

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

مشور اخلاق پژوهش

بایاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و بهاره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه ایمت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، مادیانجویان و اعضاء هیأت علمی و اصدای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

- 1- اصل حقیقت جوی: تلاش در راستای پی جوی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.
- 2- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهشگران (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
- 3- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
- 4- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
- 5- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانبداری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
- 6- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.
- 7- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.
- 8- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
- 9- اصل برانت: التزام به برانت جوی از هرگونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلاینند.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم تحقیقات تهران

تعهد اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب منیژه غفاری دانش آموخته مقطع دکتری ناپیوسته در رشته ریاضی کاربردی (آنالیز عددی) که در تاریخ از رساله خود تحت عنوان " به دست آوردن جوابهای تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی فازی و از مرتبه صحیح و کسری با کسب نمره (بدون احتساب نمره مقاله) و درجه دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

- 1) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاورهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.
- 2) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.
- 3) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این رساله داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.
- 4) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: منیژه غفاری

تاریخ و امضاء: 99/11/7



دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

موضوع:

به دست آوردن جوابهای تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی فازی و از مرتبه صحیح و

کسری

اساتید راهنما:

دکتر توفیق الهویرنلو

دکتر سعید عباس بندی

اساتید مشاور

دکتر مهدی آژینی

نگارنده: منیژه غفاری

پاییز

1399-1400

سپاسگزاری...

سپاسر اول به خدا و آخر نیز به او، خدا سر بی همتا

چه زیباست تایش از خالق او که زندگی میکنیم برای وصالش در حالی که تقدیر از مخلوق جنبه ای از تایش خالق است.

تحت پروردگار خویش را خاضعانه پاس می گزارم که افتخار کسب علم در محضر استاد دانشمند و فریخته پرفور توفیق الهی و استاد فرزانه پرفور سعید عباس
بندی را نصیب نمود و پاس و شکر صمیمانه خویش را به حضور ایشان ابراز می دارم که با دقت و بردباری راهنماییهای ارزنده ای را در جهت بهبود کیفیت تحقیق ارائه نمودند که من
در محضرشان علاوه بر کسب علم، درس تلاش، امید، صبر و پشتکار را آموختم. همچنین از مدیر گروه محترم دکتر مهدی آذینی که زحمات مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند
سپاس گزارم. از اساتید بزرگوار که زحمات داور این پایان نامه را بر عهده داشتند و نقطه نظرات مفید خود را جهت محتوای این پژوهش ارائه نمودند کمال تشکر را
دارم و برایشان آرزوی آینده ای سبز و بالنده دارم.



تقدیم به اهداف آینده‌ام
تقدیم به پویندگان علم



چکیده:	1
فصل اول	2
کلیات تحقیق	2
1-1 مقدمه	3
1-2 بیان مسئله	3
1-3 اهمیت موضوع	4
1-4 تاریخچه	5
1-5 نوآوری	6
1-6 ساختار رساله	6
فصل دوم	8
تعاریف و مفاهیم مقدماتی	8
2-1 مقدمه	9
2-2-1 عدد فازی	9
2-2-2 فرم آر- برش اعداد فازی مثلثی	9
2-2-3 جمع دو عدد فازی	10
2-2-4 تفاضل هاکوهارا	10
2-2-5 تفاضل تعمیم یافته ی هاکوهارا	10

- 2-2-6 خواص تفاضل تعمیم یافته ها کوهارا 11
- 2-2-7 ضرب یک عدد حقیقی در یک عدد فازی 11
- 2-2-8 تابع فازی 12
- 2-2-9 پیوستگی 12
- 2-2-10 مشتق پذیر تعمیم یافته ی قوی 12
- 2-2-11 مشتق تعمیم یافته ی ها کوهارا 13
- 2-2-12 نوع مشتق پذیری 14
- 2-2-13 نقطه سویچ 14
- 2-2-14 قضیه مشتق از ضرب تابع فازی در تابع حقیقی 14
- 2-2-15 انتگرال فازی توابع مثلثی 16
- 2-2-16 قضیه انتگرال فازی 16
- 2-2-18 قضیه انتگرال گیری جزء به جزء فازی 17
- 2-2-19 دیفرانسیل پذیری تحت علامت انتگرال 18
- 2-3-1 تابع گاما 20
- 2-3-2 تابع بتا 21
- 2-3-3 رابطه بین تابع گاما و بتا 22
- 2-3-4 تابع میتگ-لفلر 22
- 2-3-5 انتگرال ریمان-لیوویل از تابع مقدار فازی 22
- 2-3-6 مشتق ها کوهارای تعمیم یافته ریمان لیوویل کسری 23
- 2-3-7 مشتق ها کوهارای تعمیم یافته کاپوتو کسری 23

- 24..... 2-3-8 نقطه سویچ برای دیفرانسیل پذیری کسری
- 25..... فصل سوم
- 25..... یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل
- 25..... زمان-کسری فازی
- 26..... 3-1 مقدمه
- 26..... 3-2 لاپلاس فازی و خواص آن
- 26..... 3-2-1 مرتبه نمایی
- 26..... 3-2-2 لاپلاس فازی
- 27..... 3-2-3 لاپلاس معکوس فازی
- 27..... 3-2-5 قضیه وجود و یکتایی
- 28..... 3-2-6 قضیه مشتق مرتبه اول لاپلاس فازی
- 30..... 3-2-8 تعریف کانولیشن دو تابع
- 31..... 3-2-9 قضیه کانولیشن فازی
- 32..... 3-2-11 قضیه مشتق مرتبه اول لاپلاس فازی کسری
- 33..... 3-3 تبدیلات فوریه فازی
- 33..... 3-3-1 تبدیلات فوریه فازی
- 33..... 3-3-2 تبدیل فوریه معکوس فازی
- 34..... 3-3-4 قضیه مشتق مرتبه اول تبدیل فوریه فازی
- 35..... 3-3-5 لم
- 35..... 3-4 جواب های فازی مسئله کسری-زمان

37	3-4-1 لم
38	3-4-2 لم
39	3-4-3 لم
40	3-4 الگوریتم روش
42	فصل چهارم
42	مثال های عددی
43	4-1 مقدمه
43	4-2 مثال های عددی
50	فصل پنجم
50	نتایج و پیشنهادات حاصل از تحقیق
51	5-1 مقدمه
51	5-2 نتایج حاصل از تحقیق
51	5-3 پیشنهادات
53	منابع
57	واژه نامه انگلیسی به فارسی
60	نمادهای بکار رفته
62	مقالات مستخرج از رساله
63	چکیده انگلیسی

شماره صفحه	عنوان
21	است.....
21	شکل 2-1: نمایشی از تابع گاما
44	شکل 4-1: نمایشی از تابع $u(t,x)$ در نقطه جواب دقیق در $x=1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 4-2-1.....
45	شکل 4-2: نمایشی از تابع ${}^{C_{gH}}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t,x)$ در نقطه جواب دقیق در $x=1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 4-2-1.....
45	شکل 4-3: نمایش مقایسه ای از تابع ${}^{C_{gH}}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t,x)$ و تابع $u(t,x)$ مسئله 4-2-1.....
48	شکل 4-4: نمایشی از تابع $u(t,x)$ در نقطه جواب دقیق در $x=1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 4-2-3.....
48	شکل 4-5: نمایشی از تابع ${}^{C_{gH}}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t,x)$ در نقطه جواب دقیق در $x=1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 4-2-3.....
49	شکل 4-6: نمایش مقایسه ای از تابع ${}^{C_{gH}}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t,x)$ و تابع $u(t,x)$ مسئله 4-2-3.....

فهرست جدول ها

<u>عنوان</u>	<u>شماره صفحه</u>
جدول 1-2: نوع دیفرانسیل پذیری ضرب توابع فازی	14.....

چکیده:

حافظه دار بودن مشتقات یکی از مسائلی است که همواره مورد توجه محققان و پژوهشگران بوده است از طرفی این نوع خصوصیات در معادلات دیفرانسیل کسری فازی به خوبی به چشم می خورد. از این رو در رساله حاضر با استفاده از مشتقات کاپوتو فازی و در نظر گرفتن انواع مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوهارا به حل این نوع معادلات با استفاده از روش تحلیلی پرداخته شده است. در این راستا با در نظر گرفتن انواع مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوهارا و با استفاده از تبدیلات انتگرالی فازی جواب صریح این نوع معادلات به دست آمده است و در جهت نشان دادن کارایی و موثر بودن روش، مثال های کاربردی بررسی شده است و در آخر با ارائه اشکال نوع مشتق پذیری تعمیم یافته در جواب های فازی به راحتی قابل مشاهده است.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری فازی، معادلات دیفرانسیل فازی زمان-کسری، دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته ها کوهارا، دیفرانسیل پذیری کاپوتو تعمیم یافته ها کوهارا، تبدیلات لاپلاس فازی، تبدیلات فوریه فازی.

فصل اول

کلیات تحقیق

1-1 مقدمه

این فصل از رساله به معرفی و بیان کلیات پژوهش اختصاص داده شده است و در آن به بررسی موضوعاتی همچون، بیان مسئله مورد پژوهش، اهمیت موضوع انتخابی، تاریخچه، نوآوری و ساختار کلی رساله پرداخته شده است.

1-2 بیان مسئله

معادلات دیفرانسیل فازی با مشتقات جزئی از مرتبه کسری یکی از مهمترین و نوین ترین مباحث علمی می باشد که دانشمندان علوم مختلف با استفاده از آن به خوبی توانسته اند مسائل مورد بحث و پژوهش خود را مطرح و جواب های آنها را بیابند. در رساله حاضر با توجه به ضرورت یافتن جواب این نوع معادلات از روش های تحلیلی فازی برای حل این نوع معادلات استفاده شده است. در این راستا ابتدا یکی از معادلات مهم در علوم مهندسی به نام معادله دیفرانسیل زمان- کسری به صورت

$${}^C_{gH}D_t^\alpha u(t,x) = \lambda \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2-1)$$

مد نظر قرار گرفته است، که در آن $0 < \alpha \leq 1$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ می باشد به طوری که $\lambda \neq 0$ است. همچنین در سرتاسر رساله حاضر نماد ${}^C_{gH}D_t^\alpha u(t,x)$ معرف مشتق تعمیم یافته ها کوهارای کاپتو از مرتبه α نسبت به t به صورت

$${}^C_{gH}D_t^\alpha u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (2-2)$$

می باشد و $0 < \alpha \leq 1$ است، نماد $\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau}$ معرف مشتق جزئی تعمیم یافته ها کوهارای تابع $u(\tau,x)$ نسبت به

τ است و نماد $\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}$ معرف مشتق جزئی تعمیم یافته ها کوهارای تابع $u(t,x)$ نسبت به x است که به

فرم

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h,x) \ominus_{gH} u(t,x)}{h}.$$

تعریف می‌شود. سپس با استفاده از یکی از روش‌های تحلیلی به یافتن جواب این نوع معادلات تحت انواع مشتق پذیری تعمیم یافته پرداخته شده است. در رساله حاضر به صورت توأم از تبدیلات لاپلاس فازی و سپس تبدیلات فوری فازی استفاده شده و در نهایت جواب صریح این نوع معادلات به دست می‌آید.

3-1 اهمیت موضوع

از دیرباز در علوم مختلف منجمله شیمی، فیزیک، زمین شناسی و ... مدل بندی مسائل با استفاده از معادلات دیفرانسیل قطعی با مشتقات جزئی انجام می‌شد و به مرور زمان با توجه به اینکه بعضی از مدل بندی ها در ذات خود نیاز به ذخیره داده ها را داشتند لذا دانشمندان برای مدل بندی مسائل و پدیده ها به معادلات دیفرانسیل قطعی با مشتقات جزئی کسری روی آوردند تا با توجه به خاصیت حافظه دار بودن مشتقات این نوع معادلات گامی نوین در جهت رشد علوم باشند. به مرور زمان با تحقیقات انجام شده باز خلاء ای همچنان در مدل بندی ها وجود داشت و آن این بود که مدل بندی های مذکور به خوبی نمی توانستند پدیده ها را توجیح کنند در این راستا دانشمندان زیادی به تحقیق و بررسی پرداختند و دریافتند که در مدل بندی ریاضی این دسته از پدیده ها نیاز به جمع‌آوری اطلاعات و داده از منابع مختلف می باشد حال اینکه این دسته از داده ها اساساً در ذات خود دارای ابهام می باشند. لذا تئوری نظریه فازی به عنوان یک ابزار مناسب و قوی برای مدل بندی سیستم های دارای ابهام توسط پرفسور لطفی زاده پا به عرصه ظهور گذاشت و در طی این سال ها با پیشرفت مفاهیم فازی مدل بندی پدیده های طبیعی بیشتر به واقعیت نزدیک شدند. به عنوان یک مزیت موثر معادلات دیفرانسیل فازی با مشتقات جزئی از مرتبه کسری نسبت به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه کسری قطعی، ظهور ابهام در ذات مسئله می باشد که در جهت توجیح پدیده ها، نحوه پردازش و یافتن جواب هایی که به واقعیت نزدیک تر است بسیار کارا می باشند..

با توجه به کارایی وسیع معادلات دیفرانسیل فازی با مشتقات جزئی از مرتبه کسری بسیاری از دانشمندان به مطالعه و پژوهش در این حوزه پرداختند و مقالات کاربردی زیادی در این زمینه ارائه شده است که در آنها به یافتن جواب های عددی و تحلیلی این نوع معادلات پرداخته شده است. از جمله روش های که به حل معادلات دیفرانسیل فازی با مشتقات جزئی از مرتبه صحیح و کسری منجر می شود می توان به روش های که بر پایه موجک برنشتاین، روش جواب های موج سفری یا بر اساس عملگر هایی مانند لاپلاس و یا سری فوری و یا

روش های تقریبی می توان اشاره داشت که در رساله حاضر سعی بر آن شده است که به حل معادلات دیفرانسیل فازی جزئی از مرتبه کسری با استفاده از روش تبدیلات انتگرالی فازیپرداخته شده و جواب های تحلیلی این نوع معادلات به دست آورده شود.

