

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل مسأله جریان ترافیک کلان نگر به روش‌های بازتولیدی و بدون شبکه

استاد راهنما

دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور

دکتر الیاس شیوانیان

پژوهشگر

ندا نجف‌زاده

۱۴۰۱

نام خانوادگی دانشجو: نجف زاده

نام: ندا

عنوان: حل مسأله جریان ترافیک کلان نگر به روش های بازتولیدی و بدون شبکه

استاد راهنما: دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور: دکتر الیاس شیوانیان

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۴۰۱

تعداد صفحات: ۱۲۵

واژگان کلیدی: معادلات ترافیکی، روش های بدون شبکه، روش هسته بازتولیدی

چکیده

با توجه به نقش و اهمیت کنترل ترافیک در حفظ محیط زیست و سلامت شهروندان، در این رساله تلاش کردیم که از طریق حل معادلات ترافیکی با حداقل خطا، به افزایش دقت و کنترل هوشمند ترافیک کمک کنیم. مدل های زیادی توسط محققانی که ترافیک را مطالعه می کنند، ارائه شده اند. یکی از پرکاربردترین مدل های جریان ترافیک، مدل های ماکروسکوپی هستند که جریان ترافیک را به صورت یک یا مجموعه ای از معادلات جزئی هذلولی غیرخطی بیان می کنند. از آنجایی که در پاسخ به اکثر این معادلات تغییرات یا شوک های ناگهانی وجود دارد، انتخاب روش عددی مناسب برای حل این دسته از معادلات ضروری است. نظریه کلان به جریان ترافیک به عنوان یک مفهوم تجمعی نگاه می کند. این روش مناسب ترین تکنیک برای مطالعه وضعیت پایدار پدیده جریان براساس تشابهات فیزیکی مانند جریان گرما و جریان سیال است و بنابراین عملکرد بالقوه دستگاه را به بهترین شکل توضیح می دهد. ابتدا به معرفی چند مدل جریان ترافیک می پردازیم و سپس برخی مفاهیم روش های هسته بازتولیدی و بدون شبکه را ارائه می کنیم. از بین روش های بدون شبکه روش MLS انتخاب شده که علت این انتخاب و تشریح کامل آن در فصل سوم بیان شده است. به دلیل مشابهت رفتاری معادلات برگرز و برگرز فیشر به معادلات ترافیکی ابتدا روش را روی معادلات برگرز بررسی کردیم و جوابهای بدست آمده را با جواب های دقیق مقایسه کردیم که در فصل چهارم جداول مقایسه ای درج شده است. در انتها یکی از مدل های کلان نگر را به روش های ارائه شده حل می کنیم و نشان می دهیم که روش های بدون شبکه روشی بسیار کارا و مناسب برای حل این معادلات هستند.

بنا م خا لو تکت



کلیه صفحات (اصفحه) آماده گردید. حال می توانید گزارش را چاپ نمایید

https://golestan.ikiu.ac.ir/Forms/F0202_PROCESS_REP_FILTER/...

تاریخ: ۱۴۰۱/۱۱/۰۴
شماره: ۳۰۰/۰۱۵۱۲۸

صورت جلسه دفاع از رساله دکتری

۱۰
۱۴۰۱/۱۱/۰۴

جلسه دفاع از رساله خانم ندا نجف زاده دانشجوی مقطع دکتری تخصصی رشته ی ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی ۹۵۴۱۹۰۰۰۳ در روز دوشنبه مورخ ۱۴۰۱/۱۱/۱۰ تحت عنوان حل مسأله جریان ترافیک کلان نگر به روشهای بازتولیدی و بدون شبکه Solving the problem of macroscopic traffic flow by the reproducing and meshless methods مصوب تاریخ ۱۳۹۹/۱۰/۲۱ تشکیل گردید و بر اساس محتوا و چگونگی ارائه پایان نامه با نمره ۱۸/۹۹ و با درجه :

عالی (۱۹-۲۰) ☐ بسیار خوب (۱۸-۱۸/۹۹) ☒ خوب (۱۶-۱۷/۹۹) ☐
غیر قابل قبول (نمره کمتر از ۱۶) ☐ بدون نیاز به اصلاحات ☐ مشروط به انجام اصلاحات ☐
مورد تصویب هیات داوران قرار گرفت.

۱- چنانچه اصلاحات مندرج در برگه شرح اصلاحات رساله تا پایان مهلت مقرر توسط دانشجو انجام نگرفته و به تایید استاد راهنما و نماینده تحصیلات تکمیلی نرسد، نمره دانشجو با کسر ۲ نمره، به ۱۷/۹۹ تغییر می یابد.
۲- در صورتی که دانشجو تا تاریخ ۲ ماه پس از مهلت تعیین شده در برگه شرح اصلاحات پایان نامه نسبت به انجام اصلاحات اقدام ننماید، منصرف از تحصیل شناخته خواهد شد.
*این شرایط در پایان جلسه دفاع به اطلاع دانشجو رسید.

امضای دانشجو

هیات داوران

عنوان	نام و نام خانوادگی	محل امضاء
استاد راهنمای اول	جناب آقای دکتر سعید عباس بندی	
استاد مشاور اول	جناب آقای دکتر الیاس شیوانیان	
استاد داور داخلی ۱	جناب آقای دکتر داود رستمی ورنوسفادرائی	
استاد داور داخلی ۲	جناب آقای دکتر محمدرضا انصاری	
استاد داور خارجی ۱	جناب آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	
نماینده تحصیلات تکمیلی	جناب آقای دکتر ابراهیم وطن دوست	

رونوشت: ۱- اداره خدمات ماشینی تحصیلات تکمیلی

۲- آموزش دانشکده

۳- گروه آموزشی ریاضی کاربردی



تعه‌دنامه اصالت اثر

اینجانب ندا نجف زاده دانش آموخته مقطع دکتری در رشته ریاضی کاربردی گرایش عددی که در تاریخ ۱۰ بهمن ماه ۱۴۰۱ از رساله ی خود تحت عنوان **حل معادلات ترافیکی با روشهای بدون مش و هسته بازتولیدی** با کسب درجه ی بسیار خوب دفاع کرده ام، شرعا و قانونا متعهد می شوم:

۱. مطالب مندرج در این رساله، حاصل تحقیق و مطالعه اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران اعم از رساله، کتاب، مقاله و غیره استفاده کرده ام، با رعایت کامل امانت، مطابق مقررات، اقدام به ارجاع در متن و ذکر آن در فهرست منابع و مآخذ نموده ام.
۲. تمامی یا بخشی از این رساله قبلا برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی به سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.
۳. مقالات مستخرج از این رساله کاملا حاصل کار اینجانب بوده و از هر گونه جعل داده و یا تغییر اطلاعات پرهیز کرده ام.
۴. از ارسال همزمان و یا تکراری مقالات مستخرج از این رساله (با بیش از ۳ درصد همپوشانی) به مجلات و یا همایش های گوناگون خودداری نموده و می نمایم.
۵. کلیه حقوق مادی و معنوی حاصل از این رساله متعلق به دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) بوده و متعهد می شوم هر گونه بهره مندی و یا نشر دستاوردهای حاصل از این تحقیق اعم از چاپ کتاب، مقاله، ثبت اختراع و غیره (چه در زمان دانشجویی و یا بعد از فراغت از تحصیل) با کسب اجازه از استاد (استادان) راهنما باشد.
۶. در صورت اثبات تخلف و نقض موارد پنجگانه فوق (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) از درجه اعتبار ساقط و اینجانب هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی دانشجو ندا نجف زاده

امضاء



سوگندنامه دانش آموختگان دکتری دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

به نام خدا

سپاس ایزد منان را که مرا مشمول الطاف خویش نمود که با طی مراحل تحصیل موفق به اخذ درجه دکتری شوم. به شکرانه این نعمت بزرگ الهی که با امکانات این مرز و بوم، فراهم و نزد اینجانب به امانت گذاشته شده است، در پیشگاه ملت ایران به کتاب آسمانی خود، قرآن کریم، سوگند یاد می کنم که :

- در سراسر زندگی حرفه ای، در راه اعتلای کشور ایران و جامعه بشری به نحو احسن قدم برداشته و در این راه از هیچ تلاشی دریغ ننمایم.
- در تمام فعالیت های تخصصی، رضای خدا را همراه با صداقت علمی و اجتماعی در نظر داشته و از موقعیت های به دست آمده در جهت رفع مشکلات جامعه استفاده کنم و در همه ی امور، منافع کشور را بر منافع فردی مقدم بدارم.
- همواره علم و دانش خود را به روز نگاه داشته و در ایفای مسئولیت و تعهدات حرفه ای در حد توان سعی و تلاش خود را به کار گیرم.
- و اینکه از خداوند علیم توفیق بندگی و پای بندی به مفاد این سوگندنامه را خواستارم و از او می خواهم که مرا در ایفای رسالت علمی و انسانی خویش موفق بدارد.

نام و نام خانوادگی دانشجو ندا نجف زاده

امضاء



عنوان رساله: حل معادلات ترافیکی با روشهای بدون مش و هسته باز تولیدی
نام و نام خانوادگی دانشجو: ندا نجف زاده (ش: ۹۵۴۱۹۰۰۰۳)

مجوز بهره برداری از رساله

کلیه حقوق اعم از چاپ، تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از نتایج این پایان نامه برای دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) قزوین محفوظ است. بهره برداری از این پایان نامه/ رساله در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

- ☒ بهره برداری از این پایان نامه/ رساله برای همگان بلامانع است.
☐ بهره برداری از این پایان نامه/ رساله با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.
☐ بهره برداری از این پایان نامه/ رساله تا تاریخ ممنوع است.

استاد راهنما می تواند یکی از گزینه های بالا را انتخاب کند و مسئولین کتابخانه موظف به رعایت موارد تعیین شده می باشد.

نام استاد و یا اساتید راهنما: سعید عباس بندی

تاریخ: ۱۴۰۱/۱۰/۰۸

امضا:

تقدیم بہ :

مادر م بہ زلالی چشمہ،

ہمسرم بہ صمیمیت باران،

پسرم بہ طراوت شبنم۔

سپاس‌گزاری

نخستین سپاس من از پروردگارم است، که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان. سپاس ویژه دارم از استاد راهنمای محترم جناب آقای پروفور عباس بندی که با راهنمایی‌های ارزنده خود این رساله را هدایت و از نقایص پیراسته. تشکر فراوان از استاد مشاور محترم، جناب آقای دکتر الیاس شیوانیان که همواره از محکات و راهنمایی‌های ارزشمند ایشان کمال استفاده را بردم. از مادر عزیزم بسیار ممنونم، آنکه آفتاب مهرش در آستانه قلبم، همچنان پابرجاست و هرگز غروب نخواهد کرد. به او که نمی‌دانم از بزرگی اش بگویم یا سخاوت، سکوت، مهربانی اش، به او که برای من هم مادر است و هم پدر. سپاس فراوان از همسر خوبم که در مسیر ناممکنی‌ها و صبر را برایم به تصویر کشید و برق امید چشانش چراغ دلم را روشن کرد و همواره با صبر و مهربانی به من امید ادامه راه را داد. و در آخر از پسر کوچکم که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است.

نمنا نجف زاده

۱۴۰۱

چکیده

با توجه به نقش و اهمیت کنترل ترافیک در حفظ محیط زیست و سلامت شهروندان، در این رساله تلاش کردیم که از طریق حل معادلات ترافیکی با حداقل خطا، به افزایش دقت و کنترل هوشمند ترافیک کمک کنیم. مدل‌های زیادی توسط محققانی که ترافیک را مطالعه می‌کنند، ارائه شده‌اند. یکی از پرکاربردترین مدل‌های جریان ترافیک، مدل‌های ماکروسکوپی هستند که جریان ترافیک را به صورت یک یا مجموعه‌ای از معادلات جزیی هذلولی غیرخطی بیان می‌کنند. از آنجایی که در پاسخ به اکثر این معادلات تغییرات یا شوک‌های ناگهانی وجود دارد، انتخاب روش عددی مناسب برای حل این دسته از معادلات ضروری است. نظریه کلان به جریان ترافیک به عنوان یک مفهوم تجمعی نگاه می‌کند. این روش مناسب‌ترین تکنیک برای مطالعه وضعیت پایدار پدیده جریان براساس تشابهات فیزیکی مانند جریان گرما و جریان سیال است و بنابراین عملکرد بالقوه دستگاه را به بهترین شکل توضیح می‌دهد. در این رساله ابتدا به معرفی چند مدل جریان ترافیک می‌پردازیم و سپس برخی مفاهیم روش‌های هسته بازتولیدی و روش‌های بدون شبکه را ارائه می‌کنیم. از بین روش‌های بدون شبکه روش MLS انتخاب شده که علت این انتخاب و تشریح کامل این روش در فصل شوم بیان شده است. به دلیل مشابهت رفتاری معادلات برگرز و برگرز فیشر به معادلات ترافیکی ابتدا روش را روی معادلات برگرز سنجیدیم و نتایج را با جواب‌های دقیق مقایسه کردیم و به نتایج خوبی رسیدیم که در فصل چهارم جداول مقایسه‌ای درج شده است. در انتها یکی از مدل‌های کلان نگر را به روش‌های ارائه شده حل می‌کنیم و نشان می‌دهیم که روش‌های بدون شبکه روشی بسیار کارا و مناسب برای حل این معادلات هستند.

فهرست مطالب

ژ	فهرست شکل ها
ص	فهرست جدول ها
۴	۱ مدل های جریان ترافیک
۵	۱.۱ انواع مدل های جریان ترافیک
۵	۱.۱.۱ مدل خردنگر
۹	۲.۱.۱ مدل های کلاننگر
۱۳	۱.۲.۱.۱ مدل LWR
۱۶	۲.۲.۱.۱ مدل تصادفی
۲۰	۳.۲.۱.۱ مدل $P - W$
۲۱	۴.۲.۱.۱ مدل $A - R$
۲۲	۵.۲.۱.۱ مدل های مرتبه سوم:
۲۳	۳.۱.۱ مدل کلاننگر تعمیم یافته مدل تعقیب خودرو
۲۵	۴.۱.۱ یک مدل کلان توسعه یافته مربوط به ویژگی های ترسو و تهاجمی راننده
۲۷	۲ روش هسته بازتولیدی
۲۸	۱.۲ هسته بازتولیدی

۲۸	۱.۱.۲	خواص اصلی هسته بازتولیدی
۲۹	۲.۱.۲	فضای $W_p^m[a, b]$ هسته بازتولیدی
۳۰	۱.۲.۱.۲	هسته فضای $W_p^m[a, b]$
۳۳	۲.۲.۱.۲	زیر فضای بسته از فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$
۳۵	۳.۱.۲	فضای هسته بازتولیدی مضاعف $W_p^{(m,n)}(D)$
۳۷	۲.۲	حل معادله ترافیک با استفاده از روش هسته بازتولیدی
۴۱	۳.۲	مثال‌های عددی
۴۵	۳	روش‌های بدون شبکه
۴۶	۱.۳	روش بدون شبکه
۴۸	۲.۳	تقریب آزمایشی
۴۸	۱.۲.۳	روش ذرات هیدرودینامیکی هموار
۵۰	۲.۲.۳	روش بازتولیدی عناصر هسته
۵۰	۳.۲.۳	کمترین مربعات متحرک
۵۲	۴.۲.۳	روش‌های افراز یکه
۵۳	۵.۲.۳	توابع پایه‌ای شعاعی
۵۴	۳.۳	آزمودن
۵۴	۱.۳.۳	آزمودن به فرم قوی (روش هم محلی)
۵۵	۲.۳.۳	آزمودن به فرم ضعیف سراسری
۵۵	۳.۳.۳	آزمودن به فرم ضعیف محلی
۵۶	۴.۳	کمترین مربعات متحرک MLS
۶۱	۴	حل معادله برگرز به روش بدون شبکه

۶۲	۱.۴	معادلات برگرزو برگرز فیشر
۶۵	۲.۴	روش اصلاح شده ETD
۶۸	۳.۴	حل معادله برگرز و برگرز فیشر به روش جدید
۶۹	۱.۳.۴	حل معادله برگرز
۷۱	۲.۳.۴	حل معادله برگرز-فیشر
۷۵	۴.۴	پایداری روش
۸۰	۵.۴	مثال‌های عددی
۹۷	۵	حل معادله ترافیک به روش بدون شبکه
۹۸	۱.۵	معادلات ترافیک
۱۰۰	۲.۵	حل معادله ترافیک LWR به روش جدید
۱۰۳	۳.۵	مثال‌های عددی
۱۱۰	مراجع	
۱۱۶	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	

فهرست شکل‌ها

- ۱.۱ چگالی و جریان به روایت تصویر ۱۰
- ۲.۱ روابط بین چگالی و جریان و سرعت ۱۱
- ۳.۱ نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل گرین شیلدز ۱۵
- ۴.۱ نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل گرین برگ ۱۵
- ۵.۱ نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل آندروود ۱۶
- ۶.۱ نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل دروو ۱۶
- ۷.۱ $(L = 4)$ یک نمودار ساده قانون نگاه به جلو مربوط به حرکت وسیله نقلیه برای
سه مثال مختلف ترافیکی ۱۸
- ۱.۲ مقایسه جواب معادله مثال ۱.۳.۲ به روش هسته بازتولیدی (a, c) با جواب معادله
با استفاده از متمتیکا (b) ۴۳
- ۲.۲ جواب معادله ترافیک ۱.۳.۲ به روش هسته بازتولیدی به حالت دو بعدی ۴۴
- ۳.۲ مثال ۲.۳.۲، برای $N = 20$ و $t = 10$ ۴۴
- ۱.۴ (a) ، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۱.۵.۴ با $N = 40$ و $\nu = 1$ ، (c) ،
جواب در $1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80, 100$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$ ۸۱
- ۲.۴ (a) ، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۱.۵.۴ با $N = 40$ و $\nu = 1$ و $t = 10$ ،
پاسخ در $1, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 40, 60, 80, 100$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$ ۸۲

- ۳.۴ (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۱.۵.۴ با $N = 40$ و $\nu = 0.01$ و $t = 10$
- ۸۳ . (c) پاسخ در ۱، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$
- ۴.۴ (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۲.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.1$ و $t = 1$
- ۸۵ . (c) پاسخ در ۱، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$
- ۵.۴ (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۲.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.1$ و $t = 1$
- ۸۶ . (c) پاسخ در ۱، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$
- ۶.۴ (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۲.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.01$ و $t = 1$
- ۸۷ . (c) پاسخ در ۱، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$
- ۷.۴ (a)(b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۳.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.1$ و $t = 1$
- ۹۲ . (c) پاسخ در ۱، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$
- ۸.۴ (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۳.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.01$ و $t = 1$
- ۹۳ . (c) پاسخ در ۱، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$
- ۹.۴ (a)(b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۳.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.01$ و $t = 1$
- ۹۴ . (c) پاسخ در ۱، ۸، ۶، ۴، ۲، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, --, *, +, o, -$
- ۱۰.۴ (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۴.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.01$ و $t = 1$
- ۹۵ . (c) پاسخ در ۴، ۳، ۲، ۱، ۰، $t = 0$ به ترتیب با $\square, +, *, o, --$
- ۱۱.۴ (a) پاسخ معادله برگرز فیشدر مثال ۵.۵.۴ با $N = 40, \alpha = 1, \beta = 1$. شکل (b)
- ۹۶ . جواب دقیق مثال ۵.۵.۴
- ۱.۵ مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده (a) با جواب معادله با استفاده از
- ۱۰۶ متمتیکا (b) و روش هسته بازتولیدی (c)
- ۲.۵ مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده (d) با جواب معادله با جواب در [۸۹] ۱۰۶

۳.۵ مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده با جواب معادله با جواب بدون

روش MLS ۱۰۷

۴.۵ مثال ۲، برای $N = ۱۲۰$ و $t = ۳۰$ ۱۰۷

فهرست جدول‌ها

۱.۴	محاسبه $\alpha(z), \beta(z), \gamma(z)$ با انتگرال کانتور با میانگین بیش از ۳۲ نقطه روی نیم دایره بالایی صفحه و توسط مرتبه ۵ تیلور. همانطور که مشخص است، انتگرال کانتور دقت بالایی برای تمامی مقادیر z دارد.	۷۵
۲.۴	مقایسه جواب مثال ۲.۵.۴ به روش ارایه شده با پاسخ دقیق و روش‌های دیگر.	۸۴
۳.۴	مقایسه جواب معادله مثال ۳.۵.۴ به روش ارایه شده با پاسخ دقیق و روش‌های دیگر.	۸۸
۴.۴	مقایسه خطا L_2 برای جواب مثال ۴.۵.۴ با استفاده از روش رساله با روش دیگر	۸۹
۵.۴	خطای L_2 برای حل معادله مثال ۵.۵.۴ با روش رساله	۹۰
۶.۴	مقایسه جواب مثال ۵.۵.۴ با استفاده از روش رساله با پاسخ دقیق و روش‌های دیگر	۹۱
۱.۵	مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده با جواب معادله با جواب بدون روش MLS و جواب‌های بدست آمد از ممتیکا	۱۰۵



پیشگفتار

رشد سریع شهرها، افزایش روز افزون تعداد وسایل نقلیه، و نیاز به تردد بیشتر برای رفع نیازهای زندگی تجمعاتی امروز، موجب افزایش ترافیک و به دنبال آن اتلاف وقت شهروندان و کاهش کیفیت محیط زیست شهری شده است؛ بحران نوظهوری که در اغلب کشورهای جهان بخصوص در کشورهای در حال توسعه رو به افزایش است.

ایران به عنوان یکی از کشورهای در حال توسعه، با مشکلات ناشی از ترافیک در کلان شهرها دست و پنجه نرم می‌کند. اگر مشکلات اقتصادی-اجتماعی ناشی از ترافیک‌های سنگین را در نظر بگیریم اهمیت مسئله کنترل دقیق و هوشمند ترافیک بیشتر نمایان می‌شود؛ از جمله مهمترین این مشکلات می‌توان به تعطیلی مکرر ادارات و مدارس در روزهای آلوده اشاره نمود.

جمع آوری صحیح اطلاعات واقعی و پیش‌بینی کوتاه مدت دقیق پارامترهای ترافیکی مانند چگالی، سرعت و جریان ترافیک موضوع تحقیقاتی است که امروزه توجه بسیاری را به خود جلب کرده است و دلیل این امر افزایش نفوذ تکنولوژی دستگاه‌های حمل و نقل هوشمند در زندگی روزمره به همراه دستگاه‌های پیشرفته مدیریت ترافیک برای مدیریت زمان و حفظ محیط زیست است. این امر موجب می‌گردد از تعدد خودروهای بلا تکلیف و روشن کاسته شود و بدین ترتیب تا حد قابل توجهی آلودگی هوا کاهش یابد.

هدف تکنولوژی اطلاعات سفر از طریق زمان بندی بهتر چراغ های راهنمایی و رانندگی و اطلاع رسانی به رانندگان در انتخاب مسیر بر اساس اطلاعات دقیق و صحیح از وضعیت های ترافیک، راه حل مطلوبی برای کاهش مشکلات تراکم ترافیک، زمان سفر و آلودگی هوا است که مسافران در اکثر شهرهای جهان به ویژه کلان شهرها با آن مواجه اند. همین مسائل باعث شده تا موضوع مدل سازی و پیش بینی پارامترهای ترافیکی، به عنوان یکی از مولفه های اصلی، از جذابیت بالایی برخوردار شود چه اینکه به دلیل افزایش مداوم سرعت محاسباتی و توسعه روش هایی که انعطاف پذیری آنها

بطور فزاینده‌ای در حال افزایش است، این جذابیت به مرور زمان بیشتر نیز می‌شود. از این رو مدل سازی ریاضی و حل جریان ترافیک به عنوان یکی از روش‌های موثر مدیریت ترافیک، کنترل ترافیک، تصمیم گیری و انتخاب راهبرد بهینه به منظور مدیریت زمان و حفظ سلامت جسمی و روانی شهروندان در حال افزایش است.

یک دسته از پرکاربردترین مدل‌های جریان ترافیک مدل‌های کلان نگر میباشند که جریان ترافیک را به صورت یک و یا دستگاهی از معادلات مشتقات جزئی هذلولوی غیرخطی بیان میکنند. از آن جا که در جواب اکثر این دسته از معادلات تغییرات ناگهانی و یا شوک وجود دارد، لذا انتخاب روش عددی مناسب برای حل این دسته از معادلات ضروری است.

با حل معادلات ترافیکی توسط محققین می توان به اهداف کلی‌تری مانند افزایش تردد خودروها و کاهش تراکم ترافیک، تصادفات و آلودگی هوا دست یافت.

این امر با زمان‌بندی بهتر چراغ‌های راهنمایی و اطلاع‌رسانی به رانندگان در انتخاب مسیر بر اساس اطلاعات واقعی و صحیح از موقعیت‌های ترافیکی امکان‌پذیر است.

این مسائل باعث شده است که موضوع مدل‌سازی و پیش‌بینی پارامترهای ترافیکی به‌عنوان یکی از مولفه‌های اصلی، توجه علمی چشمگیری را به خود جلب کند. به همین دلیل، مدل سازی ریاضی و حل مدل‌های جریان ترافیک به عنوان یکی از روش‌های موثر مدیریت ترافیک از اهمیت بالایی برخوردار است.

هدف ما در این رساله مطالعه، معرفی و بهبود چند مدل جریان ترافیک کلان نگر و حل آنها به روش‌های بازتولیدی و بدون شبکه است. در فصل اول به معرفی چند مدل از جریان‌های ترافیکی می‌پردازیم. در فصل دوم و سوم توضیحاتی در مورد روشهای هسته بازتولیدی و بدون شبکه ارائه کرده‌ایم و در فصل ۴ با روشهای بدون شبکه، معادله برگرز و برگرز فیشرا حل می‌کنیم و در نهایت در فصل ۵ یکی از معروفترین مدل‌های ترافیک را به روش بدون شبکه حل می‌کنیم. از نتایج این رساله دو مقاله بشرح زیر استخراج شده است:

Neda Najafzadeh, Saeid Abbasbandy, Elyas Shivanian, *Adaptive numerical method for approximation of traffic flow equations*, Journal of Advanced Transportation, vol. 2022, Article ID 8208957.

Neda Najafzadeh, *Numerical solutions the nonlinear Burgers-Fisher and Burgers' equations with adaptive numerical method*, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, Manuscript ID: IJNAA-2212-4117

فصل ۱

مدل‌های جریان ترافیک

مدل‌سازی جریان ترافیک یکی از مهمترین موضوعات تحقیقاتی است که در سالهای اخیر بسیار مورد توجه محققان بوده است، اما به دلیل اینکه پارامترهای زیادی مثل سرعت هر وسیله نقلیه، نحوه رانندگی افراد، نوع جاده مورد نظر و عوامل بسیار زیاد دیگری که در آن دخالت دارند این مدل‌سازی بسیار فرآیند پیچیده‌ای دارد و به یکی از مشکل‌ترین مدل‌سازی‌ها در مهندسی ترافیک و هوش مصنوعی تبدیل شده است. بخاطر آسانتر شدن مدل‌سازی، یک جاده با یک مسیر عبوری برای مدل در نظر گرفته می‌شود. در این فصل به معرفی مساله ترافیک و چند نوع از انواع مدل‌هایی که برای جریان ترافیک تاکنون مورد توجه محققان بوده است را بررسی می‌کنیم.

۱.۱ انواع مدل‌های جریان ترافیک

در این بخش به معرفی چند مدل از مدل‌سازی‌های جریان ترافیک می‌پردازیم. برای بحث و بررسی جریان ترافیک در شهرها و بزرگراه‌ها تاکنون دیدگاه‌های زیادی مطرح و ارایه شده است که به طور کلی می‌توان این مدل‌ها را به دو دسته کلی: ۱- خردنگر^۱ و ۲- کلان‌نگر^۲ تقسیم کرد.

۱.۱.۱ مدل خردنگر

مدل‌های خردنگر جریان ترافیک را با جزئیات کامل بیان می‌کنند. در این مدل‌ها هر وسیله نقلیه هم به طور جداگانه بررسی می‌گردد و هم در نحوه ارتباط با بقیه وسایل مورد توجه است. در هر واحد زمانی مشخص، ویژگی‌های وسیله نقلیه مورد نظر و سرعت و شتاب هر وسیله نقلیه، و حتی سرعت و نحوه رانندگی با توجه به رفتار رانندگان محاسبه می‌شود. بعضی مدل‌ها پا را فراتر گذاشته و حتی به نحوه تعویض دنده توسط راننده مورد نظر و طرز سرعت گرفتن و ترمز گرفتن راننده توجه می‌کنند که بعضاً این دسته مدل‌ها را که بسیار به نکات ظریف توجه می‌کنند را مدل‌های بسیار خردنگر^۳ می‌گویند. این دسته مدل‌ها در وسیله‌های نقلیه خودکار و اتوماتیک و هوشمند بسیار کاربرد دارند،

¹Microscopic

²Macroscopic

³Submicroscopic

مثل SmartAHS [۲] و PELOPS [۳]. یکی از معروفترین مدل‌های خردنگر نیز مدل تعقیب خودرو^۴ [۴] است. مدل تعقیب خودرو، به این صورت مدل‌سازی شده است که یک ردیف ماشین در یک جاده ترافیکی در نظر گرفته می‌شود و فرض بر این است که هر وسیله و راننده آن، فقط نسبت به وسیله نقلیه جلویی خود عکس العمل نشان می‌دهد. یعنی در حقیقت نوع و حالت حرکت خودروی عقبی توسط سه عامل ۱- سرعت خودروی عقبی، ۲- سرعت خودروی جلویی و ۳- فاصله بین این دو خودرو، مشخص می‌گردد. نظریه کلاسیک تعقیب خودرو توسط معادله زیر نشان داده شده است [۴]:

$$\frac{dv_{n+1}(t + \Delta t)}{dt} = \lambda \Delta v, \quad (1.1)$$

که در آن $\Delta v = v_n(t) - v_{n+1}(t)$ و v_n, v_{n+1} ، به ترتیب سرعت خودروهای جلویی و عقبی و Δt زمان عکس العمل راننده است. λ در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = a \frac{[v_{n+1}(t + \Delta t)]^m}{(\Delta x)^l},$$

که در آن $\Delta x = x_{n+1} - x_n$ و a, m, l ثابت هستند و انتخاب آنها در معادله بستگی به این دارد که چگونه آنها پدیده‌های ترافیکی واقعی را توصیف می‌کنند. به عنوان مثال در [۱۷] به صورت زیر تعریف شده است:

$$\lambda = a \frac{[v_{n+1}(t + \Delta t)]}{(\Delta x)^2}.$$

و یا در [۱۴] داریم:

$$\lambda = \frac{a}{(\Delta x)^2}.$$

مدل‌های زیادی از تعقیب خودرو وجود دارد یکی از معروفترین آنها مدل سرعت بهینه^۵ [۵] است که در آن فرض شده است که هر وسیله نقلیه دارای سرعت قانونی V است و هر راننده یک وسیله

⁴Car-following

⁵Optimal velocity model

نقلیه به محرکی از وسیله نقلیه جلویی خود پاسخ می‌دهد. او باید شتاب را با گرفتن یا آزاد کردن پدال گاز و ترمز به گونه‌ای کنترل کند که بتواند با توجه به حرکت خودروی جلویی، سرعت مطمئن قانونی را حفظ کند. پس سرعت قانونی وسیله نقلیه شماره n به فاصله آن با خودرو $n+1$ بستگی دارد، بنابراین به صورت $V(\Delta x_{n+1}(t))$ نشان داده می‌شود. هنگامی که فاصله بین دو خودرو کوتاه می‌شود، سرعت باید کاهش یابد و به اندازه کافی کوچک شود تا از برخورد با خودروی جلویی جلوگیری شود. از سوی دیگر، هنگامی که فاصله بین دو خودرو طولانی‌تر می‌شود، وسیله نقلیه می‌تواند با سرعت بالاتر حرکت کند، اگرچه از حداکثر سرعت تجاوز نمی‌کند. بنابراین، V تابعی است که دارای ویژگی‌های زیر است:

(۱) یک تابع صعودی، و (۲) $|V(\Delta x_{n+1}(t))|$ کران بالا دارد.

با توجه به توضیحات داده شده در [۵] مدل تعقیب خودرو به صورت زیر ارایه می‌شود:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa[V(\Delta x_{n+1}(t)) - v_{n+1}(t)], \quad (2.1)$$

که در آن κ ضریب عکس العمل راننده (که مستقل از n فرض شده) است و $V(\Delta x)$ که به تفصیل توضیح داده شد. اما این مدل متأسفانه نمی‌توانست یک واقعیت مهم را توضیح دهد و آن این بود که وقتی فاصله بین دو خودرو کم است و خودروی جلویی با سرعت بیشتری از وسیله عقبی حرکت کند چون فاصله بین این دو در حال افزایش است راننده عقبی با احتمال زیاد سرعت خود را کاهش نمی‌دهد. این اختلاف سرعت بین دو خودروی جلویی و عقبی و مثبت یا منفی بودن این اختلاف بر روی رفتار راننده عقبی تاثیر می‌گذارد و لذا باید پارامتری در مدل برای آن در نظر گرفته شود به همین دلیل مدل دیگری از این مدل‌های تعقیب خودرو، مدل نیروی تعمیم یافته^۶ [۶] ارایه شد که در آن به این پارامتر توجه شده است:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa[V(\Delta x_{n+1}(t)) - v_{n+1}(t)] + \lambda \Delta v H(-\Delta v), \quad (3.1)$$

⁶Generalized Force Model

که در آن H تابع هویساید و λ به همان صورتی است که در بالا تعریف شده است. مدل دیگری که در [۷] معرفی شده است به صورت:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa[V(\Delta x_{n+1}(t)) - v_{n+1}(t)] + \lambda \Delta v. \quad (4.1)$$

زمان عکس العمل راننده نیز یکی از پارامترهایی است که در مدل سازی های خردنگر تعقیب خودرو بسیار اهمیت دارد. رانندگان نسبت به یک محرک معمولاً پاسخگویی با تاخیر دارند. لذا پارامتر این تاخیر در بعضی مقالات مورد توجه بوده است [۸-۱۰]. مثلاً در [۸]:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa[V(\Delta x_{n+1}(t - \tau)) - v_{n+1}(t)] + \lambda \Delta v, \quad (5.1)$$

که در آن τ زمان تأخیر در عکس العمل راننده است. یا در مقاله [۹] به مدل دیگری از این نوع مدل های تعقیب خودرو اشاره شده است:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa[V(\Delta x_{n+1}(t - \tau_1)) - v_{n+1}(t - \tau_2)] + \lambda \Delta v_{n+1}(t - \tau_2). \quad (6.1)$$

که این مدل دارای دو تا پارامتر تاخیری $\tau_1, \tau_2 \geq 0$ است.

