساده‌تری از (۱۱.۲) بررسی شده‌اند [۳۱، ۳۲]. زیرا در حالت کلی حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۱.۲) بسیار پیچیده خواهد بود. دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی ممکن است شامل موارد زیر باشد:

- معادلات سهموی و بیضوی؛

- معادلات سهموی، بیضوی و معادلات دیفرانسیل معمولی؛

- معادلات بیضوی، معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات جبری؛

که در حالت کلی، با شرایط اولیه (ICs) مناسب و شرایط مرزی (BCs) کامل می‌شوند و تحت برخی مفروضات به کمک تبدیل لاپلاس و یا تبدیلات فوریه به دنباله‌ای از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل-جبری تقلیل پیدا می‌کنند که دستگاه اصلی همچنان دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری نامیده می‌شود.

۴.۲ معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی خطی

در این رساله، تمرکز بروی دستگاه معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی خطی با ضرایب ثابت به فرم

$$A\Psi_t(x, t) + B\Psi_{xx}(x, t) + C\Psi_x(x, t) + D\Psi(x, t) = P(x, t) \quad (12.2)$$

می‌باشد که $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $x \in (-l, l)$ ، $t \in (0, t_f)$ و $\Psi, P : [-l, l] \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ در حالت کلی لازم است که معادله دیفرانسیل-جبری جزئی فوق در شرایط مرزی و اولیه زیر صدق کند:

$$E\Psi(x, t) + F\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial n} = \mathbf{q}(x, t), \quad (13.2)$$

که $x \in \Gamma, t \in [t_0, t_f]$ و

$$\Psi(x, t_0) = \Psi_0(x), \quad (14.2)$$

به طوری که E و F ماتریس‌های معلوم هستند، $q: [-l, l] \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ و Ψ توابع معلوم می‌باشند و $\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial n}$ مشتق بردار نرمال است.

علاوه بر این، برای تمام $t \in [0, t_f]$ نیاز به شرایط مرزی به فرم زیر برای مولفه‌های φ_i در φ برای تمام $k = 0$ یا $1, j \in m_{BC} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$

$$\varphi_j(x, t) \frac{\partial^k \varphi_j}{\partial x^k}(\mp l, t) = 0. \quad (15.2)$$

در کنار اینها، شرایط اولیه

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [-l, l] \quad (16.2)$$

داده شده فرض می‌شوند. مولفه‌های g_j از g برای تمام $j \in m_{IC} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ قابل تعیین است. برای مولفه‌های $\varphi_k, k \notin m_{BC}$ شرایط مرزی، تنها از شرایط مرزی دیریکله هستند.

در حالت کلی، شرایط مرزی $\varphi_k, k \notin m_{BC}$ و شرایط اولیه برای $\varphi_i, i \notin m_{IC}$ بایستی به کمک معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱.۲)، شرایط مرزی $\varphi_j, j \in m_{BC}$ و $m \in m_{IC}$ تعیین می‌گردند. برای محاسبه این زوج سازگار برای شرایط مرزی و اولیه یک زوج از دستگاه معادلات می‌توانند تولید شوند. علاوه بر این، بین شرایط مرزی و اولیه شرایط تطابق نیز نیاز هست.

$$g(x) = \varphi(x, 0)$$

(۱۶.۲) و یا شرط مرزی (۱۵.۲) برای مسائل با ماتریس‌های منفرد A و یا B باید شرایط مکمل خاصی را نیز برآورده نماید (شرط سازگاری). مثال زیر را مشاهده نمایید.

مثال ۱.۴.۲. فرض کنید $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ و معادله دیفرانسیل-جبری جزئی

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1t} \\ \varphi_{2t} \\ \varphi_{3t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1xx} \\ \varphi_{2xx} \\ \varphi_{3xx} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 0 & c_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}, \quad (17.2)$$

$$\varphi_j(-1, t) = \varphi_j(1, t) = 0, \quad j \in m_{BC} \quad (18.2)$$

$$\varphi_i(x, 0) = q_i(x) \sin(\pi x), \quad i \in m_{IC} \quad (19.2)$$

برای $t \in (0, t_f)$ و $x \in (-1, 1)$ با $a, b > 0, c_i \neq 0$ و توابع به اندازه کافی هموار $P_i(x, t)$ برای $i = 1, 2, 3$ داده شده باشد. جمله $\sin(\pi x)$ در شرط اولیه برای φ_i شرط سازگاری (۱۷.۲) (با شرایط مرزی $i \in m_{BC}$) را تضمین می‌کند. در مجموعه اندیس m_{BC} اندیس‌هایی از مولفه φ را جمع‌آوری می‌کنیم که یک شرط مرزی دلخواه بتواند تعیین گردد (m_{IC} به شیوه مشابه مشخص می‌گردد). بر خلاف مسائل با ماتریس‌های منظم A و B و در حالت کلی $m_{BC} = m_{IC} = \{1, 2, \dots, n\}$. در اینجا این مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌های محضی از $\{1, 2, 3\}$ هستند چرا که برای مولفه‌های جواب داریم:

$$u_2(x, t) = \frac{1}{c_3} P_3(x, t),$$

$$u_3(x, t) = \frac{1}{c_2} (P_2(x, t) - \frac{a}{c_3} f_{3t}(x, t) + \frac{b}{c_3} P_{3xx}(x, t)).$$

هیچ پارامتر آزادی باقی نمی ماند به طوری که مقادیر مرزی و اولیه را برای مولفه های $\varphi_2(x, t)$ و $\varphi_3(x, t)$ به طور مستقیم توسط مقادیر اولیه و مرزی توابع سمت راست و مشتقات آنها داده می شوند. بنابراین، نمی توانیم شرایط مرزی و اولیه برای مولفه های $\varphi_2(x, t)$ و $\varphi_3(x, t)$ تعیین نمائیم و لذا $m_{BC} = m_{IC} = \{1\}$ مولفه جواب $\varphi_1(x, t)$ ، جوابی از مسئله مقدار مرزی زیر است:

$$\begin{aligned}\varphi_{1t} &= \varphi_{1xx} + P_1 - \frac{c_1}{c_3} P_2, \\ \varphi_1(-1, t) &= \varphi_1(t, 1) = 0, \\ \varphi_1(x, 0) &= q_1(x) \sin(\pi x),\end{aligned}$$

که در آن می توانیم $q_1(x)$ را تخصیص دهیم (انتخاب شرایط مرزی دیریکله نیز آزاد است). این مثال مشخص می کند که مسائل از نوع (۱۲.۲) با ماتریس های منفرد، اساسا با مواردی که ماتریس های A و B منظم هستند متفاوت است.

۵.۲ اندیس معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی

همان گونه که معادلات دیفرانسیل-جبری را می توان بر اساس اندیس دیفرانسیلی و اغتشاشی [۲۵] دسته بندی کرد برای معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی نیز اندیس ها [۱۹، ۳۷] را معرفی می کنیم. زیرا اندیس ها، ویژگی های خاص سیستم ها را بر حسب جواب های عددی و تحلیلی توصیف می کنند. بر خلاف معادلات دیفرانسیل-جبری، در اینجا باید اندیس زمانی از اندیس مکانی (فضایی) قابل تمییز باشد. این اندیس ها به ترتیب بر پایه تبدیلات فوری و لاپلاس تعریف خواهند شد. در اینجا، یک اندیس مکانی و یک اندیس یکنواخت زمانی تعریف می کنیم. علاوه بر آن، یک اندیس اغتشاشی نیز برای معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی (PDAEs) تعریف می گردد. این اندیس تاثیر اغتشاشات کوچک روی جواب معادله دیفرانسیل-جبری را در صورت وجود مشخص می کند.

تعریف ۱.۵.۲. مداد ماتریس: یک زوج از ماتریس های (E, F) که $E, F \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ ، مداد ماتریس نامیده می شود. در این رساله مداد ماتریس را توسط $(E, \lambda F)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲.۵.۲. طیف، مقدار ویژه، بردار ویژه: فرض کنیم $E, F \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ باشند. مجموعه ریشه های چندجمله ای مشخصه $P(\lambda) = \det(E - \lambda F)$ طیف مداد ماتریس نامیده می شود و هر عضو از طیف یک مقدار ویژه $(E, \lambda F)$ است اگر و تنها اگر بردار غیر صفر $X \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ موجود باشد به طوری که $EX = \lambda FX$. بردار X را بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه λ می نامیم.

تعریف ۳.۵.۲. مداد ماتریس منتظم و تکین: فرض کنیم $(E, \lambda F)$ بک مداد ماتریس مربعی باشد. مداد ماتریس منتظم گفته می شود اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ موجود باشد به طوری که $\det(E - \lambda F) \neq 0$ ، در غیر این صورت مداد ماتریس تکین گفته می شود.

در ادامه از مفروضات زیر استفاده می شود:

(i) مسئله مقدار مرزی و اولیه (IBVP) (۱۲.۲) فقط و فقط یک جواب دارد.

(ii) هر مولفه از بردار جواب φ در شرط نمو به فرم زیر صدق می کند:

$$|\varphi_i(x, t)| \leq Me^{\alpha t}$$

برای هر $i = 1, 3, \dots, n$.

(iii) مداد ماتریس $(B, \zeta A + C)$ برای $Re(\zeta) > \alpha$ منتظم است.

(iv) مداد ماتریس $(B, \eta_k A + C)$ برای تمام k ها منتظم است. η_k یک مقدار ویژه از عملگر $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ با شرایط مرزی تعریف شده است.

(v) بردار سمت راست $P(x, t)$ و بردار اولیه $q(x)$ به اندازه کافی هموار هستند.

۱.۵.۲ تبدیل لاپلاس و اندیس مکانی

فرض کنید $t_f = \infty$ و $y : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته با شرط نمو $\alpha > 0$ باشد. همچنین، فرض کنید $0 < M < \infty$ ، $t \in [0, \infty]$ و $|y(t)| \leq Me^{\alpha t}$. تبدیل لاپلاس $y(t)$ را به صورت زیر داریم:

$$L_\epsilon = L_\epsilon\{y(t)\} = \int_0^\infty e^{-t\epsilon} y(t) dt, \quad Re(\epsilon) > \alpha.$$

از فرض (ii) نتیجه می شود که معادله (۱۲.۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\varphi_\epsilon''(x) + (\epsilon A + C)\varphi_\epsilon(x) = P_\epsilon(x) + Aq(x), \quad Re(\epsilon) > \alpha, \quad (20.2)$$

که در آن $q(x)$ بردار اولیه (۱۴.۲) است. اگر B یک ماتریس منفرد باشد آنگاه معادله (۲۰.۲) یک معادله دیفرانسیل-جبری است که به پارامتر ϵ وابسته است. تحت مفروضات (i)-(v) و با انتخاب مناسب از شرایط مرزی، معادله (۲۰.۲) دارای جواب یکتاست.

به منظور تعریف اندیس مکانی، به فرم نرمال کرونگر از معادله دیفرانسیل-جبری (۲۰.۲) نیاز داریم ([۲۳] را ببینید). همچنین، فرض (iii) تضمین می کند که ماتریس های نامنفرد $P_{L,\epsilon}, Q_{L,\epsilon} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ وجود دارند به طوری که

$$P_{L,\epsilon} B Q_{L,\epsilon} = \begin{pmatrix} I_{m_1} & 0 \\ 0 & N_{L,\epsilon} \end{pmatrix}$$

و

$$P_{L,\epsilon}(\epsilon A + C)Q_{L,\epsilon} = \begin{pmatrix} R_{L,\epsilon} & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{pmatrix}, \quad (21.2)$$

که $R_{L,\epsilon} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$ یک ماتریس مربعی است و $N_{L,\epsilon} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ یک ماتریس زنجیری جردن^۲ است که $m_1 + m_2 = n$ و ماتریس $I_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ که $k \in \{m_1, m_2\}$ ماتریس همانی است. اندیس ریس^۳ یا پوچ توانی

^۲Jordan

^۳Riesz

$N_{L,\epsilon}$ توسط $\nu_{L,\epsilon}$ نمایش داده می شود یعنی $N_{L,\epsilon}^{\nu_{L,\epsilon}} = N_{L,\epsilon}^{-\nu_{L,\epsilon}-1} \neq 0$. با این روابط معادله (۲۰.۲) می تواند به دستگاه معادلات دوتایی زیر تبدیل گردد.

$$\nu''_{\epsilon}(x) + R_{L,\epsilon}\nu_{\epsilon}(x) = r_{\epsilon,1}(x), \quad (22.2)$$

$$N_{L,\epsilon}\omega''_{\epsilon}(x) + \omega_{\epsilon}(x) = r_{\epsilon,2}(x). \quad (23.2)$$

در اینجا تعریف های زیر را ارائه می دهیم:

$$\begin{aligned} (\nu_{\epsilon}^T(x), \omega_{\epsilon}^T(x))^T &= Q_{L,\epsilon}^{-1}\varphi_{\epsilon}(x), \\ (r_{\epsilon,1}^T(x), r_{\epsilon,2}^T(x))^T &= P_{L,\epsilon}(P_{\epsilon}(x) + Aq(x)). \end{aligned}$$

معادله دیفرانسیل (۲۲.۲) نشان می دهد که بایستی یک دستگاه معادلات مرتبه دوم در m_1 بعد را حل کنیم. در حالت کلی، بایستی برای هر مولفه $\nu_{\epsilon,j}$ از ν_{ϵ} یک شرط مرزی داشته باشیم یعنی بردار m_{BC} دارای m_1 مولفه است. معادله (۲۳.۲) هم ارز یک معادله جبری است که از معادلات زیر استنتاج می شود:

$$\begin{aligned} \omega_{\epsilon}(x) &= r_{\epsilon,2}(x) - N_{L,\epsilon}\omega''_{\epsilon}(x) \\ &= r_{\epsilon,2}(x) - N_{L,\epsilon}r''_{\epsilon,2}(x) + N_{L,\epsilon}^{\nu_{L,\epsilon}}\omega_{\epsilon}^{(\nu_{L,\epsilon})}(x) \\ &\vdots \\ &= r_{\epsilon,2}(x) - N_{L,\epsilon}r_{\epsilon,2}(x) + \dots + (-1)^{\nu_{L,\epsilon}-1}N_{L,\epsilon}^{\nu_{L,\epsilon}-1} \cdot r_{\epsilon,2}^{\nu_{L,\epsilon}-1}(x) \\ &\quad + (-1)^{\nu_{L,\epsilon}}N_{L,\epsilon}^{\nu_{L,\epsilon}} \cdot \omega_{\epsilon}^{(\nu_{L,\epsilon})}(x). \end{aligned} \quad (24.2)$$

از معادله (۲۴.۲) برای هر مولفه از بردار $\omega_{\epsilon} \in \mathbb{R}^{m_2}$ یک عبارت بر حسب بردار داده شده $r_{\epsilon,2}$ و مشتقات آن بر حسب x تا مرتبه $2 - \nu_{L,\epsilon}$ به دست می آوریم به این معنی که هر شرط مرزی را نمی توان برای مولفه های ω_{ϵ} به کار برد.

ساختار ماتریس های $N_{L,\epsilon}$ ، $R_{L,\epsilon}$ ، $Q_{L,\epsilon}$ ، $P_{L,\epsilon}$ و $(\nu_{L,\epsilon}, m_2, m_1)$ به پارامتر ϵ وابسته است و در حالت کلی ممکن است تغییر کند. برای مولفه هایی از $\varphi_{\epsilon}(x)$ (و در نتیجه، $\varphi(x, t)$) می توانیم یک شرط مرزی وابسته به ساختار $Q_{L,\epsilon}$ توصیف کنیم. در اینجا فرض می کنیم که $Re(\epsilon)$ می تواند طوری انتخاب شود که مجموعه اندیس m_{BC} مستقل از پارامتر ϵ در تبدیل لاپلاس باشد.

از معادله (۲۴.۲) یک ایده برای تعریف اندیس مکانی مشابه تعریف اندیس دیفرانسیلی معادلات دیفرانسیل-جبری به دست می آوریم. با یک بار مشتق گیری از معادله (۲۴.۲) نسبت به x داریم:

$$\omega'_{\epsilon}(x) = r'_{\epsilon,2}(x) - N_{L,\epsilon}\omega'''_{\epsilon}(x) + \dots + (-1)^{\nu_{L,\epsilon}-1}N_{L,\epsilon}^{\nu_{L,\epsilon}-1} \cdot r_{\epsilon,2}^{\nu_{L,\epsilon}-1}(x) \quad (25.2)$$

یعنی برای اینکه یک معادله دیفرانسیل صریح برای $\omega_{\epsilon}(x)$ به دست بیاید بایستی نسبت به متغیر x به تعداد $(2\nu - 1)$ بار مشتق گیری شود. هم ارزی معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی و دستگاه (۲۲.۲) و (۲۳.۲) به همراه معادله دیفرانسیل (۲۵.۲) برای $\omega(x)$ ، نتیجه می دهد که تحت مفروضات (ii) و (iii)، اندیس مکانی به صورت زیر تعریف شود.

تعریف ۴.۵.۲. فرض کنید $\alpha^* \in \mathbb{R}^+$ یک عدد باشد به طوری که

$$\alpha^* > \alpha - 1$$

۲- ماتریس $N_{L,\epsilon}$ با پوچ توانی $v_{L,\epsilon} \geq 1$ به ازای همه $\epsilon \in \mathbb{C}$ با $Re(\epsilon) > \alpha^*$ ، ساختارش تغییر نمی کند.

در این صورت،

$$v_{n,x} = 2v_L - 1,$$

که در آن $v_L = v_{L,\epsilon}$ و $Re(\epsilon) > \alpha^*$ است، اندیس مکانی معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱.۲) نامیده می شود.

توجه داشته باشید که اگر $v_L = 0$ باشد آنگاه اندیس معادله دیفرانسیل-جبری جزئی صفر تعریف می شود.

ملاحظه ۵.۵.۲. تحت مفروضات (i) تا (v)، $\alpha^* \in \mathbb{R}^+$ موجود است. اندیس دیفرانسیلی مکانی $v_{n,x}$ مستقیماً نشان می دهد که $r_{\epsilon,2}(x)$ کدام ویژگی های دیفرانسیلی بر حسب متغیر x (و بنابراین $f(x,t)$ و $g(x)$) باید داشته باشد تا اینکه حداقل تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۲۰.۲) را به یک دستگاه صریح از معادلات تبدیل نماید. اندیس معادله جبری (۲۰.۲) توسط مداد ماتریس $(B, \epsilon A + c)$ تعیین می شود. تحت مفروضات (i) تا (v) مساله مقدار مرزی (۲۰.۲) با شرایط مرزی متناظر (۱۵.۲) به طور منحصر به فرد حل پذیر است اگر ماتریس $R_{L,\epsilon}$ در (۲۱.۲) معین منفی باشد.

ملاحظه ۶.۵.۲. از آنجایی که در بیشتر کاربردها n کوچک است (برای مثال، $n = 2, 3, 4$)، پوچ توانی $v_{L,\epsilon}$ از $N_{L,\epsilon}$ به سادگی قابل تعیین است. برای حالتی که $N_{L,\epsilon}$ شامل تنها یک بلوک باشد آنگاه $m_2 = v_{L,\epsilon}$ است.

۲.۵.۲ تبدیل فوریه و اندیس زمانی

علاوه بر اندیس مکانی تعریف شده در قسمت قبل، اندیس زمانی را نیز برای معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی می توان تعریف کرد.

در زیر معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) در تابع اسکالر $\phi_i(x)$ ضرب شده است و روی بازه $[-l, l]$ بر حسب x انتگرال گیری می شود. توابع $\phi_i(x)$ برای $i = 1, 2, \dots$ توابع ویژه متعامد برای عملگر $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ با مقدار ویژه λ_k هستند. همان شرایط مرزی را برآورده می کند که $\phi_j(x, t)$ برای $j \in m_{BC}$ یعنی شرایط همگن (۱۵.۲).

با تعریف تبدیل فوریه متناهی برای تابع برداری $\chi(x, t)$ به صورت

$$\hat{\chi}_k(t) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \chi(x, t) \phi_k(x) dx,$$

رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$A \hat{\chi}'_k(t) + (\lambda_k B + c) \hat{\chi}_k(t) = \hat{P}_k(t) + B \rho_k(t) \bar{P}_k(t) \quad (26.2)$$

با

$$\rho_k(t) = (\rho_{k_1}(t), \dots, \rho_{k_n}(t))^T$$

و

$$\rho_{k_j}(t) = \begin{cases} \circ, & j \in m_{BC} \\ \frac{1}{l} [\phi'_k(x) \varphi_j(x, t) - \phi_k(x) \varphi_j(x, t)]_{x=-l}^{x=l}, & j \notin m_{BC} \end{cases}$$

که با انتگرال گیری جزئی از

$$\int_{-l}^l \varphi_{xx} \phi_k(x) dx$$

حاصل می شود.