4-1 تاریخچه

مفاهیم فازی یکی از علوم نوپا می باشد که با توجه به ضرورت استفاده از آنها در سایر علوم به سرعت رشد یافته است لذا تاریخچه این علم با تعاریف و مفاهیم اولیه فازی در دهه شصت توسط پرفسور لطفی زاده¹ شروع شد و همان زمان بود که مفهوم عدم اطمینان [37] مطرح شد. سپس هاکوهارا² [24] با مطالعات گسترده بر روی ریاضیات کلاسیک و مجموعه های فازی به تعریف مفهوم تفریق فازی و شرایط وجود آن پرداخت و نام این تفریق را تفاضل هاکوهارا نامید. تلاش های سایر دانشمندان در سالهای بعد به معرفی مشتقات فازی انجامید، در سال 1983 توسط پوری³ و رالسکو⁴ [28] مشتق هاکوهارا معرفی شد، اما این مشتق دارای کمی و کاستی هایی بود که این نواقص در هنگام یافتن جواب معادلات دیفرانسیل فازی ظاهر می شد، لذا بده⁵ و گال⁶ [16] به بررسی مشکلات مشتق هاکوهارا پرداختند و در نتیجه مفهوم جدیدی از مشتق تعمیم یافته قوی هاکوهارا را ارائه دادند هر چند این مشتق بسیار کارا بود اما باز به مرور زمان و رشد مفاهیم فازی مشاهده شد که این تعریف نیز دارای مشکلات و کمبودهایی است در این راستا بده⁵ و استیفانی⁷ دو دانشمند بزرگ بودند که به بررسی مشکلات این تعریف پرداختند و نهایتاً مفهوم تفریق تعمیم یافته هاکوهارا را ارائه دادند که با توجه به تعریف آنها مشتق پذیری فازی به خوبی بیان شد [15]، این تعریف یکی از جامع ترین تعاریفی است که در مورد مشتق پذیری فازی بیان شده به طوری که همچنان امروزه در بسیاری از منابع از این تعریف استفاده می شود، اما در سال 2013 استیفانی [34] شرایط وجود تفریق تعمیم یافته را بهبود بخشید و بر اساس آن مشتق تعمیم یافته را طوری تعریف نمود که این مشتق در تمامی برش ها همواره وجود داشته باشد اما به دلیل پیچیدگی محاسبات در هنگام استفاده از این مشتق عملاً این تعریف جدید کارای حل مسئله را نداشت و بسیاری از دانشمندان از

¹Lotfi Aliasker Zadeh

²Hukuhara

³Puri

⁴Ralescu

⁵Bede

⁶Gal

⁷Stefanini

همان تعریف قبلی استفاده می‌کردند. از طرفی با رشد تعاریف و مفاهیم ریاضیات فازی و مفاهیم ریاضیات کسری دانشمندان را بر آن داشت که مطالعات گسترده‌ای بر روی حساب کسری فازی داشته باشند. دانشمندان مفهوم مشتق پذیری هاکوها را ریمان-لیوویل را به خوبی در [6] مطرح نمودند و سپس به بررسی روش‌های تحلیلی در حل معادلات دیفرانسیل کسری تحت مشتق کاپتو فازی پرداختند [5]، سال‌ها بعد این مفهوم مشتق پذیر توسط دانشمندان برای حل معادلات دیفرانسیل کسری فازی ارتقا یافت و مفهوم مشتق پذیری تعمیم یافته هاکوها را کاپتو بر اساس تفاضل تعمیم یافته هاکوها را معرفی شد از بین روش‌های تحلیلی استفاده از تبدیلات لاپلاس برای یافتن جواب‌های تحلیلی این نوع معادلات یکی از تکنیک‌های بسیار کارا و جدید می‌باشد که به خوبی در [33-34] نشان داده شده است.

5-1 نوآوری

از آنجایی که یافتن جواب‌های تحلیلی یکی از دغدغه‌هایی هست که همواره دانشمندان با آن روبرو هستند و از طرفی یافتن این نوع جواب‌ها کار دشواری است لذا در این رساله یک روش تحلیلی کارا برای حل معادلات دیفرانسیل کسری فازی پیشنهاد شده و آن استفاده همزمان از تبدیلات لاپلاس فازی و فوریه فازی در حل این نوع معادلات است و مزیت آن در این است که به راحتی جواب‌های صریح تحت انواع مشتق پذیری حاصل می‌شود از طرفی کلیه محاسبات و تعاریف تبدیلات انتگرالی به صورت فازی می‌باشد و در فضای اعداد فازی بدون برش حاصل شده است.

6-1 ساختار رساله

ساختار این رساله در پنج فصل تنظیم شده است.

- فصل اول بررسی کلیات تحقیق می‌باشد و شامل بخش‌های زیر است.

- ✓ بیان مسئله.
- ✓ اهمیت موضوع انتخابی.
- ✓ تاریخچه موضوع انتخابی.
- ✓ نوآوری مسئله مورد تحقیق.

- ✓ ساختار رساله.
- فصل دوم: در این فصل مفاهیم و قضایایی بنیادی رساله معرفی و بررسی می شود.
 - ✓ محاسبات فازی.
 - ✓ محاسبات کسری فازی.
- فصل سوم: در این فصل به حل معادله دیفرانسیل زمان-کسری فازی تحت مشتق پذیری تعمیم یافته پرداخته می شود. این فصل شامل چهار بخش مهم زیر است.
 - ✓ تبدیلات لاپلاس فازی تحت انواع مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوها را.
 - ✓ تبدیلات فوریه فازی تحت انواع مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوها را.
 - ✓ الگوریتم روش.
 - ✓ حل معادله دیفرانسیل زمان-کسری فازی.
- فصل چهارم: فصل چهارم به بررسی مثال های عددی و کاربردی از معادلات دیفرانسیل کسری فازی اختصاص داده شده است.
- فصل پنجم: این فصل شامل دو بخش است و در آن به مباحث زیر پرداخته می شود.
 - ✓ نتیجه گیری.
 - ✓ پیشنهادات.

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

2-1 مقدمه

بنیادی‌ترین فصل رساله که پایه و اساسی برای سایر فصل‌های رساله است این بخش می‌باشد که با توجه به گسترده بودن موضوع رساله شامل دو بخش عمده می‌باشد. در بخش اول به بیان مفاهیم و محاسبات فازی پرداخته می‌شود و مفاهیم، لم‌ها قضایای که در بخش سوم و چهارم به وفور از آن استفاده می‌شود بیان می‌شود. بخش دوم از این فصل به بیان مفاهیم حسابان کسری فازی اختصاص دارد و مفاهیم انتگرال‌پذیری توابع فازی کسری، مشتق‌پذیری توابع مقدار فازی کسری تحت انواع دیفرانسیل‌پذیری تعمیم یافته‌ها کوهارا مورد بررسی قرار گرفته می‌شود و نهایتاً توابع مهم کسری معرفی می‌شود. شایان ذکر است که مفاهیم این فصل با استفاده از رفرنس‌های [33، 1 و 32، 7، 6، 5، 17، 11، 28، 24] نوشته شده است.

2-2 مفاهیم فازی

این بخش از رساله به بیان مفاهیم بنیادی فازی اختصاص داده شده است و در آن مفاهیمی همچون اعمال حسابی روی اعداد فازی، متر و خواص آن، تابع فازی، پیوستگی بررسی می‌شود و نهایتاً مفاهیم مشتق‌پذیری و انتگرال‌پذیری تحت انواع دیفرانسیل‌پذیری تعمیم یافته‌ها کوهارا بررسی می‌شود.

2-2-1 عدد فازی

عدد فازی مثلثی به صورت $a = (a_1, a_2, a_3)$ نشان داده می‌شود به طوری که $a_1 \leq a_2 \leq a_3$.

2-2-2 فرم آر-برش اعداد فازی مثلثی

فرم آلفا برش⁸ عدد فازی a به صورت

$$\begin{cases} a^-(r) = a_1 + (a_2 - a_1)r \\ a^+(r) = a_3 - (a_3 - a_2)r \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} a^-(r) = a_2 - (a_2 - a_1)r \\ a^+(r) = a_2 + (a_3 - a_2)r \end{cases}$$

نمایش داده می‌شود.

⁸ α -cut

2-2-3 جمع دو عدد فازی

فرض می کنیم $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ دو عدد فازی مثلثی باشند. جمع فازی با نماد $\oplus$ نشان داده می شود و به صورت

$$a \oplus b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

معرفی می شود.

2-2-4 تفاضل هاکوهارا

سه عدد فازی مثلثی $a = (a_1, a_2, a_3)$ ، $b = (b_1, b_2, b_3)$ و $c = (c_1, c_2, c_3)$ را در نظر بگیرید، تفاضل هاکوهارا⁹ با نماد $\ominus$ نشان داده می شود و به صورت

$$a \ominus b = c \Rightarrow a = b + c$$

تعریف می شود، علامت + در سمت راست رابطه فوق بیانگر جمع استاندارد بین دو عدد فازی a و b است و به این معناست که انتقالی به اندازه b وجود دارد لذا تفاضل هاکوهارا وجود دارد، که به آن شرط وجود تفاضل هاکوهارا گویند.

2-2-5 تفاضل تعمیم یافته ی هاکوهارا

سه عدد فازی مثلثی $a = (a_1, a_2, a_3)$ ، $b = (b_1, b_2, b_3)$ و $c = (c_1, c_2, c_3)$ را در نظر بگیرید، تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا¹⁰ با نماد $\ominus_{gH}$ نشان داده می شود و به صورت

$$a \ominus_{gH} b = c \leftrightarrow \begin{cases} (i). a = b \oplus c; \\ or \\ (ii). b = a \oplus (-1)c. \end{cases}$$

بیان می شود و $-r$ برش آن به صورت

$$[a \ominus_{gH} b]^r = [\min\{a_1 - b_1, a_3 - b_3\}, a_2 - b_2, \max\{a_1 - b_1, a_3 - b_3\}]$$

⁹Hukahara difference

¹⁰Generalized Hukahara difference

می باشد و داریم

$$a \ominus_{gH} b = c \leftrightarrow \begin{cases} (i). c = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3); \\ or \\ (ii). c = (a_3 - b_3, a_2 - b_2, a_1 - b_1). \end{cases}$$

2-2-6 خواص تفاضل تعمیم یافته ها کوهارا

دو عدد فازی مثلثی a, b را داریم، آنگاه شرایط زیر همواره برقرار می باشند.

• اگر تفاضل تعمیم یافته ها کوهارا موجود باشد آنگاه این تفاضل همواره یکتا است.

فرض کنید a, b دو عدد فازی باشند، آنگاه گزاره های زیر برقرارند.

• اگر $a \ominus_{gH} b = a \ominus b$ یا $a \ominus_{gH} b = -(b \ominus a)$ باشد آنگاه اگر عبارت سمت راست وجود داشته باشد

$$داریم $a \ominus_{gH} a = a \ominus a = 0$.$$

• اگر در تعریف (2-2-5) وع (i)، برقرار باشد ($a \ominus_{gH} b$ برقرار باشد)، آنگاه در نوع (ii)، $b \ominus_{gH} a$

وجود دارد و برعکس،

$$(a + b) \ominus_{gH} b = a \quad \bullet$$

$$0 \ominus_{gH} (a \ominus_{gH} b) = b \ominus_{gH} a \quad \bullet$$

• $a \ominus_{gH} b = b \ominus_{gH} a = c$ اگر و تنها اگر $c = -c$ ، همچنین $c = 0$ است اگر و تنها اگر $a = b$.

2-2-7 ضرب یک عدد حقیقی در یک عدد فازی

عدد فازی $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ دو عدد فازی مثلثی باشند و λ عددی حقیقی باشد، حاصل ضرب

بین با نماد $\odot$ نشان داده می شود و به صورت

$$(a \odot b) = (\min \{a_1 b_1, a_3 b_3\}, a_2 b_2, \max \{a_1 b_1, a_3 b_3\})$$

$$\lambda a = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3), & \text{If } \lambda \geq 0; \\ (\lambda a_3, \lambda a_2, \lambda a_1), & \text{If } \lambda < 0. \end{cases}$$

معرفی می شود.

8-2-2 تابع فازی

فرض کنید X, Y مجموعه‌هایی حقیقی مقدار باشند آنگاه می توان تابع $f: X \rightarrow Y$ را به تابع فازی $F: F(X) \rightarrow F(Y)$ توسعه داد به طوری که $v = F(u)$ باشد و

$$v(y) = \begin{cases} \sup\{u(t) : t \in X, f(t) = y\}, & \text{when } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

در این صورت F را گسترش زاده f نامند، در رساله حاضر تابع مقدار فازی به صورت تابع فازی $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$ به صورت

$$f(t) := (f_1(t), f_2(t), f_3(t)).$$

بیان می شود که در آن $\mathbb{J} = [a, b] \subseteq \mathbb{D}$ است.

9-2-2 پیوستگی

فرض کنید $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$ تابعی مقدار فازی باشد. تابع f در نقطه $t_0 \in \mathbb{J}$ را پیوسته نامیم هرگاه به ازای هر $t \in \mathbb{J}$ رابطه

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |t - t_0| < \delta \Rightarrow D(f(t), f(t_0)) < \varepsilon.$$

برقرار باشد.

