

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

حل عددی معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری با شرایط متناوب و پادمتناوب با استفاده از روش هسته باز تولیدی

استاد راهنما

دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور

دکتر الیاس شیوانیان

پژوهشگر

هدا سکی

۱۴۰۱

نام خانوادگی دانشجو: ساکی

نام: هدا

عنوان: حل عددی معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری با شرایط متناوب و پادمتناوب با استفاده از روش هسته باز تولیدی

استاد راهنما: دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور: دکتر الیاس شیوانیان

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشکده علوم پایه

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره) قزوین

تعداد صفحات: ۸۳

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۴۰۱

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری، شرایط متناوب، شرایط پاد متناوب، روش هسته باز تولید در فضای هیلبرت

چکیده

در این رساله، معادلات دیفرانسیل کسری خطی و غیرخطی با شرایط متناوب و پادمتناوب را با استفاده از روش هسته بازتولید حل می‌کنیم. بدین منظور با توجه به معادلات و شرایط حاکم بر آن، یک عملگر خطی تعریف می‌کنیم و با استفاده از توابع هسته بازتولیدی، پایه متعامد کامل برای فضای هسته‌ای بازتولیدی به دست می‌آوریم و جواب معادلات مذکور را بر حسب این توابع پایه‌ای به دست می‌آوریم. در واقع جواب تحلیلی به صورت یک سری نامتناهی نمایش داده می‌شود و با استفاده از یک روش تکراری، جواب تقریبی نظیر سری مذکور به دست آورده می‌شود. در پایان برخی از مثالهای عددی برای نشان دادن درستی و کاربرد روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج به دست آمده از مثالهای عددی نشان می‌دهند که روش پیشنهادی مفید است. همچنین این روش را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری بکار می‌بریم.

ما حصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم به آمان که مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام
زمینی‌ام است

به استوارترین تکیه‌گاه‌ام، دستان پر مهر پدرم
سبزترین نگاه زندگی‌ام، چشمان مادرم
همسفر مهربان دنیايم، برادر عزیزم مادی

سپاسگزاری

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. اکنون که پایان نامه حاضر به پایان رسیده است، بر خود واجب می دانم که از جناب آقای دکتر سعید عباس بندی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ نمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را برعهده گرفتند و استاد مشاور جناب آقای دکتر الیاس شیوانیان که در مدت انجام این پایان نامه با رهنمودهای ارزنده خویش راه گشای پیشرفت اینجانب بوده اند سپاسگزاری کنم، باشد که بخشی از زحمات آنان را سپاس گویم.

هدا ساکی
۱۴۰۱

فهرست مطالب

چ	فهرست تصاویر
۱	فهرست جداول
۹	۱ پیشنهاد
۹	۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱۲	۲.۱ تبدیل لاپلاس
۱۲	۱.۲.۱ تبدیل لاپلاس برخی عملگرهای کسری
۱۴	۳.۱ فضای برداری
۱۶	۴.۱ فرآیند گرام اشمیت
۱۷	۵.۱ فضای هسته بازتولید
۱۸	۱.۵.۱ برخی خواص اساسی هسته بازتولید
۱۸	۲.۵.۱ فضای هسته باز تولید $W_2^m[a, b]$
۲۲	۳.۵.۱ زیر فضاهای بسته فضای هسته بازتولید $W_2^m[a, b]$
۲۴	۴.۵.۱ فضای تابعی دوتایی $W_2^{m,n}(D)$
۲۶	۲ معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب و پادمتناوب
۲۶	۱.۲ مقدمه
۳۰	۲.۲ ساختار روش هسته باز تولید در فضای هیلبرت
۳۵	۳.۲ آنالیز همگرایی
۳۸	۴.۲ مثال های عددی
۴۳	۵.۲ نتیجه گیری
	۳ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب با استفاده از روش هسته باز تولیدی
۴۶	۱.۳ مقدمه
۴۷	۲.۳ ساختار روش هسته باز تولید
۵۰	۳.۳ آنالیز همگرایی



۴.۳	مثالهای عددی	۵۴
۵.۳	نتیجه گیری	۵۹
۴	حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط پاد متناوب با روش هسته باز تولیدی	۶۰
۱.۴	مقدمه	۶۰
۲.۴	روش هسته باز تولیدی	۶۱
۳.۴	آنالیز همگرایی	۶۴
۴.۴	نتایج عددی	۶۷
۵.۴	نتیجه گیری و کارهای آتی	۶۹
۷۰	مراجع	
۸۰	واژه نامه انگلیسی به فارسی	
۸۱	واژه نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

۳۹	نمودار خطای مطلق با $n = 40$ برای مثال ۱.۴.۲	۱.۲
۳۹	نمودار خطای مطلق با $n = 40$ برای مثال ۲.۴.۲	۲.۲
۴۲	نمودارهای نتایج عددی و خطای مطلق با $n = 22$ برای مثال ۱.۴.۴	۳.۲
۴۲	نمودارهای حل عددی و خطای مطلق با $n = 20$ برای مثال ۴.۴.۲	۴.۲
۴۵	نمودار نتایج عددی با $n = 10$ برای مثال ۵.۴.۲	۵.۲
۶۸	نمودارهای خطای مطلق و حل عددی با $m = 31$ برای مثال ۱.۴.۴	۱.۴
۶۸	نمودارهای نتایج عددی و خطای مطلق با $m = 63$ برای مثال ۲.۴.۴	۲.۴

فهرست جداول

۴۰	خطای مطلق برای مثال ۱.۴.۲ با $n = 40$	۱.۲
۴۱	خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۲ با $n = 40$	۲.۲
۴۳	خطای مطلق برای مثال ۳.۴.۲ با $n = 22$	۳.۲
۴۴	خطای مطلق برای مثال ۴.۴.۲ با $n = 20$	۴.۲
۴۴	نتایج عددی برای مثال ۵.۴.۲ با $n = 10$	۵.۲
۵۵	نتایج عددی $v_1(t)$ برای مثال (۱.۴.۳) با $n = 20$	۱.۳
۵۶	نتایج عددی $v_2(t)$ برای مثال (۱.۴.۳) با $n = 20$	۲.۳
۵۷	نتایج عددی $v_3(t)$ برای مثال (۱.۴.۳) با $n = 20$	۳.۳
۵۸	نتایج عددی $v_1(t)$ برای مثال (۲.۴.۳) با $n = 35$	۴.۳
۵۹	نتایج عددی $v_2(t)$ برای مثال (۲.۴.۳) با $n = 35$	۵.۳
۶۷	خطای مطلق برای مثال ۱.۴.۴ با $m = 31$	۱.۴
۶۹	خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۴ با $m = 63$	۲.۴

پیشگفتار

اولین سوالی که در زمینه حساب کسری به ذهن خطور می‌کند این است که چگونه حساب کسری^۱ به وجود آمده است و احتمالاً پاسخ آن در گفتگوی لایبنیتس^۲ و هوییتال^۳ در اوایل قرن هفدهم میلادی نهفته است. همه چیز از زمانی شروع شد که هوییتال در ۳۰ سپتامبر ۱۹۶۵ [۲۸] نامه‌ای به لایبنیتس نوشت و از او در مورد علامت خاص n^{th} که در مقاله خود برای مشتق تابع استفاده کرده بود، می‌پرسد؛ یعنی،

$$\frac{d^n y}{dt^n}$$

هوییتال علاقه مند بود زمانیکه $n = \frac{1}{2}$ است نتیجه را بداند؛ یعنی، او علاقه‌مند بود مشتق مرتبه $\frac{1}{2}$ را بیابد. لایبنیتس در سال ۱۶۹۵ پاسخ داد: "این منجر به پارادوکس خواهد شد. " اما او پیشگویی کرد: «از این پارادوکس ظاهری، روزی نتایج مفیدی به دست خواهد آمد». در سال ۱۹۶۷، لایبنیتس برای اشاره به حاصلضرب نامتناهی والیس^۴ برای $\frac{\pi}{2}$ از علامت $d^{\frac{1}{2}}y$ استفاده کرد و بیان کرد که ممکن است از حساب دیفرانسیل برای دستیابی به همان نتیجه استفاده شده باشد.

لاکرویس^۵ در کتاب ۷۰۰ صفحه‌ای خود [۳] درباره حساب دیفرانسیل و انتگرال که در سال ۱۸۱۹ منتشر شد، فرمول مشتق مرتبه $n - m$ را $y = x^m$ را گسترش داد که m عدد صحیح مثبت است

$$D_x^n y = \frac{d^n}{dx^n}(x^m) = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n.$$

با توجه به تابع گاما

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1} dx.$$

لاکرویس فرمول مشتق کسری تابع توان را بصورت زیر تعریف کرد:

$$D_x^{\frac{1}{2}} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

با کمال تعجب، تعریف قبلی یک مقدار ناصفر برای مشتق کسری یک تابع ثابت می‌دهد

$$D_x^\alpha 1 = D_x^\alpha x^0 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} x^{-\alpha} \neq 0.$$

¹Fractional Calculus

²Leibniz

³Hospital

⁴Wallis

⁵Lacroix

با توجه به خطی بودن مشتقات کسری، روش لاکرویس برای هر تابع تحلیلی قابل استفاده بود. جالب است بدانید که همزمان با این تحولات نظری، اولین کاربردهای عملی حساب کسری را نیز می‌توان یافت، مانند کشف آبل^۶ در ۱۸۲۳ [۵، ۶، ۷]. آبل معادله انتگرالی مسئله همزمانی^۷ را با تبدیل انتگرال زیر حل کرد:

$$K = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} f(t) dt.$$

روش آبل توجه جوزف لیوویل^۸ را به خود جلب کرد، کسی که اولین مطالعه جدی در مورد حساب کسری را انجام داد [۸، ۲۷، ۱۰]. بیشترین پیشرفت‌ها در این موضوع در حدود سال ۱۸۳۲ به دست آمد، زمانی که او شروع به مطالعه جدی حساب کسری کرد و سپس موفق شد نتایج خود را برای مسائل نظریه پتانسیل اعمال کند. لیوویل نظریه خود را با استفاده از نتیجه شناخته شده برای مشتقات مرتبه صحیح n آغاز کرد

$$D_x^n e^{ax} = a^n e^{ax}. \quad (۱)$$

عبارت (۱) را می‌توان به راحتی به مقادیر ناصحیح n تعمیم داد، بنابراین به دست می‌آید:

$$D_x^\alpha e^{ax} = a^\alpha e^{ax}. \quad (۲)$$

او با استفاده از بسط فوری، نمایش سری‌ها برای $f(x)$ را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp(a_n x), \operatorname{Re}(a_n) > 0$$

دوباره، با توجه به خطی بودن مشتق کسری، لیوویل عبارت زیر را برای ارزیابی مشتق از مرتبه α ارایه داد:

$$D_x^\alpha f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}. \quad (۳)$$

فرمول (۳) به عنوان اولین فرمول لیوویل برای مشتق کسری شناخته می‌شود [۸]. با این حال، این فرمول را نمی‌توان به عنوان یک تعریف کلی از مشتق کسری در نظر گرفت. برای غلبه بر این موضوع، لیوویل تلاش کرد تا یک تعریف دوم تولید کند. او با یک انتگرال معین (ارتباط نزدیکی با تابع گاما^۹ دارد) شروع کرد:

$$I = \int_0^\infty u^{\beta-1} e^{-xu} du, \beta > 0, x > 0,$$

و فرمول دوم لیوویل را استخراج کرد

$$D_x^\alpha x^{-\beta} = (-1)^\alpha \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\beta)} x^{-\alpha-\beta}, \beta > 0.$$

⁶N.H.Abel

⁷tautochrone problem

⁸Liouville Joseph

⁹Gamma

هیچ یک از تعاریف قبلی برای تعریف کلی مشتق کسری مناسب نبود. در سال‌های بعد، تعدادی فرمول مشابه ظاهر شد. برای مثال، گریر^{۱۰} [۱۱]، فرمول‌های مشتقات کسری توابع مثلثاتی را با استفاده از (۲) به شکل زیر استخراج کرد:

$$D_x^\alpha e^{iax} = a^\alpha \left(\cos \frac{\pi\alpha}{2} + i \sin \frac{\pi\alpha}{2} \right) (\cos ax + i \sin ax)$$

جوزف فوریه [۱۲]^{۱۱} نمایش‌های انتگرالی زیر را برای $f(x)$ و مشتقات آن به دست آورد:

$$D_x^n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \cos[t(x - \zeta) + n\frac{\pi}{2}] dt,$$

او با جایگزینی عدد صحیح n با یک مقدار حقیقی دلخواه α به دست آورد:

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} t^\alpha \cos[t(x - \zeta) + \alpha\frac{\pi}{2}] dt.$$

احتمالاً مفیدترین پیشرفت در توسعه حساب کسری به دلیل مقاله ای بود که برنهارد ریمان^{۱۲} [۱۳] در دوران دانشجویی اش نوشت. متأسفانه، این مقاله پس از مرگ او در سال ۱۸۹۲ منتشر شد. ریمان به دنبال تعمیم یک سری تیلور در سال ۱۸۵۳، تعاریف متفاوتی را استخراج کرد که شامل انتگرال معین بود و برای سری‌های توانی با توان ناصحیح قابل استفاده بود

$$D_{c,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \Psi(x), \quad (4)$$

در واقع، عبارت به دست آمده، پرکاربردترین تعریف انتگرال کسری است. به دلیل ابهام در حد پایین انتگرال‌گیری، ریمان به تعریف خود یک تابع "مکمل" ساب کسری و کاربردهای آن $\Psi(x)$ اضافه کرد.

به نظر می‌رسد اولین اثری که در نهایت به آنچه که امروزه تعریف ریمان-لیوویل نامیده می‌شود منجر شد، مقاله ای از سونین^{۱۳} [۱۴] باشد. سونین در سال ۱۸۶۹، جایی که از فرمول انتگرال کوشی به عنوان نقطه شروع برای رسیدن به تمایز با شاخص دلخواه استفاده کرد. لتنیکوف^{۱۴} [۱۵] اندکی بعد در سال ۱۸۷۲ ایده سونین را گسترش داد [۱۶]. هر دو سعی کردند مشتقات کسری را با استفاده از مرز بسته تعریف کنند. شروع با فرمول انتگرال کوشی برای مشتقات مرتبه صحیح، ارایه شده با

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{(n+1)}} dt, \quad (5)$$

¹⁰Greer

¹¹Joseph Fourier

¹²G. F. Bernhard Riemann

¹³N. Ya. Sonin

¹⁴Letnikov

تعمیم به حالت کسری را می‌توان با جایگزینی فاکتوریل با تابع گامای اویلر $\Gamma(1 + \alpha) = \alpha!$ به دست آورد. با این حال، گسترش مستقیم به مقادیر ناصحیح α منجر به این مشکل می‌شود که انتگرال در (۵) حاوی یک نقطه انشعاب شود، جایی که یک کانتور مناسب نیاز به یک برش شاخه دارد که در کار سونین و لتنیکوف گنجانده نشده است. سرانجام، لورن^{۱۵} [۱۷]، از یک کانتور به عنوان یک مدار باز به جای مدار بسته استفاده شده توسط سونین و لتنیکوف استفاده کرد و بنابراین تعریف امروزی از انتگرال کسری ریمان-لیوویل را ارائه کرد

$$D_{c,x}^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (۶)$$

در عبارت (۶) شخص فوراً فرمول ریمان (۴) را تشخیص می‌دهد، اما بدون تابع مکمل. در اصطلاح امروزی، عبارت (۶) با حد پایین $c = -\infty$ به عنوان انتگرال کسری لیوویل شناخته می‌شود. با گرفتن $c = 0$ عبارت به انتگرال کسری ریمان تبدیل می‌شود، در حالی که عبارت (۶) با حد پایین دلخواه c انتگرال کسری ریمان-لیوویل نامیده می‌شود. عبارت (۶) پرکاربردترین تعریف عملگر انتگرال کسری است که امروزه مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این حال می‌توان نشان داد که

$$D_{c,x}^{\alpha} f(x) = D_{c,x}^{n-\beta} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(D_{c,x}^{-\beta} f(x) \right) = \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_c^x (x-t)^{\beta-1} f(t) dt \right), \quad (۷)$$

برقرار است، که امروزه به عنوان تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل شناخته می‌شود. در (۷) عدد $n = [\alpha]$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از α با $0 < \beta = n - \alpha < 1$ تقریباً به طور همزمان، گرونوالد^{۱۶} و لتنیکوف^{۱۷} مبنای تعریف دیگری از مشتق کسری [۱۸] را ارائه کردند که امروزه نیز اغلب استفاده می‌شود. گرونوالد (۱۸۶۷) به فرمول‌های انتگرال معین برای مشتقات معمولی رسید و نشان داد که انتگرال معین ریمان باید دارای حد پایین متناهی باشد و همچنین تعریف لیوویل، که در آن هیچ حد پایین قابل تشخیصی دیده نمی‌شود، با حد پایین $-\infty$ مطابقت دارد. به طور رسمی،

$${}^{GL}D_x^{\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\Delta_h^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh)}{h^{\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (۸)$$

امروزه مشتق کسری گرونوالد-لتنیکوف نامیده می‌شود. در (۸)،

$$\binom{\alpha}{s} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s! \Gamma(\alpha - s + 1)}$$

ضریب دوجمله‌ای تعمیم یافته است. لتنیکوف [۱۵] همچنین نشان داد که (۸) در شرایط خاص با تعاریفی که ریمان-لیوویل ارائه کرده است مطابقت دارد. امروزه، تعریف گرونوالد-لتنیکوف برای روش‌های عددی مختلف استفاده می‌شود که از فرمول (۸) با مجموع محدود برای تقریب مشتقات کسری استفاده می‌کنند. همراه با پیشرفت‌هایی که در حساب کسری در پایان قرن نوزدهم انجام

¹⁵Laurent

¹⁶Grunwald

¹⁷Letnikov

شد، کار هیوساید^{۱۸} [۱۹] باید ذکر شود. محاسبات عملیاتی هیوساید که برای حل مسایل خاصی از نظریه الکترومغناطیسی ایجاد شد، گام بعدی مهم در کاربرد مشتقات تعمیم یافته بود. ارتباط با حساب کسری با این واقعیت ایجاد شده است که هیوساید از توان‌های دلخواه P برای به دست آوردن جواب مسایل مختلف مهندسی استفاده می‌کند.

ویل^{۱۹} [۲۰] و هاردی^{۲۰} [۲۱، ۲۲] نیز برخی از خصوصیات انتگرال‌های متفاوت توابع متعلق به کلاس‌های لبگ^{۲۱} و لپشیتس^{۲۲} را در سال ۱۹۱۷ بررسی کردند. علاوه بر این، ویل نشان داد که انتگرال‌های کسری زیر را می‌توان برای $0 < \alpha < 1$ نوشت با این فرض که انتگرال‌های موجود در (۹) در بازه‌ای نامتناهی همگرا هستند

$$I_+^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t) dt, \quad I_-^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t) dt. \quad (9)$$

به ویژه، تعریف ریمان-لیوویل از یک انتگرال کسری ارائه شده در (۶) با حد پایین $c = -\infty$ ، شکلی معادل تعریف انتگرال کسری ارایه شده توسط لیوویل، اغلب به عنوان انتگرال کسری ویل نیز شناخته می‌شود. در اصطلاح، عملگرهای کسری سمت چپ و راست را دو نوع متمایز می‌شناسند. عملگرهای ویل تعریف شده در (۹) گاهی اوقات به ترتیب به عنوان انتگرال کسری چپ و راست ویل نیز نامیده می‌شوند.

بعداً، در سال ۱۹۲۷، مارکو^{۲۳} نسخه یکپارچه از تعریف گرونوالد-لتنیکوف (۸) از مشتقات کسری را توسعه داد [۲۳] با استفاده از

$${}^M D_x^\alpha f(x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{(\Delta_t^l f)(x)}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-t)}{t^{1+\alpha}} dt, \quad \alpha > 0$$

به عنوان مشتق کسری یک تابع مفروض f که امروزه به عنوان مشتق کسری مارکو شناخته می‌شود. عبارت $(\Delta_t^l f)(x)$ یک تفاضل متناهی از مرتبه $l > \alpha$ و c یک ثابت نرمال کننده است. از آنجایی که این تعریف با تعریف گرونوالد-لتنیکوف مرتبط است، با تعریف ریمان-لیوویل تحت شرایط خاصی مطابقت دارد. رایز^{۲۴} تعدادی مقاله از سال ۱۹۳۸ منتشر کرد [۲۴، ۲۵] که حول محور انتگرال هستند

$${}^R I^\alpha \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\alpha) \cos(\alpha \frac{\pi}{2})} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(t)}{|t-x|^{1-\alpha}} dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \alpha \neq 1, 3, 5, \dots$$

که امروزه به عنوان پتانسیل رایز شناخته می‌شود. این انتگرال (و تعمیم آن در فضای اقلیدسی n بعدی) به انتگرال‌های کسری ویل (۹) و ریمان-لیوویل به شکل زیر مربوط می‌شود:

$${}^R I^\alpha = (I_+^\alpha + I_-^\alpha)(2 \cos(\alpha \frac{\pi}{2}))^{-1}.$$

¹⁸Heaviside

¹⁹Weyl

²⁰Hardy

²¹Lebesgue

²²Lipschitz

²³Marchaud

²⁴Riesz

در سال ۱۹۴۹ راینز [۲۵] همچنین نظریه انتگرال کسری را برای توابع بیش از یک متغیر توسعه داد. اصلاح تعریف ریمان-لیوویل از انتگرال‌های کسری، ارایه شده با

$$\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} \varphi(t) dt, \quad \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1} t^{1-2\alpha-2\eta} \varphi(t) dt,$$

که توسط اردلی^{۲۵} و همکارانش در [۲۶] معرفی شدند که در کاربردهای مختلف مفید واقع شدند. از جمله مهم‌ترین کمک‌های مدرن به حساب کسری، مواردی است که توسط نتایج کاپوتو در سال ۱۹۶۷ انجام شد. یکی از اشکالات اصلی تعریف ریمان-لیوویل از مشتق کسری این است که معادلات دیفرانسیل کسری با این نوع عملگر دیفرانسیلی به مجموعه‌ای از شرایط اولیه نیاز دارند. به طور خاص، مقادیر انتگرال‌ها و مشتقات کسری خاص باید در لحظه اولیه مشخص شوند تا حل معادله دیفرانسیل کسری پیدا شود. کاپوتو تعریف "کلاسیک" مشتق کسری ریمان-لیوویل را به منظور استفاده از شرایط اولیه کلاسیک دوباره فرموله کرد. با توجه به تابع f با مشتق مرتبه صحیح $n-1$ مطلقاً پیوسته، کاپوتو یک مشتق کسری را با عبارت زیر تعریف کرد:

$$D_*^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds}\right)^n f(s) ds, \quad n < \alpha < n-1, \quad (10)$$

مشتق (۱۰) به مشتق کسری ریمان-لیوویل مربوط است. جالب است بدانید که رابوتنوف^{۲۶} یک سال قبل از انتشار مقاله کاپوتو، همان عملگر دیفرانسیل را در مقاله ویسکوالاستیک روسیه معرفی کرد. صرف نظر از این واقعیت، عملگر پیشنهادی امروزه به نام کاپوتو نامگذاری شده است.

در نیمه دوم قرن بیستم، حوزه حساب کسری به حدی رشد کرد که در سال ۱۹۷۴ اولین کنفرانس "حساب کسری و کاربردهای آن" که صرفاً به نظریه و کاربردهای حساب کسری مربوط می‌شد در نیوهیون^{۲۷} برگزار شد. در همان سال، اولین کتاب در حساب کسری توسط اولدهام^{۲۸} و اسپانیر^{۲۹} [۴] پس از شروع همکاری مشترک در سال ۱۹۶۸ منتشر شد.

هسته‌های بازتولید کننده در دهه اول قرن بیستم توسط زارمبا^{۳۰} در کارش در مورد مسایل مقدار مرزی برای توابع هارمونیک کشف شد. او اولین کسی بود که یک هسته را به دسته‌ای از توابع مرتبط کرد و ویژگی بازتولید آن را بیان کرد. با این حال، تا پایان نامه برگمن^{۳۱} در سال ۱۹۲۱، هیچ نظریه عمومی توسعه داده نشده بود. برگمن متوجه خاصیت بازتولید هسته‌های ساخته شده از سیستم‌های متعامد توابع هارمونیک و تحلیلی در یک یا چند متغیر شد [۲]. در طول بیست سال بعد، نتایج مهم زیادی با استفاده از این هسته‌ها به دست آمد تا اینکه نظریه عمومی بازتولیدی هسته‌ها توسط آرونزان^{۳۲} (۱۹۴۳) [۱] مطرح شد. آرونزان در مقاله خود نتایج اساسی در نظریه عمومی فضای

²⁵Erdelyi

²⁶Rabotnov

²⁷New Haven

²⁸Oldham

²⁹Spanier

³⁰Zaremba

³¹Bergman

³²Aronzan

هسته باز تولیدی^{۳۳} را بیان کرد. تئوری توابع معین مثبت توسط مرسر^{۳۴} (۱۹۰۹) توسعه یافت و به کاربردهای زیادی در نظریه تبدیل فوریه (بوشنر، ۱۹۳۲) و گروه‌های توپولوژیکی منجر شد. مقاله اصلی آرونزان، که در سال ۱۹۵۰ ظاهر شد، مقدمه و پیشینه تاریخی خوبی ارائه می‌دهد. آخرین بسط به سال ۱۹۶۲ باز می‌گردد، زمانی که شوارتز^{۳۵} مفهوم زیرفضای هیلبرت فضای برداری توپولوژیکی را معرفی کرد و به مطابقت بین زیرفضاهای هیلبرت و هسته‌های تعمیم دهنده آرونزان اشاره کرد. از سال ۱۹۸۰ به واسطه تلاش‌های کوی^{۳۶} و همکاران توابع هسته‌ای بازتولید به شکل بسیار ساده‌ی چندجمله‌ای معرفی شدند [۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵]. آنها توانستند روی روش‌هایی مبتنی بر فضای هسته بازتولید کار کنند.