تغییر مکانی نیز یکی از پارامترهایی است که در مدل سازی های ترافیکی مورد بررسی قرار گرفته است. فاصله بین دو خودرو در مدت زمان عکس العمل راننده تغییر می کند. بنابراین فاصله بین دو خودرو عقبی و جلویی بعد از اینکه مدت زمان عکس العمل راننده سپری می شود به صورت زیر است [۱۱]:

$$\Delta x_{n+1}(t - \tau) = \Delta x_{n+1}(t) - d,$$

که در آن d فاصله عکس العمل رانندگان است. پس معادله ای با این دو پارامتر تاخیر زمانی و مکانی d, τ داریم:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa[V(\Delta x_{n+1}(t) - d) - v_{n+1}(t - \tau)] + \lambda \Delta v_{n+1}(t). \quad (7.1)$$

برای دو عبارت داخل کلوشه، $V(\Delta x_{n+1}(t) - d)$ و $v_{n+1}(t - \tau)$ بسط تیلور را استفاده می‌کنیم و سپس جملات مرتبه پایین‌تر را فقط در نظر می‌گیریم:

$$V(\Delta x_{n+1}(t) - d) = V(\Delta x_{n+1}(t)) - dV'(\Delta x_{n+1}(t)), \quad (8.1)$$

$$v_{n+1}(t - \tau) = v_{n+1}(t) - \tau \frac{dv_{n+1}(t)}{dt}. \quad (9.1)$$

بنابراین مدل به صورت:

$$(10.1)$$

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa[V(\Delta x_{n+1}(t)) - dV'(\Delta x_{n+1}(t)) - v_{n+1}(t) - \tau \frac{dv_{n+1}(t)}{dt}] + \lambda \Delta v_{n+1}(t).$$

بدست می‌آید.

۲.۱.۱ مدل‌های کلان‌نگر

در مدل‌های کلان‌نگر به جریان ترافیک به صورت یک مفهوم کلی نگاه می‌شود و عمل و عکس‌العمل‌هایی که تک تک وسایل نقلیه نسبت به هم در جاده دارند و رفتارهای فردی رانندگان در نظر گرفته نمی‌شود. در این نظریه محققان به این نتیجه رسیدند که مدل جریان ترافیک را براساس مقایس‌های فیزیکی مثل جریان آب و به طور کلی جریان سیالات پایه‌ریزی کنند. این مدل‌های کلان‌نگر از یک طرف به اندازه کافی ساده است که امکان درک کامل را فراهم می‌کند، از طرف دیگر به اندازه کافی برای تشخیص پدیده‌های مهم به عنوان تشکیل صف و ترافیک عالی عمل می‌کند و در برنامه ریزی‌های منطقه‌ای و شبکه‌های حمل و نقلی در سطح بسیار گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. مدل‌های خردنگر شاید در مقایسه با مدل‌های کلان‌نگر از دقت بالاتری برخوردار باشند (بدلیل استفاده از جزئیات بیشتر)، اما محاسبات طولانی و آهستگی اجرای آنها باعث شده که مدل‌های کلان‌نگر شاید بیشتر مورد توجه باشند.

برای مدل کردن مسأله ترافیک به صورت مدل‌های کلان نگر، ۳ پارامتر که مشخص‌کننده خاصیت جریان ترافیک می‌باشد نیاز است [۱]:

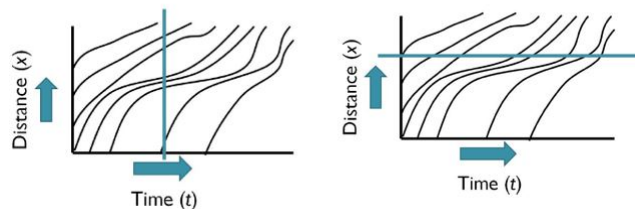
۱- چگالی^۷: تعداد وسیله‌های نقلیه در واحد طول را چگالی جریان ترافیک $\rho(x, t)$ می‌نامند. یعنی در بازه مکانی Δx و در زمان t چگالی جریان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x, t) = \frac{n}{\Delta x},$$

که در آن n تعداد وسیله‌های نقلیه در طول Δx است.

۲- نرخ جریان^۸: نرخ جریان ترافیک $q(x, t)$ نشان‌دهنده تعداد وسیله‌های نقلیه عبوری از یک نقطه مشخص در واحد زمان است. یعنی در بازه زمانی Δt و در نقطه x جریان ترافیک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$q(x, t) = \frac{n}{\Delta t}.$$



شکل ۱.۱: چگالی و جریان به روایت تصویر

۳- سرعت متوسط^۹: عبارت است از میانگین حسابی سرعت‌های اندازه‌گیری شده کل خودروهایی که به عنوان مثال در یک زمان و در فاصله مکانی معینی در حال حرکت می‌باشند. که آن را با $v(x, t)$ نشان می‌دهیم.

یک رابطه اساسی بین متغیرهای جریان ترافیک وجود دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

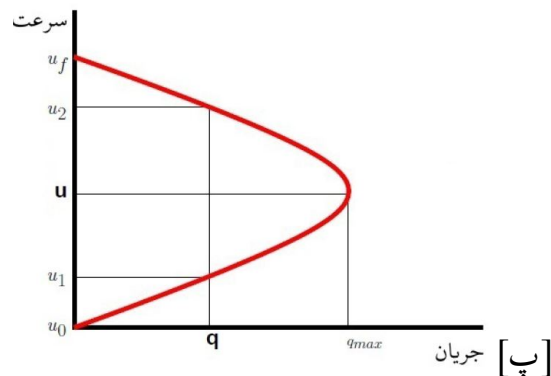
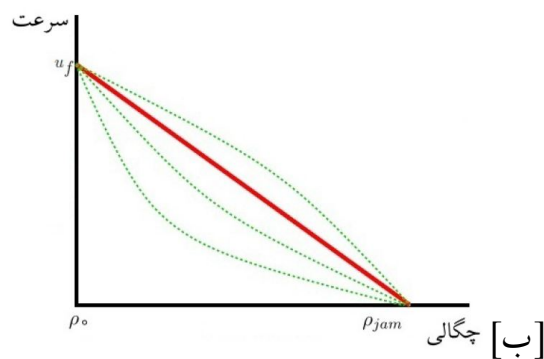
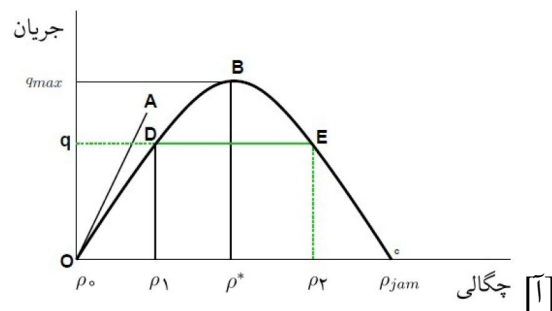
$$q(x, t) = \rho(x, t) \cdot v(x, t)$$

⁷Density

⁸Flow rate

⁹Mean speed

وقتی که چگالی صفر می‌شود، جریان نیز صفر است زیرا، هیچ خودرویی در جاده وجود ندارد و هنگامی که ماشین‌ها به تدریج اضافه می‌شوند، چگالی و جریان افزایش می‌یابند تا زمانی که به وضعیتی می‌رسیم که دیگر خودروها نمی‌توانند حرکت کنند. در این صورت چگالی برابر با چگالی راه بندان ρ_{jam} و جریان صفر است. در چگالی‌های بین صفر و چگالی راه بندان، جریان به صورت یک سهمی رسم می‌شود. پس نتیجه اینکه اگر جریان صفر باشد یا چگالی صفر است یا سرعت صفر است و اگر سرعت صفر باشد یعنی چگالی در حالت راه بندان است. روابط بین این سه پارامتر در شکل ۲.۱ نشان داده شده است:



شکل ۲.۱: روابط بین چگالی و جریان و سرعت

در مدل‌های کلان نگر یک جاده یکطرفه در نظر گرفته می‌شود که یک قسمت مشخص از جاده

مثلاً $[x_1, x_2]$ را در نظر می گیریم، تعداد خودروها در این بازه مکانی به زمان وابسته است. واضح است که اگر وسایل نقلیه ای که وارد این قسمت از جاده می شوند از وسایل نقلیه ای که از این قسمت از جاده خارج می شوند بیشتر باشد، تعداد وسایل نقلیه در این قسمت از جاده افزایش می یابد و برعکس اگر وسایل نقلیه ای که وارد این قسمت از جاده می شوند از وسایل نقلیه ای که از این قسمت از جاده خارج می شوند کمتر باشد، در آن صورت تعداد خودروها در این قسمت از جاده کاهش می یابد. یعنی در هر زمان، نرخ تغییرات تعداد خودروها در این قسمت از جاده باید با اختلاف نرخ جریان برابر باشد. اگر n تعداد خودروها در این بازه باشد، داریم:

$$\frac{dn}{dt} = -q(x_2, t) + q(x_1, t),$$

از طرفی تعداد وسیله های نقلیه در بازه $[x_1, x_2]$ و در زمان t :

$$n(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx,$$

بنابراین

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = -q(x_2, t) + q(x_1, t)$$

وقتی x_1, x_2 ثابت است، داریم:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx,$$

از طرفی

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial q}{\partial x} dx = q(x_2, t) - q(x_1, t)$$

بنا به روابط بالا داریم:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) dx = 0$$

و چون x_1, x_2 دلخواه است پس:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (11.1)$$

به این رابطه قانون بقا^{۱۰} می‌گویند. در این قسمت چند مدل مهم از مدل‌های کلان‌نگر را معرفی می‌کنیم.

۱.۲.۱.۱ مدل LWR

این مدل براساس قانون بقای ماشین‌ها است و به صورت معادله زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0. \quad (12.1)$$

مدل فوق دارای دو مجهول چگالی و سرعت است. برای اولین بار در سالهای ۱۹۵۵ و ۱۹۵۶ لایت^{۱۱} و ویتهم^{۱۲} و ریچاردز^{۱۳} در دو مقاله [۱۲، ۱۳] جداگانه بیان کردند که سرعت به عنوان تابعی از چگالی در نظر گرفته شود. یعنی:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(f)}{\partial x} = 0. \quad (13.1)$$

که در آن $f = \rho v(\rho)$.

نام این مدل را به افتخار این سه دانشمند LWR نامیدند. مدل LWR اولین مدل جریان ترافیک به صورت معادلات مشتقات جزئی غیرخطی هذلولوی است. فرض اصلی برای مدل LWR این هست که سرعت متوسط فقط به چگالی ماشین‌ها وابسته است. قانونی که شار را به عنوان تابعی از چگالی نشان می‌دهد، تابع اساسی نامیده می‌شود که این تابع اساسی f باید دارای شرایط زیر باشد:

• تابع f تا مرتبه دوم پیوسته باشد.

• تابع f اکیدا مقعر باشد.

• $f(0) = f(\rho_{max}) = 0$

¹⁰conservation law

¹¹Lighthill

¹²Whitham

¹³Richards

تابع‌های اساسی مختلفی را می‌توان برای مدل‌سازی تعیین کرد که بحث تعیین این تابع یکی از مهمترین بحث‌های مدل‌سازی جریان ترافیک است. مدل‌های بسیاری برای تعریف سرعت برحسب چگالی وجود دارد:

- مدل گرین شیلدز^{۱۴} [۱۴] در این مدل، سرعت به عنوان تابعی خطی از چگالی در نظر گرفته می‌شود:

$$v(\rho) = v_{max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right) \right),$$

- مدل درو^{۱۵} [۱۵]

$$v(\rho) = v_{max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^n \right),$$

- مدل پایپس^{۱۶} [۱۶]

$$v(\rho) = v_{max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^m \right),$$

- مدل می و کلر^{۱۷} [۱۸]

$$v(\rho) = v_{max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^n \right)^m,$$

- مدل گرین برگ^{۱۸} [۱۹]

$$v(\rho) = v_0 \left(\log \left(\frac{\rho_{max}}{\rho} \right) \right),$$

u_0 یک ثابت مثبت است.

- مدل آندروود^{۱۹} [۲۰]

$$v(\rho) = v_0 \exp \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right),$$

¹⁴Greenshields

¹⁵Drew

¹⁶Pipes

¹⁷May , Keller

¹⁸Greenberg

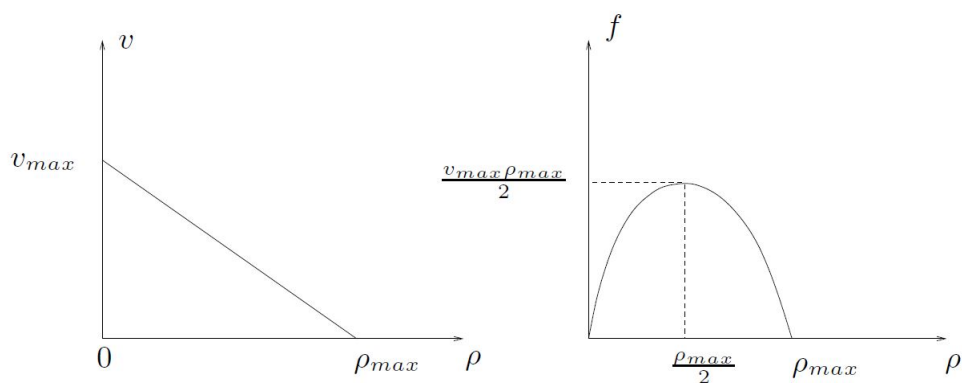
¹⁹Underwood

● مدل پاپاگئوگیو^{۲۰} [۲۱]

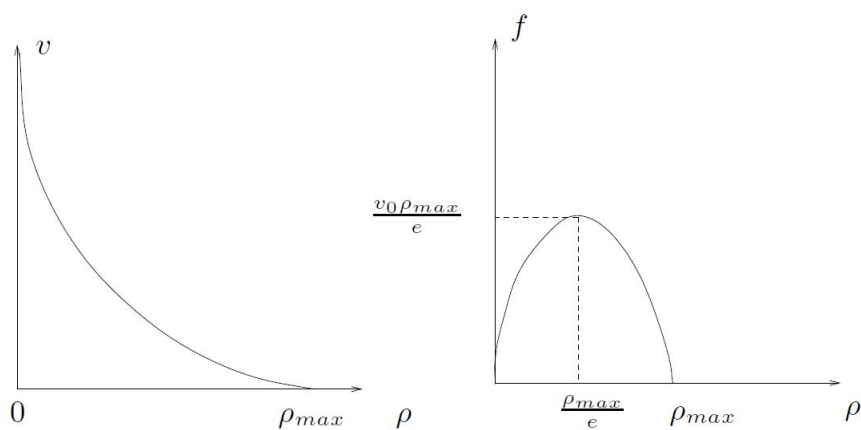
$$v(\rho) = v_0 \exp\left(\frac{-1}{m} \left(\frac{\rho}{\rho_{max}}\right)^m\right),$$

● مدل کالیفرنیا^{۲۱} [۲۲]

$$v(\rho) = v_0 \left(\frac{-1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{max}} \right),$$

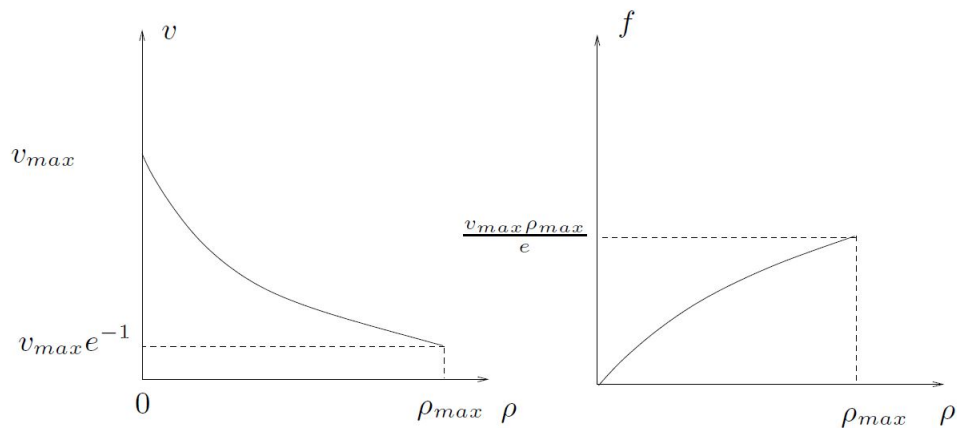


شکل ۳.۱: نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل گرین شیلدز

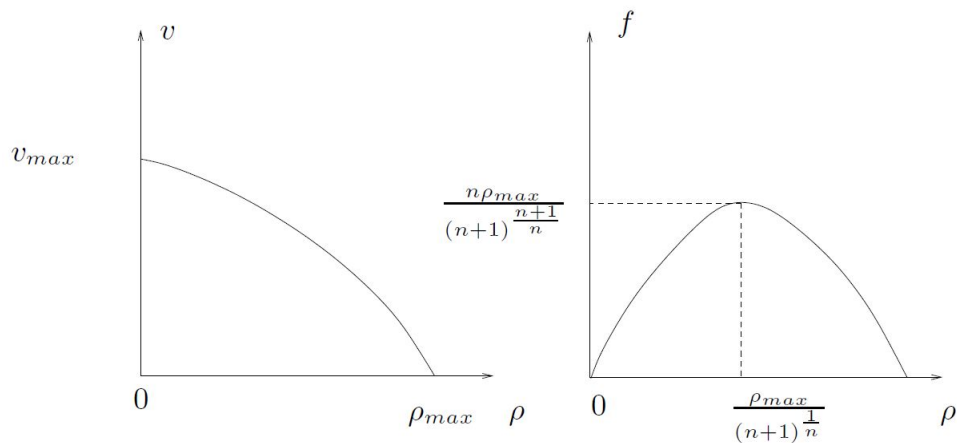


شکل ۴.۱: نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل گرین برگ

²⁰Papageorgiou²¹California



شکل ۵.۱: نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل آندروود



شکل ۶.۱: نمودار تابع اساسی و تابع سرعت بر حسب چگالی برای مدل دروو

۲.۲.۱.۱ مدل تصادفی

بعضی مدل‌های کلان‌نگر با تغییر در متغیرهای خردنگر از حالت گسسته و تکی به حالت پیوسته و بازه‌ای بدست می‌آیند. یکی از این شبیه‌سازی‌ها، مدل‌هایی هستند که متغیر آنها براساس متغیرهای تصادفی تعریف شده است. در سال ۲۰۰۶ اولین بار سپاساکیس^{۲۲} و کت سولاکیس^{۲۳} مدلی به این صورت را معرفی کردند [۲۳]. در این مقاله برای نشان دادن مدل ابتدا فرض شده است که یک بزرگراه با یک مسیر عبوری داریم. بنابراین دامنه فیزیکی یک ناحیه یک بعدی است. این ناحیه یک

²²Sopasakis

²³Katsoulakis

بعدی را به N قسمت تقسیم می‌کنیم $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, N\}$ برای هر نقطه روی این N سلول $(x \in \mathcal{L})$ یک پارامتر ترتیب $\sigma(x)$ ارایه می‌گردد:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & \text{اگر سلول } x \text{ پر باشد} \\ 0, & \text{اگر سلول } x \text{ خالی باشد} \end{cases} \quad (14.1)$$

مجموعه تمام این پارامترهای ترتیب را به صورت $\sigma = \{\sigma(x) : x \in \mathcal{L}\}$ می‌نویسیم. عامل بالقوه یا پتانسیل فعل و انفعالات بین ماشینها به صورت زیر تعریف می‌شود [24]:

$$U(x, \sigma) = \sum_{y \in \mathcal{L}, y > x} J(y - x) \sigma(y) \quad (15.1)$$

این عامل مشخص کننده رفتارهای موضعی ماشینهاست و در آن J به منزله یک عامل تقابل بین ماشینها در یک ناحیه کوچک است:

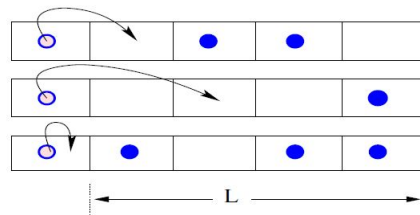
$$J(y - x) = \gamma V(\gamma(y - x)), \quad x, y \in \mathcal{L} \quad (16.1)$$

که در آن $\gamma = \frac{1}{L+1}$ پارامتری است که محدوده فعل و انفعالات را از دیدگاه خردنگر تعیین می‌کند و بنابراین L نشان دهنده شعاع پتانسیل است. با توجه به اینکه (15.1) نشان دهنده این است که هر ماشینی که در موقعیت مکانی x قرار دارد می‌تواند با وسایل نقلیه ای که حداکثر تا فاصله L جلوتر از این خودرو است عکس العمل نشان دهد، بنابراین قانون نگاه به جلو را اجرا می‌کند. از نظر فیزیکی، از آنجایی که طول یک وسیله نقلیه (یا سلول) حدوداً ۵ متر در نظر گرفته می‌شود، پس قانون نگاه به جلو که توسط (15.1) اجرا می‌شود به رانندگان اجازه میدهد تا ترافیک را در فاصله فیزیکی حداکثر ۵ متر جلوتر از وسیله نقلیه خود مشاهده کنند. به طور خاص ما فرض می‌کنیم $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و قرار می‌دهیم:

$$V(r) = 0, \quad r \in \mathbb{R}^-, \quad , \quad V(r) = 0, \quad r \geq 1$$

براساس این تعریف ماشینها حرکت برگشت به عقب (جهت حرکت منفی) ندارند و تعامل بین ماشینها براساس موقعیت مکانی آنهاست که به واقعیت بسیار نزدیک است. انتخابهای متفاوتی برای

توصیف دینامیک حرکت می‌توان داشت که در اینجا دینامیک آرنیوس^{۲۴} [۲۴] انتخاب شده است. در این نظریه، برای دو مکان همسایه x, y ، به پارامتر ترتیب $\sigma(x)$ در مکان x اجازه می‌دهد تا مقدار خود را به مقدار آن در مکان y تبدیل کند. این به عنوان پیشروی وسیله نقلیه از محل x به محل خالی در y تعبیر می‌شود. توجه داشته باشید که براساس ساخت U امکان انتقال از یک مکان پر به مکان پر دیگر وجود ندارد؛ شکل ۷.۱ را ببینید.



شکل ۷.۱: یک نمودار ساده قانون نگاه به جلو مربوط به حرکت وسیله نقلیه برای سه مثال مختلف ترافیکی ($L = 4$)

به طور کلی سرعت انجام فرآیند این عمل برای دینامیک آرنیوس به صورت زیر است:

$$c(x, y, \sigma) = \begin{cases} c_0 \exp[-U(x, \sigma)], & \text{اگر } y = x + 1, \sigma(x) = 1, \sigma(y) = 0 \\ c_0 \exp[-U(x, \sigma)], & \text{اگر } y = x - 1, \sigma(x) = 0, \sigma(y) = 1 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (17.1)$$

که پارامترهای دینامیک در اینجا $c_0 = 1/\tau_0$ و τ_0 زمان آرامش برای فرآیند و $U(x, \sigma)$ در (۱۵.۱) تعریف شده است.

کاملاً مشخص است که برای ترافیک در یک جاده فقط با یک مسیر، مکان y متناظر است با $x - 1$ و یا $x + 1$. با توجه به تعریف پتانسیل تعامل J در (۱۶.۱) تعویض مقدار پارامتر ترتیب تنها وقتی اتفاق می‌افتد که خانه x پر و خانه y خالی باشد (در شکل ۷.۱ یک مثال ساده نشان داده شده است). در کل این مدل براساس پارامترهای زمان آرامش τ_0 و پتانسیل تعامل J و فاصله قانون نگاه به جلو L مشخص می‌گردد. که پارامتر τ_0 براساس سرعت ماکزیمم وسایل نقلیه و دو پارامتر دیگر براساس رفتار ترافیکی و یا محدودیت‌های ترافیکی هر جاده تعیین می‌گردد. در این مدل ابتدا

²⁴Arrhenius Dynamics

پتانسیل را به صورت ثابت زیر در نظر می گیرند:

$$\sigma(x) = \begin{cases} J_0, & 0 < r < 1 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (18.1)$$

که J_0 یک پارامتر است که اگر مثبت باشد نشان دهنده جذب و اگر منفی باشد نشان دهنده دفع است. در اینجا فرض بر این است که همواره مثبت است پس ماشین توسط مکانی که مقابل آن خودرو قرار دارد و خالی است جذب می شود. رابطه (18.1) عکس العمل نسبت به خودرو جلویی را ارایه می دهد و (17.1) اجازه حرکت ماشین به سمت عقب را نمی دهد. در [23] سپاساکیس و کت سولاکیس با یک سری روابط ریاضی و جزییاتی که در حوصله این رساله نمی گنجد به معادله انتگرال-مشتقات جزیی زیر دست پیدا کردند:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad (19.1)$$

$$F(u) = c_0 u(1-u) \exp(-J * u).$$

که در آن $J * u(x) = \int_x^\infty J(y-x)u(y)dy$. اگر فرض کنیم که $V_m = c_0$ و پتانسیل تعامل به صورت:

$$J(r) = \varphi(r/\gamma)/\gamma, \quad \varphi(r) = \begin{cases} 1, & 0 < r < 1 \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (20.1)$$

پس داریم

$$J(r) = \begin{cases} 1/\gamma, & 0 < r < \gamma \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (21.1)$$

با تعریف $U(x, t) = \int_{-\infty}^x u(\xi, t)d\xi$ داریم:

$$\begin{aligned} J * u(x) &= \int_x^\infty J(y-x)u(y)dy = \int_0^\gamma u(y)/\gamma dy \\ &= 1/\gamma \left[\int_{-\infty}^{x+\gamma} u(y)dy - \int_{-\infty}^x u(y)dy \right] = [U(x+\gamma) - U(x)]/\gamma \end{aligned} \quad (22.1)$$

پس معادله به صورت زیر بازنویسی می شود

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u, U)}{\partial x} = 0, \quad (23.1)$$

$$F(u, U) = V_m u (1 - u) \exp\left(-\frac{U(x + \gamma) - U(x)}{\gamma}\right).$$

۳.۲.۱.۱ مدل P - W

در مدل LWR، سرعت متوسط اتومبیل فقط به چگالی بستگی داشت. این فرض بعضی از موقعیت های جریان ترافیک را به خوبی توصیف نمی کند. از این رو پاین^{۲۵} در سال ۱۹۷۱ یک معادله اضافی برای سرعت معرفی کرد [۲۵] که سیستم معادلات زیر را ایجاد می کند:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial (A_e(\rho))}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (u_e(\rho) - u), \end{cases} \quad (24.1)$$

که $u_e(\rho)$ مقدار سرعت در وضعیت متعادل است. جمله $\frac{1}{\rho} \frac{\partial (A_e(\rho))}{\partial x}$ پیش بینی و $\frac{1}{\tau} (u_e(\rho) - u)$ جمله آرامش در زمان مشخص $\tau > 0$ نسبت به مقدار تعادل آن $u_e(\rho)$ نامیده می شوند. ویتام^{۲۶} در سال ۱۹۷۴ تعمیم مدل LWR را با افزودن معادله شتاب زیر پیشنهاد داد [۲۶]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{D}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (u_e(\rho) - u), \quad (25.1)$$

که در آن D ثابتی مثبت است. واضح هست که این معادله شبیه به معادله دوم دستگاه (۲۴.۱) است فقط $A_e(\rho)$ به صورت خاصی انتخاب شده است. به همین دلیل مدل بیان شده با دستگاه (۲۴.۱) را مدل پاین ویتام^{۲۷} می نامند. عبارتهای مختلفی برای جمله پیش بینی یعنی $A_e(\rho)$ ارایه شده است. پاین این جمله را به این ترتیب ارایه کرد:

$$A_e(\rho) = \frac{1}{\tau} |u_e(\rho)|.$$

²⁵Payne

²⁶Whitham

²⁷Payne-Whitham P-W

کاهن^{۲۸} و کرنر^{۲۹} و کوهنهاوزر^{۳۰} [۲۷، ۲۸] این جمله را به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$A_e(\rho) = c_e^2 \rho,$$

که در آن c_e یک ثابت است.

در مقایسه با دینامیک سیالات، جمله پیش بینی $A_e(\rho)$ را می توان فشار یا سنگینی ترافیک عنوان کرد. همانطور که در مورد هیدرودینامیکی، عبارت $u \frac{\partial \rho}{\partial x}$ اصطلاح همرفت نامیده می شود و حرکت سرعت را توصیف می کند. عبارت پیش بینی $\frac{1}{\rho} \frac{\partial(A_e(\rho))}{\partial x}$ واکنش رانندگان مشابه را به وضعیت ترافیک در محیط اطرافشان منعکس می کند. جمله آرامش $\frac{1}{\tau}(u_e(\rho) - u)$ تطبیق سرعت متوسط u را با سرعت تعادل $u_e(\rho)$ ارایه می کند.

$$A - R \quad \text{مدل} \quad ۴.۲.۱.۱$$

داگانزو^{۳۱} [۲۹] در سال ۱۹۹۵ مقاله ای را در مورد اشکالات مدل های مرتبه دوم برای ترافیک منتشر کرد. او در این مقاله توضیح داد که مدل $P - W$ و دیگر مدل های مرتبه دوم بسیار شبیه به مدل های سیال هستند، اما رفتار ترافیکی تفاوت های مهمی با رفتار سیال دارد. تفاوت های اصلی بین ترافیک و مایعات عبارتند از:

۱. یک ذره مایع به محرک ها از جلو و از پشت پاسخ می دهد، در حالی که یک ماشین فقط به محرک های جلویی پاسخ می دهد.
۲. برخلاف مولکول ها، رانندگان شخصیت دارند.

داگانزو به طور خاص نشان داد که مدل $P - W$ این ویژگی نامطلوب را دارد که خودروهایی که در انتهای صف قرار دارند به سمت عقب حرکت می کنند و این رفتار به وسایل نقلیه باقی مانده در صف گسترش می یابد. یعنی برخی خودروها با سرعت منفی حرکت می کنند که کاملاً غیر واقعی

²⁸Kuhne

²⁹Kerner

³⁰Kohnhauser

³¹Daganzo

است. به همین دلیل اوه ^{۳۲} و راسکل ^{۳۳} مدلی را ارائه دادند که این مشکل یعنی سرعت منفی را نداشته باشد. مدل اوه و راسکل براساس سیستم زیر است [^{۳۰}]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(u+p(\rho))}{\partial t} + u \frac{\partial(u+p(\rho))}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (26.1)$$

که $p(\rho)$ همان فشار یا سنگینی ترافیک است و در حقیقت تابعی صعودی از چگالی است. اولین $p(\rho)$ توسط اوه و راسکل ارائه شد. آنها فشار را به این صورت $p(\rho) = \rho^\gamma$ بیان کردند، که در آن $\gamma > 0$. با ضرب کردن اولین معادله دستگاه (۲۶.۱) در $p'(\rho)$ و اضافه کردن به معادله دوم، بدست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - \rho p'(\rho)) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (27.1)$$

واضح است که برای جواب‌های هموار، دستگاه‌های (۲۶.۱) و (۲۷.۱) باهم معادلند.

۵.۲.۱.۱ مدل‌های مرتبه سوم:

اولین مدل مرتبه سوم در سال ۱۹۹۵ توسط درک هلبینگ ^{۳۴} پیشنهاد شد [^{۳۱}]. او نه تنها معادلات را برای چگالی و سرعت در نظر گرفت، بلکه به واریانس نیز توجه کرد. در حقیقت، افزایش سریع واریانس می‌تواند شکل گیری صف را در ترافیک ماشینها توضیح دهد. مدل دقیق پیشنهادی توسط هلبینگ بصورت زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho \theta)}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (u_e(\rho) - u) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + \gamma \theta \frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\gamma}{\tau} (\theta_e(\rho) - \theta) + \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (28.1)$$

که در آن θ_e و u_e توابع همواری از چگالی ρ هستند و ضرایب μ, κ, τ ثابتهای مثبتی تعریف می‌شوند. ضریب κ را ضریب جنبشی می‌نامند. مقدار $J(t, x) = -\kappa \theta_x$ شار واریانس سرعت را، که به تابع

³²Aw

³³Rasclé

³⁴Dirk Helbing

همواری از θ می‌انجامد، توصیف می‌کند. این اصطلاح از واکنش محدود و زمان ترمز ناشی می‌شود که به تاخیر در هماهنگی سرعت با موقعیت ترافیک منجر می‌گردد. اصطلاح $\frac{1}{\tau}(\theta_e(\rho) - \theta)$ از تلاش راننده‌ها برای رانندگی با سرعت مورد نظر و واکنش راننده‌ها ناشی می‌شود؛ یعنی کاهش سرعت در موقعیتی که ماشین سریعتر نمی‌تواند از ماشین آرام تر سبقت بگیرد.

۳.۱.۱ مدل کلان‌نگر تعمیم یافته مدل تعقیب خودرو

در این مدل‌ها در حقیقت جریان ترافیک به صورت یک مدل کلان‌نگر شبیه‌سازی می‌شود اما بعضی از پارامترهای مدل براساس مشخصات فردی راننده است. عده ای از محققان این دسته را در دسته ای جداگانه از مدل‌های کلان‌نگر قرار می‌دهند و به آنها عنوان متوسط‌نگر^{۳۵} می‌دهند. در این مدل یک روش خردنگر در نظر گرفته می‌شود و با تغییر یکسری پارامترها و تعاریف مدل، آن را تبدیل به یک مدل کلان‌نگر می‌کنند در اینجا مدل خرد نگر تعقیب خودرو (۱۰.۱) را مدنظر قرار می‌دهیم و آن را به یک مدل کلان‌نگر به صورت یک معادله مشتقات جزئی تبدیل می‌کنیم. به همین دلیل متغیرهای خردنگر را به متغیرهای کلان‌نگر تغییر می‌دهیم، بدین ترتیب که وسیله نقلیه‌ای که در موقعیت x است، میانگین ترافیکی در بازه $[x - \frac{1}{4}\Delta, x + \frac{1}{4}\Delta]$ را نشان می‌دهد که با میانگین ترافیک وضعیت قبلی یعنی $[x + \frac{1}{4}\Delta, x + \frac{3}{4}\Delta]$ مشخص می‌شود. توجه داشته باشید که Δ در اینجا نشان دهنده همان Δx در مدل‌سازی تعقیب خودرو است. اکنون می‌توانیم متغیرهای خردنگر را به صورت زیر به کلان‌نگر تبدیل کنیم [۷]:

$$\begin{aligned} \Delta x &\rightarrow \rho(x, t), & v_{n+1}(t) &\rightarrow u(x, t), & v_n(t) &\rightarrow u(x + \Delta, t), \\ v(\Delta x) &\rightarrow u_e(\rho(x, t)), & \kappa &\rightarrow \frac{1}{T}, & \lambda &\rightarrow \frac{1}{\tau}, \end{aligned}$$

که T زمان آرامش و τ نشاندهنده زمانی است که آشفستگی به اندازه Δ به سمت عقب انتشار پیدا می‌کند. با جایگزینی روابط بالا در مدل تعقیب خودرو (۱۰.۱) و نیز (۸.۱) و (۹.۱) داریم:

³⁵Mesoscopic

$$(1 - \frac{\tau}{T}) \frac{du(x, t)}{dt} = \frac{u_e(\rho) - u(x, t)}{T} - \frac{d}{T} u'_e(\rho) + \frac{u(x + \Delta, t) - u(x, t)}{\tau_1} \quad (30.1)$$

بسط تیلور جمله آخر را در نظر گرفته و جملات مرتبه بالا را در نظر نمی‌گیریم و نیز از قاعده

$$\frac{du(x, t)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{استفاده می‌کنیم، پس:}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u - \frac{c_0 T}{T - \tau}) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e(\rho) - u(x, t)}{T - \tau} - \frac{d}{T - \tau} u'_e(\rho), \quad (31.1)$$

$$c_0 = \frac{\Delta}{\tau}. \quad \text{که}$$

این معادله را معادله حرکت می‌نامند. بنابراین دستگاه معادلات زیر را می‌سازیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - \frac{c_0 T}{T - \tau}) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_e(\rho) - u(x, t)}{T - \tau} - \frac{d}{T - \tau} u'_e(\rho), \end{cases} \quad (32.1)$$

توجه داشته باشید که به معادله قانون بقا نیازمندیم تا بقای چگالی جریان ترافیک حفظ شود.

