

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

کاربرد تقریب کمترین مربعات متحرک در حل مسایل با مرز آزاد

استاد راهنما

پروفسور سعید عباس‌بندی

استاد مشاور

دکتر الیاس شیوانیان

پژوهشگر

اکبر کرمی

بهمن ۱۳۹۹

نام خانوادگی دانشجو: کرمی

نام: اکبر

عنوان: کاربرد تقریب کمترین مربعات متحرک در حل مسایل با مرز آزاد

استاد راهنما: پروفسور سعید عباس‌بندی

استاد مشاور: دکتر الیاس شیوانیان

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بین‌المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: بهمن ۱۳۹۹

تعداد صفحات: ۱۰۲

واژگان کلیدی: تقریب کمترین مربعات متحرک؛ روش‌های بدون شبکه؛ شکل ضعیف؛ رویه‌های چندبعدی؛ تابع وزن؛ توابع شکل؛ مسایل با مرز آزاد.

چکیده

در این رساله، تقریب کمترین مربعات متحرک را برای حل مسایل با مرز آزاد به کار می‌بریم. تقریب کمترین مربعات متحرک نقش مهمی در روش‌های بدون شبکه‌ای دارد که بر اساس شکل ضعیف معادلات بنا شده‌اند. این روش، اولین بار توسط لنکستر و سال کاوس کاس [۴۹] در سال ۱۹۸۱ و با الهام از کارهای شپارد [۸] و مک‌لاین [۱۰، ۱۳] برای تقریب رویه‌های چندبعدی معرفی شد و پس از آن به عنوان پایه‌ای برای روش‌های بدون شبکه از جمله روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرگین در حل معادلات دیفرانسیل مورد توجه قرار گرفت. روش کمترین مربعات متحرک برای هر نقطه در دامنه، یک مساله کمترین مربعات وزن‌دار محلی حل می‌کند. در نگاه اول روش از نظر محاسباتی پرهزینه است اما خواهیم دید که روش بسیار کارا است و در واقع یکی از بهترین روش‌ها برای برازش داده‌ها با دقت مورد نظر می‌باشد.

در این رساله، تقریب کمترین مربعات متحرک را معرفی کرده و توابع شکل تولید شده از آن را در روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرگین به منظور حل مسایل با مرز آزاد از جمله مساله معکوس استفان، مساله تعیین مرز آزاد و ضرایب مجهول و مساله معکوس تعیین مرز آزاد در معادله انتشار غیرخطی به کار می‌بریم. با چندین مثال نشان داده شده است که جواب‌های به دست آمده با استفاده از روش معرفی شده در این رساله با وجود اختلال در داده‌های ورودی

قابل قبول و پایدار هستند. با مقایسه نتایج به دست آمده از روش حاضر و روش‌های معروف نشان داده می‌شود که روند ارایه شده در یافتن جواب‌های مسایل مورد بررسی مفید و مؤثر است.

تقديم به خانواده ام

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز، بر خود لازم می‌دانم که از زحمات و راهنمایی‌های ارزشمند اساتید عزیز جناب آقای
پروفسور سعید عباس‌بندی به عنوان استاد راهنما و جناب آقای دکتر الیاس شیوانیان به عنوان استاد
مشاور در به ثمر رسیدن این رساله سپاسگزاری نمایم. همچنین از جناب آقای پروفسور داود رستمی
به خاطر زحمات زیادی که برای بنده در طول دوره دکتری به عنوان استاد کشیدند کمال تشکر را دارم.
از اساتید عزیز و بزرگوار خصوصا جناب آقای پروفسور داود رستمی و جناب آقای دکتر انصاری که
با دقت و حوصله و ارایه راهنمایی‌های ارزشمند در اصلاح و بالا بردن کیفیت رساله، بنده را یاری
نمودند صمیمانه قدردانی می‌کنم. تشکر ویژه می‌کنم از استاد گرامی جناب آقای پروفسور محمد
تقی درویشی که در طول دوران تحصیل افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و همواره از حمایت‌های
علمی ایشان در زمینه تحقیق و تحصیلی بهره‌مند بوده و هستم و در این مقطع قبول زحمت فرموده
و داوری رساله بنده را پذیرفتند.

اکبر کرمی
بهمن ۱۳۹۹

بسیاری از مسایل کاربردی از جمله، مسایل انتقال حرارت، به گونه‌ای هستند که می‌توان آنها را به صورت یک مساله با مرز آزاد^۱ مدل‌بندی کرد. بنابراین، مسایل با مرز آزاد نقش مهمی در تحلیل مسایل مربوط به علوم مهندسی و به طور کلی در مسایل دنیای واقعی دارند. یک مساله با مرز آزاد، مساله‌ای مقدار مرزی است که در آن بخشی از مرز از ابتدا مجهول است. بخش مجهول مرز را مرز آزاد می‌گوییم. مساله استفان^۲ یکی از انواع مسایل با مرز آزاد است که فرآیند ذوب و انجماد را تشریح می‌کند. در [۳۳، ۲۲] ساختار و اساس مسایل انتقال حرارت و در [۲۳، ۵۴، ۲، ۳۱] چارچوب کلی مسایل استفان مورد بررسی قرار گرفته است. یک مساله با مرز آزاد می‌تواند به صورت یک مساله معکوس تعیین مرز آزاد یا تعیین ضرایب با یک یا چند ضریب مجهول مطرح شود. این نوع مسایل معکوس جزء مسایل پیچیده و پرکاربردی هستند که کاربردهای وسیعی در علوم مهندسی و صنعت دارند. در سال‌های اخیر روش‌های متعددی برای حل عددی مسایل استفان ارائه شده‌اند از جمله، روش آنالیز هموتوپی [۴۸، ۱۵]، روش پرتابی گروه لی [۶]، روش‌های تفاضل متناهی و عنصر متناهی [۴۷] و روش تکراری تغییراتی [۱۱]. گرزیمکووسکی^۳ و اسلوتا^۴ در [۵۰، ۵۱] مسایل مستقیم و معکوس استفان یک فاز را با استفاده از روش تجزیه آدومین مورد بررسی قرار دادند. همچنین، اسلوتا در [۹] روش اختلال هموتوپی^۵ را برای حل مساله معکوس استفان یک فاز بکار برد. در [۴] روش جواب‌های اساسی^۶ توسط جانسون^۷ و همکارانش برای حل مساله استفان یک بعدی استفاده شده است. در [۳۴، ۳۶، ۴۲] مسایل معکوس استفان تعیین ضرایب وابسته به زمان و مرز آزاد با استفاده از روش تفاضل متناهی^۸ مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، تعیین مرز آزاد در یک مساله سهموی دو بعدی در [۳۷] بررسی شده است. در [۷۴] روش هم‌محلی^۹

¹Free boundary problem

²Stefan

³Grzymkowski

⁴Slota

⁵Homotopy perturbation

⁶Fundamental solutions

⁷Johansson

⁸Finite difference

⁹Collocation



تابع پایه‌ای شعاعی^{۱۰} در مورد یک مساله مرز آزاد استفاده شده است.

ارایه و توسعه روش‌های عددی جدید به منظور تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل یکی از زمینه‌های تحقیقاتی جالب در علوم مهندسی، فیزیک و ریاضیات کاربردی است. از محبوب‌ترین و متداول‌ترین این روش‌ها می‌توان به روش عنصر متناهی^{۱۱} اشاره کرد که روشی مبتنی بر شبکه است. این روش و روش‌های دیگر مبتنی بر شبکه، دارای دو ضعف اساسی هستند که یکی، محدودیت و مشکلات شبکه‌بندی دامنه‌هایی است که شکل هندسی پیچیده‌ای دارند و دیگری، پیچیدگی محاسباتی در حل مسایل با ابعاد بالا است. بنابراین، در سال‌های اخیر، توسعه و فرمول‌بندی روش‌های جدید و کارا مثل روش‌های بدون شبکه^{۱۲} به عنوان جایگزینی برای روش‌های عددی کلاسیک برای حل مسایل، به یک زمینه تحقیقاتی جالب برای ریاضیدانان و مهندسين تبدیل شده است. روش‌های بدون شبکه، به علت سادگی و انعطافی که دارند به عنوان جایگزینی برای روش‌های عددی کلاسیک مثل روش عنصر متناهی و عنصر مرزی^{۱۳} در سال‌های اخیر بطور وسیعی مورد توجه قرار گرفته‌اند. به منظور غلبه بر بعضی مشکلات روش‌های مبتنی بر شبکه، در دهه‌های اخیر، روش‌های متعددی در قالب روش‌های بدون شبکه ارایه شده است. یک روش بدون شبکه، بدون استفاده از یک شبکه‌بندی از قبل تعریف شده، از یک مجموعه نقاط که در دامنه مساله و روی مرز آن پخش شده‌اند برای نمایش دامنه و مرز آن (نه برای گسسته‌سازی دامنه و مرز) استفاده می‌کند. نقاط پخش شده در دامنه و مرز را نقاط میدانی^{۱۴} می‌گوییم.

روش‌های بدون شبکه، بطور کلی به سه دسته عمده تقسیم می‌شوند. دسته اول، شامل روش‌هایی است که بر اساس شکل ضعیف معادلات پایه‌ریزی شده‌اند. مثل، روش عنصر متناهی گالرکین [۶۵، ۶۶، ۴۳، ۱۹، ۷۸]. دسته دوم، روش‌هایی هستند که مبتنی بر شکل قوی معادلات بنا شده‌اند. مثل، روش هم‌محلی توابع پایه‌ای شعاعی [۵۵، ۶۳، ۴۶، ۱۷]. استفاده از روش‌های بدون شبکه هم‌محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی دارای ضعف‌هایی است. به عنوان مثال، این روش‌ها به تعیین پارامتر شکل نیاز دارند که نقش مهمی در دقت روش دارد. همچنین، سیستم‌های معادلات خطی حاصل از این روش معمولاً بدوضع^{۱۵} هستند که برای رفع این مشکل باید از روش‌های منظم‌سازی^{۱۶} استفاده شود. دسته سوم، شامل روش‌های بدون شبکه‌ای است که مبتنی بر ترکیبی از شکل‌های ضعیف و روش‌های هم‌محلی هستند.

¹⁰Radial basis function

¹¹Finite element

¹²Meshless methods

¹³Boundary element

¹⁴Field points

¹⁵Ill-condition

¹⁶Regularity methods



روش‌های بدون شبکه مبتنی بر شکل ضعیف، از شکل ضعیف سراسری یا محلی استفاده می‌کنند. پایداری عددی مناسب و داشتن دقت بالا موجب جذابیت بیشتر این روش‌ها شده است. شکل‌های ضعیف برای به دست آوردن مجموعه‌ای از معادلات جبری، در روند انتگرال‌گیری عددی، از یک مجموعه از دامنه‌های انتگرال‌گیری استفاده می‌کنند که ممکن است به صورت سراسری یا محلی در دامنه مساله ایجاد شده باشند. در روش‌های مبتنی بر شکل ضعیف سراسری، برای انتگرال‌گیری عددی در حل معادلات جبری، تقسیم‌بندی‌های اولیه مورد نیاز است. به منظور اجتناب از استفاده از تقسیم‌بندی‌های اولیه یک شکل ضعیف محلی برای ایجاد روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین ($MLPG$)^{۱۷} مورد استفاده قرار گرفته شده است.

روش $MLPG$ اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط اتلوری^{۱۸} و ژو^{۱۹} [۵۶] معرفی شد و پس از آن به طور عمیق‌تر توسط اتلوری و شن مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت که منجر به تدوین دو کتاب شده است [۵۷، ۵۸]. اساس این روش، استفاده از معادلات ضعیف محلی که روی زیردامنه‌ها ساخته می‌شوند برای آزمون و تقریب کمترین مربعات متحرک برای تقریب جواب است. انعطاف‌پذیری این روش در انتخاب تابع آزمون^{۲۰} منجر به تولید چند نوع متفاوت $MLPG$ شده است. این روش، کلاس نسبتاً جدیدی از روش‌های بدون شبکه‌ای است که در آن فرم ضعیف مساله در زیردامنه‌هایی از کل دامنه ساخته می‌شود. در نتیجه، انتگرال‌گیری در کل دامنه نیست و در زیردامنه‌ها است که همین باعث کم شدن محاسبات می‌شود. کاربردهایی از روش $MLPG$ را می‌توان در [۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۴۴، ۴۵، ۷۵] ملاحظه کرد. همچنین، در [۲۴، ۲۵، ۶۷] توسعه‌هایی از این روش در حل مسایل معکوس انتقال حرارت ارایه شده است.