روش‌های مبتنی بر فضای هسته بازتولیدی، بر پایه نظریه بهترین تقریب در فضای هیلبرت و استفاده از بسط فوریه می‌باشد. در این روش‌ها، ابتدا فضای هسته بازتولیدی با توجه به صورت کلی مسئله و شرایط حاکم بر آن تعریف می‌شود و سپس هسته بازتولیدی را به صورت تابعی چند ضابطه‌ای به دست می‌آوریم. علاوه بر این توابع پایه متعامد یکه با استفاده از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت تولید می‌شوند و به عنوان توابع پایه در تقریب جواب مورد استفاده قرار می‌گیرند. بعضی از وجوه تمایز روش هسته بازتولیدی درمقایسه با روش‌های دیگر برای حل مسائل خطی و غیرخطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

۱. دارای پیاده سازی آسان و کارا در استفاده از شرایط مرزی متنوع است.

۲. بی نیاز از شبکه است و به گسسته سازی زمان نیازی ندارد.

۳. در حل بسیاری از مسایل غیرخطی با شرایط گوناگون توانا است.

۴. جواب تقریبی به جواب تحلیلی به طور یکنواخت همگرا است.

این رساله به صورت زیر سازماندهی شده است:

در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه را توضیح می‌دهیم. در فصل دوم روش هسته باز تولید را برای معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب و نامتناوب بکار برده‌ایم. در فصل سوم این روش را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با شرط متناوب استفاده می‌کنیم. در فصل چهارم معادلات دیفرانسیل از مرتبه اول با شرط نامتناوب را با روش هسته باز تولید در فضای هیلبرت حل می‌کنیم. مقاله زیر از این رساله مستخرج شده است:

1. Hoda Saky, Saeid Abbasbandy, Elyas Shivanian, "Applying the Reproducing Kernel Method to Fractional Differential Equations with Periodic Conditions in Hilbert Space", Journal of Mathematics, vol. 2022, Article ID 6261378, 10 pages, 2022.

³³RKHS

³⁴Mercer

³⁵Schwarz

³⁶Cui

فصل ۱

پیشنیاز

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز برای فصل‌های بعدی را ارائه خواهیم نمود. بسط یک تابع فاکتوریل برای اعداد صحیح نامنفی به عنوان تابع گاما شناخته می‌شود که با نماد Γ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. برای $a > 0$ ، تابع گاما $\Gamma(a)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx, a > 0$$

برخی ویژگی‌های تابع گاما به صورت زیر است:

$$۱. \Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$$

$$۲. \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \text{ برای } n > 0$$

$$۳. \Gamma(n) = (n-1)!$$

تعریف ۲.۱.۱. تابع میتاگ-لفلر تعمیم تابع نمایی است که توسط سری زیر معرفی می‌شود:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \alpha > 0, \alpha \in R$$

سپس تعمیم دو پارامتر آن توسط آگاروال معرفی شد:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \alpha, \beta > 0, \alpha, \beta \in R.$$

برخی ویژگی‌های تابع میتاگ-لفلر به صورت زیر است:

$$۱. E_{1,1}(z) = e^z$$



$$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z) \quad ۲.$$

$$E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z} \quad ۳.$$

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad ۴.$$

$$E_{\frac{1}{2},1}(z) = e^{z^2} \operatorname{erf}(-z) \quad ۵.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید $\alpha > 0, t > a, \alpha, a, t \in \mathbb{R}$ و $f \in C[a, b]$ ، انتگرال کسری مرتبه α ریمان - لیویل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{1-\alpha}} dx.$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید که $\alpha > 0, t > a, \alpha, a, t \in \mathbb{R}$ و $f \in C[a, b]$ ، عملگر کسری

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx; \quad n-1 < \alpha < n$$

مشتق کسری ریمان- لیویل مرتبه α نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $\alpha > 0, t > a, \alpha, a, t \in \mathbb{R}$

$$D_*^{\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{\alpha+1-n}} dx, \quad n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \quad (۱.۱)$$

مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α نامیده می‌شود.

برای درک عمیق انتگرال و مشتق ریمان- لیویل، برخی از مهم ترین ویژگی های این عملگر در زیر ذکر شده است.

لم ۶.۱.۱. با فرض تابع دلخواه $f(x)$ و $m, n \geq 0$ معادلات زیر برقرار هستند:

$$۱. \text{ خاصیت نیم گروه: } I^n I^m = I^{m+n}.$$

$$۲. \text{ خاصیت جابجایی: } I^m I^n f(x) = I^n I^m f(x).$$

لم ۷.۱.۱. فرض کنید f_1 و f_2 دو تابع روی $[a, b]$ باشند و همچنین $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, n > 0, m > n$ که m و n اعداد صحیح هستند. در این صورت داریم:

$$۱. D^n(f_1 + f_2) = D^n f_1 + D^n f_2, \quad D^n(c_1 f_1) = c_1 D^n f_1.$$

$$۲. C \text{ عدد ثابت است } D^{\alpha} C = 0.$$

$$۳. D^q(f_1 f_2) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} D^j(f_1) D^{q-1-j}(f_2).$$

$$۴. D^a D^b f_1 = D^{a+b} f_1.$$

اثبات لم های بالا در [۶] ببینید.

در این بخش، برخی از خصوصیات اساسی مربوط به عملگر کاپوتو نشان داده شده است که اثبات آنها را در [۶] می توان یافت.

فرض کنید $f \in C^n[a, b]$ و $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, m > n \geq 0$ با در نظر گرفتن این موارد

$$1. D_*^n I^n f = f$$

$$2. D_*^0 f(x) = 0$$

$$3. I^n D_*^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{D^k f(a)}{k!} (x-a)^k$$

$$4. D_*^n (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 (D_*^n f_1) + c_2 (D_*^n f_2)$$

$$5. D_*^\alpha D_*^\beta f(x) = D_*^{\alpha+\beta} f(x)$$

$$6. D_*^\alpha t^\rho = \begin{cases} \frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma(\rho-\alpha+1)} t^{\rho-\alpha} = D_*^\alpha t^\alpha & n-1 < \alpha < n, \rho > n-1, \rho \in \mathbb{R} \\ 0 & n-1 < \alpha < n, \rho \leq n-1, \rho \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$7. D_*^\alpha e^{\nu t} = \nu^n t^{n-\alpha} E_{1, n-\alpha+1}(\nu t), \alpha \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{C}$$

$$8. D_*^\alpha \sin \lambda t = -\frac{1}{2} i (i\lambda)^n t^{n-\alpha} (E_{1, n-\alpha+1}(i\lambda t) - (-1)^n (E_{1, n-\alpha+1}(i\lambda t)^2))$$

$$9. D_*^\alpha D_*^m f(t) = D_*^{\alpha+m} f(t) \neq D_*^m D_*^\alpha f(t), n-1 < \alpha < n, m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$$

ملاحظه ۸.۱.۱. تبدیل لاپلاس مشتق کسری کاپوتو تعمیم تبدیل لاپلاس از مشتق مرتبه صحیح است که در آن n با α جایگزین می شود. این موضوع در مورد عملگر ریمان-لیویل صدق نمی کند. این ویژگی یک مزیت مهم عملگر کاپوتو نسبت به عملگر ریمان-لیویل است. فرض کنید $t > 0, \alpha \in \mathbb{R}, n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}$ بنابراین رابطه زیر بین عملگر کاپوتو و ریمان-لیویل برقرار است

$$D_*^\alpha f(t) = D^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0)$$

تعریف ۹.۱.۱. برای $a \geq 0$ تابع ضربه $\delta_\varepsilon(t-a)$ عبارت است از

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |t-a| < \varepsilon, \\ 0, & |t-a| > \varepsilon, \end{cases}$$

با توجه به تعریف تابع ضربه می توان به دست آورد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-a) dt = 1.$$

حد تابع ضربه وقتی مقدار ε به سمت صفر میل می کند، تابع دلتای دیراک $\delta(t-a)$ حول نقطه a نامیده می شود، به عبارت دیگر

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t-a).$$

همچنین تابع ضربه را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۱.۰.۱.۱. برای $a \geq 0$ تابع ضربه $\delta_\varepsilon(t - a)$ در فاصله $[0, \infty]$ عبارت است از

$$\delta_\varepsilon(t - a) = \begin{cases} 1, & a < t < a + \varepsilon, \\ 0, & \text{o.w.}, \end{cases}$$

که باز نویسی آن بر حسب توابع پله‌ای به صورت زیر می‌باشد

$$\delta_\varepsilon(t - a) = \frac{1}{\varepsilon}(u_a(t) - u_{a+\varepsilon}(t)).$$

با توجه به تعاریف فوق، اگر تابع $g(t)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، تابع دلتای دیراک دارای خاصیت زیر خواهد بود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - a)g(t)dt = g(a),$$

علی‌الخصوص، با انتخاب $a = 0$ داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)g(t)dt = g(0).$$

۲.۱ تبدیل لاپلاس

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $f(t)$ تابعی با متغیر $0 < t < \infty$ به طوریکه تابع $e^{-st}f(t)$ برای برخی مقادیر s انتگرال پذیر باشد، تبدیل لاپلاس f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt.$$

تبدیل لاپلاس تابع $f(t) = t^\alpha$ برای مقادیر $\alpha > -1$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$L\{t^\alpha\} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}.$$

قضیه ۲.۲.۱. قضیه وجود تبدیل لاپلاس: فرض کنید $f(x)$ تابع پیوسته در بازه $[0, \infty]$ که از مرتبه نمایی است، یعنی برای هر $c \in \mathbb{R}$ و $x > 0$ داریم:

$$\sup \frac{|f(x)|}{\exp^{cx}} < \infty,$$

در این صورت تبدیل لاپلاس برای هر $s > c$ موجود است.

۱.۲.۱ تبدیل لاپلاس برخی عملگرهای کسری

فرض کنید که $p > 0$ و $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، آنگاه عبارات زیر برقرار است [۲۷]:

۱. تبدیل لاپلاس عملگر دیفرانسیل کسری ریمان-لیوویل مرتبه α برابر است با

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} [D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0}, \quad n-1 < \alpha < n.$$

۲. تبدیل لاپلاس از عملگر دیفرانسیل کسری کاپوتو از مرتبه α داده شده است با

$$L\{D_*^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$$

که در شکل زیر قابل بیان است:

$$L\{D_*^\alpha f(t)\} = \frac{s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}{s^{n-\alpha}}.$$

۳. فرض کنید $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta > 0$, $m \in \mathbb{N}$ در این صورت، تبدیل لاپلاس تابع دو پارامتری میتاگ-لفلر با معادله زیر داده می شود:

$$L\{t^{\alpha m + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(m)}(\pm \lambda t^\alpha)\} = \frac{m! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp \lambda)^{m+1}}, \quad \operatorname{Re}(s) > |\lambda|^{\frac{1}{\alpha}}$$

این فرمول عمدتاً برای حل معادلات دیفرانسیل کسری استفاده می شود.

۳.۲.۱. فرض کنید $a \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq \beta > 0$, $s^{\alpha - \beta} > |a|$ بنابرین ما فرمول تبدیل لاپلاس معکوس زیر را داریم:

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha + a s^\beta)^{n+1}} \right\} = t^{\alpha(n+1)-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha - \beta) + (n+1)\alpha)} t^{k(\alpha - \beta)}.$$

برهان.

$$\frac{1}{(s^\alpha + a s^\beta)^{n+1}} = \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1} \left(1 + \frac{a}{s^{\alpha - \beta}}\right)^{n+1}}$$

$$\text{چونکه } \frac{1}{(1+x)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-x)^k \text{ بنابرین}$$

$$= \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \left(\frac{-a}{s^{\alpha - \beta}}\right)^k$$

با بکار بردن معکوس تبدیل لاپلاس داریم

$$\begin{aligned} &= L^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha)^{n+1}} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} (-a)^k L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^{k(\alpha - \beta)}} \right\} \\ &= t^{\alpha(n+1)-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha - \beta) + (n+1)\alpha)} t^{k(\alpha - \beta)} \end{aligned}$$

□

لم ۴.۲.۱. فرض کنید $\alpha \geq \beta, \alpha > \gamma, a \in \mathbb{R}, s^{\alpha-\beta} > |a|, |s^\alpha + as^\beta| > |b|$ آنگاه

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^\gamma}{(s^\alpha + as^\beta + b)} \right\} = t^{\alpha-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^n (-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha - \gamma)} t^{k(\alpha-\beta) + n\alpha}$$

برهان.

$$\left\{ \frac{s^\gamma}{(s^\alpha + as^\beta + b)} \right\} = \frac{s^\gamma}{(s^\alpha + as^\beta) \left(1 + \frac{b}{s^\alpha + as^\beta}\right)} = \frac{s^\gamma}{(s^\alpha + as^\beta)} \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{s^\alpha + as^\beta}\right)}$$

از آنجاییکه $\left| \frac{b}{s^\alpha + as^\beta} \right| < 1$ و $\left[\frac{1}{(1+x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right]$ بنابراین

$$= \frac{s^\gamma}{(s^\alpha + as^\beta + b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{b}{s^\alpha + as^\beta} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-b)^n \frac{s^\gamma}{(s^\alpha + as^\beta)^{n+1}}$$

با بکار بردن تبدیل لاپلاس و لم ۳.۲.۱ همچنین با توجه به

$$L^{-1}\{s^\gamma\} = \frac{t^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}$$

$$= t^{\alpha-\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-b)^n (-a)^k \binom{n+k}{k}}{\Gamma(k(\alpha-\beta) + (n+1)\alpha - \gamma)} t^{k(\alpha-\beta) + n\alpha}$$

□

۳.۱ فضای برداری

تعریف ۱.۳.۱. اگر فرض کنیم V یک فضای برداری با مجموعه‌ای از عناصر با دو عمل جمع برداری “+” و ضرب اسکالر “.” باشد، در این صورت به ازای هر $u, v, w \in V$ و اسکالره‌ای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم $v + w \in V$ و $\alpha v \in V$. همچنین این فضا دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. (جابجایی جمع) برای هر $v, w \in V$ ، $v + w = w + v$.
۲. (شرکت پذیری جمع) برای هر $u, v, w \in V$ ، $(u + v) + w = u + (v + w)$.
۳. بردار یکتای $0 \in V$ وجود دارد که برای هر $v \in V$ ، $0 + v = v$.
۴. برای هر $v \in V$ بردار یکتای $-v \in V$ وجود دارد به طوری که $v + (-v) = 0$.
۵. (توزیع پذیری ضرب اسکالر بر جمع برداری) برای هر $v \in V$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ ، $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$.
۶. (توزیع پذیری جمع اسکالر بر ضرب اسکالر) برای هر $v \in V$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.
۷. برای هر $v \in V$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.



۸. برای هر $v \in V$ داریم $1.v = v$.

تعریف ۲.۳.۱. یک نرم در فضای برداری V تابعی است به صورت $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ که دارای خواص زیر است:

۱. برای هر $v \in V$ داریم $\|v\| \geq 0$.

۲. برای هر $v \in V$ و $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ، $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

۳. (نامساوی مثلث) برای هر $v, u \in V$ ، $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد. ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ تابعی است به صورت $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ با خواص زیر

۱. برای هر $u \in V$ داریم $\langle u, u \rangle \geq 0$ و اگر $\langle u, u \rangle = 0$ اگر و تنها اگر $u = 0$.

۲. برای هر $u, v \in V$ داریم $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

۳. برای هر $u, v, w \in V$ و هر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم $\langle au + bv, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$.

البته اگر در فضای مختلط باشد ویژگی دوم با ویژگی زیر عوض می شود

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}.$$

تعریف ۴.۳.۱. اگر V یک فضای نرمدار و دنباله $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ باشد که $f_n \in V$ آنگاه دنباله $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ کوشی است اگر

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| = 0,$$

یا

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n, m \geq N, \|f_m - f_n\| < \epsilon,$$

همچنین مشخص است که هر دنباله همگرا کوشی است.

تعریف ۵.۳.۱. یک فضای برداری نرمدار را کامل گویند، هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۶.۳.۱. یک فضای نرمدار کامل را فضای باناخ گویند.

تعریف ۷.۳.۱. یک فضای حاصل ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت گویند.

تعریف ۸.۳.۱. یک تابع خطی روی فضای برداری V تابعی به صورت $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ است که برای $v, w \in V$ در شرایط زیر صدق می کند:

$$1. T(v + w) = T(v) + T(w)$$

$$2. T(\alpha v) = \alpha T(v)$$

قضیه ۹.۳.۱. [۸۰] (قضیه نمایش ریس) فرض کنیم H یک فضای هیلبرت روی میدان $F = \mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت، اگر $L : H \rightarrow F$ یک تابع خطی کراندار باشد، آنگاه بردار منحصر به فرد $h_0 \in H$ موجود است به طوری که برای هر $h \in H$ و بعلاوه $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$ و $\|L\| = \|h_0\|$.

تعریف ۱۰.۳.۱. یک فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی کامل است در این فضا نرم به صورت زیر تعریف می شود

$$\|f\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

قضیه ۱۱.۳.۱. (نامساوی کوشی-شوارتز) برای هر بردار u و v در فضای ضرب داخلی V داریم

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

حالت تساوی رخ می دهد اگر و فقط اگر u و v وابسته ی خطی باشند.

۴.۱ فرآیند گرام اشمیت

تعریف ۱.۴.۱. دو بردار u و v را متعامد گوئیم اگر حاصل ضرب داخلی آنها برابر با صفر باشد، یعنی:

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

تعریف ۲.۴.۱. مجموعه ای از بردارها را متعامد یکه گوئیم هرگاه عناصر آن دارای نرم واحد باشند و عناصر آن دو به دو متعامد باشند. به عبارت دیگر، مجموعه ای از بردارهای $u_1, u_2, \dots, u_k \in V$ متعامد یکه گویند هرگاه

$$\langle u_j, u_k \rangle = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

تعریف ۳.۴.۱. مجموعه همه ترکیب های بردارهای $\{v_1, v_2, \dots\}$ در $\mathbb{R}^n$ به عنوان اسپن این بردارها شناخته شده و به صورت $Span\{v_1, v_2, \dots\}$ نشان داده می شود.

فرآیند گرام اشمیت دنباله ای از عملیات است که به ما امکان می دهد مجموعه ای از بردارهای مستقل خطی را به مجموعه ای از بردارهای متعامد تبدیل کنیم.

قضیه ۴.۴.۱. [۸۰] فرض کنید $u_1, u_2, \dots$ یک دنباله مستقل خطی در فضای ضرب داخلی V باشد. اگر دنباله $v_1, v_2, \dots$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1, \\ v_2 &= u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1, \\ &\vdots \\ v_{k+1} &= u_{k+1} - \sum_{j=1}^k \frac{\langle v_j, u_{k+1} \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle} v_j. \end{aligned}$$

آنگاه

۱. $\{v_1, v_2, \dots\}$ مجموعه ای متعامد است.

۲. برای $k = 1, 2, \dots$ داریم $\text{Span}\{u_1, u_2, \dots\} = \text{Span}\{v_1, v_2, \dots\}$ علاوه بر آن اگر $z_1, z_2, \dots$ یک دنباله متعامد دیگر باشد که برای هر k

$$\text{Span}\{u_1, u_2, \dots\} = \text{Span}\{z_1, z_2, \dots\},$$

آنگاه برای هر k یک عدد مانند $\lambda_k \neq 0$ وجود دارد به طوریکه $z_k = \lambda_k u_k$.

۵.۱ فضای هسته بازتولید

حال تعریف رسمی فضای بازتولیدی هسته هیلبرت را بیان می‌کنیم و تعدادی از اساسی‌ترین ویژگی‌های آنها را ارائه می‌دهیم. اثبات این ویژگی‌ها را در [۴۳] می‌توان یافت.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای مجرد و H یک فضای هیلبرت شامل تمام توابع حقیقی یا مختلط مقدار، با حاصلضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ باشد. برای هر $y \in H$ ثابت، اگر تابع $R_y(x) \in H$ و همچنین $f(x) \in H$ وجود داشته باشد که در شرط زیر صدق کند

$$\forall f \quad \langle f, R_y \rangle = f(y),$$

سپس $R_y(\cdot)$ را هسته بازتولید کننده H و فضای هیلبرت H را فضای هسته بازتولیدی می‌نامند.

مثال ۲.۵.۱. فضای هیلبرت $-n$ بعدی H با پایه متعامد یک $\{e_i\}_{i=1}^n$ را در نظر بگیرید به طوریکه:

$$\langle e_i, e_j \rangle_H = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

آنگاه $R_s(t) = \sum_{i=1}^n e_i(t) \overline{e_i(s)}$ هسته بازتولیدی H است. در واقع، برای هر $f(t) \in H$

$$f(t) = \sum_{i=1}^n b_i e_i(t), \quad (b_i \text{ ها اعداد مختلط هستند})$$

و در ضمن

$$\begin{aligned} \langle f(t), R_s(t) \rangle_H &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i e_i(t), \sum_{j=1}^n e_j(t) \overline{e_j(s)} \right\rangle_H = \sum_{i=1}^n b_i \langle e_i(t), \sum_{j=1}^n e_j(t) \overline{e_j(s)} \rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \overline{\left\langle \sum_{j=1}^n e_j(t) \overline{e_j(s)}, e_i(t) \right\rangle_H} = \sum_{i=1}^n b_i \overline{\left\langle \sum_{j=1}^n \overline{e_j(t)} e_j(s), \overline{e_i(t)} \right\rangle_H} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n e_j(s) \overline{\langle e_j(t), e_i(t) \rangle_H} = \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n e_j(s) \overline{\langle e_i(t), e_j(t) \rangle_H} \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \sum_{j=1}^n e_j(s) \langle e_i(t), e_j(t) \rangle_H = \sum_{i=1}^n b_i e_i(s) = f(s). \end{aligned}$$

۱.۵.۱ برخی خواص اساسی هسته باز تولید

۱. اگر H یک فضای هسته باز تولید باشد، هسته باز تولید $R_y(x)$ در H متقارن مزدوج است، یعنی

$$R_y(x) = \overline{R_x(y)}$$

۲. اگر H یک فضای هسته باز تولید باشد، هسته باز تولید $R_y(x)$ در H منحصر به فرد است.

۳. اگر $R_y(x)$ هسته باز تولید در H باشد، برای هر $x \in X$ داریم $R_x(x) \geq 0$ و $R_x(x) = 0$ اگر و فقط اگر $H = 0$.

۴. هسته باز تولید $R_y(x)$ یک هسته معین مثبت است، یعنی

$$\sum_{i,j=1}^n R_{x_i}(x_j) \bar{\xi}_i \xi_j \geq 0 \quad \forall x_i \in X$$

که ξ_i ها اعداد مختلط هستند.

۵. اگر R_1 و R_2 به ترتیب هسته های باز تولید از فضاهای H_1 و H_2 در دامنه Ω باشند آنگاه $R = R_1 + R_2$ هسته باز تولید از فضای $H = H_1 \oplus H_2$ با نرم زیر است:

$$\|f\|_H^2 = \min_{f=f_1+f_2} (\|f_1\|_{H_1}^2 + \|f_2\|_{H_2}^2).$$

۶. اگر $R: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ هسته باز تولید از H و $\Omega_0 \subset \Omega$ و R_0 تحدیدی از R به $\Omega_0 \times \Omega_0$ باشد آنگاه R_0 هسته باز تولیدی از H_0 است که H_0 فضایی که مولفه هایش از H به Ω_0 می باشد و نرم در آن به صورت زیر است

$$\|f_0\|_{H_0} = \min_{f|_{\Omega_0}} \|f\|_H.$$

۷. اگر R_1 و R_2 هسته های باز تولیدی از فضاهای H_1 و H_2 به ترتیب روی دامنه های Ω_1 و Ω_2 باشند، آنگاه هسته حاصلضرب تانسوری

$$R((x_1, x_2), (z_1, z_2)) = R_1(x_1, z_1) R_2(x_2, z_2)$$

هسته باز تولیدی از فضای حاصلضرب تانسوری $H = H_1 \otimes H_2$ است.

۸. فضای هیلبرت H یک فضای هسته باز تولید است اگر و فقط اگر برای هر ثابت $x \in X$ ، عملگر خطی $I(f) = f(x)$ کراندار باشد.

۲.۵.۱ فضای هسته باز تولید $W_2^m[a, b]$

تعریف ۳.۵.۱. تابع $f(\cdot)$ را در بازه $[a, b]$ در نظر بگیرید. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ زیربازه های دو به دو مجزای $[a, b]$ مانند $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ وجود داشته باشند به طوری که برای

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$$

داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

آنگاه تابع $f(\cdot)$ را پیوسته مطلق گوئیم.

گزاره ۴.۵.۱. [۴۳] هر تابع پیوسته مطلق تابعی پیوسته است.

گزاره ۵.۵.۱. [۴۳] تابع $f(\cdot)$ را در بازه $[a, b]$ در نظر بگیرید. اگر به ازای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $|f'(x)| \leq M$ آنگاه $f(\cdot)$ پیوسته مطلق است.

گزاره ۶.۵.۱. [۴۳] اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x f(t) dt$ در بازه $[a, b]$ پیوسته مطلق است.