دستگاه را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + [B] \frac{\partial U}{\partial x} = G \quad (33.1)$$

که در آن:

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} u & \rho \\ 0 & u - \frac{c_0 T}{T - \tau} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{u_e(\rho) - u(x, t)}{T - \tau} - \frac{d}{T - \tau} u'_e(\rho) \end{bmatrix}. \quad (34.1)$$

این مدل مشکل سرعت منفی که قبلاً در مورد آن صحبت شد را ندارد؛ یعنی، در این مدل، وسایل

نقلیه حرکت به سمت عقب ندارند و این یکی از امتیازات مهم برای این مدل محسوب می‌شود. در

مقاله [۳۶] رابطه سرعت و چگالی در وضعیت تعادل به صورت زیر بیان شده است:

$$u_e(\rho) = u_f [1 - \exp(1 - \exp(\frac{c_m}{u_f} (\frac{\rho_m}{\rho} - 1)))] \quad (35.1)$$

که در آن u_f سرعت در جریان آزاد ρ_m حداکثر چگالی و c_m سرعت موج در چگالی راه بندان است.

۴.۱.۱ یک مدل کلان توسعه یافته مربوط به ویژگی های ترسو و تهاجمی راننده

بعضی رانندگان که به دلیل عدم مهارت رانندگی و یا اخلاقیات فردی و یا دلایل دیگر با احتیاط و یا گاهی با ترس رانندگی می کنند. این رانندگان بخاطر این ویژگی کند عمل می کنند و تاخیر در پاسخ دارند. در مقابل بعضی رانندگان که شاید تجربه بیشتری دارند و یا بخاطر اخلاقیات فردی جسورترند و یا در رانندگی مهارت بیشتری دارند و یا دلایل دیگر، بسیار تهاجمی تر رانندگی می کنند. این رانندگان سریع حرکت می کنند و در پاسخ تاخیر کمتری دارند. بنابراین در [۳۲] مدلی از تعقیب خودرو ارایه می گردد که به اثرات رانندگی با ترس و احتیاط و یا با شجاعت رانندگی کردن توجه کرده است:

$$\frac{dv_{n+1}(t)}{dt} = \kappa [pV(\Delta x_{n+1}(t + \alpha_1\tau)) + (1-p)V(\Delta x_{n+1}(t + \alpha_2\tau)) - v_{n+1}(t) + \lambda \Delta v_{n+1}(t)]. \quad (36.1)$$

$0 < p < 1$ پارامتری است که تاثیر شدت بین دو ویژگی رانندگان را نشان می دهد، α_1, α_2 ضرایب توانایی پیش بینی واکنش رانندگان به شرایط مختلف جاده و ترافیک به ترتیب برای رانندگان جسورتر و رانندگان ترسو تر.

زمانی که $0.5 < p < 1$ رانندگان عملکرد تهاجمی دارند و وقتی $p = 1$ به این معنی است که محرک ها کاملاً تهاجمی هستند. در مقابل وقتی $0.5 < p < 0$ رفتارهای رانندگان ترسو بیشتر غالب می شود و در زمانی که $p = 0$ محرک ها کاملاً محافظه کارانه هستند. و هنگامی که $p = 0.5$ دو راننده ویژگی های یکسانی را نشان می دهند. در سال ۲۰۱۷ مدل کلان نگر این مدل تعقیب خودرو (با توجه به تغییر متغیرهای بیان شده در مبحث قبل) پیشنهاد شده است [۳۳]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \kappa [u_e(\rho) - u(x, t)] + [\lambda - (2p - 1)\alpha\rho^2 u'_e(\rho)] \left(u'(x)\Delta + \frac{\Delta^2}{2} u''(x) \right). \quad (37.1)$$

پس دستگاه معادلات زیر را می‌سازیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + [u - \lambda \Delta + (\gamma p - 1) \alpha \rho^\gamma u'_e(\rho) \Delta] \frac{\partial u}{\partial x} = \kappa [u_e(\rho) - u(x, t)] \\ \quad + [\lambda - (\gamma p - 1) \alpha \rho^\gamma u'_e(\rho)] \frac{\Delta^\gamma}{\gamma} u''(x), \end{cases} \quad (38.1)$$

از طرفی در سال ۲۰۱۷ مدل کلان نگر مربوط به رفتارهای معقولانه رانندگان ارایه شده است: [۳۴]

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} 0, & | \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} | < \epsilon \\ \frac{u_e(\rho) - u(x, t)}{-\tau} + c_0 \frac{\partial u}{\partial x}, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \end{cases} \quad (39.1)$$

و در سال ۲۰۲۰ در [۳۵] این دو مدل باهم ترکیب شدند و مدل زیر ارایه شد:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} 0, & | \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} | < \epsilon \\ \kappa [u_e(\rho) - u(x, t)] + \\ \quad [\lambda - (\gamma p - 1) \alpha \rho^\gamma u'_e(\rho)] \left(u'(x) \Delta + \frac{\Delta^\gamma}{\gamma} u''(x) \right), & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \end{cases} \quad (40.1)$$

مدل‌های ترافیکی زیادی در سالهای اخیر ارایه شده است که در این فصل به چند مدل مهم و

کاربردی اشاره شد. برای مطالعه بیشتر کتابهای [۱، ۲۲] پیشنهاد می‌گردد.

فصل ۲

روش هسته بازتولیدی

در این فصل سعی شده است که معادله ترافیکی را به روش هسته بازتولیدی حل شود. در ابتدا تعاریف و مقدمات لازم برای این روش و سپس روش هسته بازتولیدی شرح داده شده و در نهایت حل معادله ترافیکی با روش مذکور ارائه شده است.

۱.۲ هسته بازتولیدی

در این بخش به معرفی مفهوم هسته بازتولیدی در فضای هیلبرت می‌پردازیم و سپس چند مورد از خواص و ویژگی‌های آن را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید:

$$\mathcal{H} := \{f(x) \mid f(x), x \in X, \text{ تابع حقیقی مقدار یا مختلط باشد}\}$$

یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر باشد:

$$\langle f(x), g(x) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad (f, g \in \mathcal{H}).$$

اگر برای هر $y \in X$ تابع $R_y(x)$ متعلق به $\mathcal{H}$ وجود داشته باشد که برای هر $f(x) \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{\mathcal{H}} = f(y)$$

آنگاه $R_y(x)$ هسته بازتولیدی $\mathcal{H}$ و به فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی گفته می‌شود.

۱.۱.۲ خواص اصلی هسته بازتولیدی

فضاهای با هسته بازتولیدی خواص مربوط به خود را دارند و هسته‌های آنها نیز ویژگی‌های منحصر بفردی دارند. در این قسمت بعضی از خواص اساسی هسته بازتولیدی و فضاهای بازتولیدی را بیان می‌کنیم.

ویژگی ۲.۱.۲. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هسته بازتولیدی باشد، آنگاه هسته بازتولیدی $R_y(x)$ در فضای

$\mathcal{H}$ متقارن مزدوج است:

$$R_y(x) = \overline{R_x(y)}$$

ویژگی ۳.۱.۲. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هسته بازتولیدی باشد، آنگاه هسته بازتولیدی $R_y(x)$ در فضای $\mathcal{H}$ منحصربفرد است.

ویژگی ۴.۱.۲. اگر $\mathcal{H}$ یک فضای هسته بازتولیدی باشد، آنگاه $R_x(X)$ نامنفی است و $R_x(x)$ صفر است اگر و تنها اگر $\mathcal{H} = \{0\}$.

ویژگی ۵.۱.۲. هسته بازتولیدی $R_y(x)$ معین مثبت است. برای هر $\eta_i \in C, x_i \in X$

$$\sum_{i,j=1}^n R_{x_i}(x_j) \bar{\eta}_i \eta_j \geq 0$$

ویژگی ۶.۱.۲. فضای تابع هیلبرت $\mathcal{H}$ یک فضای هسته بازتولیدی هست اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ تابعی خطی $I(f) = f(x)$ کراندار باشد.

برای اثبات این ویژگی‌ها به [۳۸، ۳۹] مراجعه شود.

۲.۱.۲ فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$

در این قسمت تعریف فضای $W_p^m[a, b]$ و ضرب داخلی و نرم آن را ارائه می‌کنیم و سپس نشان خواهیم داد که این فضا یک هسته بازتولیدی است.

تعریف ۷.۱.۲. فضای توابع $W_p^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_p^m[a, b] = \left\{ f(x) \mid f^{(m-1)}(x), f^{(m)}(x) \in L^p[a, b], x \in [a, b] \right\}.$$

ضرب داخلی و نرم در این فضا برای هر تابع $f, g \in W_p^m[a, b]$ بصورت زیر است:

$$\langle f, g \rangle_{W_p^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx, \quad (1.2)$$

$$\|f\|_{W_p^m[a, b]} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_p^m[a, b]}}$$

قضیه ۸.۱.۲. فضای توابع $W_p^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت است.

□

برهان. به [۳۸] مراجعه شود.

قضیه ۹.۱.۲. فضای توابع $W_p^m[a, b]$ یک فضای هسته بازتولیدی است.

□

برهان. به [۳۸] مراجعه شود.

۱.۲.۱.۲ هسته فضای $W_p^m[a, b]$

در این قسمت به معرفی هسته بازتولیدی فضا می پردازیم. فرض کنیم $R_y(x)$ هسته بازتولیدی مربوط

به فضای $W_p^m[a, b]$ باشد، آنگاه برای هر ثابت $y \in [a, b]$ و برای هر $f \in W_p^m[a, b]$ ، هسته $R_y(x)$

در رابطه زیر صدق می کند:

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{W_p^m[a, b]} = f(y) \quad (۲.۲)$$

بنا به ضرب داخلی (۲.۳) داریم:

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{W_p^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx, \quad (۳.۲)$$

انتگرال جزء به جزء را برای حاصل جمله دوم سمت راست، استفاده می کنیم. پس:

$$\int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_a^b + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \quad (۴.۲)$$

از طرفی با تغییر i به $i-1$ در داخل جمله اول سمت راست، داریم:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{(m-i-1)} f^i(x) \frac{\partial^{m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{m-i-1}}$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} \langle f(x), R_y(x) \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^i(a) \left[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{(m-i-1)} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{(m-i-1)} f^i(b) \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx, \end{aligned} \quad (5.2)$$

بنا به خاصیت ضرب داخلی هسته بازتولیدی (۲.۴) باید حاصل این عبارت $f(y)$ شود. بنابراین $R_y(x)$ ، جواب معادله زیر است:

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{(m-i-1)} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (6.2)$$

با توجه به تعریف تابع دلتای دیراک، واضح است که اگر $x \neq y$ هسته $R_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه $2m$ زیر است:

$$(-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = 0 \quad (7.2)$$

با شرایط مرزی:

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{(m-i-1)} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (8.2)$$

معادله مشخصه این معادله خطی به صورت $\lambda^{2m} = 0$ است و $\lambda = 0$ ریشه تکراری از مرتبه $2m$ این معادله مشخصه است. پس جواب عمومی معادله همگن خطی مورد نظر به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} l R_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x < y, \\ r R_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y. \end{cases} \quad (9.2)$$

اکنون برای اینکه $R_y(x)$ حاصل شود باید ابتدا ضرایب $c_i(y), d_i(y)$ را محاسبه کنیم. برای بدست آوردن این $2m$ مجهول، به $2m$ معادله نیاز است. در اینجا نحوه بدست آوردن

این معادلات و مجهولات را توضیح می دهیم. از رابطه

$$(-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x - y)$$

و تعریف انتگرال تابع دلتای دیراک روی بازه $(y - \epsilon, y + \epsilon)$ یعنی $\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} \delta(x - y) dx = 1$ داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^i l R_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r R_y(y)}{\partial x^i}, & i = 0, 1, \dots, 2m - 2 \\ (-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} r R_y(y+\epsilon)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} l R_y(y-\epsilon)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1. \end{cases} \quad (10.2)$$

که در آن، برای محاسبه مجهولات فقط $2m$ معادله داریم، برای $2m$ معادله دیگر باید از شرایط مرزی (۸.۲) استفاده کنیم. با حل این معادلات، ضرایب بدست می آیند و سپس در رابطه (۹.۲) قرار می دهیم و هسته $R_y(x)$ بدست می آید.

گزاره ۱۰.۱.۲. اگر فرض کنیم که $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^m[a, b]$ باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^2[a, b], \quad i + j = 2m - 1$$

□

برهان. به [۳۸] مراجعه شود.

نتیجه ۱۱.۱.۲. توابع

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad 0 \leq i + j \leq 2m - 2$$

روی بازه $[a, b]$ اکیدا پیوسته هستند.

□

برهان. به [۳۸] مراجعه شود.

قضیه ۱۲.۱.۲. اگر فرض کنیم که $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^m[a, b]$ باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in W_p^m[a, b], \quad i + j = m - 1$$

□

برهان. به [۳۹] مراجعه شود.

قضیه ۱۳.۱.۲. فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ را در نظر می‌گیریم و برای $n = 1, 2, \dots$ داشته باشیم $f(x), f_n(x) \in W_p^m[a, b]$. اگر $f_n(x)$ نسبت به $\|\cdot\|_{W_p^m}$ به $f(x)$ همگرا باشد، آنگاه $f_n^{(k)}(x)$ بطور یکنواخت به $f^{(k)}(x)$ همگرا خواهد بود که $0 \leq k \leq m-1$.

برهان. به [۳۸] مراجعه شود. $\square$

۲.۲.۱.۲ زیر فضای بسته از فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$

زیر فضای بسته ${}^o W_p^m[a, b]$ را از فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ با استفاده از اعمال شرایط مرزی همگن می‌توان ساخت.

$${}^o W_p^m[a, b] = \{f(x) \mid f(x) \in W_p^m[a, b], f'(a) = 0, f(b) = 0\}.$$

به طور مشابه با قضایای قبل می‌توان ثابت کرد که این فضا نیز یک فضای هسته بازتولیدی هیلبرت است. هسته این فضا را با $Q_y(x)$ نشان می‌دهیم و نحوه بدست آوردن $Q_y(x)$ کاملاً شبیه به $R_y(x)$ است. $Q_y(x)$ باید در ضرب داخلی صدق کند:

$$\begin{aligned} \langle f(x), Q_y(x) \rangle_{{}^o W_p^m[a, b]} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{(m-i-1)} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{(m-i-1)} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} dx, \end{aligned} \quad (11.2)$$

به دلیل وجود شرایط مرزی برای این فضای $W_2^m[a, b]$ ، دو معادله به معادلاتی که برای بدست آوردن هسته استفاده می‌کنیم اضافه می‌شود

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^m \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x - y), \\ \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{(m-i-1)} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(b)}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (12.2)$$

همانند قبل، اگر $x \neq y$ هسته $Q_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه $2m$ زیر است:

$$(-1)^m \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} = 0. \quad (13.2)$$

با شرایط مرزی:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{(m-i-1)} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \\ \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(b)}{\partial x} = 0. \end{array} \right. \quad (14.2)$$

معادله مشخصه این معادله خطی به صورت $\lambda^{2m} = 0$ است و $\lambda = 0$ ریشه تکراری از مرتبه $2m$

این معادله مشخصه است. پس جواب عمومی معادله همگن خطی مورد نظر به صورت زیر است:

$$Q_y(x) = \begin{cases} l Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x < y, \\ r Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y. \end{cases} \quad (15.2)$$

اکنون برای اینکه $Q_y(x)$ حاصل شود باید ابتدا ضرایب $c_i(y), d_i(y)$ را محاسبه

کنیم. همانطور که قبلاً گفته شد نیاز به $2m$ معادله داریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^i l Q_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r Q_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2 \\ (-1)^m \left(\frac{\partial^{m-1} r Q_y(y+\epsilon)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} l Q_y(y-\epsilon)}{\partial x^{m-1}} \right) = 1. \end{array} \right. \quad (16.2)$$

که در آن، برای محاسبه مجهولات فقط $2m$ معادله داریم، برای $2m$ معادله دیگر باید از شرایط مرزی (۱۴.۲) استفاده کنیم. با حل این معادلات، ضرایب بدست می‌آیند و سپس در رابطه (۱۵.۲) قرار می‌دهیم و هسته $Q_y(x)$ بدست می‌آید.

قضیه ۱۴.۱.۲. فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ یک زیر فضای بسته از فضای $W_p^m[a, b]$ است.

□

برهان. به [۳۸] مراجعه شود.

۳.۱.۲ فضای هسته بازتولیدی مضاعف $W_p^{(m,n)}(D)$

در این بخش ابتدا D را به صورت $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ فرض می‌کنیم.

تعریف ۱۵.۱.۲. یک تابع $f(x, y)$ بر روی D داده شده است فرض کنیم

$$\{I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}_{k=1}^n$$

یک مجموعه دوه‌دو جدا از هم از دامنه $I_k \subset D$ است. اگر $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ بطوریکه

$$\sum_{i=1}^n |f(I_i)| < \epsilon \quad \text{برای} \quad \sum_{i=1}^n |I_i| < \delta \quad \text{که در آن}$$

$$f(I_i) = f(b_i, d_i) - f(b_i, c_i) - f(a_i, d_i) + f(a_i, c_i)$$

و $f(a, y), f(x, c)$ توابعی اکیدا پیوسته نسبت به x, y هستند، آنگاه تابع $f(x, y)$ در دامنه D کاملاً پیوسته گفته می‌شود.

ویژگی ۱۶.۱.۲. اگر تابع $f(x, y)$ روی ناحیه D کاملاً پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y)$ تابعی پیوسته روی ناحیه D است.

ویژگی ۱۷.۱.۲. فرض کنیم که تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ اکیدا پیوسته باشد، آنگاه تابع $f(x)$ روی ناحیه D کاملاً پیوسته است.

ویژگی ۱۸.۱.۲. فرض کنیم که توابع $f(x), g(x)$ روی بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ اکیدا پیوسته باشد، آنگاه تابع $f(x)g(x)$ روی ناحیه D کاملاً پیوسته است.

ویژگی ۱۹.۱.۲. اگر تابع $f(x, y)$ روی ناحیه D کاملاً پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر $y \in [c, d]$ تابع $f(x, y)$ تابعی اکیدا پیوسته نسبت به متغیر x روی بازه $[a, b]$ و به ازای هر $x \in [a, b]$ تابع $f(x, y)$ تابعی اکیدا پیوسته نسبت به متغیر y روی بازه $[c, d]$ است.

ویژگی ۲۰.۱.۲. فرض کنیم که تابع $f(x, y)$ روی ناحیه D انتگرال پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds$ روی ناحیه D یک تابع کاملاً پیوسته است.

برای اثبات این ویژگی‌ها به [۳۸، ۳۹] مراجعه شود.

تعریف ۲۱.۱.۲. فضای توابع مضاعف $W_p^{(m,n)}(D)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_p^{(m,n)}(D) = \left\{ f(x, y) \mid \text{پیوسته کامل است} \frac{\partial^{m+n-2} f(x, y)}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}}, \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \in L^p(D) \right\}.$$

ضرب داخلی و نرم در این فضا برای هر تابع $f(x, y), g(x, y) \in W_p^{(m,n)}(D)$ بصورت زیر است:

$$\langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{W_p^{(m,n)}(D)} = \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(a, y) \right] dy$$

$$+ \int_D \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^m}{\partial x^m} g(x, y) dx dy$$

$$+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, c), \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(x, c) \right\rangle_{W_p^m}.$$

قضیه ۲۲.۱.۲. فضای توابع $W_p^{(m,n)}(D)$ یک فضای هسته بازتولیدی هیلبرت است.

قضیه ۲۳.۱.۲. فرض کنیم که $f(x, y), g_1(x)g_2(y) \in W_p^{(m,n)}(D)$ ، آنگاه

$$\langle f(x, y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_p^{(m,n)}} = \left\langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{W_p^m}, g_2(y) \right\rangle_{W_p^n}$$

نتیجه ۲۴.۱.۲. فرض کنیم که $f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y) \in W_p^{(m,n)}(\mathcal{D})$ ، آنگاه

$$\langle f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_p^{(m,n)}} = \langle f_1(x), g_1(x) \rangle_{W_p^m} \langle f_2(x), g_2(y) \rangle_{W_p^n}$$

قضیه ۲۵.۱.۲. هسته فضای توابع $W_p^{(m,n)}(\mathcal{D})$ به صورت زیر است:

$$K_{(\xi,\eta)}(x,y) = R_\xi(x)Q_\eta(y),$$

که $R_\xi(x)$ ، $Q_\eta(y)$ هسته‌های بازتولیدی فضاهای $W_p^m[a,b]$ و $W_p^n[c,d]$ هستند.

برای اثبات قضایا و نتایج به [۳۸] مراجعه شود. بطور مشابه با بخش قبل، می‌توان با اعمال شرایط مرزی همگن بر روی فضا $W_p^{(m,n)}(\mathcal{D})$ یک زیرفضای بسته تعریف کرد $W_p^{(m,n)}(\mathcal{D})$. برای مطالعه بیشتر در مورد این روش می‌توان به مقالات [۷۲، ۷۶، ۸۳] مراجعه کنید.

۲.۲ حل معادله ترافیک با استفاده از روش هسته بازتولیدی

در این بخش به بیان اطلاعاتی در مورد روش هسته بازتولیدی و فضای مورد بحث می‌پردازیم و سپس در این قسمت یکی از معروفترین مدل‌های جریان ترافیک کلان نگر یعنی LWR که در فصل اول در مورد آن توضیح داده شد را به روش هسته بازتولیدی حل می‌کنیم. معادله جریان ترافیک LWR زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial F(\rho(x,t))}{\partial x} = 0.$$

تابع چگالی در این مدل بصورت زیر بیان می‌شود:

$$F(\rho(x,t)) = \rho V(\rho),$$

که در آن:

$$V(\rho) = v_{max}(1 - \rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

در اینجا فرض می‌کنیم $v_{max} = 1$ و شرایط اولیه بصورت زیر است:

$$\rho(x, 0) = g(x),$$

برای حل این معادله به روش هسته بازتولیدی باید شرایط اولیه داده شده را همگن کنیم تا بتوان به راحتی از ویژگی‌های تابع هسته بازتولیدی استفاده کرد. بدین منظور تغییر متغیر

$$\rho(x, t) = \vartheta(x, t) + g(x)$$

را تعریف می‌کنیم و در نهایت معادله را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} + (1 - 2g(x)) \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} - 2 \frac{dg(x)}{dx} \vartheta - 2 \vartheta \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} = 2g \frac{dg(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx}, \quad (17.2)$$

که شرایط اولیه در آن $\vartheta(x, 0) = 0$.

دامنه مورد بحث برای مسئله ترافیک به صورت $\mathcal{D} = [a, b] \times [0, \infty)$ تعریف می‌شود. فضای هسته بازتولیدی توسط تعریف ضرب داخلی و تابع هسته بازتولیدی آن مشخص می‌شود. می‌توان فضای هسته بازتولیدی به ازای دامنه کراندار را برای فضای $W_1^2([a, b])$ که با توجه به مرتبه مشتق می‌باشد را به صورت زیر بیان کرد:

$$W_1^2[a, b] = \left\{ f(x) \mid f'(x) \text{ پیوسته اکید است}, f''(x) \in L^2[a, b], x \in [a, b] \right\}.$$

همچنین می‌توان ضرب داخلی و نرم در این فضا برای هر تابع $f, g \in W_1^2[a, b]$ بصورت زیر است:

$$\langle f, g \rangle_{W_1^2[a, b]} = \sum_{i=0}^1 f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(2)}(x) g^{(2)}(x) dx, \quad (18.2)$$

$$\|f\|_{W_1^2[a, b]} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_1^2[a, b]}}$$

حال با توجه به شرط اولیه فضای هسته بازتولیدی $W_1^2([0, \infty))$ را تعریف می‌کنیم:

$$W_1^2([0, \infty)) = \{v(t) \mid v(t), v'(t) \text{ پیوسته اکید است},$$

$$v, v'(t), v''(t) \in L^2([0, \infty)), v(0) = 0\}.$$

همچنین ضرب داخلی مربوط به این فضا به صورت زیر است:

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{W_1^2([0, \infty))} = \int_0^\infty \{4v_1(t)v_2(t) + 5v_1'(t)v_2'(t) + v_1''(t)v_2''(t)\}dt,$$

با بهره گیری از تعریف ضرب داخلی و ویژگی هسته می توان تابع هسته بازتولیدی مربوط به فضاهای

مورد بحث را پیدا کرد. تابع هسته بازتولیدی برای فضای $W_1^2([a, b])$ به فرم زیر است:

$$R_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{92}{3} + 22\zeta - \frac{\zeta^2}{6} + \frac{1}{6}x(20 + \zeta)(22 + \zeta), & x > \zeta, \\ \frac{92}{3} + 22\zeta + \frac{1}{6}x(132 - x^2 + 3\zeta(42 + x)), & x \leq \zeta, \end{cases}$$

و $K_\eta(T)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $W_1^2([0, \infty))$ را به فرم زیر داریم:

$$K_\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{12} \left(e^{-2\eta-2t} - \frac{1}{12}e^{2t-2\eta} - \frac{e^{-\eta-t}}{6} + \frac{e^{t-\eta}}{6} \right), & t \leq \eta, \\ \frac{1}{6} \left((e^\eta - e^{-\eta})e^{-t} - \frac{1}{12}(e^{4\eta} - 1)e^{-2\eta-2t} \right), & t > \eta. \end{cases}$$

با توجه به این نکته که مسئله مقدار اولیه مورد بحث در یک فضای دو متغیره مطرح شده است،

بنابراین باید فضای مورد نیاز برای این معادله را تعریف کنیم. در نتیجه می توان نوشت $W_1^{(2,2)}(\mathcal{D})$

$W_1^{(2,2)}([a, b]) \times W_1^{(2,2)}([0, \infty))$ که این فضا را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$W_1^{(2,2)}(\mathcal{D}) = \{u(x, t) | \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \text{ کاملاً پیوسته است در } \mathcal{D}\},$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \in L^2(\mathcal{D}), u(x, 0) = 0\}.$$

و لذا با در نظر گرفتن قضیه ۲.۱.۲، هسته بازتولیدی فضای $W_1^{(2,2)}(\mathcal{D})$ به صورت زیر بیان

می شود:

$$\mathfrak{B}_{(\zeta, \eta)}(x, t) = R_\zeta(x)\kappa_\eta(t), \quad (19.2)$$

اکنون برای فضای برد این مساله می توان فضای $W_1^{(1,1)}(\mathcal{D})$ را تعریف کرد. بنابراین، عملگر خطی

کراندار $W_1^{(1,1)}(\mathcal{D}) \rightarrow W_1^{(2,2)}(\mathcal{D})$ به فرم زیر بیان می شود:

$$\mathbb{L}\vartheta \equiv \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial t} + (1 - 2g(x))\frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} - 2\frac{dg(x)}{dx}\vartheta, \quad (20.2)$$

حال می توان معادله (۱۷.۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \mathbb{L}\vartheta(x, t) = \vartheta \frac{\partial \vartheta(x, t)}{\partial x} + \vartheta g \frac{dg(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx}, \\ \vartheta(x, \circ) = \circ. \end{cases} \quad (21.2)$$

اکنون نقاطی چگال را در $D = [a, b] \times [\circ, \infty)$ انتخاب می کنیم و آنها را $\{P_i = (x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ می نامیم. اگر قرار دهیم $P = (x, t)$ و فرض کنیم که $\Xi_{(\zeta, \eta)}(x, t)$ هسته بازتولیدی فضای $W_{\vartheta}^{(1,1)}(D)$ باشد،

در این صورت قرار می دهیم $\varphi_i(P) = \Xi_{(P_i)}(P)$ ، بعلاوه فرض می کنیم

$$\psi_i(x, t) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x, t). \quad (22.2)$$

که $\mathbb{L}^* : W_{\vartheta}^{(1,1)}(D) \longrightarrow {}^{\circ}W_{\vartheta}^{(2,2)}(D)$ عملگر الحاقی $\mathbb{L}$ می باشد. حال با توجه به مفروضات ارائه شده می توان قضیه زیر را بیان کرد.

قضیه ۱.۲.۲. اگر $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در D چگال باشد، آنگاه $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل در فضای ${}^{\circ}W_{\vartheta}^{(2,2)}(D)$ است.

□

برهان. مراجعه شود به [۳۸].

اکنون که همه مقدمات لازم فراهم شد، به حل عددی مسئله مورد نظر براساس روش هسته بازتولیدی می پردازیم. بدین منظور ابتدا باید پایه های متعامد $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای ${}^{\circ}W_{\vartheta}^{(2,2)}$ با اعمال فرآیند متعامدسازی گرام اشمیت روی $\{\psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ بدست آورد. بنابراین می توان نوشت

$$\bar{\psi}_i(P) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(P), \quad (\beta_{ii} > \circ, \quad i = 1, 2, \dots) \quad (23.2)$$

که ضرایب متعامدسازی هستند. حال برای بدست آوردن جواب معادله ترافیک قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در D چگال باشد. اگر معادله دارای جواب یکتا باشد، آنگاه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود.

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t). \quad (24.2)$$

که در آن

$$\mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k) \vartheta_x(x_k, t_k)) = \vartheta \vartheta_x + \vartheta g g_x - g_x$$

برهان. فرض کنید $\vartheta(x, t)$ جواب معادله ترافیک (۱۷.۲) باشد و با توجه به اینکه $\{\bar{\psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه و کامل برای فضای $W_{\varphi}^{(2,2)}$ است و از طرفی برای هر $v(P) \in {}^{\circ} W_{\varphi}^{(2,2)}$ داریم:

$$v(P_i) = \langle v(P), \varphi_i(P) \rangle_{W_{\varphi}^{(2,2)}}$$

با استفاده از رابطه قبل و نیز بسط بر حسب پایه برای $\vartheta(x, t)$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vartheta(x, t), \bar{\psi}_i(x, t) \rangle_{W_{\varphi}^{(2,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle \vartheta(x, t), \psi_k(x, t) \rangle_{W_{\varphi}^{(2,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle \vartheta(x, t), \mathbb{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{W_{\varphi}^{(2,2)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle \mathbb{L} \vartheta(x, t), \varphi_k(x, t) \rangle_{W_{\varphi}^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle \mathcal{F}(x_t, t_k, \vartheta(x_k, t_k) \vartheta_x(x_k, t_k)), \varphi_k(x, t) \rangle_{W_{\varphi}^{(1,1)}} \bar{\psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \mathcal{F}(x_t, t_k, \vartheta(x_k, t_k) \vartheta_x(x_k, t_k)) \bar{\psi}_i(x, t). \end{aligned}$$

□

اثبات کامل است.

۳.۲ مثال‌های عددی

روش هسته بازتولیدی را که در این فصل به تفصیل شرح داده ایم، برای حل معادله ترافیک بکار می‌گیریم. در این قسمت دو مثال از معادلات ترافیک را حل می‌کنیم همانطور که توضیح داده شد، چون این معادلات در دسته معادلات سخت قرار می‌گیرند، نمایش جواب عددی به دست آمده با کمترین ارتعاش در لحظه شوک و بعد از آن بسیار مهم است.

مثال ۱.۳.۲. معادله ترافیک زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(\rho(x, t))}{\partial x} = 0.$$

تابع چگالی در این مدل بصورت زیر بیان می شود:

$$F(\rho(x, t)) = \rho V(\rho),$$

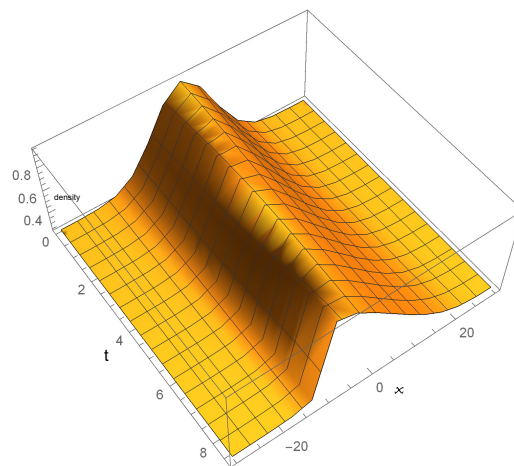
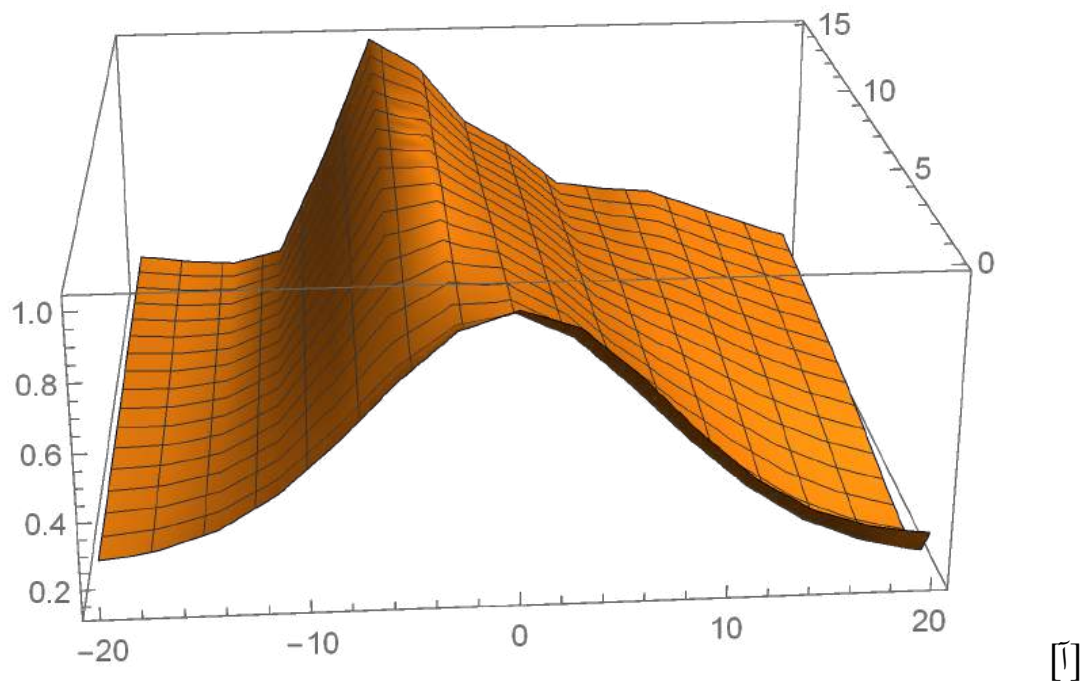
که در آن:

$$V(\rho) = v_{max}(1 - \rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

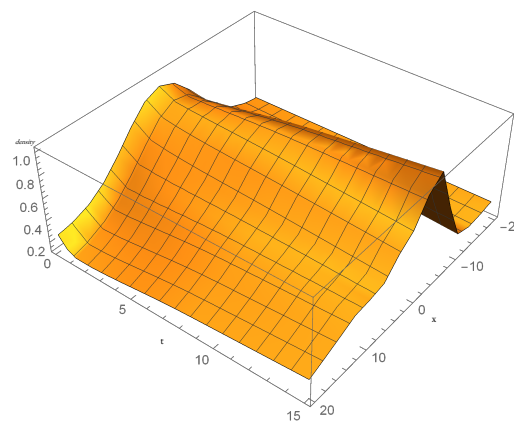
در اینجا فرض می کنیم $v_{max} = 1$ و شرایط اولیه بصورت زیر است:

$$\rho(x, 0) = 0.25 + 0.7e^{-\beta x^2},$$

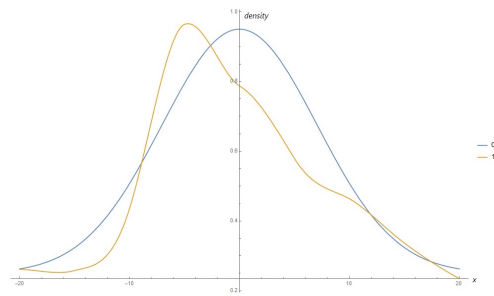
که در آن $\beta = 0.1$ خواهد بود. شوک چگالی در طول زمان تغییر می کند. شبیه سازی موج شوک نشان می دهد که تراکم جریان ترافیک افزایش یافته و سرعت سریعاً کاهش می یابد (رانندگانی که در ترافیک کم دارای سرعت بودند، ناگهان مجبور به ترمز شدند). همانطور که وسایل نقلیه از منطقه شوک خارج می شوند، به تدریج شتاب می گیرند و در نتیجه تراکم به تدریج کاهش می یابد. شکل ۱.۲ در قسمت آ و پ، پاسخ عددی این مسئله را با روش هسته بازتولیدی نشان می دهد. شکل تا $t = 15$ رسم شده است. از آنجایی که این مسائل پاسخ دقیقی ندارند و حل آنها بسیار سخت است، مهم این است که حرکت از نقطه شوک در تصاویر بعد از رخداد، مشخص است. اما در برخی از روش ها، خطا از زمان رخداد شوک بسیار بالاست و حرکت شوک دیده نمی شود. با این حال، در این روش، همانطور که در شکل دیده می شود، نقطه شوک به خوبی نشان داده می شود اما جواب کمی دارای نوسانات است و خطا دارد. در مقایسه با شکل ۱.۲ در قسمت ب، که توسط نرم افزار Mathematica بدست آمده و به دلیل شوک از زمان ۸ عبور نکرده است، روش محاسباتی ما تا زمان ۱۵ پیش رفت که رقم قابل قبولی است.