تقریب کمترین مربعات متحرک^{۲۱} (MLS)، نقش مهمی در روش‌های بدون شبکه‌ای دارد که بر اساس شکل‌های ضعیف هستند، از جمله این روش‌ها عنصر آزاد گالرکین (EFG) و روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین ($MLPG$) هستند. این تقریب، با در نظر گرفتن یک زیردامنه محلی برای هر نقطه میدانی، تابع جواب را در هر نقطه میدانی تقریب می‌زند. تقریب MLS توسعه‌ای از روش کمترین مربعات است. یکی از اشکالات روش کمترین مربعات این است که سیستم معادلات جبری نهایی معمولاً بدوضع است. تقریب کمترین مربعات متحرک بهبود یافته ($IMLS$) توسط لیو^{۲۲} و همکارانش [۷۹] ارایه شد. در تقریب $IMLS$ سیستم معادلات جبری بدوضع نیست و بدون محاسبه ماتریس وارون می‌تواند حل شود. بر اساس تقریب $IMLS$ و روش

¹⁷Meshless local Petrove-Galerkin¹⁸Atluri¹⁹Zhu²⁰Test function²¹Moving least squares approximation²²Liew



عنصر متناهی گالرکین (EFG)، روش عنصر گالرکین بهبود یافته $IEFG$ به وجود آمد. در این رساله روش $MLPG$ را با به کار بردن تقریب MLS برای حل مسایل با مرز آزاد به کار می بریم. چارچوب کلی رساله به این صورت است که در فصل اول، پس از ارایه مقدمات لازم، مساله مرز آزاد معرفی شده است. همچنین، در این فصل تقریب کمترین مربعات متحرک و مراحل کلی اجرای روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین به طور خلاصه شرح داده شده است. در فصل دوم، تقریب MLS در روش $MLPG$ برای یک مساله معکوس استفان به کار رفته است. در فصل سوم، مساله معکوس تعیین مرز آزاد و ضریب نفوذ دمایی مورد بررسی قرار گرفته است و در فصل چهارم، مساله معکوس تعیین مرز آزاد در یک معادله انتشار غیرخطی بررسی شده است و در فصل پنجم، نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای کارهای آتی ارایه شده است. نتایج عددی به دست آمده در این رساله با استفاده از برنامه متلب ۲۰۱۶ و با لپ تاپ با مشخصات $Intel(R) Core(TM) i7 - 4500U CPU @ 2.40GHz$ RAM : 4.00GB به دست آمده اند.

فهرست مطالب

ز	فهرست شکل ها
ش	فهرست جدول ها
۱	۱ مقدمات و مفاهیم اولیه
۲	۱.۱ محمل یک تابع و قضایای دیورژانس و گرین
۳	۲.۱ مساله خوش وضع از دیدگاه هادامارد
۴	۳.۱ مسایل با مرز آزاد
۵	۱.۳.۱ مساله استفان
۶	۴.۱ تقریب کمترین مربعات
۷	۵.۱ مقدمه ای بر روش های بدون شبکه
۱۰	۶.۱ تولید نقاط
۱۰	۷.۱ تقریب جواب
۱۱	۸.۱ تقریب کمترین مربعات متحرک
۱۷	۹.۱ آزمون
۱۷	۱.۹.۱ آزمون به شکل قوی (روش هم محلی)
۱۸	۲.۹.۱ آزمون به شکل ضعیف
۱۹	۱۰.۱ روش بدون شبکه محلی پتروف- گالرکین
۱۹	۱۱.۱ روند اجرای روش $MLPG$
۲۰	۱.۱۱.۱ گسسته سازی زمانی
۲۱	۲.۱۱.۱ فرمول بندی ضعیف محلی
۲۳	۳.۱۱.۱ گسسته سازی $MLPG$



۲۵	۲ کاربرد روش $MLPG$ برای حل مساله معکوس استفان با استفاده از تقریب MLS
۲۶	۱.۲ مقدمه
۲۷	۲.۲ فرمول بندی مساله
۲۹	۳.۲ گسسته سازی زمانی مساله
۳۰	۴.۲ شکل ضعیف مساله گسسته شده
۳۱	۵.۲ گسسته سازی $MLPG$
۳۳	۶.۲ نتایج عددی
۴۵	۳ بررسی مساله معکوس تعیین ضریب وابسته به زمان و مرز آزاد در معادله حرارت
۴۶	۱.۳ مقدمه
۴۶	۲.۳ فرمول بندی مساله
۴۹	۳.۳ حل مساله مستقیم
۴۹	۱.۳.۳ گسسته سازی زمانی
۵۰	۲.۳.۳ فرمول بندی شکل ضعیف محلی مساله گسسته شده
۵۱	۳.۳.۳ گسسته سازی $MLPG$
۵۳	۴.۳.۳ نتایج عددی
۵۵	۴.۳ مساله معکوس
۵۵	۱.۴.۳ فرمول بندی مساله معکوس
۵۸	۲.۴.۳ نتایج عددی
۶۷	۴ مساله معکوس تعیین مرز آزاد در یک معادله انتشار غیر خطی
۶۸	۱.۴ مقدمه
۶۸	۲.۴ فرمول بندی مساله
۷۰	۳.۴ حل مساله مستقیم
۷۰	۱.۳.۴ گسسته سازی زمانی
۷۱	۲.۳.۴ فرمول بندی شکل ضعیف محلی مساله گسسته شده
۷۲	۳.۳.۴ گسسته سازی $MLPG$
۷۵	۴.۳.۴ نتایج عددی
۷۶	۴.۴ مساله معکوس
۷۶	۱.۴.۴ فرمول بندی مساله معکوس
۷۹	۲.۴.۴ نتایج عددی



۸۷	۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۸۹	مراجع
۹۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۹۸	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست شکل‌ها

۱۱	۱.۱	Ω_q و Ω_s به ترتیب محمل محلی و دامنه انتگرال‌گیری محلی هستند.
۱۴	۲.۱	تفاوت بین u_i و $\hat{u}_i$
	۱.۲	نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به پارامتر شکل c با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ و $\Delta t = 0.01$
۳۵	۲.۲	نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به N با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$
۳۶	۳.۲	مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی برای $s(t)$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$
۳۷	۴.۲	خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$
۳۷	۵.۲	جواب دقیق و جواب تقریبی و خطای مطلق برای $u(x, t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$
۳۸	۶.۲	نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به پارامتر شکل c با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ و $\Delta t = 0.01$
۴۰	۷.۲	نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به N با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$
۴۰		



- ۸.۲ مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی برای $s(t)$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$ ۴۱
- ۹.۲ خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$ ۴۲
- ۱۰.۲ نمودارهای جواب دقیق و جواب تقریبی و خطای مطلق برای $u(x, t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$ ۴۳
- ۱.۳ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق برای $u(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۵۵
- ۲.۳ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق برای $v(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۵۶
- ۳.۳ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق برای $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۵۶
- ۴.۳ نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی برای $s(t)$ و $a(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۰
- ۵.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۱
- ۶.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۱
- ۷.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۲
- ۸.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۲
- ۹.۳ نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی $s(t)$ و $a(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۴
- ۱۰.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۵
- ۱۱.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۵



- ۱۲.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۶
- ۱۳.۳ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۶۶
- ۱.۴ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۷۶
- ۲.۴ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۷۷
- ۳.۴ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق $\mu_3(t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۷۷
- ۴.۴ نمودارهای جواب دقیق و جواب تقریبی برای $s(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۱
- ۵.۴ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۱
- ۶.۴ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۲
- ۷.۴ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۲
- ۸.۴ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۳
- ۹.۴ نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی برای $s(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال ($\delta = 0.02$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۴
- ۱۰.۴ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۵
- ۱۱.۴ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۵
- ۱۲.۴ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۶
- ۱۳.۴ نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$ ۸۶

فهرست جدول‌ها

۱.۲	خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی برای گام‌های زمانی مختلف وقتی که $\Delta t = 0.01$ ، $c = 0.011$ و $h = 0.01$	۳۶
۲.۲	خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی برای گام‌های زمانی مختلف وقتی که $\Delta t = 0.01$ ، $c = 0.011$ و $h = 0.01$	۴۱
۳.۲	مقادیر خطای مطلق میانگین برای $s(t)$ وقتی که $N = 7$ با استفاده از ADM ، RKM و روش $MLPG$	۴۴
۴.۲	مقادیر خطای مطلق میانگین برای $u(x, t)$ با استفاده از ADM ، RKM و روش $MLPG$ که Δ_{u_i} مقادیر خطای مطلق میانگین برای $u(x_i, t_j)$ ، $j = 0, 1, 2, \dots, M$ هستند.	۴۴
۱.۳	خطای RMS برای $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ وقتی که $h = \Delta t \in \{0.1, 0.05, 0.025, 0.01\}$	۵۵
۲.۳	خطای RMS برای $s(t)$ و $a(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$	۶۰
۱.۴	خطای RMS برای $s(t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$	۸۲

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه



۱.۱ محمل یک تابع و قضایای دیورژانس و گرین

تعریف ۱.۱.۱. فرض می‌کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز و ناتهی و f تابعی تعریف شده روی Ω باشد. محمل f ^۱ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{supp} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}}$$

تعریف ۲.۱.۱. می‌گوییم محمل f در Ω فشرده است^۲ هرگاه $\text{supp} f \subset \Omega$.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ را در فضای هیلبرت H کامل می‌گوییم هرگاه برای هر α در A از رابطه $\langle y, x_\alpha \rangle = 0$ نتیجه شود $y = 0$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید v تابعی اسکالر و $w = (w_1, w_2, \dots, w_d)$ یک تابع برداری از $X \in \mathbb{R}^d$ باشد. عملگرهای گرادین، دیورژانس و لاپلاس را به ترتیب با نمادهای ∇ ، div و Δ نشان می‌دهیم که:

$$\text{grad } v = \nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial X_d} \right),$$

$$\text{div } w = \nabla \cdot w = \sum_{i=1}^d \frac{\partial w_i}{\partial X_i},$$

$$\Delta v = \nabla \cdot \nabla v = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 v}{\partial X_i^2}.$$

قضیه ۵.۱.۱. (قضیه دیورژانس): با فرض اینکه $n = (n_1, \dots, n_d)$ بردار نرمال یکانی برون‌سوی $\partial\Omega$ باشد داریم:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot w dX = \int_{\partial\Omega} w \cdot n ds.$$

که ds در حالت دوبعدی المان طول قوس و در حالت سه‌بعدی المان مساحت سطح می‌باشد.

قضیه ۶.۱.۱. (قضیه گرین): اگر در قضیه دیورژانس از تابع wv به جای w استفاده کنیم فرمول

¹Support

²Compact



گرین به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega} w \cdot \nabla v dX = \int_{\partial\Omega} w \cdot n v ds - \int_{\Omega} \nabla \cdot w dX.$$

با قرار دادن $w = \nabla u$ در فرمول گرین رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dX = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v ds - \int_{\Omega} v \Delta u dX.$$

که $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ مشتق جهتی u در جهت بردار n است.

۲.۱ مساله خوش وضع از دیدگاه هادامارد

تعریف ۱.۲.۱. یک مساله از دیدگاه هادامارد^۳ خوش وضع است اگر سه شرط زیر را داشته باشد [۵۲]:

- (۱) مساله دارای جواب باشد.
 - (۲) جواب مساله یکتا باشد.
 - (۳) جواب مساله به طور پیوسته به داده‌های مساله وابسته باشد (پایداری جواب) یعنی، با ایجاد تغییرات جزئی در داده‌های مساله تغییرات در جواب مساله هم جزئی باشد.
- به عنوان مثال، مسایل معکوس اغلب به علت نداشتن شرط سوم بدوضع هستند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض می‌کنیم V و W دو فضای نرم‌دار باشند و $K : V \rightarrow W$ یک نگاشت خطی یا غیرخطی باشد. معادله $Kx = y$ را خوش وضع می‌گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

- (۱) برای هر $y \in W$ حداقل یک $x \in V$ موجود باشد که $Kx = y$.
- (۲) برای هر $x \in V$ حداکثر یک $y \in W$ موجود باشد که $Kx = y$.
- (۳) جواب x به طور پیوسته به y وابسته باشد به عبارت دیگر برای هر دنباله $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ که $Kx_n \rightarrow Kx$ ، نتیجه شود $x_n \rightarrow x$.

³Hadamard



مثال ۳.۲.۱. معادله انتگرال فردهلم نوع اول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_a^b k(x, y) f(y) dy = g(x), \quad a < x < b$$

با قرار دادن $k(x, y) = y \cos x$ در معادله بالا رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\cos x \int_a^b y f(y) dy = g(x),$$

با فرض اینکه $\int_a^b y f(y) dy = \alpha$ داریم $\alpha \cos x = g(x)$. واضح است در حالتی که $g(x)$ از جنس مثلثاتی نباشد این معادله جواب ندارد. لذا معادله فردهلم نوع اول بدو وضع است.

۳.۱ مسایل با مرز آزاد

در ریاضیات، یک مساله با مرز آزاد^۴ (FBP) یک معادله دیفرانسیل جزئی است که باید نسبت به یک تابع مجهول و بخشی از مرز دامنه مساله که از ابتدا مجهول است حل شود. بخشی از مرز دامنه که از ابتدا مجهول است مرز آزاد گفته می‌شود. این نوع معادلات به عنوان نمونه در مسایل جداسازی فاز^۵ به وجود می‌آیند.