تعریف ۷.۵.۱. فضای تابعی $W_2^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$W_2^m[a, b] = \{f(x) | f^{(m-1)}(x) \text{ پیوسته مطلقا}, f^{(m)}(x) \in L^2[a, b], x \in [a, b]\}.$$

ضرب داخلی و نرم برای هر تابع f و g در این فضا به شکل زیر است

$$\langle f, g \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x) dx, \quad (2.1)$$

$$\|f\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^m}}.$$

قضیه ۸.۵.۱. [۴۳] فضای تابعی $W_2^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۹.۵.۱. [۴۳] فضای تابعی $W_2^m[a, b]$ یک فضای هسته باز تولید است.

فرض کنید $R_y(x)$ تابع هسته باز تولید از $W_2^m[a, b]$ باشد، بنابراین برای هر $y \in [a, b]$ ثابت و هر $f(x) \in W_2^m[a, b]$ در رابطه زیر صدق می کند

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{W_2^m} = f(y).$$

با بکار بردن (۲.۱) به دست می آوریم

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx$$

که با انتگرال گیری جز به جز انتگرال $\int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx$ را حل می کنیم و به دست می آوریم

$$\begin{aligned} & \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_{x=a}^b + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx \end{aligned}$$



سپس i را با $m - i - 1$ جایگذاری می‌کنیم و رابطه زیر حاصل می‌شود

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(x) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}}.$$

بعلاوه

$$\begin{aligned} \langle f(x), R_y(x) \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^{m+i} R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx. \end{aligned}$$

در رابطه بالا برای اینکه رابطه زیر حاصل شود

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle = f(y),$$

صفر قرار می‌دهیم. بنابراین $\frac{\partial^{m+i} R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}}$ و $\frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}}$ عدد ثابت هستند پس برابر

$$\begin{aligned} \langle f(x), R_y(x) \rangle &= (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx \\ &= f(y), \end{aligned}$$

یعنی

$$(-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx = f(y),$$

همچنین رابطه زیر باید برقرار باشد

$$\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y),$$

به طوری که

$$\int_a^b (-1)^m f(x) \delta(x - y) dx = f(y),$$

اگر $y \neq x$ باشد تابع $\delta(x - y) = 0$ است پس باید $x = y$ باشد.

$$\int_a^b (-1)^m f(x) \delta(\cdot) dx = f(y),$$

که $\delta(\cdot) = 1$ است (طبق تعریف تابع دیراک) بنابراین

$$\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0,$$

بنابراین، $R_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل تعمیم یافته زیر است:

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{cases} \quad (3.1)$$

اگر $x \neq y$ باشد، بنابراین $\delta(x-y) = 0$ می شود، پس $R_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن خطی ثابت زیر از مرتبه $2m$ است

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0, \quad (4.1)$$

با شرایط مرزی زیر

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{cases} \quad (5.1)$$

معادله (۹.۱) دارای معادله مشخصه $\lambda^{2m} = 0$ است و مقدار ویژه $\lambda = 0$ از مرتبه $2m$ است. بنابراین جواب عمومی معادله (۱۰.۱) به صورت زیر است

$$R_y(x) = \begin{cases} lR_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y)x^{i-1}, & x < y, \\ rR_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y)x^{i-1}, & x > y. \end{cases}$$

حال ضرایب $c_i(y)$ و $d_i(y)$ را برای $i = 1, 2, \dots, 2m$ به دست می آوریم. از آنجایی که

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y),$$

داریم

$$\frac{\partial^i lR_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i rR_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2, \quad (6.1)$$

و

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} lR_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} rR_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1. \quad (7.1)$$

در نتیجه ضرایب $c_i(y)$ و $d_i(y)$ را برای $i = 1, 2, \dots, 2m$ با توجه به معادلات (۵.۱)، (۶.۱) و (۷.۱) به دست می آوریم.

مثال ۱۰.۵.۱. هسته بازتولید فضای $W_2^1[0, 1]$ به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq y, \\ 1+y, & x > y. \end{cases}$$

مثال ۱۱.۵.۱. هسته باز تولیدی فضای $W_2^3[0, 1]$ به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^5}{120} + \frac{1}{12}x^2y^2(3+x) + xy\left(1 - \frac{x^4}{24}\right), & x \leq y, \\ 1 + \frac{y^5}{120} + \frac{1}{12}x^2y^2(3+y) + xy\left(1 - \frac{y^4}{24}\right), & x > y. \end{cases}$$

گزاره ۱۲.۵.۱. [۴۳] فرض کنید $R_y(x)$ هسته باز تولیدی از فضای $W_2^m[a, b]$ باشد، آنگاه

$$1. \quad \frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \text{ برای } 0 \leq i+j \leq 2m-1 \text{ نسبت به } x \text{ یا } y \text{ عضو } L^2[a, b] \text{ است.}$$

$$2. \quad \frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \text{ برای } 0 \leq i+j \leq 2m-2 \text{ نسبت به } x \text{ یا } y \text{ یک تابع به طور مطلق پیوسته در } [a, b] \text{ است.}$$

$$3. \quad \frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \text{ برای } 0 \leq i+j \leq m-1 \text{ نسبت به } x \text{ یا } y \text{ یک تابع به طور مطلق پیوسته در } W_2^m[a, b] \text{ است.}$$

قضیه ۱۳.۵.۱. فرض کنید $W_2^m[a, b]$ فضای هسته باز تولیدی است و $f_n(x), f(x) \in W_2^m[a, b], (n = 1, 2, \dots)$ اگر $f_n(x)$ به $f(x)$ در نرم فضای $W_2^m[a, b]$ همگرا باشد، آنگاه $f_n^{(k)}, k = 0, 1, \dots, m-1$ همگرایی یکنواخت به $f^{(k)}$ است.

برهان. فرض کنید $R_y(x)$ هسته باز تولیدی $W_2^m[a, b]$ باشد. آنگاه

$$f_n(x) - f(x) = (f_n(y) - f(y), R_y(x)),$$

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) &= (f_n(y) - f(y), R_y(x))^{(k)}, \\ &= \frac{\partial^k}{\partial x^k} [(f_n(y) - f(y), R_y(x))] \\ &= \left((f_n(y) - f(y), \frac{\partial^k}{\partial x^k} R_y(x)) \right). \end{aligned}$$

با استفاده از گزاره ۱۲.۵.۱ داریم $\frac{\partial^k}{\partial x^k} R_y(x) \in W_2^m[a, b]$. همچنین با استفاده از نامساوی - کوشی شوارتز داریم

$$|f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| \leq \|f_n^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)\| \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} R_y(x) \right\| \leq C \|f_n^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)\|.$$

□

۳.۵.۱ زیر فضاهای بسته فضای هسته باز تولید $W_2^m[a, b]$

زیر فضاهای بسته فضای ${}^0W_2^m[a, b]$ از فضای هسته باز تولید $W_2^m[a, b]$ را طبق شرط مرزی همگن روی $W_2^m[a, b]$ می‌سازیم.

تعریف ۱۴.۵.۱. فضای تابعی زیر را در نظر می‌گیریم:

$${}^0W_2^m[a, b] = \{f(x) | f(x) \in W_2^m[a, b], f'(a) = 0, f(b) = 0\}$$

بدیهی است ${}^0W_2^m[a, b]$ یک فضای هسته باز تولید هیلبرت است.

تابع هسته باز تولید $Q_y(x)$ از فضای ${}^0W_2^m[a, b]$ جواب معادله دیفرانسیل تعمیم یافته زیر است

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 2, 3, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (۸.۱)$$

باهمکن نمودن

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0, \quad (۹.۱)$$

و با شرایط مرزی،

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0, \\ \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 2, 3, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (۱۰.۱)$$

جواب عمومی معادله ۸.۱ عبارت است از

$$Q_y(x) = \begin{cases} lQ_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x < y, \\ rQ_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y. \end{cases}$$

جهت محاسبه ضرایب $c_i(y), d_i(y), i = 1, 2, \dots, 2m$ از

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y),$$

و بعلاوه

$$\frac{\partial^i lQ_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i rQ_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2, \quad (۱۱.۱)$$

و

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} lQ_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} rQ_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1. \quad (۱۲.۱)$$

استفاده می‌نماییم که تعداد شرایط و تعداد معادلات منجر به جواب یکتا خواهد شد.

قضیه ۱۵.۵.۱. [۴۳] فضای هسته باز تولید ${}^0W_2^m[a, b]$ یک زیرفضای بسته از $W_2^m[a, b]$ است.

فضای هسته بازتولید ممکن است شرایط مرزی مختلف را دارا باشد. در این صورت تابع هسته بازتولید متناظر آن ارایه خواهد شد. گاهی اوقات چندین شرط همگن یا ناهمگن نیز می‌تواند برای فضای هسته بازتولید اعمال شود.

مثال ۱۶.۵.۱. تابع هسته بازتولید $R_y(x)$ در $W_2^3[0, 1]$ عبارت است از:

$${}^0W_2^3[0, 1] = \{f(x) | f(x) \in W_2^2[0, 1], f'(1) = 0\}$$

$$R_y(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}yx(2+x), & x \leq y, \\ 1 - \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2}yx(2+y), & x > y. \end{cases}$$

تعریف ۱۷.۵.۱. فرض کنید تابع $f(x, y)$ روی بازه $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ تعریف شده است و بعلاوه

$$\{I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}_{k=1}^n$$

یک دسته مجموعه از دامنه‌های دو به دو مجزای $I_k \subset D$ باشد. اگر برای هر $\epsilon > 0$ ، $\exists \delta > 0$ به طوری که به ازای δ $\sum_{i=1}^n |I_i| < \delta$ رابطه $\sum_{i=1}^n |f(I_i)| < \epsilon$ برقرار باشد که در آن

$$f(I_i) = f(b_i, d_i) - f(b_i, c_i) - f(a_i, d_i) - f(a_i, c_i)$$

در این صورت تابع $f(x, y)$ کاملاً پیوسته روی D نامیده می‌شود.

گزاره ۱۸.۵.۱. [۴۳] اگر تابع $f(x, y)$ روی D به طور کامل پیوسته باشد، آنگاه برای هر $y \in [c, d]$ ثابت، تابع $f(x, y)$ نسبت به x روی $[a, b]$ پیوسته مطلق است. به طور مشابه برای $x \in [a, b]$ ثابت، تابع $f(x, y)$ نسبت به y روی $[c, d]$ پیوسته مطلق است.

گزاره ۱۹.۵.۱. [۴۳] اگر تابع $f(x, y)$ روی D به طور کامل پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y)$ روی D پیوسته است.

گزاره ۲۰.۵.۱. [۴۳] اگر تابع $f(x, y)$ روی D انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds$ ، نسبت به x و y روی D به طور کامل پیوسته است.

گزاره ۲۱.۵.۱. [۴۳] اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ مطلقاً پیوسته به ترتیب روی $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند آنگاه $f(x)g(y)$ روی D به طور کامل پیوسته است.

گزاره ۲۲.۵.۱. [۴۳] اگر تابع $f(x)$ مطلقاً پیوسته روی D باشد، آنگاه $f(x)$ روی D به طور کامل پیوسته است.

۴.۵.۱ فضای تابعی دوتایی $W_2^{m,n}(D)$

تعریف ۲۳.۵.۱. فضای تابعی دوتایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_2^{m,n}(D) = \left\{ f(x, y) \mid \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial^{m-1} x \partial^{n-1} y} \text{ مطلقاً پیوسته است در } D, \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial^m x \partial^n y} \in L^2(D) \right\}$$

و حاصلضرب داخلی در $W_2^{(m,n)}(D)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{W_2^{(m, n)}(D)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(a, y) \right] dy \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, c), \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(x, c) \right\rangle_{W_2^{(m)}} \\ &+ \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

$W_2^{(m, n)}(D)$ یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۲۴.۵.۱. [۴۳] فضای تابعی $W_2^{(m, n)}(D)$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۲۵.۵.۱. [۴۳] فرض کنید $g_1(x)g_2(x), f(x, y) \in W_2^{(m, n)}(D)$

$$\langle f(x, y), g_1(x)g_2(x) \rangle_{W_2^{(m, n)}} = \langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{W_2^m}, g_2(y) \rangle_{W_2^n}.$$

نتیجه ۲۶.۵.۱. [۴۳] فرض کنید $f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y), f(x, y) \in W_2^{(m, n)}(D)$ در اینصورت

$$\langle f_1(x)f_2(y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_2^{(m, n)}} = \langle f_1(x), g_1(x) \rangle_{W_2^m} \langle f_2(y), g_2(y) \rangle_{W_2^n}.$$

نتیجه ۲۷.۵.۱. [۴۳] اگر $f(x) \in W_2^m([a, b])$ ، آنگاه برای $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|f(x)\|_{W_2^m} = \|f(x)\|_{W_2^{(m, n)}}.$$

قضیه ۲۸.۵.۱. [۴۳] فرض کنید $W_2^{(m, n)}(D)$ یک فضای هسته باز تولیدی باشد، آنگاه دارای تابع هسته بازتولیدی زیر است

$$K_{(\zeta, \eta)}(x, y) = K_\zeta(x)Q_\eta(y),$$

به طوری که $K_\zeta(x)$ و $Q_\eta(y)$ بترتیب هسته بازتولیدی فضاهای $W_2^m[a, b]$ و $W_2^n[a, b]$ هستند.

فصل ۲

معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب و پادمتناوب

۱.۲ مقدمه

در این فصل می‌خواهیم با استفاده از روش هسته باز تولیدی معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب و پاد متناوب در فضای هیلبرت را مورد بررسی قرار دهیم. معادلات دیفرانسیل کسری برای مدلسازی و تحلیل حجم زیادی از مسائل مورد نیاز است. معادلات دیفرانسیل کسری (FDE) در زمینه‌های زیادی مانند مکانیک سیالات، زیست‌شناسی، شیمی، انتشار استفاده می‌شوند [۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰]. برخی از روش‌ها برای حل این معادلات عبارتند از: تبدیل لاپلاس [۶۱]، تبدیل فوریه [۶۲]، روش تجزیه آدومین [۶۳]، روش تفاضل متناهی [۶۴]، روش تکرار تغییراتی [۶۵، ۶۶]، روش کالوکیشن [۶۷] و روش‌های دیگر [۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲].

مقاله‌های زیادی وجود دارند که در آن به معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب و پادمتناوب پرداخته است. در [۳۶] بلمکی^۱ و همکاران با استفاده از قضیه نقطه ثابت شفر^۲ و اصل انقباض باناخ تابع گرین^۳، وجود جواب را برای مسئله متناوب کسری غیر خطی

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) - \lambda u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0, 1] \quad (0 < \alpha < 1)$$
$$\lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-\alpha} u(t) = u(1)$$

به‌دست آورده‌اند که f تابعی پیوسته است. در [۳۷] خواص تابع میتاگ-لفلر را بیان کرده‌اند و وجود و منحصر به فرد بودن جواب با استفاده از روش تکرار یکنواخت برای معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط مرزی متناوب (با مشتق کسری ریمان-لیوویل) ثابت شده است.

^۱ Belmekki

^۲schaefer fixed point theorem

^۳ Green's function

در [۳۸] وی^۴ و دونگ^۵ وجود جواب های مساله مقدار مرزی متناوب زیر را بررسی کرده اند

$$\begin{aligned} D_{0+}^{2\alpha} u(t) &= f(t, u(t), D_{0+}^{\alpha} u(t)), \quad t \in (0, 1] \quad (0 < \alpha < 1) \\ \lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-\alpha} u(t) &= \lim_{t \rightarrow T} t^{1-\alpha} u(t) \\ \lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) &= \lim_{t \rightarrow T} t^{1-\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) \end{aligned}$$

که $D_{0+}^{\alpha} u = D_{0+}^{\alpha}(D_{0+}^{\alpha} u)$ بیانگر مشتق ریمان-لیوویل و $D_{0+}^{2\alpha} u = D_{0+}^{\alpha}(D_{0+}^{\alpha} u)$ بیانگر مشتق کسری ریمان-لیوویل متوالی است و f تابعی پیوسته روی $[0, T] \times R^2$ است و روش تکراری منحصر به فردی را استفاده می کنیم. در [۳۹] معادلات دیفرانسیل کسری چند مرتبه ای^۶

$$\lambda_n D^{\alpha_n} x(t) + \lambda_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} x(t) + \dots + \lambda_1 D^{\alpha_1} x(t) + \lambda_0 D^{\alpha_0} x(t) = f(t, x(t)) \quad (۱.۲)$$

با شرایط متناوب $x(0) = x(T)$ بررسی شده است. در اینجا $\lambda_i \in R (i = 0, 1, \dots, n), \lambda_n \neq 0, 0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < 1$ و $f \in C(J \times R)$ است. وجود و منحصربه فردی جوابها با خواص تابع گرین اثبات شده است. در [۴۰] حل مسئله

$$D^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)), \quad x(0) = x(T), \quad (۲.۲)$$

در مجموعه $C^1(J)$ توسط روش تکراری در نظر گرفته شده است. اینجا $f, g \in C(J \times R)$ و $f(t, x)$ برای x نزولی و $g(t, x)$ برای x صعودی است.

در [۴۱] روش فرمولهای دیفرانسیلی برگشت پذیر برای معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری

$$\lambda_n D_t^{\alpha_n} y(t) + \lambda_{n-1} D_t^{\alpha_{n-1}} y(t) + \dots + \lambda_1 D_t^{\alpha_1} y(t) + \lambda y(t - \tau) = f(t), \quad t \in [0, T] \quad (۳.۲)$$

با شرایط متناوب یا پادمتناوب $y(0) = y(T), y(0) = -y(T)$ بکار برده شده که $\lambda_i \in R (i = 1, \dots, n+1), \lambda_{n+1} \neq 0, 0 \leq \lambda_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < 1, T > 0$ است. در [۸۵] نظریه لری-شاو^۷ برای معادلات دیفرانسیل کسری

$$D^q u(t) = f(t, u(t)), \quad t \in [0, T], 1 < q \leq 2, \quad (۴.۲)$$

با شرایط پادمتناوب $u(0) = -u(T), u'(0) = -u'(T)$ بکار برده شده است. که D^q بیانگر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه q است.

از سال ۱۹۸۰، با تلاش کوی توابع بازتولید هسته به شکل چند جمله ای بسیار ساده معرفی شدند. آنها قادر به استفاده از روش های مبتنی بر فضای هسته بازتولید [۷۴، ۷۵، ۷۶] بودند. بسیاری از محققان از روش هسته بازتولید در فضای هیلبرت برای یافتن جواب های تقریبی برای

⁴ Wei

⁵ Dong

⁶ multi-order

⁷ Leray-Schauder

مسائل مختلف استفاده می‌کنند [۷۷، ۷۸، ۷۹] و همچنین برخی از کاربردهای جدید روش بازتولید هسته و شبکه‌های عصبی در یادگیری ماشین در [۸۰، ۸۱، ۸۲] یافت می‌شود. اخیراً، روش هسته بازتولید در فضای هیلبرت بر روی معادلات دیفرانسیل کسری اعمال شده است [۸۳، ۸۴]. در این بخش ما از روش هسته باز تولید در فضای هیلبرت (RKHS) برای حل معادلات دیفرانسیل کسری به شکل زیر

$$\mu_n D_{0+}^{\eta_n} v(t) + \mu_{n-1} D_{0+}^{\eta_{n-1}} v(t) + \cdots + \mu_0 D_{0+}^{\eta_0} v(t) = g(t, v(t)), \quad t \in [0, T], \quad (5.2)$$

با شرط متناوب

$$v(0) = v(T), \quad (6.2)$$

یا شرط پادمتناوب

$$v(0) = -v(T), \quad (7.2)$$

استفاده می‌کنیم که در آن $0 < T$ ، $0 \leq \eta_0 < \eta_1 < \cdots < \eta_n < 1$ ، $\mu_n \neq 0$ و $\mu_j \in \mathbb{R}$ ($j = 0, 1, \dots, n$)

برای این معادله در [۷۳] وجود و منحصر به فرد بودن جواب با استفاده از تابع گرین ثابت شده است.

فضای هیلبرت هسته بازتولیدی توسط تعریف ضرب داخلی و تابع هسته بازتولید آن به دست می‌آید. در اینجا فضای هیلبرت هسته باز تولید $W_2^2[0, T]$ را به صورت

$$W_2^2[0, T] = \{v(t) | v'(t), \text{مطلقاً پیوسته}, v''(t) \in L^2[0, T], v(0) = v(T)\},$$

و برای شرط پادمتناوب

$$W_2^2[0, T] = \{v(t) | v'(t), \text{مطلقاً پیوسته}, v''(t) \in L^2[0, T], v(0) = -v(T)\},$$

در نظر می‌گیریم. در ادامه ابتدا حالت اول را در نظر می‌گیریم. ضرب داخلی و نرم در این فضا به شکل زیر است:

$$\langle v, z \rangle_{W_2^2} = \sum_{i=0}^1 v^{(i)}(0) z^{(i)}(0) + \int_0^T v^{(2)}(t) z^{(2)}(t) dt, \quad (8.2)$$

$$\|v\|_{W_2^2} = \langle v, v \rangle_{W_2^2}^{\frac{1}{2}}.$$

تابع هسته بازتولیدی $R_y(\cdot)$ در $W_2^2[0, T]$ به صورت زیر است

$$R_y(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 b_i(y) t^{i-1}, & t \leq y, \\ \sum_{i=1}^4 c_i(y) t^{i-1}, & t > y. \end{cases} \quad (9.2)$$

به راحتی ثابت می شود که $R_y(t)$ به صورت زیر حاصل می شود. از (۸.۲) داریم

$$\langle v(t), R_y(t) \rangle_{w_2^2} = \sum_{i=0}^1 v^{(i)}(0) \frac{\partial^i R_y(0)}{\partial t^i} + \int_0^T v^{(2)}(t) \frac{\partial^2 R_y(t)}{\partial t^2} dt \quad (10.2)$$

با انتگرال جز به جز از $\int_0^T v^{(2)}(t) \frac{\partial^2 R_y(t)}{\partial t^2} dt$ داریم

$$\begin{aligned} \langle v(t), R_y(t) \rangle_{w_2^2} &= \sum_{i=0}^1 v^{(i)}(0) \left[\frac{\partial^i R_y(0)}{\partial t^i} - (-1)^i \frac{\partial^{3-i} R_y(0)}{\partial t^{3-i}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^1 (-1)^{1-i} v^{(i)}(T) \frac{\partial^{3-i} R_y(T)}{\partial t^{3-i}} + \int_0^T v^{(2)}(t) \frac{\partial^2 R_y(t)}{\partial t^2} dt \end{aligned} \quad (11.2)$$

اگر $R_y(t) \in W_2^2[0, T]$ آنگاه $R_y(0) = R_y(T)$ همچنین اگر $v(t) \in W_2^2[0, T]$ آنگاه $v(0) = v(T)$. بنابراین

$$\begin{aligned} \langle v(t), R_y(t) \rangle_{w_2^2} &= \sum_{i=0}^1 v^{(i)}(0) \left[\frac{\partial^i R_y(0)}{\partial t^i} - (-1)^i \frac{\partial^{3-i} R_y(0)}{\partial t^{3-i}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^1 (-1)^{1-i} v^{(i)}(T) \frac{\partial^{3-i} R_y(T)}{\partial t^{3-i}} \\ &+ \int_0^T v^{(2)}(t) \frac{\partial^2 R_y(t)}{\partial t^2} dt + b_1(v(0) - v(1)) \end{aligned} \quad (12.2)$$

بنابراین $R_y(t)$ در معادلات کلی زیر صدق می کند

$$\begin{cases} \frac{\partial^4 R_y(t)}{\partial t^4} = \delta(t - y), \frac{\partial^2 R_y(T)}{\partial t^2} = 0, \\ R_y(0) + \frac{\partial^3 R_y(0)}{\partial t^3} + b_1 = 0, \frac{\partial R_y(0)}{\partial t} - \frac{\partial^2 R_y(0)}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 R_y(T)}{\partial t^3} + b_1 = 0, \end{cases} \quad (13.2)$$

که δ بیانگر تابع دیراک است. هنگامیکه $y \neq t$ ، جواب معادله زیر است

$$\frac{\partial^4 R_y(t)}{\partial t^4} = 0 \quad (14.2)$$

با شرایط مرزی زیر

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 R_y(T)}{\partial t^2} = 0, \\ R_y(0) + \frac{\partial^3 R_y(0)}{\partial t^3} + b_1 = 0, \frac{\partial R_y(0)}{\partial t} - \frac{\partial^2 R_y(0)}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 R_y(T)}{\partial t^3} + b_1 = 0. \end{cases} \quad (15.2)$$

معادله مشخصه معادله (۱۴.۲) به صورت $\lambda^4 = 0$ است. بنابراین جواب عمومی به صورت (۹.۲)

است که ضرایب $b_i(y)$ و $c_i(y)$ برای $i = 1, 2, 3, 4$ به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{cases} \frac{\partial^m R_y(t+0)}{\partial t^m} = \frac{\partial^m R_y(t-0)}{\partial t^m}, m = 0, 1, 2 \\ \frac{\partial^3 R_y(t+0)}{\partial t^3} - \frac{\partial^3 R_y(t-0)}{\partial t^3} = 1, \frac{\partial^2 R_y(T)}{\partial t^2} = 0, \\ R_y(0) + \frac{\partial^3 R_y(0)}{\partial t^3} + b_1 = 0, \frac{\partial R_y(0)}{\partial t} - \frac{\partial^2 R_y(0)}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^3 R_y(T)}{\partial t^3} + b_1 = 0. \end{cases} \quad (۱۶.۲)$$

در نهایت تابع هسته باز تولید $R_y(\cdot)$ در $W_2^2[0, T]$ به شکل زیر حاصل می شود

$$R_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{12T^2(3+T)}(36T^2 - 6t^3T^2 + 12T^3 - 2t^3T^3 + 6t^3Ty + 12tT^3y + \\ 6t^2T^3y + 3t^3Ty^2 - 18tT^2y^2 - 9t^2T^2y^2 - t^3y^3 + 6tTy^3 + 3t^2Ty^3), & y \leq t, \\ \frac{1}{12T^2(3+T)}(36T^2 + 12T^3 + 6t^3Ty - 18t^2T^2y + 12tT^3y + 3t^3Ty^2 \\ - 9t^2T^2y^2 + 6tT^3y^2 - t^3y^3 + 6tTy^3 + 3t^2Ty^3 - 6T^2y^3 - 2T^3y^3), & y > t. \end{cases}$$

در حالت شرایط پادمتناوب هسته باز تولید به صورت زیر به دست می آید

$$R_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{12(12+3T^2+T^3)}(-12t^3 - 72tT - 36t^2T + 36T^2 - 6t^3T^2 + 12T^3 \\ - 2t^3T^3 + 144ty + 72t^2y - 72Ty + 6t^3y + 12T^3y6t^2T^3y \\ - 36Ty^2 + 3t^3Ty^2 - 18tT^2y^2 - 9t^2T^2y^2 + 12y^3 - t^3y^3 + 6tTy^3 + 3t^2Ty^3), & y \leq t, \\ \frac{1}{12(12+3T^2+T^3)}(12t^3 - 72tT - 36t^2T + 36T^2 + 12T^3 + 144ty - \\ 72Ty + 6t^3Ty - 18t^2T^2y + 12tT^3y + 72ty^2 - 36Ty^2 + 3t^3Ty^2 \\ - 9t^2T^2y^2 + 6tT^3y^2 - 12y^3 - t^3y^3 + 6tTy^3 + 3t^2Ty^3 - 6T^2y^3 - 2T^3y^3), & y > t. \end{cases}$$

ملاحظه ۱.۱.۲. فضای تابعی حقیقی مقدار

$$W_2^1[0, T] = \{v | v \text{ پیوسته}, v' \in L^2[0, T]\},$$

فضای تابعی هیلبرت با ضرب داخلی زیر است

$$\langle v, z \rangle_{W_2^1} = v(0)z(0) + \int_0^T v'(t)z'(t) dt. \quad (۱۷.۲)$$

می توان نشان داد که $W_2^1[0, T]$ فضای هیلبرت هسته باز تولیدی است و هسته باز تولید در این فضا به شکل زیر است:

$$r_y(t) = \begin{cases} t+1, & t \leq y, \\ y+1, & t > y. \end{cases}$$

۲.۲ ساختار روش هسته باز تولید در فضای هیلبرت

در اینجا، ما یک عملگر دیفرانسیل خطی و یک سیستم متعامد در $W_2^2[0, 1]$ می سازیم. پس از آن، روش RKHS را برای به دست آوردن جواب معادله (۵.۲) با شرط (۶.۲) و (۷.۲) ارائه می دهیم.