اگر ماتریس A منفرد باشد معادله (۲۶.۲) یک معادله دیفرانسیل-جبری است که پارامتر λ_k وابسته است و با شرایط اولیه مناسب و تحت شرط های (iv) و (v) می تواند به صورت یکتایی به دست آید. مشابه حالت تبدیل لاپلاس در بخش قبل، فرض (iv) نتیجه می دهد که ماتریس های منظم $P_{F,k}$ و $Q_{F,k}$ وجود دارند به طوری که

$$P_{F,k} A Q_{F,k} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & \circ \\ \circ & N_{F,k} \end{pmatrix}, \quad P_{F,k} (\lambda_k B + C) Q_{F,k} = \begin{pmatrix} R_{F,k} & \circ \\ \circ & I_{n_2} \end{pmatrix} \quad (27.2)$$

با $R_{F,k} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ، $N_{F,k} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ نیز دوباره یک ماتریس زنجیری جردن پوچ توان با اندیس ریس $v_{F,k}$ است که البته $n_1 + n_2 = n$.

این روابط نتیجه می دهند که معادله (۲۰.۲) هم ارز با دستگاه معادلات دوتایی زیر است:

$$y'_k(t) + R_{F,k} y_k(t) = S_{k,1}(t), \quad (28.2)$$

$$N_{F,k} Z'_k(t) + Z_k(t) = S_{k,2}(t), \quad (29.2)$$

که در آن

$$(y_k^T(t), y_k^T(t))^T = Q_{F,k}^{-1} \hat{\varphi}_k(t), \quad (30.2)$$

$$(S_{k,1}^T(t), S_{k,2}^T(t))^T = P_{F,k}^{-1} \bar{P}_k(t). \quad (31.2)$$

جواب معادله (۲۸.۲) به صورت زیر داده می شود:

$$y_k(t) = e^{-R_{F,k}t} y_k(\circ) + \int_{\circ}^t e^{-R_{F,k}(t-\tau)} S_{k,1}(\tau) d\tau, \quad (32.2)$$

در حالی که جواب معادله (۲۹.۲) بلافاصله به صورت زیر داده می شود:

$$Z_k(t) = \sum_{i=\circ}^{v_{F,k}-1} (-N_{F,k})^i S_{k,2}^{(i)}(t). \quad (33.2)$$

این نمایش نشان می دهد که در حالت کلی نمی توان هیچ شرط اولیه $Z_k(\circ)$ را اعمال کرد زیرا این معادله ایجاب می کند که مقادیر اولیه $Z_k(t)$ توسط توابع سمت راست داده می شوند. همچنین، اگر مولفه جواب نیاز به هموار بودن خاصی داشته باشد آنگاه تابع سمت راست P باید شرط $v_{F,k} \geq 2$ برای اندیس ها را داشته باشد تا نیازهای قوی تری را برای ویژگی های دیفرانسیلی خود برآورده نماید. با این مقدمات می توانیم اندیس زیر را تعریف کنیم:

تعریف ۷.۵.۲. معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) دارای اندیس زمانی دیفرانسیلی یکنواخت برابر $v_{F,k} = v_F$ است هرگاه برای تمام k ها مداد $(A, \lambda_k B + C)$ منتظم بوده و دارای اندیس ریس $v_{F,k} = v_F$ (مستقل از k) باشد و اگر ماتریس زنجیری جردن $N_{F,k}$ برای تمام k ها دارای ساختار یکسانی باشد.

از معادله (۲۷.۲) می توان نتیجه گرفت که اندیس زمانی $v_{n,t}$ اطلاعاتی را نمایان می کند که تابع $S_{k,2}(t)$ دست کم چه ویژگی های دیفرانسیلی ای باید داشته باشد. همچنین، معادله (۲۸.۲) نشان می دهد که n_1 برابر تعداد شرایط اولیه ای است که می تواند برای جواب معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) اعمال شوند.

ملاحظه ۸.۵.۲. اگر ماتریس های A, B و C دارای ساختار ویژه ای باشند ممکن است مداد $(A, \lambda_k B + C)$ برای مقادیر مختلف k دارای اندیس یکسانی نباشد. چنین چیزی فقط برای تعداد متناهی از k اتفاق می افتد که آن را پرش اندیس می نامیم (مثال ۱۲.۵.۲ را ببینید). به طور مشابه، ممکن است ساختار $N_{F,k}$ برای مقادیر k تغییر نماید (مثال ۱۳.۵.۲ را ببینید). چنین مسائلی به صورت کیفی با دسته مسائل دارای اندیس زمانی یکنواخت متفاوت هستند به طوری که تخصیص آنها به دسته دیگری از معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی یک مزیت است.

با اعمال تبدیل لاپلاس روی معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) و انتخاب پارامتر ϵ می توان از پرش اندیس و ساختار متغیر $N_{L,\epsilon}$ دوری کرد. شرایط مشابه در تبدیل فوریه ظاهر نمی شوند زیرا پارامترهای λ_k برای $k = 1, 2, \dots$ کمیت های گسسته ثابتی هستند.

ملاحظه ۹.۵.۲. برای $v_{n,t} = 0$ و $v_{n,x} = 0$ ، دستگاه (۱۲.۲) یک معادله دیفرانسیل-جبری است.

مثال ۱۰.۵.۲. برای معادله دیفرانسیل-جبری جزئی مثال ۱.۴.۲، به سادگی نشان داده می شود که $v_L = 2$ یعنی $v_{d,x} = 3$ و $v_{d,t} = 2$.

مثال ۱۱.۵.۲. فرض کنید در معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲)، مقدار n برابر با ۲ باشد و

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

برای $b_2 = 0$ داریم: $v_{L,\epsilon} = 2$ و $v_{d,x} = 3$. از طرف دیگر، برای $b_2 \neq 0$ داریم: $v_L = 1$ و $v_{d,x} = 1$. همچنین، برای همه b_2 ها، $v_{d,t} = 2$.

مثال های بعدی نمونه هایی از اندیس پرش و تغییر ساختار $N_{F,k}$ می باشند.

مثال ۱۲.۵.۲. فرض کنید $n = 2$ ، A منفرد، B منتظم بوده و شرایط مرزی همگن دیریکله

$$\varphi(l, t) = \varphi(-l, t) = 0$$

برای $t \in [0, t_f]$ داده شده باشند. در حالت خاص که B منتظم است از (۲۶.۲) نتیجه می گیریم که $\rho_k(t) = 0$. فرض کنید ماتریس های A, B و C در $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ به صورت زیر داده شده باشند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

مداد ماتریس $(A, \lambda_K B + C)$ منتظم است اگر که

$$\{b_{\mathfrak{f}}\lambda_k = -c_{\mathfrak{f}} \quad , \quad (b_{\mathfrak{r}}\lambda_k + c_{\mathfrak{r}})(b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}}) \neq 0\}$$

یا

$$b_{\mathfrak{f}}\lambda_k \neq -c_{\mathfrak{f}}.$$

فرض کنید v طوری باشد که $v_A + \lambda_k(B + C)$ منتظم باشد. در این صورت، اندیس ریس برای مداد ماتریس عبارت است از

$$\text{ind}(A, \lambda_k B + C) = \text{ind}(vA + \lambda_k(B + C)) = \begin{cases} 1, & \lambda_k \neq -c_{\mathfrak{f}} \\ 2, & \lambda_k = -c_{\mathfrak{f}} \end{cases}$$

و خواهیم داشت:

- اندیس زمانی یکنواخت برابر ۱ است هرگاه $b_{\mathfrak{f}}\lambda_k \neq -c_{\mathfrak{f}}$ برای هر $k = 1, 2, \dots$

- اندیس زمانی یکنواخت برابر ۲ است هرگاه $b_{\mathfrak{f}} = c_{\mathfrak{f}} = 0$

- اندیس پرش اگر $\lambda_k = -\frac{c_{\mathfrak{f}}}{b_{\mathfrak{f}}}$ برای k .

فرض کنید ماتریس $\lambda_k B + C$ برای تمام $k > 0$ منتظم باشد یعنی $D_k = \det(\lambda_k B + C)$. با به کار بردن فرم جردن نرمال $A^{-1}(\lambda_k B + C)$ ، می‌توانیم نمایش زیر از جواب معادله دیفرانسیل-جبری (۲۶.۲) را ارائه دهیم.

برای حالتی که $b_{\mathfrak{f}}\lambda_k \neq -c_{\mathfrak{f}}$ ، یعنی اگر مداد ماتریس $(A, \lambda_k B + C)$ دارای اندیس ریس ۱ باشد جواب $\hat{\varphi}_k = (\hat{\varphi}_{k_1}, \hat{\varphi}_{k_2})^T$ عبارت است از

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_k(t) = \hat{\varphi}_{k_1}(0) & \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{\mathfrak{r}}\lambda_k + c_{\mathfrak{r}}}{b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}}} \end{pmatrix} e^{-\frac{D_k}{b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}}}t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{P}_{k_2}(t) \\ & + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{\mathfrak{r}}\lambda_k + c_{\mathfrak{r}}}{b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}}} \end{pmatrix} \int_0^t (\hat{P}_{k_1}(\tau) - \frac{b_{\mathfrak{r}}\lambda_k + c_{\mathfrak{r}}}{b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}}} \hat{P}_{k_2}(\tau)) e^{\frac{D_k}{b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}}}(\tau-t)} d\tau, \end{aligned}$$

که $\hat{\varphi}_k = (\hat{\varphi}_{k_1}, \hat{\varphi}_{k_2})^T$ برای $k = 0$ بایستی

$$\hat{u}_k(0) = \begin{pmatrix} \hat{u}_{k_1}(0) \\ \hat{u}_{k_2}(0) \end{pmatrix} = \hat{u}_{k_1}(0) \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b_{\mathfrak{r}}\lambda_k + c_{\mathfrak{r}}}{b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \hat{P}_{k_2}(0).$$

از این طریق شرط سازگاری بین مقادیر اولیه و تابع سمت راست را به دست می‌آوریم:

$$\hat{P}_{k_2}(0) = (b_{\mathfrak{r}}\lambda_k + c_{\mathfrak{r}})\hat{\varphi}_{k_1}(0) + (b_{\mathfrak{f}}\lambda_k + c_{\mathfrak{f}})\hat{\varphi}_{k_2}(0).$$

پس از وارد کردن $\hat{\varphi}_{k_1}(\circ)$ ، $\hat{\varphi}_{k_2}(\circ)$ به طور یکتایی توسط $\hat{\varphi}_{k_1}(\circ)$ و $\hat{P}_{k_2}(\circ)$ تعیین می‌گردد و به صورت دلخواه معین می‌گردد.

جواب (۲۶.۲) برای $b_4\lambda_k = -c_4$ به صورت زیر

$$\hat{\varphi}_k(t) = \left(\frac{\frac{\hat{P}_{k_2}(t)}{b_3\lambda_k + c_3}}{(b_3\lambda_k + c_3)\hat{P}_{k_1}(t) - (b_1\lambda_k + c_1)\hat{P}_{k_2}(t) - P'_{k_2}(t)} \right)$$

داده می‌شود و شرایط سازگاری عبارتند از

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{k_1}(\circ) &= \frac{\hat{P}_{k_2}(\circ)}{b_3\lambda_k + c_3}, \\ \hat{\varphi}_{k_1}(\circ) &= \frac{(b_3\lambda_k + c_3)\hat{P}_{k_1}(\circ) - (b_1\lambda_k + c_1)\hat{P}_{k_2}(\circ) - P'_{k_2}(\circ)}{(b_2\lambda_k + c_2)(b_3\lambda_k + c_3)},\end{aligned}$$

به این معنی که در حالت کلی نمی‌توانیم $\hat{\varphi}_{k_1}(\circ)$ و نه $\hat{\varphi}_{k_2}(\circ)$ را وارد کنیم. تعبیر جواب $\hat{\varphi}_k(t)$ در (۲۶.۲) به عنوان ضریب فوری‌های k -ام تابع $\varphi(x, t)$ است یعنی فرض می‌کنیم $\varphi(x, t)$ و تابع سمت راست $P(x, t)$ دارای بسط سری فوری‌های بر حسب توابع $\phi_k(x)$ هستند و لذا

$$\varphi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k(t) \phi_k(x).$$

بنابراین، برای اندیس زمانی دیفرانسیلی یکنواخت برابر ۱ برای معادله دیفرانسیل-جبری جزئی، تمام معادلات دیفرانسیل-جبری‌های (۲۶.۲) دارای اندیس دیفرانسیلی یک هستند. به این معنی که برای تمام این مسائل مقدار اولیه، می‌توانیم با تعیین کردن $\hat{\varphi}_{k_1}(\circ)$ ، به طور منحصر به فردی $\hat{\varphi}_{k_2}(\circ)$ سازگار را از تابع سمت راست و $\hat{\varphi}_{k_1}(\circ)$ محاسبه نماییم.

با تعیین کردن شرایط اولیه (۱۶.۲) برای مولفه اول $q(x)$ در این مثال (یعنی $\{1\} = m_{IC}$)، سازگاری اولیه بین مقادیر اولیه و توابع سمت راست حاصل می‌شود. به طور مشابه، در حالت اندیس زمانی یکنواخت برابر ۲ (یعنی $m_{IC} = \emptyset$) نمی‌توانیم هیچ شرط اولیه‌ای را تعیین کنیم زیرا آن به طور توسط تابع سمت راست تعیین می‌شود. تعیین شرایط اولیه ۱۶.۲ سازگار با $\hat{\varphi}_k(t)$ در حالت پرش اندیس دشوار است. در مثال، $\lambda_j = -\frac{c_4}{b_4}$ برای یک $j > 0$ و j -امین ضریب فوری‌های $\varphi_1(t, \circ)$ توسط تابع سمت راست داده می‌شود. سایر ضرایب فوری‌های $\varphi_{k_1}(\circ)$ ، $k \neq j$ پارامترهای آزاد هستند. بنابراین، بدون آنالیز فوری‌های، نمی‌توان تعیین کرد که چه شرایط اولیه‌ای برای معادله دیفرانسیل-جبری جزئی ۱۲.۲ تعیین گردد.

مثال ۱۳.۵.۲. فرض کنید $n = 4$ و ماتریس‌های A ، B و C به صورت زیر داده شده باشند:

$$A = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 1 & 1 \\ \circ & \circ & 1 & c \end{pmatrix}.$$

مداد ماتریس $(A, \lambda_k B + C)$ دارای اندیس ریس ۲ است برای تمام مقادیر $k \in \mathbb{N}$. فرض کنید برای یک $C = \lambda_{\bar{k}}, \bar{k} \in \mathbb{N}$. تبدیل کرونگر (۲۷.۲) از مداد $(A, \lambda_{\bar{k}} B + C)$ و مداد $(A, \lambda_k B + C)$ نتیجه می‌دهد: $b = \lambda_k - c, a = 1 - \lambda_k$ و

$$P_{F, \bar{k}} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{F, k} A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

یعنی ماتریس $N_{F, \bar{k}} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ دارای ساختاری دیگری مانند ماتریس $N_{F, k} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ و $k \neq \bar{k}$ است. از (۳۳.۲) نتیجه می‌شود که $\varphi_{\bar{k}}(\circ)$ توسط تابع سمت راست تعیین می‌شود، اما از $\varphi_k(t) = Q_{F, k}(y_k^T, Z_k^T)^T$ به دست می‌آوریم که برای تمام $k \neq \bar{k}$ هر مقدار از مولفه سوم از $\varphi_k(\circ)$ می‌تواند انتخاب گردد. دوباره مشخص نیست که به چه طریقی می‌توان شرایط اولیه معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) را تخصیص دهیم.

۳.۵.۲ اندیس اغتشاشی

علاوه بر اندیس دیفرانسیلی $v_{d, x}$ و $v_{d, t}$ ، داشتن اندیس اغتشاشی برای معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) نیز مفید است. برای این معادلات چندین گونه از اندیس‌های اغتشاشی بر پایه تبدیلات فوریه‌ای تعریف می‌شوند (منبع [۶] را ببینید). از میان سایر اندیس‌ها، این اندیس برای تعیین مشخصه معادله دیفرانسیل-جبری جزئی نسبت به روش‌ها برای جواب عددی قابل استفاده است (مانند روش خطوط). در این رساله، گونه‌ای از اندیس اغتشاشی را انتخاب می‌کنیم که تعمیم‌یافته اندیس اغتشاشی برای معادلات دیفرانسیل-جبری است. تاکید بر این است که اندیس اغتشاشی واقعا یک جفت اندیس اغتشاشی تعریف شده در فضای (x, t) است. این متفاوت از اندیس مکانی $v_{d, x}$ و اندیس زمانی دیفرانسیلی یکنواخت $v_{d, t}$ است که به ترتیب بعد از یک تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه‌ای روی معادله دیفرانسیل-جبری جزئی تعریف می‌شوند. فرض کنید $I = [\circ, t]$ و $\circ < t \leq t_f$.

تعریف ۱۴.۵.۲. تحت شرط (i) معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) دارای جفت اندیس اغتشاشی $[m, k]_p$ به همراه جواب $\varphi(x, t)$ روی $[-l, l] \times [\circ, t_f]$ است، و اگر m و k کوچکترین اعداد صحیح مثبت باشند که برای تمام $\hat{\varphi}(x, t)$ با کاستی

$$A\hat{\varphi}_t(x, t) + B\hat{\varphi}_{xx}(x, t) + C\hat{\varphi}_x(x, t) + D\psi(x, t) = P(x, t) + \delta(x, t)$$

برای شرایط مرزی دیریکله روی $[-l, l] \times [\circ, t_f]$ یک تقریب به صورت زیر وجود داشته باشد:

$$\|\hat{\varphi}(x, t) - \varphi(x, t)\| \leq C_\circ (\|\hat{\varphi}(\circ, x) - \varphi(\circ, x)\| + \sum_{i=\circ}^{m-1} \sum_{j=\circ}^{k-1} \max_{\tau \in I} \|\frac{\partial^{i+j} \delta(\tau, x)}{\partial \tau^i \partial x^j}\|) \\ + C_\backslash \max_{\tau \in I} (\|\hat{\varphi}(\tau, -l) - \varphi(\tau, -l)\| + \|\hat{\varphi}(\tau, l) - \varphi(\tau, l)\|),$$

و باید عبارت سمت راست به اندازه کافی کوچک باشد. δ به عنوان اغتشاش در معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲) تعبیر می‌شود. C_1 و C_2 مقادیر ثابت نامنفی متناهی فرض می‌شوند که به x, t و δ وابسته‌اند. برای شرایط مرزی نیومن (در معادله (۱۵.۲) با $k = 1$) سطر دوم سمت راست با عبارت زیر جایگزین می‌گردد:

$$C_1 \sum_{j \in m_{BC}} \max_{\tau \in I} \left(\left\| \frac{\partial(\hat{\varphi}_j(\tau, -l) - \varphi_j(\tau, -l))}{\partial x} \right\|_{SC} + \left\| \frac{\partial(\hat{\varphi}_j(\tau, l) - \varphi_j(\tau, l))}{\partial x} \right\|_{SC} \right) \\ + C_2 \sum_{j \notin m_{BC}} \max_{\tau \in I} (\|\hat{\varphi}_j(\tau, -l) - \varphi_j(\tau, -l)\| + \|\hat{\varphi}_j(\tau, l) - \varphi_j(\tau, l)\|),$$

که در آن $\|\cdot\|_{SC}$ یک نرم مناسب از یک اسکالر است و C_2 یک ثابت نامنفی متناهی است.

اگر وابستگی به x وجود نداشته باشد آنگاه تمام مشتقات بر حسب x صفر می‌شوند. در این صورت، این تعریف دقیقاً همان اندیس اغتشاشی برای معادلات دیفرانسیل-جبری خواهد بود.

۴.۵.۲ رابطه اندیس اغتشاشی و اندیس‌های زمانی و مکانی

تحت برخی شرایط، رابطه‌ای بین جفت اندیس اغتشاشی $[m, k]_p$ و دو اندیس دیفرانسیلی تعریف شده در قبل وجود دارد. برای نشان دادن آن، فرض می‌کنیم که یک اغتشاش داده شده است و $\hat{\varphi}$ را برای مساله مقدار مرزی اولیه معادله دیفرانسیل-جبری جزئی با اغتشاش داده شده در تعریف را تعیین می‌کنیم.

لم ۱۵.۵.۲. فرض کنید $t_f = \infty$ و $\hat{\varphi}$ به اندازه کافی هموار بوده و در شرط نمو (شرط (ii)) صدق نماید. علاوه بر این، فرض کنید $v_{d,x}$ اندیس دیفرانسیلی مکانی برای معادله دیفرانسیل-جبری جزئی باشد و یک اندیس دیفرانسیلی یکنواخت $v_{d,t}$ وجود داشته باشد. آنگاه جفت اندیس اغتشاشی معادله دیفرانسیل-جبری جزئی به صورت $[m, k]_p = [v_{d,t}, v_{d,x}]$ داده می‌شود.