مثال ۱.۳.۱. یک مثال کلاسیک از یک مساله با مرز آزاد فرآیند ذوب شدن یخ است. قطعه‌ای یخ در نظر می‌گیریم، می‌توان برای تعیین دمای آن یک معادله گرما با شرایط اولیه و مرزی مناسب حل کرد. اگر در هر ناحیه دما بیشتر از نقطه ذوب^۶ یخ باشد، این ناحیه توسط آب اشغال خواهد شد. مرز تشکیل شده بین آب و یخ به طور دینامیکی توسط یک PDE کنترل می‌شود.

دو نوع از مسایل با مرز آزاد عبارتند از مساله استفان که فرآیند ذوب و انجماد^۷ را توصیف می‌کند و مساله مانع^۸ که در حالت مستقل از زمان می‌تواند به عنوان یک مساله تغییراتی بیان شود. در ادامه مساله استفان را به طور مختصر توضیح می‌دهیم.

⁴Free boundary problem

⁵Phase separation

⁶Melting point

⁷Melting and solidification

⁸Obstacle problem



۱.۳.۱ مساله استفان

مساله ذوب و انجماد را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم T_1 دمای آب و T_2 دمای یخ و Γ فصل مشترک یخ و آب باشد، آنگاه:

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \nabla \cdot (k_i \nabla T_i), \quad X \in \Omega_i \quad (۱.۱)$$

$$T_1 = T_2, \quad X \in \Gamma. \quad (۲.۱)$$

که k_i ($i = 1, 2$) ضریب نفوذ دمایی^۹ گفته می‌شود که مقداری ثابت است، به عنوان مثال، این ضریب برای آب $1.4 \times 10^{-7} m^2/s$ و برای یخ برابر $1.335 \times 10^{-6} m^2/s$ است. همچنین

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} = V_n, \quad X \in \Gamma. \quad (۳.۱)$$

در (۳.۱)، V_n سرعت^{۱۰} حرکت مرز Γ در جهت بردار نرمال n است. اگر Γ توسط $\psi(X, t) = 0$ داده شده باشد آنگاه، (۳.۱) می‌تواند به شکل زیر نوشته شود:

$$k_1 \nabla_X T_1 \cdot \nabla_X \psi - k_2 \nabla_X T_2 \cdot \nabla_X \psi = \psi_t.$$

سیستم (۳.۱) - (۱.۱) به همراه شرایط اولیه در $t = 0$ و شرایط مرزی در مرز ثابت شده (در هر لحظه t) را مساله استفان دو-فاز^{۱۱} می‌گوییم. در حالتی که $T_1 \equiv 0$ (یا $T_2 \equiv 0$) مساله را یک-فاز می‌گوییم. شرط (۳.۱) را معادله تراز انرژی^{۱۲} می‌گوییم.

در حالت یک‌بعدی مساله استفان یک-فاز عبارت است از یافتن منحنی $x = s(t)$ و تابع $u(x, t) \geq 0$

^۹Thermal diffusivity

^{۱۰}Velocity

^{۱۱}Two-phase

^{۱۲}Balance-of-energy



به طوری که

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < s(t), \quad t > 0, \\ u(0, t) = g(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = h(x), & 0 < x < s(0), \\ u(s(t), t) = 0, & -u_x(s(t), t) = s'(t), \quad t > 0. \end{cases}$$

که $g > 0$ و $h > 0$. شرط $u_x(0, t) = k(t)$ برای $t > 0$ را می‌توان جایگزین شرط $u(0, t) = g(t)$ کرد که $k(t) \geq 0$. این مساله دارای جواب منحصر به فرد است و برای $t > 0$ ، $s(t) \in C^\infty$ و $s'(t) > 0$ [۱] و مراجع آن را ببینید).

در ابعاد بالاتر مساله استفان دارای جواب یکتای ضعیف است، به این معنی که تابع T و گرادیان آن یعنی $\nabla_X T$ برای مقادیر $t > 0$ متعلق به H^1 هستند و T پیوسته است.

۴.۱ تقریب کمترین مربعات

فرض کنید که V یک فضای نرم‌دار و $u \in V$ باشد. چندجمله‌ای‌های $\{p_i(X)\}_{i=1}^m$ را به عنوان پایه زیرفضای با بعد متناهی V_m در نظر می‌گیریم که $V_m = \text{span}\{p_1(X), p_2(X), \dots, p_m(X)\}$ و V_m در V بسته است. همچنین فرض می‌کنیم مقادیر تابع u در نقاط X_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، داده شده باشند. هدف یافتن تابعی مثل $u^h(X) \in V_m$ است به طوری که $\|u(X) - u^h(X)\|_2^2$ می‌نیم شود و لزومی ندارد که $u^h(X)$ یک تابع درونیاب باشد. برای این منظور تعریف می‌کنیم:

$$J = \sum_{i=1}^n (u^h(X_i) - \hat{u}_i)^2 \quad (4.1)$$

که $\hat{u}_i$ مقدار واقعی تابع u در نقطه X_i است. فرض می‌کنیم $u^h(X) = \mathbf{p}^T(X) \mathbf{a}$ ، که $\mathbf{p}^T(X) = [p_1(X), p_2(X), \dots, p_m(X)]$ و $\mathbf{a}^T = [a_1, a_2, \dots, a_m]$ بردار ثابت مجهولات است. بنابراین،



(۴.۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$J(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{p}^T(X_i)\mathbf{a} - \hat{u}_i)^2 \quad (5.1)$$

به منظور می نیم کردن $J(\mathbf{a})$ به عنوان تابعی از $\mathbf{a}$ ، از $J(\mathbf{a})$ نسبت به a_j ، $j = 1, 2, \dots, m$ ، مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial J}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n 2p_j(X_i)[\mathbf{p}^T(X_i)\mathbf{a} - \hat{u}_i] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

با توجه به تعریف بردارهای $\mathbf{p}(X)$ و $\mathbf{a}$ معادلات بالا را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{p}(X_i)\mathbf{p}^T(X_i)\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}(X_i)\hat{u}_i \quad (6.1)$$

شکل ماتریسی معادلات بالا به صورت زیر است:

$$A\mathbf{a} = B \quad (7.1)$$

که $A = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}(X_i)\mathbf{p}^T(X_i)$ و $B = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}(X_i)\hat{u}_i$. با توجه به (۷.۱) بردار ضرایب مجهول یعنی $\mathbf{a}$ از رابطه زیر تعیین می شود:

$$\mathbf{a} = A^{-1}B$$

۵.۱ مقدمه ای بر روش های بدون شبکه

بسیاری از مسایل کاربردی در علوم مهندسی و صنعت و طیف وسیعی از پدیده های طبیعی و مسایل فیزیکی به گونه ای هستند که مدل ریاضی آنها در قالب یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط اولیه و مرزی بیان می شود که برای توصیف و تحلیل این مسایل نیاز به جواب معادله



دیفرانسیل می‌باشد. به دلیل اینکه تعیین جواب دقیق اکثر این مسایل با استفاده از روش‌های تحلیلی امکان‌پذیر نیست، مطالعه و تحقیق برای ارایه روش‌های عددی تعیین جواب تقریبی به طور وسیعی مورد توجه قرار گرفته است. از روش‌های استاندارد و پرکاربرد ارایه شده می‌توان به روش‌های عنصر متناهی، تفاضل متناهی و حجم متناهی اشاره کرد که روش‌هایی مبتنی بر شبکه‌بندی ناحیه جواب می‌باشند. این روش‌ها و به طور کلی روش‌های مبتنی بر شبکه با وجود مزایا و کارایی‌های زیادی که در حل عددی انواع مختلفی از مسایل دارند دارای معایب و ضعف‌هایی نیز هستند، از جمله می‌توان به هزینه محاسباتی بالای شبکه‌بندی، قابل استفاده نبودن اطلاعات شبکه‌بندی قبلی در صورت نیاز به شبکه‌بندی ظریف‌تر و همچنین دشوار بودن یا امکان‌پذیر نبودن به کارگیری این روش‌ها برای مسایل با ابعاد بالا یا مسایل با دامنه‌های با شکل هندسی پیچیده اشاره کرد.

ارایه روش‌های عددی جدید و کارا برای تعیین تقریبی جواب‌های معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران علوم مهندسی و ریاضی قرار گرفته است. روش‌های بدون شبکه به دلیل انطاف‌پذیری و دقت بالای جواب‌های عددی حاصل از آنها مورد توجه ریاضیدانان و مهندسين قرار گرفته است. شاید بتوان گفت مهمترین هدف ارایه این روش‌ها، غلبه بر مشکلات شبکه‌بندی و شبکه‌بندی مجدد کل دامنه می‌باشد. ایده اولیه روش‌های بدون شبکه به روش ذرات هیدرودینامیکی هموار^{۱۳} (SPH) [۳۲] برای نمایش پدیده‌های اخت‌فیزیک در سال ۱۹۷۷ برمی‌گردد. مطالعه بر روی روش‌های بدون شبکه دقیقاً پس از انتشار روش عناصر پخش شده^{۱۴} (DEM) توسط نیرولز^{۱۵} [۵]، توزوت^{۱۶} و ویلون^{۱۷} در سال ۱۹۹۲ گسترش پیدا کرد.

یک روش بدون شبکه روشی است (لیو^{۲۰۰۳}) [۱۸] که بدون استفاده از یک شبکه‌بندی از پیش تعیین شده برای گسسته‌سازی دامنه، مساله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل می‌کند. در این روش، از مجموعه‌ای از نقاط که در دامنه و مرز مساله پخش شده‌اند برای نمایش دامنه و مرز (نه برای گسسته‌سازی دامنه و مرز) مساله به جای شبکه‌بندی استفاده می‌شود. این نقاط پخش شده که نقاط میدانی^{۱۸} نامیده می‌شوند یک شبکه نمی‌سازند، به این معنی که به هیچ‌گونه اطلاعات قبلی درباره رابطه بین گره‌ها برای درونیابی یا تقریب تابع مجهول نیاز نیست.

تاکنون روش‌های بدون شبکه متعددی ارایه شده‌اند. از جمله این روش‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: ذرات هیدرودینامیکی، روش عناصر پخش شده، روش افراز یکه^{۱۹} (PUM) [۲۷]،

¹³Smoothed Particle Hydrodynamic¹⁴Diffuse element method¹⁵Nayroles¹⁶Touzot¹⁷Villon¹⁸Field nodes¹⁹Partition of unity method



روش اچ-پی کلود^{۲۰} [۷]، روش گالرکین با عناصر آزاد^{۲۱} (EFG) [۶۸]، روش بازتولید عناصر هسته^{۲۲} (RKPM) [۷۳]، روش هم‌محلی بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی^{۲۳} (RBFs) [۳۸، ۱۷]، روش نودهای مرزی^{۲۴} (BNM) [۷۶]، روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی^{۲۵} (LBIE) [۶۹، ۲۶، ۳۵، ۱۲]، روش درونیایی شعاعی نقاط^{۲۶} و روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین^{۲۷} (MLPG) [۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۴۴، ۴۵، ۷۵، ۲۴، ۲۵، ۶۷]. در [۷۱] علاوه بر روش‌های ذکر شده روش‌های بدون شبکه دیگری در قالب یک بازنگری کلی از این روش‌ها ارائه شده است.

سه گام اساسی در اجرای یک روش بدون شبکه به صورت زیر هستند:

۱. تولید نقاط^{۲۸}: اولین گام اساسی در اجرای روش‌های بدون شبکه تولید نقاط می‌باشد، به این صورت که از مجموعه‌ای از نقاط پراکنده که می‌توانند منظم یا نامنظم (تصادفی) باشند برای نمایش دامنه فیزیکی مساله استفاده می‌شود. این نقاط باید به گونه‌ای باشند که کل دامنه و مرز را پوشش دهند.

۲. تقریب جواب: در گام دوم، پایه‌ای برای فضای جواب در نظر گرفته می‌شود و تابع جواب به صورت یک ترکیب خطی از اعضای پایه در نظر گرفته می‌شود. این عمل تقریب جواب گفته می‌شود.

۳. آزمودن^{۲۹}: در گام سوم، برای تعیین ضرایب مجهول در تابع تقریب جواب ارائه شده در گام دوم، باید این تقریب در معادلات حاکم صدق کند. این عمل را آزمودن جواب می‌گویند. آزمودن می‌تواند به شکل ضعیف یا قوی و محلی یا کلی باشد. روش‌های متفاوت تقریب جواب و آزمودن منجر به ایجاد روش‌های بدون شبکه مختلفی شده است. در ادامه گام‌های سه‌گانه ذکر شده در اجرای روش‌های بدون شبکه به طور خلاصه شرح داده می‌شوند.