در ابتدا با معرفی عملگر خطی $L : W_2^2[0, T] \rightarrow W_2^1[0, T]$ داریم

$$Lv(t) = \sum_{j=0}^n \mu_j D_{0+}^{\eta_j} v(t), \quad (18.2)$$

بنابراین معادله (5.2) به معادله زیر تبدیل می شود

$$(Lv)(t) = g(t, v(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (19.2)$$

قضیه ۱.۲.۲. عملگر L خطی و کراندار است.

برهان. به راحتی می توان نشان داد که L یک عملگر خطی است. بنابراین ما فقط کرانداري L را ثابت می کنیم. از (۱۷.۲)، داریم

$$\|Lv\|_{W_2^1}^2 = \langle Lv, Lv \rangle_{W_2^1} = [(Lv)(0)]^2 + \int_0^1 [(Lv)'(t)]^2 dt.$$

از ویژگی باز تولیدی $R_y(x)$ داریم

$$\begin{cases} v(t) = \langle v(y), R_t(y) \rangle_{W_2^2}, \\ (Lv)(t) = \langle v(y), LR_t(y) \rangle_{W_2^2}, \\ (Lv)'(t) = \langle v(y), (LR_t(y))' \rangle_{W_2^2}. \end{cases}$$

با نامساوی کوشی شوارتز داریم

$$|(Lv)(t)| = |\langle v(y), LR_t(y) \rangle_{W_2^2}| \leq \|LR_t\|_{W_2^2} \|v\|_{W_2^2} = M_1 \|v\|_{W_2^2},$$

و

$$|(Lv)'(t)| = |\langle v(y), (LR_t(y))' \rangle_{W_2^2}| \leq \|(LR_t)'\|_{W_2^2} \|v\|_{W_2^2} = M_2 \|v\|_{W_2^2},$$

بنابراین

$$[(Lv)(0)]^2 \leq M_1^2 \|v\|_{W_2^2}^2, \quad [(Lv)'(t)]^2 \leq M_2^2 \|v\|_{W_2^2}^2$$

و

$$\int_0^1 [(Lv)'(t)]^2 dt \leq M_2^2 \|v\|_{W_2^2}^2$$

یعنی

$$\|Lv\|_{W_2^1}^2 = [(Lv)(0)]^2 + \int_0^1 [(Lv)'(t)]^2 dx \leq (M_1^2 + M_2^2) \|v\|_{W_2^2}^2,$$

□

که $M = M_1^2 + M_2^2 > 0$

توجه کنید سیستم کامل $\{\Psi_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ در $W_2^2[0, T]$ را با قرار دادن

$$\Phi_i(t) = r_{t_i}(t)$$

که $r_t(\cdot)$ هسته بازتولید در فضای $W_2^1[0, T]$ است و

$$\Psi_i = L^* \Phi_i(t)$$

می‌سازیم که $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, T]$ چگال است و

$$L^* : W_2^1[0, T] \rightarrow W_2^2[0, T]$$

عملگر الحاقی L است.

لم ۲.۲.۲. [۱۱۴] اگر $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ روی $[0, T]$ چگال باشد، آنگاه $\{\Psi_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل از $W_2^2[0, T]$ داریم و

$$\Psi_i(t) = LR_t(y)|_{y=t_i}.$$

برهان.

$$\begin{aligned} \Psi_i(t) &= (L^* \Phi_i)(t) = \langle L^* \Phi_i(y), R_t(y) \rangle_{W_2^2} \\ &= \langle \Phi_i(y), LR_t(y) \rangle_{W_2^2} = LR_t(y)|_{y=t_i}. \end{aligned}$$

برای هر $v \in W_2^2[0, T]$ ثابت، فرض کنید

$$\langle v(t), \Psi_i(t) \rangle_{W_2^2} = 0$$

برای همه $i \in \mathbb{N}$ بدین معنی که

$$\langle v(t), L^* \Psi_i(t) \rangle_{W_2^2} = \langle Lv(t), \Psi_i(t) \rangle_{W_2^2} = Lv(t_i) = 0.$$

چونکه $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, T]$ چگال است پس $Lv(t) = 0$ از وجود L^{-1} داریم $v \equiv 0$. در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

□

با استفاده از فرآیند گرم اشمیت روی $\{\Psi_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ دستگاه متعامد یکه $\{\bar{\Psi}_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای $W_2^2[0, T]$ بدست می‌آید و در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\bar{\Psi}_i(t) = \sum_{k=1}^i \rho_{jk} \Psi_k(t).$$

ضرایب ρ_{jk} مثبت هستند و به صورت زیر می‌باشند

$$\rho_{11} = \frac{1}{\|\Psi_1\|},$$

$$\rho_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik}^2}},$$

$$\rho_{ij} = \frac{-\sum_{k=j}^{i-1} d_{ik} \rho_{kj}}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik}^2}}, \quad i \neq j$$

که $d_{ik} = \langle \Psi_i, \bar{\Psi}_k \rangle_{W_2^2}$.

قضیه ۳.۲.۲. [۱۱۴] فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, T]$ چگال باشد و جواب دقیق $v(\cdot)$ از (۱۹.۲) در فضای $W_2^2[0, T]$ منحصر به فرد باشد، پس

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g(t_k, v(t_k)) \bar{\Psi}_i(t), \quad (20.2)$$

و برای این مسئله جواب تقریبی از مرتبه n به صورت زیر است

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g(t_k, v(t_k)) \bar{\Psi}_i(t). \quad (21.2)$$

برهان. فرض کنید $v \in W_2^2[0, T]$ جواب منحصر به فرد از معادله (۵.۲) باشد، بنابراین

$$\begin{aligned} v(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v(t), \bar{\Psi}_i(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle v(t), \Psi_k(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle v(t), L^* \Phi_k(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle Lv(t), \Phi_k(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g(t_k, v(t_k)) \bar{\Psi}_i(t). \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۲.۲. اگر v در $W_2^2[0, T]$ ، آنگاه ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|v^{(i)}(t)| \leq C \|v\|_{W_2^2}, \quad i = 0, 1.$$

برهان. برای هر $t \in [0, T]$ داریم

$$|v(t)| = |\langle v(\xi), R_t(\xi) \rangle_{W_2^2}| \leq \|R_t(\xi)\|_{W_2^2} \|v(\xi)\|_{W_2^2} \leq C_1 \|v(\xi)\|_{W_2^2},$$

همچنین

$$|v'(t)| = |\langle v(\xi), \frac{\partial R_t(\xi)}{\partial t} \rangle_{W_2^2}| \leq \left\| \frac{\partial R_t(\xi)}{\partial t} \right\|_{W_2^2} \|v(\xi)\|_{W_2^2} \leq C_2 \|v(\xi)\|_{W_2^2},$$

□

که در آن C_1 و C_2 ثابت های مثبت و $C = \max\{C_1, C_2\}$ است.

نتیجه ۵.۲.۲. جواب های تقریبی $v_n(\cdot)$ و $v'_n(\cdot)$ به ترتیب به جواب های دقیق $v(\cdot)$ و $v'(\cdot)$ به طور یکنواخت همگرا می شوند.

برهان. طبق قضیه (۴.۲.۲) برای هر $t \in [0, T]$ داریم

$$\begin{aligned}
 |v_n^{(i)}(t) - v^{(i)}(t)| &= |\langle v_n(\xi) - v(\xi), \frac{\partial^i R_t(\xi)}{\partial t} \rangle_{W_2^2}| \\
 &\leq \left\| \frac{\partial^i R_t(\xi)}{\partial t} \right\|_{W_2^2} \|v_n(\xi) - v(\xi)\|_{W_2^2} \\
 &\leq C_i \|v_n(\xi) - v(\xi)\|_{W_2^2},
 \end{aligned}$$

که در آن C_i برای $i = 0, 1$ ثابت مثبت هستند. سپس، اگر $n \rightarrow \infty$ آنگاه

$$v_n(\xi) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} v(\xi),$$

□ جواب‌های تقریبی $v_n(t)$ و $v'_n(t)$ به ترتیب به طور یکنواخت به $v(t)$ و $v'(t)$ همگرا می‌شوند.

ملاحظه ۶.۲.۲. دو حالت زیر را برای حل معادله (۵.۲) با شرط (۶.۲) و (۷.۲) با استفاده از روش RKHS اعمال می‌کنیم.

حالت اول. فرض کنید (۵.۲) خطی باشد، (۲۰.۲) و (۲۱.۲) به ترتیب نشان‌دهنده جواب‌های دقیق و تقریبی هستند.

حالت دوم. فرض کنید (۵.۲) غیرخطی باشد، در این حالت حل (۵.۲) به صورت زیر است

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\Psi}_i(t), \quad (22.2)$$

که در آن $A_i = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g(t_k, v_{k-1}(t_k))$ ناشناخته است و با استفاده از B_i ما A_i را به شکل زیر بدست خواهیم آورد. فرض کنید $v_0(t) = 0$ و $v_n(t)$ به شکل

$$v_n(t) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\Psi}_i(t), \quad (23.2)$$

که B_i از $\bar{\Psi}_i(t)$ داده شده با

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \rho_{11} g(t_1, v_0(t_1)), \\
 v_1(t) &= B_1 \bar{\Psi}_1(t), \\
 B_2 &= \sum_{k=1}^2 \rho_{2k} g(t_k, v_{k-1}(t_k)), \\
 v_2(t) &= \sum_{i=1}^2 B_i \bar{\Psi}_i(t), \\
 &\vdots \\
 B_n &= \sum_{k=1}^n \rho_{nk} g(t_k, v_{k-1}(t_k)).
 \end{aligned}$$

۳.۲ آنالیز همگرایی

در این بخش، همگرایی دنباله $v_n(\cdot)$ که تقریبی از جواب معادله (۲۳.۲) است به جواب دقیق $v(\cdot)$ معادله (۵.۲) را نشان خواهیم داد. ابتدا لم زیر را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳.۲. اگر $\|\cdot\|_{W_2^2} \rightarrow \bar{v}(t)$ و $v_n(t) \rightarrow y$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ همچنین $g(t, y)$ تابع پیوسته نسبت به $t \in [0, T]$ باشد و $y \in (-\infty, \infty)$ آنگاه هنگامی که $n \rightarrow \infty$

$$g(t_n, v_{n-1}(t_n)) \rightarrow g(y, \bar{v}(y)) .$$

برهان. به وضوح

$$\begin{aligned} |v_{n-1}(t_n) - \bar{v}(y)| &= |v_{n-1}(t_n) - v_{n-1}(y) + v_{n-1}(y) - \bar{v}(y)| \\ &\leq |v_{n-1}(t_n) - v_{n-1}(y)| + |v_{n-1}(y) - \bar{v}(y)|. \end{aligned}$$

با ویژگی بازتولید $R_y(\xi)$ به این نتیجه می‌رسیم که

$$\begin{aligned} |v_{n-1}(t_n) - v_{n-1}(y)| &= |\langle v_{n-1}(\xi), R_{t_n}(\xi) - R_y(\xi) \rangle_{W_2^2}| \\ &\leq \|v_{n-1}\|_{W_2^2} \|R_{t_n}(\xi) - R_y(\xi)\|_{W_2^2}. \end{aligned}$$

از تقارن $R_y(\xi)$ ، نتیجه می‌شود

$$\|R_{t_n}(\xi) - R_y(\xi)\| \rightarrow 0.$$

بنابراین،

$$|v_{n-1}(t_n) - v_{n-1}(y)| \rightarrow 0$$

هنگامی که $t_n \rightarrow y$ و $n \rightarrow \infty$. از نتیجه ۵.۲.۲، داریم

$$|v_{n-1}(y) - \bar{v}(y)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

سپس

$$v_{n-1}(t_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} \bar{v}(y) \quad (n \rightarrow \infty).$$

چون $g(\cdot)$ توابع پیوسته است، پس

$$g(t_n, v_{n-1}(t_n)) \rightarrow g(y, \bar{v}(y)) \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

لم ۲.۳.۲. برای $v_n(t)$ در معادله (۲۳.۲) داریم

$$Lv_n(t_j) = Lv(t_j) = g(t_j, v_{j-1}(t_j)). \quad (24.2)$$



برهان. فرض کنید $n \leq j$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} Lv_n(t_j) &= \sum_{i=1}^n B_i L\bar{\Psi}_i(t_j) = \sum_{i=1}^n B_i \langle L_s \bar{\Psi}_i(t), \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} \\ &= \sum_{i=1}^n B_i \langle \bar{\Psi}_i(t), L^* \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \sum_{i=1}^n B_i \langle \bar{\Psi}_i(t), \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} \end{aligned}$$

با استفاده از متعامد بودن $\{\bar{\Psi}_i(t)\}_{i=1}^\infty$ ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^j \rho_{jl} Lv_n(t_l) &= \sum_{i=1}^n B_i \left\langle \bar{\Psi}_i(t), \sum_{l=1}^j \rho_{jl} \Psi_l(t) \right\rangle_{W_2^2} = \sum_{i=1}^n B_i \langle \bar{\Psi}_i(t), \bar{\Psi}_j(t) \rangle_{W_2^2} \\ &= B_j = \sum_{l=1}^j \rho_{jl} g(t_l, v_{l-1}(t_l)). \end{aligned}$$

اگر $j = 1$ ، آنگاه

$$Lv_n(t_1) = g(t_1, v_0(t_1)).$$

بعلاوه اگر $j = 2$ ، آنگاه

$$\rho_{21} Lv_n(t_1) + \rho_{22} Lv_n(t_2) = \rho_{21} g(t_1, v_0(t_1)) + \rho_{22} g(t_2, v_1(t_2)),$$

یعنی،

$$Lv_n(t_2) = g(t_2, v_1(t_2)).$$

به همین ترتیب، با استفاده از استقرا به دست می‌آید

$$Lv_n(t_j) = g(t_j, v_{j-1}(t_j)).$$

از این رو،

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(t)$$

بنابراین،

$$v_n(t) = P_n v(t)$$

که P_n یک تصویر متعامد $W_2^2[0, 1]$ به فضای تولید شده $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$ است. بنابراین

$$\begin{aligned} Lv_n(t_j) &= \langle Lv_n(t), \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \langle v_n(t), L^* \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \langle P_n v(t), \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} \\ &= \langle v(t), P_n \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \langle v(t), \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \langle v(t), L^* \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \\ &= \langle Lv(t), \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = Lv(t_j). \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید $\|v_n\|_{W_2^2}$ کراندار باشد و $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ روی $[0, T]$ چگال باشد، سپس جواب‌های تقریبی $v_n(t)$ در (۲۳.۲) همگرا به

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g(t_k, v_{k-1}) \bar{\Psi}_i(t). \quad (25.2)$$

برهان. ابتدا، ثابت می‌کنیم که $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ در (۲۳.۲) با تعریف نرم $\|\cdot\|_{W_2^2}$ همگراست. از (۲۳.۲)، استنباط می‌شود که

$$v_{n+1}(t) = v_n(t) + B_{n+1} \bar{\Psi}_{n+1}(t). \quad (26.2)$$

از آنجایی که $\{\bar{\Psi}_i\}_{i=1}^\infty$ متعامد است، بنابراین

$$\|v_{n+1}\|_{W_2^2}^2 = \|v_n\|_{W_2^2}^2 + (B_{n+1})^2 = \dots = \sum_{i=1}^{n+1} (B_i)^2, \quad (27.2)$$

که $B_i = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g(t_k, v_{k-1}(t_k))$ از (۲۷.۲) نتیجه می‌شود که

$$\|v_n\|_{W_2^2}^2 \leq \|v_{n+1}\|_{W_2^2}^2.$$

طبق فرض $\|v_n\|_{W_2^2}^2$ کراندار است، پس $\|v_n\|_{W_2^2}$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$ همگراست و بنابراین ثابت c وجود دارد به طوریکه $\sum_{i=1}^\infty (B_i)^2 = c$. در نتیجه

$$B_i \in l^2 = \{B \mid \sum_{i=1}^\infty (B_i)^2 < \infty\}.$$

فرض کنید $m > n$ ، از تعامد $v_{n+1}(t) - v_n(t)$ (طبق (۲۶.۲)) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \|v_m - v_n\|_{W_2^2}^2 &= \|v_m - v_{m-1} + v_{m-1} - \dots + v_{n+1} - v_n\|_{W_2^2}^2 \\ &= \|v_m - v_{m-1}\|_{W_2^2}^2 + \dots + \|v_{n+1} - v_n\|_{W_2^2}^2. \end{aligned}$$

از آنجا که

$$\|v_m - v_{m-1}\|_{W_2^2}^2 = (B_m)^2,$$

در نتیجه

$$\|v_m - v_n\|_{W_2^2}^2 = \sum_{i=n+1}^m (B_i)^2 \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty).$$

چونکه $W_2^2[0, T]$ کامل است، بنابراین $v_n(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} \bar{v}(t)$ هنگامی که $(n \rightarrow \infty)$. اکنون ثابت می‌کنیم که $\bar{v}(t)$ جواب معادله (۱۹.۲) است. به دلیل اینکه $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ روی $[0, T]$ چگال است، برای هر $t \in [0, T]$ وجود دارد دنباله $\{t_{n_j}\}$ به طوری که $t_{n_j} \rightarrow t$ هنگامی که $j \rightarrow \infty$ باشد. از لم ۲.۳.۲، نتیجه می‌شود که

$$Lv_n(t_{n_j}) = g(t_{n_j}, v_{n_j-1}(t_{n_j})).$$

از این رو فرض کنید $j \rightarrow \infty$ از لم ۱.۳.۲ و پیوستگی g ، داریم

$$L\bar{v}(t) = g(t, \bar{v}(t)).$$

□

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید $r_n = \|v(t) - v_n(t)\|_{W_2^2}^2$ که در آن $v_n(t)$ از روش RKHS به دست آمده است. بنابراین r_n نزولی یکنوا با نرم $\|\cdot\|_{W_2^2}$ است.

برهان. توجه کنید که

$$r_n = \|v(t) - u_n(t)\|_{W_2^2}^2 = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \langle v(t), \bar{\Psi}_j(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_j(t) \right\|_{W_2^2}^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\langle v(t), \bar{\Psi}_j(t) \rangle_{W_2^2} \right)^2,$$

$$r_{n-1} = \|v(t) - v_{n-1}(t)\|_{W_2^2}^2 = \left\| \sum_{j=n}^{\infty} \langle v(t), \bar{\Psi}_j(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_j(t) \right\|_{W_2^2}^2 = \sum_{j=n}^{\infty} \left(\langle v(t), \bar{\Psi}_j(t) \rangle_{W_2^2} \right)^2,$$

□

بنابراین، داریم $r_n(t) \leq r_{n-1}(t)$.

۴.۲ مثال های عددی

به منظور نشان دادن الگوریتم پیشنهاد شده در عمل، در ادامه چند مثال عددی ارائه می دهیم. خطای مطلق در اینجا به صورت زیر است

$$e(t) = |v(t) - v_n(t)|.$$

مثال ۱.۴.۲.

$$D_{0+}^{0.2}v(t) + v(t)^2 = -\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.8)}t^{1.8} - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.8)}t^{0.8} + (t^2 - t + 1)^2 \quad (28.2)$$

با شرط پادمتناوب

$$v(0) = -v(1) \quad (29.2)$$

جواب این معادله $v(t) = -t^2 - t + 1$ است. با استفاده از روش مذکور با انتخاب $n = 40$ در بازه $[0, 1]$ جواب تقریبی v_{40} حاصل می شود. مقادیر خطای مطلق در جدول ۱.۲ برای $T = 1$ و $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ نمایش داده شده است. نمودارهای خطای مطلق در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.

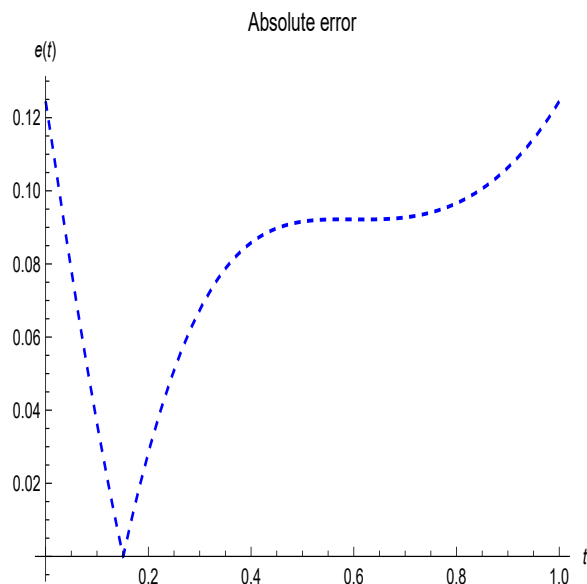
مثال ۲.۴.۲.

$$D_{0+}^{0.4}v(t) + D_{0+}^{0.3}v(t) + e^{v(t)} = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.6)}t^{1.6} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.6)}t^{0.6} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.7)}t^{1.7} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.7)}t^{0.7} + e^{t^2+t-1} \quad (30.2)$$

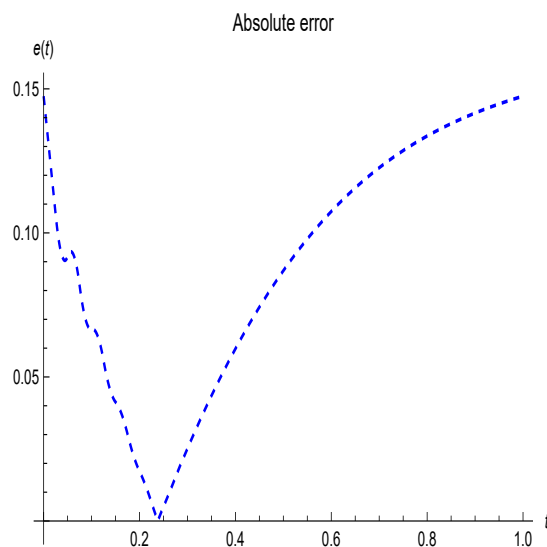
با شرط پادمتناوب

$$v(0) = -v(1) \quad (31.2)$$

جواب این معادله $v(t) = t^2 + t - 1$ است. با استفاده از روش مذکور با انتخاب $n = 40$ در بازه $[0, 1]$ به خطای مطلوب دست می یابیم و جواب تقریبی v_{40} حاصل می شود. مقادیر خطای مطلق در جدول ۲.۲ برای $T = 1$ و $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ نمایش داده شده است. نمودارهای خطای مطلق در شکل ۲.۲ نشان داده شده است.