10-2-2 مشتق پذیر تعمیم یافته ی قوی

نگاشت $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$ در $t_0 \in \mathbb{J}$ را مشتق پذیر تعمیم یافته ی قوی¹¹ گویند اگر $f'(t_0) \in \mathbb{E}_T$ به گونه ای باشد که یکی از چهار حالت زیر برقرار باشد

¹¹Strongly generalized differentiable

الف) به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، مقادیر $f(t_0) \ominus f(t_0 - h)$ و $f(t_0 + h) \ominus f(t_0)$ موجود باشد و همچنین حد زیر نیز برقرار باشد

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) \ominus f(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0) \ominus f(t_0 - h)}{h} = f'(t_0).$$

ب) به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، مقادیر $f(t_0) \ominus f(t_0 + h)$ و $f(t_0 - h) \ominus f(t_0)$ و حدود زیر موجود باشند.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0) \ominus f(t_0 + h)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 - h) \ominus f(t_0)}{-h} = f'(t_0).$$

ج) به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، مقادیر $f(t_0 - h) \ominus f(t_0)$ و $f(t_0 + h) \ominus f(t_0)$ و حدود زیر موجود باشند.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) \ominus f(t_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 - h) \ominus f(t_0)}{-h} = f'(t_0).$$

د) به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، حدود زیر و مقادیر $f(t_0) \ominus f(t_0 + h)$ و $f(t_0 - h) \ominus f(t_0)$ موجود باشند.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0) \ominus f(t_0 + h)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0) \ominus f(t_0 - h)}{h} = f'(t_0).$$

11-2-2 مشتق تعمیم یافته ی هاکوهارا

نگاشت $\mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T : f$ در $t_0 \in \mathbb{J}$ را مشتق پذیر تعمیم یافته ی هاکوهارا^{۱۲} (gH -دیفرانسیل پذیر) گویند هرگاه

$$f'_{gH}(t_0) \in \mathbb{E}_T \text{ و تعریف زیر}$$

$$f'_{gH}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) \ominus_{gH} f(t_0)}{h}.$$

برقرار باشد.

¹²Generalized hukuara differentiable

2-2-12 نوع مشتق پذیری

فرض کنید $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد.

1: $f(t)$ تابعی $[i - gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه t_0 است اگر معادله (2-1) برقرار باشد.

$$f'_{i.gH}(t_0) = (f'_1(t_0), f'_2(t_0), f'_3(t_0)), \quad (2-1)$$

2: $f(t)$ تابعی $[ii - gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه t_0 است اگر معادله (2-2) برقرار باشد.

$$f'_{ii.gH}(t_0) = (f'_3(t_0), f'_2(t_0), f'_1(t_0)), \quad (2-2)$$

2-2-13 نقطه سویچ

نقطه $t_0 \in [a, b]$ یک نقطه سویچ^{۱۳} برای دیفرانسیل پذیری تابع $f(t)$ است اگر به ازای هر همسایگی V از t_0 ، نقاط t_1 و t_2 ایی موجود باشد به طوری که $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ و

نوع I. در نقطه t_1 ، (2-1) برقرار باشد و (2-2) برقرار نباشد و در نقطه t_2 ، (2-2) برقرار باشد و (2-1) برقرار نباشد.

نوع II. در نقطه t_1 ، (2-2) برقرار باشد و (2-1) برقرار نباشد و در نقطه t_2 ، (2-1) برقرار باشد و (2-2) برقرار نباشد.

2-2-14 قضیه مشتق از ضرب تابع فازی در تابع حقیقی

فرض کنید $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر و بدون نقطه سویچ در بازه $\mathbb{J}$ باشد و $q(t)$ تابعی مقدار حقیقی باشد آنگاه جدول 1-2 را داریم

جدول 1-2: نوع دیفرانسیل پذیری ضرب توابع فازی

¹³Switching point

	Type of diff of f	Sign $q(t)$	Sign $q'(t)$	$(q(t) \odot f(t))'_{gH}$	Type of $(q(t) \odot f(t))'_{gH}$
1	(i)	> 0	> 0	$q'(t) \odot f(t) \oplus q(t) \odot f'_{gH}(t)$	(i)
2	(i)	> 0	< 0	$q(t) \odot f'_{gH}(t) \ominus (-q'(t)) \odot f(t)$	(i)
3	(i)	< 0	> 0	$q(t) \odot f'_{gH}(t) \ominus (-q'(t)) \odot f(t)$	(ii)
4	(i)	< 0	< 0	$q'(t) \odot f(t) \oplus q(t) \odot f'_{gH}(t)$	(ii)
5	(ii)	> 0	> 0	$q(t) \odot f'_{gH}(t) \ominus (-q'(t)) \odot f(t)$	(ii)
6	(ii)	> 0	< 0	$q(t) \odot f'_{gH}(t) \oplus q'(t) \odot f(t)$	(ii)
7	(ii)	< 0	> 0	$q'(t) \odot f(t) \oplus q(t) \odot f'_{gH}(t)$	(i)
8	(ii)	< 0	< 0	$q(t) \odot f'_{gH}(t) \ominus (-q'(t)) \odot f(t)$	(i)

برهان:

حالت 3 اثبات می شود سایر قسمت ها به صورت مشابه اثبات می شود. فرض کنید $q(t) < 0$ و $q'(t) > 0$

باشد و همچنین بر طبق حالت سوم $f(t)$ تابعی $[i - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد

$$\begin{aligned}
& q(t) \odot f'_{gH}(t) \ominus (-q'(t)) \odot f(t) \\
&= q(t) \odot (f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t)) \ominus (-q'(t)) \odot (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) \\
&= (q(t)f'_3(t), q(t)f'_2(t), q(t)f'_1(t)) \ominus (-1)(q'(t)f_1(t), q'(t)f_2(t), q'(t)f_3(t)) \\
&= (q(t)f'_3(t), q(t)f'_2(t), q(t)f'_1(t)) \ominus (-q'(t)f_3(t), -q'(t)f_2(t), -q'(t)f_1(t)) \\
&= (q(t)f'_3(t) + q'(t)f_3(t), q(t)f'_2(t) + q'(t)f_2(t), q(t)f'_1(t) + q'(t)f_1(t)) \\
&= (q(t) \odot f(t))'_{ii, gH} \cdot \square
\end{aligned}$$

لذا اثبات کامل است. $\square$

15-2-2 انتگرال فازی توابع مثلثی

فرض کنید $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$ تابعی مقدار فازی، $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ و $t_0 \in (a, b)$ آنگاه

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt, \int_a^b f_3(t) dt \right).$$

16-2-2 قضیه انتگرال فازی

اگر $f(t)$ تابعی مقدار فازی و gH -دیفرانسیل پذیر و بدون نقطه سویچ در بازه $\mathbb{J} \in [a, b]$ باشد آنگاه

$$\int_a^b f'_{gH}(t) dt = f(b) \ominus_{gH} f(a).$$

17-2-2 لم: فرض کنید $f: \mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$ باشد. اگر $f(t)$ تابعی فازی باشد به طوری که نوع دیفرانسیل

پذیری در سرتاسر بازه $\mathbb{J} \in [a, b]$ تغییر نکند آنگاه

1: اگر $f(t)$ تابعی $[i - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\int_a^b f'_{i.gH}(t) dt = f(b) \ominus f(a).$$

2: اگر $f(t)$ تابعی $[ii - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\int_a^b f'_{ii.gH}(t) dt = (-1)f(a) \ominus (-1)f(b).$$

برهان: ابتدا فرض می کنیم $f(t)$ تابعی $[i - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه با استفاده از تعریف تفاضل

تعمیم یافته ها کوهارا (2-2-5) داریم

$$\begin{aligned} \int_a^b f'_{ii.gH}(t) dt &= \left(\int_a^b f'_3(t) dt, \int_a^b f'_2(t) dt, \int_a^b f'_1(t) dt \right) \\ &= (f_3(b) - f_3(a), f_2(b) - f_2(a), f_1(b) - f_1(a)) \\ &= (-1)f(a) \ominus (-1)f(b). \end{aligned}$$

برای اثبات قسمت دوم به صورت مشابه به آسانی اثبات حاصل می شود، لذا اثبات کامل است. $\square$

18-2-2 قضیه انتگرال گیری جزء به جزء فازی

فرض کنید $\mathbb{J} \rightarrow \mathbb{E}_T$: f تابعی gH -دیفرانسیل پذیر و بدون نقطه سویچ در بازه $\mathbb{J}$ باشد و $q(t)$ تابعی مقدار

حقیقی و دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

1. اگر $f(t)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و

1-1: $q(t) > 0, q'(t) > 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = q(b) \odot f(b) \ominus q(a) \odot f(a) \ominus_{gH} \int_a^b q'(t) \odot f(t) dt.$$

1-2: اگر $q(t) > 0, q'(t) < 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = q(b) \odot f(b) \ominus q(a) \odot f(a) \oplus \int_a^b (-q'(t)) \odot f(t) dt.$$

1-3: اگر $q(t) < 0, q'(t) > 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = (-q(a)) \odot f(a) \ominus (-q(b)) \odot f(b) \oplus \int_a^b (-q'(t)) \odot f(t) dt.$$

1-4: اگر $q(t) < 0, q'(t) > 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = (-q(a)) \odot f(a) \ominus (-q(b)) \odot f(b) \ominus_{gH} \int_a^b q'(t) \odot f(t) dt.$$

2. اگر $f(t)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و

2-1: $q(t) > 0, q'(t) > 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = (-q(a)) \odot f(a) \ominus (-q(b)) \odot f(b) \oplus \int_a^b (-q'(t)) \odot f(t) dt.$$

2-2: اگر $q(t) > 0, q'(t) < 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = (-q(a)) \odot f(a) \ominus (-q(b)) \odot f(b) \ominus_{gH} \int_a^b q'(t) \odot f(t) dt.$$

2-3: اگر $q(t) < 0, q'(t) > 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = q(b) \odot f(b) \ominus q(a) \odot f(a) \ominus_{gH} \int_a^b q'(t) \odot f(t) dt.$$

2-4: اگر $q(t) < 0, q'(t) > 0$ باشد آنگاه

$$\int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt = q(b) \odot f(b) \ominus q(a) \odot f(a) \oplus \int_a^b (-q'(t)) \odot f(t) dt.$$

برهان: حالت 1-4 اثبات می شود و سایر حالت ها به صورت مشابه به راحتی به دست می آید. برای اثبات

این قضیه با استفاده از لم 2-2-17 و حالت چهارم جدول 2-1 داریم

$$(q(t) \odot f(t))'_{ii.gH} = q'(t) \odot f(t) \oplus q(t) \odot f'_{gH}(t). \quad (2-3)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله (2-3) و استفاده از لم 2-2-17 معادله (2-4) حاصل می شود

$$(u(x, b) \odot g(b)) \ominus (u(x, a) \odot g(a)) = \int_a^b \partial_{t.gH} u(x, t) \odot g(t) dt \oplus \int_a^b u(x, t) \odot g'(t) dt. \quad (2-4)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_a^b (q(t) \odot f(t))'_{ii.gH} dt &= \int_a^b q'(t) \odot f(t) dt \oplus \int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt \\ \Rightarrow (-q(a)) \odot f(a) \ominus (-q(b)) \odot f(b) \ominus_{gH} \int_a^b q'(t) \odot f(t) dt &= \int_a^b q(t) \odot f'_{gH}(t) dt. \end{aligned}$$

لذا نتیجه مورد نظر به دست می آید و اثبات کامل است. $\square$

2-2-19 دیفرانسیل پذیری تحت علامت انتگرال

فرض کنید تابع فازی $u(t, x)$ و $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ روی بازه $[a, b] \times [c, \infty)$ پیوسته فازی باشد. همچنین فرض کنید

انتگرال

$$F(x) = \int_c^\infty u(t, x) dt, \quad (2-3)$$

روی $x \in \mathbb{R}$ همگرا باشد و انتگرال

$$\int_c^\infty \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dt$$

روی بازه $[a, b]$ همگرای یکنواخت باشد آنگاه F روی بازه $[a, b]$ - gH دیفرانسیل پذیر است و داریم

$$F'_{gH}(x) = \int_c^\infty \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} dt.$$

2-2-20 تعریف:

فرض کنید $u(t, x)$ تابع فازی مثلثی باشد و در سرتاسر بازه $\mathbb{D}$ دیفرانسیل پذیری تغییر نکند آنگاه
1: اگر $u(t, x)$ تابعی $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت x به روی بازه $\mathbb{D}$ باشد آنگاه

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial u_3(t, x)}{\partial x} \right).$$

2: اگر $u(t, x)$ تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت x به روی بازه $\mathbb{D}$ باشد آنگاه

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial u_3(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial x} \right).$$

2-2-21 نتیجه:

فرض کنید $f(x)$ تابع فازی مثلثی باشد و در سرتاسر بازه $\mathbb{D}$ ، gH -دیفرانسیل پذیری تغییر نکند و به ازای هر $a > 0$ داشته باشیم $u(t, x) = e^{-at} f(x)$ آنگاه

1: اگر $u(t, x)$ تابعی $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t روی بازه $\mathbb{D}$ باشد آنگاه

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \ominus a e^{-at} f(x).$$

2: اگر $u(t, x)$ تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t روی بازه $\mathbb{D}$ باشد آنگاه

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = (-1) a e^{-at} f(x).$$

2-2-22 تعریف:

فرض کنید $u(t, x)$ تابع فازی روی بازه $[a, b] \times [0, \infty)$ باشد. همچنین فرض کنید $\int_c^\infty u(t, x) dt$ به ازای هر بازه $t \in [a, b]$ همگرا باشد. گوییم انتگرال

$$F(x) = \int_c^\infty u(t, x) dt$$

روی بازه $x \in [a, b]$ همگرای یکنواخت است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد عددی مانند N که فقط به ϵ وابسته باشد به طوری که

$$D\left(F(x), \int_c^d u(t, x) dt\right) < \epsilon,$$

هر زمان که $d \geq N$ و به ازای هر $x \in [a, b]$ است. و این بدان معناست که

$$\sup_{x \in [a, b]} D\left(\int_c^d u(t, x) dt, 0\right) \rightarrow 0 \text{ as } d \rightarrow \infty.$$

2-3 حساب کسری فازی

حساب کسری فازی^{۱۴} در واقع توسیعی از حساب دیفرانسیل فازی مرتبه صحیح به مرتبه دلخواه است. در این بخش مفاهیم مهم و بنیادی که در بحث مشتق و انتگرال گیری کسری نقش مهم و اساسی بازی می کند، بیان می شود. لازم به ذکر است که تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [20 و 25] نتیجه شده است.