²⁰Hp-cloud method

²¹Element free Galerkin method

²²Reproducing kernel particle method

²³Meshless collocation-radial basis functions method

²⁴Boundary nodes method

²⁵Meshless local boundary integral equation method

²⁶Radial point interpolation method

²⁷Meshless local Petrov-Galerkin method

²⁸Node generation

²⁹Testing



۶.۱ تولید نقاط

همانگونه که اشاره شد، در گام اول روش‌های بدون شبکه، دامنه فیزیکی مساله توسط مجموعه‌ای از نقاط پراکنده در دامنه و روی مرز آن پوشش داده می‌شود. بعضی از شکل‌های متداول انتخاب نقاط پراکنده در دامنه‌های دو بعدی و سه بعدی به صورت زیر هستند:

- نقاط یکنواخت: یکی از متداول‌ترین نوع انتخاب نقاط در روش‌های بدون شبکه، انتخاب نقاط با پراکندگی یکنواخت در دامنه مساله می‌باشد، به این صورت که

$$X_i = X_0 + ih \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

که $h = X_{i+1} - X_i$ بردار اندازه گام مکانی است.

- نقاط چبیشف^{۳۰}: این نقاط معمولاً برای حل مسایلی که حساسیت جواب در نقاط نزدیک به مرز بیشتر است، استفاده می‌شوند. نقاط چبیشف ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف واقع در دامنه می‌باشند.

رده‌های دیگری از نقاط وجود دارند که به عنوان نقاط میدانی در روش‌های بدون شبکه استفاده می‌شوند. از جمله این نقاط می‌توان به نقاط تصادفی گاوسی هالتون^{۳۱} اشاره کرد.

۷.۱ تقریب جواب

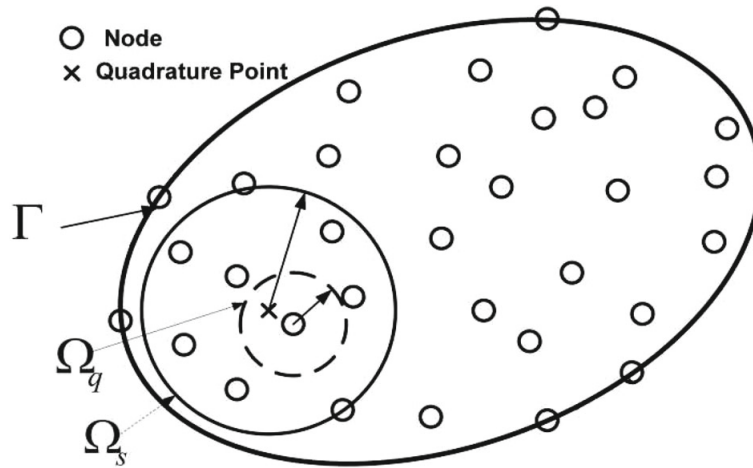
همانگونه که قبلاً اشاره شد، گام دوم مشترک در روش‌های بدون شبکه، تقریب جواب می‌باشد. در این گام جواب مساله را با تابعی که آن را با $u^h(X)$ نشان می‌دهیم به صورت ترکیبی خطی از توابع پایه و به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$u^h(X) = \sum_{i=1}^n a_i p_i(X)$$

که در رابطه بالا، $p_i(X)$ ها توابع پایه‌ای مشخص و a_i ها ضرایب مجهول هستند که با اجرای گام سوم روش بدون شبکه محاسبه می‌شوند. روش‌های زیادی برای تقریب جواب وجود دارد، از

³⁰Chebyshev data

³¹Halton quasi-random point



شکل ۱.۱: Ω_q و Ω_s به ترتیب محمل محلی و دامنه انتگرال‌گیری محلی هستند.

جمله این روش‌ها می‌توان به روش ذرات هیدرودینامیکی هموار، روش بازتولید اجزای هسته، روش تقریب کمترین مربعات متحرک، روش افراز یک‌ه و توابع پایه‌ای شعاعی اشاره کرد. در این رساله از روش تقریب کمترین مربعات متحرک برای تقریب جواب استفاده شده است که آن را در بخش زیر به اختصار شرح می‌دهیم.

۸.۱ تقریب کمترین مربعات متحرک

تقریب کمترین مربعات متحرک (*MLS*) یکی از روش‌های تقریب داده‌ها با دقت مطلوب است که در این بخش به طور خلاصه شرح داده می‌شود. فرض می‌کنیم Ω دامنه مساله و $X \in \Omega$ ، همچنین فرض می‌کنیم Ω_s یک همسایگی نقطه X باشد به طوری که این همسایگی در دامنه مساله یعنی Ω قرار دارد و به عنوان دامنه تعریف تقریب *MLS* برای تابع جواب در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱.۱ را ببینید).

برای تقریب تابع u در Ω_s ، روی تعدادی نقطه تصادفی X_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، تقریب کمترین مربعات متحرک $u^h(X)$ را برای هر $X \in \Omega_s$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u^h(X) = \mathbf{p}^T(X) \mathbf{a}(X), \quad \forall X \in \Omega_s \quad (۸.۱)$$



که $\mathbf{p}^T(X) = [p_1(X), p_2(X), \dots, p_m(X)]$ یک پایه کامل^{۳۲} از تک جمله‌ای‌های از پیش تعیین شده و $\mathbf{a}^T(X) = [a_1(X), a_2(X), \dots, a_m(X)]$ بردار ضرایب متحرک است، یعنی $\mathbf{a}(X)$ برای کل نقاط دامنه مساله ثابت نیست. همچنین m تعداد اعضای پایه است. اگر فرض کنیم t بالاترین درجه چندجمله‌ای باشد که در پایه قرار دارد، رابطه بین m و t در حالت دو بعدی به صورت $m = \frac{(t+1)(t+2)(t+3)}{6}$ و در حالت کلی برای مساله l -بعدی به صورت $m = \frac{(t+1)(t+2) \cdots (t+l)}{l!}$ است [۶۱]، به عنوان مثال در حالت یک بعدی $\mathbf{p}^T(X)$ به صورت‌های زیر است:

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x], \quad \text{linear basis; } m = 2 \quad (9.1)$$

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x, x^2], \quad \text{quadratic basis; } m = 3 \quad (10.1)$$

در حالت دو بعدی $\mathbf{p}^T(X)$ با $X = (x, y)$ به صورت‌های زیر است:

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x, y], \quad \text{linear basis; } m = 3 \quad (11.1)$$

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x, y, x^2, y^2, xy], \quad \text{quadratic basis; } m = 6 \quad (12.1)$$

و در حالت سه بعدی $\mathbf{p}^T(X)$ با $X = (x, y, z)$ به صورت‌های زیر است:

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x, y, z], \quad \text{linear basis; } m = 4 \quad (13.1)$$

$$\mathbf{p}^T(X) = [1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz], \quad \text{quadratic basis; } m = 10 \quad (14.1)$$

³²Complete basis



در روش MLS ممکن است از توابع دیگری در پایه استفاده شود. برای مثال، درمسایل با جواب منفرد از توابع منفرد^{۳۳} در پایه استفاده می‌شود.

بردار ضرایب $\mathbf{a}(X)$ در رابطه (۸.۱) را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که $\|u^h(X) - \hat{u}_i\|_{2,w}$ می‌نیم شود، که $\|\cdot\|_{2,w}$ نرم گسسته وزن دار L_2 ^{۳۴} و $\hat{u}_i$ و $i = 1, 2, \dots, n$ ، مقدار واقعی u در نقطه X_i است. برای این منظور تابع $J(\mathbf{a}(X))$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(\mathbf{a}(X)) = \sum_{i=1}^n w_i(X) [\mathbf{p}^T(X_i) \mathbf{a}(X) - \hat{u}_i]^2 = [\mathbf{P} \mathbf{a}(X) - \hat{\mathbf{u}}]^T \mathbf{W} [\mathbf{P} \mathbf{a}(X) - \hat{\mathbf{u}}] \quad (۱۵.۱)$$

که X_i مقدار X در نقطه i ام، $w_i(X)$ تابع وزن^{۳۵} متناظر با گره^{۳۶} i ام است به طوریکه برای هر X در محمل $w_i(X) > 0$ ، $w_i(X) > 0$ و n تعداد گره‌های واقع در Ω_s است به طوری که برای آنها $w_i(X) > 0$. همچنین ماتریس‌های $\mathbf{P}$ و $\mathbf{W}$ و بردار $\hat{\mathbf{u}}^T$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(X_1) \\ \mathbf{p}^T(X_2) \\ \vdots \\ \mathbf{p}^T(X_n) \end{bmatrix}_{n \times m} = \begin{bmatrix} p_1(X_1) & p_2(X_1) & \cdots & p_m(X_1) \\ p_1(X_2) & p_2(X_2) & \cdots & p_m(X_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(X_n) & p_2(X_n) & \cdots & p_m(X_n) \end{bmatrix}_{n \times m}$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1(X) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & w_n(X) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

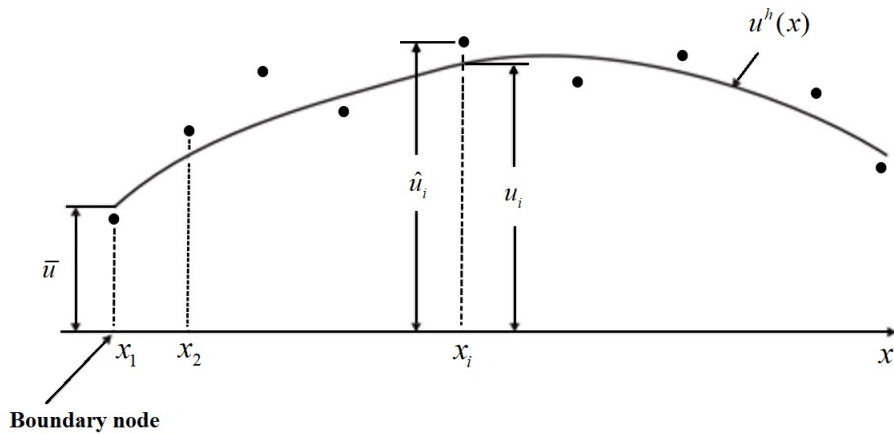
$$\hat{\mathbf{u}}^T = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n].$$

³³Singular function

³⁴Weighted discrete l_2 norm

³⁵Weight function

³⁶Node



شکل ۲.۱: تفاوت بین $\hat{u}_i$ و u_i

لازم به ذکر است که لزومی ندارد تابع $u^h(X)$ یک تابع درونیاب باشد (شکل ۲.۱ را ببینید که برای سادگی در حالت یک بعدی رسم شده است.)، در واقع در حالت کلی مقدار کلی $u^h(X_i) \equiv u_i$ به ازای هر X_i در Ω_s ممکن است برابر با $\hat{u}_i$ باشد یا نباشد. با مشتق گرفتن از $J(\mathbf{a})$ در (۱۵.۱) نسبت به $\mathbf{a}(X)$ و برابر صفر قرار دادن رابطه به دست آمده داریم:

$$\sum_{i=1}^n w_i(X) \mathbf{p}(X_i) \mathbf{p}^T(X_i) \mathbf{a}(X) = \sum_{i=1}^n w_i(X) \mathbf{p}(X_i) \hat{u}_i \quad (16.1)$$

معادله (۱۶.۱) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$A(X) \mathbf{a}(X) = B(X) \hat{\mathbf{u}} \quad (17.1)$$

که $A(X)$ ماتریسی $m \times m$ و $B(X)$ ماتریسی $m \times n$ است و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A(X) = \sum_{i=1}^n w_i(X) \mathbf{p}(X_i) \mathbf{p}^T(X_i) = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \mathbf{P}$$

$$B(X) = [w_1(X) \mathbf{p}(X_1), w_2(X) \mathbf{p}(X_2), \dots, w_n(X) \mathbf{p}(X_n)] = \mathbf{P}^T \mathbf{W} \quad (18.1)$$



تقریب MLS وقتی خوش تعریف است که ماتریس A در (۱۷.۱) نامنفرد باشد و این یعنی اگر و فقط اگر رتبه ماتریس $\mathbf{P}$ (که n سطر و m ستون دارد) برابر m باشد. بنابراین یک شرط لازم برای اینکه یک تقریب خوش تعریف باشد این است که برای هر نقطه نمونه $^{37} X \in \Omega$ حداقل m تابع وزن ناصفر باشند (یعنی $n \geq m$) و نقاط نمونه مذکور در Ω_s طبق الگوی خاصی مثلا روی یک خط مستقیم قرار ندارند. یک نقطه نمونه X ممکن است یک نقطه گره تحت ملاحظات یا یک نقطه تربیع 38 (نقطه انتگرال گیری عددی) باشد. با محاسبه $\mathbf{a}(X)$ از (۱۷.۱) و قرار دادن آن در (۸.۱) رابطه زیر به دست می آید:

$$u^h(X) = \Phi^T(X) \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \phi_i(X) \hat{u}_i \quad (19.1)$$

که

$$\Phi^T(X) = \mathbf{P}^T(X) A^{-1}(X) B(X)$$

و

$$\phi_i(X) = \sum_{j=1}^m p_j(X) [A^{-1}(X) B(X)]_{ji} \quad (20.1)$$

$\phi_i(X)$ را تابع شکل 39 تقریب MLS متناظر با گره X_i می گوییم، با توجه به (۱۸.۱) و (۲۰.۱) می توان ملاحظه کرد که $\phi_i(X) = 0$ فقط وقتی که $w_i(X) = 0$ در کاربردهای عملی در حالت کلی $w_i(X)$ طوری انتخاب می شود که روی محمل نقاط گره X_i ناصفر باشد. محمل X_i را معمولا دایره ای به مرکز X_i و شعاع r_s در نظر می گیریم. رابطه $\phi_i(X) = 0$ (به ازای X هایی که در محمل X_i قرار ندارند) ویژگی محلی بودن تقریب MLS را حفظ می کند.