شکل ۱.۲: نمودار خطای مطلق با $n = 40$ برای مثال ۱.۴.۲



شکل ۲.۲: نمودار خطای مطلق با $n = 40$ برای مثال ۲.۴.۲

جدول ۱۰۲: خطای مطلق برای مثال ۱.۴.۲ با $n = 40$

t_i	$v(t)$	خطای مطلق برای $n = 40$	خطای مطلق برای $n = 100$
0	1	0.00426371	0.000427046
0.1	0.89	0.0364104	0.000739956
0.2	0.76	0.0283583	0.000682101
0.3	0.61	0.0674441	0.000630868
0.4	0.44	0.0857915	0.00058546
0.5	0.25	0.0915779	0.000546593
0.6	0.04	0.0921832	0.000513246
0.7	-0.19	0.0927251	0.0048416
0.8	-0.44	0.0965951	0.00460563
0.9	-0.71	0.106344	0.00442056
1	-1	0.124506	0.00427046

مثال ۳.۴.۲. معادله دیفرانسیل کسری زیر با شرایط متناوب را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{0.4}v(t) + D_{0+}^{0.3}v(t) + v^2(t)e^{v(t)} &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.6)}t^{2.6} - 2\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.6)}t^{1.6} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.6)}t^{0.6} \\
 &+ \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.7)}t^{2.7} - 2\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.7)}t^{1.7} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.7)}t^{0.7} + (t^3 - 2t^2 + t)^2e^{t^3-2t^2+t}, \quad (32.2)
 \end{aligned}$$

$$v(0) = v(1),$$

برای $t \in [0, 1]$ جواب دقیق $v(t) = t^3 - 2t^2 + t$ است. ما $n = 22$ را در بازه $[0, 1]$ انتخاب می‌کنیم و به دقت مناسب می‌رسیم. مقادیر خطای مطلق در جدول ۳.۲ برای $T = 1$ و $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ گزارش شده است. نمودارهای خطای مطلق و نتایج عددی در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. در اینجا

$$\begin{aligned}
 L &= D_{0+}^{0.4}v(t) + D_{0+}^{0.3}v(t), \\
 g(t, v(t)) &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.6)}t^{2.6} - 2\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.6)}t^{1.6} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.6)}t^{0.6} + \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.7)}t^{2.7} \\
 &- 2\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.7)}t^{1.7} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.7)}t^{0.7} + (t^3 - 2t^2 + t)^2e^{t^3-2t^2+t} - v^2(t)e^{v(t)},
 \end{aligned}$$

و

$$\Psi_i(t) = LR_y(t)|_{y=t_i} = D_{0+}^{0.4}R_{t_i}(t) + D_{0+}^{0.3}R_{t_i}(t), \quad (33.2)$$

در نهایت $v(t)$ و $v_n(t)$ به ترتیب از (۲۲.۲) و (۲۳.۲) به دست می‌آیند.

جدول ۲.۲: خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۲ با $n = 40$

t_i	$v(t)$	خطای مطلق برای $n = 40$	خطای مطلق برای $n = 110$
0	-1	0.0058168	0.000427046
0.1	-0.89	0.0665875	0.000739956
0.2	-0.76	0.0172594	0.000682101
0.3	-0.61	0.0252116	0.000630868
0.4	-0.44	0.0597998	0.00058546
0.5	-0.25	0.0869028	0.000546593
0.6	-0.04	0.107459	0.00513246
0.7	0.19	0.122633	0.0048416
0.8	0.44	0.133643	0.00460563
0.9	0.71	0.141613	0.00422056
1	1	0.147462	0.00427046

مثال ۴.۴.۲. معادله دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب زیر را در نظر می‌گیریم

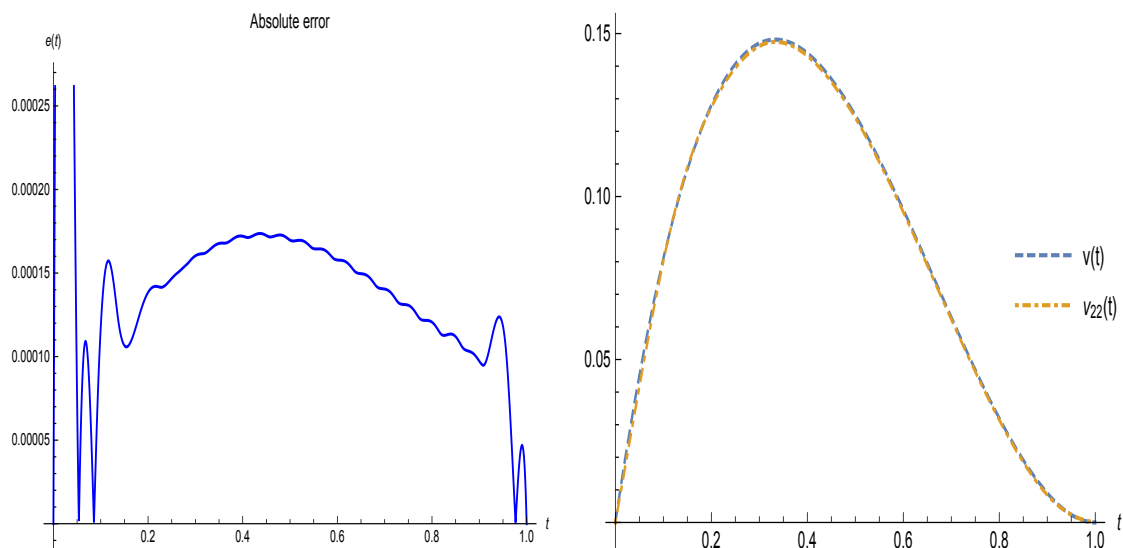
$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{0.6}v(t) + D_{0+}^{0.5}v(t) + D_{0+}^{0.2}v(t) + \sinh(v(t))(1-t) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.4)}t^{1.4} - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.4)}t^{0.4} \\
 &+ \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)}t^{1.5} - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}t^{0.5} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.8)}t^{1.8} \\
 &- \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.8)}t^{0.8} + \sinh(t^2 - t)(1-t), \\
 v(0) &= v(1),
 \end{aligned}$$

برای $t \in [0, 1]$ جواب دقیق $v(t) = t^2 - t$ است. با $n = 20$ نقطه به دقت مناسب در $[0, 1]$ می‌رسیم و با استفاده از روش پیشنهادی جواب تقریبی v_{20} را به دست می‌آوریم. مقادیر خطای مطلق در جدول ۴.۲ برای $T = 1$ و $t_i = \frac{i}{n}i = 1, 2, \dots, n$ گزارش شده است. نمودارهای خطای مطلق و نتایج عددی در شکل ۴.۲ نشان داده شده است.

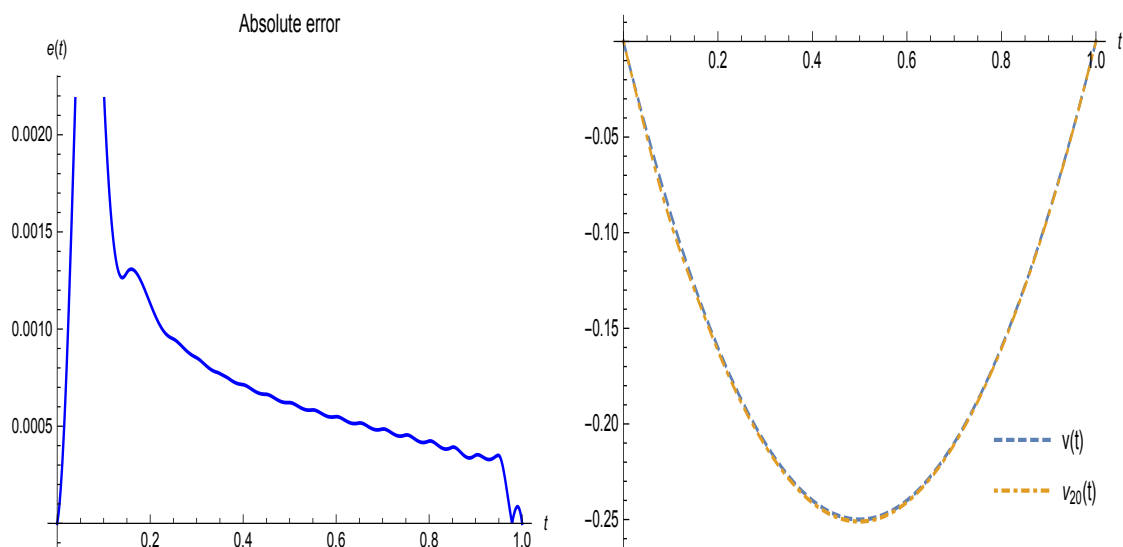
مثال ۵.۴.۲. معادله دیفرانسیل از مرتبه کسری زیر با شرایط متناوب را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{\eta_1}v(t) + D_{0+}^{\eta_0}v(t) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\eta_1)}t^{2-\eta_1} - 2\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\eta_1)}t^{1-\eta_1} \\
 &+ \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\eta_0)}t^{2-\eta_0} - 2\frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\eta_0)}t^{1-\eta_0}, \\
 v(0) &= v(2),
 \end{aligned}$$

برای $t \in [0, 2]$ جواب دقیق $v(t) = t^2 - 2t$ است. با استفاده از این روش، با گرفتن $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, 2n$ برای $n = 10$ و $T = 2$ نتایج عددی در جدول ۵.۲ برای $\eta_0 = 0.2$ و $\eta_1 = 0.5$ نشان داده شده است.



شکل ۳.۲: نمودارهای نتایج عددی و خطای مطلق با $n = 22$ برای مثال ۱.۴.۴



شکل ۴.۲: نمودارهای حل عددی و خطای مطلق با $n = 20$ برای مثال ۴.۴.۲



جدول ۳.۲: خطای مطلق برای مثال ۳.۴.۲ با $n = 22$

t_i	$v(t)$	$v_{22}(t)$	خطای مطلق
0	0	3.68224×10^{-15}	3.68224×10^{-15}
0.1	0.081	0.0808825	0.000223837
0.2	0.128	0.127862	0.000172347
0.3	0.147	0.14684	0.000157614
0.4	0.144	0.143828	0.000150239
0.5	0.125	0.12483	0.000143359
0.6	0.096	0.0958422	0.000134868
0.7	0.063	0.0628596	0.000124506
0.8	0.032	0.0318794	0.000112694
0.9	0.009	0.00890275	0.0000997064
1	0	-1.55353×10^{-15}	1.55353×10^{-15}

شده است که فقط با انتخاب این تعداد نقاط به دقت مناسبی می‌رسیم. سه نمودار از جواب تقریبی برای η_1, η_0 در شکل ۵.۲ ترسیم شده است.

۵.۲ نتیجه گیری

در این فصل از رساله حل معادله دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب و پادمتناوب را با بکار گیری روش هسته باز تولیدی فضای هیلبرت مورد بحث و بررسی قرار داده‌ایم. جواب تقریبی توسط یک سری نشان داده می‌شود که با منقطع کردن آن می‌توان جواب مسئله را تقریب زد. همچنین همگرایی روش نشان داده شده که کارایی روش را تایید می‌کند.

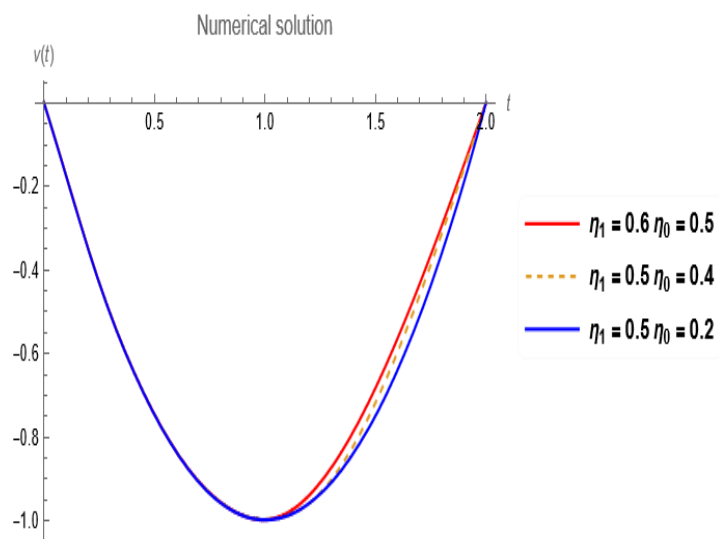


جدول ۴.۲: خطای مطلق برای مثال ۴.۴.۲ با $n = 20$

t_i	$v(t)$	$v_{20}(t)$	خطای مطلق
0	0	$-4.10863550 \times 10^{-16}$	$4.10863550 \times 10^{-16}$
0.1	-0.09	-0.092247	0.00224696
0.2	-0.16	-0.161132	0.00113237
0.3	-0.21	-0.210852	0.000852089
0.4	-0.24	-0.240714	0.000713747
0.5	-0.25	-0.250521	0.00062149
0.6	-0.24	-0.240549	0.000549103
0.7	-0.21	-0.210485	0.000485426
0.8	-0.16	-0.160424	0.000423569
0.9	-0.09	-0.0903508	0.000350814
1	0	-7.51086×10^{-16}	7.51086×10^{-16}

جدول ۵.۲: نتایج عددی برای مثال ۵.۴.۲ با $n = 10$

t_i	$v(t)$	خطای مطلق $\eta_0 = 0.4, \eta_1 = 0.5$	خطای مطلق $\eta_0 = 0.5, \eta_1 = 0.6$	خطای مطلق $\eta_0 = 0.2, \eta_1 = 0.5$
0	0	0	0	0
0.2	-0.36	0.009983	0.01401	0.00818945
0.4	-0.64	0.003524	0.006186	0.00231702
0.6	-0.84	0.003037	0.005071	0.00207829
0.8	-0.96	0.00225	0.003904	0.0014633
1	-1	0.001765	0.00308	0.00113105
1.2	-0.96	0.001352	0.002376	0.000852181
1.4	-0.84	0.00098	0.00173	0.00060833
1.6	-0.64	0.000621	0.001099	0.000376393
1.8	-0.36	0.000142	0.000324	0.0000452721
2	0	3.37181×10^{-14}	3.4689×10^{-14}	3.3158×10^{-14}



شکل ۵.۲: نمودار نتایج عددی با $n = 10$ برای مثال ۵.۴.۲

فصل ۳

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب با استفاده از روش هسته باز تولیدی

۱.۳ مقدمه

بسیاری از رویدادهای جهان طبیعی را می‌توان در قالب دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری مدل کرد. مقالات زیادی وجود دارند که به دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری می‌پردازند. به عنوان مثال، در [۴۸] یک روش تکراری برای یک دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری با جواب‌های موقت دو نقطه‌ای ارائه شده است. ارتورک^۱ و مومانی^۲ از روش تبدیل دیفرانسیل برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل کسری در [۴۴] استفاده کرده‌اند و غیره [۴۵، ۴۹].

نظریه بازتولید هسته برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی بسیار قدرتمند است. بسیاری از مقالات الگوریتم RKHS را برای یافتن جواب تقریبی دستگاه معادلات دیفرانسیل ارائه می‌دهند [۴۶، ۵۰، ۵۱، ۵۲]. در این روش جواب‌های تقریبی به طور یکنواخت به جواب‌های دقیق همگرا می‌شوند. روش RKHS پیاده‌سازی آسان و قدرتمندی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری دارد [۴۸، ۵۳].

اکنون روش RKSH را برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری به صورت زیر اعمال می‌کنیم:

$$\mu_n^{(1)} D_{0+}^{\eta_n^{(1)}} v_1(t) + \mu_{n-1}^{(1)} D_{0+}^{\eta_{n-1}^{(1)}} v_1(t) + \cdots + \mu_0^{(1)} D_{0+}^{\eta_0^{(1)}} v_1(t) = g_1(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)), \quad (1.3)$$

$$\mu_n^{(2)} D_{0+}^{\eta_n^{(2)}} v_2(t) + \mu_{n-1}^{(2)} D_{0+}^{\eta_{n-1}^{(2)}} v_2(t) + \cdots + \mu_0^{(2)} D_{0+}^{\eta_0^{(2)}} v_2(t) = g_2(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)),$$

⋮

$$\mu_n^{(n)} D_{0+}^{\eta_n^{(n)}} v_n(t) + \mu_{n-1}^{(n)} D_{0+}^{\eta_{n-1}^{(n)}} v_n(t) + \cdots + \mu_0^{(n)} D_{0+}^{\eta_0^{(n)}} v_n(t) = g_n(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)),$$

¹ Vedat Suat Ertürk

²Shaher Momani

با شرایط متناوب

$$\begin{aligned} v_1(0) &= v_1(1), \\ v_2(0) &= v_2(1), \\ &\vdots \\ v_n(0) &= v_n(1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

که $\mu_j^{(s)} \in \mathbb{R} (j = 0, 1, \dots, n), \mu_n^{(s)} \neq 0, t \in [0, 1]$ و $0 \leq \eta_0^{(s)} < \eta_1^{(s)} < \dots < \eta_n^{(s)} < 1$ ، $v_s \in W_2^2[0, 1]$ توابع مجهول هستند که باید معلوم شوند، $g_s(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))$ در $W_2^1[0, 1]$ پیوسته هستند با $s = 1, \dots, n$. در [۴۲] وجود و منحصر به فرد بودن جواب با استفاده از تابع گرین برای این مساله ثابت شده است.

ملاحظه ۱.۱.۳. فضای هسته باز تولیدی است و تابع هسته باز تولید $K_y(t)$ در این فضا به صورت

$$R_y(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 b_i(y) t^{i-1}, & t \leq y, \\ \sum_{i=1}^4 c_i(y) t^{i-1}, & t > y, \end{cases} \quad (3.3)$$

$R_y(t)$ در فضا $W_2^2[0, 1]$ به صورت

$$R_y(t) = \begin{cases} \frac{1}{48}(48 - 8t^3 + 12ty + 6t^3y + 6t^2y - 18ty^2 & y \leq t, \\ -9t^2y^2 + 3t^3y^2 + 6ty^3 + 3t^2y^3 - t^3y^3), \\ \frac{1}{48}(48 + 12ty - 18t^2y + 6t^3y - 9t^2y^2 & y > t. \\ +6ty^2 + 3t^3y^2 - 8y^3 + 6ty^3 + 3t^2y^3 - t^3y^3), \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۳. در

$$W_2^1[0, 1] = \{v | \text{مطلقاً پیوسته } v, v' \in L^2[0, 1]\}$$

هسته باز تولید به شکل زیر است:

$$r_y(t) = \begin{cases} t + 1, & t \leq y, \\ y + 1, & t > y. \end{cases}$$

۲.۳ ساختار روش هسته باز تولید

در اینجا عملگر دیفرانسیل خطی L فرموله شده و یک پایه متعامد ارائه شده است. سپس یک روش تکراری برای حل مساله (۱.۳) با شرایط (۲.۳) معرفی می شود. ابتدا، فرض کنید

$$L_s : W_2^2[0, 1] \rightarrow W_2^1[0, 1]$$

عملگر خطی کراندار معکوس پذیر باشد به طوری که

$$L_s v_s(t) = \sum_{j=0}^n \mu_j^{(s)} D_{0+}^{\eta_j^{(s)}} v_s(t), \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

سپس (۱.۳) با شرایط (۲.۳) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} (L_s v_s)(t) = g_s(t, v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)), & 0 \leq t \leq 1, \\ v_s(0) = v_s(1), \end{cases} \quad (5.3)$$

که $s = 1, \dots, n$ است.

لم ۱.۲.۳. L_s عملگر خطی کراندار است.

برهان. واضح است که L_s یک عملگر خطی است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم که L_s یک عملگر کراندار است. از تعریف (۲.۱.۳)، می گیریم

$$\|L_s v_s\|_{W_2^1}^2 = \langle L_s v_s(t), L_s v_s(t) \rangle_{W_2^1} = [(L_s v_s)(0)]^2 + \int_0^1 [(L_s v_s)'(t)]^2 dt.$$

از آنجا که

$$v_s(t) = \langle v_s(y), R_t(y) \rangle_{W_2^2}, \quad (L_s v_s)(t) = \langle v_s(y), L_s R_t(y) \rangle_{W_2^2},$$

با نامساوی شوارتز داریم

$$|(L_s v_s)(t)| \leq \|L_s R_t\|_{W_2^2} \|v_s\|_{W_2^2} = M_1 \|v_s\|_{W_2^2},$$

به طور مشابه

$$(L_s v_s)'(t) = \langle v_s(y), (L_s R_t(y))' \rangle_{W_2^2},$$

و بنابراین

$$|(L_s v_s)'(t)| \leq \|(L_s R_t)'\|_{W_2^2} \|v_s\|_{W_2^2} = M_2 \|v_s\|_{W_2^2},$$

در نهایت

$$\|(L_s v_s)\|_{W_2^1}^2 = [(L_s v_s)(0)]^2 + \int_0^1 [(L_s v_s)'(t)]^2 dx \leq (M_1^2 + M_2^2) \|v_s\|_{W_2^2}^2 = M \|v_s\|_{W_2^2}^2,$$

□ که در آن $M_1, M_2 > 0$ ثابت های مثبت و $M = M_1^2 + M_2^2 > 0$ هستند.

یک سیستم متعامد $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ در $W_2^2[0, 1]$ با قرار دادن

$$\Phi_i(t) = r_{t_i}(t)$$

که $r_t(\cdot)$ هسته بازتولید در فضای $W_2^1[0, T]$ است و

$$\Psi_i = L_s^* \Phi_i(t)$$

می سازیم که $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال است و

$$L_s^* : W_2^1[0, 1] \rightarrow W_2^2[0, 1]$$

عملگر الحاقی L_s است.

لم ۲.۲.۳. [۴۳] اگر $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ روی $[0, 1]$ چگال باشد، آنگاه $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ سیستم کامل در $W_2^2[0, 1]$ است.

$\{\bar{\Psi}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ پایه متعامد فضای $W_2^2[0, 1]$ است که از فرآیند گرام اشمیت $\{\Psi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ به شرح زیر بدست می آید

$$\bar{\Psi}_i(t) = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \Psi_k(t),$$

که ضرایب متعامد ρ_{ik} به شرح زیر است

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{\|\Psi_1\|}, \\ \rho_{ii} &= \frac{1}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik}^2}}, \\ \rho_{ij} &= \frac{-\sum_{k=j}^{i-1} d_{ik} \rho_{kj}}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} d_{ik}^2}}, \end{aligned}$$

که $d_{ik} = \langle \Psi_i, \bar{\Psi}_k \rangle_{W_2^2}$.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ روی $W_2^2[0, 1]$ چگال باشد و $v_s(t)$ جواب (۵.۳) داده شده توسط

$$v_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g_s(t_k, v_1(t_k), v_2(t_k), \dots, v_n(t_k)) \bar{\Psi}_i(t), \quad (6.3)$$

و جواب تقریبی

$$v_{s,n}(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g_s(t_k, v_1(t_k), v_2(t_k), \dots, v_n(t_k)) \bar{\Psi}_i(t). \quad (7.3)$$

برهان. فرض کنید $v_s \in W_2^2[0, 1]$ جواب منحصر به فرد از معادله (۱.۳) باشد، بنابراین

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v_s(t), \bar{\Psi}_i(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle v_s(t), \Psi_k(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle v_s(t), L_s^* \Phi_k(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle L v_s(t), \Phi_k(t) \rangle_{W_2^2} \bar{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g_s(t_k, v_1(t_k), v_2(t_k), \dots, v_n(t_k)) \bar{\Psi}_i(t). \end{aligned}$$

□

۳.۳ آنالیز همگرایی

در این بخش، همگرایی و خطا داده شده است و نشان خواهیم داد که $v_{s,n}(t)$ در معادله (۹.۳) به طور یکنواخت به جواب دقیق معادله (۱.۳) همگرا می‌شود. این یک نتیجه مهم از نظریه RKHS است.

قضیه ۱.۳.۳. اگر $v_s(t)$ در $W_2^2[0, 1]$ باشد، آنگاه ثابت‌های $M^s > 0$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$|v_s^{(i)}(t)| \leq M^s \|v_s\|_{W_2^2}, s = 1, \dots, n, i = 1, 2.$$

برهان. برای هر $t \in [0, 1]$ داریم

$$|v_s(t)| = |\langle v_s(\xi), R_t(\xi) \rangle_{W_2^2}| \leq \|R_t(\xi)\|_{W_2^2} \|v_s(\xi)\|_{W_2^2} \leq M_1^s \|v_s(\xi)\|_{W_2^2},$$

همچنین

$$|v_s'(t)| = |\langle v_s(\xi), \frac{\partial R_t(\xi)}{\partial t} \rangle_{W_2^2}| \leq \|\frac{\partial R_t(\xi)}{\partial t}\|_{W_2^2} \|v_s(\xi)\|_{W_2^2} \leq M_2^s \|v_s(\xi)\|_{W_2^2},$$

که $M_1^s, M_2^s > 0$ ثابت‌های مثبت و $M^s = \max\{M_1^s, M_2^s\}$ هستند. $\square$

نتیجه ۲.۳.۳. جواب‌های تقریبی $v_{s,n}(t)$ و $v_{s,n}'(t)$ به ترتیب به طور یکنواخت به جواب‌های دقیق $v_s(t)$ و $v_s'(t)$ همگرا هستند.

برهان. طبق قضیه (۱.۳.۳)، برای هر $t \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} |v_{s,n}^{(i)}(t) - v_s^{(i)}(t)| &= |\langle v_{s,n}(\xi) - v_s(\xi), \frac{\partial^i R_t(\xi)}{\partial t^i} \rangle_{W_2^2}| \\ &\leq \|\frac{\partial^i R_t(\xi)}{\partial t^i}\|_{W_2^2} \|v_{s,n}(\xi) - v_s(\xi)\|_{W_2^2} \\ &\leq M_i^s \|v_{s,n}(\xi) - v_s(\xi)\|_{W_2^2}, \end{aligned}$$

که در آن $i = 0, 1$ و M_i^s ثابت مثبت هستند. بنابراین، اگر $v_{s,n}(\xi) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} v_s(\xi)$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$ ، جواب‌های تقریبی $v_{s,n}(t)$ و $v_{s,n}'(t)$ به طور یکنواخت به $v_s(t)$ و $v_s'(t)$ همگرا می‌شوند. $\square$

ملاحظه ۳.۳.۳. بر اساس روش RKHS از دو حالت زیر برای جواب معادلات (۱.۳) و (۲.۳) استفاده می‌کنیم.