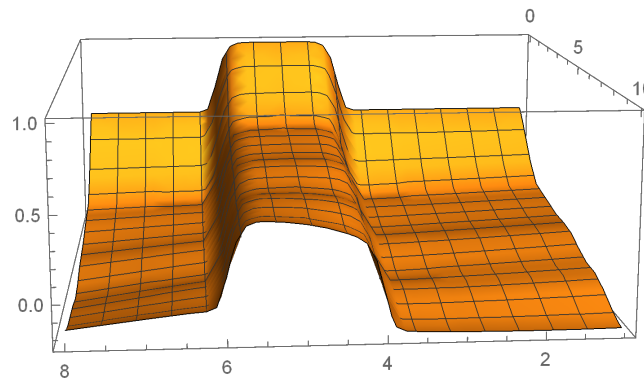
[پ]



شکل ۱.۲: مقایسه جواب معادله مثال ۱.۳.۲ به روش هسته بازتولیدی (a,c) با جواب معادله با استفاده از متمتیکا (b)



شکل ۲.۲: جواب معادله ترافیک ۱.۳.۲ به روش هسته بازتولیدی به حالت دو بعدی



شکل ۳.۲: مثال ۲.۳.۲، برای $N = 20$ و $t = 10$.

مثال ۲.۳.۲. در مثال دوم، مدل دیگری از مساله ترافیک را در نظر می‌گیریم که در آن تابع اساسی مانند مثال قبلی است، اما داده‌های اولیه تابع چندضابطه ای است.

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & 4 \leq x \leq 6, \\ 0.5, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

این را می‌توان اینگونه تفسیر کرد: اتومبیل‌هایی که به ترافیک شلوغ نزدیک می‌شوند یا با صفی از اتومبیل‌ها در پشت چراغ قرمز روبرو می‌شوند که منتظر سبز شدن هستند. در اینجا چراغ راهنمایی در موقعیت $x = 6$ است و در لحظه $t = 0$ از قرمز به سبز تغییر کرده است. شکل ۳.۲ راه حل‌های عددی را تا زمان $t = 10$ با روش هسته بازتولیدی نشان می‌دهد.

فصل ۳

روش‌های بدون شبکه

ارایه روش‌های عددی جدید برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نظر مهندسين و رياضيدانان از اهميت بسزايی برخوردار است. روش‌های بدون شبکه، به خاطر انعطاف‌پذیری بالای آنها و دقت بسیار بالای جواب‌های عددی حاصله، در سال‌های اخیر توجه بسیاری از رياضيدانان و مهندسان را به خود جلب کرده است. در این فصل توضیحاتی در مورد این روش ارایه می‌شود تا بتوان از این روش برای حل معادلات ترافیکی استفاده کرد.

۱.۳ روش بدون شبکه

تعریف روش بدون شبکه (لیو ۲۰۰۲) [۴۰] به صورت زیر است: روش بدون شبکه برای حل یک مساله روشی است که بدون استفاده از یک شبکه‌بندی از قبل تعیین شده برای گسسته سازی دامنه، مساله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل نماید. روش‌های بدون شبکه، از یک مجموعه نقاطی که در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده برای نمایش دامنه و مرزهای آن (و نه برای گسسته سازی دامنه) استفاده می‌کند. این مجموعه نقاط پخش شده، نقاط میدانی^۱ نامیده می‌شوند، و این نقاط یک شبکه نمی‌سازند، به این معنی که هیچگونه اطلاعات قبلی درباره رابطه بین این گره‌ها برای درونیایی یا تقریب تابع مجهول و... نیاز نیست. شاید بتوان گفت که مهمترین هدف مشترک روش‌های بدون شبکه، فائق آمدن بر مشکل شبکه‌بندی و شبکه‌بندی مجدد کل دامنه باشد. بسیاری از روش‌های بدون شبکه کاربردهای خوبی پیدا کرده‌اند و نشان داده شده است که پتانسیل بالایی برای تبدیل شدن به یک روش عددی قوی دارند. با این وجود، این روش‌ها هنوز در مرحله توسعه قرار دارند و هنوز سوالات و مسائل تکنیکی وجود دارند که باید پاسخ داده شوند تا این روش‌ها تبدیل به یک ابزار مفید و کارا برای حل مسائل پیچیده مهندسی شوند. سه گام بسیار مهم برای اجرای یک روش بدون شبکه به شرح زیر است:

۱- تولید نقاط^۲: در روش‌های بدون شبکه، دامنه فیزیکی مساله با نقاط نشان داده می‌شود. این

^۱Field nodes

^۲Node generation

نقاط می‌توانند منظم یا نامنظم باشند و در هر صورت باید کل دامنه را پوشش دهند.

۲- تقریب آزمایشی^۳: برای بدست آوردن جواب عددی ابتدا تابع مجهول باید در هر نقطه دامنه تقریب زده شود. برای این منظور پایه‌ای برای فضای جواب در نظر گرفته و جواب را به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه در نظر می‌گیریم. این عمل را تقریب جواب می‌نامیم.

۳- آزمودن^۴: در روند تقریب، جواب بر حسب جملات توابع پایه بسط داده می‌شود و بنابراین ضرائب جملات پایه مجهول هستند. برای محاسبه ضرایب تقریب باید آن را بیازماییم تا در معادلات حاکم صدق کند. این آزمون می‌تواند به فرم ضعیف یا قوی و محلی یا کلی باشد.

روش‌های متفاوت تقریب آزمایشی و آزمودن منجر به روش‌های بدون شبکه متفاوتی شده‌اند. در دهه‌های اخیر، روش‌های بدون شبکه برای حل بهتر معادلات پیشنهاد شده‌اند. این روش‌ها برای گسسته سازی دامنه بدون استفاده از شبکه‌های از پیش تعریف شده با کمک ایجاد سیستمی از معادلات جبری برای تمامی دامنه مساله بکار می‌روند. به این ترتیب، یک مجموعه از گره‌ها در مرزهای دامنه بکار می‌رود تا مرزها را نمایش دهد. روش‌های بدون شبکه را می‌توان به سه گروه تقسیم کرد:

۱- روش‌های بدون شبکه بر اساس شکل‌های ضعیف مانند روش گالرکین بدون عنصر^۵ (EFG)

[۴۱]

۲- روش‌های بدون شبکه بر اساس شکل‌های قوی مانند روش جابجایی بر اساس توابع پایه شعاعی (RBF)

[۴۲، ۴۳]

۳- روش‌های بدون شبکه بر اساس ترکیبی از شکل‌های ضعیف و روش جابجایی [۴۵، ۴۶].

³Trial approximation

⁴Testing

⁵Element Free Galerkin method

روش‌های بدون شبکه زیادی تاکنون در مقالات و تحقیقات ارائه شده است که به چند مورد از این روش‌ها اشاره می‌کنیم: روش ذرات هیدرودینامیکی هموار (SPH)^۶ [۴۸]، روش عناصر پخش شده (DEM)^۷ [۵۷]، روش افزایش یک (PUM)^۸ [۵۱]، روش اچ-پی کلود^۹، روش گالرکین با عناصر آزاد (EFG)^{۱۰} [۴۱]، روش بازتولیدی عناصر هسته (RKPM)^{۱۱} [۴۹]، روش بدون شبکه هم محلی براساس توابع پایه‌ای شعاعی (RBFs) [۴۲، ۴۳]، روش گره‌های مرزی BNM^{۱۲} [۵۰]، روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی (LBIE)^{۱۳} [۵۲]، روش بدون شبکه پتروف-گالرکین (MLPG)^{۱۴} [۴۷]، روش درونیابی نقاط شعاعی^{۱۵} [۵۳-۵۶]، روش کمترین مربعات متحرک (MLS)^{۱۶} [۴۴]، به علت کثرت این روش‌ها، بیان همه آن‌ها امکان‌پذیر نیست اما تعدادی از روش‌ها را با ذکر منبع نام بردیم. همانطور که گفته شد روش‌های متفاوت تقریب جواب و آزمودن منجر به روش‌های متفاوتی زیادی شده است، در قسمت بعد به‌طور خلاصه تعدادی از روش‌های تقریب جواب و آزمودن را بیان می‌کنیم.

۲.۳ تقریب آزمایشی

۱.۲.۳ روش ذرات هیدرودینامیکی هموار

روش ذرات هیدرودینامیکی هموار، قدیمی‌ترین روش بدون شبکه که توسط گینگولد و مناقان^{۱۷} در سال ۱۹۷۷ ارائه شد، یک تقریب هسته^{۱۸} برای تابع تک متغیره $u(x)$ در دامنه Ω به صورت زیر ارائه

^۶Smoothed Particle Hydrodynamic

^۷Diffuse element method

^۸Partition of unity method

^۹Hp-cloud method

^{۱۰}Element free Galerkin method

^{۱۱}Reproducing kernel particle method

^{۱۲}Boundary node method

^{۱۳}Meshless local boundary integral equation method

^{۱۴}Meshless local Petrov-Galerkin method

^{۱۵}Radial point interpolation method

^{۱۶}Moving Least Squares

^{۱۷}Gingold and Monaghan

^{۱۸}Kernel approximation

می دهد:

$$u^h(x) = \int w(x-y, h)u(y)d\Omega_y$$

که در آن $u^h(x)$ تقریب را نشان می دهد، $w(x-y, h)$ تابع وزن یا هسته است (در SPH معمولاً تابع هموار کننده نامیده می شود) و h اندازه محمل^{۱۹} می باشد. هسته باید در شرایط زیر صدق کند:

$$۱- w(x-y, h) > 0 \text{ در یک دامنه از } \Omega_i$$

$$۲- w(x-y, h) = 0 \text{ خارج از زیر دامنه } \Omega_i$$

$$۳- \text{خصوصیت نرمال بودن، } \int_{\Omega} w(x-y, h)d\Omega = 1$$

$$۴- w(s, h) \text{ یک تابع به طور یکنواخت کاهشی است که } s = \|x-y\|$$

$$۵- w(s, h) \rightarrow \delta(s) \text{ وقتی که } h \rightarrow 0, \text{ که } \delta \text{ تابع دلتای دیراک است.}$$

شرط دوم برای روش ضروری است، این شرط تقریب را قادر می سازد که از یک نمایش محلی تولید شود؛ $u^h(x)$ فقط به مقادیری از u در گره هایی بستگی دارد که در زیر دامنه ای قرار دارند که $w(x-y, h)$ صفر نیست. دامنه ای که در آن $w(x-y, h)$ ناصفر است محمل تابع وزن یا دامنه تاثیر آن نامیده می شود. شرط سوم به خاطر سازگاری است، اگر چه این شرط، سازگاری فرم گسسته را تضمین نمی کند. فرم گسسته روش با به کار بردن روش انتگرال گیری عددی برای سمت راست به صورت زیر حاصل می شود:

$$u^h(x) = \sum_I w(x-x_I)u_I \Delta V_I = \sum_I \phi_I(x)u_I$$

که در آن ΔV_I نشان دهنده حجم برای فضای سه بعدی، سطح برای دو بعدی و طول برای یک بعدی و متناظر با نود I می باشد، و $\phi_I(x) = w(x-x_I)\Delta V_I$ تابع شکل^{۲۰} تقریب SPH می باشد. یک مشکل در به کار بردن تقریب فوق، ارایه تکنیک کارا برای تخصیص ΔV_I به نود I می باشد.

¹⁹Support

²⁰Shape function

۲.۲.۳ روش بازتولیدی عناصر هسته

مشابه مسیری که روش SPH معرفی شد، لیو و همکاران روش RKPM را ارائه دادند و یک تابع اصلاحگر برای هر دو فرم گسسته و پیوسته معرفی کردند. تقریب بازتولیدی هسته $u(x)$ به صورت زیر است:

$$u^h(x) = \int C(x, x-y) \Phi_\alpha(x-y) u(y) d\Omega_y$$

که در آن $C(x, x-y)$ تابع اصلاحگر نامیده می شود که با تحمیل شرایط بازتولید به دست می آید، یعنی معادلات باز تولید باید دقیقاً چندجمله ای ها را تولید کنند و بتوان آن را بر حسب ترکیب خطی توابع پایه ای چندجمله ای نشان داد؛ α پارامتر تاخیر تابع هسته $\Phi_\alpha(x-y)$ می باشد. با اجرای انتگرال گیری عددی، فرم گسسته زیر به دست می آید:

$$u^h(x) = \sum_I C(x, x-x_I) \Phi_\alpha(x-x_I) u_I \Delta V_I = \sum_I \phi_I(x) u_I$$

در نظریه موجک ها، یک تابع با ترکیبی از تاخیر و انتقال یک موجک واحد (که تابع پنجره نامیده می شود) نمایش داده می شود. روش RKPM نیز با بهره گیری از این روش ابداع شده است.

۳.۲.۳ کمترین مربعات متحرک

در این رساله از پایه های بدست آمده از روش کمترین مربعات متحرک (MLS) جهت نمایش جواب استفاده می کنیم. فرض کنید که $\mathbf{p}^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$ یک پایه چندجمله ای کامل باشد؛ به عنوان مثال، برای مساله دو بعدی با $\mathbf{x} = (x, y)$ پایه ها می توانند

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, x, y]$$

یا

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$$

باشد. برای پایه خطی ($m = 3$) و برای پایه مربعی ($m = 6$)، است. تابع برداری $\mathbf{p}^T$ می‌تواند مجموعه‌ای از نقاط به اندازه N را به عنوان ورودی بگیرد و یک ماتریس از اندازه $N \times m$ برگرداند. به‌ویژه، ماتریس $P = \mathbf{p}^T(\Xi)$ از اندازه $N \times m$ با درایه‌های $[P_{ij}] = p_j(\xi_i)$ می‌باشد که $i = 1, \dots, N$ ، $j = 1, \dots, m$ ، و $\xi_i \in \Xi$. همچنین در هر نقطه ξ_i ، یک تابع وزن با محمل فشرده $w_i > 0$ تخصیص داده می‌شود. در این رساله تابع وزن گاوسی استفاده می‌شود:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\exp[-(\|\mathbf{x} - \xi_i\|/c)^2] - \exp[-(R/c)^2]}{1 - \exp[-(R/c)^2]}, & 0 \leq \|\mathbf{x} - \xi_i\| < R, \\ 0, & \text{در غیر این صورت,} \end{cases} \quad (1.3)$$

که $c > 0$ یک ثابت است که شکل تابع وزن w_i را کنترل می‌کند و $R > 0$ اندازه محمل را مشخص می‌کند. توجه داشته باشید که برای انعطاف‌پذیری بیشتر c و R می‌توانند به نقاط نیز وابسته باشند. برای ساختن پایه‌های (MLS) برای بسط تابع u در Ξ به صورت زیر عمل می‌کنیم. ما به دنبال تقریبی به صورت زیر هستیم:

$$U(x) = \mathbf{p}^T(X)a(x). \quad (2.3)$$

که بردار ضریب (متحرک) $a(x) = [a_1(x), \dots, a_m(x)]$ در هر نقطه x با مینیم کردن یک نرم گسسته وزن دار L_2 تابع باقیمانده در n نقطه بدست می‌آید:

$$J(a)(x) = \sum_{\xi_i \in \Xi} w_i(x) (\mathbf{p}^T(\xi_i)a(x) - u(\xi_i))^2. \quad (3.3)$$

با حل معادله (3.3) داریم:

$$a(x) = (P^T W(x) P)^{-1} P^T W(x) u(\Xi). \quad (4.3)$$

که $u(\Xi)^T = [u(\xi_1), \dots, u(\xi_N)]$ ، و تابع ماتریسی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(x) = \text{diag}(w_1(x), \dots, w_N(x))$$

از یک دیدگاه دیگر، تقریب (۲.۳) با استفاده از (۴.۳) می تواند به صورت

$$U(x) = \underbrace{\mathbf{p}^T(x)(P^T W(x)P)^{-1} P^T W(x)}_{\Phi(x)} u(\Xi) = \sum_{i=1}^N u(\xi_i) \phi_i(x), \quad (5.3)$$

نوشته شود؛ که ϕ_i ، i امین درایه تابع برداری

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times N}$$

می باشد. به جز در حالتی که u یک چندجمله ای از درجه کوچکتر یا مساوی m باشد، مشاهده می شود که همانند شبه درونیاب ها، در تقریب MLS همواره $U(\xi_i) \approx u(\xi_i)$ ولی $U(\xi_i) \neq u(\xi_i)$ برای $\xi_i \in \Xi$. برای مشتق گرفتن از پایه های MLS مشتقات توابع وزن و همچنین مشتقات چندجمله ای هایی از درجه پایین نیاز است.

۴.۲.۳ روش های افراز یک

ایده اصلی افراز یک با افراز دامنه کراندار و باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ به M زیردامنه Ω_j شروع می شود، به طوری که $\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ و زیردامنه ها ممکن است هم پوشانی کمی داشته باشند. متناظر با این زیردامنه ها ما یک افراز یک می سازیم؛ یعنی یک خانواده از توابع پیوسته، نامنفی و با محمل پیوسته w_j که محمل آن بستار Ω_j می باشد، به طوری که در هر نقطه مانند x در Ω داریم

$$\sum_{j=1}^M w_j(x) = 1.$$

حال، برای هر زیردامنه Ω_j یک تقریب محلی مانند u_j می سازیم (به عنوان مثال درونیاب تابع پایه ای شعاعی)، و سپس تقریب کلی را برای کل دامنه Ω با رابطه زیر می سازیم:

$$P_f(x) = \sum_{j=1}^M u_j(x) w_j(x), \quad x \in \Omega.$$

توجه کنید که اگر یک تقریب محلی مقدار تابع را در یک نقطه مانند x_l درونیابی کند؛ یعنی

آنگاه تقریب کلی نیز در این نقطه مقدار تابع را درونیابی می‌کند:

$$P_f(x_l) = \sum_{j=1}^M u_j(x_l)w_j(x_l) = \sum_{j=1}^M f(x_l)w_j(x_l) = f(x_l).$$

بابوسکا و ملنک^{۲۱} (۹۶ – ۱۹۹۵) و دورات و ادن^{۲۲} (۹۶ – ۱۹۹۵) نشان دادند که تقریب کمترین مربعات متحرک یک افراز یکه می‌سازد.

۵.۲.۳ توابع پایه‌ای شعاعی

تابع $\Phi: R^s \rightarrow R$ یک تابع شعاعی نامیده می‌شود اگر تابع $\phi: [0, \infty) \rightarrow R$ موجود باشد به طوری که

$$\Phi(X) = \phi(r),$$

که در آن $r = \|X\|$ و $\|\cdot\|$ یک نرم در R^s می‌باشد. برای راحتی، یک تابع پایه‌ای شعاعی را با $\Phi(X, X_j) = \phi(r_j)$ نشان می‌دهیم که در آن $r_j = \|X - X_j\|$. در فضای دو بعدی داریم:

$$\Phi(X, X_j) = \Phi(x, y, x_j, y_j)$$

و می‌نویسیم $X = (x, y)$.

در روش تقریب بدون شبکه پایه‌ای شعاعی، تقریب تابع مجهول $u(x, y)$ به صورت ترکیب خطی از N تابع شعاعی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u^h(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi(x, y, x_j, y_j)$$

که N تعداد نقاط در دامنه است و $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N$ ضرایب مجهول می‌باشد. ضرایب مجهول با حل معادلات حاکم با روش هم محلی یا گالرکین به دست می‌آیند. در حالت چند بعدی، مشتقات جزئی تابع تقریب به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{\partial^k u^h(x, y)}{\partial x^a \partial y^b} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial^k \Phi(x, y, x_j, y_j)}{\partial x^a \partial y^b}$$

²¹Babuska and Melenk

²²Duarte and Oden

که $k = a + b$ و $a, b \in \{0, 1, 2\}$ از بین توابع پایه‌ای شعاعی مطلوب و پرکاربرد، می‌توان چندربعی‌ها^{۲۳} و اسپلاین صفحه‌ای نازک^{۲۴} را نام برد. تابع پایه‌ای شعاعی چندربعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + c_j^2}$$

که c_j یک ثابت است که شکل تابع پایه‌ای شعاعی را کنترل می‌کند. تابع پایه‌ای چندربعی معکوس نیز به صورت زیر است:

$$\phi(r_j) = \frac{1}{\sqrt{r_j^2 + c_j^2}}.$$

تابع اسپلاین صفحه‌ای نازک به صورت

$$\phi(r_j) = r_j^m \log r_j,$$

تعریف می‌شود که m مرتبه آن است.

۳.۳ آزمون

در همه روش‌هایی که در بالا بیان شد، برای جواب مجهول تقریبی به صورت زیر داریم:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi(x_j)$$

که ضرایب مجهول هستند. ضرایب مجهول باید به طریقی محاسبه شوند که تابع تقریب $u^h(x)$ به صورت ضعیف یا قوی در معادلات حاکم صدق کند. چندین روش آزمون تا به حال ارایه گردیده‌اند که می‌توان آن‌ها را در سه گروه دسته بندی کرد که در زیر به بیان آنها می‌پردازیم.

۱.۳.۳ آزمون به فرم قوی (روش هم محلی)

این روش به طور گسترده در تقریب توابع پایه‌ای شعاعی و همچنین روش ذرات هیدرودینامیکی هموار به کار می‌رود. در این روش، تابع تقریب باید در یک مجموعه از نقاط (نقاط هم محلی) در

²³Multiquadrics

²⁴thin-plate spline

معادلات حاکم صدق کند. تعداد این نقاط نباید از تعداد ضرایب مجهول کمتر باشد و این نقاط باید مجزا باشند. در نتیجه مساله تبدیل به یک دستگاه معادلات می شود که ضرایب تقریب مجهول هستند. به وضوح این روش یک روش ساده و سریع می باشد.

۲.۳.۳ آزمون به فرم ضعیف سراسری

جهت اجرای روش گالرکین نیازمند استفاده از فرم ضعیف یا تغییراتی مساله است. روش گالرکین با عناصر آزاد^{۲۵} روش افراز یکه، روش بازتولید اجزای هسته از روش گالرکین و برای محاسبه انتگرال های حاصل از روش های انتگرال گیری عددی استفاده می کنند. در نتایج به دست آمده از اجرای این روش، چنین بیان کرده اند که این روش در هیچ جا به بن بست نمی رسد و سرعت همگرایی می تواند از روش عناصر متناهی بیشتر شود.

۳.۳.۳ آزمون به فرم ضعیف محلی

ژو^{۲۶} و اتلوری^{۲۷} دو نوع روش بدون شبکه ارایه نمودند: روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی^{۲۸} و روش بدون شبکه پتروف- گالرکین محلی^{۲۹} هر دو روش از تقریب کمترین مربعات محلی استفاده می کنند. اما برای به دست آوردن مجهولات (که در اینجا مقادیر تابع هستند) روش MLPG از معادلات انتگرال محلی و روش LBIE از معادلات انتگرال مرزی محلی استفاده می کنند. معادلات باید روی زیردامنه های با شکل منظم برقرار باشند و انتگرال ها روی این زیردامنه ها و مرز آن ها محاسبه می شوند. روش بدون شبکه ای که در این رساله مورد استفاده قرار می گیرد روش کمترین مربعات متحرک MLS است به همین دلیل در قسمت بعد در مورد این روش توضیحات تکمیلی داده شده است.

²⁵Element Free Galerkin(EFG)

²⁶Zhu

²⁷Atluri

²⁸meshless local boundary integral equation (LBIE)

²⁹Meshless local Petrow-Galerkin (MLPG)

۴.۳ کمترین مربعات متحرک MLS

همانطور که گفته شد روش‌های بدون شبکه بدون استفاده از شبکه‌بندی از پیش تعیین شده برای گسسته‌سازی دامنه مساله کار می‌کنند. از بین روش‌های بدون شبکه، روش کمترین مربعات متحرک را انتخاب کردیم زیرا دلایل خوبی برای این انتخاب وجود داشت: ۱- استفاده از تابع وزنی هموار که تضمینی برای پیوستگی متغیرها است، ۲- انعطاف پذیری بسیار بالای این روش، ۳- دقت بالای این روش.

MLS پنجره متحرک^{۳۰} را با توابع وزنی که محمل فشرده^{۳۱} دارند ترکیب می‌کند. این روش حتی با توابع پایه مرتبه پایین نیز بسیار دقیق عمل کرده و از پایداری بسیار خوبی برخوردار است زیرا از یک طرح تقریب محلی^{۳۲} استفاده می‌کند. محاسبات در زیر دامنه‌های دامنه کلی معادله انجام می‌شود. ویژگی بسیار جذاب MLS انعطاف پذیری آن است. با پارامترهای تابع وزن، به راحتی می‌توان تنظیم مناسب برای MLS را فراهم و بنابراین تناسب داده‌ها را کنترل و تنظیم کرد. در معادلات ترافیک، که بحث اصلی ما در این رساله است، شوک‌ها اجتناب ناپذیر بوده و روش تناسب برای حل این معادلات اولویت دارد. روش حداقل مربعات (LS) بیشترین کاربرد را برای تناسب داده‌ها دارد. اکثر روش‌های مبتنی بر LS، طرح‌های تقریب کلی هستند که برای مقادیر زیاد داده، موارد توزیع نامنظم یا پراکنده مناسب نیستند. بنابراین روش MLS که یک تقریب محلی است و از دقت محاسباتی و پایداری بالایی برخوردار است پیشنهاد شد. پنجره متحرک معرفی شده در MLS عملکرد خوبی در حل این مسائل نشان می‌دهد. تابع وزن با محملی فشرده نشان می‌دهد که فقط داده‌های قابل سنجش در نزدیکی نقطه مجهول در محاسبه دخالت دارند. در این بخش، به توضیح بیشتر این روش می‌پردازیم و از آنها برای تخمین تابع $v(x)$ در دامنه Λ استفاده می‌کنیم. فرض کنید Λ با تکنیک‌های هندسی محاسباتی بیان می‌شود. در این دامنه، گره‌های $x_i, i = 1, \dots, N$ فرض می‌کنیم

³⁰moving window

³¹compact support

³²local approximation

و مقدار تقریبی مرتبط با روش MLS را در مقطع گره مفروض i با v_i نشان می دهند. همانطور که در بخش قبل بیان شد، روش های بدون شبکه از درونیایی یا تقریب برای بیان یک تابع استفاده می کنند که مقدار یک متغیر مجهول در چندین نقطه از گره است. در این رساله، از میان روش های بدون شبکه، کمترین مربع متحرک MLS را انتخاب کرده ایم زیرا برای مسائل شوک عملکرد بهتری نشان می دهد. ما یک زیردامنه Λ_s را در مجاورت نقطه x در نظر می گیریم که در دامنه اصلی مساله Λ قرار داشته و بصورت دامنه محمل^{۳۳} در تقریب MLS برای تابع آزمایشی در نقطه x در نظر گرفته می شود. برای تخمین تابع v در Λ_s ، روی نقاط تصادفی گره های $x_i, i = 1, \dots, N$ تقریب تابع v را با روش کمترین مربعات متحرک با $v^h(x)$ روی دامنه Λ_s نشان می دهیم و $\forall x \in \Lambda_s$ را بصورت زیر می توانیم تعریف کنیم:

$$v^h(x) = D^T(x)q(x), \quad \forall x \in \Lambda_s, \quad (6.3)$$

که در آن $D^T(x)$ یک بردار با مرتبه m را بصورت $D^T(x) = [d_1(x), d_2(x), \dots, d_m(x)]$ نشان می دهد.

$D^T(x)$ یک پایه کامل تک جمله ای است و $q(x)$ یک بردار به صورت:

$$q(x) = [q_1(x), q_2(x), \dots, q_m(x)]$$

است. $q_j(x), j = 1, 2, \dots, m$ تابع مختصات فضای x به شمار می آیند و $d_j(x)$ یک تک جمله ای در مختصات فضا است. بعلاوه m تعداد توابع پایه چند جمله ای را نشان می دهد. برای ایجاد $d_j(x)$ از مثلث پاسکال استفاده شده و مسلماً پایه کامل ارجحیت دارد. توابع پایه توسط رابطه زیر مشخص می شوند:

$$D^T(x) = \begin{cases} 1, & m = 1 \\ \{1, x\}, & m = 2 \\ \{1, x, x^2\}, & m = 3 \end{cases}$$

³³Support domain

در اینجا، اگر بخواهیم مبدا را به یک نقطه ثابت $\mathbf{x}^e = (X_1^e, X_2^e, \dots, X_n^e)^T$ تغییر دهیم، $\mathbf{x}$ در $D(\mathbf{x})$ باید با $\mathbf{x} - \mathbf{x}^e$ جایگزین شود. نقطه $\mathbf{x}^e = (X_1^e, X_2^e, \dots, X_n^e)^T$ روی $\mathfrak{R}(x)$ قرار دارد که دامنه تاثیر $\mathbf{x}$ را نشان می‌دهد. سپس، پایه خطی به صورت:

$$D(\mathbf{x}) = [\mathbf{1}, x_1 - x_1^e, x_2 - x_2^e, \dots, x_n - x_n^e]^T, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, m = 1$$

و پایه درجه دوم به صورت:

$$D = \begin{cases} [\mathbf{1}, x_1 - x_1^e, (x_1 - x_1^e)^2]^T, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}, \\ [\mathbf{1}, x_1 - x_1^e, x_2 - x_2^e, (x_1 - x_1^e)^2, (x_2 - x_2^e)^2, (x_1 - x_1^e)(x_2 - x_2^e)]^T, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases} m = 2.$$

در نظر می‌گیریم. تابع وزن مورد استفاده در روش MLS بصورت زیر است:

$$w_i(\mathbf{x}) = \varphi\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{h}\right), \quad i = 1, \dots, N \quad (7.3)$$

که در آن تابع φ نامنفی، γ بار به طور پیوسته مشتق پذیر، مشتقات آن برای مرتبه بالاتری از γ کراندار است و محمل فشرده دارد. بسیاری از توابع وزنی که در روش‌های بدون شبکه استفاده می‌شوند دارای این شرایط هستند، مانند گاوسی، توانی، مکعبی و درجه دوم. در این رساله از تابع وزن گاوسی استفاده شده که به صورت زیر تعریف شده است:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\exp[-(\frac{d_i}{c_i})^2] - \exp[-(\frac{r_s}{c_i})^2]}{1 - \exp[-(\frac{r_s}{c_i})^2]}, & 0 \leq d_i \leq r_s, \\ 0, & d_i \geq r_s, \end{cases}$$

که در آن $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|$ و c_i یک ثابت است که شکل تابع وزن w_i را کنترل می‌کند و r_s نیز اندازه دامنه محملی را نشان می‌دهد. اندازه محملی تابع وزن w_i مرتبط با گره i (r_s) از اهمیت بالایی برخوردار است. از طرف دیگر، انتخاب آن باید به نحوی باشد که از اندازه کافی برای پوشش دادن به تعداد گره‌های مورد نیاز در تعریف دامنه برای هر نقطه نمونه برخوردار باشد و از طرف دیگر، انتخاب r_s بسیار کوچک به خطای بزرگ در محاسبات منجر خواهد شد. علاوه بر این باید توجه داشت r_s باید به اندازه کافی اما نه خیلی زیاد کوچک باشد تا ویژگی‌های محلی تقریب MLS را

حفظ کند. همانطور که ذکر شد: $v^h(x) = D^T(x)q(x)$ ، که قبلاً درباره $D^T(x)$ توضیح داده شد و اینجا می‌خواهیم به بررسی ضرایب $q(x)$ و جزئیات آن بپردازیم.