فرض کنید $C^q(\Omega)$ فضای توابعی باشد که تا مرتبه q روی Ω به طور پیوسته مشتق پذیر هستند. اگر $\phi_i(X) \in C^r(\Omega)$ آنگاه $j = 1, 2, \dots, m$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، $p_j(X) \in C^s(\Omega)$ و $w_i(X) \in C^q(\Omega)$

³⁷Sample point³⁸Quadrature³⁹Shape function



که $r = \min(q, s)$. مشتقات جزئی $\phi_i(X)$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\phi_{i,k} = \sum_{j=1}^n [p_{j,k}(A^{-1}B)_{j,i} + p_j(A^{-1}B_{,k} + A_{,k}^{-1}B)_{ji}] \quad (21.1)$$

که در آن $A_{,k}^{-1} = (A^{-1})_{,k}$ مشتق جزئی A^{-1} نسبت به مختص k ام X است و به صورت زیر محاسبه می‌شود [۶۱]:

$$A_{,k}^{-1} = -A^{-1}A_{,k}A^{-1}$$

لازم به ذکر است که نماد $(\)_{,k}$ به معنی $\partial(\)/\partial x_k$ که x_k مختص k ام X است. از (۲۱.۱) مشتقات جزئی مرتبه دوم $\phi(X)$ به صورت زیر نتیجه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \phi_{i,kl} = & \sum_{j=1}^n [p_{j,kl}(A^{-1}B)_{ji} + p_{j,k}(A^{-1}B_{,l} + A_{,l}^{-1}B)_{ji} \\ & + p_{j,l}(A^{-1}B_{,k} + A_{,k}^{-1}B)_{ji} + p_j(A^{-1}B_{,kl} + A_{,kl}^{-1}B \\ & + A_{,l}^{-1}B_{,k} + A_{,k}^{-1}B_{,l})_{ji}] \end{aligned}$$

که

$$A_{,kl}^{-1} = A^{-1}A_{,l}A^{-1}A_{,k}A^{-1} - A^{-1}A_{,kl}A^{-1} + A^{-1}A_{,k}A^{-1}A_{,l}A^{-1}$$

زمان استفاده از تقریب MLS در روش محلی پتروف-گالرکین ($MLPG$)، ابتدا باید توابع پایه $\mathbf{p}(X)$ و توابع وزن $w_i(X)$ انتخاب شوند. برای این منظور، از دو نوع تابع وزن گاوسی و اسپلاین با محمل‌های فشرده می‌توان استفاده کرد.

تابع وزن از نوع گاوسی متناظر با گره i ام در X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_i(X) = \begin{cases} \frac{\exp[-(d_i/c_i)^2] - \exp[-(r_i/c_i)^2]}{1 - \exp[-(r_i/c_i)^2]} & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0 & d_i \geq r_i \end{cases} \quad (22.1)$$



همچنین تابع وزن از نوع اسپلاین مرتبه چهار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_i(X) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4 & 0 \leq d_i \leq r_i \\ 0 & d_i \geq r_i \end{cases} \quad (23.1)$$

که $d_i = \|X - X_i\|$ ، c_i ثابت کنترل شکل تابع وزن w_i و r_s اندازه محمل برای تابع وزن w_i است. اندازه محمل یعنی r_s باید به قدری بزرگ باشد که تعداد کافی نقطه گره در Ω_s (به منظور تضمین پایداری) قرار گیرد. اما یک r_s خیلی کوچک ممکن است منجر به خطای عددی نسبی بزرگ در استفاده از انتگرال‌گیری عددی گاوسی در حل سیستم ماتریسی شود. از طرفی r_s باید به اندازه کافی کوچک باشد تا ویژگی محلی برای تقریب MLS حفظ شود. انتخاب c_i با اینکه کم و بیش دلخواه است ولی به طور قابل توجهی در نتایج محاسبات تاثیر دارد. لو^{۴۰} و بلیتسچکو^{۴۱} (۱۹۹۴) روشی برای انتخاب ثابت‌های c_i پیشنهاد کردند.

با توجه به (۲۲.۱) و (۲۳.۱) به سادگی می‌توان دید تابع وزن گاوسی روی کل دامنه یعنی Ω متعلق به C^0 است. بنابراین توابع شکل و تابع جواب نیز روی کل دامنه متعلق به C^0 هستند. تابع وزن اسپلاین مرتبه ۴ روی کل دامنه متعلق به C^1 است. بنابراین توابع شکل تولید شده در روش MLS و تابع جواب نیز روی کل دامنه متعلق به C^1 هستند.

۹.۱ آزمودن

در گام سوم روش‌های بدون شبکه ضرایب مجهول تابع تقریب که به صورت $u^h(X) = \sum_{i=1}^n a_i p_i(X)$ معرفی شد باید طوری تعیین شوند که این تابع به صورت ضعیف یا قوی در معادلات حاکم صدق کند. چندین روش آزمودن تا به حال ارایه شده‌اند که می‌توان آنها را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱.۹.۱ آزمودن به شکل قوی (روش هم‌محلی)

این روش به طور گسترده در تقریب توابع پایه‌ای شعاعی روش ذرات هیدرودینامیکی هموار به کار می‌رود. در این روش، تابع تقریب جواب باید در یک مجموعه از نقاط متمایز (نقاط هم‌محلی) در

⁴⁰Lu

⁴¹Belytschko



معادلات حاکم صدق کند. تعداد این نقاط نباید از تعداد ضرایب مجهول کمتر باشد. در نتیجه مساله به یک دستگاه معادلات تبدیل می‌شود که در آن ضرایب تقریب مجهول هستند. این روش، یک روش ساده و سریع است. با این وجود، ناپایداری یکی از مشکلات این روش است. روش کانسا^{۴۲} [۱۶، ۱۷] یکی از معروف‌ترین روش‌های بدون شبکه می‌باشد. در این روش از توابع پایه‌ای شعاعی برای تقریب جواب استفاده می‌شود. لذا، اغلب این روش را روش هم‌محلی توابع پایه‌ای شعاعی نیز می‌نامند. این روش که مبتنی بر شکل قوی معادلات حاکم بر مساله است برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانسا برای حل معادلات جزیی بیضوی مورد استفاده قرار گرفت [۱۷].

۲.۹.۱ آزمودن به شکل ضعیف

روش‌های بدون شبکه‌ای که مبتنی بر شکل ضعیف معادلات هستند از انتگرال‌گیری‌های عددی روی زیر مجموعه‌هایی از دامنه که ممکن است به صورت سراسری یا محلی ساخته شده باشند استفاده می‌کنند. روش‌های مبتنی بر شکل ضعیف سراسری بر مبنای شکل ضعیف گالرکین هستند. جهت اجرای روش گالرکین نیاز به استفاده از شکل ضعیف یا تغییراتی مساله است. روش گالرکین با عناصر آزاد^{۴۳}، روش افزای یک و روش بازتولید اجزای هسته از روش گالرکین و برای محاسبه انتگرال‌های حاصل، از روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌کنند. در نتایج به دست آمده از اجرای این روش، چنین بیان شده که این روش هیچ جا به بن بست نمی‌رسد^{۴۴} و سرعت همگرایی می‌تواند از روش عنصر متناهی بیشتر باشد. از معایب این روش می‌توان به هزینه بالای اجرای این روش (انتگرال‌گیری در کل دامنه) اشاره نمود. ژو^{۴۵} (۱۹۹۹) و اتلوری^{۴۶} و ژو (۲۰۰۰) دو نوع روش بدون شبکه ارائه نمودند: روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی^{۴۷} (LBIE) و روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین^{۴۸}. هر دو روش از تقریب کمترین مربعات محلی استفاده می‌کنند. اما برای به دست آوردن مجهولات (که در اینجا مقادیر تابع هستند) روش LBIE از معادلات انتگرال مرزی و روش MLPG از معادلات انتگرال محلی استفاده می‌کند. معادلات باید روی زیر دامنه‌های با شکل منظم برقرار باشند و انتگرال‌ها روی این زیر دامنه‌ها و مرز آنها محاسبه می‌شوند.

^{۴۲}Kansa's method

^{۴۳}Element Free Galerkin(EFG)

^{۴۴}Do not exhibit any volumetric locking

^{۴۵}Zhu

^{۴۶}Atluri

^{۴۷}Meshless Local Boundary Integral Equation

^{۴۸}Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)



۱۰.۱ روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین

روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین ($MLPG$) یکی از عمومی ترین و پرکاربردترین روش های بدون شبکه در سال های اخیر است. این روش برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط اتلوری و ژو معرفی گردید که به طور چشمگیری مورد استقبال و استفاده محققین برای حل مسایل قرار گرفته است و پس از آن به طور عمیق تر توسط اتلوری و شن^{۴۹} مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت که منجر به تدوین دو کتاب در این زمینه شده است [۵۷، ۵۸]. این روش کلاس نسبتاً تازه ای از روش های بدون شبکه ایی است که در آن شکل ضعیف مساله به جای اینکه در کل دامنه ساخته شود در زیر دامنه هایی از کل دامنه مساله ساخته می شود. اساس این روش استفاده از معادلات ضعیف محلی که روی زیر دامنه ها ساخته می شوند برای آزمون و تقریب کمترین مربعات متحرک برای تقریب جواب است. اساس بسیاری از روش های بدون شبکه مبتنی بر شکل ضعیف، مانند روش گالرکین با عناصر آزاد، استفاده از شکل ضعیف مساله در کل دامنه می باشد. مهمترین مساله در اینگونه روش ها چگونگی محاسبه انتگرال های حاصل است، چون این انتگرال ها باید در کل دامنه محاسبه شوند. در روش $MLPG$ شکل ضعیف مساله را روی زیر دامنه هایی می سازیم که در کل دامنه قرار دارند که به آن شکل ضعیف محلی می گویند. این مهمترین خصوصیت روش $MLPG$ است که باعث کم شدن محاسبات می شود. برای حفظ هر چه بیشتر خصوصیت محلی بودن، علاوه بر اینکه شکل ضعیف مساله روی زیر دامنه ها ساخته می شود، از تقریب کمترین مربعات متحرک برای تقریب تابع مجهول در نقاطی که به طور تصادفی در دامنه و مرز مساله پخش شده اند استفاده می کنیم. به طور خلاصه، این روش از شکل ضعیف مساله و تقریب کمترین مربعات متحرک برای تبدیل مساله به یک دستگاه معادلات خطی یا غیرخطی استفاده می کند. انعطاف پذیری این روش در انتخاب تابع آزمون^{۵۰} منجر به ایجاد چند نوع متفاوت $MLPG$ شده است [۵۶، ۵۷، ۵۸، ۳، ۷۲]. در بخش بعد مراحل اجرای روش $MLPG$ با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک را که در مورد یک مساله گرمای وابسته به زمان به کار گرفته شده است به طور مختصر توضیح می دهیم.

۱۱.۱ روند اجرای روش $MLPG$

در روند اجرای روش $MLPG$ ابتدا باید مساله به شکل ضعیف محلی تبدیل شود و سپس با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک گسسته سازی شود. برای بررسی روند اجرای روش $MLPG$

⁴⁹Shen

⁵⁰Test function



مساله گرمای وابسته به زمان زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, y) \\ u(x, y, 0) = g_1(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y, t) = g_2(x, y, t), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \quad (24.1)$$

که $\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ عملگر لاپلاس دو بعدی است.