حالت اول. فرض کنید (۱.۳) خطی باشد، سپس جواب‌های دقیق و تقریبی به ترتیب (۶.۳) و (۷.۳) همگرا هستند.

حالت دوم. فرض کنید (۱.۳) غیرخطی باشد، در این حالت با توجه به (۶.۳) جواب (۱.۳) را به شکل زیر نشان می‌دهیم.

$$v_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i^s \bar{\Psi}_i(t), \quad (۸.۳)$$

که

$$A_i^s = \sum_{k=1}^i \rho_{ik}^s g_s(t_k, v_{1,k-1}(t_k), v_{2,k-1}(t_k), \dots, v_{n,k-1}(t_k))$$

مجهول هستند و با استفاده از B_i^s ما A_i^s را به دست خواهیم آورد. برای این منظور، قرار دهید $v_{s,0}(t) = 0$ و $v_{s,n}(t)$ را به صورت زیر داریم

$$v_{s,n}(t) = \sum_{i=1}^n B_i^s \bar{\Psi}_i(t), \quad (9.3)$$

که B_i^s از $\bar{\Psi}_i(t)$ به شکل

$$\begin{aligned} B_1^s &= \rho_{11} g_s(t_1, v_{1,0}(t_1), v_{2,0}(t_1), \dots, v_{n,0}(t_1)), \\ v_{s,1}(t) &= B_1^s \bar{\Psi}_1(t), \\ B_2^s &= \sum_{k=1}^2 \rho_{2k} g_s(t_k, v_{1,k-1}(t_k), v_{2,k-1}(t_k), \dots, v_{n,k-1}(t_k)), \\ v_{s,2}(t) &= \sum_{i=1}^2 B_i^s \bar{\Psi}_i(t), \\ &\vdots \\ v_{s,n-1}(t) &= \sum_{i=1}^{n-1} B_i^s \bar{\Psi}_i(t), \\ B_n^s &= \sum_{k=1}^n \rho_{nk} g_s(t_k, v_{1,k-1}(t_k), v_{2,k-1}(t_k), \dots, v_{n,k-1}(t_k)). \end{aligned}$$

می توانیم تضمین کنیم که $v_{s,n}(t)$ در معادله (۹.۳) شرایط (۲.۳) را برآورده می کند.

لم ۴.۳.۳. برای $v_{s,n}(t)$ در معادله (۹.۳)، برقرار است

$$L_s v_{s,n}(t_j) = L_s v_s(t_j) = g_s(t_j, v_{1,j-1}(t_j), v_{2,j-1}(t_j), \dots, v_{n,j-1}(t_j)). \quad (10.3)$$

برهان. اثبات با استقراء ریاضی زیر به دست می آید. بنابراین، فرض کنید $j \leq n$ باشد

$$\begin{aligned} L_s v_{s,n}(t_j) &= \sum_{i=1}^n B_i^s L_s \bar{\Psi}_i(t_j) = \sum_{i=1}^n B_i^s \langle L_s \bar{\Psi}_i(t), \Phi_j(t) \rangle_{W_2^1} \\ &= \sum_{i=1}^n B_i^s \langle \bar{\Psi}_i(t), L_s^* \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \sum_{i=1}^n B_i^s \langle \bar{\Psi}_i(t), \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} \end{aligned}$$

به دلیل متعامد بودن $\{\bar{\Psi}_i(t)\}_{i=1}^\infty$ ، ما داریم

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho=1}^j \rho_{j\varrho} L_s v_{s,n}(t_\varrho) &= \sum_{i=1}^n B_i^s \left\langle \bar{\Psi}_i(t), \sum_{\varrho=1}^j \rho_{j\varrho} \Psi_\varrho(t) \right\rangle_{W_2^2} = \sum_{i=1}^n B_i^s \langle \bar{\Psi}_i(t), \bar{\Psi}_j(t) \rangle_{W_2^2} \\ &= B_j^s = \sum_{\varrho=1}^j \rho_{j\varrho} g_s(t_\varrho, v_{1,\varrho-1}(t_\varrho), v_{2,\varrho-1}(t_\varrho), \dots, v_{n,\varrho-1}(t_\varrho)). \end{aligned}$$

اگر $j = 1$ باشد، آنگاه

$$L_s v_{s,n}(t_1) = g_s(t_1, v_{1,0}(t_1), v_{2,0}(t_1), \dots, v_{n,0}(t_1)).$$

علاوه بر این، اگر $j = 2$ باشد، پس

$$\begin{aligned} \rho_{21} L_s v_{s,n}(t_1) + \rho_{22} L_s v_{s,n}(t_2) &= \rho_{21} g_s(t_1, v_{1,0}(t_1), v_{2,0}(t_1), \dots, v_{n,0}(t_1)) \\ &+ \rho_{22} g_s(t_2, v_{1,1}(t_2), v_{2,1}(t_2), \dots, v_{n,1}(t_2)) \end{aligned}$$

یعنی، $L_s v_{s,n}(t_2) = g_s(t_2, v_{1,1}(t_2), \dots, v_{n,1}(t_2))$. به همین ترتیب، نتیجه می‌دهد

$$L_s v_{s,n}(t_j) = g_s(t_j, v_{1,j-1}(t_j), v_{2,j-1}(t_j), \dots, v_{n,j-1}(t_j)).$$

واضح است که با در نظر گرفتن حد معادله (۹.۳)، نتیجه می‌شود

$$v_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i^s \bar{\psi}_i(t).$$

بنابراین،

$$v_{s,n}(t) = P_n v_s(t)$$

که P_n یک تصویر متعامد $W_2^2[0, 1]$ به فضای تولید شده $\{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n\}$ است. سپس

$$\begin{aligned} L_s v_{s,n}(t_j) &= \langle L_s v_{s,n}(t), \Phi_j(t) \rangle_{W_2^1} = \langle v_{s,n}(t), L_s^* \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \langle P_n v_s(t), \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} \\ &= \langle v_s(t), P_n \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \langle v_s(t), \Psi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \langle v_s(t), L_s^* \Phi_j(t) \rangle_{W_2^2} = \\ &= \langle L_s v_s(t), \Phi_j(t) \rangle_{W_2^1} = L_s v_s(t_j). \end{aligned}$$

□

لم ۵.۳.۳. اگر $v_s(t), t_n \rightarrow y, (n \rightarrow \infty)$ و $v_{s,n}(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} v_s(t)$ در $[0, 1]$ پیوسته باشد نسبت به $v_i \in (-\infty, +\infty)$ بنابراین

$$g_s(t_n, v_{1,n-1}(t_n), v_{2,n-1}(t_n), \dots, v_{n,n-1}(t_n)) \rightarrow g_s(y, v_1(y), v_2(y), \dots, v_n(y)) \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

برهان. توجه کنید

$$\begin{aligned} |v_{s,n-1}(t_n) - v_s(y)| &= |v_{s,n-1}(t_n) - v_{s,n-1}(y) + v_{s,n-1}(y) - v_s(y)| \\ &\leq |v_{s,n-1}(t_n) - v_{s,n-1}(y)| + |v_{s,n-1}(y) - v_s(y)|. \end{aligned}$$

با ویژگی باز تولید $R_y(\xi)$ به دست می‌آید که

$$\begin{aligned} |v_{s,n-1}(t_n) - v_{s,n-1}(y)| &= |\langle v_{s,n-1}(\xi), R_{t_n}(\xi) - R_y(\xi) \rangle_{W_2^2}| \\ &\leq \|v_{s,n-1}\|_{W_2^2} \|R_{t_n}(\xi) - R_y(\xi)\|_{W_2^2}. \end{aligned}$$

اگر $R_y(\xi)$ متقارن باشد، آنگاه

$$\|R_{t_n}(\xi) - R_y(\xi)\| \rightarrow 0.$$

بنابراین

$$|v_{s,n-1}(t_n) - v_{s,n-1}(y)| \rightarrow 0 \quad (t_n \rightarrow y, n \rightarrow \infty).$$

از نتیجه ۲.۳.۳ داریم

$$|v_{s,n-1}(y) - v_s(y)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

بنابراین

$$v_{s,n-1}(t_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} v_s(y) \quad (n \rightarrow \infty).$$

از پیوستگی $g_s(\cdot)$ داریم

$$g_s(t_n, v_{1,n-1}(t_n), v_{2,n-1}(t_n), \dots, v_{n,n-1}(t_n)) \rightarrow g_s(y, v_1(y), v_2(y), \dots, v_n(y)) \quad (n \rightarrow \infty).$$

□

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال باشد و $\|v_{s,n}\|_{W_2^2}$ در معادله (۹.۳) کراندار باشد آنگاه $v_{s,n}(t)$ همگرا به

$$v_s(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g_s(t_k, v_{1,k-1}(t_k), v_{2,k-1}(t_k), \dots, v_{n,k-1}(t_k)) \bar{\Psi}_i(t), \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (11.3)$$

برهان. ابتدا، نشان خواهیم داد که دنباله $\{v_{s,n}\}_{n=1}^\infty$ در $\|\cdot\|_{W_2^2}$ همگرا است. از معادله (۹.۳)، استنباط می شود که

$$v_{s,n+1}(t) = v_{s,n}(t) + B_{n+1}^s \bar{\Psi}_{n+1}^s(t).$$

با استفاده از متعامد بودن $\{\bar{\Psi}_i^s\}_{i=1}^\infty$ ، به دست می آید که

$$\|v_{s,n+1}\|_{W_2^2}^2 = \|v_{s,n}\|_{W_2^2}^2 + (B_{n+1}^s)^2 = \|v_{s,n-1}\|_{W_2^2}^2 + (B_n^s)^2 + (B_{n+1}^s)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{n+1} (B_i^s)^2 \quad (12.3)$$

که $B_i^s = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} g_s(t_k, v_{1,k-1}(t_k), v_{2,k-1}(t_k), \dots, v_{n,k-1}(t_k))$ بنابراین از (۱۲.۳) داریم

$$\|v_{s,n}\|_{W_2^2}^2 \leq \|v_{s,n+1}\|_{W_2^2}^2.$$

از آنجایی که $\|v_{s,n}\|_{W_2^2}^2$ کراندار است پس $\|v_{s,n}\|_{W_2^2}^2$ همگراست زمانی که $n \rightarrow \infty$. بنابراین وجود دارد c^s ثابتی به طوری که $\sum_{i=1}^\infty (B_i^s)^2 = c^s$ در نتیجه

$$B_i^s \in l^2 = \{B | \sum_{i=1}^\infty (B_i)^2 < \infty\}.$$

فرض کنید $m > n$ ، با متعامد بودن $v_{s,n+1}(t) - v_{s,n}(t)$ ، $n = 2, 3, \dots$ داریم

$$\begin{aligned} \|v_{s,m} - v_{s,n}\|_{W_2^2}^2 &= \|v_{s,m} - v_{s,m-1} + v_{s,m-1} - \dots + v_{s,n+1} - v_{s,n}\|_{W_2^2}^2 \\ &= \|v_{s,m} - v_{s,m-1}\|_{W_2^2}^2 + \dots + \|v_{s,n+1} - v_{s,n}\|_{W_2^2}^2. \end{aligned}$$

علاوه بر این،

$$\|v_{s,m} - v_{s,m-1}\|_{W_2^2}^2 = (B_m^s)^2.$$

در نتیجه،

$$\|v_{s,m} - v_{s,n}\|_{W_2^2}^2 = \sum_{i=n+1}^m (B_i^s)^2 \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty.$$

با توجه به کامل بودن $W_2^2[0, 1]$ ، یک $\bar{v}_s(t)$ در $W_2^2[0, 1]$ وجود دارد به طوری که

$$v_{s,n}(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} v_s(t), \quad s = 1, \dots, n \quad (n \rightarrow \infty).$$

در مرحله دوم، نشان خواهیم داد که $\bar{v}_s(t)$ جواب معادله (۵.۳) است. به دلیل اینکه $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ روی $[0, 1]$ چگال است، برای هر $t \in [0, 1]$ ، یک زیر دنباله $t_{n_j} \rightarrow t$ به طوری که $t \rightarrow \infty$ $j \rightarrow \infty$ داریم (۴.۳.۳) داریم

$$L_s v_{s,n}(t_{n_j}) = g_s(t_{n_j}, v_{1,n_j-1}(t_k), v_{2,n_j-1}(t_k), \dots, v_{n,n_j-1}(t_k)).$$

بنابراین، فرض کنید $j \rightarrow \infty$ توسط لم (۵.۳.۳) و پیوستگی g_s ، حاصل می شود

$$L_s \bar{v}_s(t) = g_s(t, \bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t), \dots, \bar{v}_n(t)).$$

□

قضیه ۷.۳.۳. فرض کنید $\varepsilon_n^s = \|v_s(t) - v_{s,n}(t)\|_{W_2^2}$ که $v_s(t)$ و $v_{s,n}(t)$ به ترتیب با معادلات (۶.۳) و (۷.۳) داده شده اند. پس ε_n^s به طور یکنواخت نزولی هستند در $\|\cdot\|_{W_2^2}$ و $\varepsilon_n^s \rightarrow 0$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$.

برهان. به وضوح

$$\varepsilon_n^{s^2} = \|v_s(t) - v_{s,n}(t)\|_{W_2^2}^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} B_i^s \bar{\Psi}_i(t) \right\|_{W_2^2}^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} (B_i^s)^2,$$

و

$$\varepsilon_{n-1}^{s^2} = \|v_s(t) - v_{s,n-1}(t)\|_{W_2^2}^2 = \left\| \sum_{i=n}^{\infty} B_i^s \bar{\Psi}_i(t) \right\|_{W_2^2}^2 = \sum_{i=n}^{\infty} (B_i^s)^2.$$

□

بنابراین، $\varepsilon_n^s \leq \varepsilon_{n-1}^s$.

۴.۳ مثالهای عددی

اکنون دو آزمون عددی برای نشان دادن اعتبار و کارایی الگوریتم پیشنهادی مورد بررسی قرار می گیرند. برای انجام فرآیند محاسبات از بسته نرم افزاری متمتیکا استفاده می شود و خطای مطلق به صورت زیر است

$$e(t) = |v(t) - v_n(t)|.$$

مثال ۱.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (FDDEs) را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
 D_{0+}^{0.9} v_1(t) + v_1^2(t) v_2(t) e^{v_3(t)} &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.1)} t^{2.1} - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.1)} t^{0.1} + (t^3 - t)^2 (t^3 - t^2) e^{t^2 - t}, \\
 D_{0+}^{0.6} v_2(t) + D_{0+}^{0.5} v_2(t) - \cos(v_1(t)) (1 - t) v_2(t) + v_3^2(t) &= \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.4)} t^{2.4} - \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.4)} t^{1.4} \quad (13.3) \\
 &+ \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.5)} t^{2.5} - \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} - \cos(t^3 - t) (1 - t) (t^3 - t^2) + (t^2 - t)^2, \\
 D_{0+}^{0.5} v_3(t) + D_{0+}^{0.3} v_3(t) + v_1(t)^2 - v_1(t) v_2(t) v_3(t) &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.5)} t^{1.5} - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)} t^{0.5} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.7)} t^{1.7} \\
 &- \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.7)} t^{0.7} + (t^3 - t)^2 - (t^3 - t) (t^2 - t) (t^3 - t^2),
 \end{aligned}$$

با شرایط متناوب

$$\begin{aligned}
 v_1(0) &= v_1(1), \\
 v_2(0) &= v_2(1), \\
 v_3(0) &= v_3(1).
 \end{aligned} \quad (14.3)$$

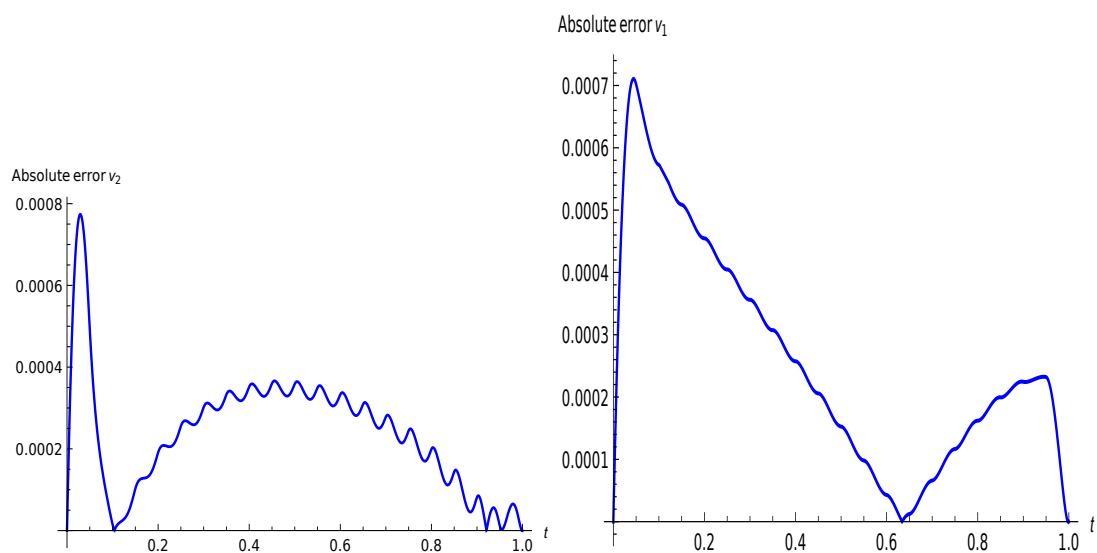
$v_3(t) = t^2 - t$ و $v_1(t) = t^3 - t$, $v_2(t) = t^3 - t^2$ جواب‌های دقیق هستند. با استفاده از روش ارائه شده، قرار می‌دهیم $n = 20$ و جواب‌های تقریبی را با $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ در $[0, 1]$ به دست می‌آوریم که فقط با انتخاب این تعداد نقاط به دقت مناسبی می‌رسیم. نتایج عددی در جداول (۲.۳) و (۱.۳)، و (۳.۳) برای متغیرهای $v_1(t)$, $v_2(t)$ و $v_3(t)$ داده شده است. در شکل (۱.۴) نمودار خط‌های مطلق و $v_1(t)$, $v_2(t)$ نشان داده شده است.

جدول ۱.۳: نتایج عددی $v_1(t)$ برای مثال (۱.۴.۳) با $n = 20$

t_i	$v_1(t)$	جواب تقریبی	خطای مطلق
0	0	0	0
0.1	-0.099	0.0984276	0.57243×10^{-4}
0.2	-0.192	0.191545	0.454651×10^{-4}
0.3	-0.273	0.272644	0.356147×10^{-4}
0.4	-0.336	0.335743	0.257369×10^{-4}
0.5	-0.375	0.374847	0.15268×10^{-4}
0.6	-0.384	0.383957	0.428434×10^{-5}
0.7	-0.357	0.357066	0.659764×10^{-5}
0.8	-0.288	0.288162	0.162007×10^{-4}
0.9	-0.171	0.171224	0.224479×10^{-4}
1	0	9.03592×10^{-17}	9.03592×10^{-17}

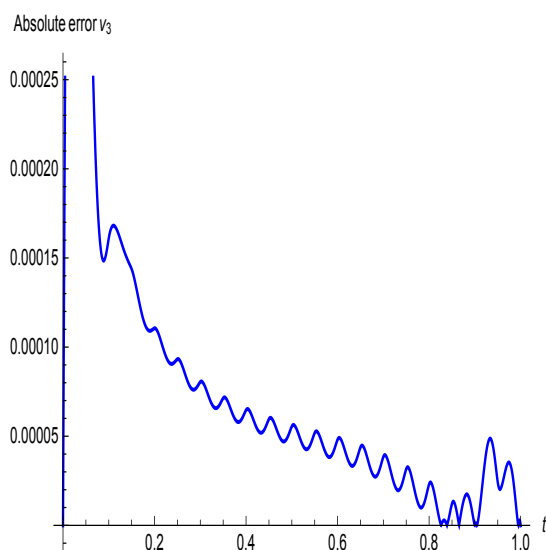
جدول ۲.۳: نتایج عددی $v_2(t)$ برای مثال (۱.۴.۳) با $n = 20$

t_i	$v_2(t)$	جواب تقریبی	خطای مطلق
0	0	0	0
0.1	-0.009	-0.00901526	0.152639×10^{-5}
0.2	-0.032	-0.0318092	0.190844×10^{-4}
0.3	-0.063	-0.0626982	0.301787×10^{-4}
0.4	-0.096	-0.0956482	0.351844×10^{-4}
0.5	-0.125	-0.124641	0.358934×10^{-4}
0.6	-0.144	-0.143667	0.332832×10^{-4}
0.7	-0.147	-0.146722	0.278134×10^{-4}
0.8	-0.128	-0.127801	0.199052×10^{-4}
0.9	-0.081	-0.0809187	0.813207×10^{-5}
1	0	-3.95224×10^{-15}	3.95224×10^{-15}



جدول ۳.۳: نتایج عددی $v_3(t)$ برای مثال (۱.۴.۳) با $n = 20$

t_i	$v_3(t)$	جواب تقریبی	خطای مطلق
0	0	0	0
0.1	-0.09	-0.0898389	0.000161065
0.2	-0.16	-0.159889	0.000110552
0.3	-0.21	-0.20992	0.0000804246
0.4	-0.24	-0.239935	0.000064657
0.5	-0.25	-0.249944	0.0000555039
0.6	-0.24	-0.239952	0.0000481118
0.7	-0.21	-0.209962	0.000038423
0.8	-0.16	-0.159977	0.0000230624
0.9	-0.09	-0.0899998	2.37125×10^{-7}
1	0	8.48137×10^{-16}	8.48137×10^{-16}



شکل ۱: نمودارهای خطاهای مطلق با استفاده از روش RKHS برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۱۳.۳) با شرایط (۱۴.۳) در تکرار $n = 20$ در بازه $[0, 1]$.

مثال ۲.۴.۳. دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید

$$D_{0+}^{0.4} v_1(t) + D_{0+}^{0.2} v_1(t) - v_1(t) + v_2(t)^3 = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4.6)} t^{3.6} - \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.6)} t^{2.6} + \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4.8)} t^{3.8} - \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.8)} t^{2.8} - (t^4 - t^3) + (t^3 - 2t^2 + t)^3, \quad (15.3)$$

$$D_{0+}^{0.7} v_2(t) - v_2(t) \sinh(v_1(t)) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(3.3)} t^{2.3} - 2 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2.3)} t^{1.3} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.3)} t^{0.3} - (t^3 - 2t^2 + t) \sinh(t^4 - t^3),$$

با شرایط متناوب زیر

$$v_1(0) = v_1(1), \quad (۱۶.۳)$$

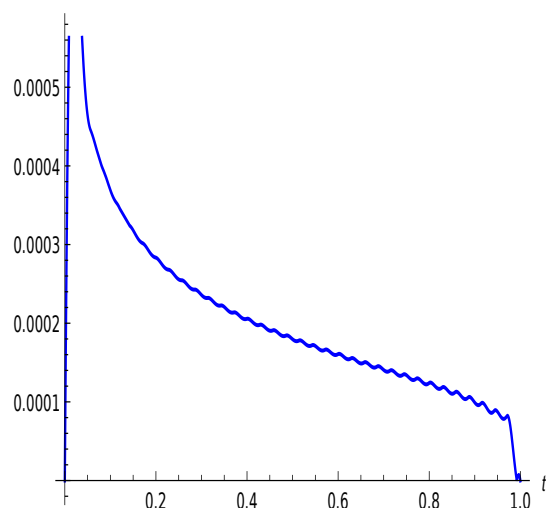
$$v_2(0) = v_2(1).$$

جواب‌های دقیق $v_1(t) = t^4 - t^3$ و $v_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$ هستند. با انتخاب $n = 35$ به دقت مناسبی می‌رسیم. طبق روش حاضر، $t_i = \frac{i}{n}, i = 1, 2, \dots, n$ و $n = 35$ را روی $[0, 1]$ قرار می‌دهیم. نتایج عددی در جداول (۴.۳) و (۵.۳) به ترتیب برای متغیرهای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ نشان داده شده است. شکل (۴.۳) نمودار خطاهای مطلق $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را نشان می‌دهد.

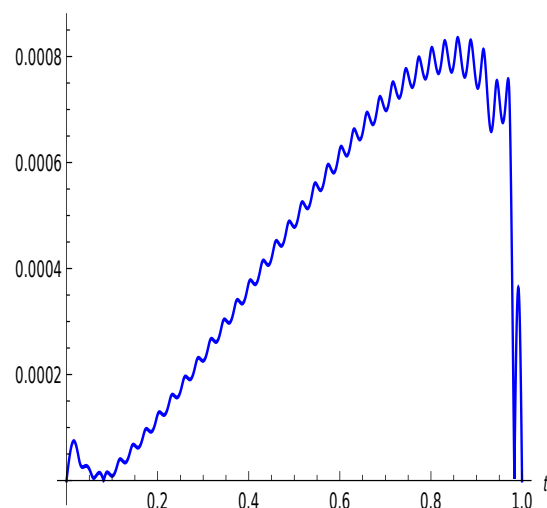
جدول ۴.۳: نتایج عددی $v_1(t)$ برای مثال (۲.۴.۳) با $n = 35$

t_i	$v_1(t)$	جواب تقریبی	خطای مطلق
0	0	0	0
0.1	-0.0009	0.000891222	8.77754×10^{-6}
0.2	-0.0064	0.00627543	0.124575×10^{-4}
0.3	-0.0189	0.0186741	0.225851×10^{-4}
0.4	-0.0384	0.0380271	0.372931×10^{-4}
0.5	-0.0625	0.0620216	0.478389×10^{-4}
0.6	-0.0864	0.0857747	0.625294×10^{-4}
0.7	-0.1029	0.102201	0.699045×10^{-4}
0.8	-0.1024	0.101587	0.812732×10^{-4}
0.9	-0.0729	0.0721532	0.746768×10^{-4}
1	0	1.90523×10^{-13}	1.90523×10^{-13}

Absolute error v_2



Absolute error v_1



شکل ۲: نمودارهای خطاهای مطلق با استفاده از روش RKHS برای دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۱۵.۳) با شرایط (۱۶.۳) در تکرار $n = 35$ در بازه $[0, 1]$.