2-3-1 تابع گاما

از مهم ترین توابع در معرفی حساب کسری تابع گاما^{۱۵} می باشد که به صورت

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

معرفی می شود، اگر $\text{Re}(z) > 0$ ، انتگرال فوق مطلق همگرا می شود. یکی از مهمترین ویژگی های تابع گاما $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ است که در صورتی که $n \in \mathbb{N}$ باشد آنگاه $\Gamma(n+1) = n!$ است. تعاریف مختلف تابع گاما به شرح

• تعریف حدی تابع گاما:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \text{Re}(z) > 0.$$

• تعریف وایراشتراس^{۱۶} تابع گاما:

¹⁴ Fuzzy fractional calculus

¹⁵ Gamma function

¹⁶ Weierstrass

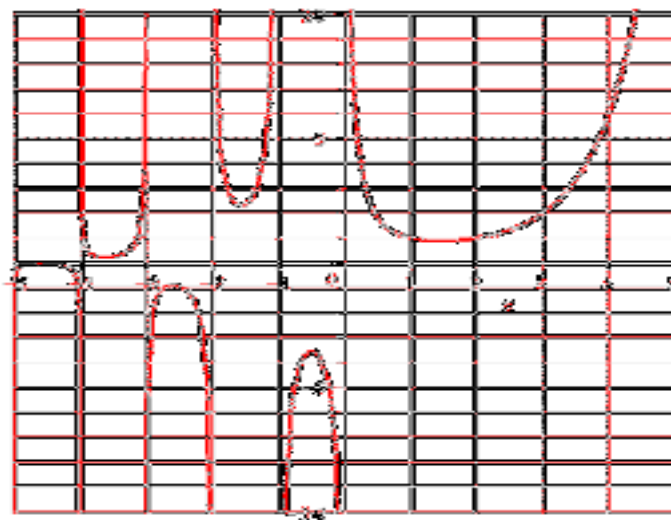
$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z+1) \dots (z+n)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}.$$

که در آن $\gamma = 0.5772$ ، ثابت اویلر-ماسکرونی^{۱۷} است.

• تعریف اویلر تابع گاما:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z+1) \dots (z+n)} = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z.$$

است.



شکل 2-1: نمایشی از تابع گاما

2-3-2 تابع بتا

تابع بتا^{۱۸} یکی از مهمترین توابع در حسابان کسری، می باشد که به فرم

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0, \text{Re}(w) > 0.$$

معرفی می شود.

¹⁷Euler-mascheroni

¹⁸Beta function

2-3-3 رابطه بین تابع گاما و بتا

هر گاه تابع گاما تعریف 1-3-2 و تابع بتا از تعریف 3-2-2 حاصل شده باشد، آنگاه رابطه بین تابع گاما و بتا به صورت

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)},$$

تعریف می شود.

2-3-4 تابع میتگ-لفلر

تابع میتگ-لفلر¹⁹ در حقیق توسیع خاصی از تابع نمایی e^x است و این تابع نقش مهمی در محاسبات کسری بخصوص در یافتن جواب های تحلیلی این نوع محاسبات بازی می کند و نمایش آن با یک پارامتر و دو پارامتر به ترتیب به فرم

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \quad \alpha > 0.$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

می باشد.

در ادامه فرض می کنیم $C^F(\mathbb{J})$ نمایانگر فضای تمام توابع مقدار فازی و پیوسته روی بازه $\mathbb{J} = [a, b] \subseteq \mathbb{D}$ باشد و $L^F(\mathbb{J})$ معرف فضای تمام توابع مقدار فازی لبگ انتگرال پذیر روی بازه کراندار $\mathbb{J} = [a, b] \subseteq \mathbb{D}$ است.

2-3-5 انتگرال ریمان-لیوویل از تابع مقدار فازی

فرض کنید $f(t) \in C^F(\mathbb{J}) \cap L^F(\mathbb{J})$ به طوری که $\mathbb{J} = [a, b] \subseteq \mathbb{D}$ باشد. انتگرال کسری ریمان-لیوویل²⁰ از تابع مقدار فازی $f(t)$ به صورت

¹⁹Mittage-Leffler function

²⁰Riemann-Liouville fractional integral

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx.$$

تعریف می شود که در آن $0 < \alpha \leq 1$ است.

1- اگر $f(t)$ تابعی $[i - gH]$ - cf دیفرانسیل پذیر در نقطه $t \in [a, b]$ باشد آنگاه

$$J^\alpha f(t, r) = (J^\alpha f_1, J^\alpha f_2, J^\alpha f_3)$$

2- اگر $f(t)$ تابعی $[ii - gH]$ - cf دیفرانسیل پذیر در نقطه $t \in [a, b]$ باشد آنگاه

$$J^\alpha f(t, r) = (J^\alpha f_3, J^\alpha f_2, J^\alpha f_1)$$

است.

2-3-6 مشتق هاکوهارای تعمیم یافته ریمان لیوویل کسری

مشتق هاکوهارای تعمیم یافته ریمان-لیوویل کسری از تابع مقدار فازی به فرم

$${}^R_{gH} D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} (J^{m-\alpha} f(t)), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in N.$$

تعریف می شود که در آن $0 < \alpha \leq 1$ است و خصوصیات زیر را داریم

$${}^R_{gH} D^\alpha J^\alpha f(t) = f(t),$$

$$J^\alpha {}^R_{gH} D^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0^+) \frac{t^i}{i!}.$$

2-3-7 مشتق هاکوهارای تعمیم یافته کاپوتو کسری

مشتق هاکوهارای تعمیم یافته کاپوتو کسری²¹ تابع مقدار فازی $f(t)$ از مرتبه $0 < \alpha < 1$ به صورت

$${}^C_{gH} \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t \frac{f'_{gH}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

²¹Fractional Caputo generalized Hukuhara derivative

تعریف می شود.

1: اگر $f(t)$ تابعی $[i - gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه $t \in [a, b]$ باشد آنگاه

$${}^C_{i.gH} \mathcal{D}_a^\alpha f(t) = \left({}^C D_a^\alpha f_1(t), {}^C D_a^\alpha f_2(t), {}^C D_a^\alpha f_3(t) \right). \quad (2-5)$$

2: اگر $f(t)$ تابعی $[ii - gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه $t \in [a, b]$ باشد آنگاه

$${}^C_{ii.gH} \mathcal{D}_a^\alpha f(t) = \left({}^C D_a^\alpha f_3(t), {}^C D_a^\alpha f_2(t), {}^C D_a^\alpha f_1(t) \right). \quad (2-6)$$

2-3-8 نقطه سویچ برای دیفرانسیل پذیری کسری

نقطه $(a, b) \in t_0$ یک نقطه سویچ²² برای دیفرانسیل پذیری تابع $f(t)$ است اگر به ازای هر همسایگی V از t_0 نقاط t_1 و t_2 ایی موجود باشد به طوری که $t_1 \leq t_0 \leq t_2$ و

نوع I. در نقطه t_1 ، (2-5) برقرار باشد و (2-6) برقرار نباشد و در نقطه t_2 ، (2-6) برقرار باشد و (2-5) برقرار نباشد.

نوع II. در نقطه t_1 ، (2-6) برقرار باشد و (2-5) برقرار نباشد و در نقطه t_2 ، (2-5) برقرار باشد و (2-6) برقرار نباشد.

²²Switching point

فصل سوم

یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل

زمان-کسری فازی

3-1 مقدمه

کاربرد فراوان معادلات دیفرانسیل کسری فازی در سایر علوم منجر به آن شده که دانشمندان همواره به دنبال یافتن جواب های این نوع معادلات باشند. از آنجایی که در پاره ای از مواقع یافتن جواب دقیق مسئله بسیار حائز اهمیت است لذا در این فصل از رساله سعی بر آن شده که به یافتن جواب صریح معادلات دیفرانسیل کسری فازی پرداخته شود، برای این منظور نیاز به معرفی روش تحلیلی مناسب می باشد لذا در این فصل ابتدا روش تبدیل لاپلاس فازی معرفی شده و سپس تبدیل فوریه فازی بررسی می شود و در نهایت به اعمال روش پیشنهادی رساله و یافتن جواب صریح معادله تحت انواع مشتق پذیری تعمیم یافته پرداخته می شود. قابل ذکر است که تعاریف بخش اول این فصل از رفرنس [31، 7، 32، 33] نوشته شده است.

3-2 لاپلاس فازی و خواص آن

یکی از ابزارهای بسیار موثر و کارا در حل معادلات دیفرانسیل کسری فازی با مشتقات جزئی استفاده از تبدیلات لاپلاس فازی می باشد. مزیت استفاده از این روش آن است که معادلات با مشتقات جزئی تبدیل به معادلات جبری می شوند لذا کار کردن با این معادلات به مراتب بسیار ساده تر از حالت اولیه معادله می شود. در این بخش تبدیلات لاپلاس فازی تحت انواع مشتق پذیری تعمیم یافته بررسی می شود.

3-2-1 مرتبه نمایی

تابع مقدار فازی $f(t)$ را از مرتبه نمایی a روی بازه $0 \leq t < \infty$ گویند هرگاه مقدار ثابت مثبتی مانند K وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $t_0 > 0$ رابطه

$$D(f(t), 0) \leq Ke^{at}, \quad t \geq t_0.$$

برقرار باشد.

3-2-2 لاپلاس فازی

تبدیل لاپلاس فازی تابع $f(t)$ به صورت

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau, \quad (3-1)$$

معرفی می‌شود، به شرط آنکه حد سمت راست موجود و یک عدد فازی باشد.

3-2-3 لاپلاس معکوس فازی

لاپلاس معکوس تابع $F(s)$ به صورت

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \odot F(s) ds, \quad (3-2)$$

تعریف می‌شود که در آن $\gamma \in \mathbb{R}$ است.

3-2-4 گزاره

فرض کنید $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ تابع مقدار فازی باشد آنگاه با توجه به تعریف 2-15-2 تبدیل لاپلاس فازی این تابع به صورت

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = (L[f_1(t)], L[f_2(t)], L[f_3(t)]),$$

که در آن L تعریفی از تبدیلات لاپلاس کلاسیک است و به صورت

$$L[f_i(t)] = \int_0^\infty e^{-s\tau} f_i(\tau) d\tau = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-s\tau} f_i(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, 3.$$

تعریف می‌شود.

3-2-5 قضیه وجود و یکتایی

اگر $f(t)$ تابعی مقدار فازی و تکه ای پیوسته بر روی هر بازه متناهی $(0, T)$ از مرتبه نمایی e^{at} باشد آنگاه تبدیل لاپلاس فازی تابع $f(t)$ به ازای هر s وجود دارد به طوری که $Re(s) > a$ است.

برهان: فرض می‌کنیم $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ است لذا داریم

$$\begin{aligned} D(F(s), 0) &= D\left(\int_0^\infty e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau, 0\right) \leq \int_0^\infty e^{-s\tau} D(f(\tau), 0) d\tau \\ &\leq K \int_0^\infty e^{-(s-a)\tau} d\tau = \frac{K}{s-a}, \quad \text{for } Re(s) > a. \end{aligned}$$

لذا اثبات کامل است. $\square$

3-2-6 قضیه مشتق مرتبه اول لاپلاس فازی

1. فرض کنید $f(t)$ تابعی مقدار فازی و پیوسته به ازای $t \geq 0$ و با مرتبه نمایی e^{at} باشد.

2. فرض کنید $f'_{gH}(t)$ تابعی تکه ای پیوسته روی هر زیر بازه $\mathbb{I}$ باشد.

همچنین فرض می کنیم $f(t)$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر روی بازه باشد به طوری که نوع gH -دیفرانسیل پذیری در سرتاسر بازه تغییر $\mathbb{I}$ نکند آنگاه به ازای هر $Re(s) > a$ داریم

1: اگر $f(t)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[f'_{i.gH}(t)] = sF(s) \ominus f(0),$$

2: اگر $f(t)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[f'_{ii.gH}(t)] = (-1)f(0) \ominus_{gH} (-1)sF(s),$$

برهان: فرض کنید $f(t)$ تابعی مثلثی و $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه با استفاده از تعریف تبدیلات لاپلاس فازی داریم

$$\mathcal{L}[f'_{i.gH}(t)] = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-s\tau} \odot f'_{gH}(\tau) d\tau,$$

اکنون با استفاده از قضیه انتگرال گیری جز به جز فازی 2-2-18 داریم

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-s\tau} \odot f'_{gH}(\tau) d\tau &= [e^{-s\tau} \odot f(\tau)]_0^R \oplus (-1) \int_0^R (-s) e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau \\ &= (e^{-sR} \odot f(R) \ominus f(0)) \oplus s \int_0^R e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به فرض اول قضیه داریم که $f(t)$ تابعی فازی از مرتبه نمایی e^{at} است بنابراین وجود دارد $K > 0$ و $t_0 > 0$ بطوری که به ازای هر $t > t_0$ داریم

$$D(f(t), 0) < Ke^{at}$$

بنابراین اگر $R > t_0$ باشد داریم

$$D(e^{-sR} \odot f(R), 0) < Ke^{-(s-a)R}$$

اگر $s > a$ باشد داریم

$$\lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} e^{-s\mathcal{R}} \odot f(\mathcal{R}) = 0.$$

در نتیجه

$$\lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} s \int_0^{\mathcal{R}} e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau = s \mathcal{L}[f(t)].$$

در نهایت داریم

$$\mathcal{L}[f'_{i.gH}(t)] = s \mathcal{L}[f(t)] \ominus f(0),$$

برای اثبات قسمت دوم همانند حالت قبل داریم

$$\mathcal{L}[f'_{ii.gH}(t)] = \lim_{\mathcal{R} \rightarrow \infty} \int_0^{\mathcal{R}} e^{-s\tau} \odot f'_{gH}(\tau) d\tau.$$

لذا با استفاده از قضیه 2-2-18 قسمت 2-2 داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\mathcal{R}} e^{-s\tau} \odot f'_{gH}(\tau) d\tau &= ((-1)f(0) \ominus (-1)e^{-s\mathcal{R}} \odot f(\mathcal{R})) \ominus_{gH} (-1)s \int_0^{\mathcal{R}} e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau \\ &= (-1)f(0) \ominus_{gH} (-1)s \int_0^{\mathcal{R}} e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\mathcal{L}[f'_{ii.gH}(t)] = (-1)f(0) \ominus_{gH} (-1)sF(s).$$

لذا اثبات کامل است. $\square$

برای نشان دادن کاربردی بودن قضیه 3-2-6 مثال 3-7-2 ارائه می شود.