برهان. کافی است نشان داده شود که بالاترین مرتبه مشتق اغتشاش δ نسبت به t و x که در $\hat{\varphi}(x, t)$ رخ می‌دهند به ترتیب برابر $(v_{d,t} - 1)$ و $(v_{d,x} - 1)$ هستند. برای این منظور از دو نمایش تابع $\hat{\varphi}$ استفاده می‌کنیم که تحت مفروضات، موجود و منحصر به فرد است (یک نمایش توسط سری فوریه و یک نمایش با تبدیل لاپلاس). ابتدا با قرار دادن δ به جای P در معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱۲.۲)، مشتق δ نسبت به x را در نظر می‌گیریم. با توجه به بخش ۱.۲، بالاترین مرتبه مشتق زمانی در تبدیل فوریه $\bar{P}_k(t) + P_k(t)$ از مرتبه $(v_{F,k} - 1)$ است. از آنجایی که تبدیل معکوس فوریه، مرتبه مشتق نسبت به زمان را تغییر نمی‌دهد و چون فرض می‌شود که اندیس زمانی یکنواخت است (یعنی $v_{F,k} = v_F$) نتیجه می‌گیریم که بالاترین مرتبه مشتق زمانی از δ در فضای (x, t) برابر با $(v_F - 1)$ است. اما این یعنی $m = v_F = v_{d,t}$ (تعریف ۷.۵.۲). در قسمت دوم، فرض می‌کنیم که $\hat{\varphi}(x, t)$ بالاترین مرتبه مشتق نسبت به x از $\delta(x, t)$ باشد. در اینجا از تبدیل لاپلاس $\hat{\varphi}(x, t)$ استفاده می‌کنیم.

$$\hat{\varphi}_\epsilon(x) = Q_{L,\epsilon}(\hat{u}_\epsilon^T(x), \hat{\omega}_\epsilon^T(x))$$

با مفروضات لم $\hat{\varphi}_\epsilon$ وجود دارد. از فرضیات (i)-(iv) و معادله (۲۴.۲) می‌بینیم که مرتبه مشتق از تبدیل لاپلاس δ_ϵ از مرتبه $2v_L - 2$ است. چون تبدیل لاپلاس مرتبه مشتق نسبت به x را تغییر نمی‌دهد و از تعریف ۱۴.۵.۲ نتیجه می‌گیریم که $k = 2v_L - 1$ باید انتخاب گردد. با توجه به تعریف ۴.۵.۲ این دقیقاً همان

$v_{d,x}$ است یعنی $k = v_{d,x}$. از آنجایی که بالاترین مشتق زمانی δ که در $\hat{\varphi}$ رخ می‌دهد برابر $1 - v_F$ است اثبات کامل می‌گردد. $\square$

مثال ۱۶.۵.۲. برای معادله دیفرانسیل-جبری جزئی مثال (۱.۴.۲)، $t_f = \infty$ را انتخاب می‌کنیم که φ و $\hat{\varphi}$ هر دو (مولفه‌وار) در یک شرط نمو (شرط (ii)) صدق نمایند. آنگاه مفروضات لم (۱۵.۵.۲) برقرار هستند. در مثال (۱۰.۵.۲) داریم: $[m, k]_p = [2, 3]$. همچنین، از جواب معادله دیفرانسیل-جبری جزئی می‌بینیم که هیچ مشتق آمیخته (نسبت به زمان و مکان) از $\delta(x, t)$ در $\hat{\varphi}(x, t)$ ظاهر نمی‌شود. در حالت کلی، این سوال که آیا مشتق آمیخته‌ای در تقریب $\|\hat{\varphi}(x, t) - \varphi(x, t)\|$ ظاهر می‌شود یا نه، به سادگی از تبدیل لاپلاس $\varphi_\epsilon(x)$ مشخص می‌گردد.

۶.۲ کاربرد معادله دیفرانسیل-جبری جزئی در نظریه کنترل

۱.۶.۲ سیاست‌های بازسازی زیستی و زنجیره تغذیه‌ای (غذایی)

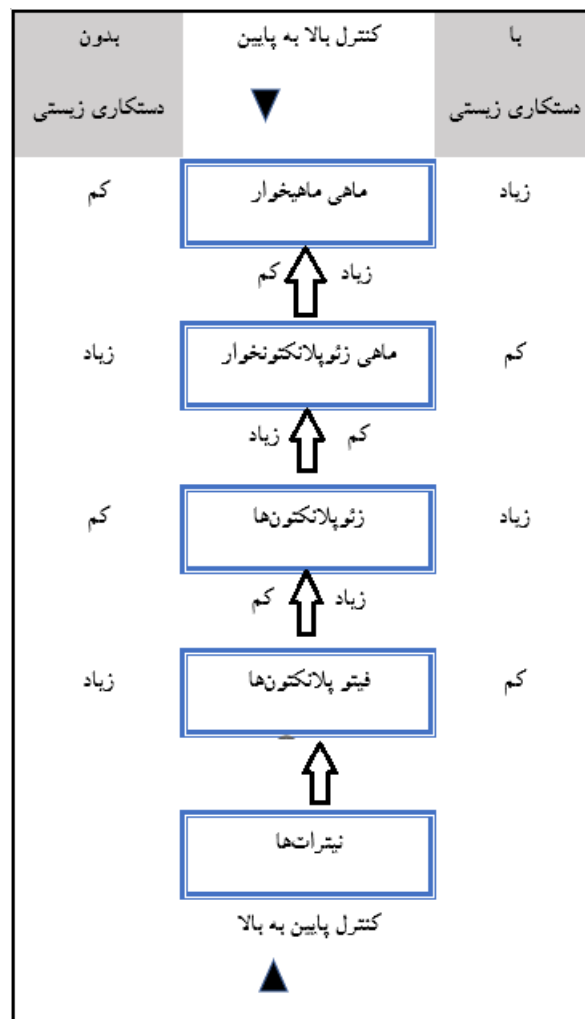
برای تلاش در پرداختن به احیای زیستی، یک تالاب آزمایشی گیاهی در کنار دریاچه ساخته شده است تا فسفات و نیتрат آن حفظ شوند [۲۲]. به این ترتیب بارگذاری خارجی مواد مغذی موجود در دریاچه را می‌توان کاهش داد. اطلاعاتی در مورد ظرفیت نگهداری این تالاب وجود دارد که امکان بررسی بیشتر در مورد نیاز به سیاست‌های بازسازی اضافی را فراهم می‌کند. کاهش بارگذاری مواد مغذی خارجی (کنترل از پایین به بالا) ممکن است برای بهبود کیفیت آب کافی نباشد. بازیافت مواد مغذی که در بدنه‌های آبی انجام می‌شود به طوری که استفاده از استراتژی‌های بازسازی درون دریاچه ضروری می‌شود. در میان آنها، لایروبی، تثبیت رسوب با آهن یا آلومینیوم برای کاهش آزادسازی داخلی فسفر، اقدامات هیدرولوژیکی مانند فلاشینگ، جداسازی و دستکاری زیستی اعمال شده است. تکنیک‌های بازسازی دریاچه که بر اساس نظریه زنجیره غذایی است دستکاری زیستی نامیده می‌شوند. این روش بر اساس تئوری کنترل از بالا به پایین در جامعه دریایی دریاچه‌ها که در آن ساختار تغذیه‌ای توسط حلقه‌های زنجیره تغذیه‌ای مصرف‌کننده کنترل می‌شود پشتیبانی می‌شود. ایده اصلی این است که برداشتن ماهیان زئوپلانکتون یا ذخیره ماهی‌های خوار یا ترکیبی از هر دو را انجام دهیم تا فشار مصرف بالا بر روی جامعه فیتوپلانکتون توسط زئوپلانکتون گیاه‌خوار حفظ شود. اگرچه تئوری کنترل از بالا به پایین زنجیره تغذیه برخلاف نظریه کنترل رجوع (کنترل از پایین به بالا) است، دستکاری زیستی و کاهش بارگیری مواد مغذی باید با هم برای اهداف مدیریت دریاچه انجام شود.

۲.۶.۲ مدل انباشتگی خوراک آب

فرآیندهای بیوژئوشیمیایی که در بدنه‌های آبی اتفاق می‌افتند را می‌توان از طریق مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی نشان داد که از تعادل جرم دینامیکی برای اجزای اصلی در امتداد ستون آب حاصل می‌شود.

در اینجا مدل دیفرانسیل-جبری جزئی حاصل با گسسته‌سازی به مجموعه معادلات دیفرانسیل-جبری معمولی برای هر لایه افقی آب به یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. داده‌های مشاهده شده موجود برای مخزن امکان گسسته‌سازی در دو لایه آب را فراهم کرده است.

موازنه جرم اجزای پویا بر روی فیتوپلانکتون‌ها (به شکل دیاتوم‌ها، کلروفیتا و سیانوباکتیریا)، اکسیژن محلول، نیاز بیوشیمیایی اکسیژن و مواد مغذی که شامل نیترات، آمونیوم، نیتروژن آلی، فسفات و فسفر آلی است فرموله شده است. ترازها شامل ورودی‌های جزء از سرشاخه‌ها، خروجی‌ها برای مقاصد مستلزم و صنعتی و خود رودخانه، شرایط تولید و مصرف و انتقال بین لایه‌ها می‌شود، همچنین تغییرات حجم دریاچه (از طریق تغییر ارتفاع لایه بالایی) را در نظر می‌گیرد. از طرف دیگر، موازنه جرم کلی ورودی‌های حاصل از باران و خروجی‌های ناشی از تبخیر را در نظر می‌گیرد. معادلات جبری نمایانگر مشخصات دما، تابش خورشیدی و جریان ورودی رودخانه، علاوه بر معادلات نرخ و بسیاری از عوامل موثر بر معادلات نرخ، مانند اثر تابش خورشیدی و مواد مغذی است.



شکل ۱.۲: مراحل کنترل در چرخه خوراک آب

توازن جرم کل

$$\frac{dh_T}{dt} = \frac{1}{A} [Q_{rain} - Q_{evap} + \sum_{k=1}^{N_{IN}} Q_{IN_k} - \frac{1}{A} \sum_{m=1}^{N_{OUT}} Q_{OUT_m}]. \quad (34.2)$$

موازنه جرم اجزا برای لایه‌های افقی (U : لایه بالایی، L : لایه پایینی، j : سیانوباکتری‌ها، دیاتوم‌ها، کلروفیت‌ها، نیترات، آمونیوم، نیتروژن آلی، فسفات، فسفر آلی، نیاز بیوشیمیایی اکسیژن، اکسیژن محلول)

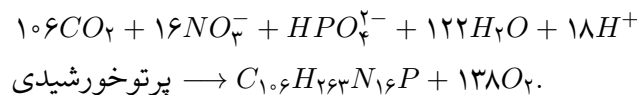
لایه بالایی

$$\begin{aligned} \frac{dC_{Uj}}{dt} = & \sum_{k=1}^{N_{IN}} \frac{Q_{IN_{U,k}}}{V_U} C_{IN_{Ujk}} - \sum_{m=1}^{N_{OUT}} \frac{Q_{OUT_U}}{V_U} C_{Uj} + r_{Uj} \\ & - \frac{kdA}{\Delta h_U h_U} (C_{Uj} - C_{Lj}) - \frac{C_{Uj}}{h_U} \frac{dh_U}{dt}. \end{aligned} \quad (35.2)$$

لایه پایینی

$$\frac{dC_{Lj}}{dt} = \sum_{m=1}^{N_{OUT}} \frac{Q_{OUT_L}}{V_L} C_{Lj} + r_{Lj} - \frac{kdA}{\Delta h_L h_L} (C_{Lj} - C_{Uj}) - \frac{C_{Lj}}{h_L} \frac{dh_L}{dt}. \quad (36.2)$$

معادلات (۳۴.۲) - (۳۶.۲) توازن جرم کلی و جزء را را برای هر لایه نشان می‌دهد که اندیس‌های L و U به ترتیب به لایه پایینی و بالایی اشاره دارند. حجم لایه پایینی یعنی V_L ثابت در نظر گرفته شده است در حالی که تغییرات حجم کل در حجم لایه بالایی با V_U و ارتفاع آن با h_U نمایش داده شده‌اند. تا آنجایی که به کنترل اوتروفیکاسیون مربوط می‌شود مواد مغذی اصلی نیتروژن و فسفر هستند. جلبک‌ها از طریق فتوسنتز تولید می‌شوند:



بنابراین، کنترل یک عنصر برای محدود کردن رشد جلبک مورد نیاز است. به طور کلی، فسفات به عنوان ماده غذایی محدود کننده برای بهره‌وری اولیه در اکوسیستم‌های آب شیرین در نظر گرفته می‌شود و کنترل آن معمولاً بهترین استراتژی برای اهداف مدیریتی است همان‌طوری که در این کار در نظر گرفته می‌شود. فیتوپلانکتون: معادلات نرخ برای گروه‌های فیتوپلانکتون‌ها تولید و تلفات ناشی از تنفس، مرگ طبیعی، ته‌نشین شدن توسط ژئوپلانکتون‌های گیاه‌خوار را در نظر می‌گیرد.

$$r_{ij} = R_{ij,growth} - R_{ij,resp} - R_{ij,death} - R_{ij,settling} - R_{ij,graz}, \quad (37.2)$$

که در آن $i = UL, LL$ و $j = cyano, diatom, chlorophyte$.

سرعت رشد سه گروه فیتوپلانکتون تابعی از تابش خورشید، دمای آب و در دسترس بودن مواد مغذی است. اثر تابش خورشیدی و مواد مغذی بر سرعت رشد فیتوپلانکتون‌ها به دنبال یک مدل ضربی انجام می‌شود.

$$R_{ij} = k_i f(T)_{ij} f(I)_{ij} f(N)_{ij} C_{ij}, \quad (38.2)$$

که در آن $i = UL, LL$ و $j = cyano, diatom, chlorophyte$.
تابع محدودیت دما برای سه گروه فیتوپلانکتون از ژانگ^۴ و همکارانش پیروی می‌کند (۲۰۰۴).

$$f(T)_{ij} = -\frac{(T_i - T_{opt_i})^2}{T_{opt_i}^2} + 1, \quad (39.2)$$

که در آن $i = UL, LL$ و $j = cyano, diatom, chlorophyte$.
تابع Steele برای در نظر گرفتن کنترل تابش خورشیدی بر رشد فیتوپلانکتون‌ها، همراه با قانون بیر برای تنظیم انقراض تابش خورشیدی ورودی با عمق اعمال می‌شود.

$$f(I)_{ij} = \frac{I_{oi}}{I_{opt_j}} \exp\left(1 - \frac{I_{oi}}{I_{opt_j}}\right), \quad (40.2)$$

که در آن $i = UL, LL$ ، $j = cyano, diatom, chlorophyte$ و

$$I_{oi} = \frac{I[1 - \exp(-K_e \Delta D_i)]}{K_e \Delta D_i}, \quad (41.2)$$

$$K_e = K_1 + K_2 \frac{\sum_{j=1}^r C_j}{ccl}, \quad (42.2)$$

که در آن I تابش خورشیدی ورودی در یک روز بر حسب واحد ly و K_e ضریب خاموشی نور است.

$$f(N)_{ij} = \frac{C_{i,PO_4}}{C_{i,PO_4} + K_{P_i}}, \frac{C_{Si_i}}{C_{Si_i} + K_{S_j}}, \quad i = UL, LL \quad j = diatom, \quad (43.2)$$

$$f(N)_{ij} = \frac{C_{PO_4j}}{C_{PO_4j} + K_{P_i}}, \quad i = UL, LL \quad j = cyano, chlorophyte. \quad (44.2)$$

تنفس فیتوپلانکتون و نرخ مرگ و میر طبیعی به صورت زیر داده شده‌اند:

$$R_{ij,resp} = k_{j,resp} \theta_r^{(T-20)} C_{ij}, \quad (45.2)$$

$$R_{ij,death} = k_{j,resp} \theta_m^{(T-20)} C_{ij}, \quad (46.2)$$

که در آن $i = UL, LL$ و $j = cyano, diatom, chlorophyte$.
از آنجایی که گونه‌های فیتوپلانکتون متراکم‌تر از آب هستند عبارتی که ته‌نشین شدن سلول‌ها را در نظر می‌گیرد هم لحاظ می‌شود:

$$R_{ij,settling} = k_{j,settling} \frac{C_{ij}}{h_i}, \quad (47.2)$$

^۴Zhang

که در آن $i = UL, LL$ و $j = cyano, diatom, chlorophyte$. میزان چرای زئوپلانکتون‌های گیاه‌خوار عبارت است از

$$R_{ij,graz} = k_{j,graz} \frac{C_{ij}}{C_{ij} + K_{graz}}, \quad (۴۸.۲)$$

که در آن $i = UL, LL$ و $j = cyano, diatom, chlorophyte$. تفاوت در نرخ رشد برای سه گروه فیتوپلانکتون با تفاوت بین حداکثر نرخ رشد، سینتیک مواد مغذی، نور بهینه و نیازهای دما مشخص می‌شود. توجه ویژه باید به توصیف بازیافت مواد مغذی داخلی مواد مغذی معطوف شود که امکان درک فرآیندهای بیولوژیکی و شیمیایی را که در بدن آب اتفاق می‌افتد، و همچنین مفهوم زیربنای استراتژی‌های مختلف بازسازی را می‌دهد.

فصل ۳

حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی با روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین

در این فصل، ابتدا فرم خاص یک معادله دیفرانسیل-جبری جزئی و درونیاب فاقد شبکه توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده را معرفی می‌کنیم و سپس به بررسی پایداری روش فاقد شبکه بر معادله دیفرانسیل-جبری می‌پردازیم. در ادامه، الگوریتم حل عددی معادله دیفرانسیل-جبری خطی را به کمک روش فاقد شبکه پترو-گالرکین تشریح کرده و با حل چند نمونه عددی کارایی روش را نشان می‌دهیم.

۱.۳ معادله دیفرانسیل-جبری جزئی

معادله دیفرانسیل-جبری جزئی زیر را روی دامنه Ω و محدود به مرز Γ در نظر می‌گیریم [۳۹]:

$$A\Psi_t(x, t) + B\Psi_{xx}(x, t) + C\Psi_x(x, t) + D\Psi(x, t) = P(x, t), \quad (1.3)$$

که

$$t \in [t_0, t_f] \quad , \quad x \in [x_1, x_2] \quad , \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

و

$$\Psi, P : [x_1, x_2] \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

قابل ذکر است که در حالت‌های خاص، اگر $A = 0$ و یا اینکه $B = 0$ و $C = 0$ باشند آنگاه معادله مورد نظر به فرم یک معادله دیفرانسیل معمولی و یا اینکه یک معادله دیفرانسیل-جبری تبدیل خواهد شد. در حالت کلی، لازم است که معادله دیفرانسیل-جبری جزئی فوق در شرایط مرزی و اولیه زیر صدق کند:

$$E\Psi(x, t) + F\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial n} = \mathbf{q}(x, t), \quad (2.3)$$

که $x \in \Gamma, t \in [t_0, t_f]$ و

$$\Psi(x, t_0) = \Psi_0(x), \quad (3.3)$$

به طوری که E و F ماتریس‌های معلوم هستند، $q: [x_1, x_2] \times [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ و Ψ توابع معلوم می‌باشند و $\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial n}$ مشتق بردار نرمال می‌باشد.

مارک زالک^۱ [۳۹] تعریفی از معادله دیفرانسیل-جبری جزئی را برای حالتی که در معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱.۳) داشته باشیم: $C = 0$ ، $x_1 = 0$ و $x_2 = l$ ، ارائه کرده است. شرایط مرزی و اولیه به صورت

$$\Psi(0, t) = 0, \Psi(l, t) = 0, \Psi(x, 0) = q$$

می‌باشند که P و q به اندازه کافی هموار هستند و در شرایط مرزی و اولیه صدق می‌کنند.

۲.۳ توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده

درونیایی با استفاده از توابع شعاعی به عنوان یک ابزار قوی در نظریه تقریب چند متغیره استفاده می‌شود [۴۸، ۵۷]، به ویژه از زمانی که توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده ایجاد شد. توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده نشان داد که همیشه برای هر بعد و هموار بودن از درجه C^{2p} داده شده، یک تابع پایه‌ای شعاعی مثبت اکید به فرم یک چندجمله‌ای یک متغیره از درجه مینیمال وجود دارد و منحصر به فرد می‌باشد. انواع مختلف توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده که توسط وو (۵۴) (ζ^5, ζ^6) و وندلند (۵۲) $(\zeta^1 - \zeta^4)$ معرفی شده‌اند را در زیر ارائه کرده‌ایم که در این تحقیق مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

$$\begin{aligned} \zeta_i^1(x) &= (1 - \frac{\delta_i}{s_i})^2, & 0 \leq \delta_i \leq s_i, \\ \zeta_i^2(x) &= (1 - \frac{\delta_i}{s_i})^4(1 + 4\frac{\delta_i}{s_i}), & 0 \leq \delta_i \leq s_i, \\ \zeta_i^3(x) &= (1 - \frac{\delta_i}{s_i})^6(3 + 18\frac{\delta_i}{s_i} + 35\frac{\delta_i^2}{s_i^2}), & 0 \leq \delta_i \leq s_i, \\ \zeta_i^4(x) &= (1 - \frac{\delta_i}{s_i})^8(1 + 8\frac{\delta_i}{s_i} + 25\frac{\delta_i^2}{s_i^2} + 32\frac{\delta_i^3}{s_i^3}), & 0 \leq \delta_i \leq s_i, \\ \zeta_i^5(x) &= (1 - \frac{\delta_i}{s_i})^5(8 + 40\frac{\delta_i}{s_i} + 48\frac{\delta_i^2}{s_i^2} + 25\frac{\delta_i^3}{s_i^3} + 5\frac{\delta_i^4}{s_i^4}), & 0 \leq \delta_i \leq s_i, \\ \zeta_i^6(x) &= (1 - \frac{\delta_i}{s_i})^6(6 + 36\frac{\delta_i}{s_i} + 82\frac{\delta_i^2}{s_i^2} + 72\frac{\delta_i^3}{s_i^3} + 30\frac{\delta_i^4}{s_i^4} + 5\frac{\delta_i^5}{s_i^5}), & 0 \leq \delta_i \leq s_i, \end{aligned} \quad (4.3)$$

و در غیر این صورت

$$\zeta_i^k(x) = 0, \text{ برای } k = 1, \dots, 6$$

که

- δ_i فاصله تا نقطه x to x_i ,
- s_i اندازه محمل در نقطه x_i ,
- x_i گره i -ام.