جدول ۵.۳: نتایج عددی $v_2(t)$ برای مثال (۲.۴.۳) با $n = 35$

t_i	$v_2(t)$	جواب تقریبی	خطای مطلق
0	0	0	0
0.1	0.081	0.0806308	0.36916×10^{-4}
0.2	0.128	0.127717	0.283333×10^{-4}
0.3	0.147	0.146764	0.235965×10^{-4}
0.4	0.144	0.143794	0.205639×10^{-4}
0.5	0.125	0.12482	0.179613×10^{-4}
0.6	0.096	0.0958392	0.160752×10^{-4}
0.7	0.063	0.0628594	0.140576×10^{-4}
0.8	0.032	0.0318759	0.124051×10^{-4}
0.9	0.009	0.00890088	0.991197×10^{-4}
1	0	2.63317×10^{-16}	2.63317×10^{-16}

۵.۳ نتیجه گیری

در این فصل از روش RKHS برای یافتن جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب استفاده کردیم که جواب‌های تقریبی به دست آمده با روش ارایه شده به طور یکنواخت به جوابهای دقیق همگرا هستند و همین امر در مورد مشتقات آنها صادق است. خطای تقریبی بین $v_s(t)$ و $v_{s,n}(t)$ نزولی یکنوا با نرم $\|\cdot\|_{W_2^2}$ است. نتایج نظری و عددی حاکی از این مطلب بود که روش پیشنهادی از دقت و کارایی قابل قبولی برای یافتن جواب تقریبی مساله برخوردار است.

فصل ۴

حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط پاد متناوب با روش هسته باز تولیدی

۱.۴ مقدمه

بسیاری از محققین معادلات دیفرانسیل غیرخطی را با شرایط پادمتناوب مورد مطالعه قرار داده‌اند [۸۵، ۸۶، ۸۷]. علاوه بر این، شرایط مرزی پادمتناوب در فیزیک در موقعیت‌های مختلفی مانند [۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱] ظاهر می‌شود. همچنین شرایط مرزی پادمتناوب برای انواع معادلات دیفرانسیل مانند معادلات دیفرانسیل جزئی [۹۲]، معادلات دیفرانسیل درجه بالاتر [۹۳، ۹۴]، معادلات تفاضل [۹۵، ۹۶]، معادلات تکامل [۹۷، ۹۸، ۹۹]، معادلات دیفرانسیل کسری [۱۰۰] بکار می‌رود. انواع معادلات دیفرانسیل غیرخطی با شرایط پادمتناوب در فضا‌های هیلبرت بررسی شده است [۱۰۱، ۱۰۲]. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط پادمتناوب در [۱۰۳، ۱۰۴] استفاده می‌شود.

مجموعه وسیعی از کارهای مربوط به روش RKHS برای به دست آوردن جواب انواع معادلات عبارت است از معادلات دیفرانسیل معمولی [۱۰۵، ۱۰۶]، معادلات دیفرانسیل جزئی [۱۰۷]، معادلات تفاضلی [۱۰۸]، معادلات دیفرانسیل انتگرالی فازی فردهم-ولترا [۱۰۹]، معادلات دیفرانسیل انتگرال فازی ولترا [۱۱۰]، معادلات انتگرال فردهم [۱۱۱]. حل عددی مسایل مقدار مرزی با شرایط مرزی پاد تناوبی با استفاده از روش هسته بازتولید در مقالات مختلف دنبال شده است. برای ذکر چند مورد، وی و همکاران در [۱۱۲] جواب پادمتناوب معادلات ریلی را با استفاده از روش فضای بازتولید هسته هیلبرت مورد بحث قرار داده‌اند. ارگائو^۱ و همکاران در [۱۱۳] روش RKHS را برای محاسبه مسایل مقدار مرزی مرتبه دوم منفرد با شرایط مرزی پادمتناوب ارایه می‌کند. هدف از این پایاننامه استفاده از روش هسته باز تولید برای ارایه جواب تقریبی برای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به شرح زیر است

$$y'(t) + f(t)y(t) = G(t, y(t)); 0 \leq t \leq 1, \quad (۱.۴)$$

^۱ER Gao

با شرایط پادمتناوب

$$y(0) = -y(1), \quad (2.4)$$

که در آن $f(t)$ تابع پیوسته است و $y(t) \in W_2^1[0, 1]$, $G(t, y(t)) \in W_2^2[0, 1]$ یک تابع مجهول است که باید مشخص شود. در این فصل فرض می‌کنیم که معادله دیفرانسیل (۱.۴) و (۲.۴) یک جواب منحصر به فرد در بازه $[0, 1]$ دارند.

ملاحظه ۱.۱.۴. فضای هسته باز تولیدی $W_2^2[0, 1]$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$W_2^2[0, 1] = \{y(t) | y'(t), \text{ مطلقاً پیوسته}, y''(t) \in L^2[0, 1], y(0) = -y(1)\}.$$

ملاحظه ۲.۱.۴. هسته بازتولید $R_x(t)$ با استفاده از تعریف ضرب داخلی را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$R_x(t) = \begin{cases} \frac{1}{192}(48 - 72x - 36x^2 - 20x^3 - 72t + 156xt + 78x^2t + 6x^3t - 36t^2 - 18xt^2 - 9x^2t^2 + 3x^3t^2 + 12t^3 + 6xt^3 + 3x^2t^3 - x^3t^3), & x \leq t, \\ \frac{1}{192}(48 - 72x - 36x^2 + 12x^3 - 72t + 156xt - 18x^2t + 6x^3t - 36t^2 + 78xt^2 - 9x^2t^2 + 3x^3t^2 - 20t^3 + 6xt^3 + 3x^2t^3 - x^3t^3), & y > t. \end{cases}$$

ملاحظه ۳.۱.۴. فضای تابعی حقیقی مقدار

$$W_2^1[0, 1] = \{y | y' \text{ کاملاً پیوسته است}, y' \in L^2[0, 1]\}$$

یک تابع فضای تابعی هیلبرت با ضرب داخلی

$$\langle y, z \rangle_{W_2^1} = y(0)z(0) + \int_0^1 y'(t)z'(t) dt. \quad (3.4)$$

است و می‌توان ثابت کرد که $W_2^1[0, 1]$ یک فضای هسته بازتولیدی هیلبرت است و

$$r_x(t) = \begin{cases} t + 1, & t \leq x, \\ x + 1, & t > x. \end{cases}$$

۲.۴ روش هسته باز تولیدی

در این بخش، روش RKHS را پیاده‌سازی می‌کنیم و جواب‌های دقیق و تقریبی را به صورت سری در فضای $W_2^1[0, 1]$ فرموله می‌کنیم. بر اساس فرآیند متعامدسازی گرام اشمیت، یک سیستم متعامد بر روی $W_2^2[0, 1]$ خواهیم ساخت.

برای این کار عملگر خطی دیفرانسیل $L : W_2^2[0, 1] \rightarrow W_2^1[0, 1]$ را معرفی می‌کنیم

$$Ly(t) = y'(t) + f(t)y(t), \quad (4.4)$$

سپس، معادله (۱.۴) تبدیل می‌شود به

$$(Ly)(t) = G(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (5.4)$$

$$y(0) = -y(1).$$

قضیه ۱.۲.۴. عملگر L خطی و کراندار است.

برهان. به وضوح L خطی است. کرانداری L به صورت زیر است از تعریف (۳.۴)، داریم

$$\|Ly\|_{W_2^1}^2 = \langle Ly, Ly \rangle_{W_2^1} = [(Ly)(0)]^2 + \int_0^1 [(Ly)'(t)]^2 dt.$$

با خاصیت باز تولیدی $R_t(x)$ داریم

$$y(t) = \langle y(v), R_t(v) \rangle_{W_2^2}, \quad (Ly)(t) = \langle y(v), LR_t(v) \rangle_{W_2^2}, \quad (Ly)'(t) = \langle y(v), (LR_t(v))' \rangle_{W_2^2}.$$

با نامساوی کوشی شوارتز

$$|(Ly)(t)| = |\langle y(v), LR_t(v) \rangle_{W_2^2}| \leq \|LR_t\|_{W_2^2} \|y\|_{W_2^2} = M_1 \|y\|_{W_2^2},$$

و

$$|(Ly)'(t)| = |\langle y(v), (LR_t(V))' \rangle_{W_2^2}| \leq \|(LR_t)'\|_{W_2^2} \|y\|_{W_2^2} = M_2 \|y\|_{W_2^2},$$

بنابراین

$$[(Ly)(0)]^2 \leq M_1^2 \|y\|_{W_2^2}^2, \quad [(Ly)'(t)]^2 \leq M_2^2 \|y\|_{W_2^2}^2 \quad \text{و} \quad \int_0^1 [(Ly)'(t)]^2 dt \leq M_2^2 \|y\|_{W_2^2}^2.$$

یعنی

$$\|(Ly)\|_{W_2^1}^2 = [(Ly)(0)]^2 + \int_0^1 [(Ly)'(t)]^2 dt \leq (M_1^2 + M_2^2) \|y\|_{W_2^2}^2,$$

□

$$.M = M_1^2 + M_2^2 > 0 \text{ که}$$

حال دستگاه متعامد $\{\Psi_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ از فضای $W_2^2[0, 1]$ را به صورت زیر می‌سازیم:

قرار می‌دهیم $\varphi_i(t) = r_{t_i}(t)$ و

$$\Psi_i = L^* \varphi_i(t)$$

که $L^* : W_2^1[0, 1] \rightarrow W_2^2[0, 1]$ عملگر الحاقی L است و $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال است.

لم ۲.۲.۴. [۱۱۴] اگر $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ روی $[0, 1]$ چگال باشد، سپس $\{\Psi_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل از $W_2^2[0, 1]$ و $\Psi_i(t) = LR_x(t)|_{x=t_i}$ است.

□

برهان. [۴۳] را ببینید.

پایه متعامد $\{\tilde{\Psi}_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ در $W_2^2[0, 1]$ از فرآیند گرم اشمیت $\{\Psi_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ به شرح زیر حاصل شده است

$$\tilde{\Psi}_i(t) = \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} \Psi_k(t)$$

که α_{ik} به صورت زیر است

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\|\Psi_1\|},$$

$$\alpha_{ii} = \frac{1}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}},$$

$$\alpha_{ij} = \frac{-\sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}\alpha_{kj}}{\sqrt{\|\Psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik}^2}}, \quad i \neq j$$

و

$$b_{ik} = \langle \Psi_i, \tilde{\Psi}_k \rangle_{W_2^2}$$

قضیه ۳.۲.۴. [۱۱۴]

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} G(t_k, y(t_k)) \tilde{\Psi}_i(t), \quad (6.4)$$

جواب دقیق (۵.۴) است و $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ چگال است که با کوتاه کردن سری (۶.۴) جواب تقریبی را به صورت زیر داریم

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} G(t_k, y(t_k)) \tilde{\Psi}_i(t). \quad (7.4)$$

برهان. فرض کنید $y \in W_2^2[0, 1]$ جواب منحصر به فرد از معادله (۱.۴) باشد، بنابراین

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle y(t), \tilde{\Psi}_i(t) \rangle_{W_2^2} \tilde{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} \langle y(t), \Psi_k(t) \rangle_{W_2^2} \tilde{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} \langle y(t), L^* \Phi_k(t) \rangle_{w_2^2} \tilde{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} \langle Ly(t), \Phi_k(t) \rangle_{w_2^2} \tilde{\Psi}_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} G(t_k, y(t_k)) \tilde{\Psi}_i(t). \end{aligned}$$

□

قضیه ۴.۲.۴. اگر $y \in W_2^2[0, 1]$ یک $M > 0$ ثابت وجود دارد به طوری که

$$|y^{(j)}(t)| \leq M \|y\|_{W_2^2}, \quad j = 0, 1.$$

برهان. برای هر $t \in [0, 1]$ داریم

$$|y(t)| = |\langle y(\zeta), R_t(\zeta) \rangle_{W_2^2}| \leq \|R_t(\zeta)\|_{W_2^2} \|y(\zeta)\|_{W_2^2} \leq M_1 \|y(\zeta)\|_{W_2^2},$$

همچنین

$$|y'(t)| = |\langle y(\zeta), \frac{\partial R_t(\zeta)}{\partial t} \rangle_{W_2^2}| \leq \left\| \frac{\partial R_t(\zeta)}{\partial t} \right\|_{W_2^2} \|y(\zeta)\|_{W_2^2} \leq M_2 \|y(\zeta)\|_{W_2^2},$$

فرض کنید $M = \max\{M_1, M_2\}$ که در آن $M_1, M_2 > 0$ است. $\square$

۳.۴ آنالیز همگرایی

با استفاده از قضایا و لم زیر، نشان می‌دهیم که جواب تقریبی $y_m(\cdot)$ معادله (۷.۴) به جواب دقیق $y(\cdot)$ معادله (۱.۴) همگرا می‌شود.

لم ۱.۳.۴. اگر داشته باشیم $y_m(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} \bar{y}(t)$ و $t_m \rightarrow t$ هنگامی که $(m \rightarrow \infty)$ همچنین $G(t, y(t))$ تابعی پیوسته و $\|y_m(t)\|_{W_2^2}$ کراندار باشد آنگاه

$$G(t_m, y_{m-1}(t_m)) \rightarrow G(t, \bar{y}(t)) \quad (m \rightarrow \infty).$$

برهان. مشاهده می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |y_{m-1}(t_m) - \bar{y}(s)| &= |y_{m-1}(t_m) - y_{m-1}(s) + y_{m-1}(s) - \bar{y}(s)| \\ &\leq |y_{m-1}(t_m) - y_{m-1}(s)| + |y_{m-1}(s) - \bar{y}(s)|. \end{aligned}$$

با خاصیت باز تولیدی $R_t(s)$ داریم

$$\begin{aligned} y_{m-1}(t_m) &= \sum_{j=1}^m \langle y_{m-1}(t), (R_{t_m}(t))_j e_j \rangle_{W_2^2} e_j, \\ y_{m-1}(s) &= \sum_{j=1}^m \langle y_{m-1}(t), (R_s(t))_j e_j \rangle_{W_2^2} e_j. \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} |y_{m-1}(t_m) - y_{m-1}(s)| &= \left| \sum_{j=1}^m \langle y_{m-1}(t), (R_{t_m}(t))_j e_j - (R_s(t))_j e_j \rangle_{W_2^2} e_j \right| \quad (۸.۴) \\ &\leq \sum_{j=1}^m |\langle y_{m-1}(t), (R_{t_m}(t) - R_s(t))_j e_j \rangle_{W_2^2} e_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^m \|y_{m-1}(t)\|_{W_2^2} \|(R_{t_m}(t) - R_s(t))_j e_j\|_{W_2^2} |e_j| \\ &\leq \|y_{m-1}(t)\|_{W_2^2} \sum_{j=1}^m \|(R_{t_m}(t) - R_s(t))_j e_j\|_{W_2^2} |e_j|. \end{aligned}$$

از تقارن $R_s(t)$ ، چنین است که

$$\|(R_{t_m}(t) - R_s(t))_j e_j\|_{W_2^2} \rightarrow 0.$$

با کرانداری $\|y_m(t)\|_{W_2^2}$ و قضیه ۴.۲.۴ برای هر $t \in [0, 1]$ ، نتیجه می شود

$$|y_{m-1}(t_m) - y_{m-1}(s)| \rightarrow 0.$$

چونکه $G(\cdot)$ تابع پیوسته است، پس

$$G(t_m, y_{m-1}(t_m)) \rightarrow G(t, \bar{y}(t)) \quad (m \rightarrow \infty).$$

□

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $\|y_n\|_{W_2^2}$ کراندار باشد و $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال باشد، بنابراین جواب تقریبی $y_n(t)$ همگرا به

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \tilde{\Psi}_i(t) \quad (9.4)$$

است که $B_i = \sum_{k=1}^i \alpha_{ik} G(t_k, y(t_k))$.

برهان. ابتدا، همگرایی y_m را نشان خواهیم داد. از معادله (۷.۴) استنباط می شود که

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) + B_{n+1} \tilde{\Psi}_{n+1}(t).$$

به دلیل اینکه $\{\tilde{\Psi}_i\}_{i=1}^\infty$ متعامد است، نتیجه می گیریم که

$$\|y_{m+1}\|_{W_2^2}^2 = \|y_m\|_{W_2^2}^2 + (B_{m+1})^2 = \dots = \sum_{i=1}^{m+1} (B_i)^2, \quad (10.4)$$

بنابراین حاصل می شود $\|y_m\|_{W_2^2}^2 \leq \|y_{m+1}\|_{W_2^2}^2$.

با توجه به اینکه $\|v_m\|_{W_2^2}^2$ کراندار است، همگراست هنگامی که $m \rightarrow \infty$. بنابراین، ثابت c وجود دارد به طوری که

$$\sum_{i=1}^{\infty} (B_i)^2 = c.$$

این نتیجه حاصل می شود که

$$B_i \in l^2, i = 1, 2, \dots$$

اگر $n > m$ ، پس از متعامدی $y_{m+1}(t) - y_m(t)$ به دست می آید

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|_{W_2^2}^2 &= \|y_n - y_{n-1} + y_{n-2} - \dots + y_{m+1} - y_m\|_{W_2^2}^2 \\ &= \|y_n - y_{n-1}\|_{W_2^2}^2 + \dots + \|y_{m+1} - y_m\|_{W_2^2}^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^n (B_i)^2 \rightarrow 0 \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

کامل بودن W_2^2 نشان می دهد که

$$y_m(t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2}} \bar{y}(t) \quad (m \rightarrow \infty).$$

اکنون نشان خواهیم داد که $\bar{y}(t)$ جواب معادله (۵.۴) است. برای این منظور از (۷.۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \tilde{\Psi}_i(t).$$

از آنجا که

$$L\bar{y}(t_m) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle L\tilde{\Psi}_i, \varphi_m(t) \rangle_{W_2^1} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \tilde{\Psi}_i, \varphi_m \rangle_{W_2^2}$$

نتیجه می‌شود

$$\sum_{j=1}^m \alpha_{mj} L\bar{y}(t_m) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \left\langle \tilde{\Psi}_i, \sum_{j=1}^m \alpha_{mj} \Psi_j \right\rangle_{W_2^2} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \tilde{\Psi}_i, \tilde{\Psi}_m(t) \rangle_{W_2^2} = B_m.$$

اگر $m = 1$ ، آنگاه

$$L\bar{y}(t_1) = G(t_1, y_0(t_1)).$$

علاوه بر این، برای $m = 2$ داریم

$$\alpha_{21} L\bar{y}(t_1) + \alpha_{22} L\bar{y}(t_2) = \alpha_{21} G(t_1, y_0(t_1)) + \alpha_{22} G(t_2, y_1(t_2)),$$

یعنی،

$$L\bar{y}(t_2) = G(t_2, y_1(t_2)).$$

با استقرا به دست می‌آوریم

$$L\bar{y}(t_j) = G(t_j, y_{j-1}(t_j)).$$

به دلیل اینکه $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ چگال است، برای $\forall \mu \in [0, 1]$ زیر دنباله $\{t_{m_j}\}$ وجود دارد که به μ همگرا می‌شود. بنابراین، با استفاده از همگرایی y_m و لم ۱.۳.۴، ما به دست می‌آوریم

$$L\bar{y}(\mu) = G(\mu, \bar{y}(\mu)).$$

□

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید $\tau_m(t)$ خطای بین جواب دقیق $y(t)$ و جواب تقریبی $y_m(t)$ است. سپس خطای $\tau_m(t)$ با نرم $\|\cdot\|_{W_2^2}$ به طور یکنواخت نزولی است.

برهان. از ۹.۴، نتیجه می‌شود که

$$\|\tau_n\|_{W_2^2}^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} B_i \bar{\Psi}_i(t) \right\|_{W_2^2}^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} B_i^2,$$

□

بنابراین، $\tau_m(t)$ با نرم $\|\cdot\|_{W_2^2}$ به طور یکنواخت نزولی است.

۴.۴ نتایج عددی

چندین مثال برای نشان دادن اعتبار و کاربرد روش حاضر مطالعه شده است. شکل های ۱.۴ و ۲.۴ نشان می دهند که جواب تقریبی به جواب دقیق همگرا می شود.

مثال ۱.۴.۴. معادله غیرخطی زیر را با شرایط پادمتناوب در نظر بگیرید

$$y'(t) + y(t)e^{-y(t)} = -2t - 1 + (-t^2 - t + 1)e^{-(t^2 - t + 1)},$$

$$y(0) = -y(1) \quad (11.4)$$

جواب دقیق این مساله $y(t) = -t^2 - t + 1$ است. برای به دست آوردن جواب تقریبی از روش RKHS استفاده کردیم. با قرار دادن $m = 31$ به دقت مناسبی می رسمیم. مقادیر خطای مطلق در جدول ۱.۴ و $t_i = \frac{i}{m}, i = 1, 2, \dots, m$ توضیح داده شده است. خطای مطلق و جواب عددی به صورت در شکل ۱.۴ نشان داده شده است.

جدول ۱.۴: خطای مطلق برای مثال ۱.۴.۴ با $m = 31$

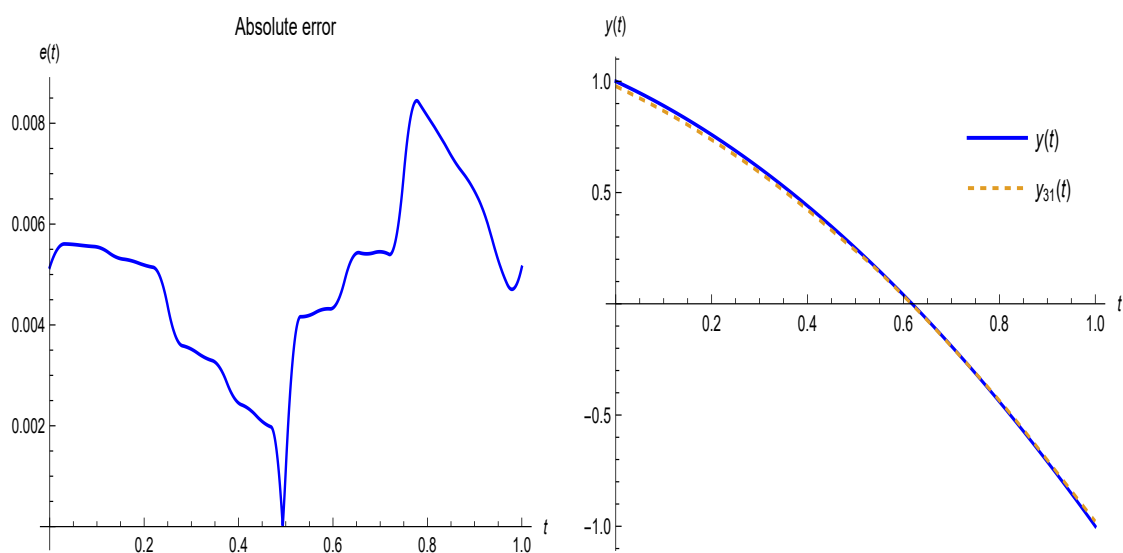
t_i	$y(t)$	$y_{31}(t)$	خطای مطلق
0	1	0.99702832	0.00297168
0.1	0.89	0.884454	0.00554635
0.2	0.76	0.754813	0.00518737
0.3	0.61	0.60648	0.00351974
0.4	0.44	0.437548	0.00245151
0.5	0.25	0.251124	0.00112361
0.6	0.04	0.0443374	0.00433737
0.7	-0.19	-0.184549	0.00545073
0.8	-0.44	-0.431858	0.00814236
0.9	-0.71	-0.70335	0.00664994
1	-1	-0.994856	0.00514416

مثال ۲.۴.۴. معادله خطی زیر را با شرایط پادمتناوب در نظر بگیرید

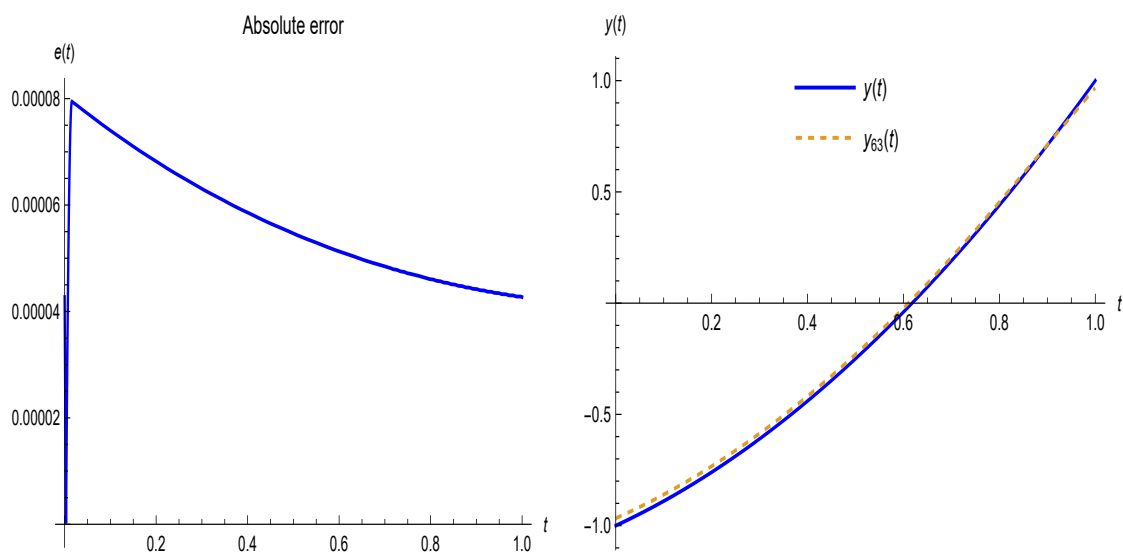
$$y(t) + y'(t) = t^2 + 3t,$$

$$y(0) = -y(1),$$

جواب دقیق $y(t) = t^2 + t - 1$ است. با انتخاب $m = 63$ می توان به خطای قابل قبولی دست یافت. نتایج عددی در جدول ۲.۴ و شکل ۲.۴ برای $t_i = \frac{i}{m}, i = 1, 2, \dots, m$ با $m = 63$ آورده شده است.