برای تعریف بردار ضریب $q(x)$ ، از نرم L_2 به شیوه‌ای استفاده می‌کنیم که این ضرایب با مینیم سازی نرم L_2 فاصله‌های وزنی به دست آیند. همانطور که در زیر آمده:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [D^T(x_i)q(x) - \hat{v}_i]^2 = [D \cdot q(x) - \hat{v}]^T \cdot W \cdot [D \cdot q(x) - \hat{v}] \quad (۸.۳)$$

در اینجا، $w_i(x)$ به عنوان تابع وزن برای گره i تعریف می‌شود. توجه داشته باشید برای تمامی نقاط در دامنه محمولی $w_i(x)$ ، مقدار تابع وزن در هر نقطه یعنی $w_i(x)$ مثبت است. در واقع x_i مقدار x را در گره i و n تعداد گره‌ها را در Λ_s برای هر تابع وزن $w_i(x) > 0$ نشان می‌دهد. ماتریس‌های D و W بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D = \begin{pmatrix} d^T(x_1) \\ d^T(x_2) \\ \dots \\ d^T(x_n) \end{pmatrix}, \quad W = \text{diag}(w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)), \quad \hat{v}^T = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n]. \quad (۹.۳)$$

توجه داشته باشید $\hat{v}_i, i = 1, 2, \dots, n$ مقادیر گره برای تابع آزمایش مجهول^{۳۴} $v^h(x)$ نیستند، بلکه مقدار گره مصنوعی را نشان می‌دهند. یک ارتباط خطی بین $q(x)$ و $\hat{v}$ وجود دارد که بصورت زیر بیان می‌شود. این ارتباط از ایستایی^{۳۵} J در (۶.۳) با توجه به $q(x)$ گرفته شده است:

$$Q(x)q(x) = S(x)\hat{v} \quad (۱۰.۳)$$

برای تعریف ماتریس‌های $Q(x)$ و $S(x)$:

$$Q(x) = D^T \cdot W \cdot D \quad (۱۱.۳)$$

$$S(x) = D^T \cdot W$$

^{۳۴}unknown trial function

^{۳۵}stationarity

با بدست آوردن $q(x)$ از (۱۰.۳) و جایگزینی در (۶.۳) داریم:

$$v^h(x) = \mu^T(x) \cdot \hat{v} = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{v}_i, \quad x \in \Lambda_s \quad (12.3)$$

$$\mu^T(x) = D^T(x) Q^{-1}(x) S(x) \quad (13.3)$$

یا

$$\mu_i(x) = \sum_{j=1}^m d_j(x) [Q^{-1}(x) S(x)]_{ji} \quad (14.3)$$

$\mu_i(x)$ تابع شکل برای تقریب MLS نامیده می شود که به گره x_i بستگی دارد. از (۱۴.۳) و (۱۲.۳)،

می توان نتیجه گرفت $\mu_i(x) = 0$ وقتی که $w_i(x) = 0$.

در شرایط کاربردی، معمولاً $w_i(x)$ به نحوی انتخاب می شود که محمل گره x_i غیر صفر باشد.

در حقیقت، اگر $\mu_i(x) = 0$ برای x که در منطقه محملی گره x_i نیست، باید ویژگی محلی تقریب MLS حفظ شود.

فصل ۴

حل معادله برگرز به روش بدون شبکه

معادله برگر^۱ کاربردهای بسیاری در علوم و مسائل مختلف دارد که از آن میان می‌توان به تلاطم یک بعدی^۲، امواج صدا در محیط ویسکوز، امواج شوک در محیط ویسکوز، امواج در تیوب‌های الاستیک ویسکوز مایع و امواج مغناطیسی هیدرودینامیک در یک محیط با رسانایی الکتریکی محدود اشاره کرد. یکی از دلایل شهرت بسیار این معادلات در میان جوامع علمی، کاربرد گسترده آنهاست. حل معادله برگر سال‌ها مورد توجه بوده و راه حل عددی این معادله هنوز هم بسیار مورد توجه است. همچنین در این فصل به معادله برگر فیشر^۳ می‌پردازیم. معادله برگر-فیشر یک معادله غیرخطی است که از مکانیسم‌های واکنش^۴، همرفت^۵ و انتشار^۶ تشکیل شده است. معادله مخصوص برگر-فیشر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. در این فصل به تفصیل به معادلات برگر و برگر فیشر و حل آنها به روش جدید می‌پردازیم. انتخاب این معادلات در این رساله به خاطر شباهت رفتاری جواب این معادلات با معادلات ترافیک است.

۱.۴ معادلات برگرزو برگرز فیشر

در این بخش توضیحات بیشتری در مورد معادله برگر مرتبه اول و معادله فیشر برگر ارائه می‌شود. معادله برگر یک معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی است که به طور گسترده در ریاضیات کاربردی و علوم فیزیکی مانند دینامیک گاز، آکوستیک غیرخطی و مکانیک سیالات مورد استفاده و شناخته شده است. این معادله برای اولین بار توسط بیتمن^۷ [۵۸] در سال ۱۹۱۵ و بعداً توسط برگر^۸ [۵۸] در سال ۱۹۴۸ مورد مطالعه قرار گرفت. از آن زمان به طور گسترده ای به عنوان معادله برگر توسط جامعه علمی مورد توجه قرار گرفت و تلاش‌هایی برای حل این معادله به طرق مختلف انجام شد. حل معادله برگر سال‌ها مورد توجه بوده و راه حل عددی این معادله هنوز هم بسیار مورد توجه

¹Burgers' equation

²one-dimensional turbulence

³The Burgers-Fisher equation

⁴reaction

⁵convection

⁶diffusion

⁷Bateman

⁸Burgers, Burgers2

است. مقالات زیادی برارایه راه حل عددی برای این معادلات تمرکز داشته و روش‌های مختلفی نیز برای حل معادله برگر پیشنهاد شده‌اند از جمله روش دیفرانسیل اتوماتیک^۹ [۸۵]، روش اجزای محدود گالرکین^{۱۰} [۶۲]، روش هم‌محلی طیفی^{۱۱} [۶۳]، روش SINC برای معادلات دیفرانسیل درجه دوم^{۱۲} [۶۴]، روش درجه دوم دیفرانسیل مبتنی بر چند جمله‌ای^{۱۳} [۶۵]، روش دیفرانسیل درجه دوم کوارتز بی-اسپلاین^{۱۴} [۶۶] و بسیاری روش‌های دیگر.

این معادله، آشفتگی ناشی از دو پدیده متضاد انتشار و همرفت را به خوبی نشان می‌دهد. این معادله دارای یک قسمت همرفت، یک قسمت چسبندگی و یک قسمت وابسته به زمان است. وقتی عبارت یا جمله چسبنده غالب است، پاسخ شکل سهمی یا هذلولی دارد. اگر جمله انتشار برخلاف جمله همرفتی غالب نباشد، موج‌های شوک بسیار قوی یا گسستگی‌ها ممکن است به دلیل غیرخطی بودن معادله برگرز روی دهند، حتی اگر شرایط ابتدایی به اندازه کافی هموار باشند. چنین گسستگی‌هایی یکی از بزرگترین مشکلات در دستیابی به پاسخ این معادلات است، بنابراین این ویژگی‌ها باعث می‌شوند معادله برگرز برای بررسی کارایی روش‌های عددی بسیار مناسب باشد. معادلات برگرز نقش بسیار مهمی در بین معادلات دیفرانسیل جزیی با راه‌حل‌های تحلیلی به همراه مجموعه‌ای از توابع پایه و محدودیت‌های مرزی دارد. از بدو پیدایش این معادله به دلیل کاربردهای عملی مختلف از جمله دینامیک گاز، تئوری شوک، جریان ترافیک، جریان ویسکوز و آشفتگی، به طور گسترده مورد توجه محققان قرار گرفته است.

در این رساله، معادله یک بعدی برگرز را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad a \leq x \leq b \quad t \geq 0 \quad (1.4)$$

^۹automatic differentiation method

^{۱۰}Galerkin finite element method

^{۱۱}spectral collocation method

^{۱۲}Sinc differential quadratic method

^{۱۳}polynomial-based differential quadratic method

^{۱۴}B-Splines quartz differential quadratic method

با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = h(x), \quad a \leq x \leq b$$

و شرایط مرزی:

$$u(a, t) = f(x), \quad u(b, t) = g(x), \quad t \geq 0$$

که در آن α ثابت و ν چسبندگی جنبشی^{۱۵} است.

بنتون و پلاتزمن^{۱۶} جواب‌های دقیق معادلات مشابه برگرز یک بعدی را بررسی کردند. در سال‌های اخیر، تلاش‌های زیادی برای به دست آوردن جواب‌های عددی با خطای کمتر در معادله برگرز برای مقادیر کوچک و بزرگ چسبندگی سینماتیکی، به‌ویژه برای چسبندگی‌های کوچک صورت گرفته است، زیرا در این حالت سری بی‌نهایت به آرامی به سوی پاسخ دقیق همگرا می‌شود و جواب‌های عددی دارای خطاهای زیادی هستند. در این رساله چندین نمونه از این نوع معادله با شرایط اولیه و مرزی متفاوت حل شده و جواب با ضرایب چسبندگی مختلف مقایسه شده است. در این رساله به معادله برگرز-فیشر نیز می‌پردازیم. این معادله برای تبیین مسائل مختلف در علم از اهمیت بالایی برخوردار است. فیشر اولین بار معادله معروفی را که در رشته‌های مختلف با آن مواجه شد به عنوان مدلی برای انتشار یک ژن جهش یافته پیشنهاد کرد که در آن $u(x, t)$ نشان دهنده چگالی میانگین است. در سال‌های بعد، این معادله به عنوان مبنایی برای انواع مدل‌ها برای بسیاری از مسائل در علوم مختلف مورد استفاده قرار گرفت. کلی‌ترین شکل معادله فیشر معادله برگرز-فیشر نام دارد. تعاملات متعدد در مسائل فیزیکی که در مدل‌های سیستم‌ها و ساختارهای مختلف وجود دارد، منجر به معادله تعمیم‌یافته برگرز-فیشر می‌شود.

معادله برگرز-فیشر از غیرخطی بودن بسیار بالایی برخوردار است زیرا ترکیبی از مکانیسم‌های واکنش، همرفت و انتشار است. این معادله به دلیل ویژگی‌های پدیده همرفتی، انتقال انتشار و

¹⁵kinematic viscosity

¹⁶Benton and Platzman

نوع واکنش‌ها، برگرز- فیشر نامیده می‌شود. غیرخطی بودن بالای آن توجه بسیاری از محققان را به خود جلب کرده و بسیاری از آنها تلاش زیادی برای حل معادله برگرز- فیشر و به دست آوردن پاسخ عددی برای این معادله انجام داده اند. برخی از روش‌ها عبارتند از روش تجزیه ادومین^{۱۷} [۶۷]، روش تانژانت^{۱۸} توسط وازواز^{۱۹} [۶۸]، روش جابجایی طیفی و تجزیه دامنه طیفی توسط جاویدی و گل بابایی [۶۹]، و یک طرح تفاضل محدود غیر استاندارد توسط میکنز^{۲۰}. کایا و سید^{۲۱} شبیه‌سازی عددی و جواب‌های صریح را معرفی کردند [۷۰] درحالی‌که اسماعیل و رابو^{۲۲} یک تقریب محدودکننده پده^{۲۳} را پیشنهاد دادند [۷۱]، و روش‌های دیگری که در مقالات مختلف برای حل این معادلات ارایه شده است.

در زیر یک معادله تعمیم یافته یک بعدی برگرز- فیشر دیده می‌شود که در زمینه‌های مختلف علمی کاربرد دارد:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^{\delta} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1 - u^{\delta}) \quad a \leq x \leq b \quad t \geq 0 \quad (2.4)$$

که در آن α, β و δ به عنوان پارامترها در نظر گرفته می‌شوند. در بخش بعد، معادله تعمیم یافته برگرز- فیشر با روش پیشنهادی را حل و نتایج عددی با جواب‌های دقیق برای تأیید روش فعلی مقایسه شده اند.

۲.۴ روش اصلاح شده ETD

یکی از روش‌های عددی مورد بررسی در این رساله که برای گسسته‌سازی زمان نیز بکار رفته، روش ETD^{۲۴} است که شامل انتگرال دقیق معادلات و سپس تقریب انتگرال عبارات غیرخطی است

¹⁷Adomian decomposition method

¹⁸the tanh method

¹⁹Wazwaz

²⁰Mickens

²¹Kaya and Sayed

²²Ismail and Rabboh

²³restrictive Pade approximation

²⁴Exponential time differencing

[۷۴، ۷۵]. اصولاً این روش در دسته روش‌های صریح مرتبه اول قرار دارد. در خصوص پایداری این روش‌ها و جزئیات بیشتر به [۷۳] مراجعه نمایید. برای بهبود روش‌های ETD، روش‌های جدید و دقیق‌تر ETD را در نظر گرفته‌ایم که شامل طرح ETD با رانگ کوتاه مرتبه ۴ می‌شود. همانطور که کاکس و متیوز^{۲۵} (معرفی کنندگان این روش) تشخیص داده‌اند، مشکلات جدی با بردارهای ویژه نزدیک به صفر وجود دارد. اگر این مشکلات برطرف نشوند، طرح‌های ETD با خطای بسیاری مواجه می‌شوند. در رساله حاضر، از طرح‌های اصلاح شده ETD برای اجتناب از این مشکلات استفاده کرده‌ایم [۷۷].

روش‌های ETD مرتبه پایین برای اعمال در الکترودینامیک محاسباتی مناسب به نظر می‌رسند. براساس استدلال کاکس و متیوز [۷۵]، طرح‌های ETD عملکرد بهتری نسبت به طرح‌های ضمنی-صریح (IMEX) دارند که در آن عبارت‌های خطی بصورت غالب وجود دارد و همچنین بهتر از طرح‌های عامل انتگرال‌گیری (IF) عمل می‌کند که در آن عبارت‌های غیرخطی، غالب است. در معادله برگرز، هم جمله خطی و هم غیرخطی وجود دارد. برای حل این مسائل و به دست آوردن پاسخ‌های عددی کم‌خطا برای این مسائل، باید از تقریب‌های مرتبه بالا برای مکان و زمان استفاده کرد. اما چون در این مسائل ترکیب غیرخطی و سختی^{۲۶} داریم، تقریب‌های تا مرتبه دوم بیشتر استفاده نشده است. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیریم:

$$v_t = \mathcal{L}v + \mathcal{N}(v, t) \quad (۳.۴)$$

در این معادله، $\mathcal{L}$ و $\mathcal{N}$ عملگر خطی و غیرخطی را نشان می‌دهند. ابتدا برای تقریب جواب قسمت مکانی معادله PDE با روش‌های بیان شده در فصل قبل گسسته می‌شود و بنابراین سیستمی از ODE ها به دست می‌آید.

$$v_t = \mathbb{L}v + \mathbb{N}(v, t) \quad (۴.۴)$$

²⁵Cox and Matthews

²⁶stiff

ما با ضرب (۴.۴) در $e^{-\mathbb{L}t}$ شروع می‌کنیم. اصطلاح $e^{-\mathbb{L}t}$ فاکتور انتگرال گیری است. سپس از معادله در یک گام زمانی واحد به طول h از $t = t_n$ تا $t = t_{n+1} = t_n + h$ انتگرال می‌گیریم:

$$v_{n+1} = e^{\mathbb{L}h}v_n + e^{\mathbb{L}h} \int_0^h e^{-\mathbb{L}\zeta} \mathbb{N}(v(t_n + \zeta), t_n + \zeta) d\zeta. \quad (5.4)$$

در این معادله، مرتبه‌های مختلفی از طرح‌های ETD را می‌توان از نحوه تقریب انتگرال‌ها به دست آورد. یک دنباله از فرمول‌های بازگشتی ارائه شده است که تقریب‌های مرتبه بالاتری از نوع چند مرحله ای را ارائه می‌دهد. در [۷۵] یک فرمول مولد وجود دارد:

$$v_{n+1} = e^{\mathbb{L}h}v_n + h \sum_{m=0}^{s-1} \eta_m \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \mathbb{N}_{n-k} \quad (6.4)$$

که در آن s مرتبه روش را نشان می‌دهد. ضرایب η_m را می‌توان از رابطه بازگشتی زیر به دست آورد:

$$\mathbb{L}h\eta_0 = e^{\mathbb{L}h} - \mathbf{I}$$

$$\mathbb{L}h\eta_{m+1} + \mathbf{I} = \eta_m + \frac{1}{2}\eta_{m-1} + \frac{1}{3}\eta_{m-2} \dots + \frac{1}{m+1}\eta_0 \quad (7.4)$$

هر زمان از روش‌های رانگ کوتا در مجموعه روش‌های ETD استفاده کنیم این روش را ETDRK می‌نامیم. در این رساله از روش مرتبه چهارم استفاده کرده و آن را ETDRK^۴ می‌نامیم.

فرمول‌های مورد نیاز برای روش ETDRK^۴ بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} a_n &= e^{\mathbb{L}h/\mathfrak{Y}} v_n + \frac{(e^{\mathbb{L}h/\mathfrak{Y}} - \mathbf{I})}{\mathbb{L}} \mathbb{N}(v_n, t_n), \\ b_n &= e^{\mathbb{L}h/\mathfrak{Y}} v_n + \frac{(e^{\mathbb{L}h/\mathfrak{Y}} - \mathbf{I})}{\mathbb{L}} \mathbb{N}(a_n, t_n + h/\mathfrak{Y}), \\ c_n &= e^{\mathbb{L}h/\mathfrak{Y}} a_n + \frac{(e^{\mathbb{L}h/\mathfrak{Y}} - \mathbf{I})}{\mathbb{L}} (\mathfrak{Y} \mathbb{N}(b_n, t_n + h/\mathfrak{Y}) - \mathbb{N}(v_n, t_n)), \\ \varpi &= -\mathfrak{F} - \mathbb{L}h + e^{\mathbb{L}h} (\mathfrak{F} - \mathfrak{Y} \mathbb{L}h + (\mathbb{L}h)^{\mathfrak{Y}}) \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

$$\varrho = \mathfrak{Y} + \mathbb{L}h + e^{\mathbb{L}h} (-\mathfrak{Y} + \mathbb{L}h)$$

$$\varsigma = -\mathfrak{F} - \mathfrak{Y} \mathbb{L}h - (\mathbb{L}h)^{\mathfrak{Y}} + e^{\mathbb{L}h} (\mathfrak{F} - \mathbb{L}h)$$

$$v_{n+1} = e^{\mathbb{L}h} v_n$$

$$+ \frac{\varpi \mathbb{N}(v_n, t_n) + \mathfrak{Y} \varrho (\mathbb{N}(a_n, t_n + h/\mathfrak{Y}) + \mathbb{N}(b_n, t_n + h/\mathfrak{Y})) + \varsigma \mathbb{N}(c_n, t_n + h)}{h^{\mathfrak{Y}} \mathbb{L}^{\mathfrak{Y}}}$$

ضرایب در فرمول ETDRK^۴ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\varpi}{h^{\mathfrak{Y}} \mathbb{L}^{\mathfrak{Y}}}, \\ \beta &= \frac{\varrho}{h^{\mathfrak{Y}} \mathbb{L}^{\mathfrak{Y}}}, \\ \gamma &= \frac{\varsigma}{h^{\mathfrak{Y}} \mathbb{L}^{\mathfrak{Y}}}. \end{aligned} \quad (۹.۴)$$

در قسمت بعد معادله برگرز و برگرز فیشر به روش‌های بیان شده حل می‌شود و جواب‌های بسیار خوبی بدست آمده است.

۳.۴ حل معادله برگرز و برگرز فیشر به روش جدید

در این بخش سعی شده است معادلات برگرز-فیشر و برگرز با استفاده از روش‌های شرح داده شده در بخش قبلی حل شود. در قسمت اول توضیحاتی در مورد حل معادله برگرز و سپس در قسمت دوم توضیحاتی در مورد حل معادله برگرز-فیشر با روش مذکور ارائه شده است و سپس جواب‌های تقریبی بدست آمده با روش جدید را با جواب‌های تقریبی با روش‌های دیگر مقایسه کرده (و نیز

با جواب‌های دقیق مساله) و عملکرد خوب این روش در بدست آوردن جواب تقریبی برای این معادلات در این جدول‌ها و شکل‌های مقایسه‌ای کاملاً مشهود است.

۱.۳.۴ حل معادله برگرز

در این قسمت معادله برگرز را به روش بدون شبکه MLS و روش ETD حل می‌کنیم.

معادله برگرز یک بعدی را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0, \quad (10.4)$$

با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = h(x), \quad a \leq x \leq b,$$

و شرایط مرزی:

$$u(a, t) = f(x), \quad u(b, t) = g(x), \quad t \geq 0,$$

که در آن α یک ضریب ثابت و ν چسبندگی جنبشی است. در این قسمت، نحوه حل این معادله را براساس MLS و ETDRK^۴ توضیح می‌دهیم. برای حل این معادله، ابتدا از MLS برای تقریب مشتقات مکانی و سپس ETDRK^۴ برای تقریب مشتقات زمانی استفاده می‌کنیم.

دامنه اصلی مسئله Λ را به N قسمت تقسیم می‌کنیم بطوریکه فاصله بین گره‌ها ثابت باشد و برای هر نقطه یک همسایگی (Λ_s) که داخل دامنه اصلی است در نظر می‌گیریم. برای تقریب تابع u توسط روش MLS در Λ_s ، نقاط تصادفی گره‌های $x_i, i = 1, \dots, n$ را در نظر می‌گیریم. براساس (۱۰.۳) و (۱۲.۳) داریم:

$$u^h(x, t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{u}_i(t) \quad (11.4)$$

با جایگزینی در معادله، داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial (\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{u}_i(t))}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 (\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{u}_i(t))}{\partial x^2}. \quad (12.4)$$

توجه داشته باشید $\hat{u}_i(t) = \hat{u}(x_i, t)$ در معادله (۱۲.۴) بیانگر مقادیر آزمایشی گره‌هاست. از طرف دیگر، برای مشتق می‌توان توضیحات زیر را ارائه داد.

فرض کنید $C^q(\Lambda)$ فضای توابع که روی Λ به طور پیوسته q بار مشتق پذیر باشند. اگر $w_i(x) \in C^q(\Lambda)$ و $d_j(x) \in C^s(\Lambda)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ و $r = \min(q, s)$ مشتق k از $\mu_i(x)$ بصورت زیر است:

$$\mu_{i,k} = \sum_{j=1}^m [d_{j,k}(Q^{-1}S)_{ji} + d_j(Q^{-1}S_{,k} + Q_{,k}^{-1}S)_{ji}] \quad (13.4)$$

که در آن، مشتق معکوس ماتریس Q نسبت به x_k ، را با نماد $Q_k^{-1} = (Q^{-1})_k$ نشان می‌دهیم و با فرمول $Q_k^{-1} = -Q^{-1}Q_kQ^{-1}$ به دست می‌آید. که $(\square)_k$ نشان می‌دهد $\frac{\partial \square}{\partial x_k}$

اکنون با توجه به گسسته شدن مکان با استفاده از روش MLS رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\alpha u(x, t) \left(\sum_{j=1}^n \mu'_j(x) \hat{u}_j(t) \right) + \nu \left(\sum_{j=1}^n \mu''_j(x) \hat{u}_j(t) \right). \quad (14.4)$$

برای $x_i \in \Lambda$ دامنه کلی مساله را نشان می‌دهد:

$$\dot{u}_i(t) = -\alpha u_i(t) \left(\sum_{j=1}^n \mu'_j(x) \hat{u}_j(t) \right) + \nu \left(\sum_{j=1}^n \mu''_j(x) \hat{u}_j(t) \right). \quad (15.4)$$

توجه داشته باشید مشتق u مرتبط با زمان است و مشتق μ نیز در (۱۳.۴) تعریف شده است. زمانی

که فضای PDE را گسسته می‌کنیم، به یک سیستم از ODEها دسترسی خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{bmatrix} = -\alpha \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu'_1(x_1) & \mu'_2(x_1) & \cdots & \mu'_n(x_1) \\ \mu'_1(x_2) & \mu'_2(x_2) & \cdots & \mu'_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_1(x_n) & \mu'_2(x_n) & \cdots & \mu'_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix} + \nu \begin{bmatrix} \mu''_1(x_1) & \mu''_2(x_1) & \cdots & \mu''_n(x_1) \\ \mu''_1(x_2) & \mu''_2(x_2) & \cdots & \mu''_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu''_1(x_n) & \mu''_2(x_n) & \cdots & \mu''_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix}.$$

که در آن $\circ$ ضرب هادامارد^{۲۷} است. در این مرحله، برای تقریب مشتقات زمان با ETDRK،

²⁷Hadamard product

معادله را به دو قسمت خطی و غیرخطی تقسیم می‌کنیم و داریم :

$$\mathbb{L} = \nu \begin{bmatrix} \mu_1''(x_1) & \mu_2''(x_1) & \cdots & \mu_n''(x_1) \\ \mu_1''(x_2) & \mu_2''(x_2) & \cdots & \mu_n''(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1''(x_n) & \mu_2''(x_n) & \cdots & \mu_n''(x_n) \end{bmatrix}$$

و

$$\mathbb{N}(u, t) = -\alpha \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu_1'(x_1) & \mu_2'(x_1) & \cdots & \mu_n'(x_1) \\ \mu_1'(x_2) & \mu_2'(x_2) & \cdots & \mu_n'(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1'(x_n) & \mu_2'(x_n) & \cdots & \mu_n'(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix}$$

از ETD همانطور که قبلاً توصیف شد برای گسسته‌سازی زمان استفاده شده است. با فرض این

که دامنه اصلی را به n قسمت با فواصل مساوی تقسیم می‌کنیم، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $u(x_i, kt)$ مشخص

می‌شود و هدف ما محاسبه $u(x_i, (k+1)t)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ خواهد بود. معادله را در $e^{-\mathbb{L}t}$ ضرب

کرده و سپس معادله را در گام زمانی واحد با طول h انتگرال می‌گیریم:

$$u_i^{k+1} = e^{\mathbb{L}h} u_i^k + e^{\mathbb{L}h} \int_0^h e^{-\mathbb{L}\zeta} \left(\alpha u_i(t_k + \zeta) \sum_{j=1}^n \mu_j'(x_i) \hat{u}_j(t_k + \zeta) \right) d\zeta \quad (16.4)$$

که در آن، $u_i^k = u(x_i, t_k)$ و سپس آن را با استفاده از فرمول‌های ETDRK4 که در (8.4) بیان

شده‌اند حل می‌کنیم.

۲.۳.۴ حل معادله برگرز-فیشر

معادله یک بعدی برگرز-فیشر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1 - u^\delta) \quad a \leq x \leq b \quad t \geq 0 \quad (17.4)$$

که در آن α, β و δ پارامتر هستند. در این بخش، همانند بخش قبلی به حل معادله براساس ترکیب

روش‌های MLS و ETDRK4 می‌پردازیم. همانطور که در بخش قبلی توضیح داده شد، ابتدا از

MLS برای تقریب مشتقات مکانی و سپس از ETDRK4 برای تقریب مشتقات زمانی استفاده

می‌کنیم. دامنه اصلی مسئله Λ را به N قسمت تقسیم می‌کنیم تا فاصله بین گره‌ها ثابت باشد و برای

هر نقطه یک همسایگی Λ_s که داخل دامنه اصلی است در نظر می‌گیریم. برای تقریب تابع u توسط MLS در Λ_s روی نقاط تصادفی از گره‌های $x_i, i = 1, \dots, n$ براساس (۱۱.۴) و جایگزینی در معادله برگرز-فیشر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u^\delta \frac{\partial (\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{u}_i(t))}{\partial x} = \frac{\partial^2 (\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{u}_i(t))}{\partial x^2} + \beta (\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{u}_i(t)) (1 - u^\delta) \quad (18.4)$$

توجه داشته باشید $\hat{u}_i(t) = \hat{u}(x_i, t)$ در (۱۸.۴) بیانگر مقادیر آزمایشی گره است. اکنون، با توجه به گسسته‌سازی مکانی و استفاده از روش MLS برای $x_i \in \Lambda$ داریم:

$$\dot{u}_i(t) = -\alpha u_i^\delta(t) \left(\sum_{j=1}^n \mu'_j(x) \hat{u}_j(t) \right) + \sum_{j=1}^n \mu''_j(x) \hat{u}_j(t) + \beta \left(\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{u}_i(t) \right) (1 - u_i^\delta(t)). \quad (19.4)$$

توجه داشته باشید مشتق u مرتبط با زمان است و مشتق μ در (۱۳.۴) تعریف شده است. زمانی که قسمت مکانی PDE را گسسته‌سازی می‌کنیم، سیستمی از ODEها را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{u}_n(t) \end{bmatrix} &= -\alpha \begin{bmatrix} u_1^\delta(t) \\ u_2^\delta(t) \\ \vdots \\ u_n^\delta(t) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu'_1(x_1) & \mu'_2(x_1) & \cdots & \mu'_n(x_1) \\ \mu'_1(x_2) & \mu'_2(x_2) & \cdots & \mu'_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_1(x_n) & \mu'_2(x_n) & \cdots & \mu'_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mu''_1(x_1) & \mu''_2(x_1) & \cdots & \mu''_n(x_1) \\ \mu''_1(x_2) & \mu''_2(x_2) & \cdots & \mu''_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu''_1(x_n) & \mu''_2(x_n) & \cdots & \mu''_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix} \\ &+ \beta \begin{bmatrix} \mu_1(x_1) & \mu_2(x_1) & \cdots & \mu_n(x_1) \\ \mu_1(x_2) & \mu_2(x_2) & \cdots & \mu_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1(x_n) & \mu_2(x_n) & \cdots & \mu_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} u_1^{\delta+1}(t) \\ u_2^{\delta+1}(t) \\ \vdots \\ u_n^{\delta+1}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

که در آن، $\circ$ ضرب هادامار است. در این مرحله، برای تقریب مشتقات زمانی توسط ETDRK۴

باید معادله را به دو بخش خطی و غیرخطی تقسیم کنیم:

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} \mu_1''(x_1) & \mu_2''(x_1) & \cdots & \mu_n''(x_1) \\ \mu_1''(x_2) & \mu_2''(x_2) & \cdots & \mu_n''(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1''(x_n) & \mu_2''(x_n) & \cdots & \mu_n''(x_n) \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} \mathbb{N}(u, t) = & -\alpha \begin{bmatrix} u_1^\delta(t) \\ u_2^\delta(t) \\ \vdots \\ u_n^\delta(t) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu_1'(x_1) & \mu_2'(x_1) & \cdots & \mu_n'(x_1) \\ \mu_1'(x_2) & \mu_2'(x_2) & \cdots & \mu_n'(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1'(x_n) & \mu_2'(x_n) & \cdots & \mu_n'(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix} \\ & + \beta \begin{bmatrix} \mu_1(x_1) & \mu_2(x_1) & \cdots & \mu_n(x_1) \\ \mu_1(x_2) & \mu_2(x_2) & \cdots & \mu_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1(x_n) & \mu_2(x_n) & \cdots & \mu_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1(t) \\ \hat{u}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{u}_n(t) \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} u_1^{\delta+1}(t) \\ u_2^{\delta+1}(t) \\ \vdots \\ u_n^{\delta+1}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

از ETD همانطور که قبلاً توصیف شد برای گسسته‌سازی زمان استفاده شده است. با فرض بر

این که دامنه اصلی را به N قسمت با فواصل مساوی تقسیم می‌کنیم، اگر فرض کنیم که $u(x_i, kt), i = 1, 2, \dots, N$

مشخص باشند آنگاه هدف ما محاسبه $u(x_i, (k+1)t), i = 1, 2, \dots, N$ خواهد بود.

معادله را در $e^{-\mathbb{L}t}$ ضرب کرده و سپس معادله را در گام زمانی واحد با طول h انتگرال می‌گیریم:

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} = & e^{\mathbb{L}h} u_i^k + e^{\mathbb{L}h} \int_0^h e^{-\mathbb{L}\zeta} \\ & \left(\alpha u_i^\delta(t_k + \zeta) \sum_{j=1}^n \mu_j'(x_i) \hat{u}_j(t_k + \zeta) + \beta \sum_{j=1}^n \mu_j(x_i) \hat{u}_j(t_k + \zeta) - \beta u_i^{\delta+1}(t_k + \zeta) \right) d\zeta \end{aligned} \quad (20.4)$$

که در آن، $u_i^k = u(x_i, t_k)$ و سپس آن را با استفاده از فرمول‌های ETD $\mathcal{RK}^4$ که در (۸.۴) بیان شده‌اند حل می‌کنیم.

مشکل استفاده از روش ETD $\mathcal{RK}^4$ برای این معادلات (برگزر و برگرز-فیش) این است که در برخی از نقاط ناپایدار می‌شود. یک راه برای حل این مشکل استفاده از بسط تیلور با نقاط برش برای مقادیر ویژه کوچک است، به‌طوری که اگر ماتریس یک عملگر قطری باشد، بسط تیلور برای نقاط قطری زیر نقطه برش استفاده می‌شود. اما یک مشکل جدی این روش عدم امکان تعمیم آن به

مسائل غیرقطری است. یک روش دیگر که می تواند برای حل این مشکل بکار رود انتگرال کانتور در آنالیز مختلط است. در حقیقت، یک تابع برای ارزیابی داریم که دارای یک نقطه منفرد و در بقیه جاها تحلیلی است. در نزدیکی این نقطه منفرد، تابع دارای خطای عددی خواهد بود. راه حل پیشنهادی شامل استفاده از انتگرال کانتور روی یک صفحه مختلط است که شامل z بوده و $z = 0$ بوسیله رابطه زیر جدا می شود:

$$f(z) = (2\pi i)^{(-1)} \int_{\Gamma} f(s)(s-z)^{(-1)} ds. \quad (21.4)$$

اکنون بجای اسکالر z از ماتریس $\mathbb{L}$ استفاده کرده و همان روش را دوباره اعمال می کنیم که در آن تنها عبارت $1/(s-z)$ تبدیل به ماتریس $(sI - \mathbb{L})^{-1}$ خواهد بود:

$$f(\mathbb{L}) = (2\pi i)^{(-1)} \int_{\Gamma} f(s)(sI - \mathbb{L})^{-1} ds. \quad (22.4)$$

که در آن، انتگرال کانتور باید شامل مقادیر ویژه $\mathbb{L}$ باشد. حاصل انتگرال های کانتور برای توابع در صفحه مختلط با استفاده از قاعده دوزنقه ای به دست می آید که بصورت نمایی همگرا می شود. ناحیه انتگرال گیری کانتور را می توان به عنوان یک دایره در نظر گرفت و ما معمولاً ۳۲ نقطه را با فاصله مساوی در این دایره در نظر می گیریم. انتخاب های بسیار متفاوتی برای ناحیه انتگرال گیری کانتور وجود دارند که به خوبی عمل می کنند اما مساله مهم این است که مقادیر ویژه داخل Γ باشند. هنگامی که $\mathbb{L}$ حقیقی است، تنها از نیمه بالایی دایره برای ناحیه کانتور استفاده می کنیم که مرکز آن یک محور حقیقی است و سپس قسمت حقیقی جواب را در نظر می گیریم. تقریب انتگرال کانتور را می توان با میانگین $f(s)$ روی Γ به دست آورد، به این ترتیب که میانگین نقاط متساوی الفاصله را در Γ بدست می آوریم و یا مجدداً تنها نیمه بالایی Γ را در نظر گرفته و تنها بخش حقیقی را در نظر می گیریم. در جدول ۱.۴، ضرایب داخل پرانتزها را توسط بسط تیلور با مرتبه ۵ و انتگرال کانتور محاسبه کرده ایم و سپس خطای آن ها را در مقایسه با پاسخ واقعی نشان داده ایم.

همانطور که در جدول نشان داده شده است، محاسبه ضرایب داخل پرانتز (یعنی α, β, γ در

جدول ۱.۴: محاسبه $\alpha(z), \beta(z), \gamma(z)$ با انتگرال کانتور با میانگین بیش از ۳۲ نقطه روی نیم دایره بالای صفحه و توسط مرتبه ۵ تیلور. همانطور که مشخص است، انتگرال کانتور دقت بالایی برای تمامی مقادیر z دارد.