3-2-7 مثال: فرض کنید که تابع فازی

$$f(t) = (2t + 1, 5t + 4, 6t + 8).$$

داریم که تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است با استفاده از گزاره 3-2-4 می خواهیم تبدیل لاپلاس فازی تابع را به دست آوریم. لذا با لاپلاس گیری داریم

$$F(s) = \left(\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}, \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s}, \frac{6}{s^2} + \frac{8}{s} \right),$$

و

$$f(0) = (1, 4, 8),$$

در نتیجه

$$sF(s) \ominus f(0) = \left(\frac{2}{s}, \frac{5}{s}, \frac{6}{s} \right).$$

که این عبارت نشان دهنده $\mathcal{L}[f'_{i.gH}(t)]$ است، لذا قسمت اول قضیه 3-2-6 برقرار است. اکنون فرض می کنیم

$$f(t) = (3.2e^{-2t}, 5.7e^{-2t}, 7.9e^{-2t}),$$

باشد در نتیجه داریم

$$\mathcal{L}[f(t)] = \left(\frac{3.2}{s+2}, \frac{5.7}{s+2}, \frac{7.9}{s+2} \right),$$

و

$$(-1)f(0) \ominus (-1)sF(f) = \left(\frac{-15.8}{s+2}, \frac{-11.4}{s+2}, \frac{-6.4}{s+2} \right),$$

که برابر است با $\mathcal{L}[f'_{ii.gH}(t)]$ لذا حالت دوم قضیه 3-2-6 نیز برقرار است.

3-2-8 تعریف کانولیشن دو تابع

کانولیشن بین دو تابع $f(t)$ و $q(t)$ به ازای $t > 0$ به صورت

$$(f * q)(t) = \int_0^t f(\tau) \odot q(t - \tau) d\tau,$$

است، که در آن $q(t)$ یک تابع تکه ای پیوسته و حقیقی است و $f(t)$ تابعی تکه ای پیوسته مثلی فازی می باشد. با جایگذاری $u = t - \tau$ داریم

$$(f * q)(t) = \int_0^t q(u) \odot f(t-u) du = (q * f)(t),$$

لذا کانولیشن جابجا پذیر است.

9-2-3 قضیه کانولیشن فازی

اگر $f(t)$ تابعی مقدار فازی مثلی و تکه ای پیوسته بر روی بازه $[0, \infty)$ و از مرتبه نمایی e^{at} باشد آنگاه

$$\mathcal{L}[(f * q)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \odot \mathcal{L}[q(t)], \quad (Re(s) > \alpha),$$

که در آن تابعی $q(t)$ مقدار حقیقی و تکه ای پیوسته روی بازه $[0, \infty)$ است.

برهان: با استفاده از قضیه 2-2-3 داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] \odot \mathcal{L}[q(t)] &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} \odot f(\tau) d\tau \right) \left(\int_0^\infty e^{-s\sigma} q(\sigma) d\sigma \right) \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+\sigma)} \odot f(\tau) d\tau \right) \odot q(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

اکنون فرض می کنیم τ در انتگرال داخلی مقداری ثابت باشد و $t = \sigma + \tau$ بنابراین $dt = d\sigma$ در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] \odot \mathcal{L}[q(t)] &= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-st} \odot f(\tau) \odot q(t-\tau) dt \right) d\tau \\ &= \left(\int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f_1(\tau) q(t-\tau) dt d\tau, \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f_2(\tau) q(t-\tau) dt d\tau, \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f_3(\tau) q(t-\tau) dt d\tau \right). \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به قضیه 2-3 در رفرنس [21] معادله فوق را به صورت زیر باز نویسی می کنیم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] \odot \mathcal{L}[q(t)] &= \\ &= \left(\int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f_1(t-\tau) q(\tau) d\tau dt, \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f_2(t-\tau) q(\tau) d\tau dt, \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f_3(t-\tau) q(\tau) d\tau dt \right) \\ &= \left(\int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f_1(t-\tau) q(\tau) d\tau \right) dt, \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f_2(t-\tau) q(\tau) d\tau \right) dt, \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f_3(t-\tau) q(\tau) d\tau \right) dt \right). \end{aligned}$$

و در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] \odot \mathcal{L}[q(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} \odot \left(\int_0^t f(\tau) \odot q(t-\tau) d\tau \right) dt \\ &= \mathcal{L}[(f * q)(t)]. \end{aligned}$$

لذا اثبات کامل است. $\square$

3-2-10 مثال: فرض کنید که تابع فازی $f(t) = (2t + 1, 5t + 4, 6t + 8)$ و $q(t) = t^2$ است. با استفاده از قضیه 3-2-9 داریم

$$\mathcal{L}[(f * q)(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \odot \mathcal{L}[q(t)].$$

لذا $\mathcal{L}[q(t)] = \frac{1}{s^3}$ و $\mathcal{L}[f(t)] = (\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}, \frac{5}{s^2} + \frac{4}{s}, \frac{6}{s^2} + \frac{8}{s})$ است در نتیجه

$$\mathcal{L}[(f * q)(t)] = (\frac{2}{s^5} + \frac{1}{s^4}, \frac{5}{s^5} + \frac{4}{s^4}, \frac{6}{s^5} + \frac{8}{s^4}).$$

است.

3-2-11 قضیه مشتق مرتبه اول لاپلاس فازی کسری

فرض کنید $f(t)$ تابعی مقدار فازی روی بازه $[0, \infty)$ و α عددی حقیقی باشد به طوری که $0 < \alpha \leq 1$ آنگاه

1: اگر $f(t)$ تابعی ${}^{CF}[(i) - gH] -$ دیفرانسیل پذیری روی بازه $[0, \infty)$ باشد آنگاه

$$\mathcal{L}_{i.gH}^C \mathcal{D}_0^\alpha f(t) = s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] \ominus s^{\alpha-1} f(0).$$

2: اگر $f(t)$ تابعی ${}^{CF}[(ii) - gH] -$ دیفرانسیل پذیر روی بازه $[0, \infty)$ باشد آنگاه

$$\mathcal{L}_{ii.gH}^C \mathcal{D}_0^\alpha f(t) = (-1)s^{\alpha-1} f(0) \ominus_{gH} (-1)s^\alpha \mathcal{L}[f(t)].$$

برهان: فرض کنید $f(t)$ تابعی مثلثی و ${}^{CF}[(i) - gH] -$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه داریم

$$\begin{aligned} {}^C_{i.gH} \mathcal{D}_0^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \odot f'_{i.gH}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t^{-\alpha} * f'_{i.gH}(t)). \end{aligned}$$

با استفاده از قضایای 3-2-6 و 3-2-9 داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[i.gH]}^C \mathcal{D}_0^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathcal{L}[t^{-\alpha}] \odot \mathcal{L}[f'_{i.gH}(t)] \\ &= s^\alpha \mathcal{L}[f(t)] \ominus s^{\alpha-1} f(0).\end{aligned}$$

اثبات قسمت دوم قضیه به صورت مشابه به راحتی حاصل می شود. □

3-3 تبدیلات فوریه فازی

تبدیلات فوریه فازی یکی از مباحث مورد توجه علوم مهندسی بویژه مهندس برق و قدرت می باشد و در بسیاری از مدل بندی های این علوم در نهایت برای یافتن جواب به این تبدیلات متوصل می شوند لذا بررسی همه جانبه این تبدیلات بسیار لازم است در این بخش تبدیلات فوریه فازی به طور کامل بررسی شده و قضایای مورد نیاز به اثبات رسیده شده است، برخی از مطالب این بخش با استناد به رفرنس [21] نوشته شده است.

3-3-1 تبدیلات فوریه فازی

فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_T$ باشد. تبدیل فوریه فازی تابع $f(t)$ به صورت معادله

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \odot e^{ikt} dt = F(k), \quad (3-3)$$

معرفی می شود.

3-3-2 تبدیل فوریه معکوس فازی

تبدیل فوریه معکوس فازی تابع $F(k)$ به فرم

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \odot e^{-ikt} dk = f(t).$$

تعریف می شود.

3-3-3 گزاره: فرض کنید $f(t)$ تابعی فازی و آر-برش تابع به صورت $f(t; r) = [f^-(t; r), f^+(t; r)]$

باشد آنگاه تبدیل فوریه آن به صورت

$$\mathcal{F}[f(t; r)] = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^-(t; r) e^{-ikt} dt, \int_{-\infty}^{\infty} f^+(t; r) e^{-ikt} dt \right],$$

تعریف می شود.

3-3-4 قضیه مشتق مرتبه اول تبدیل فوری فازی

فرض کنید $f(t)$ و $f'_{gH}(t)$ توابعی مقدار فازی، مطلقا انتگرال پذیر روی بازه $(-\infty, \infty)$ باشد آنگاه

1: اگر $f(t)$ تابعی $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\mathcal{F}[f'_{i.gH}(t)] = \ominus ik \mathcal{F}[f(t)].$$

2: اگر $f(t)$ تابعی $-(ii) - gH$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\mathcal{F}[f'_{ii.gH}(t)] = (-1)ik \mathcal{F}[f(t)].$$

برهان: فرض می کنیم $f(t)$ تابعی $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه با استفاده از تعریف (3-3-1) داریم

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \odot e^{-ikt} dk.$$

اکنون با استفاده از تعریف 2-2-22 می توان نشان داد

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \odot \frac{\partial}{\partial t} (e^{-ikt}) dk$$

که همگرای یکنواخت است. از اینرو با استفاده از قضیه 2-2-19 داریم

$$\begin{aligned} f'_{i.gH}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \odot e^{-ikt} dk \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \odot \frac{\partial}{\partial t} (e^{-ikt}) dk. \end{aligned}$$

از آنجایی که $f(t)$ تابعی $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر است با استفاده از نتیجه 2-2-21 داریم

$$\begin{aligned} f'_{i.gH}(t) &= \frac{\ominus ik}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \odot e^{-ikt} dk \\ &= \ominus ik f(t). \end{aligned}$$

و با توجه به تعریف تبدیلات فوری فازی نتیجه دلخواه حاصل می شود و قسمت دوم قضیه هم به روش مشابه

به آسانی حاصل می شود، لذا اثبات کامل است. $\square$

5-3-3 لم

اگر p عددی فازی مثلی و $\delta(t)$ تابع حقیقی (دلتای دیراک) باشد آنگاه

$$\mathcal{F}[p \odot \delta(t)] = p.$$

برهان: بر طبق تعریف تبدیل فوری فازی داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[p \odot \delta(t)] &= p \odot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{ikt} dt \\ &= p \odot \mathcal{F}[\delta(t)] = p.\end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ است [24]، لذا اثبات کامل است. $\square$

4-3 جواب های فازی مسئله کسری-زمان

در این بخش می خواهیم جواب های صریح معادله کسری زمان فازی (4-3) را به دست آوریم. معادله

$${}^C_{gH} \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (3-4)$$

را در نظر بگیرید که در آن $0 < \alpha \leq 1$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ ثابتی حقیقی و مثبت است به طوری که $\lambda \neq 0$ می باشد. در

رساله حاضر ${}^C_{gH} \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x)$ مشتق تعمیم یافته هاکوهارای کاپتو از مرتبه α نسبت به t به صورت معادله (3-)

(5) تعریف می شود

$${}^C_{gH} \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (3-5)$$

که در آن $0 < \alpha \leq 1$ است [35]. در معادله (3-5) عبارت $\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau}$ معرف مشتق جزئی تعمیم یافته هاکوهارای

تابع $u(\tau, x)$ نسبت به τ می باشد و در معادله (3-4) عبارت $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}$ معرف مشتق جزئی تعمیم یافته

هاکوهارای تابع $u(t, x)$ نسبت به x است که به صورت

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h, x) \ominus_{gH} u(t, x)}{h}.$$

تعریف می شود. اکنون می خواهیم جواب فازی صریح معادله دیفرانسیل کسری خطی فازی با مشتقات جزئی

(4-3) را به دست آوریم برای این منظور شرایط مرزی

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0, \quad u(0+, x) = g(x). \quad (3-6)$$

را در نظر می گیریم که در آن $g(x)$ تابعی پیوسته مثلثی فازی است.

اکنون فرض کنید $u(t, x)$ جواب صریح فازی مسئله (3-4) باشد بطوری که نوع $[gH - p]^{CF}$ -دیفرانسیل پذیری نسبت t با نوع $[gH - p]$ -دیفرانسیل پذیری نسبت به x در آن یکسان باشد.