۱.۱۱.۱ گسسته‌سازی زمانی

برای مسایل وابسته به زمان، باید به طریقی متغیر زمان را گسسته‌سازی کنیم که مساله تبدیل به مساله بیضوی در گام‌های زمانی متفاوت گردد. چندین روش برای گسسته‌سازی متغیر زمان وجود دارد که در اینجا از روش تفاضلات متناهی استفاده می‌کنیم. تقریب تفاضلات متناهی متغیر زمان به روش θ به صورت زیر است:

$$\theta \frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} + (1 - \theta) \frac{\partial u^k}{\partial t} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (25.1)$$

با در نظر گرفتن معادله گرما در دو گام زمانی k و $k+1$ داریم

$$\theta \frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} = \theta \Delta u^{k+1} + \theta f^{k+1} \quad (26.1)$$

$$(1 - \theta) \frac{\partial u^k}{\partial t} = (1 - \theta) \Delta u^k + (1 - \theta) f^k \quad (27.1)$$



با توجه به (۲۵.۱)، (۲۶.۱) و (۲۷.۱)، شکل گسسته معادله گرما در (۲۴.۱) به صورت زیر است:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \theta \Delta u^{k+1} + (1 - \theta) \Delta u^k + \theta f^{k+1} + (1 - \theta) f^k \quad (28.1)$$

به ازای $\theta = \frac{1}{2}$ (کرانک-نیکلسون)، (۲۸.۱) به شکل گسسته تک گامی زیر تبدیل می شود:

$$u^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} \Delta u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2} \Delta u^k + \frac{\Delta t}{2} (f^{k+1} + f^k) \quad (29.1)$$

۲.۱۱.۱ فرمول بندی ضعیف محلی

نقاط $i = 1, 2, \dots, N$ ، $X_i = (x_i, y_i)$ را در دامنه و روی مرز آن در نظر می گیریم. فرض می کنیم Ω_{q_i} زیر دامنه ای از دامنه مساله یعنی Ω و شامل نقطه X_i باشد. شکل ضعیف محلی (۲۹.۱) روی زیر دامنه Ω_{q_i} به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega_{q_i}} [u^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} \Delta u^{k+1}] \nu dX = \int_{\Omega_{q_i}} [u^k + \frac{\Delta t}{2} \Delta u^k + \frac{\Delta t}{2} (f^{k+1} + f^k)] \nu dX \quad (30.1)$$

که ν یک تابع آزمون است. انتخاب های متفاوت تابع آزمون منجر به انواع مختلفی از روش $MLPG$ می شود که چند نوع آن را به طور مختصر توضیح می دهیم.

روش $MLPG1$: در این روش برای به دست آوردن معادلات گسسته شده، تابع جواب با توابع MLS ، RBF و ... تقریب زده می شود و از تابع وزن MLS به عنوان تابع آزمون در هر زیربازه استفاده می شود. انتگرال های عددی نقش مهمی در همگرایی این روش دارند. توابع حاصل از درونیابی این روش با استفاده از تقریب MLS ، که به عنوان توابع پایه ای استفاده می شوند به طور طبیعی از پیچیدگی بالایی برخوردار هستند که این موجب شده دقت انتگرال گیری به شکل ضعیف با سختی بالاتری در انواع روش های گالرکین همراه باشد. بنابراین، این روش با صرف هزینه های بالایی به محاسبه انتگرال ها می پردازد و در نتیجه به ندرت از آن استفاده می شود. اما مزیت این روش آن است که تقریب MLS به صورت محلی است. بنابراین، می تواند جواب را بهتر تقریب بزند.

روش $MLPG2$: در این روش معادلات گسسته شده از فرمول بندی ضعیف محلی نامتقارن به



دست می‌آیند و مثل روش قبل تابع جواب با توابع MLS ، RBF و ... تقریب زده می‌شود و از تابع دلتای دیراک به عنوان تابع آزمون استفاده می‌شود و با توجه به شکل ضعیف، به دستگاه گسسته شده‌ای شامل معادلات خطی می‌رسیم. با توجه به خواص تابع دلتای دیراک متوجه می‌شویم که این دستگاه فقط شامل مشتقات توابع جواب و عاری از هر گونه انتگرال‌گیری است و اگر توابع پایه‌ای شامل توابع پایه‌ای روش MLS باشد با توجه به پیچیدگی این توابع محاسبه مشتقات دوم این توابع با صرف هزینه‌های بالایی همراه است.

روش $MLPG3$: در این روش معادلات گسسته شده از فرمول‌بندی ضعیف محلی متقارن به دست می‌آیند و تابع جواب با توابع MLS ، RBF و ... تقریب زده می‌شود و از تابع هوی‌ساید^{۵۱}

$$\nu(X) = \begin{cases} 1, & X \in \Omega_{q_i} \\ 0, & X \notin \Omega_{q_i} \end{cases} \quad (31.1)$$

به عنوان تابع آزمون در هر زیردامنه محلی استفاده می‌شود. سپس، به کمک این معادلات به یک دستگاه معادلات خطی می‌رسیم. همانطور که قبلاً گفته شد انتگرال‌های عددی نقش بسیار مهمی در همگرایی جواب‌های عددی روش‌های بدون شبکه ایفا می‌کنند و ممکن است محاسبه آنها مشکل باشد. در این روش، انتگرال‌گیری فقط شامل انتگرال‌گیری روی مرز است و همین موضوع باعث شده است جواب حاصل از این روش سریع، پایدار و با دقت بالایی به دست آید.

روش $MLPG4$: برای به دست آوردن جواب مساله از شکل ضعیف با استفاده از این روش، باید توابعی را که به عنوان تابع آزمون انتخاب می‌کنیم همان توابعی باشند که برای تابع جواب انتخاب شده‌اند. به عنوان مثال، این توابع می‌توانند توابع MLS ، RBF و ... باشند. بنابراین، با توجه به آگاهی که از شکل ضعیف متقارن داریم انتگرال‌های ایجاد شده بسیار پیچیده هستند. اتلوری، کیم^{۵۲} و چو^{۵۳} با جزئیات بیشتری این نوع $MLPG$ را مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتایج حاصل از این مطالعه نشان داده است که این روش به دلیل محاسبات پیچیده، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵۶، ۵۹].

با به کارگیری روش $MLPG3$ و استفاده از تابع هوی‌ساید به عنوان تابع آزمون و همچنین

⁵¹Heavy Side

⁵²Kim

⁵³Cho



استفاده از قضیه گرین در (۳۰.۱) داریم:

$$\int_{\Omega_{q_i}} u^{k+1} dX - \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_{q_i}} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} ds = \int_{\Omega_{q_i}} u^k dX + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_{q_i}} \frac{\partial u^k}{\partial n} ds + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_{q_i}} (f^{k+1} + f^k) dX \quad (32.1)$$

۳.۱۱.۱ گسسته سازی *MLPG*

پس از ساختن شکل ضعیف محلی و ساده سازی آن، این معادلات باید گسسته شوند. در روش *MLPG*، گسسته سازی فضای جواب به ϕ_j ها بستگی دارد. به عبارت دیگر می توان گفت یک تقریب خوب به قدرت فضای جوابش بستگی دارد. در این قسمت و در سراسر رساله با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک گسسته سازی را انجام می دهیم.

فرض می کنیم فاصله هر دو نقطه گره متوالی در هر راستا برابر مقدار ثابت h و $u(X_i, k\Delta t)$ معلوم باشند. $i = 1, 2, \dots, N$ هدف ما محاسبه $u(X_i, (k+1)\Delta t)$ است. بنابراین، N مجهول داریم و برای محاسبه آنها نیاز به N معادله داریم. متناظر با هر نقطه گره X_i ، یک معادله به دست می آوریم. به این صورت که برای نقاط گره داخلی Ω ، به منظور یافتن معادلات گسسته از شکل ضعیف محلی، در (۳۲.۱) تقریب کمترین مربعات متحرک در (۱۹.۱) را در معادلات انتگرالی محلی (۳۲.۱) جایگزین می کنیم. بنابراین داریم:

$$\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_{q_i}} \phi_j dX \right) \hat{u}_j^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_{q_i}} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \right) \hat{u}_j^{k+1} = \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_{q_i}} \phi_j dX \right) \hat{u}_j^k + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_{q_i}} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \right) \hat{u}_j^k + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_{q_i}} (f^{k+1} + f^k) dX \quad (33.1)$$

برای نقاط گره روی مرز یعنی $\partial\Omega$ با توجه به شرایط مرزی و تقریب کمترین مربعات متحرک، رابطه زیر به دست می آید:

$$\sum_{j=1}^N \phi_j(X_i) \hat{u}_j^{k+1} = g_2^{k+1}(X_i) \quad (34.1)$$



دستگاه معادلات (۳۳.۱) و (۳۴.۱) را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$(A - \frac{\Delta t}{2}B)\hat{u}_j^{k+1} = (A + \frac{\Delta t}{2}B)\hat{u}_j^k + C \quad (35.1)$$

که A و B ماتریس‌هایی $N \times N$ و C برداری $N \times 1$ است.

مراحل کلی اجرای روش $MLPG$ با استفاده از تقریب MLS به عنوان تابع جواب در هر زیردامنه Ω_s به صورت کلی زیر است:

۱. نقاط $X_i, i = 1, 2, \dots, N$ را در دامنه مساله یعنی Ω و روی مرز آن یعنی $\partial\Omega$ انتخاب می‌کنیم.
۲. شروع حلقه تکرار روی نقاط X_i :
 - (الف) برای هر نقطه X_i ، زیردامنه محلی Ω_{s_i} را تعریف می‌کنیم. این زیردامنه‌ها باید به گونه‌ای باشند که به اندازه کافی همپوشانی داشته باشند به طوریکه که کل نقاط X_i و دامنه مساله را پوشش دهند. از طرفی، باید کوچک باشند که خاصیت محلی بودن را حفظ کنند.
 - (ب) برای هر نقطه X_i در Ω_{s_i} ، زیردامنه محلی Ω_{q_i} در Ω_{s_i} را طوری در نظر می‌گیریم که این زیر دامنه و مرز آن فقط شامل یک نقطه X_i از نقاط داخلی Ω_{s_i} باشد.
 - (پ) نقاط انتگرال‌گیری X_{q_j} (مثلا نقاط انتگرال‌گیری گاوسی) را در Ω_{q_i} و روی مرز آن یعنی $\partial\Omega_{q_i}$ مشخص می‌کنیم و برای هر نقطه X_{q_j} محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:
 - (ت) شروع حلقه تکرار روی نقاط انتگرال‌گیری:

نقاط X_i را که در دامنه MLS در نقطه X_{q_j} قرار دارند را مشخص می‌کنیم. یعنی، آن دسته از نقاطی که برای آنها داشته باشیم $w_i(X_{q_j}) > 0$. برای نقاط X_i که در دامنه تقریب MLS قرار دارند $\phi_i(X_{q_j})$ و مشتقات تا مرتبه مورد نیاز آن را محاسبه می‌کنیم.

– پایان حلقه تکرار روی نقاط انتگرال‌گیری.
 - (ث) انتگرال‌های عددی را روی Ω_{q_i} و $\partial\Omega_{q_i}$ محاسبه می‌کنیم.
 - پایان حلقه تکرار روی نقاط $X_i, i = 1, 2, \dots, N$.

۳. دستگاه معادلات به دست آمده را به منظور یافتن مجهولات مورد نظر حل می‌کنیم.

با توجه به روند اجرای روش $MLPG$ ملاحظه می‌کنیم که این روش، یک روش واقعا بدون شبکه است. به طوری که، نقاط گره X_i در دامنه و روی مرز آن به هیچ وجه، چه برای درونیایی و چه برای انتگرال‌گیری عددی لازم نیستند. انتگرال‌های روی دامنه و مرز را می‌توان به راحتی روی زیردامنه‌های با شکل منظم (مثلا در حالت دو بعدی دایره و در حالت سه بعدی کره) با روش‌های انتگرال‌گیری عددی مثل روش گاوس محاسبه کرد.