ضرایب	z	خطا برای انتگرال کانفور	خطا برای تیلور مرتبه ۵
α	۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۱	۰٫۰۰۰۱۰۴۷۷۸۳۹۰۰۲۲۱۸
	$1/e$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۶۳۶۷۵۲۲۱۱۸
	$1/e^2$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۳	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۱۳۸۰۴۴۰
	$1/e^3$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۸۶	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۷۴۷۱۱۱
	$1/e^4$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۰۵۷۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۲۴۱۷۱
β	۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳	۰٫۰۰۰۰۱۷۰۵۵۲۴۹۳۳۳۵
	$1/e$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۱۰۵۲۵۷۴۷۳۷
	$1/e^2$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۸۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۸۷۶۴۰۸۱
	$1/e^3$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱۳۷۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۷۱۸۷۱
	$1/e^4$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۷۱۰۷	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۶۷۹۹۱
γ	۱	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵	۰٫۰۰۰۰۱۱۴۸۳۲۰۸۳۱۸۰
	$1/e$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۷۰۴۱۶۹۷۰۰
	$1/e^2$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۴	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۴۵۸۹۹۶۱۱
	$1/e^3$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۲۳۱۲	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۳۲۸۷۰۱
	$1/e^4$	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۷۹۹۵	۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۵۸۲۰۰۱

(۹.۴) با روش انتگرال کانتور خطای بسیار کمتری دارد. در قسمت بعد مثال‌هایی با این روش جدید حل شده و پاسخ‌های قابل قبولی به دست می‌آید.

۴.۴ پایداری روش

همانطور که توضیح داده شد در این رساله از روش جدیدی برای حل معادلات برگرز-فیش و برگرز استفاده شده است که ترکیبی از روش‌های ETDRK و MLS می‌باشد. برای بررسی پایداری روش، باید ثبات دو روش ذکر شده را بررسی کنیم. پایداری سیستم خطی به طور موثر به شرایط ماتریس ضرایب وابسته است. شرط ماتریس ضرایب را می‌توان با استفاده از عدد شرط محاسبه کرد.

قضیه ۱.۴.۴. اگر ماتریس $Q(x)$ را به نحوی در نظر بگیریم که به وسیله پایه $D(x)$ (یعنی $Q(x) = D^T W D$) تولید شده باشد، آنگاه یک عدد کران دار و قابل شمارش $C_d(x, n, m)$ مستقل از h

وجود دارد بطوریکه دترمینان $Q(x)$ به صورت:

$$\det(Q(x)) = C_d(x, n, m) h^{2 \sum_{i=1}^m i}, \quad \forall x \in \Lambda. \quad (23.4)$$

بعلاوه، یک ضریب ثابت $h_0 > 0$ وجود دارد، که برای $h \leq h_0$ یک عدد کران دار و قابل شمارش $C_c(x, n, m)$ مستقل از h داریم بطوریکه نرم ۲ عدد شرط ماتریس $Q(x)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$\text{cond}(Q(x)) = C_c(x, n, m) h^{-2m}, \quad \forall x \in \Lambda. \quad (24.4)$$

□

برهان. [۷۸]

براساس (۲۳.۴) داریم:

$$\det(Q(x)) \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad h \rightarrow 0.$$

از بحث بالا نتیجه می‌گیریم که هرگاه یک فاصله گره h به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، ماتریس $Q(x)$ به دست آمده در تقریب MLS به طور تقریبی یک ماتریس منفرد است که باعث افزایش خطاها می‌شود. به عبارت دیگر، زمانی که ماتریس $Q(x)$ دارای شرایط بد یا منفرد باشد، پاسخ‌های به دست آمده برای بردار ضرایب $q(x)$ دارای خطای زیادی است و بنابراین تابع شکل $\mu_i(x)$ دارای خطای گرد کردن بزرگی خواهد شد. با توجه به معادله (۲۴.۴)، به این نتیجه می‌رسیم که عدد شرط $Q(x)$ ارتباطی معکوس با فاکتور h^{2m} دارد.

به عبارت دیگر، با کاهش h^{2m} ، عدد شرط افزایش می‌یابد و در نتیجه خطای گرد کردن نیز افزایش خواهد یافت. مسلماً با افزایش عدد شرط ماتریس، درجه بدوضع ماتریس تا جایی افزایش می‌یابد که برای ماتریس‌های منفرد وضعیت بدتری ایجاد شده و عدد شرط به سمت بی‌نهایت پیش خواهد رفت. بنابراین نتیجه می‌گیریم که ناپایداری روش MLS به h و m بستگی دارد به طوری که با کاهش بیش از حد مقدار h و افزایش بیش از حد مقدار m ، ناپایداری روش MLS افزایش می‌یابد. بنابراین، روش MLS زمانی که ماتریس Q در (۱۰.۳) نامنفرد است به راه حل‌های خوب

و کم خطا برای حل مسائل دست می یابد و این زمانی اتفاق می افتد که رتبه D برابر با m باشد. برای اینکه مشکل ناپایداری نداشته باشیم و روش MLS یک روش خوش تعریف باشد، شرط لازم این است که حداقل m تابع وزن ناصفر (یعنی $n > m$) برای هر نقطه $x \in \Lambda$ وجود داشته باشد و نقاط در Λ_s از یک الگوی منظم و خاص پیروی نکنند.

گزاره ۲.۴.۴. اعداد مثبت c_1 و c_2 مستقل از h وجود دارد به طوری که $m \leq c_1 \leq n \leq c_2$

گزاره ۳.۴.۴. رتبه D داده شده توسط (۹.۳) برابر با m است.

گزاره ۴.۴.۴. اعداد کراندار $C_{w_i}(x)$ مستقل از h وجود دارد، بطوری که $d^\nu w_i(x) = C_{w_i}(x) h^{-|\nu|}$ و در آن $|\nu| \leq \gamma$.

توجه داشته باشید که تابع وزن، ν بار مشتق پذیر پیوسته است، یعنی $w_i(x) \in C^\nu(\Lambda)$.

لم ۵.۴.۴. اعداد کراندار $c_{ik}(x)$ مستقل از h وجود دارند، بطوری که

$$[Q^{-1}(x)]_{ik} = c_{ik}(x) h^{-i-k}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m.$$

لم ۶.۴.۴. برای هر $x \in \Lambda$ ، $C_{\mu_i}(\lambda, x)$ مستقل از h وجود دارد، بطوری که

$$d^\lambda \mu_i(x) = C_{\mu_i}(\lambda, x) h^{-|\lambda|}, \quad 0 \leq |\lambda| \leq \nu, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

بعلاوه، ضرایب ثابت C_{μ_1} و C_{μ_2} مستقل از h وجود دارند، بطوری که

$$C_{\mu_1} h^{-|\lambda|} \leq \|d^\lambda \mu_i(x)\|_{L^\infty(\Lambda)} \leq C_{\mu_2} h^{-|\lambda|}, \quad 0 \leq |\lambda| \leq \gamma, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

برهان. برای اثبات و توضیحات بیشتر برای تمام گزاره ها و لم ها به [۷۸] مراجعه شود.

□

برای $0 \leq m$ و $n \in [1, \infty]$ فرض می کنیم $W^{m,n}(\Lambda)$ و $W^{m,2}(\Lambda) \triangleq H^m(\Lambda)$ فضای

سوبولوف^{۲۸} هستند [۹۰، ۹۱].

²⁸Sobolev space

قضیه ۷.۴.۴. فرض کنید $v^h(\mathbf{x})$ تقریب MLS از $v(\mathbf{x})$ و $v(\mathbf{x}) \in W^{p+1,q}(\Lambda)$ با $p+1 > n/q$

باشد، آنگاه ضریب ثابت C بصورت مستقل از h وجود خواهد داشت، بطوری که

$$\|v(\mathbf{x}) - v^h(\mathbf{x})\|_{W^{k,q}(\Lambda)} \leq Ch^{\tilde{p}-k} \|v(\mathbf{x})\|_{W^{\tilde{p},q}(\Lambda)},$$

$$k = 0, 1, \dots, \min\{\tilde{p}, \gamma\}, \quad \tilde{p} = \min\{p+1, m+1\}.$$

زمانی که $v(\mathbf{x}) \in W^{m+1,q}(\Lambda)$ باشد، داریم:

$$\|v(\mathbf{x}) - v^h(\mathbf{x})\|_{H^k(\Lambda)} \leq Ch^{m+1-k} \|v(\mathbf{x})\|_{H^{m+1}(\Lambda)},$$

$$0 \leq k \leq \min\{m+1, \gamma\}.$$

□

برهان. به [۷۸] مراجعه کنید.

اکنون پایداری طرح $ETDRK_4$ را بررسی می‌کنیم. سیستم ODE را توسط MLS ساختیم و پایداری این روش را بررسی کردیم. بنابراین پایداری روشی را که برای حل این سیستم استفاده شده

، یعنی $ETDRK_4$ بررسی می‌کنیم. سیستم:

$$\frac{dv(t)}{dt} = Lv(t) + N(v(t)) \quad (25.4)$$

که در آن $N(v(t))$ قسمت غیر خطی است. ما فرض می‌کنیم که یک نقطه ثابت v_0 وجود دارد به طوری که $Lv_0 + N(v_0) = 0$. با خطی سازی در مورد این نقطه ثابت، خواهیم داشت:

$$\frac{dv(t)}{dt} = Lv(t) + \eta v(t) \quad (26.4)$$

که در آن $v(t)$ بیانگر آشفتگی از u_0 بوده و $\eta = N'(v_0)$ ماتریس قطری را نشان می‌دهد که مقادیر ویژه N در قطر آن قرار می‌گیرند. برای پایداری، باید $\text{Re}(L + \eta) < 0$ برای تمامی η ها برقرار باشد. با بکار بردن روش $ETDRK_4$ برای مساله خطی شده (۲۶.۴) به یک رابطه بازگشتی منجر می‌شود:

$$r = \frac{v_{n+1}}{v_n} = L_0 + L_1 x + L_2 x^2 + L_3 x^3 + L_4 x^4, \quad (27.4)$$

که در آن

$$L_0 = e^y$$

$$\begin{aligned} L_1 &= -\frac{4}{y^3} + \frac{8e^{y/2}}{y^3} - \frac{8e^{3y/2}}{y^3} + \frac{4e^{2y}}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{4e^{y/2}}{y^2} - \frac{6e^y}{y^2} + \frac{4e^{3y/2}}{y^2} - \frac{e^{2y}}{y^2} \\ L_2 &= -\frac{8}{y^4} + \frac{16e^{y/2}}{y^4} - \frac{16e^{3y/2}}{y^4} + \frac{8e^{2y}}{y^4} - \frac{5}{y^3} + \frac{12e^{y/2}}{y^3} - \frac{10e^y}{y^3} + \frac{4e^{3y/2}}{y^3} \\ &\quad - \frac{e^{2y}}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{4e^{y/2}}{y^2} - \frac{e^{y/2}}{y^2} \\ L_3 &= \frac{4}{y^5} - \frac{16e^{y/2}}{y^5} + \frac{16e^y}{y^5} + \frac{8e^{3y/2}}{y^5} - \frac{20e^{2y}}{y^5} + \frac{8e^{5y/2}}{y^5} + \frac{2}{y^4} - \frac{10e^{y/2}}{y^4} \\ &\quad + \frac{16e^y}{y^4} - \frac{12e^{3y/2}}{y^4} + \frac{6e^{2y}}{y^4} - \frac{2e^{5y/2}}{y^4} - \frac{2e^{y/2}}{y^3} + \frac{4e^y}{y^3} - \frac{2e^{3y/2}}{y^3} \\ L_4 &= \frac{8}{y^6} - \frac{24e^{y/2}}{y^6} + \frac{16e^y}{y^6} + \frac{16e^{3y/2}}{y^6} - \frac{24e^{2y}}{y^6} + \frac{8e^{5y/2}}{y^6} + \frac{6}{y^5} - \frac{18e^{y/2}}{y^5} \\ &\quad + \frac{20e^y}{y^5} - \frac{12e^{3y/2}}{y^5} + \frac{6e^{2y}}{y^5} - \frac{2e^{5y/2}}{y^5} + \frac{4}{y^4} - \frac{6e^{y/2}}{y^4} + \frac{6e^y}{y^4} - \frac{2e^{3y/2}}{y^4}, \end{aligned}$$

که $x = \eta h, y = Lh$ خواهد بود. فاکتور بسط برای ETDRK₄ بصورت $r(x, y)$ برای $y > 0$

تعریف می شود. اگر $y = 0$ باشد، فاکتور بسط بصورت $1 - x + x^2/2 - x^3/6 + x^4/24$ خواهد

بود که پایداری ETDRK₄ در $y = 0$ با مرتبه چهارم کلاسیک در روش رانگ- کوتا متناظر است.

از طرف دیگر با توجه به $\lim_{x,y \rightarrow 0} \partial_x r(x, y) = -1$ و $\lim_{x,y \rightarrow 0} \partial_y r(x, y) = -1$ ، قدر مطلق

فاکتور بسط بصورت $|r(x, y)| \leq 1$ خواهد آمد. برای اثبات و توضیحات بیشتر به [۹۲-۹۴]

مراجعه شود.

۵.۴ مثال‌های عددی

روش مورد استفاده در این رساله را در قسمت‌های قبل به تفصیل شرح داده‌ایم. در این قسمت به حل چند مثال می‌پردازیم و جواب عددی آنها را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۴. در این مثال، معادله برگرز (۱.۴) را با $\alpha = 1$ در نظر می‌گیریم [۷۹]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0$$

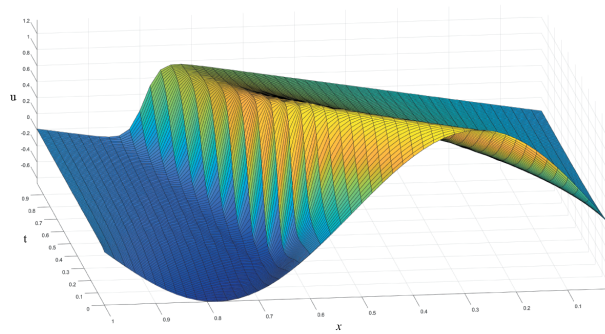
با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) + \sin(\pi x)/2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

و شرایط مرزی:

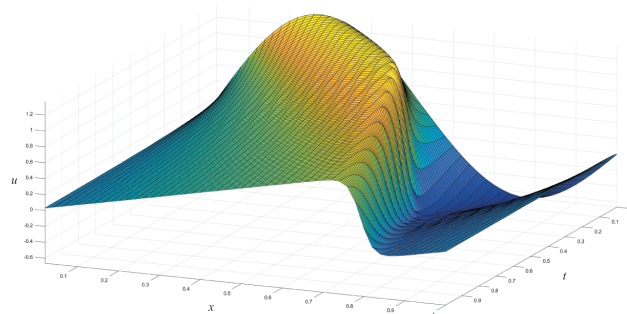
$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

در این قسمت با روشی که در این رساله توضیح داده شده است، پاسخ این معادله را به دست می‌آوریم. در تصاویر ۱.۴، ۲.۴، ۳.۴، حل این معادله را می‌توان با $N = 40$ و با $\nu = 1$ ، $\nu = 0.1$ ، $\nu = 0.01$ مشاهده کرد. تصاویر a و b رفتار فیزیکی پاسخ را به صورت سه بعدی و تصویر c رفتار فیزیکی پاسخ را به صورت ۲ بعدی نشان می‌دهد.

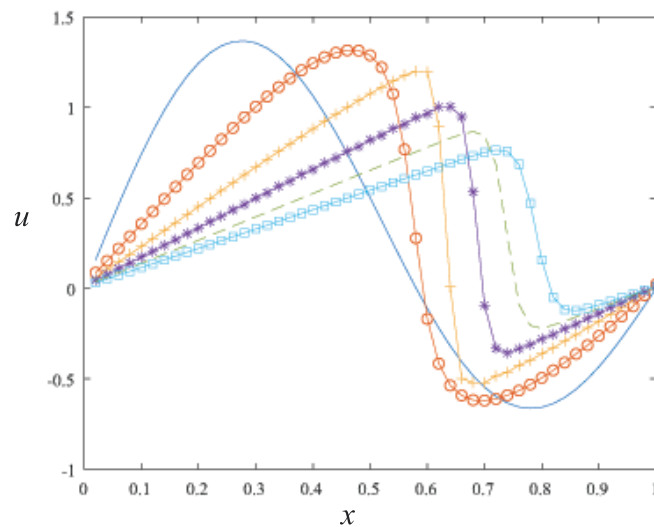


[a]

[b]



[c]



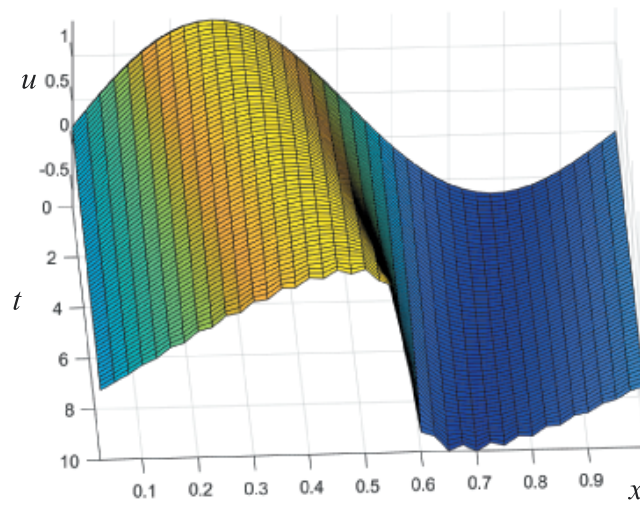
شکل ۱.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۱.۵.۴ با $N = 4$ و $\nu = 1$.
(c)، جواب در $t = 0, \pi/2, \pi/4, \pi/6, \pi/8, 1$ به ترتیب با $\circ, +, *, -, \square$

مثال ۲.۵.۴. در این مثال، معادله برگرز (۱.۴) را با $\alpha = 1$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0$$

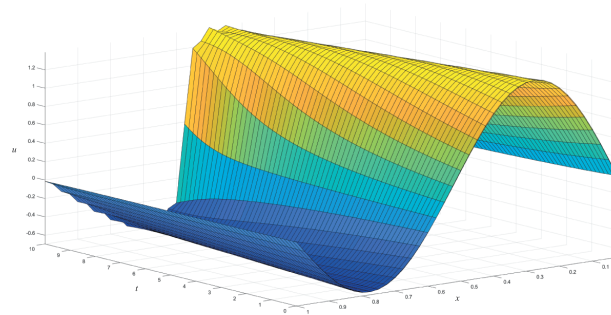
با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

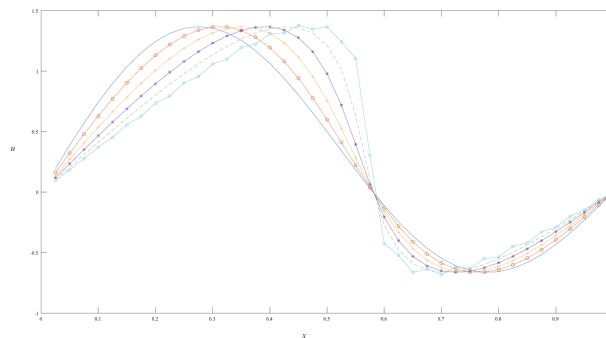


[a]

[b]



[c]



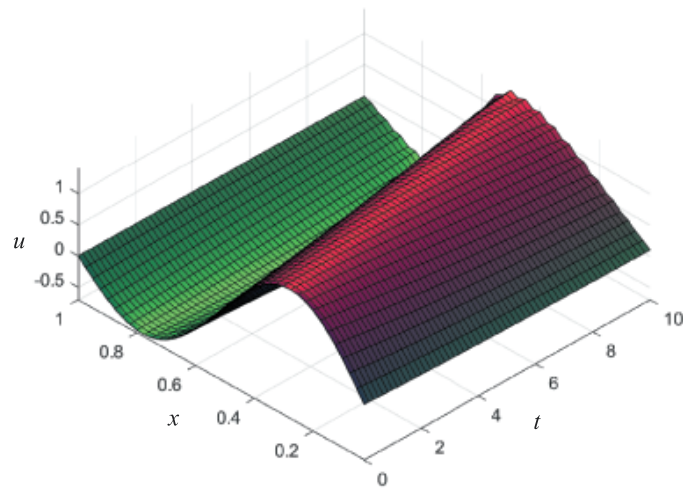
شکل ۲.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۱.۵.۴ با $N = 40$ و $\nu = 0.1$ و $t = 10$.
(c) پاسخ در $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ به ترتیب با $-, o, +, *, --, \square$.

و شرایط مرزی:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

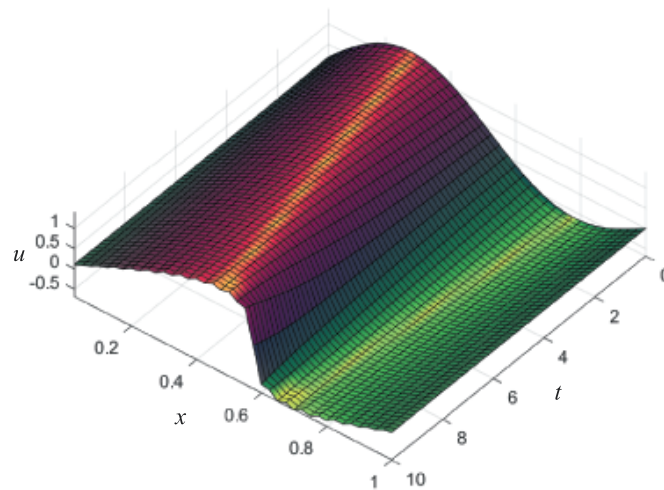
جواب دقیق معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \sin(n \pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n \pi x)}$$

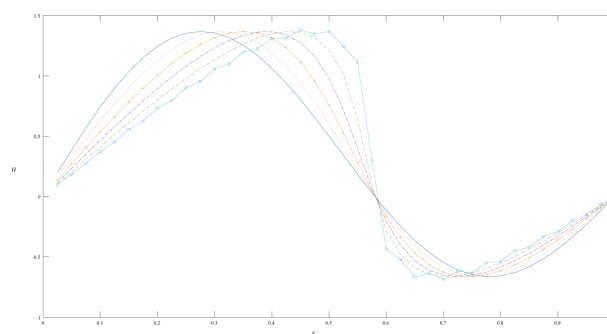


[a]

[b]



[c]



شکل ۳.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۱.۵.۴ $N = 40$ و $\nu = 10^{-6}$ و $t = 10$.
(c) پاسخ در $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ به ترتیب با $-, o, +, *, --, \square$.

که در آن

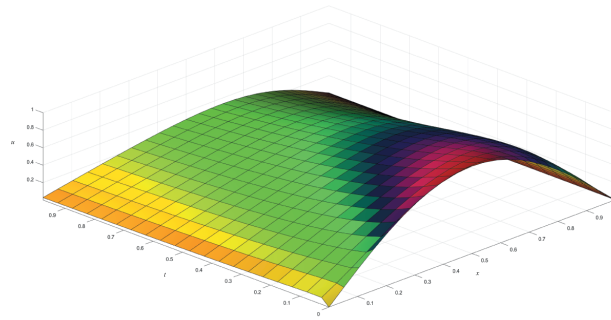
$$A_0 = \int_{i=0}^1 \exp \left(\frac{-1}{2\pi\nu} (1 - \cos(\pi x)) \right) dx,$$

$$A_n = 2 \int_{i=0}^1 \exp\left(\frac{-1}{2\pi\nu}(1 - \cos(\pi x))\right) \cos(n\pi x) dx,$$

جوابهای عددی این معادله برای $\nu = 0.1, 0.01, \nu = 0.001$ با $N = 60$ در جدول ۲.۴ و تصاویر ۴.۴، ۵.۴ و ۶.۴ ارائه شده است. ما نتایج حل این معادله را با استفاده از روش پیشنهادی در این رساله با نتایج به دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم و همانطور که در جدول ۲.۴ دیده می‌شود، نتایج بهتری به دست آمده است. تصاویر ۴.۴، ۵.۴ و ۶.۴ رفتار فیزیکی پاسخ را تا $t = 1$ نشان می‌دهد (در a و b سه بعدی و در c رفتار فیزیکی پاسخ را به صورت ۲ بعدی نشان می‌دهد).

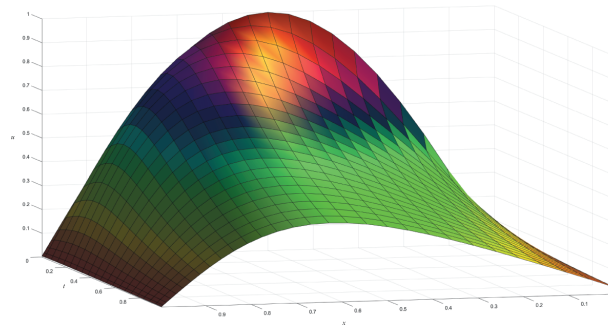
جدول ۲.۴: مقایسه جواب مثال ۲.۵.۴ به روش ارائه شده با پاسخ دقیق و روش‌های دیگر. $\nu = 0.01$

x	t	$[A_0] \Delta t = 0.01$	$[A_5] \Delta t = 0.0001$	$[A_2] \Delta t = 0.0001$	$[A_1] \Delta t = 0.0001$	جواب دقیق $\Delta t = 1/20$	جواب دقیق
۰.۲۵	۰.۴	۰.۳۴۲۲۹	۰.۳۴۱۹۳	۰.۳۴۱۸۴	۰.۳۴۱۹۱	۰.۳۴۱۹۱	۰.۳۴۱۹۱
	۰.۶	۰.۲۶۹۰۲	۰.۲۶۸۹۸	۰.۲۶۸۹۱	۰.۲۶۸۹۶	۰.۲۶۸۹۷	۰.۲۶۸۹۶
	۰.۸		۰.۲۲۱۴۹	۰.۲۲۱۴۳	۰.۲۲۱۴۸	۰.۲۲۱۴۸	۰.۲۲۱۴۸
	۱	۰.۱۸۸۱۷	۰.۱۸۸۲۰	۰.۱۸۸۱۵	۰.۱۸۸۱۹	۰.۱۸۸۱۹	۰.۱۸۸۱۹
۰.۵	۰.۴	۰.۶۶۷۹۷	۰.۶۶۰۷۶	۰.۶۶۰۶۰	۰.۶۶۰۷۱	۰.۶۶۰۷۱	۰.۶۶۰۷۱
	۰.۶	۰.۵۳۲۱۱	۰.۵۲۹۴۵	۰.۵۲۹۳۱	۰.۵۲۹۴۱	۰.۵۲۹۴۲	۰.۵۲۹۴۲
	۰.۸		۰.۴۳۹۱۶	۰.۴۳۹۰۵	۰.۴۳۹۱۳	۰.۴۳۹۱۴	۰.۴۳۹۱۴
	۱	۰.۳۷۵۰۰	۰.۳۷۴۴۳	۰.۳۷۴۳۶	۰.۳۷۴۴۲	۰.۳۷۴۴۲	۰.۳۷۴۴۲
۰.۷۵	۰.۴	۰.۹۳۶۸۰	۰.۹۱۰۴۶	۰.۹۱۰۲۶	۰.۹۱۰۲۶	۰.۹۱۰۲۵	۰.۹۱۰۲۶
	۰.۶	۰.۷۷۷۲۴	۰.۷۶۷۳۳	۰.۷۶۷۱۹	۰.۷۶۷۲۴	۰.۷۶۷۲۳	۰.۷۶۷۲۴
	۰.۸		۰.۶۴۷۴۴	۰.۶۴۷۴۵	۰.۶۴۷۳۹	۰.۶۴۷۴۴	۰.۶۴۷۴۰
	۱	۰.۵۵۸۳۳	۰.۵۵۶۰۸	۰.۵۵۶۰۸	۰.۵۵۶۰۵	۰.۵۵۶۰۵	۰.۵۵۶۰۵

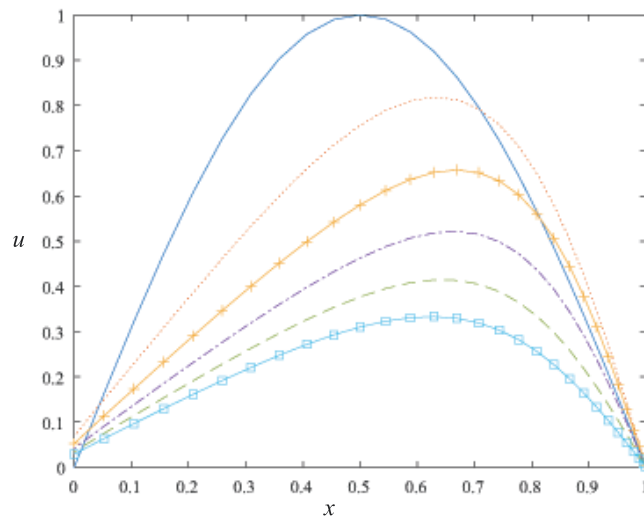


[a]

[b]



[c]



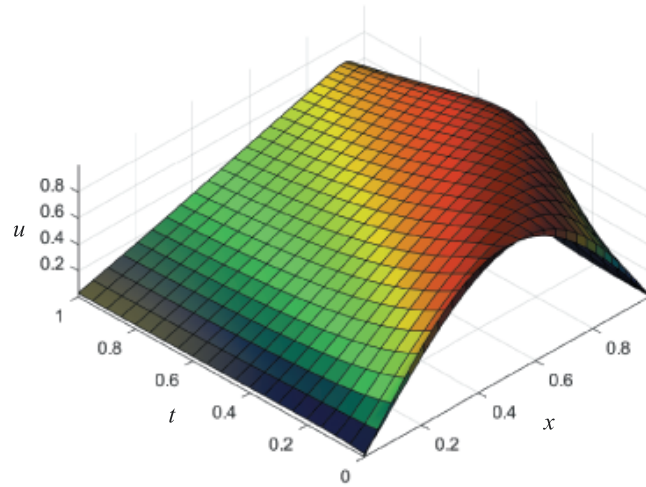
شکل ۴.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۲.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.1$ و $t = 1$.
(c) پاسخ در $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ به ترتیب با $-, o, +, *, --, \square$.

مثال ۳.۵.۴. در این مثال، معادله برگرز (۱.۴) را با $\alpha = 1$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0$$

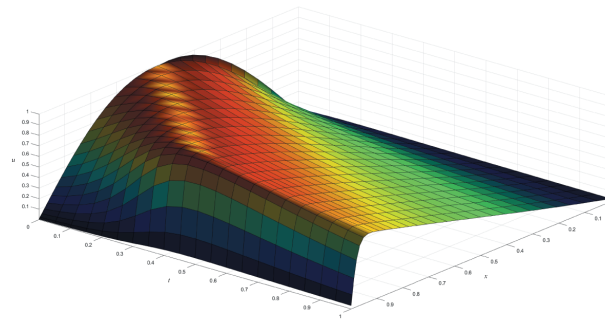
با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = 4x(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

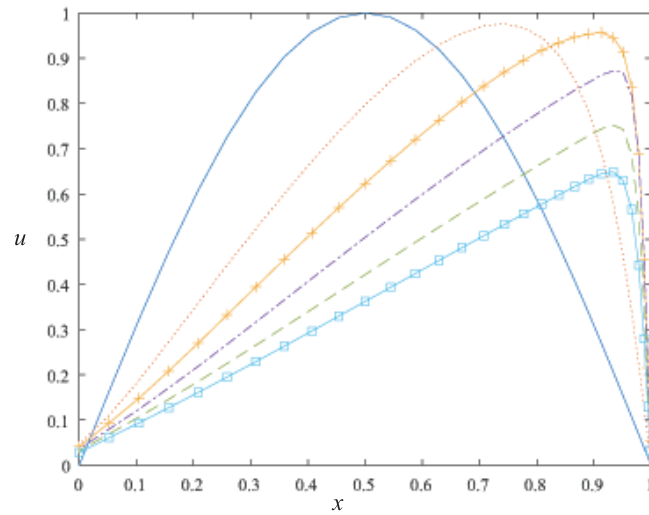


[a]

[b]



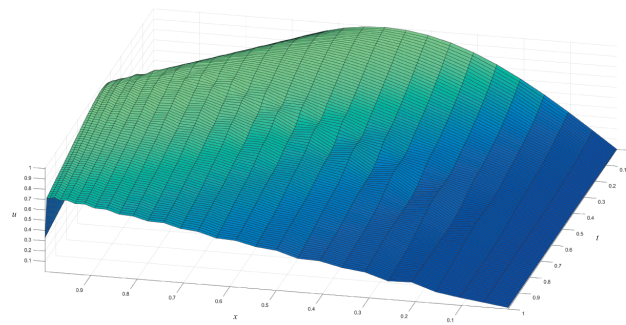
[c]



شکل ۵.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۲.۵.۴ $N = 60$ و $\nu = 10^{-6}$ و $t = 1$.
(c) پاسخ در $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ به ترتیب با $-, o, +, *, --, \square$.

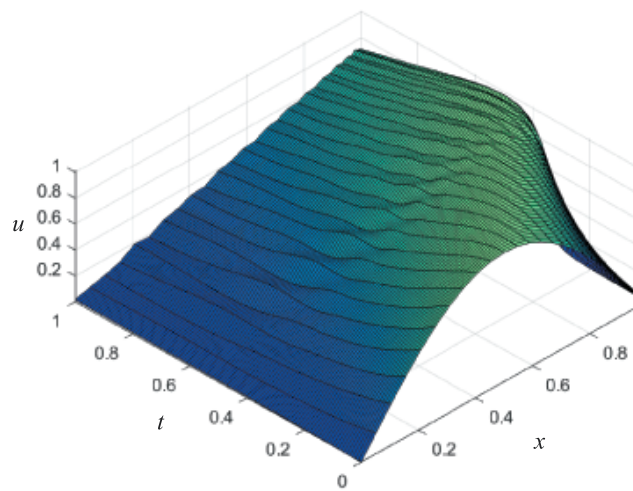
و شرایط مرزی:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

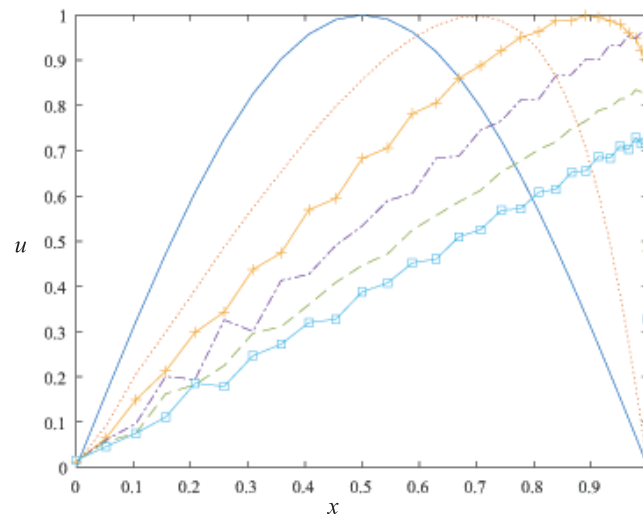


[a]

[b]



[c]



شکل ۶.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی جواب مثال ۲.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.01$ و $t = 1$.
(c) پاسخ در $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ به ترتیب با $-, o, +, *, --, \square$.