^۱Marszalek

حال اگر در نظر بگیریم که Φ_i تقریبی از تابع در زیردامنه $\Omega_s^{(i)}$ باشد آنگاه توابع پایه‌ای شعاعی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \zeta^T(\mathbf{x})\mathbf{a}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_s^{(i)},$$

بر روی تعدادی از نقاط پراکنده $\mathbf{x}_i$ که $i = 1, \dots, Q$ اکنون بعد از درونیایی توسط توابع پایه‌ای با محمل فشرده، دستگاهی از معادلات خطی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\zeta_* \mathbf{a} = \Phi,$$

به طوری که

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_Q \end{pmatrix}, \quad \zeta_* = \begin{pmatrix} \zeta_1(\mathbf{x}_1) & \zeta_2(\mathbf{x}_1) & \dots & \zeta_Q(\mathbf{x}_1) \\ \zeta_1(\mathbf{x}_2) & \zeta_2(\mathbf{x}_2) & \dots & \zeta_Q(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta_1(\mathbf{x}_Q) & \zeta_2(\mathbf{x}_Q) & \dots & \zeta_Q(\mathbf{x}_Q) \end{pmatrix},$$

که $\zeta^T(\mathbf{x}) = [\zeta_1(\mathbf{x}), \zeta_2(\mathbf{x}), \dots, \zeta_N(\mathbf{x})]$ مجموعه توابع پایه‌ای شعاعی هستند با مراکز $\mathbf{x}_i$ بردار ضرایب $\mathbf{a}$ باشد و ϕ_i ها برای $i = 1, \dots, Q$ مقادیر در گره‌ها هستند. از آنجایی که توابع پایه‌ای شعاعی مثبت معین هستند می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس ζ_* نامنفرد است. بنابراین، با ضرب ζ_*^{-1} در طرفین معادله (۲.۳)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} = \zeta_*^{-1} \Phi. \quad (۵.۳)$$

در نتیجه، تابع تقریب $\Phi(\mathbf{x})$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \zeta \zeta_*^{-1} \Phi = \sum_{i=1}^Q \chi_i(\mathbf{x}) \Phi, \quad (۶.۳)$$

که $\chi(\mathbf{x}) = \zeta(\mathbf{x})\zeta_*^{-1}$ تابع شکل گره‌ای است که وابسته به نقاط پراکنده در زیردامنه می‌باشد و دارای خاصیت دلتای کرونکر هست. توابع شکل گره‌ای را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\chi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^Q \zeta_j(\mathbf{x})(\zeta_*^{-1})_{ji}.$$

همچنین، می‌توان مشتق این توابع را به صورت زیر به دست آورد:

$$\frac{\partial \chi(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial \zeta(\mathbf{x})}{\partial x_k} \zeta_*^{-1} = \left[\frac{\partial \zeta_1(\mathbf{x})}{\partial x_k} \quad \frac{\partial \zeta_2(\mathbf{x})}{\partial x_k} \quad \dots \quad \frac{\partial \zeta_Q(\mathbf{x})}{\partial x_k} \right] \zeta_*^{-1}$$

برای $k = 1, \dots, n$ ، که

$$\frac{\partial \chi_j(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^Q \frac{\partial \zeta_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} (\zeta_i^{-1})_{ij} \quad (۷.۳)$$

برای $j = 1, \dots, Q$ و

$$\frac{\partial \zeta_i(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \frac{\partial \zeta_i(\mathbf{x})}{\partial \delta_i} \frac{\partial \delta_i}{\partial x_k} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \delta_i}{\partial x_k} = \frac{x_k - x_k^i}{\delta_i}.$$

۱.۲.۳ انتخاب نقاط پراکنده

در روش‌های بدون شبکه، انتخاب نقاط به منظور پوشش دامنه و مرز صورت تاثیر به‌سزایی در فرایند حل و دقت جواب خواهد داشت. با توجه به مسئله و شرایط آن و همچنین وضعیت دامنه و مرز مسئله باید نقاط پراکنده به شکل مناسب انتخاب شود. برای انتخاب نقاط روش‌های پرتعدادی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ادامه به چند روش برای انتخاب نقاط اشاره می‌کنیم.

نقاط متساوی‌الفاصله

نقطاتی که با فواصل مساوی در جهت محورهای مختصات از یکدیگر در نظر گرفته می‌شود.

نقاط پادوا

نقاط پادوا مجموعه‌ای از نقاط برای درونیایی تابع دومتغیره روی مربع واحد است. با دوران نود درجه در چهار جهت، چهار خانواده مختلف از نقاط پادوا به‌دست می‌آیند. نقاط پادوا نمونه‌ای از نقاط روی منحنی پارامتری است که منحنی مولد نامیده می‌شوند به طوری که منحنی مولد در هر یک از چهار خانواده متفاوت است. برای مثال مختصات نقاط روی منحنی مولد خانواده اول برای $n > 0$ به صورت زیر است:

$$y_i^{PD} = \begin{cases} \cos\left(\frac{(2i-2)\pi}{n+1}\right), & \text{فرد } n \\ \cos\left(\frac{(2i-1)\pi}{n+1}\right), & \text{زوج } n \end{cases}, \quad 1 < i < \frac{n}{2},$$

$$x_j^{PD} = \cos\left(\frac{(j-1)\pi}{n}\right), \quad 1 < j < n+1,$$

که تعداد نقاط پادوا در $[-1, 1]^2$ برابر $N = \binom{n+2}{2}$ است.

نقاط هالتون

یکی از روش‌های رایج انتخاب نقاط می‌باشد که دامنه مساله را به خوبی پوشش می‌دهد و با توجه به مساله و دامنه حل آن می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. نقاط هالتون از دنباله هالتون نتیجه می‌شود و اساس دنباله هالتون نیز اعداد اول می‌باشد. دنباله نقاط هالتون را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$Halton(p)_k = \sum_{i=1}^{\lfloor \log_p^k \rfloor} \frac{1}{p^{i+1}} \left(\left[\frac{k}{p^i} \right] \bmod p \right),$$

که p یک عدد اول است.

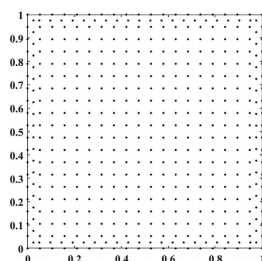
نقاط کوادراتور گوسی

نقاط کوادراتور گوسی معمولاً در بازه $[-1, 1]$ انتخاب می‌شوند. البته برای مشخص کردن نقاط گوسی در سایر بازه‌ها $[a, b]$ به سادگی با تغییر متغیر $x = \frac{(b-a)y + (b+a)}{2}$ به دست می‌آیند. مقادیر مختلف نقاط کوادراتور گوسی با روش‌های مختلفی قابل محاسبه هستند و البته جدول‌هایی وجود دارند که در اختیار استفاده‌کنندگان قرار می‌گیرند. از جمله خصوصیات این دسته از فرمول‌های انتگرال‌گیری گاوس این است که اگر تعداد نقاط N زوج باشد آنگاه

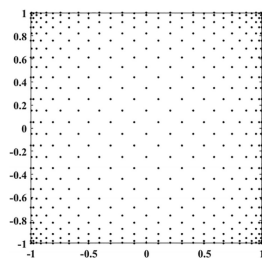
$$x_{N-i+1} = -x_i, \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2}$$

و اگر تعداد نقاط فرد باشد آنگاه

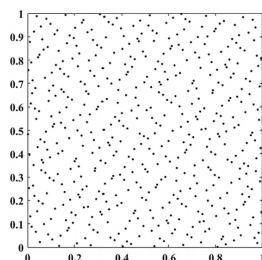
$$x_{N-i+1} = -x_i, x_{\frac{N+1}{2}} = 0, \quad i = 1, \dots, \frac{N}{2}$$



شکل ۱.۳: پراکندگی نقاط متساوی‌فاصله در دامنه مربعی.



شکل ۲.۳: پراکندگی نقاط پادوا در دامنه مربعی.



شکل ۳.۳: پراکندگی نقاط هالتون در دامنه مربعی.

۳.۳ روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین برای حل معادله دیفرانسیل-جبری جزئی

برای بهتر مشخص شدن موضوع، جزئیات بخش را در چند قسمت پشت سر هم بیان می‌کنیم.

۱.۳.۳ روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین

برخلاف روش‌های عناصر متناهی و آزاد گالرکین که برای حل عددی از فرم ضعیف سراسری بر روی دامنه داخلی Ω استفاده می‌شود، در فرمول‌بندی روش فاقد شبکه پترو-گالرکین بر روی فرم ضعیف محلی مساله در تعداد مشخصی از زیردامنه‌های Ω_s کار می‌کنیم [۵، ۱].

با توجه به بی‌تاثیر بودن اندازه و شکل زیردامنه‌ها در روش ارائه شده و طبق روال معمول در دو بعد، $N \times M = Q$ زیردامنه به شکل دایره با مراکز $\mathbf{x}_i$ ، $i = 1, \dots, Q$ و شعاع r_0 در دامنه سراسری و مرز آن در نظر می‌گیریم.

انتگرال‌گیری از فرم ضعیف روی زیردامنه‌های محلی دایره ای اجرا می‌شود. بنابراین، هیچ عنصر و یا خانه زمینه‌ای برای درونیایی و یا حتی انتگرال‌گیری نیاز نمی‌باشد. روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین بر پایه فرم ضعیف محلی متقارن (۱۰.۳) می‌باشد که در منابع [۱۱، ۱۲] با جزئیات کامل روی آن بحث شده است.

انتخاب تابع آزمایش و تابع تست از فضاها متفاوت یکی از ویژگی‌های مهم روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین است. به ویژه که تابع تست روی مرز نمی‌تواند صفر باشد. در پنجمین حالت از روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین [۱۰] که در این تحقیق استفاده شده است، تابع پله‌ای هویساید به عنوان تابع تست و تابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده به عنوان تابع آزمایش در هر زیردامنه در نظر گرفته شده است.

۲.۳.۳ فرمول‌بندی فرم ضعیف محلی

لم ۱.۳.۳. فرض کنید Ω یک زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^n$ است، با مرزی که یا هموار قطعه‌ای $\Gamma = \partial\Omega$ است و یا حداقل پیوسته لیپ‌شیتز می‌باشد. تابع اسکالر u و تابع برداری V ، متعلق به فضای سوبولوف می‌باشند. در این صورت،

$$\int_{\Omega} u \nabla \cdot V \, d\Omega = \int_{\Gamma} u V \cdot \hat{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot V \, d\Omega.$$

برهان. برای تابع اسکالر u و تابع برداری V ، قانون ضرب دیورژانس را به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\nabla(uV) = u\nabla V + \nabla u \cdot V.$$

اگر Ω یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ با مرز Γ باشد آنگاه بعد از انتگرال‌گیری استاندارد حجم به روی Ω و به کار بردن قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\int_{\Gamma} u V \cdot \hat{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla(uV) \, d\Omega = \int_{\Omega} u \nabla \cdot V \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot V \, d\Omega, \quad (۸.۳)$$

□

که با جابجایی معادله (۸.۳) حاصل می‌شود. $\hat{n}$ بردار واحد نرمال بر مرز است.

قضیه ۲.۳.۳. فرم ضعیف معادله دیفرانسیل-جبری جزئی

$$A\Psi_t(x, t) + B\Psi_{xx}(x, t) + C\Psi_x(x, t) + D\Psi(x, t) = P(x, t)$$

با شرایط مرزی و اولیه

$$E\Psi(x, t) + F\frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial n} = \mathbf{q}(x, t)$$

و

$$\Psi(x, t_0) = \Psi_0(x)$$

را در هر زیردامنه Ω_s به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\int_{\Gamma_{su}} q \, d\Gamma + \int_{L_s} q \, d\Gamma + D \int_{\Omega_s} \varphi \, d\Omega - \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi \, d\Gamma = \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_0 + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q} \, d\Gamma - \int_{\Omega_s} P \, d\Omega. \quad (9.3)$$

برهان. فرض کنید φ تابع تریال و تقریبی از جواب معادله دیفرانسیل-جبری جزئی در نظر گرفته شده باشد. فرم ضعیف محلی را در هر زیردامنه $\Omega_s^{(i)}$ برای $i = 1, \dots, Q$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_s} [A\varphi_t(x, t) + B\varphi_{xx}(x, t) + C\varphi_x(x, t) + D\varphi(x, t) - P(x, t)] \mu \, d\Omega \\ - \eta \int_{\Gamma_{su}} [\varphi(x, t) - \varphi(x, t_0)] \mu \, d\Gamma = 0, \end{aligned}$$

که در آن

- μ تابع تست است،
- L_s قسمتی از مرز زیردامنه محلی است که هیچ شرطی روی آن تعریف نشده است،
- Γ_{sq} قسمتی از مرز زیردامنه محلی است که شرایط مرزی طبیعی روی آن تعریف شده است،
- Γ_u قسمتی از مرز زیردامنه محلی است که شرایط مرزی ضروری روی آن تعریف شده است،
- Γ_{su} قسمتی از مرز زیردامنه محلی است که شرایط اولیه روی آن تعریف شده است،
- $\eta \gg 1$ پارامتر جریمه می‌باشد که برای وارد کردن شرایط مرزی ضروری به فرم ضعیف مساله استفاده می‌شود.

با به کار بردن لم ۸.۳ برای فرم ضعیف محلی، معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} A \int_{\Gamma_s} \varphi \mu \cdot n_j \, d\Gamma - A \int_{\Omega_s} \varphi \mu_t \, d\Omega + B \int_{\Gamma_s} \varphi_x \mu \cdot n_i \, d\Gamma - B \int_{\Omega_s} \varphi_x \mu_x \, d\Omega \\ + C \int_{\Gamma_s} \varphi \mu \cdot n_i \, d\Gamma - C \int_{\Omega_s} \varphi \mu_x \, d\Omega + D \int_{\Omega_s} \varphi \mu \, d\Omega - \int_{\Omega_s} P \mu \, d\Omega \\ - \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi \mu \, d\Gamma + \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_0 \mu \, d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} (A\varphi\delta_{ij} + B\varphi_x + C\varphi)\mu.n_i d\Gamma - A \int_{\Omega_s} \varphi\mu_t d\Omega - B \int_{\Omega_s} \varphi_x\mu_x d\Omega \\ - C \int_{\Omega_s} \varphi\mu_x d\Omega + D \int_{\Omega_s} \varphi\mu d\Omega - \int_{\Omega_s} P\mu d\Omega - \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi\mu d\Gamma \\ + \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_\circ\mu d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (۱۰.۳)$$

در روش انتخابی از تابع پله‌ای هویساید به عنوان تابع تست استفاده می‌کنیم:

$$\mu = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_s \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_s \end{cases}$$

که نهایتاً فرم ضعیف متقارن محلی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} (A\varphi\delta_{ij} + B\varphi_x + C\varphi).n_i d\Gamma + D \int_{\Omega_s} \varphi d\Omega - \int_{\Omega_s} P d\Omega \\ - \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi d\Gamma + \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_\circ d\Gamma = 0, \end{aligned}$$

با توجه به مرزهای زیردامنه‌ای که شامل قسمت‌هایی است که روی آنها شرایط مرزی ضروری، شرایط مرزی طبیعی و قسمت‌هایی که هیچ شرطی روی آنها تعریف نشده‌اند، $\Gamma_s = \Gamma_{sq} \cap \Gamma_{su} \cap L_s$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{sq}} (A\varphi\delta_{ij} + B\varphi_x + C\varphi).n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} (A\varphi\delta_{ij} + B\varphi_x + C\varphi).n_i d\Gamma \\ + \int_{L_s} (A\varphi\delta_{ij} + B\varphi_x + C\varphi).n_i d\Gamma + D \int_{\Omega_s} \varphi d\Omega - \int_{\Omega_s} P d\Omega \\ - \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi d\Gamma + \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_\circ d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

بعد از اعمال کردن شرایط مرزی نیومن $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$ به روی Γ_{sq} داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{sq}} \bar{\mathbf{q}} d\Gamma + \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{q} d\Gamma + \int_{L_s} \mathbf{q} d\Gamma + D \int_{\Omega_s} \varphi d\Omega - \int_{\Omega_s} P d\Omega \\ - \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi d\Gamma + \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_\circ d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

□

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که معادله (۹.۳) صحیح می‌باشد.

۳.۳.۳ گسسته‌سازی دامنه

در پنجمین حالت از روش فاقد شبکه پترو-گالرکین، جایگذاری تابع درونیاب، که توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$$\chi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \zeta_j(\mathbf{x})(\zeta_\circ^{-1})_{ji}$$

و مشتقات آنها به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \chi(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \zeta(\mathbf{x})}{\partial x_i} \zeta_0^{-1} = \left[\frac{\partial \zeta_1(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad \frac{\partial \zeta_2(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad \dots \quad \frac{\partial \zeta_N(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \zeta_0^{-1},$$

که

$$\frac{\partial \chi_i(x)}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \zeta_j(x)}{\partial x} (\zeta_0^{-1})_{ji}$$

به عنوان تقریبی از تابع آزمایش برای هر زیردامنه Ω_s در معادله فرم ضعیف محلی متقارن

$$\int_{\Gamma_{su}} \mathbf{q} d\Gamma + \int_{L_s} \mathbf{q} d\Gamma + D \int_{\Omega_s} \varphi d\Omega - \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi d\Gamma = \\ \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_0 + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{\mathbf{q}} d\Gamma - \int_{\Omega_s} P d\Omega$$

منجر به تولید دستگاه معادلات خطی زیر می‌شود:

$$\sum_{i=1}^Q \int_{\Gamma_{su}} \left(A\chi_i(\mathbf{x})\phi_i\delta_{ij} + B\frac{\partial \chi_i(\mathbf{x})}{\partial x}\phi_i + C\chi_i(\mathbf{x})\phi_i \right) n_i d\Gamma + \\ \sum_{i=1}^Q \int_{L_s} \left(A\chi_i(\mathbf{x})\phi_i\delta_{ij} + B\frac{\partial \chi_i(\mathbf{x})}{\partial n}\phi_i + C\chi_i(\mathbf{x})\phi_i \right) n_i d\Gamma + \\ D \sum_{i=1}^Q \int_{\Omega_s} \chi_i(\mathbf{x})\phi_i d\Omega - \eta \sum_{i=1}^Q \int_{\Gamma_{su}} \chi_i(\mathbf{x})\phi_i d\Omega = \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_0 + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{\mathbf{q}} d\Gamma - \int_{\Omega_s} P d\Omega, \quad (11.3)$$

که می‌توان به فرم ساده ماتریسی زیر نوشت:

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{f}, \quad (12.3)$$

که ماتریس $\mathbf{K}$ همان ماتریس سختی سراسری و $\mathbf{f}$ بردار مقادیر معلوم سراسری می‌باشند.

۴.۳.۳ تولید معادله‌ها

همان‌طور که در شکل ۴.۳ مشخص است نقاط گره‌ای در این روش شامل نقاط درونی و نقاط مرزی به صورت زیر می‌باشد:

(i) نوع اول نقاط گره‌ای درونی هستند به طوری که زیردامنه‌هایی که مرکز آنها یکی از نقاط گره‌ای درونی است به طور کامل درون زیردامنه سراسری قرار می‌گیرند و با مرز سراسری تقاطعی ندارند. (قابل ذکر است که برای نقاط گره‌ای که بسیار نزدیک به مرز هستند شعاع زیردامنه را به قدری کوچک انتخاب می‌کنیم که زیردامنه کاملاً درون دامنه اصلی قرار بگیرد.)

(ii) نوع دوم نقاط گره‌ای مرزی هستند که دقیقاً روی مرز سراسری قرار گرفته‌اند.