فصل ۲

کاربرد روش $MLPG$ برای حل مساله

معکوس استفان با استفاده از تقریب MLS



۱.۲ مقدمه

مسایل با مرز آزاد برای معادله انتقال حرارت، دسته‌ای از مسایل هستند که در آنها بخشی از دامنه مکانی با زمان تغییر می‌کند و معادله مرز آزاد از قبل مشخص نیست. به منظور تعیین مرز آزاد لازم است که شرایط جدیدی بر تابع مجهول تحمیل شود که این شرایط به ساختار فیزیکی مساله بستگی دارد. معادلات حرارت با مرز آزاد منشا به وجود آمدن مساله استفان^۱ هستند. به عنوان مثال، در مورد کوره بلند تولید آهن [۷۰] می‌توانیم دما یا شار گرما^۲ را در بخش قابل دسترسی از مرز اندازه‌گیری کنیم و سپس از روش معکوس^۳ برای تعیین مرز آزاد مجهول استفاده کنیم. مساله استفان می‌تواند در مدل‌بندی مساله انتشار-مصرف^۴ اکسیژن در یک بافت زنده^۵، مساله ریخته‌گری پیوسته و سایر فرآیندهای انجماد استفاده شود. ایوانز^۶ و کینگ^۷ در [۲۸] شرح مدل‌هایی را ارائه داده‌اند که منجر به مساله یک بعدی استفان می‌شوند. گاهی می‌توان داده‌های دما یا شار گرما را در بخش قابل دسترس مرز اندازه‌گیری کرد و سپس حرکت مرز مجهول را تعیین کرد. این مسایل اغلب به عنوان مسایل تعیین مرز^۸ شناخته می‌شوند [۲۹]. بیشتر مسایل معکوس تعیین مرز متعلق به خانواده مسایلی هستند که به مفهوم هادامارد^۹ بدوضع^{۱۰} هستند [۳۰]. بنکس^{۱۱} و کوجیما^{۱۲} [۲۰]، و بنکس و همکارانش [۲۱] روشهای ساخت مجدد^{۱۳} را برای مسایل تعیین مرز معادلات سهموی^{۱۴} پیشنهاد کردند. فریدمن^{۱۵} در [۷۰] با استفاده از روش خطوط^{۱۶}، یک تقریب از مرز متحرک برای یک مساله یک بعدی ارائه کرد. هون^{۱۷} و لی^{۱۸} [۷۷] یک روش بدون شبکه از

¹Stefan problem

²Heat flux

³Inversion technique

⁴diffusion-consumption

⁵Living tissue

⁶Evans

⁷King

⁸Boundary identification

⁹Hadamard

¹⁰Ill-posed

¹¹Banks

¹²Kojima

¹³Reconstruction methods

¹⁴parabolic

¹⁵Fredman

¹⁶Method of lines

¹⁷Hon

¹⁸Li



جواب‌های بنیادی^{۱۹} (MFS) برای حل یک مساله معکوس تعیین مرز ارایه دادند و چانتاسیروان^{۲۰} و همکارانش [۶۴] آن را برای حل عددی مساله معکوس استفان تعیین رابط گسترش دادند. اسلوتا^{۲۱} و زیلونکا^{۲۲} [۱۴] روش تکراری تغییراتی هی^{۲۳} را برای حل مساله استفان یک فاز به کار بردند. با این حال، هنگامی که رابط متحرک از نظر زمانی پیچیده باشد، روش‌های فوق ممکن است دریافتن جواب موفق نباشند. در این فصل یک الگوریتم بر مبنای روش بدون شبکه محلی پتروف گالرکین ($MLPG$) با استفاده تقریب کمترین مربعات متحرک (MLS) برای حل مساله معکوس مرز آزاد ارایه شده است. ابتدا با استفاده از یک تغییر متغیر، مساله مرز آزاد به یک مساله با مرز ثابت تبدیل شده و سپس با اعمال روش $MLPG$ یک سیستم معادلات حاصل می‌شود که با حل آن مرز آزاد و جواب مساله به دست می‌آید. نتایج عددی به دست آمده نشان دهنده دقت مناسب تقریب‌های به دست آمده با وجود اختلال در داده‌های ورودی است.

۲.۲ فرمول‌بندی مساله

معادله انتقال حرارت

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < s(t), \quad 0 < t < T, \quad (۱.۲)$$

را با شرایط اولیه

$$v(y, 0) = f(y), \quad 0 < y < s_0, \quad s_0 = s(0), \quad (۲.۲)$$

و شرط مرزی

$$v(0, t) = g(t), \quad (۳.۲)$$

¹⁹Fundamental solutions

²⁰Chantasiriwan

²¹Slota

²²Zielonka

²³He's variational iteration method



در نظر می‌گیریم، که α ضریب نفوذ حرارتی ^{۲۴} $v(y, t)$ و y به ترتیب تابع حرارت، متغیر زمان و متغیر مکانی ^{۲۵} هستند. روی مرز آزاد ^{۲۶} $s(t)$ داریم:

$$v(s(t), t) = h(t), \quad (۴.۲)$$

$$\beta \frac{\partial v(y, t)}{\partial y} \Big|_{y=s(t)} = \kappa \frac{ds(t)}{dt}, \quad (۵.۲)$$

که β ضریب رسانایی حرارتی ^{۲۷} و κ ضریب گرمای نهان همجوشی ^{۲۸} در واحد حجم می‌باشد. در این مساله، (۴.۲) را معادله تداوم دما ^{۲۹} و (۵.۲) را شرط استفان می‌گویند. در مساله معکوس هدف تعیین تابع حرارت $v(y, t)$ و مرز آزاد $s(t)$ است. تغییر متغیر

$$x = \frac{y}{s(t)}, \quad y = xs(t), \quad (۶.۲)$$

را در نظر می‌گیریم و تابع $u(x, t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u(x, t) = v(xs(t), t)$$

²⁴Thermal diffusivity coefficient

²⁵Spatial variable

²⁶Free boundary

²⁷Thermal conductivity coefficient

²⁸Latent heat of fusion

²⁹Continuity of temperature



با اعمال تغییر متغیر (۶.۲) مساله مرز آزاد اولیه تعریف شده توسط معادلات (۵.۲)–(۱.۲) به مساله با مرز ثابت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{1}{s^2(t)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + x \frac{s'(t)}{s(t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (۷.۲)$$

$$u(x, 0) = f(s_0 x), \quad 0 < x < 1, \quad s_0 = s(0), \quad (۸.۲)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad (۹.۲)$$

$$u(1, t) = h(t), \quad (۱۰.۲)$$

$$\beta \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \kappa s(t) s'(t). \quad (۱۱.۲)$$

در ادامه یک روند عددی بر مبنای روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین (MLPG) و با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک (MLS) برای حل مساله مطرح شده ارائه می‌دهیم.

۳.۲ گسسته‌سازی زمانی مساله

با استفاده از تقریب‌های تفاضل متناهی برای عملگرهای مشتق‌گیری نسبت به زمان به صورت

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t} (u^{k+1}(x) - u^k(x)), \quad (۱۲.۲)$$

$$s'(t) \cong \frac{1}{\Delta t} (s^{k+1} - s^k), \quad (۱۳.۲)$$

که $\Delta t = \frac{T}{M}$, $j = 0, 1, \dots, M$, $t_j = t_0 + j\Delta t$, $s^j = s(t_j)$, $u^j(x) = u(x, t_j)$ و همچنین با استفاده از روش کرانک-نیکلسون^{۳۰} تقریب‌های زیر را داریم:

$$\frac{1}{s^2(t)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s^{k+1})^2} u_{xx}^{k+1} + \frac{1}{(s^k)^2} u_{xx}^k \right), \quad (۱۴.۲)$$

$$\frac{1}{s(t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^{k+1}} u_x^{k+1} + \frac{1}{s^k} u_x^k \right). \quad (۱۵.۲)$$

³⁰ Crank-Nicolson



با استفاده از تقریب‌های اخیر (۷.۲) و (۱۱.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} &= \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{(s^{k+1})^2} u_{xx}^{k+1} + \frac{1}{(s^k)^2} u_{xx}^k \right) \\ &+ \frac{s^{k+1} - s^k}{2\Delta t} x \left(\frac{1}{s^{k+1}} u_x^{k+1} + \frac{1}{s^k} u_x^k \right), \end{aligned} \quad (۱۶.۲)$$

$$\frac{s^{k+1} - s^k}{\Delta t} = \frac{\beta}{\kappa} \frac{1}{s^k} u_x^k(1). \quad (۱۷.۲)$$

فرض می‌کنیم $\lambda = \frac{2}{\Delta t}$ ، در این صورت روابط اخیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \lambda(u^{k+1} - u^k) &= \alpha \left(\frac{1}{(s^{k+1})^2} u_{xx}^{k+1} + \frac{1}{(s^k)^2} u_{xx}^k \right) \\ &+ \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^k}{s^{k+1}} \right) x u_x^{k+1} - \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^{k+1}}{s^k} \right) x u_x^k, \end{aligned} \quad (۱۸.۲)$$

$$s^{k+1} = s^k + \frac{\beta}{\kappa} \Delta t \left(\frac{1}{s^k} u_x^k(1) \right). \quad (۱۹.۲)$$

۴.۲ شکل ضعیف مساله گسسته شده

نقاط $i = 1, 2, \dots, N, x_i$ را در دامنه مساله و روی مرز آن در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم Ω_q^i زیردامنه محلی در دامنه کلی مساله یعنی Ω و متناظر با نقطه x_i باشد. در این فصل زیردامنه‌های محلی Ω_q^i بازه‌هایی به مرکز x_i و شعاع r_q هستند. با به کارگیری روش $MLPG$ شکل ضعیف محلی^{۳۱} مساله روی هر زیردامنه محلی Ω_q^i به دست می‌آید. برای هر نقطه x_i ، شکل ضعیف محلی (۱۸.۲) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_q^i} (u^{k+1} - u^k) \nu(x) dx &= \int_{\Omega_q^i} \alpha \left(\frac{1}{(s^{k+1})^2} u_{xx}^{k+1} + \frac{1}{(s^k)^2} u_{xx}^k \right) \nu(x) dx + \\ &\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_q^i} \left(\left(1 - \frac{s^k}{s^{k+1}} \right) x u_x^{k+1} \right) \nu(x) dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_q^i} \left(\left(1 - \frac{s^{k+1}}{s^k} \right) x u_x^k \right) \nu(x) dx, \end{aligned} \quad (۲۰.۲)$$

³¹Local weak form



که در آن تابع هوی ساید

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_q^i, \\ 0, & x \notin \Omega_q^i. \end{cases} \quad (21.2)$$

به عنوان تابع آزمون استفاده شده است. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء در (20.2) شکل ضعیف محلی زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\Omega_q^i} u^{(k+1)} dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_q^i} \left((1 - \frac{s^k}{s^{k+1}}) x u_x^{(k+1)} \right) dx - \frac{\alpha}{(s^{k+1})^2} u_x^{(k+1)}|_{\partial\Omega_q^i} = \\ & \lambda \int_{\Omega_q^i} u^{(k)} dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega_q^i} \left((1 - \frac{s^{k+1}}{s^k}) x u_x^{(k)} \right) dx + \frac{\alpha}{(s^k)^2} u_x^{(k)}|_{\partial\Omega_q^i}, \end{aligned} \quad (22.2)$$

که $\partial\Omega_q^i$ مرز زیردامنه محلی Ω_q^i است.

5.2 گسسته سازی MLPG

در این بخش با گسسته سازی معادلات (22.2) با استفاده از تقریب MLS یک دستگاه معادلات به دست می آوریم. نقاط $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ را در دامنه مساله و روی مرز آن در نظر می گیریم. فرض می کنیم $u(x_i, t_k)$ معلوم و $u(x_i, t_{k+1})$ مجهول باشند. برای تعیین N کمیت مجهول $u(x_i, t_{k+1})$ به N معادله نیاز داریم. برای نقاطی که درون دامنه یعنی Ω قرار دارند با جایگزینی فرمول تقریب کمترین مربعات متحرک (19.1) در (22.2) معادلات گسسته شده زیر نتیجه می شوند:

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx \right) u_j^{(k+1)} - \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^k}{s^{k+1}} \right) \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} x \phi_j'(x) dx \right) u_j^{(k+1)} - \\ & \frac{\alpha}{(s^{k+1})^2} \sum_{j=1}^N \phi_j'(x) u_j^{(k+1)}|_{\partial\Omega_q^i} = \lambda \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx \right) u_j^{(k)} - \\ & \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^{k+1}}{s^k} \right) \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} x \phi_j'(x) dx \right) u_j^{(k)} + \frac{\alpha}{(s^k)^2} \sum_{j=1}^N \phi_j'(x) u_j^{(k)}|_{\partial\Omega_q^i}. \end{aligned} \quad (23.2)$$



برای نقاط مرزی $x = 0$ و $x = 1$ با توجه به (۹.۲) و (۱۰.۲) قرا می‌دهیم:

$$u^{k+1}(0) = g(t_{k+1}), \quad (24.2)$$

$$u^{k+1}(1) = h(t_{k+1}), \quad (25.2)$$

همچنین شکل گسسته شده (۱۹.۲) به صورت زیر است:

$$s^{k+1} = s^k + \frac{\beta \Delta t}{\kappa s^k} \sum_{j=1}^N \phi_j'(1) u_j^{(k)}. \quad (26.2)$$

شکل ماتریسی (۲۳.۲)، (۲۴.۲) و (۲۴.۳) برای تمام N نقطه گره x_i به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left[\lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} - \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^k}{s^{k+1}} \right) \sum_{j=1}^N b_{ij} - \frac{\alpha}{(s^{k+1})^2} \sum_{j=1}^N c_{ij} \right] u_j^{(k+1)} = \\ & \left[\lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} - \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^{k+1}}{s^k} \right) \sum_{j=1}^N b_{ij} + \frac{\alpha}{(s^k)^2} \sum_{j=1}^N c_{ij} \right] u_j^{(k)}, \end{aligned} \quad (27.2)$$

که

$$a_{ij} = \int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx, \quad b_{ij} = \int_{\Omega_q^i} x \phi_j' dx, \quad c_{ij} = \phi_j'(x)|_{\partial \Omega_q^i}. \quad (28.2)$$

با فرض

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \lambda a_{ij} - \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^k}{s^{k+1}} \right) b_{ij} - \frac{\alpha}{(s^{k+1})^2} c_{ij}, \\ B_{ij} &= \lambda a_{ij} - \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{s^{k+1}}{s^k} \right) b_{ij} + \frac{\alpha}{(s^k)^2} c_{ij}, \end{aligned}$$