جواب دقیق معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \sin(n \pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-n^2 \pi^2 \nu t) \cos(n \pi x)}$$

که در آن

$$A_0 = \int_{i=0}^1 \exp\left(\frac{-1}{3\nu}(3x^2 - 2x^3)\right) dx,$$

$$A_n = 2 \int_{i=0}^1 \exp\left(\frac{-1}{2\pi\nu}(3x^2 - 2x^3)\right) \cos(n\pi x) dx,$$

جواب‌های عددی این معادله برای $\nu = 0.1, 0.01, 0.001$ با $N = 60$ در جدول ۳.۴ و تصاویر ۷.۴ و ۸.۴ و ۹.۴ ارائه شده است. ما نتایج حل این معادله را با استفاده از روش پیشنهادی در این رساله با نتایج به دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم و همانطور که در جدول ۳.۴ دیده می‌شود، نتایج بهتری به دست آمده است. تصاویر ۷.۴ و ۸.۴ و ۹.۴ رفتار فیزیکی پاسخ را تا $t = 1$ نشان می‌دهد (در a و b سه بعدی و در c رفتار فیزیکی پاسخ را به صورت ۲ بعدی نشان می‌دهد).

جدول ۳.۴: مقایسه جواب معادله مثال ۳.۵.۴ به روش ارائه شده با پاسخ دقیق و روش‌های دیگر. $\nu = 0.01$

x	t	$[A_0] \Delta t = 0.01$	$[A_4] \Delta t = 0.001$	$[A_6] N = 180$	$\Delta t = 1/20, N = 60$ روش جدید	دقیق
۰.۲۵	۰.۴	۰.۳۶۲۷۳	۰.۳۶۲۱۷	۰.۳۶۲۲۶	۰.۳۶۲۲۶	۰.۳۶۲۲۶
	۰.۶	۰.۲۸۲۱۲	۰.۲۸۱۹۷	۰.۲۸۲۰۴	۰.۲۸۲۰۵	۰.۲۸۲۰۴
	۰.۸		۰.۲۳۰۴۰	۰.۲۳۰۴۵	۰.۲۳۰۴۵	۰.۲۳۰۴۵
	۱	۰.۱۹۴۶۷	۰.۱۹۴۶۵	۰.۱۹۴۶۹	۰.۱۹۴۶۹	۰.۱۹۴۶۹
۰.۵	۰.۴	۰.۶۹۱۸۶	۰.۶۸۳۵۷	۰.۶۸۳۶۸	۰.۶۸۳۶۸	۰.۶۸۳۶۸
	۰.۶	۰.۵۵۱۲۵	۰.۵۴۸۲۲	۰.۵۴۸۳۲	۰.۵۴۸۳۲	۰.۵۴۸۳۲
	۰.۸		۰.۴۵۳۶۳	۰.۴۵۳۷۰	۰.۴۵۳۷۱	۰.۴۵۳۷۱
	۱	۰.۳۸۶۲۷	۰.۳۸۵۶۱	۰.۳۸۵۶۸	۰.۳۸۵۶۸	۰.۳۸۵۶۸
۰.۷۵	۰.۴	۰.۹۴۹۴۰	۰.۹۲۰۵۰	۰.۹۲۰۵۱	۰.۹۲۰۵۰	۰.۹۲۰۵۰
	۰.۶	۰.۷۹۳۹۹	۰.۷۸۲۹۳	۰.۷۸۳۰۲	۰.۷۸۲۹۹	۰.۷۸۲۹۹
	۰.۸		۰.۶۶۲۶۴	۰.۶۶۲۷۲	۰.۶۶۲۷۲	۰.۶۶۲۷۲
	۱	۰.۵۷۱۷۰	۰.۵۶۹۲۴	۰.۵۶۹۳۲	۰.۵۶۹۳۲	۰.۵۶۹۳۲

مثال ۴.۵.۴. در این مثال، معادله برگرز-فیشر (۲.۴) را با $\delta = 1$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1-u) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0$$

که در آن $\alpha = a, \beta = \frac{2ac-a^2}{4}$ با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh\left(\frac{a}{4}x\right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

و شرایط مرزی:

$$u(0, t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh\left(\frac{a}{4}(-ct)\right), \quad u(1, t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh\left(\frac{a}{4}(1-ct)\right), \quad t \geq 0$$

جواب دقیق این معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh\left(\frac{a}{4}(x-ct)\right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

جواب‌های عددی این معادله برای $a = 24, c = 8$ با $N = 40$ در جدول ۴.۴ و تصویر ۱۰.۴

ارایه شده است. ما نتایج حل این معادله را با استفاده از روش پیشنهادی در این رساله با نتایج به

دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم و همانطور که در جدول ۴.۴ دیده می‌شود، نتایج بهتری

به دست آمده است.

جدول ۴.۴: مقایسه خطا L_2 برای جواب مثال ۴.۵.۴ با استفاده از روش رساله با روش دیگر

t	$N = 60$ جدید روش	$N = 60$ [۸۲]
۰.۰۱	$16.7e-006$	
۰.۰۲	$44.4e-006$	
۰.۰۳	$121e-006$	$2.5e-003$
۰.۰۴	$324e-006$	$2.4e-003$
۰.۰۵	$853e-006$	$2.4e-003$

مثال ۵.۵.۴. در این مثال، معادله برگرز-فیشر (۲.۴) را با $\delta = 1$ در نظر می‌گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1-u) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad t \geq 0$$

با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tanh(a_1 x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

و شرایط مرزی:

$$u(0, t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh(a_1 a_2 t), \quad u(1, t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \tanh(a_1 (1 - a_2 t)), \quad t \geq 0$$

جواب دقیق این معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tanh(a_1 (x - a_2 t)), \quad 0 \leq x \leq 1$$

که در آن $a_1 = \frac{\alpha}{1+\delta} + \frac{\beta(1+\delta)}{\alpha}$ و $a_2 = \frac{-\alpha\delta}{2(1+\delta)}$

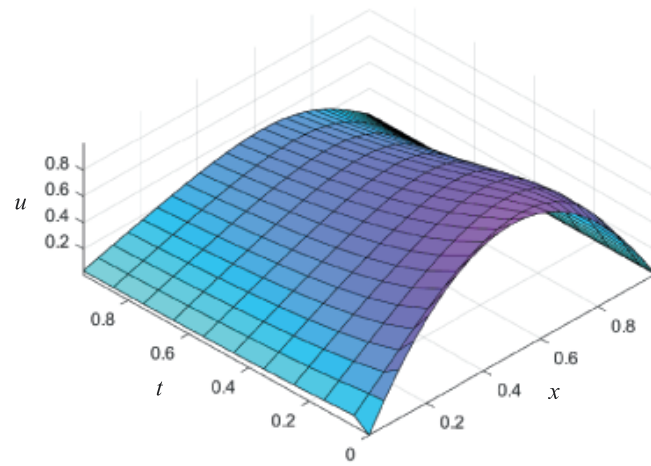
جواب‌های عددی این معادله برای $\alpha = 1, \beta = 1$ با $N = 40$ در جدول‌های ۵.۴ و ۶.۴ و تصویر ۱۱.۴ ارائه شده است. ما نتایج حل این معادله را با استفاده از روش پیشنهادی در این رساله با نتایج به دست آمده از جواب دقیق مقایسه می‌کنیم. تصویر ۱۱.۴ رفتار فیزیکی پاسخ را تا $t = 0.5$ نشان می‌دهد.

جدول ۵.۴: خطای L_2 برای حل معادله مثال ۵.۵.۴ با روش رساله

t	$N = 40$
۰.۰۲	$3.3e-003$
۰.۰۴	$6.7e-003$
۰.۰۶	$10.1e-003$
۰.۰۸	$13.5e-003$
۰.۱	$661.4e-003$

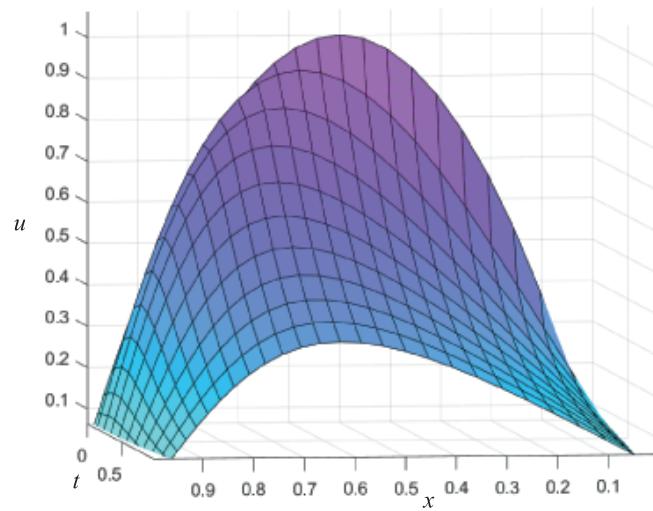
جدول ۶.۴: مقایسه جواب مثال ۵.۵.۴ با استفاده از روش رساله با پاسخ دقیق و روش‌های دیگر

x	$N = 60$ روش جدید	$N = 100$ [۸۷]
۰.۱	$6.6 e-005$	$0.8 e-005$
۰.۲	$0.8 e-005$	$0.3 e-004$
۰.۳	$0.6 e-005$	$0.2 e-004$
۰.۴	$0.5 e-005$	$0.2 e-004$
۰.۵	$0.5 e-005$	$0.1 e-003$
۰.۶	$0.4 e-004$	$0.1 e-003$
۰.۷	$0.3 e-004$	$0.1 e-003$
۰.۸	$0.1 e-004$	$0.1 e-003$
۰.۹	$0.1 e-004$	$0.1 e-003$

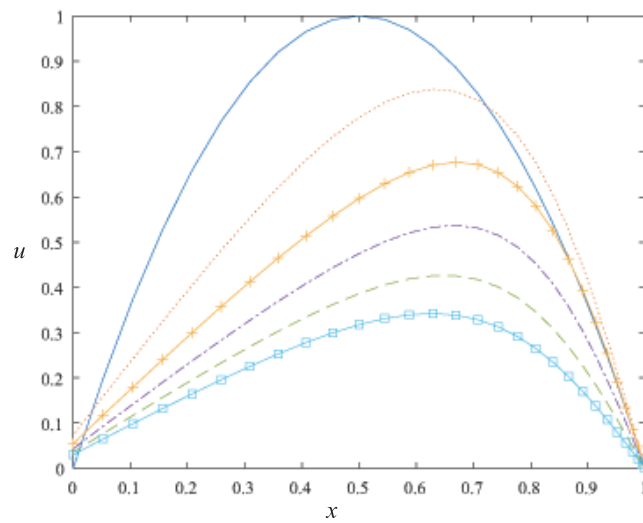


[a]

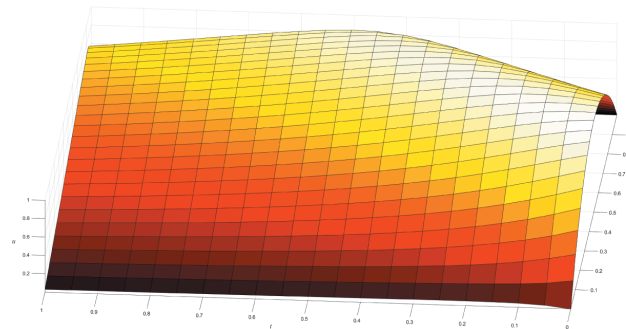
[b]



[c]

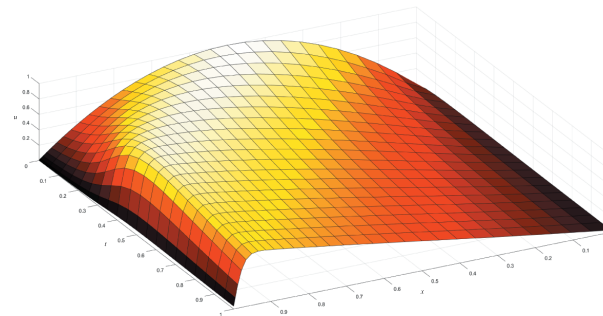


شکل ۷.۴: (a) (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۳.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 0.1$ و $t = 1$.
(c)، پاسخ در $t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ به ترتیب با $-, o, +, *, --, \square$.

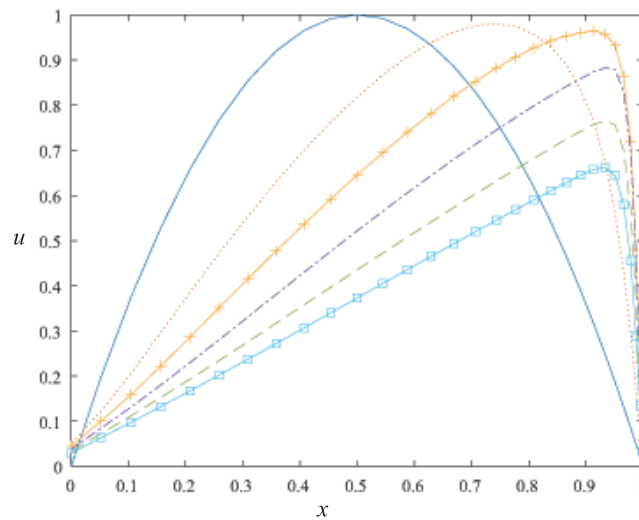


[a]

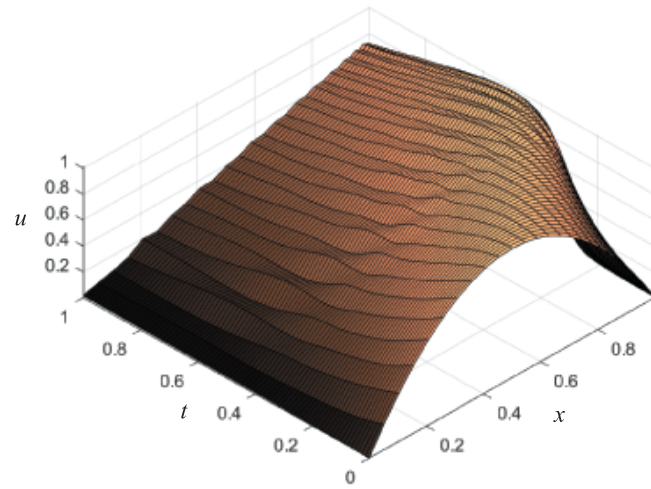
[b]



[c]

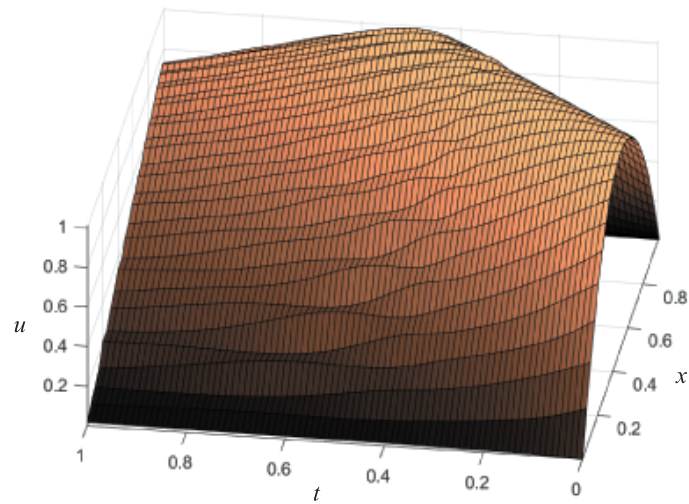


شکل ۸.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۳.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 10^{-6}$ و $t = 1$.
(c)، پاسخ در $t = 0, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ به ترتیب با $-, o, +, *, \square$.

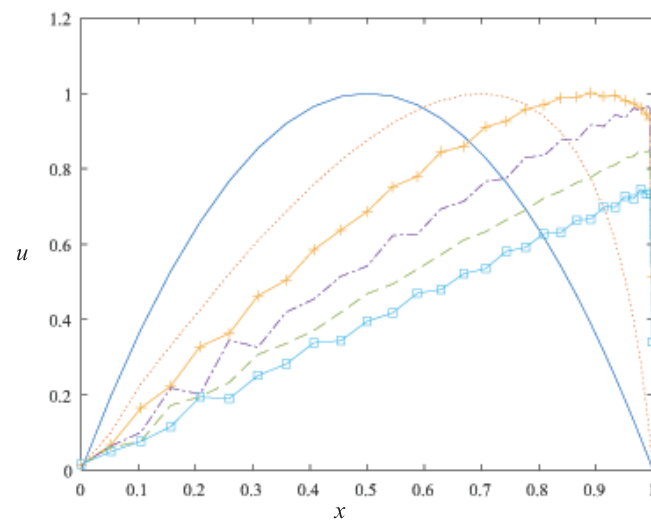


[a]

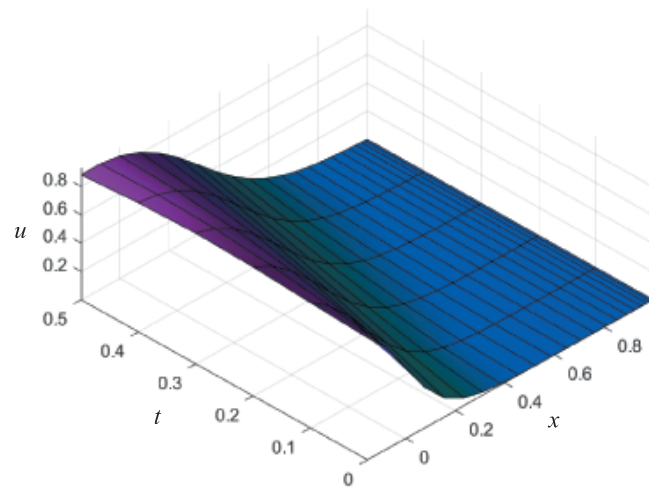
[b]



[c]

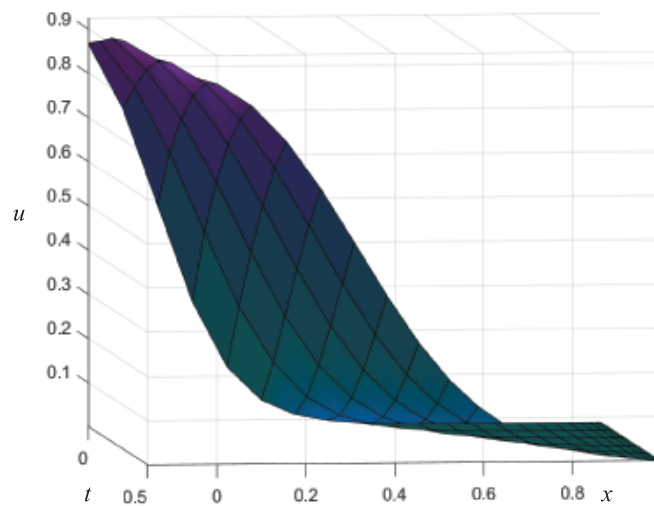


شکل ۹.۴: (a) (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۳.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 10^{-6}$ و $t = 1$.
(c)، پاسخ در $t = 0, 1/8, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ به ترتیب با $-, o, +, *, --, \square$.

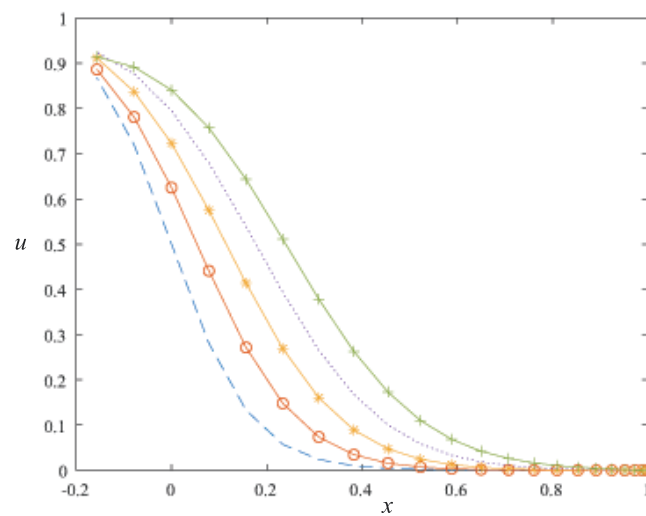


[a]

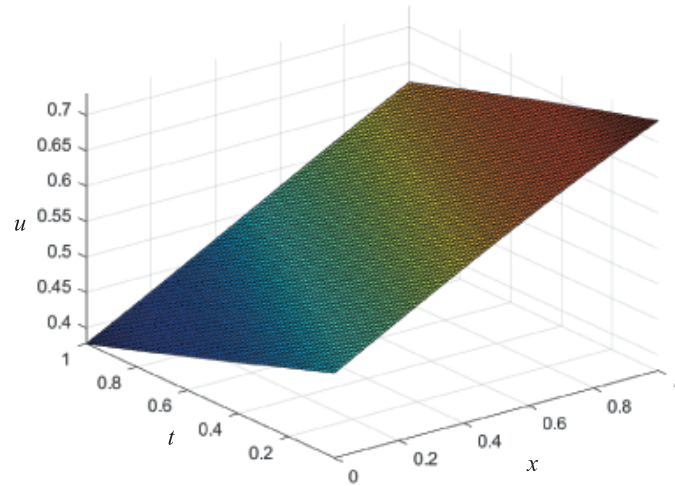
[b]



[c]

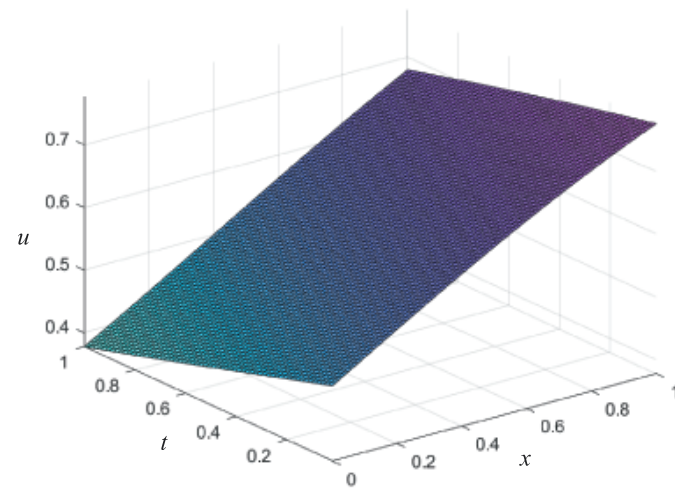


شکل ۱۰.۴: (a)، (b) نماهای متفاوتی از جواب مثال ۴.۵.۴ با $N = 60$ و $\nu = 10^{-6}$ و $t = 1$.
(c)، پاسخ در $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ به ترتیب با $\square, +, *, o, -$.



[a]

[b]



شکل ۱۱.۴: (a) پاسخ معادله برگرز فیشدر مثال ۵.۵.۴ با $\alpha = 1, \beta = 1, N = 40$.
شکل (b) جواب دقیق مثال ۵.۵.۴.

فصل ۵

حل معادله ترافیک به روش بدون شبکه

همانطور که در فصل اول بیان شد معادلات ترافیکی نقش بسیار مهمی در کنترل ترافیک دارند و حل آنها با روشهای عددی گام بزرگی برای حل معضل ترافیک می تواند باشد به همین دلیل بر آن شدیم تا به روش بیان شده در این رساله به حل چند مدل از مدل های جریان ترافیک کلان نگر بپردازیم. معادلات ترافیک از دیرباز مورد توجه قرار گرفته و مدل سازی های مختلفی برای آن انجام شده است. در این فصل به مدل ماکروسکوپی و به خصوص معروف ترین مدل آن LWR می پردازیم. از آنجایی که این مدل ها جزو مسایل سخت و شوک دار هستند، روش های معمولی پاسخ خوبی به این مسایل نمی دهند. در این فصل یک روش بدون شبکه برای حل معادله جریان ترافیک را توصیف می کنیم و در انتها نتایج حل این معادلات را ارایه می دهیم.

۱.۵ معادلات ترافیک

مدل سازی ترافیک خودرو در سال های اخیر بسیار مورد توجه مهندسی هوش مصنوعی و مهندسی ترافیک بوده است و حل این معادلات نیز مورد استقبال در رشته های ریاضی بوده است. روش های زیادی با توجه به موارد مختلف مدل سازی شده اند، از روش های خردنگر که به صورت جداگانه برای هر وسیله نقلیه مدل سازی شده اند تا روش های ماکروسکوپی یا کلان نگر که به رابطه بین وسایل نقلیه می پردازند که همگی به روش های مختلف مدل سازی شده اند. که به تفصیل در مورد انواع این مدل سازی ها در فصل اول اشاره شد.

از آنجایی که ناپیوستگی های شدیدی در معادلات ترافیک دیده می شود، یک رابطه بین ترافیک و امواج شوک وجود دارد [۲۲، ۲۳، ۸۸]. مدل های دینامیک سیالات اغلب بهترین شبیه سازی ها برای جریان ترافیک در نظر گرفته می شوند، زیرا بهتر می توانند برخی از پدیده ها، مانند شکل گیری و انتشار شوک در جاده ها را تشخیص دهند. ما شبیه سازی های ترافیک را براساس مدل های ماکروسکوپی که از دینامیک سیالات استفاده کرده و شامل قوانین پایستگی می شوند، بررسی می کنیم. مدل های خرد جزئیات بیشتری نسبت به مدل های کلان دارند اما به دلیل ماهیت و گستردگی اطلاعاتی که

مدل‌های خردنگر شبیه‌سازی می‌کنند، در مقایسه با مدل‌های ماکرو به کندی اجرا می‌شوند و بنابراین نیاز به محاسبات طولانی دارند.

در این فصل مدل ماکروسکوپی جریان ترافیک LWR مورد توجه است که با روش بدون شبکه کمترین مربعات آن را حل می‌کنیم و از زمان شوک به خوبی بدون نوسانات و ارتعاشات و خطای کم عبور می‌کند. معادله ترافیک LWR :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (f)}{\partial x} = 0.$$

که در آن ρ چگالی ترافیک و f جریان و v سرعت است. که $f = \rho v(\rho(x, t))$ و $0 \leq \rho \leq 1$.
توجه داشته باشید که تابع f باید شرایط زیر را دارا باشد:

• تابع f تا مرتبه دوم پیوسته باشد.

• تابع f اکیدا مقعر باشد.

• $f(0) = f(\rho_{max}) = 0$

یکی از مهم ترین بحث‌های مدل‌سازی ترافیک این است که چگونه تابع سرعت را به عنوان تابعی از چگالی تعریف کنیم. مدل‌های زیادی برای تعریف سرعت بر حسب چگالی وجود دارد که به تفصیل در فصل اول این رساله در مورد آن توضیح داده شد.

۲.۵ حل معادله ترافیک LWR به روش جدید

همانطور که بیان شد روش بدون شبکه کمترین مربعات انعطاف پذیری زیادی برای حل معادلاتی دارد که دارای شوک هستند و نیز چون از تابع وزن با پشتیبانی فشرده استفاده می شود به خوبی می تواند نواحی که دارای ناپیوستگی ها و شوک هستند را پوشش دهد. در این فصل سعی کرده ایم معادله زیر را:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho(x, t))}{\partial x} = 0, \quad (1.5)$$

با استفاده از روش جدید حل کنیم. در این بخش نحوه حل معادله را با توجه به روش های MLS و ETDRK۴ توضیح می دهیم. برای حل معادله ابتدا از روش MLS برای تقریب مشتقات مکانی و سپس از روش ETDRK۴ برای تقریب مشتقات زمانی استفاده می کنیم. دامنه اصلی مسئله Λ را به N قسمت تقسیم می کنیم تا فاصله بین گره ها ثابت باشد و برای هر نقطه یک همسایگی (Λ_s) که داخل دامنه اصلی است در نظر می گیریم. برای تقریب تابع ρ ، با روش MLS در Λ_s ، از (۱۲.۳)–(۱۴.۳):

$$\rho^h(x, t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{\rho}_i(t). \quad (2.5)$$

با جایگزین کردن در (۱.۵):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \hat{\rho}_i(t))}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

توجه داشته باشید که $\hat{\rho}_i(t) = \hat{\rho}(x_i, t)$ در معادله (۳.۵) مقادیر گره های آزمایشی را نشان می دهند. از طرف دیگر، برای مشتق $\mu_i(x)$ ، میتوان توضیح زیر را آورد:

فرض کنید $C^q(\Lambda)$ فضای توابعی را نشان می دهد که q بار روی Λ مشتق پذیر هستند. اگر $w_i(x) \in C^q(\Lambda)$ و $d_j(x) \in C^s(\Lambda)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $j = 1, 2, \dots, m$ باشد، سپس $\mu_i(x) \in$

$C^r(\Lambda)$ با $r = \min(q, s)$ خواهد بود. مشتقات k از $\mu_i(x)$ بصورت:

$$\mu_{i,k} = \sum_{j=1}^m [d_{j,k}(Q^{-1}S)_{ji} + d_j(Q^{-1}S_{,k} + Q_{,k}^{-1}S)_{ji}], \quad (4.5)$$

که در آن مشتق معکوس ماتریس Q که به x_k بستگی دارد را با نشانه‌های $(Q^{-1})_k = Q_k^{-1}$ نشان

می‌دهیم که با کمک فرمول $Q_k^{-1} = -Q^{-1}Q_{,k}Q^{-1}$ به دست می‌آیند، که $(\square)_k$ نشان می‌دهد $\frac{\partial \square}{\partial x_k}$.

همانطور که در فصل اول ذکر شد، تابع چگالی به صورت $f = \rho V(\rho)$ خواهد بود. در مثال

اول، $V(\rho) = v_{max}(1 - \rho)$ است که در آن $v_{max} = 1$ در نظر گرفته می‌شود. سپس می‌توانیم برای

این مورد بنویسیم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \gamma \rho \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (5.5)$$

اکنون با توجه به گسسته سازی مکانی و استفاده از روش MLS، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^n \mu'_j(x) \hat{\rho}_j(t) + \gamma \rho(x, t) \sum_{j=1}^n \mu'_j(x) \hat{\rho}_j(t), \quad (6.5)$$

برای $x_i \in \Lambda$:

$$\rho'_i(t) = -\sum_{j=1}^n \mu'_j(x_i) \hat{\rho}_j(t) + \gamma \rho_i(t) \sum_{j=1}^n \mu'_j(x_i) \hat{\rho}_j(t). \quad (7.5)$$

توجه داشته باشید مشتق ρ مرتبط با زمان بوده و مشتق μ در (4.5) تعریف شده است. هنگامی که

این روش را برای گسسته سازی PDE پیاده می‌کنیم، یک سیستم از ODE را داریم:

$$\begin{bmatrix} \rho'_1(t) \\ \rho'_2(t) \\ \vdots \\ \rho'_n(t) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mu'_1(x_1) & \mu'_2(x_1) & \cdots & \mu'_n(x_1) \\ \mu'_1(x_2) & \mu'_2(x_2) & \cdots & \mu'_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_1(x_n) & \mu'_2(x_n) & \cdots & \mu'_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1(t) \\ \hat{\rho}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\rho}_n(t) \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \rho_1(t) \\ \rho_2(t) \\ \vdots \\ \rho_n(t) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu'_1(x_1) & \mu'_2(x_1) & \cdots & \mu'_n(x_1) \\ \mu'_1(x_2) & \mu'_2(x_2) & \cdots & \mu'_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_1(x_n) & \mu'_2(x_n) & \cdots & \mu'_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1(t) \\ \hat{\rho}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\rho}_n(t) \end{bmatrix},$$

که $\circ$ ضرب هادامارد است. در این مرحله، برای تقریب مشتقات زمانی با روش ETDRK $\mathcal{K}$ باید معادله را به دو قسمت خطی و غیرخطی تقسیم کنیم:

$$L = - \begin{bmatrix} \mu'_1(x_1) & \mu'_2(x_1) & \cdots & \mu'_n(x_1) \\ \mu'_1(x_2) & \mu'_2(x_2) & \cdots & \mu'_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_1(x_n) & \mu'_2(x_n) & \cdots & \mu'_n(x_n) \end{bmatrix},$$

$$N(\rho, t) = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \rho_1(t) \\ \rho_2(t) \\ \vdots \\ \rho_n(t) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \mu'_1(x_1) & \mu'_2(x_1) & \cdots & \mu'_n(x_1) \\ \mu'_1(x_2) & \mu'_2(x_2) & \cdots & \mu'_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu'_1(x_n) & \mu'_2(x_n) & \cdots & \mu'_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1(t) \\ \hat{\rho}_2(t) \\ \vdots \\ \hat{\rho}_n(t) \end{bmatrix}.$$

و برای گسسته سازی زمان، روش ETD که در فصل قبل به تفصیل به آن پرداختیم، بکار می‌رود. با فرض بر این که دامنه اصلی را به n بخش با فواصل مساوی تقسیم می‌کنیم، فرض می‌شود $\rho(x_i, (k+1)t), i = 1, 2, \dots, n$ هدف ما محاسبه $\rho(x_i, kt), i = 1, 2, \dots, n$ است. معادله را در e^{-Lt} ضرب می‌کنیم و سپس معادله را در یک واحد زمانی با طول h انتگرال گیری می‌کنیم:

$$\rho_i^{k+1} = e^{Lh} \rho_i^k + e^{Lh} \int_0^h e^{-L\zeta} \left(\mathcal{K} \rho_i(t_k + \zeta) \sum_{j=1}^n \mu'_j(x_i) \hat{\rho}_j(t_k + \zeta) \right) d\zeta, \quad (8.5)$$

که در آن $\rho_i^k = \rho(x_i, t_k)$ بوده و سپس آن را با استفاده از فرمول‌های روش ETDRK $\mathcal{K}$ حل می‌کنیم که در ۹.۴ بیان شده است. اما این روش مشکلاتی دارد که از آن جمله می‌توان به بی ثباتی آن برای برخی از نقاط اشاره کرد که برای حل این مشکل نیز راهکارهایی در فصل قبل ارائه شد که به تفصیل در مورد آن توضیحاتی ارائه شد. در قسمت بعد مثال‌هایی با این روش جدید حل می‌شود که پاسخ‌های قابل قبولی به دست می‌آید.

۳.۵ مثال‌های عددی

روش اجرا شده در این رساله را در فصل‌های قبل و این فصل به تفصیل شرح داده‌ایم. در این قسمت دو مثال از معادلات ترافیک را حل کرده و جواب عددی آنها را با روش‌های دیگر مقایسه می‌کنیم. همانطور که توضیح داده شد، چون این معادلات در دسته معادلات سخت قرار می‌گیرند، نمایش جواب عددی به دست آمده با کمترین ارتعاش در لحظه شوک و بعد از آن بسیار مهم است.