با توجه به نوع نقاط گره‌ای معادلات در دستگاه (۱۲.۳) می‌توان معادلات خطی حاصل یا همان عناصر ماتریس K و یا بردار f را به دو صورت ساده کرد که برای نقاط درونی هر عنصر به فرم

$$K_{ij} = \int_{L_s} \left(A\chi_i(\mathbf{x}_j)\delta_{ij} + B\frac{\partial\chi_i(\mathbf{x}_j)}{\partial n} + C\chi_i(\mathbf{x}_j) \right) n_i d\Gamma + D \int_{\Omega_s} \chi_i(\mathbf{x}_j) d\Omega, \quad (13.3)$$

$$f_i = - \int_{\Omega_s} P d\Omega,$$

و برای نقاط مرزی عناصر به فرم

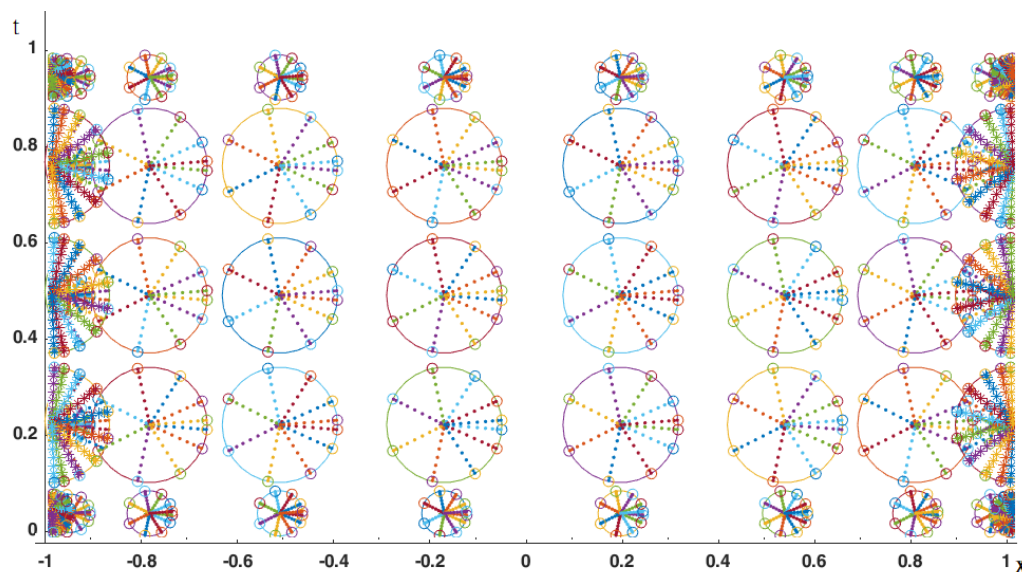
$$K_{ij} = \int_{\Gamma_{su}} \left(A\chi_i(\mathbf{x}_j)\delta_{ij} + B\frac{\partial\chi_i(\mathbf{x}_j)}{\partial x} + C\chi_i(\mathbf{x}_j) \right) n_i d\Gamma$$

$$+ \int_{L_s} \left(A\chi_i(\mathbf{x}_j)\delta_{ij} + B\frac{\partial\chi_i(\mathbf{x}_j)}{\partial n} + C\chi_i(\mathbf{x}_j) \right) n_i d\Gamma \quad (14.3)$$

$$+ D \int_{\Omega_s} \chi_i(\mathbf{x}_j) d\Omega - \eta \int_{\Gamma_{su}} \chi_i(\mathbf{x}_j) d\Omega,$$

$$f_i = \eta \int_{\Gamma_{su}} \varphi_0 d\Gamma + \int_{\Gamma_{sq}} \bar{q} d\Gamma - \int_{\Omega_s} P d\Omega,$$

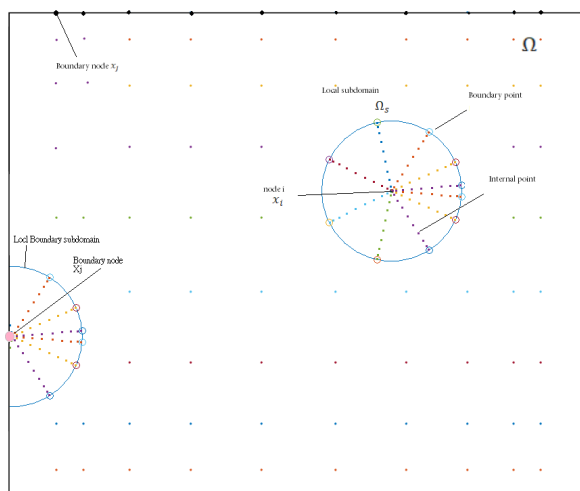
خواهند بود.



شکل ۴.۳: پراکندگی نقاط گاوسی $Q = 8 \times 5$ و زیردامنه‌های دایره‌ای.

۴.۳ روش‌های انتگرال‌گیری روی دیسک

واضح است که در روش فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین، شکل زیردامنه‌ها تاثیری در جواب و راه‌حل ندارد و از هر شکل هندسی به عنوان زیردامنه می‌توانیم استفاده کنیم که هر یک از اشکال ساده هندسی مربع، مستطیل، مثلث و ... می‌توانند به عنوان زیردامنه در نظر گرفته شوند.



شکل ۵.۳: پراکندگی نقاط انتگرال گیری در زیردامنه های درونی و مرزی با 10×10 نقطه در i امین زیردامنه $\Omega_s^{(i)}$ به مرکز گره x_i .

در این قسمت، دو روش انتگرال گیری عددی روی دیسک را بیان می کنیم [۴۲]. زیردامنه محلی Ω_s^i ممکن است به طور کامل داخل دامنه کلی Ω باشد و منتج به انتگرال گیری روی دایره شود. علاوه بر این، برای گره های مرزی یا نزدیک مرز ممکن است که Ω_s^i مرز را رد کرده و منتج به انتگرال گیری روی محل تلاقی دایره با مرز کلی گردد. در ادامه، تنها به انتگرال گیری عددی روی دیسک می پردازیم. انتگرال گیری روی محل تلاقی دایره با مرز مانند انتگرال گیری روی دایره است که در آن نقاط خارج Ω_s^i در نظر گرفته نمی شوند. علت انتخاب روش پیشنهادی به خاطر برآورده کردن شرایط دیریکله توسط گره های مرزی با شرایط مرزی داده شده می باشد و بنابراین، وزن دامنه ای را در گره های دیریکله کاهش می دهند. از طرف دیگر، به ازای گره هایی که نزدیک هستند ولی متعلق به مرز کلی نیستند، انتخاب شعاع مناسب باعث می شود که تعداد خیلی کمتری از زیردامنه های این نوع ایجاد گردند. برای سادگی

$$\int_{\Omega_s} f(x, y) d\Omega$$

انتگرالی است که در آن $f(x, y)$ یک تابع انتگرال پذیر است و Ω_s یک دیسک با شعاع r_0 و مرکز (x_0, y_0) است.

۱.۴.۳ روش انتگرالی گاوس

در $MLPG$ ، روش انتگرال گیری عددی گاوس با تغییر متغیر دکارتی به قطبی استفاده می گردد. این تغییر متغیر قابل ترجیح است زیرا که روش ضرب گاوس-لژاندر به کار رفته در راستاهای x و y به صورت مستقیم چندان دقیق نخواهد بود. با به کار بردن یک تبدیل آفین از مربع واحد به دایره فرمول زیر را به دست می آوریم:

$$\int_{\Omega_s} f(x, y) d\Omega \simeq \sum_{i=1}^{N_\rho} \sum_{j=1}^{N_\theta} \omega_i \omega_j G(\alpha_i, \beta_j), \quad (15.3)$$

که در آن N_ρ و N_θ تعداد نقاط انتگرال‌گیری در راستای محورهای α و β هستند. همچنین، وزن‌های ω_i و ω_j روی بازه $[-1, 1]$ برای روش گاوس-لژاندر متناظر با بعدهای α_i برای $i = 1, 2, \dots, N_\rho$ و β_j برای $j = 1, 2, \dots, N_\theta$ هستند. علاوه بر این، تابع G به فرم

$$G(\alpha, \beta) = \frac{2\pi r_0 \rho F(\rho, \theta)}{4}$$

است که در آن

$$F(\rho, \theta) = f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta)$$

و مختصات قطبی (ρ, θ) توسط تبدیل آفین با (α, β) به صورت زیر مرتبط هستند:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{r_0}{4} \alpha + \frac{r_0}{4} & \alpha \in [-1, 1], \\ \theta &= \pi \beta + \pi & \beta \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

فرمول (۱۵.۳) بیشترین کاربرد را در $MLPG$ دارد و اولین روش برای انتگرال‌گیری در روش $MLPG$ می‌باشد [۱۰].

۲.۴.۳ روش گاوس لژاندر و نقطه میانی

در روش‌های فاقد شبکه مانند فاقد شبکه محلی پترو-گالرکین و روش حجم‌های متناهی، نتایج خوبی از به کار بردن روش انتگرال‌گیری عددی نقطه میانی به دست آمده‌اند. در ادامه، روش انتگرال‌گیری ارائه شده در [۴۱، ۲۰] را در نظر می‌گیریم که شیوه گاوس-لژاندر را برای انتگرال نسبت به ρ و روش نقطه میانی را برای انتگرال نسبت به θ استفاده می‌کند:

$$\int_{\Omega_s} f(x, y) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} F(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta \approx \sum_{i=1}^{N_\rho} \sum_{j=1}^{N_\theta} a_i b_j F(\rho_j, \theta_i) \quad (۱۶.۳)$$

که در آن

$$F(\rho, \theta) = f(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta),$$

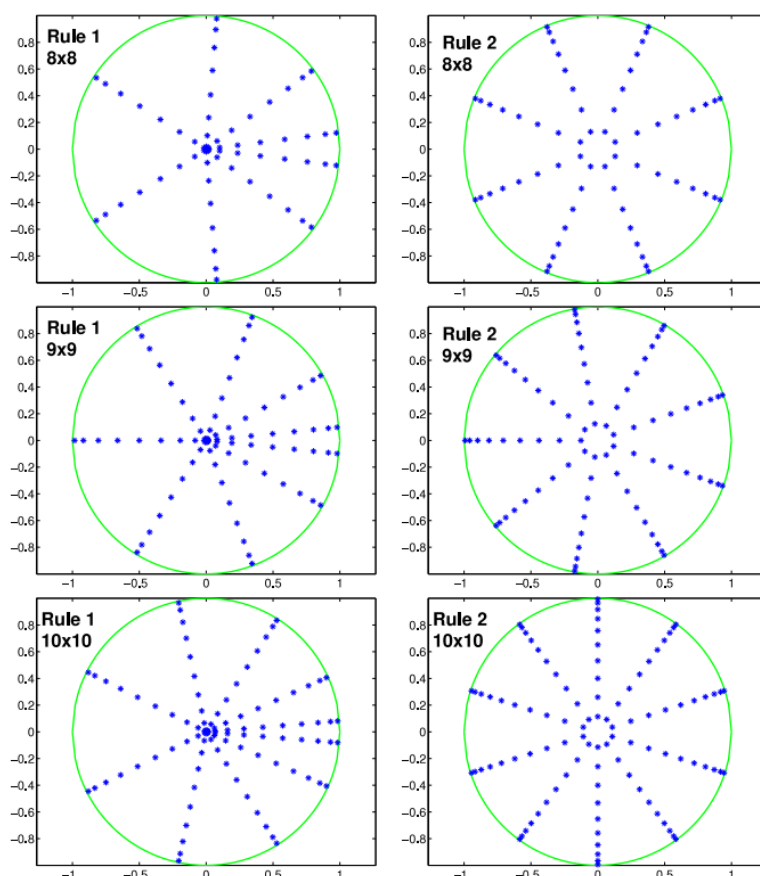
ρ_i ریشه دوم i -امین صفر چندجمله‌ای لژاندر از درجه N_ρ است و a_i وزن متناظر با آن و θ_j نقطه میانی j -امین قطاع دایره‌ای با زاویه b_j است. اگر

$$\begin{cases} a_i = \frac{r_0^2 \omega_i}{4}, \\ b_j = \frac{L\pi}{N_\theta}, \\ \theta_j = (j - \frac{1}{4})b_j, \end{cases}$$

آنگاه

$$a_i b_j = \frac{2\pi r_0^2 \omega_i}{4N_\theta}$$

است که $A = r_0^2 \pi$ مساحت دایره می‌باشد.



شکل ۶.۳: پراکندگی نقاط انتگرال‌گیری در روش انتگرالی گاوس (چپ) و روش گاوس-لژاندر و نقطه میانی (راست)

۵.۳ MLPG۵

در این روش، از فرم ضعیف محلی متقارن استفاده می‌کنیم. برای تابع آزمایش می‌توان از توابع کمترین مربعات متحرک، پایه‌ای شعاعی یا پیشرو استفاده نمود. همچنین، تابع پله‌ای هویساید به عنوان تابع تست در هر زیر دامنه که معمولاً در دو بعد دایره و در سه بعد کره انتخاب می‌شوند برگزیده می‌شود. در این روش، انتگرال‌گیری سراسری روی Ω وجود نخواهد داشت و تنها انتگرال‌گیری روی مرزهای دایره‌ای خواهیم داشت که کارایی روش را ضمانت می‌کند. این روش یکی از جذاب‌ترین روش‌های بدون شبکه محلی پترو-گالرکین می‌باشد زیرا نه تنها انتگرال‌گیری سراسری وجود ندارد بلکه هرگز در ماتریس سختی انتگرال منفرد ظاهر نمی‌شود. به کمک نرم‌افزار متلب روش ارائه شده را برای حل مثال‌های عددی پیاده‌سازی کرده‌ایم. برای به کار بردن روش پیشنهادی از الگوریتم زیر پیروی می‌کنیم:

گام ۱) تعداد متناهی Q نقطه (گره) از دامنه Ω و روی مرز Γ انتخاب می‌کنیم.

تابع پله‌ای هویساید را به عنوان تابع تست انتخاب می‌کنیم.

تابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده را به عنوان تابع آزمایش انتخاب می‌کنیم.

گام ۲) با توجه به هر نقطه، زیردامنه‌های Ω_s و مرزهای آنها یعنی Γ_s را مشخص می‌کنیم.

گام ۳) برای هر گره مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- نقاط کوادراتور گوسی $x_{iG}, i = 1, \dots, K$ تعداد نقاط انتگرال‌گیری در زیردامنه است- را روی Ω_s و Γ_s مشخص می‌کنیم.

۲- برای هر نقطه x_{iG} ، مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

الف: نقاطی از x_{iG} که تابع تست در آن نقاط مثبت است را مشخص می‌کنیم.

ب: تابع آزمایش φ_i و مشتقات مربوط به آن در نقاط x_{iG} را به دست می‌آوریم.

ج: انتگرال‌های موجود را به صورت عددی محاسبه می‌کنیم.

گام ۴) دستگاه معادلات خطی حاصل را حل می‌کنیم و مقادیر مجهول را محاسبه می‌کنیم.

۱.۵.۳ تحلیل پایداری

برای اثبات قضیه‌هایی که در ادامه بیان می‌شوند نیاز به چند تعریف داریم که ابتدا به ارائه تعاریف می‌پردازیم.

تعریف ۱.۵.۳. عملگرهای I و معکوس آن D را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$I\{\xi\}(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} y\xi(y)dy,$$

$$D\{\xi\}(\delta) = -\frac{1}{\delta}\xi'(y).$$

در این صورت، $\xi_{n,p} = I^p \xi_{[\frac{n}{p}]+p+1}$ را برای $\zeta_k = (1-\delta)_+^k$ تعریف می‌کنیم که

$$\xi_{n,p}(\delta) = \begin{cases} \zeta_k(\delta) & 0 \leq \delta \leq 1 \\ 0 & 1 \leq \delta \end{cases}$$

و $\zeta_k(\delta)$ برای $j = 1, \dots, 6$ همان چندجمله‌ای‌های معرفی شده در (۴.۳) هستند. $\xi_{n,p}$ یک چندجمله‌ای تک‌متغیره از مرتبه $[\frac{n}{p}] + p + 1$ و هموار از مرتبه ۲ است.

تعریف ۲.۵.۳. برای تابع انتگرال‌پذیر معین مثبت $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ که دارای تبدیل فوریه غیرصفر نامنفی به فرم

$$\tilde{g}(\nu) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}^T \nu} d\mathbf{x}$$

است عملگر تک متغیره $F_n\{\xi\}(\delta)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_n\{\xi\}(\delta) \equiv \tilde{g}(\nu) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{x}^T \nu} d\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{n}{2}-1} \int_0^{\infty} \xi(y) y^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(\delta y) dy,$$

که $\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2$ ، $\xi(\delta) = g(\mathbf{x})$ و

$$J_{\alpha}(\nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\alpha+2i}}{i! \Gamma(\alpha + i + 1)}$$

تابع بسل از نوع اول می‌باشد. همچنین، داریم:

$$F_n\{I\{\xi\}\}(\delta) = F_{n+2}\{\xi\}(\delta) \quad \text{و} \quad F_n\{D\{\xi\}\}(\delta) = F_{n+2}\{\xi\}(\delta).$$

تعریف ۳.۵.۳. برای مجموعه مرکزهای $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ، $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_Q\} \subseteq \Omega$ ، تعریف زیر را داریم:

$$h_o = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{1 \leq i \leq Q} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|_2.$$

لم ۴.۵.۳. برای $r \in \mathbb{N}$ ، یک δ_r وجود دارد به طوری که برای همه $\delta \geq \delta_r$ داریم:

$$\frac{1}{\pi\delta} \leq J_{r+\frac{1}{2}}^2(\delta) + J_{r+\frac{3}{2}}^2(\delta)$$

برهان. با توجه به اندیس‌های نوشته شده در صورت لم، می‌توانیم تابع بسل را به صورت حاصل جمع نامتناهی به فرم زیر بنویسیم:

$$J_{r+\frac{1}{2}}(\delta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\delta}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (i+r)! \delta^{-i}}{i!(r-i)! 2^i} f_{i,r}(\delta) \quad (17.3)$$

که در صورتی که i زوج باشد تابع $f_{i,r}$ به صورت $\sin(\cdot - \frac{\pi r}{2})$ و در صورتی که i فرد باشد تابع $f_{i,r}$ به صورت $\cos(\cdot - \frac{\pi r}{2})$ می‌باشد. توان دوم رابطه (۱۷.۳) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$J_{r+\frac{1}{2}}^2(\delta) = \frac{2}{\pi\delta} \left(f_{0,r}^2(\delta) + \sum_{i=1}^{2r} A_{i,r} \delta^{-i} \right),$$

که برای سهولت در اثبات مابقی جملات را صفر در نظر می‌گیریم و $A_{i,r} \delta$ ضرایبی به طور یکنواخت کراندار هستند که با توجه به رابطه به دست آمده در بالا داریم:

$$J_{r+\frac{1}{2}}^2(\delta) + J_{r+\frac{3}{2}}^2(\delta) = \frac{2}{\pi\delta} \left(f_{0,r}^2(\delta) + f_{0,r+1}^2(\delta) + \sum_{i=1}^{2r+2} B_{i,r} \delta^{-i} \right),$$

که ضرایب $B_{i,r}$ نیز به طور یکنواخت کراندار هستند. با توجه به اینکه

$$f_{0,r}^2(\delta) + f_{0,r+1}^2(\delta) = \sin^2(\delta - \frac{\pi r}{2}) + \cos^2(\delta - \frac{\pi r}{2}) = 1,$$

که در نتیجه با در نظر گرفتن δ_r به اندازه کافی بزرگ، حکم به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۵.۵.۳. فرض کنید فضای هیلبرت R_g شامل تمام توابعی چون $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ است که قابل محاسبه از رابطه زیر می‌باشند:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Psi}(\nu) e^{i\mathbf{x}^T \nu} d\nu$$

که

$$\tilde{\Psi}/\sqrt{g} \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

و نرم آن به فرم

$$\|\Psi\|_g = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\tilde{\Psi}(\nu)|^2}{\tilde{g}(\nu)} d\nu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

باشد. برای $h \leq h_0$ و هر تابع $\Psi \in R_g$ ، با تقریب Φ که توسط توابع پایه‌ای شعاعی با محمول فشرده در (۴.۳) به دست آمده است تخمین خطا به صورت زیر خواهد بود.

$$\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq C\|\Psi\|_g h^k.$$

برهان. بدون کاستن از کلیت مساله، بفرض $l = [\frac{n}{\nu}] + p + 1$. بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) = F_n\{I^p\{\xi_l\}\}(\delta) = F_{n+\nu p}\{\xi_l\}(\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{-n-\nu p-1} \int_0^\delta (\delta-t)^l t^{\frac{n}{\nu}+p} J_{\frac{n}{\nu}+p-1}(t) dt.$$

حال اگر بعد فضا را عددی فرد در نظر بگیریم و قرار دهیم: $n = \nu k + 1$ و $r = p + k$ ، آنگاه $l = r + 1$ ، بنابراین،

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) = F_{\nu k+1}\{\xi_{n,p}\}(\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\nu r+\nu} \int_0^\delta (\delta-t)^{r+1} t^{r+\frac{1}{\nu}} J_{r-\frac{1}{\nu}}(t) dt \quad (18.3)$$

که بعد از انتگرال‌گیری به روش جز به جز داریم:

$$\begin{aligned} F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) &= \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\nu r+\nu} \left(-(r+1)(\delta-t)^r t^{r+\frac{1}{\nu}} J_{r+\frac{1}{\nu}}(t) \Big|_0^\delta + (r+1) \int_0^\delta (\delta-t)^r t^{r+\frac{1}{\nu}} J_{r+\frac{1}{\nu}}(t) dt \right) \\ &= \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\nu r+\nu} (r+1) \int_0^\delta (\delta-t)^r t^{r+\frac{1}{\nu}} J_{r+\frac{1}{\nu}}(t) dt. \end{aligned}$$

با تکیه بر لم ۳.۱ از [۵۱]، می‌توان نامساوی زیر را نوشت:

$$\begin{aligned} F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) &= \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\nu r+\nu} (r+1) \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(\nu r+\nu)\Gamma(r+\frac{\nu}{\nu})}{\Gamma(\nu r+\nu)} \nu^{\nu r+\nu} \delta^{r+1} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{r+1}{\nu})_j (\frac{r}{\nu})_j (\nu r+\nu)_j}{(\frac{\nu r+\nu}{\nu})_j} \frac{\nu j + \nu r + 1}{j!} \frac{J_{r+j+\frac{1}{\nu}}^{\nu}(\frac{\delta}{\nu})}{j + \nu r + 1} \\ &\geq C\delta^{-\nu r-1} \times \left(J_{r+\frac{1}{\nu}}^{\nu}(\frac{\delta}{\nu}) + J_{r+\frac{\nu}{\nu}}^{\nu}(\frac{\delta}{\nu}) \right) \\ &\geq C\delta^{-\nu r-1} \times \left(\frac{1}{\pi\delta} \right), \end{aligned}$$