شکل ۱.۴: نمودارهای خطای مطلق و حل عددی با $m = 31$ برای مثال ۱.۴.۴



شکل ۲.۴: نمودارهای نتایج عددی و خطای مطلق با $m = 63$ برای مثال ۲.۴.۴

جدول ۲.۴: خطای مطلق برای مثال ۲.۴.۴ با $m = 63$

t_i	$y(t)$	$y_{63}(t)$	خطای مطلق
0	-1	-0.999572954	0.000427046
0.1	-0.89	-0.889926	0.0000739956
0.2	-0.76	-0.759932	0.0000682101
0.3	-0.61	-0.609937	0.0000630868
0.4	-0.44	-0.439941	0.000058546
0.5	-0.25	-0.249945	0.0000546593
0.6	-0.04	-0.0399487	0.0000513246
0.7	0.19	0.190048	0.000048416
0.8	0.44	0.440046	0.0000460563
0.9	0.71	0.710044	0.0000442056
1	1	1.00004	0.0000427046

۵.۴ نتیجه گیری و کارهای آتی

نتایج حاصل از این رساله عبارتند از:

۱. کارآمدی روش هسته بازتولیدی برای معادلات دیفرانسیل کسری با شرایط متناوب و پادمتناوب.

۲. بررسی همگرایی و تحلیل خطای روش هسته بازتولیدی.

۳. تولید هسته های بازتولیدی جدید از مرتبه های مختلف.

کارهای آتی که می توان انجام داد:

۱. آیا می توان چندگانگی جواب برای معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه های بالاتر با شرایط متناوب و پادمتناوب را بررسی کرد؟

۲. آیا می توان وجود جواب و منحصر به فرد بودن جواب معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه های بالاتر با شرایط متناوب و پادمتناوب را بررسی کرد؟

۳. آیا روش هسته بازتولیدی را می توان برای معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه های بالاتر با شرایط متناوب و پادمتناوب استفاده کرد؟

۴. آیا می توان روش هسته بازتولیدی را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط متناوب و پادمتناوب بکاربرد؟

مراجع

- [1] Aronszajn, N. (1950). Theory of reproducing kernels. Transactions of the American mathematical society, 68(3), 337-404.
- [2] Bergmann, S. (1922). Über die Entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des Raumes nach Orthogonalfunktionen. Mathematische Annalen, 86(3), 238-271.
- [3] Lacroix, S. F. (1819). Traité du calcul différentiel et du calcul intégral Tome 3, Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.
- [4] Oldham, K., & Spanier, J. (1974). The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. Elsevier.
- [5] Gorenflo, R., & Vessella, S. (1991). Abel integral equations (Vol. 1461, pp. viii+-215). Berlin: Springer
- [6] Abel, N. H. (1826). Résolution d'un problème de mécanique. J. Reine u. Angew. Math, 1, 153-157.
- [7] Abel, N. H. (1881). Solution de Quelques Problemesa L'aide D'intégrales Définites, Oeuvres Completes, 1, 16-18. Grondahl, Christiania, Norway.
- [8] Liouville, J. (1832). Mémoire sur quelques questions de géométrie et de mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces équations. Ecole polytechnique, 13, 71-162.
- [9] Liouville, J. (1834). Mémoire sur le théorème des fonctions complémentaires.
- [10] Liouville, J. (1837). Mémoire sur l'intégration des équations différentielles à indices fractionnaires.
- [11] Greer, H. R. (1858). On fractional differentiation. Quart. J. Math, 3, 327-330.
- [12] Fourier, J. B. J., & Darboux, G. (1822). Théorie analytique de la chaleur (Vol. 504). Paris: Didot.

- [13] Riemann, B. (1876). Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. Gesammelte Werke, 62(1876).
- [14] Sonin, N. Y. (1869). On differentiation with arbitrary index. Moscow Matem. Sbornik, 6(1), 1-38.
- [15] Letnikov, A. V. (1868). Theory of differentiation with an arbitrary indicator. Matem. Sbornik, 3, 1-68.
- [16] Letnikov, A. V. (1872). An explanation of the concepts of the theory of differentiation of arbitrary index. Moscow Matem. Sbornik, 6, 413-445.
- [17] Laurent, H. (1884). Sur le calcul des dérivées à indices quelconques. Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale, 3, 240-252.
- [18] Grunwald, A. K. (1867). Über "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. Zangew Math und Phys, 12, 441-480.
- [19] Heaviside, O. (1925). Electrical papers (Vol. 2). Macmillan and Company.
- [20] Weyl, H. (1917). : Bemerkungen zum Begriff des Differentialquotienten gebrochener Ordnung. Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 62 (1-2), 296-302.
- [21] Hardy, G. H., & Littlewood, J. E. (1928). Some properties of fractional integrals. I. Mathematische Zeitschrift, 27(1), 565-606.
- [22] Hardy, G. H., & Littlewood, J. E. (1932). Some properties of fractional integrals. II. Mathematische Zeitschrift, 34(1), 403-439.
- [23] Lazarević, M. P., Rapaić, M. R., Šekara, T. B., Mladenov, V., & Mastorakis, N. (2014). Introduction to fractional calculus with brief historical background. In Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability and Modeling (p. 3). WSEAS Press.
- [24] Riesz, M. (1938). Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels. Acta Sci. Math. Szeged, 9(1-1), 1-42.
- [25] Riesz, M. (1949). L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy. Acta mathematica, 81, 1-222.
- [26] Erdélyi, A. (1940). On fractional integration and its application to the theory of Hankel transforms. The quarterly journal of mathematics, (1), 293-303.

- [27] Podlubny, I., Chechkin, A., Skovranek, T., Chen, Y., & Jara, B. M. V. (2009). Matrix approach to discrete fractional calculus II: partial fractional differential equations. *Journal of Computational Physics*, 228(8), 3137-3153.
- [28] Agrawal, O. P. (2002). Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 272(1), 368-379.
- [29] Zhou, Y., Cui, M., & Lin, Y. (2009). Numerical algorithm for parabolic problems with non-classical conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230(2), 770-780.
- [30] Jiang, W., Cui, M., & Lin, Y. (2010). Anti-periodic solutions for Rayleigh-type equations via the reproducing kernel Hilbert space method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(7), 1754-1758.
- [31] Geng, F., & Cui, M. (2012). A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. *Applied Mathematics Letters*, 25(5), 818-823.
- [32] Geng, F. Z., & Li, X. M. (2012, January). A new method for Riccati differential equations based on reproducing kernel and quasilinearization methods. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2012). Hindawi.
- [33] Cui, M., & Geng, F. (2007). A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*, 188(2), 1389-1401.
- [34] Geng, F., & Cui, M. (2007). Solving a nonlinear system of second order boundary value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 327(2), 1167-1181.
- [35] Lv, X., & Cui, M. (2010). An efficient computational method for linear fifth-order two-point boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1551-1558.
- [36] Belmekki, M., Nieto, J., & Rodriguez-Lopez, R. (2009). Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation. *Boundary Value Problems*, 2009, 1-18.
- [37] Lakshmikantham, V., & Vatsala, A. S. (2008). Basic theory of fractional differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(8), 2677-2682.
- [38] Wei, Z., & Dong, W. (2011). Periodic boundary value problems for Riemann-Liouville sequential fractional differential equations. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2011(87), 1-13.

- [39] Choudhary, S., & Daftardar-Gejji, V. (2014). Nonlinear multi-order fractional differential equations with periodic/anti-periodic boundary conditions. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 17(2), 333-347.
- [40] Ramírez, J. D., & Vatsala, A. S. (2012). Generalized monotone iterative technique for Caputo fractional differential equation with periodic boundary condition via initial value problem. *International Journal of Differential Equations*, 2012.
- [41] Heris, M. S., & Javidi, M. (2017). On fractional backward differential formulas for fractional delay differential equations with periodic and anti-periodic conditions. *Applied Numerical Mathematics*, 118, 203-220.
- [42] Choudhary, S., & Daftardar-Gejji, V. (2014). Nonlinear multi-order fractional differential equations with periodic/anti-periodic boundary conditions. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 17(2), 333-347.
- [43] Cui, M., & Lin, Y. (2009). *Nonlinear numerical analysis in reproducing kernel space*. Nova Science Publishers, Inc..
- [44] Ertürk, V. S., & Momani, S. (2008). Solving systems of fractional differential equations using differential transform method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 215(1), 142-151.
- [45] Mohamed, D. A. S., & Mahmoud, R. A. (2013). An Algorithm for the Numerical Solution of System of Fractional Differential Equations. *International Journal of Computer Applications*, 65(11), 1-10.
- [46] Al-Smadi, M., Abu Arqub, O., & El-Ajou, A. (2014). A numerical iterative method for solving systems of first-order periodic boundary value problems. *Journal of Applied Mathematics*, 2014, 1-23.
- [47] Bushnaq, S., Maayah, B., Momani, S., & Alsaedi, A. (2014, January). A reproducing kernel Hilbert space method for solving systems of fractional integrodifferential equations. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2014), 1-6. Hindawi.
- [48] Chellouf, Y., Maayah, B., Momani, S., Alawneh, A., & Alnabulsi, S. (2021). Numerical solution of fractional differential equations with temporal two-point BVPs using reproducing kernel Hilbert space method. *AIMS Mathematics*, 6(4), 3465-3485.
- [49] Xu, L., Chu, X., & Hu, H. (2020). Exponential ultimate boundedness of non-autonomous fractional differential systems with time delay and impulses. *Applied Mathematics Letters*, 99.
- [50] Jiang, W., & Chen, Z. (2013). Solving a system of linear Volterra integral equations using the new reproducing kernel method. *Applied Mathematics and Computation*, 219(20), 10225-10230.

- [51] Abu Arqub, O. (2015). Reproducing kernel algorithm for the analytical-numerical solutions of nonlinear systems of singular periodic boundary value problems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015.
- [52] Al-Smadi, M., & Altawallbeh, Z. (2013). Solution of system of Fredholm integro-differential equations by RKHS method. *Int. J. Contemp. Math. Sci*, 8(11), 531-540.
- [53] Altawallbeh, Z., Al-Smadi, M., Komashynska, I., & Atewi, A. (2018). Numerical solutions of fractional systems of two-point BVPs by using the iterative reproducing kernel algorithm. *Ukrainian Mathematical Journal*, 70(5), 687-701.
- [54] Saad, K. M., Srivastava, H. M., & Gómez-Aguilar, J. F. (2020). A fractional quadratic autocatalysis associated with chemical clock reactions involving linear inhibition. *Chaos, Solitons & Fractals*, 132, 109-557.
- [55] Fazli, H., & Nieto, J. J. (2018). Fractional Langevin equation with anti-periodic boundary conditions. *Chaos, Solitons & Fractals*, 114, 332-337.
- [56] Baleanu, D., Jajarmi, A., Sajjadi, S. S., & Asad, J. H. (2020). The fractional features of a harmonic oscillator with position-dependent mass. *Communications in Theoretical Physics*, 72(5), 055002.
- [57] Firoozjaee, M. A., Jafari, H., Lia, A., & Baleanu, D. (2018). Numerical approach of Fokker–Planck equation with Caputo–Fabrizio fractional derivative using Ritz approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 339, 367-373.
- [58] Jajarmi, A., Yusuf, A., Baleanu, D., & Inc, M. (2020). A new fractional HRSV model and its optimal control: a non-singular operator approach. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 547, 123860.
- [59] Sajjadi, S. S., Baleanu, D., Jajarmi, A., & Pirouz, H. M. (2020). A new adaptive synchronization and hyperchaos control of a biological snap oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 138, 109919.
- [60] Owolabi, K. M., & Hammouch, Z. (2019). Mathematical modeling and analysis of two-variable system with noninteger-order derivative. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(1), 013145.
- [61] Fukunaga, M. (2021). A new method for laplace transforms of multiterm fractional differential equations of the caputo type. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 16(10).
- [62] Hammachukiattikul, P., Mohanapriya, A., Ganesh, A., Rajchakit, G., Govindan, V., Gunasekaran, N., & Lim, C. P. (2020). A study on fractional differential equations using the fractional Fourier transform. *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1-22.

- [63] Guo, P. (2019). The Adomian decomposition method for a type of fractional differential equations. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 7(10), 2459-2466.
- [64] Vargas, A. M. (2022). Finite difference method for solving fractional differential equations at irregular meshes. *Mathematics and Computers in Simulation*, 193, 204-216.
- [65] Yépez-Martínez, H., & Gómez-Aguilar, J. F. (2020). Laplace variational iteration method for modified fractional derivatives with non-singular kernel. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 6(3), 684-698.
- [66] Prakash, A., Goyal, M., & Gupta, S. (2019). Fractional variational iteration method for solving time-fractional Newell-Whitehead-Segel equation. *Nonlinear Engineering*, 8(1), 164-171.
- [67] Baleanu, D., & Shiri, B. (2018). Collocation methods for fractional differential equations involving non-singular kernel. *Chaos, Solitons & Fractals*, 116, 136-145.
- [68] Ünal, E., & Gökdoğan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik*, 128, 264-273.
- [69] Do, Q. H., Ngo, H. T., & Razzaghi, M. (2021). A generalized fractional-order Chebyshev wavelet method for two-dimensional distributed-order fractional differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 95, 105597.
- [70] Shah, F. A., Abass, R., & Debnath, L. (2017). Numerical solution of fractional differential equations using Haar wavelet operational matrix method. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 3(3), 2423-2445.
- [71] Yang, Y., Heydari, M. H., Avazzadeh, Z., & Atangana, A. (2020). Chebyshev wavelets operational matrices for solving nonlinear variable-order fractional integral equations. *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1-24.
- [72] Yuttanan, B., Razzaghi, M., & Vo, T. N. (2021). Legendre wavelet method for fractional delay differential equations. *Applied Numerical Mathematics*, 168, 127-142.
- [73] Choudhary, S., & Daftardar-Gejji, V. (2014). Nonlinear multi-order fractional differential equations with periodic/anti-periodic boundary conditions. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 17(2), 333-347.
- [74] Zhou, Y., Cui, M., & Lin, Y. (2009). Numerical algorithm for parabolic problems with non-classical conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230(2), 770-780.

- [75] Jiang, W., Cui, M., & Lin, Y. (2010). Anti-periodic solutions for Rayleigh-type equations via the reproducing kernel Hilbert space method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(7), 1754-1758.
- [76] Geng, F., & Cui, M. (2012). A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. *Applied Mathematics Letters*, 25(5), 818-823.
- [77] Bushnaq, S., Maayah, B., & AlHabees, A. (2016). Application of multistep reproducing kernel Hilbert space method for solving giving up smoking model. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 109(2), 311-324.
- [78] Maayah, B., Bushnaq, S., Alsaedi, A., & Momani, S. (2018). An efficient numerical method for solving chaotic and non-chaotic systems. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 33(3), 219-231.
- [79] Zhao, Z., Lin, Y., & Niu, J. (2016). Convergence order of the reproducing kernel method for solving boundary value problems. *Mathematical Modelling and Analysis*, 21(4), 466-477.
- [80] Guo, X., Li, L., & Wu, Q. (2020). Modeling interactive components by coordinate kernel polynomial models. *Mathematical Foundations of Computing*, 3(4), 263-277.
- [81] Hu, T., Fan, J., Wu, Q., & Zhou, D. X. (2015). Regularization schemes for minimum error entropy principle. *Analysis and Applications*, 13(04), 437-455.
- [82] Zhou, D. X. (2018). Deep distributed convolutional neural networks: Universality. *Analysis and applications*, 16(06), 895-919.
- [83] Li, Z., Wang, M., Wang, Y., & Pang, J. (2020). Using reproducing kernel for solving a class of fractional order integral differential equations. *Advances in Mathematical Physics*, 2020.
- [84] Niu, J., Sun, L., Xu, M., & Hou, J. (2020). A reproducing kernel method for solving heat conduction equations with delay. *Applied Mathematics Letters*, 100, 106036.
- [85] Agarwal, R. P., Ahmad, B., & Alsaedi, A. (2017). Fractional-order differential equations with anti-periodic boundary conditions: a survey. *Boundary Value Problems*, 2017(1), 1-27.
- [86] Gumah, G. N., Naser, M. F., Al-Smadi, M., & Al-Omari, S. K. (2018). Application of reproducing kernel Hilbert space method for solving second-order fuzzy Volterra integro-differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-15.
- [87] Niu, L., & Teng, K. (2014). Antiperiodic Solutions for-Laplacian Systems via Variational Approach. *Journal of Applied Mathematics*, 2014.

- [88] Zou, Y., & Vidal, G. (2020). Emergence of conformal symmetry in quantum spin chains: Antiperiodic boundary conditions and supersymmetry. *Physical Review B*, 101(4), 045132.
- [89] Cavalcanti, E., Linhares, C. A., Lourenço, J. A., & Malbouisson, A. P. C. (2019). Effect of boundary conditions on dimensionally reduced field-theoretical models at finite temperature. *Physical Review D*, 100(2), 025008.
- [90] Xin, Z., Cao, Y., Xu, X., Yang, T., Cao, J., & Yang, W. L. (2020). Thermodynamic limit of the spin-1 $2\frac{1}{2}$ XYZ spin chain with the antiperiodic boundary condition. *Journal of High Energy Physics*, 2020(12), 1-34.
- [91] Qiao, Y., Wang, J., Cao, J., & Yang, W. L. (2020). Exact solution of an anisotropic J1–J2 spin chain with antiperiodic boundary condition. *Nuclear Physics B*, 954, 115007.
- [92] Zhang, H., Li, Y., & Yang, J. (2020). New sequential fractional differential equations with mixed-type boundary conditions. *Journal of Function Spaces*, 2020.
- [93] Kong, L., Parsley, J., Rizzo, K., & Russell, N. (2017). Anti-periodic solutions for a higher order difference equation with p-Laplacian. *Journal of Applied Analysis*, 23(2), 111-125.
- [94] Tian, Y., Shang, S., & Huo, Q. (2018). Antiperiodic solutions of fourth-order impulsive differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(2), 769-780.
- [95] Zuo, M., & Hao, X. (2018). Existence results for impulsive fractional-difference equation with antiperiodic boundary conditions. *Journal of Function Spaces*, 2018.
- [96] Ahmed, I., Kumam, P., Abubakar, J., Borisut, P., & Sitthithakerngkiet, K. (2020). Solutions for impulsive fractional pantograph differential equation via generalized anti-periodic boundary condition. *Advances in Difference Equations*, 2020(1), 1-15.
- [97] Zhang, H., Li, Y., & Yang, J. (2020). New sequential fractional differential equations with mixed-type boundary conditions. *Journal of Function Spaces*, 2020.
- [98] Cao, Q., & Guo, X. (2020). Anti-periodic dynamics on high-order inertial Hopfield neural networks involving time-varying delays. *Aims Mathematics*, 5(6), 5402-5421.
- [99] Aizicovici, S., McKibben, M., & Reich, S. (2001). Anti-periodic solutions to non-monotone evolution equations with discontinuous nonlinearities. *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 43(2), 233-252.

- [100] Hao, Z., & Chen, B. (2022). The Unique Solution for Sequential Fractional Differential Equations with Integral Multi-Point and Anti-Periodic Type Boundary Conditions. *Symmetry*, 14(4), 761.
- [101] Serdar, P. A. Ş., Aydemir, K., & Muhtarov, F. (2020). Spectral Properties of the Anti-Periodic Boundary-Value-Transition Problems. *Journal of New Theory*, (33), 40-49.
- [102] Boussandel, S. (2018). Existence of solutions for evolution equations in Hilbert spaces with anti-periodic boundary conditions and its applications. *Applications of Mathematics*, 63(4), 423-437.
- [103] Wang, Y., Zhang, J., & Sun, Y. (2020). Convergence of Antiperiodic Boundary Value Problems for First-Order Integro-Differential Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2020.
- [104] Luo, Y. (2020). Antiperiodic Boundary Value Problems for First-Order Impulsive Differential Inclusions. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 51(4), 1373-1381.
- [105] Abu-Gdairi, R., Hasan, S., Al-Omari, S., Al-Smadi, M., & Momani, S. (2022). Attractive multistep reproducing kernel approach for solving stiffness differential systems of ordinary differential equations and some error analysis. *CMES-COMPUTER MODELING IN ENGINEERING & SCIENCES*, 130(1), 299-313.
- [106] Arqub, O. A. (2016). The reproducing kernel algorithm for handling differential algebraic systems of ordinary differential equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(15), 4549-4562.
- [107] Bao, K., Qian, X., Liu, Z., Wang, H., & Song, S. (2022). Function-valued RKHS-based Operator Learning for Differential Equations. *arXiv preprint arXiv:2202.09488*.
- [108] Akgül, A., & Karatas, E. (2015). Reproducing kernel functions for difference equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-S*, 8(6), 1055.
- [109] Abu Arqub, O. (2017). Adaptation of reproducing kernel algorithm for solving fuzzy Fredholm–Volterra integrodifferential equations. *Neural Computing and Applications*, 28(7), 1591-1610.
- [110] Gumah, G. N., Naser, M. F., Al-Smadi, M., & Al-Omari, S. K. (2018). Application of reproducing kernel Hilbert space method for solving second-order fuzzy Volterra integro-differential equations. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), 1-15.
- [111] Alvandi, A., & Paripour, M. (2018). Reproducing kernel method for a class of weakly singular Fredholm integral equations. *Journal of Taibah University for Science*, 12(4), 409-414.



- [112] Jiang, W., Cui, M., & Lin, Y. (2010). Anti-periodic solutions for Rayleigh-type equations via the reproducing kernel Hilbert space method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(7), 1754-1758.
- [113] Gao, E., Song, S., & Zhang, X. (2012). Solving singular second-order initial/boundary value problems in reproducing kernel Hilbert space. *Boundary Value Problems*, 2012(1), 1-11.
- [114] Cui, M. G., & Lin, Y. Z. (2009). *Nonlinear numerical analysis in reproducing kernel space*, Nova Science Pub. Inc., Hauppauge.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Fractional integral	انتگرال کسری
Conjugate	الحاقی
Continuous	پیوسته
Symmetry	تقارن
Approximation	تقریبی
Dense	چگال
Coefficients	ضرایب
Gram-Schmidt process	فرآیند گرام-اشمیت
Operator	عملگر
Bounded	کراندار
Complete	کامل
Caputo fractional derivative	مشتق کسری کاپوتو
Orthogonal	متعامد
Orthonormal	متعارف
Decreasing	نزولی
Convergence	همگرایی
Uniformly	یکنواخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accuracy	دقت
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Backward	چندگانه
Collocation	ترتیب
Condition	شرط
Coefficient	ضریب
Conjugate	الحاقی
Complete	کامل
Convergence	همگرایی
Decomposition	تجزیه
Dense	چگال
Expansion	بسط
Efficiency	کارایی
Error	خطا
Exact	دقیق
Gram-Schmidt process	فرآیند گرام-اشمیت
Hilbert space	فضای هیلبرت
Kernel	هسته
Orthogonal	متعامد
Process	فرآیند
Reproducing	باز تولید
Series	سری
Symmetric	متقارن

Surname: Saky

Name: Hoda

Title: Numerical solution of differential equations of fractional order with periodic and anti-periodic conditions using the reproducing kernel Hilbert space method

Supervisor: Prof. Saeid Abbasbandy

Advisor: Dr. Elyas Shivanian

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University

Faculty of Sciences

Department of Mathematics

Date: 2022

Number of pages: 83

Keywords: Fractional differential equations system; Fractional differential equation; Anti-periodic conditions; Periodic conditions; Reproducing kernel Hilbert space method.

Abstract

In this thesis, we solve fractional differential equations with periodic and anti-periodic conditions by reproducing the kernel Hilbert space method. For this purpose, according to the equations and conditions of the problem, we define a linear operator and by using the reproducing kernel functions, we obtain a complete orthogonal basis for the reproducing kernel space, and the solution of the mentioned equations is obtained in terms of these basis functions. In fact, the analytical solution is shown as an infinite series, and by using an iterative method, an approximate solution like the mentioned series is obtained. At the end, some numerical examples have been studied to show the correctness and application of the proposed method. The results obtained from the numerical examples show that the proposed method is useful and appropriate. We also use this method for a system of the fractional differential equations.

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

Imam Khomeini International University
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

**Numerical solution of differential equations
of fractional order with periodic and
anti-periodic conditions using the reproducing
kernel Hilbert space method**

Supervisor

Prof. Saeid Abbasbandy

Advisor

Dr. Elyas Shivanian

by

Hoda Saky

2022