جواب صریح فازی معادله (3-4) با شرایط مرزی (3-6) با استفاده از تبدیل لاپلاس فازی تابع $u(t, x)$ نسبت به t به صورت

$$\mathcal{L}_t[u(t, x)] = \int_0^\infty e^{-st} \odot u(t, x) dt = U_t(s, x), \quad (3-7)$$

معرفی می شود که این معادله به ازای هر مقدار ثابت $x \in \mathbb{R}$ در نظر گرفته می شود و تبدیل فوری فازی نسبت به x و با ازای هر مقدار ثابت $t > 0$ به صورت

$$\mathcal{F}_x[u(t, x)] = \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \odot u(t, x) dx = \mathcal{U}_x(t, k), \quad (3-8)$$

معرفی می شود. با استفاده از تعاریف بخش (3-2) و (3-3)، تبدیلات لاپلاس معکوس فازی و فوری معکوس فازی به صورت

$$\mathcal{L}_s^{-1}[U_t(s, x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \odot U_t(s, x) ds, \quad \mathcal{F}_k^{-1}[\mathcal{U}_x(t, k)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} \odot \mathcal{U}_x(t, k) dk$$

می باشد به طوری که معادلات

$$\mathcal{L}_s^{-1} \mathcal{L}_t[u(t, x)] = u(t, x), \quad \mathcal{F}_k^{-1} \mathcal{F}_x[u(t, x)] = u(t, x).$$

موجود باشند. فرض کنید $\mathcal{LF}$ نشان دهنده فضای همه توابع $u(t, x)$ باشد به طوری که تبدیلات لاپلاس فازی و تبدیلات فوری فازی برای آنها وجود دارد و به فرم معادلات (3-9) معرفی می شوند.

$$\tilde{u}(s, k) := \mathcal{F}_x \mathcal{L}_t[u(t, x)] = \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty e^{-st} e^{ikx} \odot u(t, x) dt dx, \quad t > 0. \quad (3-9)$$

1-4-3 لم

اگر $g(x)$ تابعی فازی باشد به طوری که تبدیل فوری فازی آن به صورت $G(k)$ موجود باشد. آنگاه جواب مسئله (3-4) با شرایط مرزی (3-6) به صورت

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} s^{\alpha-1} \odot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(K)}{s^{\alpha} + i\lambda k} e^{-ikx} dk \right) ds \quad (3-10)$$

است به شرط آنکه انتگرال سمت راست تساوی (3-10) موجود باشد.

برهان: فرض کنید $u(x, t)$ تابعی ${}^{CF}[i - gH]$ دیفرانسیل پذیر نسبت به t و $[(i) - p]$ دیفرانسیل پذیر نسبت به x باشد

$${}^C_{i, gH} \mathcal{D}_t^{\alpha} u(t, x) = \lambda \odot \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}. \quad (3-11)$$

اکنون تبدیل لاپلاس فازی نسبت به t به را برای معادله (3-11) بکار می بریم

$$s^{\alpha} \mathcal{L}_i[u(t, x)] \odot s^{\alpha-1} g(x) = \lambda \odot \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}_i[u(t, x)]). \quad (3-12)$$

با استفاده از تبدیل فوری فازی و قضیه 3-2-11 داریم

$$s^{\alpha} \tilde{u}(s, k) \odot s^{\alpha-1} G(k) = \odot_{gH} i \lambda \odot k \tilde{u}(s, k), \quad (3-13)$$

بنابراین

$$\tilde{u}(s, k) = \frac{s^{\alpha-1} \odot G(k)}{s^{\alpha} + i\lambda k}. \quad (3-14)$$

و با بکار بردن تبدیلات معکوس لاپلاس فازی و فوری فازی بر روی معادله (3-14) جواب (3-10) حاصل می شود.

اکنون فرض می کنیم که $u(x, t)$ تابعی ${}^{CF}[ii - gH]$ دیفرانسیل پذیر نسبت به t و $[(ii) - p]$ دیفرانسیل پذیر نسبت به x باشد

$${}_{ii.gH}^C \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) = \lambda \odot \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad (3-15)$$

اکنون از طرفین معادله (3-15) تبدیل لاپلاس فازی نسبت t گرفته و با بکار بردن قضیه 3-2-11 داریم

$$(-1)s^{\alpha-1}g(x) \odot (-1)s^\alpha \mathcal{L}_i[u(t, x)] = \lambda \odot \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L}_i[u(t, x)]).$$

با استفاده از تبدیل فوری فازی و استفاده از قضیه 3-3-4 داریم

$$(-1)s^{\alpha-1}G(k) \odot (-1)s^\alpha \odot \tilde{u}(s, k) = (-1)i\lambda k \tilde{u}(s, k).$$

بنابراین با ضرب (1-) در رابطه فوق داریم

$$\tilde{u}(s, k) = \frac{s^{\alpha-1} \odot G(k)}{i\lambda k + s^\alpha}. \quad (3-16)$$

و با بکار بردن تبدیلات معکوس لاپلاس فازی و فوری فازی بر روی معادله (3-16) جواب (3-10) حاصل می شود لذا اثبات کامل است. $\square$

برای سهولت در محاسبات در لم های زیر جواب های به دست آمده از لم 3-4-1 را ساده سازی می کنیم. برای این منظور تابع میتگ-لفلر [20] را به صورت

$$E_\alpha(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}. \quad (3-17)$$

معرفی نموده و در لم های 3-4-2 و 3-4-3 استفاده می کنیم.

3-4-2 لم

اگر $g(x)$ تابعی فازی باشد به طوری که تبدیل فوری فازی آن به صورت $G(k)$ موجود باشد و $E_\alpha(\mu t^\alpha)$ تابع میتگ-لفلر باشد. آنگاه $u(t, x) \in \mathcal{LF}$ جواب مسئله (3-4) با شرایط مرزی (3-6) به صورت

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_\alpha(-i\lambda k t^\alpha) G(k) \odot e^{-ikx} dk, \quad (3-18)$$

است به شرط آنکه انتگرال سمت راست تساوی (3-18) موجود باشد.

برهان: فرض کنید $u(x, t)$ تابعی $[i - gH]^{-CF}$ دیفرانسیل پذیر نسبت به t و $[(i) - p]$ دیفرانسیل پذیر نسبت به x باشد با بکاربردن تبدیل لاپلاس فازی نسبت t بر روی معادله (3-14) داریم

$$\mathcal{F}_x[u(t, x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{st} s^{\alpha-1} \odot G(k)}{s^{\alpha} + i\lambda k} ds.$$

از طرفی بر طبق رفرنس [20] تبدیل لاپلاس تابع میتگ-لفلر $E_{\alpha}(\mu t^{\alpha})$ به صورت

$$\mathcal{L}[E_{\alpha}(\mu t^{\alpha})] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} - \mu}, \quad (|\mu s^{-\alpha}| < 1).$$

می باشد. فرض می کنیم $\mu = -i\lambda k$ باشد در نتیجه داریم

$$\mathcal{F}_x[u(t, x)] = E_{\alpha}(-i\lambda k t^{\alpha}) \odot G(k).$$

و با بکار بردن تبدیلات معکوس لاپلاس فازی و فوریه فازی بر روی معادله (3-18) و با توجه به اینکه جواب حاصل در شرط

$$u(0+, x) = g(x)$$

صدق می کند زیرا

$$u(0, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(0) e^{-ikx} \odot G(k) dk,$$

و $E_{\alpha}(0) = 1$ است نتیجه دلخواه حاصل می شود. حالت دوم قضیه نیز به روش مشابه به اسانی حاصل می شود لذا اثبات کامل است. $\square$

3-4-3 لم

اگر $g(x)$ تابعی فازی باشد به طوری که

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g^{(j)}(x) = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

آنگاه جواب مسئله (3-4) با شرایط مرزی (3-6) به صورت

$$u(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \odot g_{gH}^{(j)}(x), \quad (3-19)$$

است به شرط آنکه سری (3-19) به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ و هر $t > 0$ همگرا باشد.

برهان: با توجه به لم 3-4-2 جواب مسئله (3-4) به صورت

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_{\alpha}(-i \lambda k t^{\alpha}) G(k) \odot e^{-ikx} dk, \quad (3-20)$$

با جایگذاری معادله (3-17) در معادله (3-20) داریم

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-i \lambda k t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right] G(k) \odot e^{-ikx} dk \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^{\alpha})^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik)^j G(k) \odot e^{-ikx} dk \right). \end{aligned} \quad (3-21)$$

بر طبق رفرنس [20] به ازای هر $t \in \mathbb{C}$ ، سری توانی نشان دهنده همگرایی یکنواخت تابع میتگ-لفلر است لذا با جابجایی ترتیب انتگرال و با بکار بردن قضیه 3-3 از رفرنس [21] داریم

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-ik)^j G(k) \odot e^{-ikx} dk = \frac{\partial^j}{\partial x^j} (\mathcal{F}_k^{-1}[G(x)]) = g_{gH}^{(j)}(x). \quad (3-22)$$

و با مقایسه معادله (3-21) و معادله (3-22)، جواب به صورت معادله (3-19) حاصل می شود، لذا اثبات کامل است. $\square$

3-4 الگوریتم روش

در این بخش الگوریتم روش پیشنهادی رساله حاضر در جهت روشن تر شدن مراحل روش تحلیلی به شرح زیر ارائه می شود.

1. معادله دیفرانسیل کسری فازی با مشتقات جزئی در نظر گرفته می شود.
2. مفروضات مسئله همانند توابع و ضرائب فازی یا حقیقی و شرایط مرزی مسئله در نظر گرفته می شود.
3. فرض می کنیم نوع ${}^{CF}[gH - p]$ دیفرانسیل پذیری نسبت t با نوع $[gH - p]$ - دیفرانسیل پذیری نسبت به x در معادله یکسان باشد.

4. نوع مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوها را تابع مشخص می شود.
5. از طرفین معادله دیفرانسیل کسری فازی با مشتقات جزئی تبدیل لاپلاس فازی می گیریم.
6. از طرفین معادله به دست آمده از گام پنجم تبدیل فوریه فازی می گیریم.
7. معادله دیفرانسیل فازی با مشتقات جزئی تبدیل به معادله دیفرانسیل فازی با مشتقات معمولی می شود.
8. با استفاده از روشهایی که برای حل معادلات دیفرانسیل فازی با مشتقات معمولی است جواب معادله را به دست می آوریم.

9. از جواب به دست آمده از گام هشتم، معکوس لاپلاس فازی گرفته می شود
10. از جواب به دست آمده از گام نهم، معکوس فوریه فازی گرفته می شود
11. جواب صریح معادله دیفرانسیل کسری فازی با مشتقات جزئی به دست می آید.

فصل چهارم

مثال های عددی

4-1 مقدمه

این بخش از رساله با بیان مثال های عددی از معادلات دیفرانسیل کسری فازی تحت انواع مشتق پذیری تعمیم یافته و ارائه شکل ها در جهت نشان دادن کارایی روش پیشنهادی رساله تنظیم شده است. برنامه های نوشته شده در این بخش با استفاده از نرم افزار ممتیکا بوده است.

4-2 مثال های عددی

4-2-1 معادله دیفرانسیل فازی کسری با مشتقات جزئی

$$\begin{cases} {}^C_{gH} \mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} u(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, & (t > 0, x \in \mathbb{R}), \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ u(0+, x) = (2x^2, 4.2x^2, 6.6x^2) \end{cases} \quad (4-1)$$

با استفاده از لم 2-4-3، معادله (3-18) و تعریف 2-15-2 برای مسئله (1-4) جواب فازی

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} E_{\frac{1}{2}}(-ikt^{\frac{1}{2}}) \mathcal{F}[2x^2] \odot e^{-ikx} dk, \int_{-\infty}^{\infty} E_{\frac{1}{2}}(-ikt^{\frac{1}{2}}) \mathcal{F}[4.2x^2] \odot e^{-ikx} dk, \int_{-\infty}^{\infty} E_{\frac{1}{2}}(-ikt^{\frac{1}{2}}) \mathcal{F}[6.6x^2] \odot e^{-ikx} dk \right),$$

داریم بنابراین

$$u(t, x) = \left(4t + \frac{(8x\sqrt{t})}{\sqrt{\pi}} + 2x^2, 8.4t + 9.47839x\sqrt{t} + 4.2x^2, 13.2t + 14.8946x\sqrt{t} + 6.6x^2 \right).$$

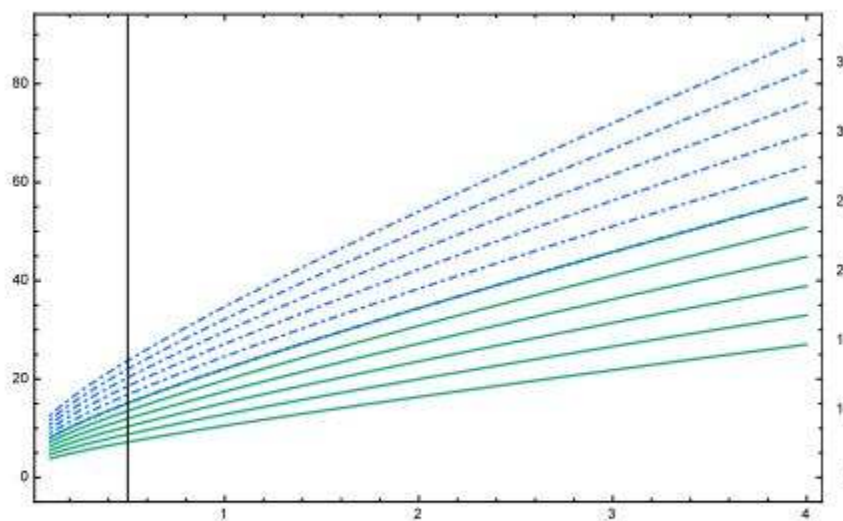
برای آنکه رفتار دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته تابع جواب را نشان دهیم آر-برش جواب را به صورت

$$u(t, x; r) = \left[4t + \frac{(8x\sqrt{t})}{\sqrt{\pi}} + 2x^2 + r(4.4t + 4.96487\sqrt{t}x + 2.2x^2), 13.2t + 14.8946x\sqrt{t} + 6.6x^2 - r(4.8t + 5.41621\sqrt{t}x + 2.4x^2) \right].$$