مثال ۱.۳.۵. معادله ترافیک زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(\rho(x, t))}{\partial x} = 0.$$

تابع چگالی در این مدل بصورت زیر بیان می‌شود:

$$F(\rho(x, t)) = \rho V(\rho),$$

که در آن:

$$V(\rho) = v_{max}(1 - \rho), \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

در اینجا فرض می‌کنیم $v_{max} = 1$ و شرایط اولیه بصورت زیر است:

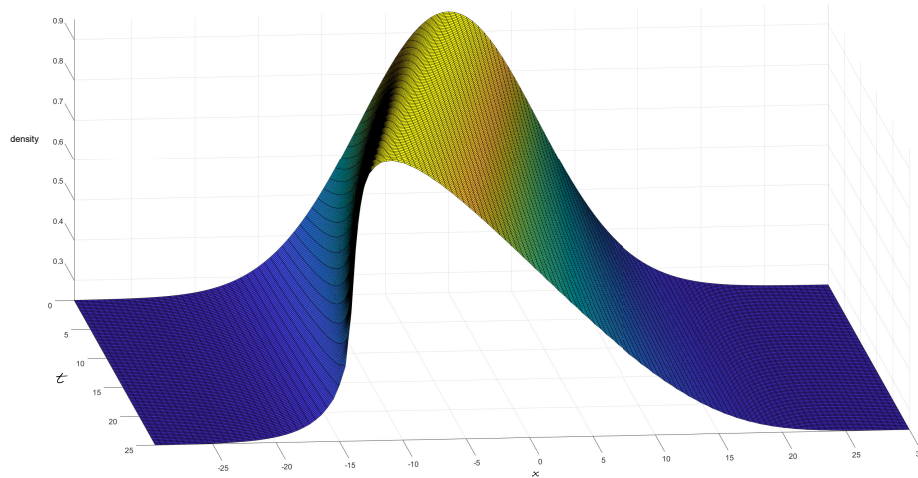
$$\rho(x, 0) = 0.25 + 0.7e^{-\beta x^2},$$

که در آن $\beta = 0.1$ خواهد بود. پس از مدتی، شبیه‌سازی موج شوک نشان می‌دهد که تراکم جریان ترافیک افزایش یافته و سرعت سریعاً کاهش می‌یابد (رانندگانی که در ترافیک کم دارای سرعت بودند، ناگهان مجبور به ترمز شدند). همانطور که وسایل نقلیه از منطقه شوک خارج می‌شوند، به تدریج شتاب می‌گیرند و در نتیجه تراکم به تدریج کاهش می‌یابد. شکل ۱.۵ قسمت a پاسخ عددی این مسئله را در روش ارائه شده در این مقاله نشان می‌دهد و شکل بخش شوک را به خوبی رد می‌کند. شکل تا $t = 30$ رسم شده است. از آنجایی که این مسائل پاسخ دقیقی ندارند و حل آنها بسیار

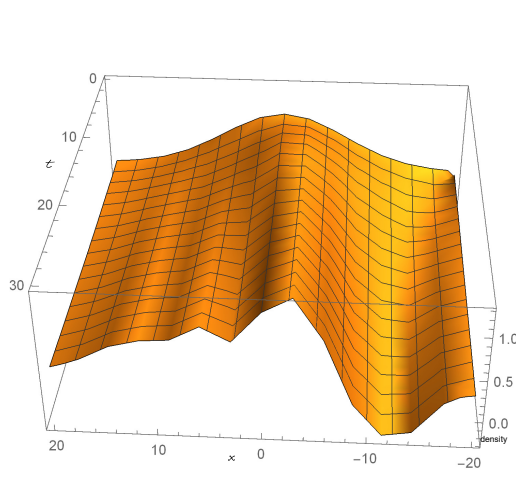
سخت است، سعی کردیم با روش‌های مختلف این مساله را حل کنیم و بهترین پاسخ از روش ذکر شده به دست می‌آید. مهم این است که حرکت از نقطه شوک در تصاویر بعد از رخداد تصاویر کاملاً مشخص است. اما در برخی از روش‌ها، خطا از زمان رخداد شوک بسیار بالاست و حرکت شوک دیده نمی‌شود. با این حال، در روش ذکر شده در مقاله، همانطور که در شکل ۱.۵ قسمت a دیده می‌شود، نقطه شوک به خوبی نشان داده می‌شود. در مقایسه با شکل ۱.۵ قسمت b که توسط نرم افزار Mathematica بدست آمده و به دلیل شوک از زمان ۸ عبور نکرده است، روش محاسباتی ما تا زمان ۳۰ پیش رفت که رقم قابل قبولی است. در شکل ۱.۵ قسمت c تلاش برای حل معادله توسط روش هسته بازتولیدی نشان داده شده است که متأسفانه خطا بعد از زمان شوک به طور قابل توجهی افزایش یافته و کاملاً در شکل دیده می‌شود. همچنین در شکل ۲.۵، لحظه $t = ۲۵$ که زمان پس از شوک است را با شکل نشان داده شده در منبع [۸۹] مقایسه می‌کنیم.

جدول ۱.۵: مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده با جواب معادله با جواب بدون روش MLS و جواب های بدست آمد از متمتیکا .

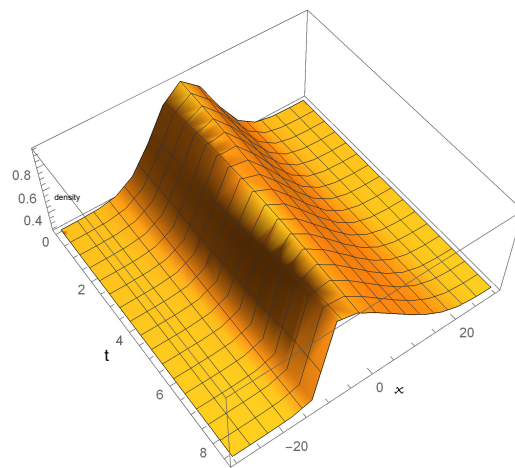
روش جدید	متمتیکا	بدون MLS	x	t
۰.۲۶۳۱	۰.۲۶۴۰	۰.۲۶۲۴	-۲۰	۵
۰.۵۶۱۳	۰.۵۶۰۰	۰.۶۱۳۶	-۱۰	
۰.۹۱۸۴	۰.۹۰۸۹	۰.۸۸۷۲	۰	
۰.۴۷۲۶	۰.۴۶۹۵	۰.۴۶۵۳	۱۰	
۰.۲۶۲۶	۰.۲۶۲۴	۰.۲۶۱۸	۲۰	
۰.۲۶۳۳		۰.۲۶۲۸	-۲۰	۱۰
۰.۶۵۳۷		۰.۷۲۸۸	-۱۰	
۰.۸۵۳۵		۰.۸۸۷۷	۰	
۰.۴۴۷۶		۰.۴۳۳۴	۱۰	
۰.۲۶۲۵		۰.۲۶۱۶	۲۰	
۰.۲۶۳۶		۰.۲۶۳۲	-۲۰	۱۵
۰.۸۱۵۱		۰.۸۴۴۴	-۱۰	
۰.۷۸۷۷		۰.۷۳۶۹	۰	
۰.۴۲۸۵		۰.۴۱۱۲	۱۰	
۰.۲۶۲۳		۰.۲۶۱۵	۲۰	
۰.۲۶۳۹		۰.۲۵۹۹	-۲۰	۲۰
۰.۹۳۴۷		۰.۹۰۱۹	-۱۰	
۰.۷۳۱۳		۰.۷۴۱۰	۰	
۰.۴۱۳۴		۰.۳۹۷۶	۱۰	
۰.۲۶۲۲		۰.۲۶۲۱	۲۰	
۰.۲۶۴۶		۰.۲۵۳۸	-۲۰	۲۵
۰.۹۳۸۸		۰.۸۵۵۰	-۱۰	
۰.۶۸۴۴		۰.۵۷۶۹	۰	
۰.۴۰۱۶		۰.۳۸۴۹	۱۰	
۰.۲۶۲۰		۰.۲۶۰۶	۲۰	



[a]

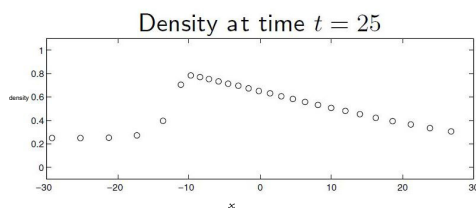


[c]

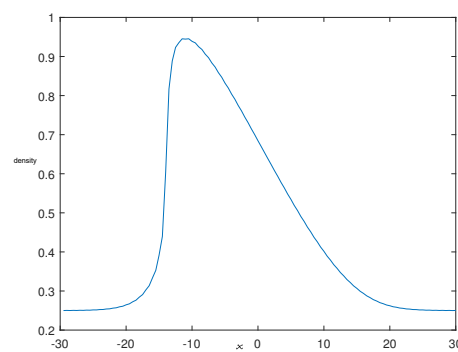


[b]

شکل ۱.۵: مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده (a) با جواب معادله با استفاده از متمتیک (b) و روش هسته بازتولیدی (c)



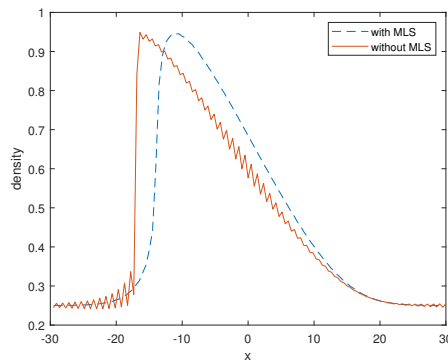
[f]



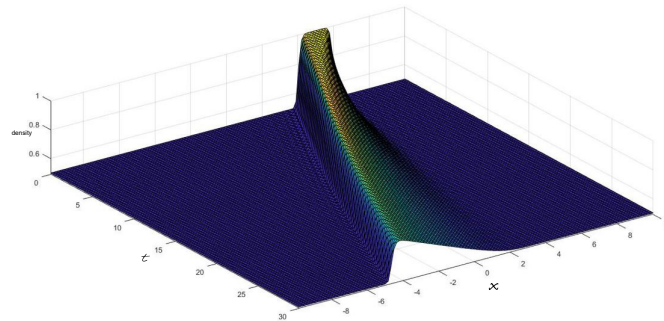
[d]

شکل ۲.۵: مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده (d) با جواب معادله با جواب در [۸۹]

مثال ۲.۳.۵. در مثال دوم، مدل دیگری از مساله ترافیک را در نظر می گیریم که در آن تابع اساسی



شکل ۳.۵: مقایسه جواب مثال ۱.۳.۵ به روش ارائه شده با جواب معادله با جواب بدون روش MLS



شکل ۴.۵: مثال ۲، برای $N = 120$ و $t = 30$.

مانند مثال قبلی است، اما داده‌های اولیه تابع چندضابطه ای است.

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & 4 \leq x \leq 6, \\ 0.5, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

این را می‌توان اینگونه تفسیر کرد: اتومبیل‌هایی که به ترافیک شلوغ نزدیک می‌شوند یا با صفی از اتومبیل‌ها در پشت چراغ قرمز روبرو می‌شوند که منتظر سبز شدن هستند. در اینجا چراغ راهنمایی در موقعیت $x = 6$ است و در لحظه $t = 0$ از قرمز به سبز تغییر کرده است. شکل ۴.۵ راه حل‌های عددی را تا زمان $t = 30$ با روش پیشنهادی جدید نشان می‌دهد. در شکل ۳.۵ مقایسه جواب عددی را با روش بدون شبکه و با استفاده از آن نشان می‌دهد.

نتیجه گیری و پیشنهاد برای کارهای آینده

مسائل ترافیکی بسیار مهم هستند و از طرفی به دلیل مشکلاتی مانند داشتن شوک، حل آن ها بسیار دشوار است و انتخاب یک روش عددی خوب برای مدل های جریان ترافیک بسیار مهم است. در رساله حاضر روش جدیدی برای شناسایی نقاط شوک و یافتن پاسخ بهتر بدون ارتعاش در این نقاط پیشنهاد شده است. دو روش در رساله توضیح داده شده است. یک روش هسته بازتولیدی است که نتایج مقبول اما نه کاملاً راضی کننده داشتیم و سپس از یک روش ترکیبی استفاده کردیم در روشی که در فصل ۴ توضیح داده شد، ابتدا اینگونه مسائل را با روش های بدون شبکه و سپس با روش ETDRK^۴ حل کردیم. ما روش MLS را از بین روش های بدون شبکه انتخاب کردیم. سپس از روش ETDRK^۴ برای تقریب مشتق زمانی استفاده کردیم. با توجه به انعطاف و دقت بالای MLS، از آن برای حل این معادلات ترافیکی که دارای شوک هستند استفاده شده است. از آنجایی که این روش ها دامنه مسئله را بدون استفاده از یک شبکه از پیش تعیین شده گسسته می کنند، به نظر می رسد برای معادلاتی که دارای شوک در نقاطی از دامنه هستند، موثر باشند. از سوی دیگر، از انتگرال کانتور و سایر رویکردهای مناسب برای کنترل ناپایداری و چالش های ETDRK^۴ استفاده می شود. اکنون با ترکیب این روش ها به نتایج خوبی برای حل این معادلات می رسیم. در MLS می توان پارامتر c را تغییر داد، شکل تابع وزن را کنترل کرد و نوع متفاوت تابع وزن را در نظر گرفت. در ETDRK^۴ همانطور که گفته شد از انتگرال کانتور برای کنترل ناپایداری استفاده کردیم اما انتگرال های کانتور تنها راه حل های ارائه شده برای این مشکل نیستند، بلکه روش انتگرال کانتور به دلیل عمومیت آن برای مقابله با توابع دلخواه، ما را به خود جذب می کند. انعطاف پذیری قابل

توجهی در این روش وجود دارد. در نهایت دو مثال از معادلات ترافیکی ارائه شده به این روش حل شد. نتایج نشان داد که این روش می‌تواند مسائل ترافیکی را با موفقیت حل کند و نتایج بسیار خوبی با این روش بدست آوردیم.

کارهای آتی: می‌توان روشهای دیگر بدون شبکه را نیز برای حل این معادلات بکار برد. روی حل سایر مدل‌های جریان ترافیک مثل مرتبه‌های بالاتر و یا مدل‌های خردنگری مثل تعقیب خودرو کار شود. می‌توان جوابهای بدست آمده از حل این معادلات را برای بدست آوردن آلودگیهای محیط زیستی استفاده کرد و میزان آلودگی را نیز محاسبه کرد. چه تغییراتی در پایه‌ها و یا روند حل روش هسته بازتولیدی انجام داد تا برای این معادلات بازخورد بهتری داشته باشند و جواب را با خطای کمتری بدست آورند.

مراجع

- [1] D. L. Gerlough, M.J. Huber , *Traffic Flow Theory A Monograph*, Transportation Research Board National Research Council, Washington, D.C., 1975
- [2] J. Misener, *SmartAHS and SHIFT Enhancements, Persistence and Query Interpretation*, California, Institute of Transportation Studies, University of California at Berkeley, 2000.
- [3] J. Ludmann, *Beeinflussung des Verkehrsablauf auf Straßen – Analyse mit dem fahrzeugorientierten Verkehrs simulations programm PELOPS*, Schriftenreihe Automobiltechnik, Institut für Kraftfahrwesen, Aachen, 1998.
- [4] D.C. Gazis, R. Herman, R.W. Rothery, *Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow*, Operations Research 9(4) (1961) 545-567.
- [5] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, *Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation*, Physical Review E 51 (1995) 1035–1042.
- [6] D. Helbing, B. Tilch, *Generalized force model of traffic dynamics*, Physical Review E 58 (1998) 133–138.
- [7] R. Jiang, Q. S. Wu, Z. J. Zhu, *A new continuum model for traffic flow and numerical tests*, Transportation Research Part B, 36 (2002) 405–419.
- [8] L. Yu, T. Li, Z.K. Shi, *Density waves in a traffic flow model with reaction-time delay*, Physica A 389 (2010) 2607-2616.
- [9] L. Yu, T. Li, Z.K. Shi, *A new car-following model with two delays*, Physics Letters A 378 (2014) 348–357.
- [10] R. Jiang, M.B. Hu, B. Jia, R.L. Wang, Q.S. Wu, *The effects of reaction delay in the Nagel-Schreckenberg traffic flow model*, The European Physical Journal B, 54(2) (2006) 267–273.
- [11] N. Davodi, A.R. Soheili, S.M. Hashemi, *A macro-model for traffic flow with consideration of driver's reaction time and distance* The Nonlinear Dynamics journal 83 (2016) 1621–1628.
- [12] M. J. Lighthill, G. B. Whitham, *On kinematic waves: II. a theory of traffic flow on long crowded roads*, Proceedings Royal Society, London, Series A 229, 1178 (1955) 317-345.
- [13] P. I. Richards, *Shock waves on highways*, perations Research, 4(1) (1956) 42-51.

- [14] B.D. Greenshields, *A study of traffic capacity*, *Proceedings of Highway Research Board*, 14 (1935) 448–477.
- [15] D. R. Drew, *Deterministic aspects of freeway operations and control*, *Highway Research Record*, 99 (1965) 48–58.
- [16] L. A. Pipes, *Car following models and the fundamental diagram of road traffic*, *Transportation Research*, 1(1) (1967) 21–29.
- [17] L. C. EDIE, *Car-Following and Steady-State Theory for Noncongested Traffic*, *Opns. Res.* 9 (1961) 66-76.
- [18] A. D. May, H. E. Keller, *Evaluation of single- and two-regime traffic flow models*, in: 4th International Symposium on the Theory of Traffic Flow, Karlsruhe, (1968) 37–48.
- [19] H. Greenberg, *An analysis of traffic flow*, *Operations Research*, 7 (1959) 79-85.
- [20] R.T. Underwood, *Speed, Volume, and Density Relationships, Quality and Theory of Traffic Flow*, Yale Bureau of Highway Traffic (1961) 141-188.
- [21] M. Papageorgiou, J.M. Blosseville, H. Hadj-Salem, *Macroscopic modelling of flow on the Boulevard Peripherique in Paris*, *Transport Research Part B*, 23(1) (1989) 29–47.
- [22] M. Garavello, B. Piccoli, *Traffic Flow on Networks Conservation Laws Models*, AIMS Series on Applied Mathematics (2006).
- [23] A. Sopasakis, M. A. Katsoulakis, *Stochastic modeling and simulation of traffic flow: Asymmetric single exclusion process with Arrhenius look-ahead dynamics*, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 66 (2006) 921–944.
- [24] D. G. Vlachos, M. A. Katsoulakis, *Derivation and validation of mesoscopic theories for diffusion of interacting molecules*, *Physical Review Letters*, 85 (2000) 3898–3901.
- [25] H. J. Payne, *Models of freeway traffic and control*, *Simulation Councils Proc. Series: Mathematical Models of Public Systems*, 1(1) (1971) 51-61.
- [26] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Pure and Applied Math., Wiley Interscience, New York, 1974.
- [27] B. S. Kerner, P. Konhlauser, *Structure and parameters of clusters in traffic flow*, *Physical Review E*, 50(1) (1994) 54-67.
- [28] R. D. Kluhne, *Traffic patterns in unstable traffic flow on freeways*, In Brannolte U (ed.), *Highway Capacity and Level of Service*, Proc. Int. Symp. Highway Capacity in Karlsruhe. Balkema, Rotterdam (1991) 211-223
- [29] C. Daganzo, *Requiem for second-order fluid approximation to traffic flow*, *Transportation Res.*, Part B, 29 (1995) 277-286.
- [30] A. Aw, M. Rascle, *Resurrection of "second order" models of traffic flow?*, *SIAM J. Appl. Math.*, 60 (2000) 916-938.

- [31] D. Helbing, *Traffic and related self-driven many-particle systems*, Reviews of Modern Physics, 73 (2001) 1067-1141.
- [32] G.H. Peng, H.D. He, W.Z. Lu, *A new car-following model with the consideration of incorporating timid and aggressive driving behaviors*, Physica A 442 (2016) 197-212.
- [33] R.J. Cheng, H.X. Ge, J.F. Wang, *An extended continuum model accounting for the driver's timid and aggressive attributions*, Physics Letters A 381 (2017) 1302-1312.
- [34] T.Q. Tang, G.J. Huang, H.Y. Shang, *An extended macro traffic flow model accounting for the driver's bounded rationality and numerical tests*, Physica A 468 (2017) 322–333.
- [35] Z. Wang, H. Ge, R. Cheng, *An extended macro model accounting for the driver's timid and aggressive attributions and bounded rationality*, Physica A Volume 540 (2020) 122988
- [36] J.M. Del Castillo, P. Pintado, F.G. Benitez, *The reactive time of drivers and the stability of traffic flow*, Transportation Research Part B: Methodological, 28(1) (1994) 35-60.
- [37] C.D. Aliprantis, *Principles of real analysis*, Gulf Professional Publishing (1998).
- [38] M.G. Cui, Y.Z. Lin, *Nonlinear Numerical Analysis in Reproducing Kernel Space*, Nova Science Pub. Inc., Hauppauge (2009).
- [39] N. Aronszajn. *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950) 337–404.
- [40] G.R. Liu *meshfree methods*, CRC press, Boca Raton (2002).
- [41] M. Dehghan, A. Ghesmati, *Combination of meshless local weak and strong (mlws) forms to solve the two dimensional hyperbolic telegraph equation*, Eng Anal Bound Elem 34(4) (2010) 324–336.
- [42] M. Aslefallah, E. Shivanian, *Nonlinear fractional integrodifferential reaction–diffusion equation via radial basis functions*, Eur Phys J Plus 130(47) (2015) 1–9.
- [43] E. Shivanian, H. Khodabandelo, *A meshless method based on radial basis and spline interpolation for 2-D and 3-D inhomogeneous biharmonic BVPs*, Zeitschrift für Naturforschung A 70(8) (2015) 673–682
- [44] E. Shivanian, *Local integration of population dynamics via moving least squares approximation*. Engineering with Computers. DOI 10.1007/s00366-015-0424-z.
- [45] F. Fakhari-Izadi, M. Dehghan, *Space-time spectral method for a weakly singular parabolic partial integro-differential equation on irregular domains*, Comput Math Appl 67(10) (2014) 1884–1904
- [46] H. Fatahi, J. Saberi-Nadjafi, E. Shivanian, *A new spectral meshless radial point interpolation (SMRPI) method for the twodimensional fredholm integral equations on general domains with error analysis*, J Comput Appl Math 294 (2016) 196–209

- [47] E. Shivanian, *local Petrov–Galerkin (MLPG) method for three-dimensional nonlinear wave equations via moving least squares approximation*, Eng Anal Bound Elem 50 (2015) 249–257
- [48] A. Bratsos, *An improved numerical scheme for the sine-Gordon equation in 2+1 dimensions*, Int J Numer Meth Eng 75 (2008) 787–799
- [49] W. Liu, S. Jun, Y. Zhang, *Reproducing kernel particle methods*, Int J Numer Methods Eng 20 (1995) 1081–1106.
- [50] Y. Mukherjee, S. Mukherjee, *Boundary node method for potential problems*, Int J Numer Methods Eng 40 (1997) 797–815.
- [51] J. Melenk, I. Babuska, *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*, Comput Methods Appl Mech Eng 139 (1996) 289–314.
- [52] Y. Gu, G. Liu, *A boundary point interpolation method for stress analysis of solids*, Comput Mech 28 (2002) 47–54.
- [53] E. Shivanian, *Analysis of meshless local and spectral meshless radial point interpolation (MLRPI and SMRPI) on 3-D nonlinear wave equations*, Ocean Eng 89 (2014) 173–188.
- [54] E. Shivanian, *A new spectral meshless radial point interpolation (SMRPI) method: a well-behaved alternative to the meshless weak forms*, Eng Anal Bound Elem 54 (2015) 1–12.
- [55] S. Abbasbandy, *The effects of MHD flow of third grade fluid by means of meshless local radial point interpolation (MLRPI)*, Int J Ind Math 7(1) (2015) 1–11.
- [56] E. Shivanian, *Application of meshless local radial point interpolation (MLRPI) on a one-dimensional inverse heat conduction problem*, (2015) Ain Shams Eng J. doi:10.1016/j.asej.2015.07.009.
- [57] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Comput Mech 10 (1992) 307–318.
- [58] H. Bateman, *Some recent researches on the motion of fluids*, Mon. Weather Rev. 43 (1915) 163–170.
- [59] J.M. Burgers, *Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion*, North-Holland Pub. Co., (1939) 1–53.
- [60] J.M. Burgers, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, in: Adv. in Appl. Mech., Vol. I, Academic Press, New York, (1948) 171–199
- [61] A. Asaithambi, *Numerical solution of the Burgers’ equation by automatic differentiation*, Appl. Math. Comput. 216 (2010) 2700–2708.
- [62] A. Dogan, *A Galerkin finite element approach to Burgers’ equation*, Appl. Math. Comput. 157 (2004) 331–346.
- [63] A.K. Khalifa, Kh. Inayat Noor, M. Aslam Noor, *Some numerical methods for solving Burgers equation*, Int. J. Phys. Sci. 6 (7) (2011) 1702–1710.

- [64] A. Korkmaz, *Shock wave simulations using sinc differential quadrature method*, Eng. Comput. 28 (6) (2011) 654–674.
- [65] A. Korkmaz, I. Dag, *Polynomial based differential quadrature method for numerical solution of nonlinear Burgers' equation*, J. Franklin Inst. 348 (10) (2011) 2863–2875.
- [66] A. Korkmaz, A. Murat Aksoy, Idris Dag, *Quartic B-spline differential quadrature method*, Int. J. Nonlinear Sci. 11 (4) (2011) 403–411.
- [67] A.M. Wazwaz, A. Gorguis, *An analytic study of Fishers equation by using Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput. 154 (2004) 609–620.
- [68] A.M. Wazwaz, *The tanh method for generalized forms of nonlinear heat conduction and Burgers-Fisher equations*, Appl. Math. Comput. 169 (2005) 321–338.
- [69] A. Golbabai, M. Javidi, *A spectral domain decomposition approach for the generalized Burgers-Fisher equation*, Chaos Solitons Fract. 39 (2009) 385–392.
- [70] D. Kaya, S.M.El. Sayed, *A numerical simulation and explicit solutions of the generalized Burger-Fisher equation*, Appl. Math. Comput. 152 (2004) 403–413.
- [71] H.N.A. Ismail, A.A.A. Rabboh, *A restrictive Pade approximation for the solution of the generalized Fisher and Burger-Fisher equation*, Appl. Math. Comput. 154 (2004) 203–210.
- [72] S. Abbasbandy, H. Sahihi, T. Allahviranloo. *Implementing reproducing kernel method to solve singularly perturbed convection–diffusion parabolic problems*, Math. Model. Anal. 26(1) (2021) 116–134.
- [73] G. Beylkin, J. M. Keiser, and L. Vozovoi, *A new class of time discretization schemes for the solution of nonlinear PDEs*, J. Comput. Phys. 147 (1998) 362.
- [74] C. Schuster, A. Christ, and W. Fichtner, *Review of FDTD time-stepping for efficient simulation of electric conductive media*, Microwave Optical Technol. Lett. 25 (2000) 16.
- [75] S. M. Cox, P. C. Matthews, *Exponential Time Differencing for Stiff Systems*, Journal of Computational Physics 176 (2002) 430–455.
- [76] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, *Some error estimates for the reproducing kernel Hilbert spaces method*. J. Comput. Appl. Math. 296 (2016) 789–797
- [77] A. Kassam, L. N. Trefethen, *Fourth-order time-stepping for stiff PDEs*, Siam J. Sci. Comput., (2005) Society for Industrial and Applied Mathematics 26(4) (2005) 1214–1233.
- [78] X.L. Li, *Error estimates for the moving least-square approximation and the element-free Galerkin method in n-dimensional spaces*, Appl. Numer. Math. 99 (2016) 77–97.
- [79] W. Huang, R.D. Russell, *Adaptive Moving Mesh Methods*, Springer, New York, 2011.
- [80] M.K. Kadalbajoo, K.K. Sharma, A. Awasthi, *A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time dependent Burgers' equation*, Appl. Math. Comput. 170 (2005) 1365–1393.

- [81] A. Babu, B. Han, N. Asharaf, *Numerical solution of the viscous Burgers' equation using Localized Differential Quadrature method*, Partial Differential Equations in Applied Mathematics 4 (2021) 100044.
- [82] A.R. Soheili, A. Kerayechian, N. Davoodi, *Adaptive numerical method for Burgers-type nonlinear equations*, Appl. Math. Comput. 219 (2012) 3486–3495.
- [83] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, M.S. Alhuthali. *A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems*, J. Comput. Appl. Math. 279 (2015) 293–305.
- [84] R. Jiware, *A Haar wavelet quasilinearization approach for numerical simulation of Burgers' equation*, Computer Physics Communications 183 (2012) 2413–2423.
- [85] A. Asaithambi, *Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation*, Appl. Math. Comput. 216 (2010) 2700–2708.
- [86] H. Nojavan, S. Abbasbandy, M. Mohammadi, *Local variably scaled Newton basis functions collocation method for solving Burgers' equation*, Appl. Math. Comput. 330 (2018) 23–41.
- [87] V. Chandraker, A. Awasthi, S. Jayaraj, *Numerical Treatment of Burger-Fisher equation*, Procedia Technology 25 (2016) 1217–1225.
- [88] G. Bretti, R. Natalini, B. Piccoli, *Numerical approximations of a traffic flow model on networks*, Networks and Heterogeneous Media (NHM) 1 (2006) 57–84.
- [89] R.J. Leveque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge university press (2004).
- [90] D. Mirzaei, *Error bounds for GMLS derivatives approximations of Sobolev functions*, J. Comput. Appl. Math. 294 (2016) 93–101.
- [91] Y.M. Cheng, *Meshless Methods*, Science Press, Beijing, 2015
- [92] K.M. Owolabi, K.C. Patidar *Numerical simulations of multicomponent ecological models with adaptive methods* Theoretical Biology and Medical Modelling (2016) 13:1 DOI 10.1186/s12976-016-0027-4
- [93] X. Liang, A.Q.M. Khaliq, Y. Xing *Fourth Order Exponential Time Differencing Method with Local Discontinuous Galerkin Approximation for Coupled Nonlinear Schrödinger Equations* Communications in Computational Physics (2015) 510–541
- [94] X. Liang, H. Bhatt *Exponential time differencing schemes for the 3-coupled nonlinear fractional Schrödinger equation* Advances in Difference Equations (2018) 476 <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1936-9>

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الف

Quadrature	انتگرال‌گیری
Perturbation	آشفستگی
Trial	آزمایشی
Diffusion	انتشار

ب

Elliptic	بیضوی
Update	به‌روز کردن
Highway	بزرگراه
Uniformly	به‌طور یکنواخت
Sufficiently Smooth	به قدر کافی هموار
Reproducing	بازتولیدی

پ

Parameter	پارامتر
Stable	پایداری
Continuous	پیوسته
Basis	پایه

ت

Traffic	ترافیک
Approximation	تقریبی
Car-following	تعقیب خودرو
Basis functions	توابع پایه ای
Analytical	تحلیلی

ث

Constant	ثابت
----------	------

ج

Flow	جریان
Weak solution	جواب ضعیف
Exact solution	جواب دقیق
Numerical solution	جواب عددی

چ

Viscosity	چسبندگی
Light traffic	چراغ راهنمایی
Density	چگالی
Dense	چگال

ح

Limit	حد
Maximum	حداکثر
Minimum	حداقل

خ

Microscopic..... خردنگر
Absolute error خطای مطلق
Linear خطی

د

Interpolation..... درونیابی
Accuracy دقت
Domain دامنه
Sequence دنباله
Dirac delta دلتای دیراک
Arbitrary دلخواه

ذ

Smoothed Particle Hydrodynamic ذرات هیدرودینامیکی هموار

ر

Jam راه‌بندان
Method روش
Physical behavior..... رفتار فیزیکی

ز

Relaxation time زمان آسایش
Delay time..... زمان تاخیر

س

Speed سرعت
Series سری‌ها

Taylor series..... سری تیلور
kinematic..... سینماتیک

ش

Flux..... شار
Mesh..... شبکه
Simulation..... شبیه سازی
Boundary condition..... شرط مرزی
Shock..... شوک
Initial condition..... شرط اولیه
Figure..... شکل
Radial..... شعاعی

ض

Inner product..... ضرب داخلی
Coefficient..... ضریب

غ

Nonlinear..... غیرخطی

ف

Reaction distance..... فاصله عکس العمل
Normed space..... فضای نرم دار
Hilbert space..... فضای هیلبرت
Orthogonalization process..... فرایند متعامدسازی
Compact..... فشرده

ق

Conservation law	قانون بقا
Piecewise continuous	قطعه ای پیوسته
Countable	قابل شمارش

ک

Macroscopic	کلان نگر
Bounded	کراندار
Moving Least Squares	کمترین مربعات متحرک
Completely continuous	کاملاً پیوسته

گ

Node	گره
Discretization	گسسته سازی

م

Mesoscopic	متوسط‌نگر
Local	محلی
Support	محمل
Eigen value	مقدار ویژه
Partial differential equation	معادلات مشتقات جزئی
Wave	موج
Traffic circle	میدان
Singular	منفرد
Derivative order	مرتبه مشتق
Differential	مشتق
Complex	مختلط
Value	مقدار
Absolutely continuous	مطلقاً پیوسته

ن

Look ahead.....	نگاه به جلو.....
Infinite	نامتناهی
Norm.....	نرم.....
Curve.....	نمودار.....
Exponential.....	نمایی.....

و

Existence	وجود.....
Reaction.....	واکنش.....

ه

Hyperbolic	هذلولوی
Smooth.....	هموار.....
Convergence.....	همگرایی.....
Convection	همرفت
Collocation.....	هم محلی.....
Reproducing kernel.....	هسته بازتولیدی.....

Abstract

Considering the role and importance of traffic control in preserving the environment and citizens' health, in this thesis we tried to help increase accuracy and intelligent traffic control by solving traffic equations with minimum error. Many models have been proposed by researchers studying traffic. One of the most widely used traffic flow models are macroscopic models that express the traffic flow as one or a set of nonlinear hyperbolic partial equations. Since there are sudden changes or shocks in the response of most of these equations, it is crucial to choose a suitable numerical method to solve this class of equations. Macro theory looks at traffic flow as an aggregate concept. This method is the most appropriate technique to study the steady state flow phenomenon based on physical analogies such as heat flow and fluid flow, and therefore best explains the potential performance of the device.

In this treatise, we first introduce some traffic flow models and then present some concepts of reproducing kernel methods and meshfree methods. At the end, we solve one of macroscopic models by the presented methods and show that meshless methods are a very efficient and suitable method for solving these equations.

Surname: Najafzadeh

Name: Neda

Title: Numerical solution of macroscopic flow traffic by the reproducing and meshless methods

Supervisor: Dr. Saeid Abbasbandy

Advisor: Dr. Elyas Shivanian

Degree: Doctor of Science

Subject: applied mathematics

Field:

Imam Khomeini International University

Faculty of basic sciences

Date: 1401

Number of pages: 125

Keywords: Reproducing kernel method, Meshless methods, Macroscopic traffic flow

Abstract

Considering the role and importance of traffic control in preserving the environment and citizens' health, in this thesis we tried to help increase accuracy and intelligent traffic control by solving traffic equations with minimum error. Many models have been proposed by researchers studying traffic. One of the most widely used traffic flow models are macroscopic models that express the traffic flow as one or a set of nonlinear hyperbolic partial equations. Since there are sudden changes or shocks in the response of most of these equations, it is crucial to choose a suitable numerical method to solve this class of equations. Macro theory looks at traffic flow as an aggregate concept. This method is the most appropriate technique to study the steady state flow phenomenon based on physical analogies such as heat flow and fluid flow, and therefore best explains the potential performance of the device. In this treatise, we first introduce some traffic flow models and then present some concepts of reproducing kernel methods and meshfree methods. At the end, we solve one of macroscopic models by the presented methods and show that meshless methods are a very efficient and suitable method for solving these equations.



Imam Khomeini International University
Faculty of basic sciences

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
applied mathematics

Numerical solution of macroscopic flow traffic by the reproducing and meshless methods

Supervisor
Dr. Saeid Abbasbandy

Advisor
Dr. Elyas Shivanian

by
Neda Najafzadeh