که نتیجه می‌گیریم:

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) \geq C_1 \delta^{-n-\nu p-1}. \quad (19.3)$$

تا اینجا کران بالایی برای $F_n\{\xi_{n,p}\}$ به دست آوردیم. برای به دست آوردن کران پایین، ابتدا تابع q_r را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q_r = \begin{cases} 1 - \cos(\delta) & r = 0 \\ q_0 * q_{r-1}(\delta) & r \geq 1 \end{cases}, \quad (20.3)$$

که بعد از محاسبه تبدیل لاپلاس برای این تابع، داریم:

$$L\{q_r\} = L\{q_\circ * q_{r-1}(\delta)\} = L\left\{\int_0^\delta q_\circ(t) q_{r-1}(\delta-t) dt\right\} = \frac{1}{s^{r+1}(1+s^2)^{r+1}}.$$

از طرفی،

$$\begin{aligned} L\left\{\int_0^\delta (\delta-t)^{r+1} t^{r+\frac{1}{2}} J_{r-\frac{1}{2}}(t) dt\right\} &= \frac{r!(r+1)! 2^{r+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} s^{r+1}(1+s^2)^{r+1}} \\ &= A_r \frac{1}{s^{r+1}(1+s^2)^{r+1}} \\ &= A_r L\{q_r(\delta)\} = L\{A_r q_r(\delta)\}, \end{aligned}$$

که با توجه به تساوی تبدیل لاپلاس دو تابع می‌توان نتیجه گرفت که خود توابع نیز برابرند و

$$\int_0^\delta (\delta-t)^{r+1} t^{r+\frac{1}{2}} J_{r-\frac{1}{2}}(t) dt = A_r q_r(\delta). \quad (21.3)$$

اکنون با جایگذاری (21.3) در (18.3)، داریم:

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2r+2} \int_0^\delta (\delta-t)^l t^{r+\frac{1}{2}} J_{r-\frac{1}{2}}(t) dt = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2r+2} A_r q_r(\delta) \leq C_2 \delta^{-n-2p-1}.$$

تا این مرحله کران پایین و کران بالایی برای تبدیل فوریه تابع در حالتی که بعد فضا فرد باشد به دست آورده‌ایم. اکنون فرض کنیم بعد فضا زوج باشد. در این صورت، قرار می‌دهیم: $n = 2k$ و $r = p + k$. اثبات مشابه حالت فرد است با این تفاوت که تنها تعاریف جدید $F_n\{\xi_{n,p}\}$ و q_r را به صورت زیر داریم:

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2r+1} \int_0^\delta (\delta-t)^{r+1} t^r J_{r-1}(t) dt$$

و

$$q_r(\delta) = \begin{cases} \int_0^\delta J_\circ(t) dt & r = \circ \\ q_\circ * q_{r-1}(\delta) & r \geq \circ \end{cases}.$$

به‌طور مشابه با حالت قبلی می‌توان نشان داد که

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{2r+2} A_r q_r(\delta)$$

برای $n = 2k$. در نتیجه، برای هر بعد فضا n و $p \in \mathbb{N}$ ، ثابت‌های δ ، C_1 و C_2 که تنها وابسته به n و p هستند وجود دارند که برای تبدیل فوریه $\xi_{n,p}$ داریم:

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) \geq C_1 \delta^{-n-2p-1} \quad (22.3)$$

و برای هر $\delta \geq \delta_0$

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) \leq C_2 \delta^{-n-2p-1}. \quad (23.3)$$

نامساوی‌های (22.3) و (23.3) نشان‌دهنده رفتار مجانبی تبدیل فوریه $\tilde{g}$ هستند یعنی

$$F_n\{\xi_{n,p}\}(\delta) = \tilde{g}(\nu) = O(\|\nu\|_2^{-n-\gamma}) \quad \text{که هنگامی } \delta = \|\nu\|_2 \rightarrow \infty \quad (24.3)$$

که با توجه به [55] که اثبات می‌کند برای هر تابعی که دارای تبدیل فوریه با رفتار مجانبی باشد می‌توان نتیجه گرفت که

$$\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq C_0 \|\Psi\|_g h^{\frac{2}{3}}$$

□

برای هر $h \leq h_0$ و $\Psi \in R_g$ که در اینجا اثبات خاتمه می‌یابد.

۲.۵.۳ مثال‌های عددی

در این بخش، از آنجایی که از یک درونیاب فاقد شبکه استفاده کردیم به تحلیل عددی خطا به کمک عدد شرط پرداخته‌ایم که به کمک رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$CN(A) = \frac{sv_{max}}{sv_{min}}, \quad (25.3)$$

که sv_{min} و sv_{max} به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر تکین ماتریس A هستند. نتایج در جداول ۵.۳ و ۱۰.۳ نشان داده شده‌اند. همچنین، به کمک رابطه‌های زیر به محاسبه خطای مطلق، خطای نسبی و خطای ریشه میانگین مربعات برای بررسی دقت و همگرایی پرداخته‌ایم.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \|\Psi(x_i, t_j) - \Phi(x_i, t_j)\|_2^2},$$

$$|e_k| = |\psi_k - \phi_k|, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$|E_k| = \left| \frac{\psi_k - \phi_k}{\psi_k} \right|, \quad k = 1, 2, 3,$$

که در فضای $\mathbb{R}^2$ توابع $\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ و $\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ و در فضای $\mathbb{R}^3$ توابع $\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ و $\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$

به ترتیب جواب عددی حاصل از روش ارائه شده و جواب تحلیلی مساله هستند.

در این قسمت، به ارائه مثال‌های عددی برای تحقیق در چگونگی عملکرد روش عددی ارائه شده برای حل معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی می‌پردازیم. در واقع، به کمک نرم‌افزار متلب و پیاده‌سازی روش ارائه شده مثال‌های ۶.۵.۳، ۷.۵.۳ و ۸.۵.۳ را به صورت عددی حل کرده‌ایم. در ضمن، بین جواب‌هایی

که در مثال‌های ۶.۵.۳ و ۷.۵.۳ به دست آوردیم و جواب‌هایی که به کمک روش‌های دیگر در [۱۴] به دست آمده‌اند مقایسه جامعی به صورت جدولی و نموداری ارائه کرده‌ایم که کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. در روش ارائه شده پارامترهای مختلفی مانند اندازه محمل، تعداد نقاط گره‌ای دامنه، تعداد نقاط انتگرال‌گیری در زیردامنه و روش‌های انتگرال‌گیری عددی، بر دقت و همگرایی جواب موثرند. در مثال‌های آورده شده تعداد نقاط انتگرال‌گیری را صد نقطه و روش انتگرال‌گیری را روش گاوس در نظر گرفتیم.

مثال ۶.۵.۳. معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi_{xx} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \Psi = P(x, t),$$

که $x \in [-1, 1]$ و $t \in [0, 1]$

$$P(x, t) = \begin{pmatrix} (x^2 - 1)(-\pi \sin(\pi t)) + (x^2 - 3)\cos(\pi t) + (x - x^2)e^{-t} \\ (x^2 - 1)\cos(\pi t) - (4x - 4x^2 + 2)e^{-t} \end{pmatrix}$$

با توجه به صورت کلی مساله معادله دیفرانسیل-جبری جزئی (۱.۳)، E و C در این مثال ماتریس‌های صفر هستند. همچنین، مساله دارای جواب دقیقی به صورت زیر است:

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} (x^2 - 1)\cos(\pi t) \\ x(1 - x)e^{-t} \end{pmatrix}$$

$\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ را جواب تقریبی به دست آمده از روش عددی ارائه شده در نظر می‌گیریم که با کمک محاسبات کامپیوتری و کدنویسی در نرم‌افزار متلب به دست می‌آوریم.

در جدول‌های ۱.۳ و ۲.۳، مقایسه‌ای بین روش‌های دیگر با روش ارائه شده، با در نظر گرفتن خطای مطلق و نسبی انجام شده است. همچنین، در این مثال مقایسه‌ای بین جواب‌های به دست آمده از روش پیشنهادی برای حالت‌هایی که تعداد نقاط متفاوت در نظر گرفته شده است انجام شده و نتایج در جدول ۴.۳ ارائه شده است. علاوه بر این، یکی از موثرترین پارامترها در همگرایی و دقت جواب‌های عددی حاصل اندازه محمل s_i می‌باشد که در جدول ۳.۳ مقایسه بین جواب‌های حاصل با در نظر گرفتن اندازه محمل متفاوت انجام شده است.

جدول ۱.۳: مقایسه خطای نسبی روش پیشنهادی و روش [۱۴] در $t = 0.3$ (مثال ۶.۵.۳)

روش پیشنهادی (ζ)		ICN - Kansa		ICN - QIE		x
$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	
5.73×10^{-7}	6.74×10^{-6}	1.38×10^{-3}	6.94×10^{-2}	6.59×10^{-6}	9.10×10^{-4}	-0.95
1.25×10^{-6}	5.63×10^{-7}	1.57×10^{-3}	1.02×10^{-1}	8.19×10^{-5}	1.02×10^{-3}	-0.6
6.17×10^{-6}	4.49×10^{-7}	1.8×10^{-3}	1.05×10^{-1}	3.93×10^{-4}	1.06×10^{-3}	-0.25
1.22×10^{-5}	7.18×10^{-7}	2.43×10^{-2}	1.04×10^{-1}	1.46×10^{-3}	1.07×10^{-3}	0.1
4.30×10^{-6}	4.71×10^{-7}	9.48×10^{-3}	1.01×10^{-1}	4.10×10^{-4}	8.04×10^{-3}	0.45
1.08×10^{-5}	1.03×10^{-6}	1.52×10^{-3}	8.71×10^{-2}	2.59×10^{-4}	9.64×10^{-4}	0.8

جدول ۲.۳: مقایسه خطای نسبی روش پیشنهادی و روش [۱۴] در $t = ۰/۸$ (مثال ۶.۵.۳)

روش پیشنهادی (ζ)		ICN – Kansa		ICN – QIE		x
$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	
$3/98 \times 10^{-7}$	$1/39 \times 10^{-7}$	$5/06 \times 10^{-3}$	$1/37 \times 10^{-1}$	$2/21 \times 10^{-5}$	$1/53 \times 10^{-3}$	$-۰/۹۵$
$8/29 \times 10^{-7}$	$2/59 \times 10^{-7}$	$7/97 \times 10^{-3}$	$6/42 \times 10^{-2}$	$3/19 \times 10^{-4}$	$1/73 \times 10^{-3}$	$-۰/۶$
$1/20 \times 10^{-6}$	$3/41 \times 10^{-7}$	$3/35 \times 10^{-3}$	$6/09 \times 10^{-2}$	$1/53 \times 10^{-3}$	$1/83 \times 10^{-3}$	$-۰/25$
$4/45 \times 10^{-6}$	$3/79 \times 10^{-8}$	$4/92 \times 10^{-2}$	$6/01 \times 10^{-2}$	$5/69 \times 10^{-3}$	$1/85 \times 10^{-3}$	$۰/1$
$7/46 \times 10^{-7}$	$1/70 \times 10^{-8}$	$2/08 \times 10^{-2}$	$6/10 \times 10^{-2}$	$1/60 \times 10^{-3}$	$1/78 \times 10^{-3}$	$۰/45$
$9/77 \times 10^{-7}$	$6/31 \times 10^{-7}$	$5/72 \times 10^{-3}$	$6/95 \times 10^{-2}$	$1/01 \times 10^{-3}$	$1/62 \times 10^{-3}$	$۰/8$

جدول ۳.۳: مقایسه خطاهای مطلق برای مقادیر متفاوت از اندازه محمل در $t = ۰/۵$ و $Q = 32$ (مثال ۶.۵.۳)

$s_i = 4$		$s_i = 2/5$		$s_i = ۰/۵$		x
$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	
2×10^{-2}	$2/6 \times 10^{-4}$	$1/93 \times 10^{-2}$	$2/66 \times 10^{-4}$	$1/08 \times 10^{-2}$	$2/25 \times 10^{-2}$	$-۰/۹۵$
$2/3 \times 10^{-3}$	$2/1 \times 10^{-3}$	$2/54 \times 10^{-3}$	$2/34 \times 10^{-3}$	$6/34 \times 10^{-3}$	$3/53 \times 10^{-3}$	$-۰/۶$
$9/9 \times 10^{-3}$	$7/0 \times 10^{-4}$	$9/48 \times 10^{-3}$	$6/66 \times 10^{-4}$	$3/75 \times 10^{-3}$	$2/58 \times 10^{-3}$	$-۰/25$
$3/29 \times 10^{-4}$	$9/8 \times 10^{-4}$	$3/91 \times 10^{-4}$	$1/09 \times 10^{-3}$	$2/21 \times 10^{-4}$	$1/73 \times 10^{-3}$	$۰/1$
$7/16 \times 10^{-3}$	$2/7 \times 10^{-3}$	$8/13 \times 10^{-3}$	$2/85 \times 10^{-3}$	$7/71 \times 10^{-4}$	$3/16 \times 10^{-3}$	$۰/45$
$4/03 \times 10^{-3}$	$3/25 \times 10^{-4}$	$3/54 \times 10^{-3}$	$3/20 \times 10^{-4}$	$2/03 \times 10^{-2}$	$1/01 \times 10^{-2}$	$۰/8$

جدول ۴.۳: مقایسه خطاهای مطلق در تعداد متفاوت از گره‌ها در $t = ۰/3$ (مثال ۶.۵.۳)

$Q = 200$		$Q = 105$		$Q = 32$		$Q = 8$		x
$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	
$7/86 \times 10^{-8}$	$3/86 \times 10^{-8}$	$5/34 \times 10^{-3}$	$4/45 \times 10^{-2}$	$1/95 \times 10^{-2}$	$3/80 \times 10^{-2}$	$1/00 \times 10^{-1}$	$2/21 \times 10^{-1}$	$-۰/۹۵$
$8/89 \times 10^{-8}$	$2/12 \times 10^{-8}$	$3/77 \times 10^{-2}$	$4/49 \times 10^{-2}$	$4/09 \times 10^{-3}$	$3/43 \times 10^{-3}$	$6/41 \times 10^{-3}$	$5/41 \times 10^{-3}$	$-۰/۶$
$1/43 \times 10^{-7}$	$2/47 \times 10^{-8}$	$1/56 \times 10^{-1}$	$1/92 \times 10^{-1}$	$4/12 \times 10^{-3}$	$4/90 \times 10^{-3}$	$2/49 \times 10^{-3}$	$8/53 \times 10^{-3}$	$-۰/25$
$8/15 \times 10^{-8}$	$4/18 \times 10^{-8}$	$6/45 \times 10^{-2}$	$4/88 \times 10^{-2}$	$1/05 \times 10^{-3}$	$5/24 \times 10^{-3}$	$8/54 \times 10^{-3}$	$3/20 \times 10^{-1}$	$۰/1$
$7/88 \times 10^{-8}$	$2/21 \times 10^{-8}$	$1/77 \times 10^{-1}$	$1/10 \times 10^{-1}$	$5/62 \times 10^{-3}$	$4/17 \times 10^{-3}$	$9/43 \times 10^{-1}$	$9/92 \times 10^{-1}$	$۰/45$
$1/29 \times 10^{-7}$	$2/19 \times 10^{-8}$	$7/19 \times 10^{-2}$	$1/78 \times 10^{-3}$	$1/23 \times 10^{-2}$	$5/88 \times 10^{-3}$	$1/39 \times 10^{-1}$	$1/51 \times 10^{-1}$	$۰/8$

مثال ۷.۵.۳. معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:

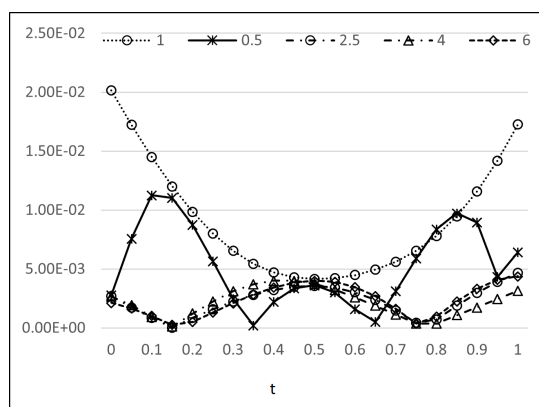
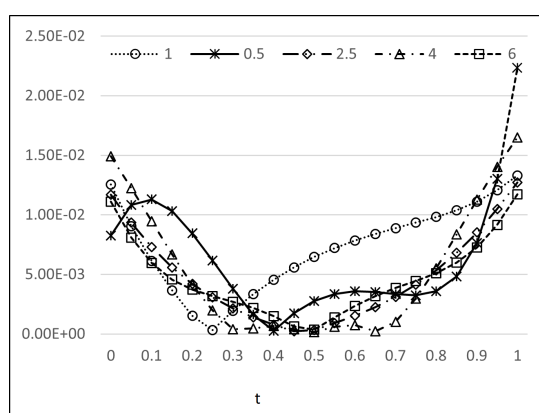
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Psi_t + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi_{xx} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \Psi = P(x, t),$$

که $x \in [-1, 1]$ و $t \in [0, 1]$ ، مساله دارای جواب دقیقی به صورت زیر است:

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} x^5(x^2 - 1)\cos(\pi t) \\ x^2(x^2 - 1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

جدول ۵.۳: عدد شرط و خطای ریشه میانگین مربعات برای اندازه‌های متفاوت محمل و تعداد متفاوت از گره‌ها (مثال ۶.۵.۳)

$s_i = ۴$		$s_i = ۲/۵$		$s_i = ۰/۵$		Q
CN	RMSE	CN	RMSE	CN	RMSE	
$۱/۷۶ \times ۱۰^{+۶}$	$۲/۰۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۳۳ \times ۱۰^{+۳}$	$۱/۱۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۵۸ \times ۱۰^{+۳}$	$۹/۴۱ \times ۱۰^{-۱}$	۸
$۵/۷۵ \times ۱۰^{+۱۳}$	$۴/۳۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۹۲ \times ۱۰^{+۱۲}$	$۱/۲۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۰۰ \times ۱۰^{+۱۵}$	$۶/۳۲ \times ۱۰^{-۲}$	۳۲
$۸/۷۲ \times ۱۰^{+۱۶}$	$۳/۵۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۶/۵۳ \times ۱۰^{+۱۴}$	$۲/۳۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۱۰ \times ۱۰^{+۱۸}$	$۳/۳۴ \times ۱۰^{-۲}$	۱۰۵
$۱/۸۰ \times ۱۰^{+۱۸}$	$۷/۰۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۰۵ \times ۱۰^{+۱۵}$	$۱/۱۲ \times ۱۰^{-۷}$	$۹/۰۰ \times ۱۰^{+۱۹}$	$۱/۰۷ \times ۱۰^{-۵}$	۲۰۰



شکل ۷.۳: مقایسه خطای مطلق ($|E_1|$ (بالا)، $|E_2|$ (پایین)) برای اندازه‌های مختلف از محمل (ζ) با $Q = ۳۲$ در $x = ۰/۱۵$ (مثال ۶.۵.۳)

و

$$P(x, t) = \begin{pmatrix} (x^۷ - x^۵)(-\pi \sin(-\pi t)) + (x^۷ - ۴۳x^۵ + ۲۰x^۳)\cos(\pi t) + (x^۴ - x^۲)e^{(-t)} \\ (x^۷ - x^۵)\cos(\pi t) + (-۴x^۴ - ۸x^۲ + ۲)e^{-t} \end{pmatrix}$$

و $\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ را جواب حاصل از روش پیشنهادی عددی در نظر می‌گیریم.

در این مثال، پس از محاسبه جواب عددی، به مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج به دست آمده از روش‌های عددی $ICN - QIE$ و $ICN - FDM$ پرداخته‌ایم. نتایج در جدول‌های ۶.۳ و ۷.۳ آورده شده‌اند. همچنین، مقایسه‌ای بین نتایج عددی حاصل از تغییر پارامترهایی مانند اندازه محمل و تعداد نقاط گره‌ای در دامنه انجام شده است که در جدول‌های ۹.۳ و ۸.۳ آمده‌اند.