نشان می دهیم لذا داریم

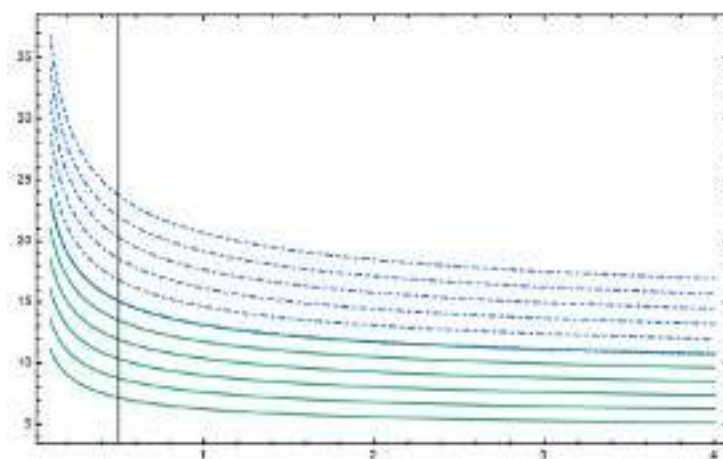
$${}^C_{gH} \mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} u(t, x; r) = \left[4 + \frac{2.25676x}{\sqrt{t}} + r \left(4.4 + \frac{2.48244x}{\sqrt{t}} \right), 13.2 + \frac{7.4473x}{\sqrt{t}} + r \left(-4.8 - \frac{2.70811x}{\sqrt{t}} \right) \right].$$

همانطور که در شکل ها مشخص است آر-برش تابع جواب برای هر $x = 1$ و در شکل 1-4 نشان داده شده است که در آن آر-برش پایین به رنگ سبز و آر-برش بالا به رنگ آبی مشخص است لذا در شکل 2-4 جای برش ها تغییر کرده است و این نشان دهنده آن است که تابع $u(t, x)$ تابعی $[ii - gH]^{CF}$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t است.



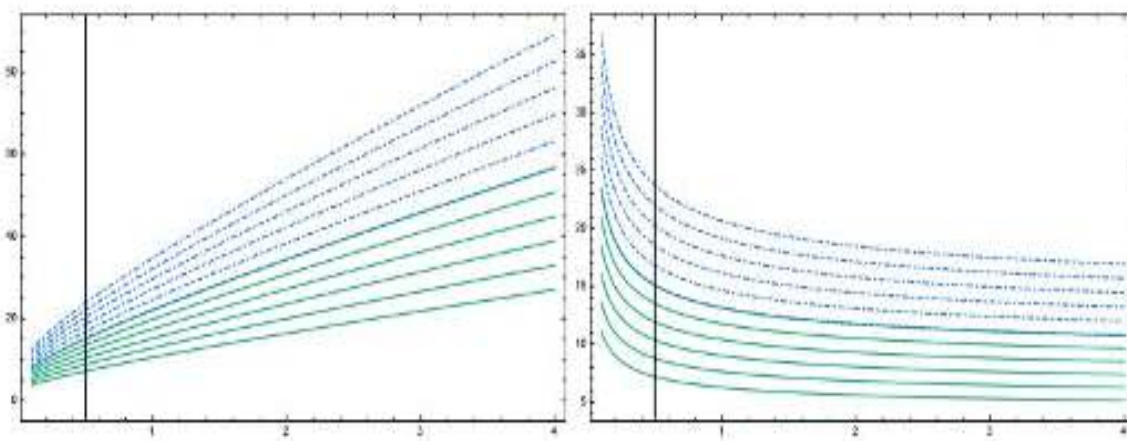
(a). $u(t, x)$.

شکل 1-4: نمایشی از تابع $u(t, x)$ در نقطه جواب دقیق در $x = 1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 1-2-4



(b). $C_{gH} D_t^{\frac{1}{2}} u(t, x)$.

شکل 2-4: نمایشی از تابع $C_{gH} D_t^{\frac{1}{2}} u(t, x)$ در نقطه جواب دقیق در $x = 1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 1-2-4



(a). $u(t, x)$.

(b). $C_{gH} D_t^{\frac{1}{2}} u(t, x)$.

شکل 3-4: نمایش مقایسه ای از تابع $C_{gH} D_t^{\frac{1}{2}} u(t, x)$ و تابع $u(t, x)$ مسئله 1-2-4

2-4-2 معادله دیفرانسیل کسری فازی (2-4) را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} {}^C_{gH} \mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} u(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, & (t > 0, x \in \mathbb{R}) \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, & u(0+, x) = (x^3, \sqrt{3}x^3, 2\sqrt{2}x^3) \end{cases} \quad (4-2)$$

با استفاده از لم 2-4-3، معادله (3-18) و تعریف 2-2-15 برای مسئله (4-2) جواب فازی به صورت

$$u(t, x) = \left(6tx + x^3 + \frac{(2\sqrt{t}(4t + 3x^2))}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{3} \left(6tx + x^3 + \frac{(2\sqrt{t}(4t + 3x^2))}{\sqrt{\pi}} \right), 2\sqrt{2} \left(6tx + x^3 + \frac{(2\sqrt{t}(4t + 3x^2))}{\sqrt{\pi}} \right) \right).$$

حاصل می شود. برای تعیین نوع دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته جواب بالا ما از معادله فوق مشتق تعمیم یافته کاپتو از مرتبه α نسبت به t و مشتق جزئی ها کوهارای تعمیم یافته نسبت به x می گیریم لذا داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= {}^C_{gH} \mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} u(t, x) \\ &= \left(3(2t + \frac{(4\sqrt{t}x)}{\sqrt{\pi}} + x^2), 3\sqrt{\frac{3}{\pi}}(4\sqrt{t}x + \sqrt{\pi}(2t + x^2)), 6\sqrt{\frac{2}{\pi}}(4\sqrt{t}x + \sqrt{\pi}(2t + x^2)) \right) \end{aligned}$$

این جواب $[ii - gH]^{CF}$ دیفرانسیل پذیر نسبت به t و $[i - p]$ دیفرانسیل پذیر نسبت به x است.

4-2-3 معادله دیفرانسیل کسری فازی (4-3) را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} {}^C_{gH} \mathcal{D}_t^\alpha u(t, x) = \lambda \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, & u(0+, x) = (e^{-\mu x}, 2.2e^{-\mu x}, 5.3e^{-\mu x}), \quad (\mu > 0) \end{cases} \quad (4-3)$$

تمام شرایط لم 3-4-3 برای این معادله صدق می کند لذا بر طبق نتایج حاصل از لم 3-4-3 جواب فازی به فرم

$$u(t, x) = (e^{-\mu x} E_\alpha(-\mu \lambda t^\alpha), 2.2e^{-\mu x} E_\alpha(-\mu \lambda t^\alpha), 5.3e^{-\mu x} E_\alpha(-\mu \lambda t^\alpha)),$$

حاصل می شود، در حالت خاص معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید

$${}_{gH}^C \mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} u(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad u(0+, x) = (2e^{-2x}, 3.6e^{-2x}, 6.4e^{-2x}),$$

که در آن $\mu = 2$ ، $\alpha = \frac{1}{2}$ ، و $\lambda = 1$ است در نتیجه داریم

$$u(t, x) = (2e^{4t-2x} \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}], 3.6e^{4t-2x} \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}], 6.4e^{4t-2x} \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}]). \quad (4-2)$$

که در آن $\operatorname{Erfc}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} dt$ است. برای تعیین نوع دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته جواب بالا

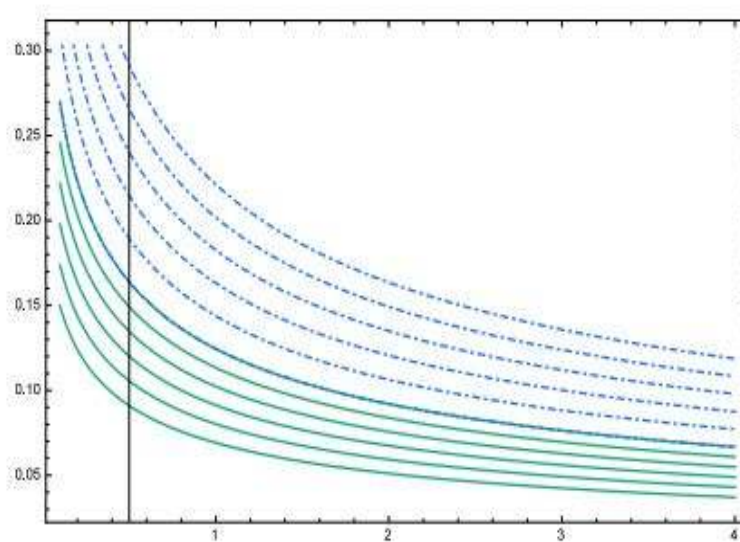
$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} &= {}_{gH}^C \mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}} u(t, x) \\ &= -(4e^{(4t-2x)} \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}], 7.2e^{(4t-2x)} \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}], 12.8e^{(4t-2x)} \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}]). \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می کنید این جواب ${}^{CF}[ii - gH]$ - دیفرانسیل پذیر نسبت به t و $[i - p]$ - دیفرانسیل

پذیر نسبت به x است برای رسم این جواب الفابرهش به صورت

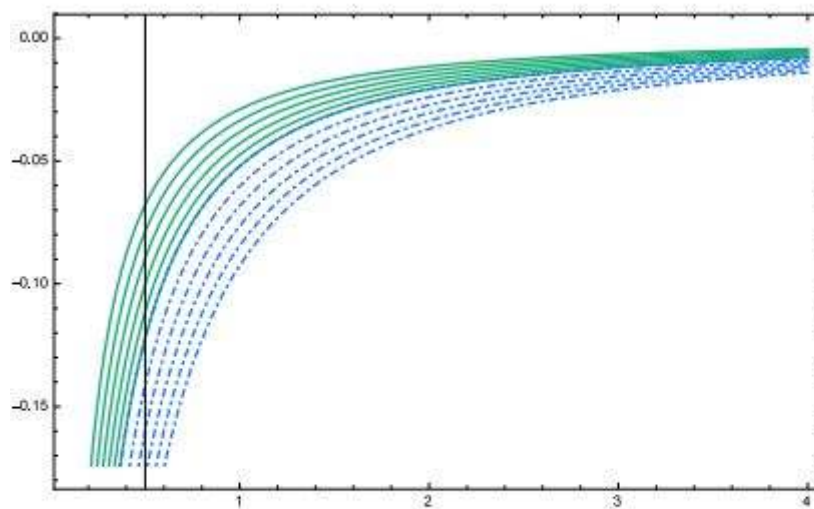
$$u(t, x; \alpha) = [e^{4t-2x} (2 + 1.6\alpha) \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}], e^{4t-2x} (6.4 - 2.8\alpha) \operatorname{Erfc}[2\sqrt{t}]].$$

برای رسم شکل جواب، آلفا کات جواب را به صورت هر $x = 1$ و در شکل (4-4) الفاکات پایین به رنگ سبز و آلفاکات بالا به رنگ آبی برای نشان دهنده عدم تغییر جای کات ها می باشد و این نشان دهنده آن است که تابع $u(t, x)$ تابعی ${}^{CF}[i - gH]$ - دیفرانسیل پذیر نسبت به t است.



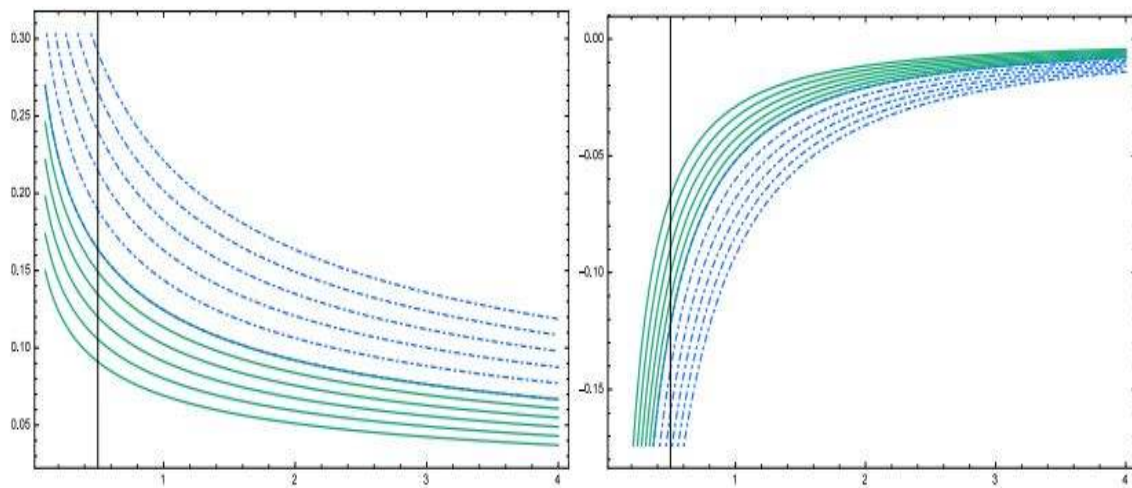
(a). $u(t, x)$.

شکل 4-4: نمایشی از تابع $u(t, x)$ در نقطه جواب دقیق در $x = 1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 3-2-4



(b). ${}^{C}_{gH}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t, x)$.

شکل 4-5: نمایشی از تابع ${}^{C}_{gH}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t, x)$ در نقطه جواب دقیق در $x = 1$ به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ برای مسئله 3-2-4



(a). $u(t, x)$.

(b). ${}^C_{gH}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t, x)$.

شکل 4-6: نمایش مقایسه ای از تابع ${}^C_{gH}\mathcal{D}_t^{\frac{1}{2}}u(t, x)$ و تابع $u(t, x)$ مسئله 3-2-4.

فصل پنجم

نتایج و پیشنهادات حاصل از تحقیق

1-5 مقدمه

در فصل حاضر از رساله نتایج مستخرج از تحقیق بررسی می شود و نهایتا پیشنهاداتی به منظور توسعه تحقیقات آتی ارائه می شود.

2-5 نتایج حاصل از تحقیق

در این رساله با معرفی معادلات دیفرانسیل کسری فازی به روش حل این معادله بر اساس روش های صریح و یافتن جواب های اساسی این نوع معادلات تحت انواع دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته ها کوهارا پرداخته شده است. لذا موارد زیر به روشنی از تحقیقات این رساله حاصل می شود.

- یافتن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از تبدیلات انتگرالی امکان پذیر است.
- معادلات دیفرانسیل کسری فازی با استفاده همزمان از روش های تبدیلات فوریه و لاپلاس فازی به خوبی حل می شوند
- جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل کسری فازی زمان- کسری به راحتی با استفاده از تبدیلات انتگرالی فازی به دست می آید.
- استفاده از تبدیلات انتگرالی فازی یک روش کارا و موثر برای یافتن جواب های صریح و اساسی معادلات دیفرانسیل کسری فازی است.
- جواب های اساسی به دست آمده از روش تبدیلات انتگرالی فازی تحت انواع دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته ها کوهارا به راحتی محاسبه می شود.

3-5 پیشنهادات

- با توجه به استفاده گسترده از معادلات دیفرانسیل کسری در سایر علوم لزوم یافتن جواب های دقیق این نوع معادلات بسیار روشن است در این راستا پیشنهادات زیر برای پژوهشهای آتی مورد نظر است.
- استفاده از سایر تبدیلات انتگرالی برای یافتن جواب معادلات دیفرانسیل کسری فازی تحت انواع مشتق پذیری.

- استفاده از روش های تبدیلات انتگرالی فازی برای معادلات دیفرانسیل انتگرال فازی.
- استفاده از روش تبدیلات انتگرالی فازی برای یافتن جواب های معادلات دیفرانسیل هیبریدی فازی.
- استفاده از سایر روش هایی که به یافتن جواب های تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل کسری فازی می انجامد.
- بکار بردن روش های تحلیلی برای معادله دیفرانسیل فازی کسری باگلی تورویک^{۲۳}.

²³Fuzzy Bagley Torvik

- [1] Agarwal, R.P, Arshad, S., ORegan, D., Lupulescu, V., Fuzzy fractional integral equations under compactness type condition, Fract. Calc. Appl. Anal, 15 (2012) 572-590.
- [2] Arshad, S., Lupulescu, V., On the fractional differential equations with uncertainty, Nonlinear Anal, 75 (2011) 3685-3693.
- [3] Allahviranloo, T., Ahmadi, M.B., Fuzzy Laplace transforms, Soft Comput, 14 (2010) 235-243.
- [4] Allahviranloo, T., Armand, A., Gouyandeh, Z., Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 26 (2014) 1481-1490.
- [5] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A., and Hasanoglu, A., On fuzzy solutions for heat equation based on generalized hukuhara differentiability. Fuzzy Sets and Systems, 265 (2015) 1-23.
- [6] Allahviranloo, T., Salahshour, S., Abbasbandy, S., Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty, Soft Comput, 16 (2012) 297-302.
- [7] Allahviranloo, T., Barkhordari Ahmadi, M., Fuzzy Laplace transforms. Soft Comput 14 (2010) 235-243.
- [8] Arqub, O.A., Al-Smadi, M., Fuzzy conformable fractional differential equations: novel extended approach and new numerical solutions. Soft Comput 24(2020)12501-12522.
- [9] Arqub, O.A., Adaptation of reproducing kernel algorithm for solving fuzzy FredholmVolterra integro-differential equations. Neural Comput & Applic

28(2017)1591-1610.

[10] Arqub, O.A., Al-Smadi, M., Momani, S., Hayat, T. Application of reproducing kernel algorithm for solving second-order, two-point fuzzy boundary value problems. *Soft Comput* 21(2017) 7191-7206.

[11] Arqub, O.A., AL-Smadi, M., Momani, S., Hayat, T. Numerical solutions of fuzzy differential equations using reproducing kernel Hilbert space method. *Soft Comput* 20(2016)3283-3302

[12] Alikhani, R., Bahrami, F., Fuzzy partial differential equations under the cross product of fuzzy numbers, *Information Sciences*, 494 (2019) 80-99.

[13] Anastassiou, G.A., *Fuzzy Mathematics: Approximation Theory*. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Berlin Heidelberg, (2010).

[14] Bede, B., *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic*, Springer, London, (2013).

[15] Bede, B., Stefanini, L., Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, *Fuzzy Sets Syst.* 230(0) (2013) 119-141.

[16] Bede, B., Gal, S.G, Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 151 (3) (2005) 581-599.

[17] Bertone, A.M., Jafelice, R.M., de Barros L.C., Bassanezi, R.C., On fuzzy solutions for partial differential equations, *Fuzzy SetsandSystems*, 219 (2013)68-80.

[18] Buckley, J.J., Feuring , T., Introduction to fuzzy partial differential equations, *Fuzzy Sets and Systems*, 105 (1999) 241-248.

- [19] Chalco-Cano, Y., Maqui-Huaman , Gino G., Silva, G.N., Jimenez-Gamero, D., Algebra of generalized Hukuhara differentiable interval-valued functions: review and new properties, 375, 15, 2019, 53-69.
- [20] Ge, F., Chen, Y., Kou, C., Regional Analysis of Time-Fractional Diffusion Processes, Springer International Publishing, (2018).
- [21] Gouyandeh, Z., Allahviranloo, T., Abbasbandy, S., Armand, A., A fuzzy solution of heat equation under generalized Hukuhara differentiability by fuzzy Fourier transform, Fuzzy Sets and Systems, 309 (2017) 81-97.
- [22] Ho, N.V., Vu, H. , Minh Duc, T. , Fuzzy fractional differential equations under Caputo-Katugampola fractional derivative approach, Fuzzy Sets and Systems, 375 (2019) 70-99.
- [23] Ho, N.V., Fuzzy fractional functional integral and differential equations, Fuzzy Sets and Systems, 280 (2015) 58-90.
- [24] Hukuhara, M., Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convex, Funkcialaj Ekvacioj, 10 (1967) 205-223.
- [25] Kaleva, O., Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, 24 (3) (1987) 301-317.
- [26] Kaufmann, A., Gupta, M.M., Introduction Fuzzy Arithmetic, Van Nostrand Reinhold, New York, (1985).
- [27] Lakshmikantham, V., Bhaskar, T., Devi, J., Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces, Cambridge Scientific Publishers, (2006).
- [28] Puri, M.L., Ralescu, D.A., Differentials of fuzzy functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 91 (2) (1983) 552-558.

- [29] Rahman, M., Applications of Fourier Transforms to Generalized Functions, WIT Press, (2011).
- [30] Thi, N. So,n Kim, A foundation on semigroups of operators defined on the set of triangular fuzzy numbers and its application to fuzzy fractional evolution equations, Fuzzy Sets and Systems, 347 (2018) 1-28.
- [31] Salahshour, S., Allahviranloo, T., Abbasbandy, S., Solving fuzzy fractional differential equations by fuzzy Laplace transforms, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 17 (2012) 1372-1381.
- [32] Salahshour, S., Allahviranloo, T., Applications of fuzzy Laplace transforms, Soft Comput, 17 (1) (2013) 145-158.
- [33] Salahshour, S., Allahviranloo, T., Applications of fuzzy Laplace transforms, Soft Comput, 17 (1) (2013) 145-158.
- [34] Stefanini, L., A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, Fuzzy Sets Systems, 161 (11) (2010) 1564-1584.
- [35] Viet Long , H., Thi Kim Son, N., Thi Thanh Tam, H., The solvability of fuzzy fractional partial differential equations under Caputo gH-differentiability, Fuzzy Sets and Systems, 309 (2017) 35-63.
- [36] Van Hoa, N., Fuzzy fractional functional differential equations under Caputo gH-differentiability, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 22 (2015) 1134-1157.
- [37] Zadeh L.A, Fuzzy sets, Information and Computation, Vol 8, 338-353, (1965).

Absolutely converges	همگرایی مطلق
Bounded function	تابع کراندار
Caputo generalized Hukuhara derivative	مشتق تعمیم یافته هاگوهاری کاپتو
Constant number	اعداد ثابت
Core	هسته
Collocation method	روش نقطه گذاری
Convergence Analysis	آنالیز همگرایی
Cut	برش
Crisp	غیرفازی
Differentiability	مشتق پذیری
Existence	وجود
Exponential order	مرتبه نمایی
Explicit Solution	جواب صریح
Fuzzy	فازی
Fuzzy number	اعداد فازی
Fuzzy Mean Value	مقدار میانی فازی

Fuzzy valued function	توابع مقدار فازی
Fuzzy fractional differential equation	معادلات دیفرانسیل کسری فازی
Fuzzy Riemann-Liouville integral	انتگرال ریمن لیوویل کسری
Fuzzy Caputo fractional derivative	مشتق کاپتو کسری فازی
Fourier Transform	تبدیلات فوریه
Generalized Hukuhara difference	تفاضل هاکوهارای تعمیم یافته
Generalized Hukuhara differentiable	مشتق پذیری تعمیم یافته
Haar vector	بردار هار
Hausdorff metric	متر هاسدورف
H-derivative	مشتق اچ
H-difference	تفاضل اچ
Initial value	مقدار اولیه
Integral Transforms	تبدیلات انتگرالی
Integration by part	انتگرال جزبه جز
Lower derivative	
Lebesgue integrable	انتگرال پذیر لبگ
Laplace Transform	تبدیلات لاپلاس

Mittag-Leffler function	تابع میتگ-لفلر
Non-negative	نامنفی
Positive number	اعداد مثبت
Piecewise continuous	تکه ای پیوسته
Real-valued functions Support	توابع مقدار حقیقی
Support	تکیه گاه
Solution	جواب
Switching point	نقطه تغییرات
Time-Fractional Differential equations	معادله دیفرانسیل زمان-کسری
Triangular	مثلثی
Uniqueness	یکتایی

نمادهای بکار رفته

فضای اعداد فازی مثلثی	$\mathbb{E}_T$
فضای اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
آر- برش	$-r$
تفاضل هاکوهارا	$\ominus$
تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا	$\ominus_{gH}$
جمع فازی	$\oplus$
ضرب فازی	$\odot$
مشتق تعمیم یافته هاکوهارا	$-gH$
توابع مشتق پذیری نوع اول	$f_{i.gH}$
توابع مشتق پذیری نوع دوم	$f_{ii.gH}$
توابع مشتق پذیر تا مرتبه n	$f_{gH}^{(n)}(t)$
مشتق نوع اول تعمیم یافته هاکوهارا	$-[(i) - gH]$
مشتق نوع دوم تعمیم یافته هاکوهارا	$-[(ii) - gH]$
فضای توابع فازی پیوسته روی بازه $[a, b]$	$C^F[a, b]$
فضای توابع فازی لبگ انتگرال پذیر روی بازه $[a, b]$	$L^F[a, b]$
مشتق کاپوتو هاکوهارا	${}^c D$
انتگرال ریمان لیوویل از مرتبه α	J^α
مشتق کاپوتو تعمیم یافته هاکوهارا از مرتبه α	${}^c_{gH} D^\alpha$
مشتق کاپوتو کسری نوع اول تعمیم یافته هاکوهارا	$-{}^{cf}[i - gH]$
مشتق کاپوتو کسری نوع دوم تعمیم یافته هاکوهارا	$-{}^{cf}[ii - gH]$
تابع گاما	Γ
عملگر لاپلاس فازی	$\mathcal{L}$
عملگر لاپلاس کلاسیک	L
عملگر معکوس لاپلاس فازی	$\mathcal{L}^{-1}$

عملگر لاپلاس فازی	$\mathcal{F}$
عملگر لاپلاس کلاسیک	F
عملگر معکوس لاپلاس فازی	$\mathcal{F}^{-1}$

[1] M. Ghaffari , T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, M. Azhini, On the Fuzzy Solutions of Time-fractional Problems

[2]

Abstract

Memory retention of derivatives is one of the issues that has always been considered by researchers and scholars. On the other hand, this type of property is well seen in fuzzy fraction differential equations. Therefore, in the present paper, using fuzzy Caputo derivatives and considering the types of generalized Hukuhara differentiability, this type of equations is solved using the analytical method. In this regard, by considering the types of generalized Hukuhara differentiability and using fuzzy integral transformations the explicit of this type of equations has been obtained, and in order to show the efficiency and effectiveness of the method practical examples have been studied. And finally, by providing generalized derivation type forms in fuzzy solutions is easily visible.

Keywords: Fuzzy Time-Fractional Differential equations; Fuzzy Laplace Transform; Fuzzy Fourier Transform; Caputo gH-differentiability.



Department of Mathematics, Science and Research Branch,
Islamic Azad University, Tehran, Iran

Obtain analytical and numerical solutions of fuzzy partial differential
equations of integer and fractional order

Supervisor:

Dr. Tofiq Allahviranloo

Dr. Saeid Abbasbandy

Advisor:

Dr. Mahdi Azhini

By:

Manizheh Ghaffari

Autumn2020