جدول ۶.۳: مقایسه خطاهای نسبی روش پیشنهادی و روش [۱۴] در $t = 0.8$ (مثال ۷.۵.۳)

روش پیشنهادی (ζ^e)		$ICN - FDM$		$ICN - QIE$		x
$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	
5.46×10^{-6}	1.37×10^{-6}	7.97×10^0	1.53×10^{-2}	1.40×10^{-2}	1.09×10^{-4}	-0.95
2.12×10^{-6}	3.59×10^{-6}	$2.28 \times 10^{+1}$	6.46×10^{-2}	6.46×10^{-2}	6.05×10^{-4}	-0.6
2.51×10^{-6}	9.80×10^{-5}	1.41×10^0	2.67×10^0	2.67×10^0	1.58×10^{-2}	-0.25
2.34×10^{-6}	1.7×10^{-2}	$8.92 \times 10^{+2}$	$7.74 \times 10^{+2}$	$1.74 \times 10^{+2}$	5.89×10^{-1}	0.1
1.94×10^{-8}	8.98×10^{-6}	$4.21 \times 10^{+1}$	5.96×10^{-3}	5.96×10^{-3}	1.70×10^{-3}	0.45
3.03×10^{-8}	5.26×10^{-7}	$1.20 \times 10^{+1}$	1.44×10^{-2}	1.44×10^{-2}	2.19×10^{-4}	0.8

جدول ۷.۳: مقایسه خطاهای نسبی روش پیشنهادی و روش [۱۴] در $t = -0.5$ (مثال ۷.۵.۳)

روش پیشنهادی (ζ^e)		$ICN - FDM$		$ICN - QID$		t
$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	$ E_2 $	$ E_1 $	
2.26×10^{-6}	4.07×10^{-6}	3.82×10^0	4.70×10^{-2}	2.83×10^{-6}	1.34×10^{-4}	0.1
3.60×10^{-6}	5.58×10^{-6}	$1.16 \times 10^{+1}$	5.87×10^{-2}	1.76×10^{-5}	1.20×10^{-3}	0.3
2.56×10^{-6}	*	$1.98 \times 10^{+1}$	*	3.34×10^{-5}	*	0.5
3.74×10^{-6}	1.79×10^{-6}	$2.88 \times 10^{+1}$	1.34×10^{-1}	4.00×10^{-5}	1.88×10^{-3}	0.7
5.45×10^{-6}	3.13×10^{-6}	$3.89 \times 10^{+1}$	1.30×10^{-1}	2.93×10^{-5}	7.11×10^{-4}	0.9

جدول ۸.۳: مقایسه خطاهای مطلق برای مقادیر متفاوت از اندازه محمل در $t = 0.5$ و $Q = 32$ (مثال ۷.۵.۳)

$s_i = 4$		$s_i = 2.5$		$s_i = 0.5$		x
$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	
9.04×10^{-3}	9.90×10^{-3}	4.99×10^{-3}	3.19×10^{-3}	1.0×10^{-3}	2.4×10^{-1}	-0.95
6.84×10^{-3}	1.33×10^{-2}	6.07×10^{-3}	2.45×10^{-3}	9.1×10^{-3}	2.3×10^{-1}	-0.6
1.55×10^{-3}	1.73×10^{-2}	1.05×10^{-3}	2.93×10^{-3}	3.7×10^{-4}	6.4×10^{-2}	-0.25
1.20×10^{-2}	1.12×10^{-2}	1.47×10^{-2}	2.02×10^{-3}	1.1×10^{-4}	2.7×10^{-2}	0.1
1.32×10^{-2}	1.90×10^{-3}	1.52×10^{-2}	2.89×10^{-5}	2.5×10^{-4}	5.5×10^{-2}	0.45
1.20×10^{-2}	1.24×10^{-2}	1.19×10^{-2}	1.76×10^{-3}	6.5×10^{-3}	5.8×10^{-3}	0.8

جدول ۹.۳: مقایسه خطاهای مطلق در تعداد متفاوت از گره‌ها در $x = 0.3$ (مثال ۷.۵.۳)

$Q = 200$		$Q = 105$		$Q = 32$		$Q = 8$		t
$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	$ e_2 $	$ e_1 $	
2.91×10^{-7}	6.97×10^{-8}	2.17×10^{-3}	3.52×10^{-4}	4.65×10^{-4}	5.84×10^{-2}	3.24×10^0	7.38×10^{-1}	0.1
1.95×10^{-7}	6.87×10^{-8}	2.01×10^{-3}	1.79×10^{-4}	1.22×10^{-2}	1.74×10^{-2}	2.36×10^0	1.09×10^{-1}	0.3
5.68×10^{-7}	1.20×10^{-7}	1.86×10^{-3}	3.90×10^{-5}	1.08×10^{-2}	1.32×10^{-3}	1.37×10^0	5.05×10^{-1}	0.5
6.27×10^{-7}	1.01×10^{-7}	1.51×10^{-3}	8.90×10^{-5}	3.46×10^{-2}	1.65×10^{-2}	6.63×10^{-1}	8.09×10^{-1}	0.7
3.91×10^{-7}	6.39×10^{-8}	1.11×10^{-3}	2.29×10^{-4}	2.03×10^{-2}	6.12×10^{-2}	3.75×10^{-1}	8.94×10^{-1}	0.9

جدول ۱۰.۳: عدد شرط و خطای ریشه میانگین مربعات برای اندازه‌های متفاوت از محمل و تعداد متفاوت از گره‌ها (مثال ۷.۵.۳)

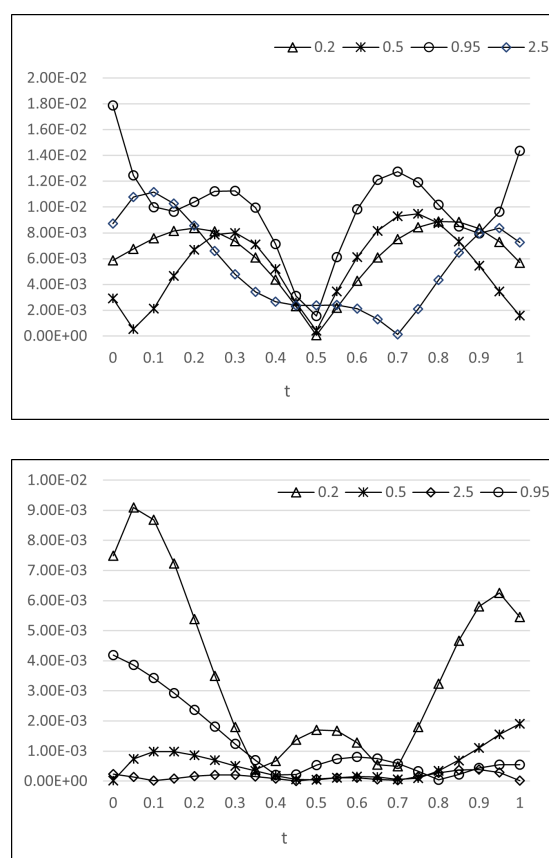
$s_i = 4$		$s_i = 2.5$		$s_i = 0.5$		Q
CN	$RMSE$	CN	$RMSE$	CN	$RMSE$	
$1.76 \times 10^{+6}$	1.03×10^{-1}	$9.33 \times 10^{+3}$	3.21×10^{-1}	$9.58 \times 10^{+3}$	9.65×10^{-1}	8
$5.75 \times 10^{+13}$	4.13×10^{-2}	$4.92 \times 10^{+12}$	1.50×10^{-2}	$1.00 \times 10^{+15}$	4.03×10^{-2}	32
$8.72 \times 10^{+16}$	4.71×10^{-3}	$6.53 \times 10^{+14}$	3.39×10^{-4}	$2.10 \times 10^{+18}$	7.13×10^{-3}	105
$1.80 \times 10^{+18}$	8.12×10^{-5}	$2.05 \times 10^{+15}$	1.27×10^{-7}	$9.00 \times 10^{+19}$	2.32×10^{-4}	200

مثال ۸.۵.۳. مثال دیگری از معادله دیفرانسیل-جبری جزئی به فرم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Psi_t + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Psi_{xx} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Psi = P(x, t)$$

که

$$t \in [0, 1] \quad , \quad x \in [-1, 1] \quad , \quad \Psi(x, 1) = (e^{-t}, e^{\frac{-1}{t}}, \sin t)^T$$



شکل ۸.۳: مقایسه خطای مطلق $|E_1|$ (بالا)، $|E_2|$ (پایین) برای اندازه‌های مختلف از محمل (ζ^c) با $Q = ۳۲$ در $x = ۰.۱۵$ (مثال ۷.۵.۳)

و

$$P(x, t) = \begin{pmatrix} -x^2 e^{\frac{-1}{\tau} t} - 2e^{-t} \\ -\frac{1}{\tau} x^2 e^{\frac{-1}{\tau} t} - x^2 e^{-t} \\ -x^2 e^{-t} + \frac{1}{\tau} x^2 e^{\frac{-1}{\tau} t} + (x - 2)\sin(t) \end{pmatrix}.$$

معادله دارای جواب دقیقی به فرم زیر است:

$$\Psi(x, t) = \begin{pmatrix} x^2 e^t \\ x^2 e^{\frac{-1}{\tau} t} \\ x^2 \sin(t) \end{pmatrix}.$$

با توجه به اینکه $\Phi(x, t) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$ را جواب عددی حاصل از روش ارائه شده در این تحقیق در نظر

می‌گیریم. مقایسه بین نتایج عددی حاصل از تغییر پارامترها در دامنه انجام شده است که در جدول‌های ۱۱.۳، ۱۲.۳ و شکل‌های ۹.۳، ۱۰.۳ و ۱۱.۳ نشان داده شده‌اند.

جدول ۱۱.۳: مقایسه خطاهای مطلق برای مقادیر متفاوت از اندازه محمل در $x = ۰.۲۵$ (مثال ۸.۵.۳)

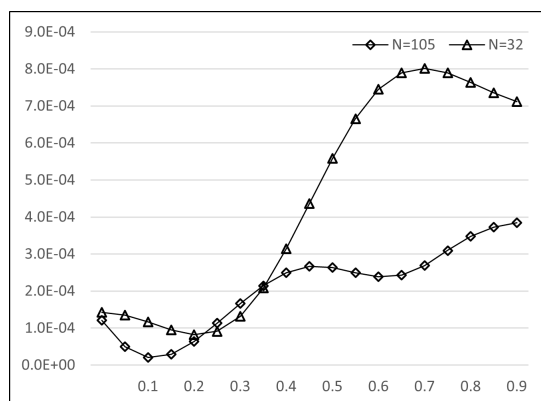
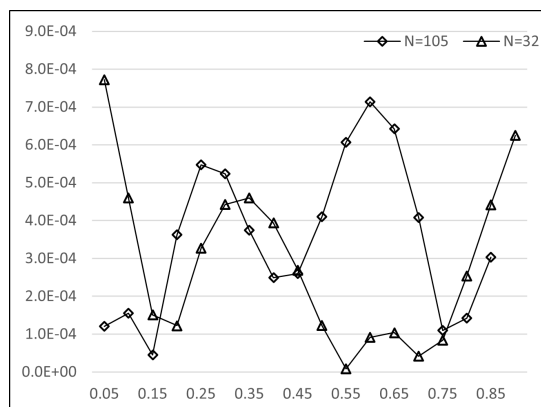
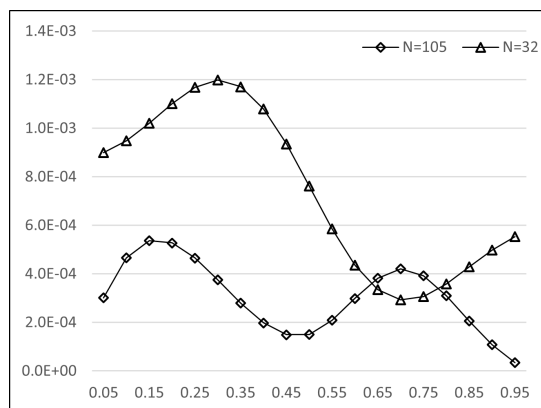
$s_i = 6$			$s_i = ۲.۵$			$s_i = ۱$			t
$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	
۱.۱۳×۱۰^{-۲}	۱.۱۳×۱۰^{-۲}	۱.۳۵×۱۰^{-۲}	۱.۳۷×۱۰^{-۵}	۲.۱۷×۱۰^{-۳}	۳.۰۱×۱۰^{-۴}	۱.۱۱×۱۰^{-۱}	۲.۵۲×۱۰^{-۲}	۱.۰۴×۱۰^{-۱}	۰.۱
۳.۱۷×۱۰^{-۲}	۲.۸۴×۱۰^{-۲}	۱.۷۱×۱۰^{-۱}	۸.۲۴×۱۰^{-۵}	۹.۲۳×۱۰^{-۴}	۱.۶۰×۱۰^{-۴}	۳.۸۰×۱۰^{-۲}	۳.۷۵×۱۰^{-۲}	۱.۶۹×۱۰^{-۲}	۰.۳
۳.۰۲×۱۰^{-۲}	۱.۴۳×۱۰^{-۲}	۷.۸۹×۱۰^{-۲}	۲.۶۶×۱۰^{-۴}	۱.۲۳×۱۰^{-۳}	۶.۳۶×۱۰^{-۴}	۶.۰۱×۱۰^{-۳}	۸.۰۷×۱۰^{-۲}	۳.۹۱×۱۰^{-۲}	۰.۵
۷.۳۶×۱۰^{-۲}	۱.۸۵×۱۰^{-۲}	۷.۲۳×۱۰^{-۲}	۱.۸۹×۱۰^{-۴}	۱.۴۸×۱۰^{-۳}	۹.۲۴×۱۰^{-۴}	۵.۷۰×۱۰^{-۲}	۳.۶۷×۱۰^{-۲}	۱.۱۶×۱۰^{-۱}	۰.۷
۶.۹۵×۱۰^{-۳}	۷.۶۷×۱۰^{-۳}	۲.۲۲×۱۰^{-۲}	۱.۳۵×۱۰^{-۴}	۱.۱۱×۱۰^{-۴}	۳.۷۷×۱۰^{-۴}	۸.۰۵×۱۰^{-۲}	۳.۰۴×۱۰^{-۲}	۷.۵۰×۱۰^{-۲}	۰.۹

جدول ۱۲.۳: مقایسه خطاهای مطلق برای مقادیر متفاوت از اندازه محمل در $t = ۰.۸$ و $Q = ۱۰۵$ (مثال ۸.۵.۳)

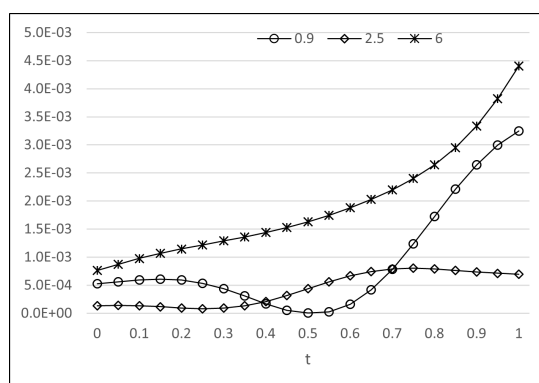
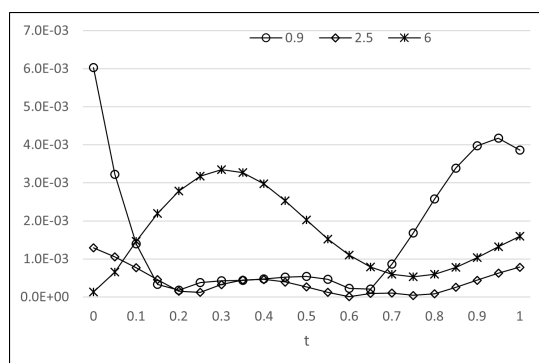
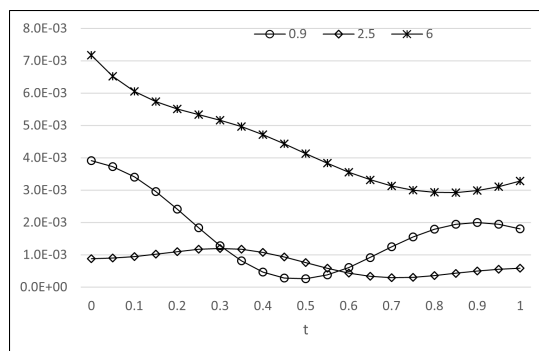
$s_i = 6$			$s_i = ۲.۵$			$s_i = ۱$			x
$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	
۱.۹۹×۱۰^{-۲}	۱.۷۶×۱۰^{-۱}	۱.۳۸×۱۰^{-۲}	۶.۱۸×۱۰^{-۳}	۱.۳۴×۱۰^{-۲}	۳.۵۴×۱۰^{-۳}	۱.۳۰×۱۰^{-۲}	۶.۶۰×۱۰^{-۲}	۶.۱۴×۱۰^{-۲}	-۰.۹۵
۲.۰۵×۱۰^{-۲}	۳.۸۹×۱۰^{-۲}	۱.۳۲×۱۰^{-۲}	۲.۱۴×۱۰^{-۳}	۵.۵۹×۱۰^{-۳}	۱.۴۱×۱۰^{-۳}	۷.۳۵×۱۰^{-۳}	۳.۷۲×۱۰^{-۲}	۱.۰۸×۱۰^{-۲}	-۰.۶
۵.۸۷×۱۰^{-۲}	۶.۸۴×۱۰^{-۳}	۶.۰۱×۱۰^{-۲}	۴.۵۷×۱۰^{-۵}	۷.۷۱×۱۰^{-۴}	۵.۱۲×۱۰^{-۴}	۶.۹۷×۱۰^{-۲}	۵.۰۶×۱۰^{-۲}	۱.۰۰×۱۰^{-۱}	-۰.۲۵
۲.۵۳×۱۰^{-۲}	۱.۸۰×۱۰^{-۲}	۲.۴۴×۱۰^{-۲}	۴.۴۹×۱۰^{-۴}	۴.۳۸×۱۰^{-۴}	۵.۴۴×۱۰^{-۵}	۳.۳۳×۱۰^{-۲}	۵.۴۴×۱۰^{-۲}	۴.۶۹×۱۰^{-۲}	۰.۱
۳.۱۶×۱۰^{-۲}	۵.۰۷×۱۰^{-۲}	۳.۴۶×۱۰^{-۲}	۹.۵۹×۱۰^{-۴}	۳.۲۸×۱۰^{-۳}	۷.۹۳×۱۰^{-۴}	۵.۱۱×۱۰^{-۲}	۷.۲۷×۱۰^{-۲}	۶.۷۵×۱۰^{-۲}	۰.۴۵
۵.۳۲×۱۰^{-۳}	۱.۰۸×۱۰^{-۱}	۲.۶۷×۱۰^{-۴}	۴.۲۰×۱۰^{-۳}	۹.۴۸×۱۰^{-۳}	۲.۴۹×۱۰^{-۳}	۸.۹۰×۱۰^{-۳}	۲.۲۶×۱۰^{-۱}	۲.۹۴×۱۰^{-۲}	۰.۸

جدول ۱۳.۳: مقایسه خطاهای مطلق برای مقادیر متفاوت از اندازه محمل در $t = ۰.۵$ و $Q = ۱۰۵$ (مثال ۸.۵.۳)

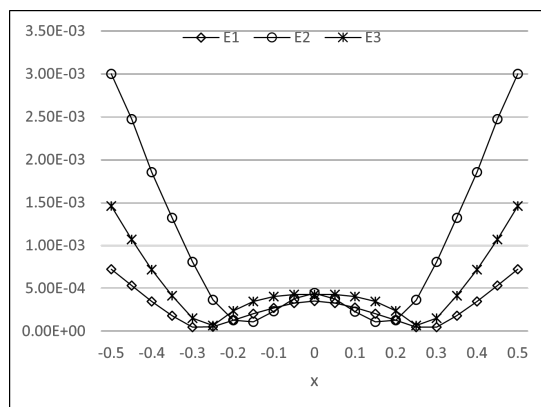
$s_i = 4$			$s_i = ۲.۵$			$s_i = ۱$			x
$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	$ e_T $	$ e_I $	$ e_1 $	
۹.۴۰×۱۰^{-۳}	۱.۷۵×۱۰^{-۲}	۱.۸۰×۱۰^{-۲}	۴.۰۸×۱۰^{-۳}	۱.۵۸×۱۰^{-۲}	۴.۸۵×۱۰^{-۳}	۶.۶۷×۱۰^{-۳}	۲.۴۲×۱۰^{-۳}	۱.۹۹×۱۰^{-۲}	-۰.۹۵
۲.۰۲×۱۰^{-۳}	۳.۳۲×۱۰^{-۲}	۳.۸۷×۱۰^{-۳}	۱.۵۵×۱۰^{-۳}	۶.۰۴×۱۰^{-۳}	۱.۳۱×۱۰^{-۳}	۲.۸۵×۱۰^{-۳}	۶.۰۶×۱۰^{-۳}	۳.۸۳×۱۰^{-۳}	-۰.۶
۳.۰۳×۱۰^{-۲}	۱.۴۲×۱۰^{-۲}	۷.۹۰×۱۰^{-۲}	۲.۶۵×۱۰^{-۴}	۱.۲۳×۱۰^{-۳}	۶.۳۴×۱۰^{-۴}	۵.۹۸×۱۰^{-۳}	۸.۰۷×۱۰^{-۳}	۳.۹۱×۱۰^{-۲}	-۰.۲۵
۱.۰۲×۱۰^{-۲}	۳.۱۷×۱۰^{-۳}	۲.۶۸×۱۰^{-۲}	۱.۵۲×۱۰^{-۴}	۱.۸۵×۱۰^{-۴}	۷.۱۴×۱۰^{-۴}	۴.۷۲×۱۰^{-۳}	۵.۹۹×۱۰^{-۳}	۱.۹۰×۱۰^{-۲}	۰.۱
۲.۲۷×۱۰^{-۲}	۴.۰۱×۱۰^{-۲}	۱.۸۳×۱۰^{-۲}	۷.۸۱×۱۰^{-۴}	۳.۲۰×۱۰^{-۳}	۴.۳۷×۱۰^{-۴}	۸.۵۷×۱۰^{-۳}	۳.۹۹×۱۰^{-۳}	۳.۸۰×۱۰^{-۲}	۰.۴۵
۸.۲۲×۱۰^{-۳}	۱.۰۲×۱۰^{-۱}	۱.۹۳×۱۰^{-۲}	۲.۷۹×۱۰^{-۳}	۱.۱۲×۱۰^{-۲}	۳.۳۱×۱۰^{-۳}	۶.۲۳×۱۰^{-۳}	۳.۰۱×۱۰^{-۳}	۱.۴۶×۱۰^{-۲}	۰.۸



شکل ۹.۳: مقایسه خطای مطلق ($|e_1|$ (بالا)، $|e_2|$ (وسط)، $|e_3|$ (پایین)) برای اندازه‌های مختلف از گره‌ها در $x = 0.15$ (مثال ۸.۵.۳)



شکل ۱۰.۳: مقایسه خطای مطلق ($|e_1|$ (بالا)، $|e_2|$ (وسط)، $|e_3|$ (پایین)) برای اندازه‌های مختلف از محمل‌ها در $x = 0.15$ (مثال ۸.۵.۳)



شکل ۱۱.۳: مقایسه خطای مطلق بین مولفه های جواب عددی حاصل از روش پیشنهادی در $t = ۰.۸۵$ (مثال ۸.۵.۳)

نتیجه گیری

در این رساله، از روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین برای حل عددی معادله دیفرانسیل-جبری با مشتقات جزئی استفاده کردیم. در روش ارائه شده از توابع پایه‌ای شعاعی با محمل فشرده برای تقریب تابع جواب استفاده کردیم که در حل معادلات دیفرانسیل-جبری نیز به دلیل وجود دستگاه معادلات با ابعاد زیاد بسیار کارا می‌باشد. با مقایسه نتایج عددی به دست آمده در این تحقیق با نتایج عددی به دست آمده در سایر تحقیقات، می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی علاوه بر این که مشکلات برخی روش‌ها به خصوص روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی را ندارد، از دقت خوبی نسبت به سایر روش‌ها برخوردار است. در این تحقیق به حل عددی معادله از نوع خطی پرداخته شد. با توجه به تنوع بسیار معادلات دیفرانسیل-جبری جزئی، با توجه به تنوع بسیار معادلات و همچنین کاربرد وسیع این گونه معادلات در سایر شاخه‌ها تحقیق به روی حل عددی انواع دیگری از معادلات دیفرانسیل جبری از قبیل معادلات غیرخطی پیشنهاد می‌گردد.

مراجع

- [1] Abbasbandy, S., Roohani Ghehsareh, H., Alhuthali, M. S., & Alsulami, H. H. (2014). Comparison of meshless local weak and strong forms based on particular solutions for a non-classical 2-D diffusion model. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 39, 121-128.
- [2] Abbasbandy, S., Roohani Ghehsareh, H., & Hashim, I. (2013). A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37, 885-898.
- [3] Abbasbandy, S., & Shirzadi, A. (2010). A meshless method for two-dimensional diffusion equation with an integral condition. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34, 1031-1037.
- [4] Abbasbandy, S., & Shirzadi, A. (2011). MLPG method for two-dimensional diffusion equation with Neumann's and non-classical boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics*, 61, 170-180.
- [5] Amani Rad, J., Parand, K., & Abbasbandy, S. (2015). Local weak-form meshless techniques based on the radial point interpolation (RPI) method and local boundary integral equation (LBIE) method to evaluate European and American options. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22, 1178-1200.
- [6] Arnold, M. (1998). A note on the uniform perturbation index. *Rostocker Mathematisches Kolloquium*, 52, 33-46.
- [7] Assari, P., & Dehghan, M. (2019). A meshless local Galerkin method for solving Volterra integral equations deduced from nonlinear fractional differential equations using the moving least squares technique. *Applied Numerical Mathematics*, 143, 276-299.
- [8] Atluri, S. N. (2002). *Methods of Computer Modeling in Engineering and Sciences*. Tech Science Press.

- [9] Atluri, S. N., Kim, H. G., & Cho, J. Y. (1999). A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods. *Computational Mechanics*, 24, 348-372.
- [10] Atluri, S. N., & Shen, S. (2002). The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple and less-costly alternative to the finite element and boundary element methods. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 3(1), 11-52.
- [11] Atluri, S. N., & Zhu, T. (1998b). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22, 117-127.
- [12] Atluri, S. N., & Zhu, T. (1998a). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computational modeling and simulation. *Computer Modeling and Simulation in Engineering*, 3, 187-196.
- [13] Atluri, S. N., & Zhu, T. (2000). New concepts in meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 537-556.
- [14] Bao, W., & Song, Y. (2014). Multiquadric quasi-interpolation methods for solving partial differential algebraic equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 30, 95-119.
- [15] Bao, W., & Song, Y. (2012). Solving partial differential algebraic equations by collocation and radial basis functions. *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, 30(5-6), 951-969.
- [16] Buhmann, M. D. (1998). Radial functions on compact support. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society II*, 41, 33-46.
- [17] Campbell, S. (1995). High-index differential algebraic equations. *Mechanics of Structures and Machines*, 23(2), 199-222.
- [18] Campbell, S., & Gear, C. W. (1995). The index of general nonlinear DAEs. *Numerische Mathematik*, 72, 173-196.
- [19] Chistyakov, V. F., Chistyakova, E. V., & Diep, N. K. (2020). Upon the concept of index of linear partial differential-algebraic equations. *Siberian Mathematical Journal*, 61(5), 913-925.
- [20] De, S., & Bathe, K. J. (2001). The method of finite spheres with improved numerical integration. *Computers & Structures*, 79, 22-25.
- [21] Duan, Y., Tang, P. F., & Huang, T. Z. (2009). A novel domain decomposition method for highly oscillating partial differential equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(11), 1284-1288.

- [22] Estrada V., Parodi R. E., Soledad D. M. (2009). Addressing the control problem of algae growth in water reservoirs with advanced dynamic optimization approaches. *Computers and Chemical Engineering*, 33, 2063-2074.
- [23] Ganmacher, F. R. (1986). *Matrizentheorie*. Berlin, Germany: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- [24] Gelas, A. (2006). *Compactly Supported Radial Basis Functions Multidimensional Reconstruction and Applications*. PhD Thesis, France.
- [25] Gera, C. W., & Petzold, L. R. (1984). ODE methods for the solution of differential/algebraic systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(4), 716-728.
- [26] Gingold, R. A., & Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 181(3), 375-389.
- [27] González-Casanova, P., Muñoz-Gómez, J. A., & Rodríguez-Gómez, G. (2009). Node adaptive domain decomposition method by radial basis functions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 25(6), 1482-1501.
- [28] Haghighi, D., Abbasbandy, S., Shivanian, E., Dong, L., & Atluri, S. N. (2022). The Fragile points method (FPM) to solve two-dimensional hyperbolic telegraph equation using point stiffness matrices. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 134, 11-21.
- [29] Hairer, E., Roche, M., & Lubich, C. (1989). *The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods*. Lecture Notes in Mathematics, New York: Springer-verlag.
- [30] Hajiketabi, M., & Abbasbandy, S. (2018). The combination of meshless method based on radial basis functions with a geometric numerical integration method for solving partial differential equations: Application to the heat equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 87, 36-46.
- [31] Kawamura, Y. (2019). Phase reduction of limit-torus solutions to partial differential algebraic equations. *Physical Review Research*, 1(3), 1-23.
- [32] Lambert, W., Alvarez, A., Ledoino, I., Tadeu, D., Marchesin, D., & Bruining, J. (2020). Mathematics and numerics for balance partial differential-algebraic equations (PDAEs). *Journal of Scientific Computing*, 84(29), 1-56.

- [33] Li, K., Huang, Q. B., Wang, J. L., & Lin, L. G. (2011). An improved localized radial basis function meshless method for computational aeroacoustics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(1), 47-55.
- [34] Ling, L., & Kansa, E. J. (2005). A least-squares preconditioner for radial basis functions collocation methods. *Advances in Computational Mathematics*, 23(1-2), 31-54.
- [35] Liu, G. R., & Gu, Y. T. (2001). A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analysis of 2-D solids. *Journal of Sound and Vibration*, 246, 29-46.
- [36] Liu, Z., & Xu, Q. (2019). A multiscale RBF collocation method for the numerical solution of partial differential equations. *Mathematics*, 7(10), 1-15.
- [37] Lucht, W., Strehmel, K., & Eichler-Liebenow, C. (1997). *Linear Partial Differential Algebraic Equations Part I: Indexes, Consistent Boundary/Initial Conditions*. Report of Institute of Numerical Mathematics, Report No. 17, Halle, Germany.
- [38] Luenberger, D. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 22(3), 312-321.
- [39] Marszalek, W. (1997). *Analysis of Partial Differential Algebraic Equations*. PhD Thesis, North Carolina State University, Raleigh, NC, USA.
- [40] Marszalek, W., & Trzaska, Z. W. (1995). Analysis of implicit hyperbolic multivariable systems. *Applied Mathematical Modelling*, 19, 400-410.
- [41] Mazzia, A., Ferronato, M., Pini, G., & Gambolati, G. (2007). A comparison of numerical integration rules for the meshless local Petrov-Galerkin method. *Numerical Algorithms*, 45, 61-74.
- [42] Mazzia, A., & Pini, G. (2010). Product Gauss quadrature rules vs. cubature rules in the meshless local Petrov-Galerkin method. *Journal of complexity*, 26, 82-101.
- [43] Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10, 307-318.
- [44] Newcomb, R. (1981). The semistate description of nonlinear time-variable circuits. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 28(1), 62-71.
- [45] Rudin, W. (1986). *Real and Complex Analysis*. Singapore: McGraw Hill.
- [46] Schaback, R. (1995). Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3(3), 251-264.

- [47] Schoenberg, I. J. (1938). Metric spaces and completely monotone functions. *Annals of Mathematics*, 39(4), 811-841.
- [48] Smolik, M., & Skala, V. (2018). Large scattered data interpolation with radial basis functions and space subdivision. *Integrated Computer Aided Engineering*, 25(1), 49-62.
- [49] Soltanian, F., Dehghan, M., & Karbasi, S. M. (2010). Solution of the differential algebraic equations via homotopy perturbation method and their engineering applications. *International Journal of Computer Mathematics*, 87(9), 1950-1974.
- [50] Soltanian, F., Karbassi, S. M., & Hosseini, M. M. (2009). Application of He's variational iteration method for solution of differential-algebraic equations. *Chaos. Solitons & Fractals*, 41(1), 436-445.
- [51] Wendland, H. (1998). Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Journal of Approximation Theory*, 93, 258-272.
- [52] Wendland, H. (1995). Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, 4, 389-396.
- [53] Wendland, H. (2004). *Scattered Data Approximation*. Germany: Cambridge University Press.
- [54] Wu, Z. (1995). Compactly supported positive definite radial functions. *Advances in Computational Mathematics*, 4, 283-292.
- [55] Wu, Z., & Schaback, R. (1993). Local error estimate for radial basis function interpolation of scattered data, *IMA Journal of Numerical Analysis*, 13, 13-27.
- [56] Xiao, J. R., & McCarthy, M. A. (2003). A local Heaviside weighted meshless method for two-dimensional solids using radial basis functions. *Computational Mechanics*, 31, 301-315.
- [57] Zheng, S., Feng, R., & Huang, A. (2020). The optimal shape parameter for the least squares approximation based on the radial basis function. *Mathematics*, 8(11), 1-20.
- [58] Zhou, F., Zhang, J., Sheng, X., & Li, G. (2011). Shape variable radial basis function and its application in dual reciprocity boundary face method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35(2), 244-252.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Derivative array	آرایه مشتق
Modelling strategies	استراتژی‌های مدل‌بندی
Uncertainly principle	اصل عدم قطعیت
Strictly	اکید
Domain integral	انتگرال گیری سراسری
Singular integral	انتگرال منفرد
Pertubation index	اندیس اغتشاشی
Partition of unity	افراز واحد
Uniform differentiation index	اندیس دیفرانسیلی یکنواخت
Time index	اندیس زمانی
Spatial index	اندیس مکانی
Reflection	بازتاب
Dimension	بعد
Maximal dimension	بعد ماکزیمال
Elliptic	بیضوی
Best approximation	بهترین تقریب
Invariant	پایا
Penalty parameter	پارامتر جریمه
Scattered	پراکنده
Nilpotent	پوچ‌توان
Reconstructed function	تابع بازسازی شده
Step function	تابع پله‌ای
Trial function	تابع آزمایش
Test function	تابع تست
Shape function	تابع شکل

Affine transformation	تبدیل آفین
Fourier transformation	تبدیل فوریه
Laplace transformation	تبدیل لاپلاس
Geometric transformations	تبدیلات هندسی
Visualization	تصویرسازی
Change of coordinate	تغییر مختصات
Reduction	تقلیل
Fully-explicit	تماما صریح
Basis functions	توابع پایه‌ای
Radial basis functions	توابع پایه‌ای شعاعی
Purly algebraic	جبری محض
Polynomial	چندجمله‌ای
Legender polynomial	چندجمله‌ای لژاندر
Solvability	حل‌پذیری
Well-posed	خوش‌وضع
Complex geometrical domains	دامنه‌های هندسی پیچیده
Accuracy	دقت
Rotation	دوران
Full row rank	رتبه سطری کامل
Method of lines	روش خطوط
Finite element method	روش عناصر متناهی
Boundary element method	روش عناصر مرزی
Subdomain	زیردامنه
Submanifold	زیرمنیفلد
Structure	ساختار
Consistenceny	سازگاری
Parabolic	سهموی
Background mesh	شبکه زمینه‌ای
remeshing	شبکه‌بندی مجدد
Moving grids	شبکه‌های متحرک
Simulation	شبیه‌سازی
Dirichlet condition	شرایط دیریکله
Growth condition	شرط رشد

Explicit	صریح
Increasing	صعودی
Essential	ضروری
Implicit	ضمنی
Design	طراحی
operator	عملگر
Nonlinear	غیرخطی
Weak form	فرم ضعیف
Kronecker normal form	فرم نرمال کرونگر
Recursive form	فرمول بازگشتی
Compact	فشرده
Circular sector	قطاع دایره‌ای
Conservative laws	قوانین بقا
Calocation	هم‌محلی
Moving least squares	کمترین مربعات متحرک
Node	گره
Dircretization	گسسته‌سازی
Stiffness matrix	ماتریس سختی
Square matrix	ماتریس مربعی
Unit matrix	ماتریس واحد
Error residuals	مانده‌های خطا
Orthogonal	متعامد
Distinct	متمايز
Open set	مجموعه باز
Connected set	مجموعه همبند
Unknown variables	مجهولات
Computations	محاسبات
Intersection	محل تلاقی- اشتراک
Locality	محلی بودن
Cartesian coordinate	مختصات دکارتی
Polar coordinate	مختصات قطبی
Matrix pencil	مداد ماتریس
Electrical circuits	مدارهای الکتریکی

Variational problems	مسائل تغییراتی
Independent	مستقل
Path	مسیر
Reconstruction problem	مسئله بازتولید
Poisson equation	معادله پواسون
Ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Algebraic differential equation	معادله دیفرانسیل-جبری
Positive definite	معین مثبت
Comparison	مقایسه
Element Free	مولفه آزاد
eigenvalue	مقدار ویژه
Constrained	مقید
Singular	منفرد
Manifold	منیفلد
Unsymmetric	نامتقارن
Undetermined	نامعین
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Norm-invariant	نرم-پایا
Near-real-time	نزدیک واقعیت
Decreasing	نزولی
Relative	نسبی
Boundray point	نقطه مرزی
Midpoint	نقطه میانی
Semi-explicit	نیمه صریح
Dependent	وابسته
Virtual reality	واقعیت مجازی
Kernel	هسته
Smoothness	هموار بودن
Convegency	همگرایی
Univariate	یک متغیره
Uniform	یکنواخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accuracy	دقت
Affine transformation	تبدیل آفین
Background mesh	شبکه زمینه‌ای
Basis functions	توابع پایه‌ای
Best approximation	بهترین تقریب
Boundary element method	روش عناصر مرزی
Boundray point	نقطه مرزی
Calocation	هم‌محلی
Cartesian coodinate	مختصات دکارتی
Change of coordinate	تغییر مختصات
Circular sector	قطاع دایره‌ای
Compact	فشرده
Comparison	مقایسه
Complex geometrical domains	دامنه‌های هندسی پیچیده
Computations	محاسبات
Connected set	مجموعه همبند
Conservative laws	قوانین بقا
Consistenceny	سازگاری
Constrained	مقید
Convegency	همگرایی
Decreasing	نزولی
Dependent	وابسته
Derivative array	آرایه مشتق
Design	طراحی
Dirichlet condition	شرایط دیریکله
Discretization	گسسته‌سازی

Distinct	متمایز
Domain integral	انتگرال گیری سراسری
Eigenvalue	مقدار ویژه
Electrical circuits	مدارهای الکتریکی
Element Free	آزاد
Elliptic	بیضوی
Error residuals	مانده‌های خطا
Essential	ضروری
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Explicit	صریح
Finite element method	روش عناصر متناهی
Fourier transformation	تبدیل فوریه
Full row rank	رتبه سطری کامل
Fully-explicit	تماما صریح
Geometric transformations	تبدیلات هندسی
Growth condition	شرط رشد
Implicit	ضمنی
Increasing	صعودی
Independent	مستقل
Infinite	نامتناهی
Intersection	محل تلاقی-اشتراک
Invariant	پایا
Kernel	هسته
Kronecker normal form	فرم نرمال کرونگر
Laplace transformation	تبدیل لاپلاس
Legender polynomial	چندجمله‌ای لژاندر
Locality	محلی بودن
Manifold	منیفلد
Matrix pencil	مداد ماتریس
Maximal dimension	بعد ماکزیمال
Method of lines	روش خطوط
Midpoint	نقطه میانی
Minimal dimension	بعد مینیمال

Moving grids	شبکه‌های متحرک
Modelling strategies	استراتژی‌های مدل‌بندی
Moving least squares	کمترین مربعات متحرک
Near-real-time	نزدیک واقعیت
Nilpotent	پوچ‌توان
Node	گره
Nonlinear	غیرخطی
Norm-invariant	نرم-پایا
Open set	مجموعه باز
Ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Orthogonal	متعامد
Parabolic	سهموی
Partition of unity	افراز واحد
Path	مسیر
Penalty parameter	پارامتر جریمه
Perturbation index	اندیس اغتشاشی
Poisson equation	معادله پواسون
Polar coordinate	مختصات قطبی
Polynomial	چندجمله‌ای
Positive definite	معین مثبت
Purely algebraic	جبری محض
Radial basis functions	توابع پایه‌ای شعاعی
Reconstruction problem	مسئله بازتولید
Recursive form	فرمول بازگشتی
Reflection	بازتاب
Time index	اندیس زمانی
Translation	انتقال
Trial function	تابع آزمایش
Reconstructed function	تابع بازسازی شده
Reduction	تقلیل
Relative	نسبی
Remeshing	شبکه‌بندی مجدد
Rotation	دوران

Scattered	پراکنده
Semi-explicit	نیمه صریح
Shape function	تابع شکل
Simulation	شبیه‌سازی
Singular	منفرد
Singular integral	انتگرال منفرد
Smoothness	هموار بودن
Spatial index	اندیس مکانی
Sphere	کره
Solvability	حل‌پذیری
Square matrix	ماتریس مربعی
Step function	تابع پله‌ای
Stiffness matrix	ماتریس سختی
Strictly	اکید
Structure	ساختار
Subdomain	زیردامنه
Submanifold	زیرمنifold
Undetermined	نامعین
Test function	تابع تست
Uncertainly principle	اصل عدم قطعیت
Uniform differentiation index	اندیس دیفرانسیلی یکنواخت
Univariate	یک‌متغیره
Unit matrix	ماتریس واحد
Unknown variables	مجهولات
Unsymmetric	نامتقارن
Variational problems	مسائل تغییراتی
Virtual reality	واقعیت مجازی
Visualization	تصویرسازی
Weak form	فرم ضعیف
Well-posed	خوش‌وضع

Abstract

In this thesis, the application of the Meshless Local Petrov-Galerkin Method in solving the linear partial differential-algebraic equations (PDAEs) was surveyed. The Gaussian quadrature points in the domain and on the boundary were determined as centers of local circular sub-domains. The radii are considered as a constant. By governing the local weak-form in each sub-domain, the compactly supported radial basis functions (CS-RBFs) approximation was used as the trial function and Heaviside step function was considered as the test function. The proposed method was successfully utilized for solving linear PDAEs and the numerical results were obtained and compared with the exact solution to investigate the accuracy of the proposed method. The sensitivity to different parameters was analyzed and the comparison with the other methods was done. The results were shown with tables and figures.

Keywords: Differential algebraic equations, partial differential algebraic equations, Meshless local Petrov-Galerkin method, compactly supported radial basis functions.



Payame Noor University

**Department of Mathematics
Thesis Submitted in Partial Fulfillment
of the Requirement for the Degree of Ph.D
in Applied Mathematics**

Title:

**Numerical solution of partial differential-algebraic equations in control theory
with meshless methods**

Supervisor:

**Dr. Saeid Abbasbandy
and
Dr. Fahimeh Soltanian**

By:

Azam Noorafkan Zanjani

July, 2022