و $U = (u_i)_{N \times 1}$ و با توجه به (۲۶.۲) و (۲۷.۲) سیستم معادلات زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} s^{k+1} = s^k + \frac{\beta}{\kappa} \frac{\Delta t}{s^k} \sum_{j=1}^N \phi_j'(1) u_j^{(k)}, \\ AU^{(k+1)} = BU^{(k)}. \end{cases} \quad (29.2)$$

با توجه به شرایط مرزی (۲۴.۲) و (۲۴.۳) در هر گام داریم:

$$A_{11} = A_{NN} = 1, \quad \forall j \neq 1 : A_{1j} = 0, \quad \forall j \neq N : A_{Nj} = 0, \quad (30.2)$$

$$B_{11} = B_{NN} = 1, \quad \forall j \neq 1 : B_{1j} = 0, \quad \forall j \neq N : B_{Nj} = 0, \quad (31.2)$$

$$u_1^{k+1} = g(t_{k+1}), \quad u_N^{k+1} = h(t_{k+1}). \quad (32.2)$$

در گام زمانی اول یعنی وقتی که $k = 0$ ، با توجه به شرایط اولیه (۸.۲) و (۹.۲) روابط زیر را داریم:

$$U^{(0)} = [f(s_0 x_1), f(s_0 x_2), \dots, f(s_0 x_N)]^t, \quad (33.2)$$

$$s(0) = s_0. \quad (34.2)$$

۶.۲ نتایج عددی

در این بخش روش ارایه شده در این فصل را با مثال‌هایی مورد بررسی و آزمایش قرار می‌دهیم. در محاسبات عددی داده‌های کوشی ورودی بدون اختلال^{۳۲} و همچنین با اختلالی به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\tilde{g}(t_i) = g(t_i)(1 + \delta R(i)), \quad (35.2)$$

³²Noise



که δ سطح اختلال و $R(i)$ اعدادی تصادفی در بازه $[-1, 1]$ هستند. در مثال‌های ارایه شده انتگرال‌های عددی روی دامنه‌ها با استفاده از قاعده گاوس چهار نقطه‌ای تقریب زده شده‌اند. به منظور بررسی کارایی و دقت روش ارایه شده از فرمول‌های خطای ریشه میانگین مربعات ^{۳۳} (RMS) و خطای مطلق که به صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده شده است:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_{exact}(x_i, t_j) - u_{approx}(x_i, t_j))^2}{N}}, \quad (36.2)$$

$$Absolute\ error\ u = |u_{exact}(x_i, t_j) - u_{approx}(x_i, t_j)|, \quad (37.2)$$

$$Absolute\ error\ s = |s_{exact}(t_j) - s_{approx}(t_j)|. \quad (38.2)$$

در اجرای شکل ضعیف بدون شبکه هر دامنه محلی Ω_q^i به صورت بازه‌ای به مرکز x_i و شعاع $r_q = 0.7h$ در نظر گرفته شده است که $h = x_{i+1} - x_i$ ، $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. همچنین شعاع هر دامنه Ω_s برای تقریب MLS بصورت $r_s = 4r_q$ در نظر گرفته شده است و توابع پایه درجه دوم تعریف شده در (۱۰.۱) در (۸.۱) استفاده شده است.

مثال ۱.۶.۲. در مساله تعریف شده با (۱.۲) - (۵.۲) قرار می‌دهیم $\alpha = 1$ ، $T = 1$ ، $\beta = -1$ و $\kappa = 1$ همچنین فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(y) = \exp(1 - y), \quad g(t) = \exp(1 + t), \quad h(t) = 1.$$

جواب تحلیلی مساله با فرضیات بالا به صورت زیر است:

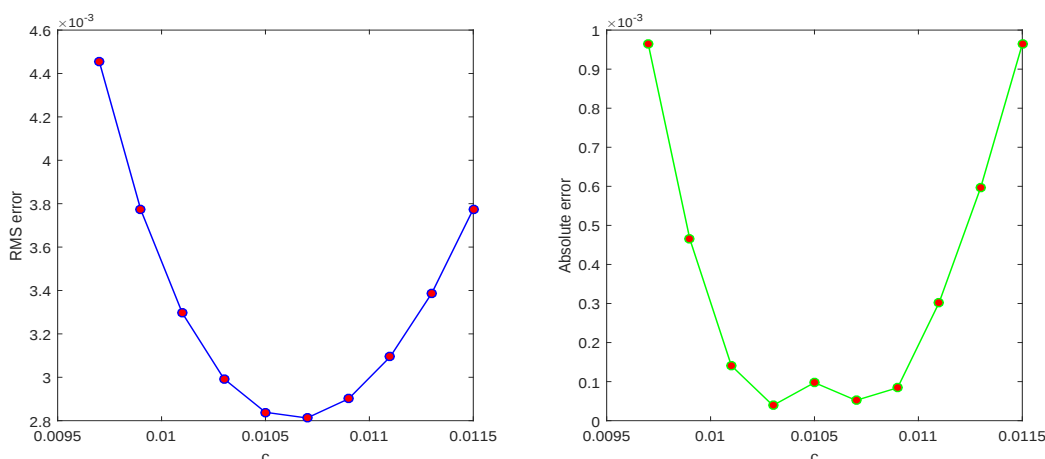
$$v(y, t) = \exp(1 - y + t), \quad s(t) = t + 1,$$

و در نتیجه داریم:

$$u(x, t) = v(xs(t), t) = \exp(1 - x(t + 1) + t), \quad s(t) = t + 1.$$

نتایج حاصل از اجرای روش ارایه شده با انتخاب $\Delta t = 0.01$ و $h = 0.01$ به دست آمده‌اند. در

³³Root Mean Squares

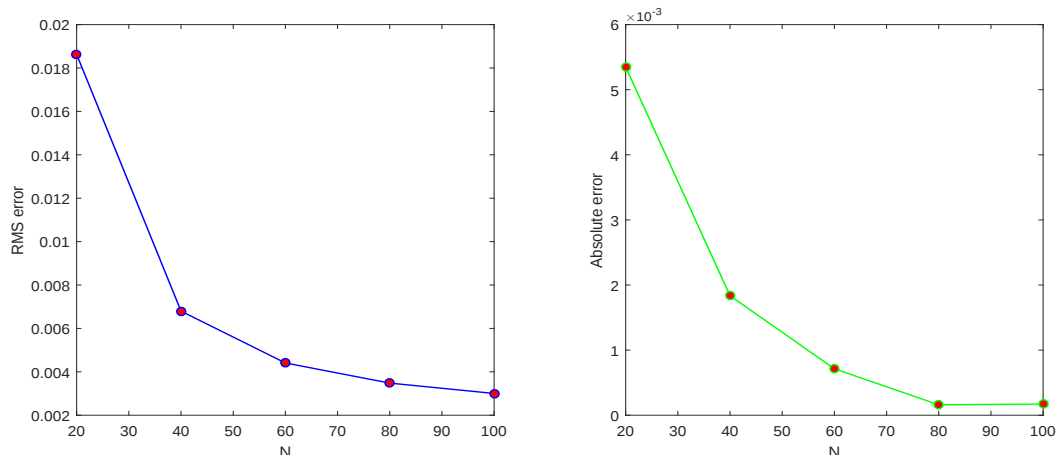


شکل ۱.۲: نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به پارامتر شکل c با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ و $\Delta t = 0.01$.

شکل ۱.۲ نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ نسبت به پارامتر شکل c در لحظه $t = 1$ نشان داده شده‌اند. برای مقادیر دیگر t نتایج مشابهی به دست می‌آید. در این مثال، بازه $(0.0097, 0.01155)$ برای انتخاب پارامتر شکل c پیشنهاد شده است. لازم به ذکر است که با افزایش مقدار c بدو وضعی رخ می‌دهد. در این مثال پارامتر شکل را برابر مقدار ثابت $c = 1.1h = 0.011$ در نظر می‌گیریم. در شکل ۲.۲، نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ بر حسب N رسم شده‌اند. با توجه به این شکل ملاحظه می‌شود که مقادیر خطای RMS با افزایش مقادیر N کاهش می‌یابند. مقادیر خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ با سطح اختلال $\delta = 0$ (بدون اختلال در داده‌های کوشی) و همچنین با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در جدول ۱.۲ ارائه شده است. نتایج جدول نشان می‌دهد زمانی که اختلال در داده‌ها وجود ندارد جواب‌های به دست آمده دارای دقت مناسبی هستند. همچنین وقتی که داده‌های ورودی همراه با اختلال هستند نتایج عددی به دست آمده از روش $MLPG$ در حد قابل قبول هستند. نمودارهای جواب‌های دقیق و عددی و همچنین خطاهای مطلق برای $u(x, t)$ و $s(t)$ در شکل‌های ۳.۲، ۴.۲ و ۵.۲ رسم شده‌اند.

مثال ۲.۶.۲. در این مثال، مساله (۱.۲) – (۵.۲) را با پارامترهای $\alpha = 1$ ، $T = 1$ ، $\beta = -1$ و $\kappa = 1$ در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم

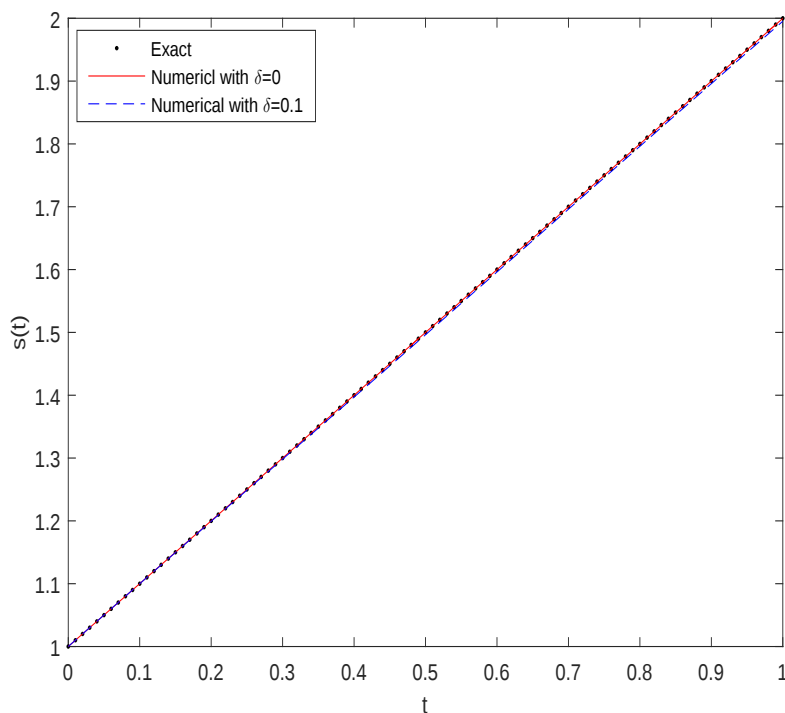
$$f(y) = \exp(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}(1+y)) - 1, \quad g(t) = \exp(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{t}{5}) - 1, \quad h(t) = 0.$$



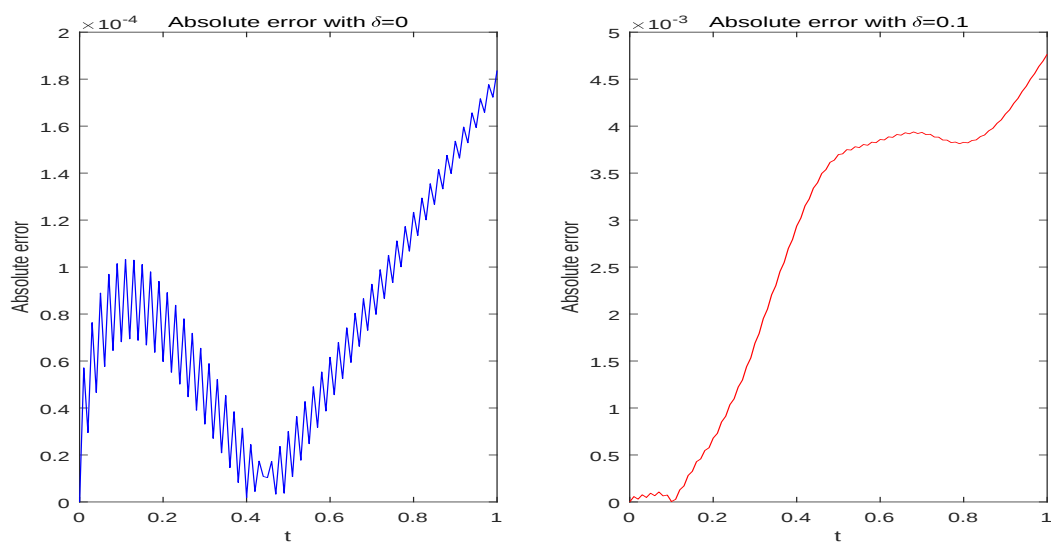
شکل ۲.۲: نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به N با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.

جدول ۱.۲: خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی برای گام‌های زمانی مختلف وقتی که $\Delta t = 0.01$ ، $c = 0.011$ و $h = 0.01$.

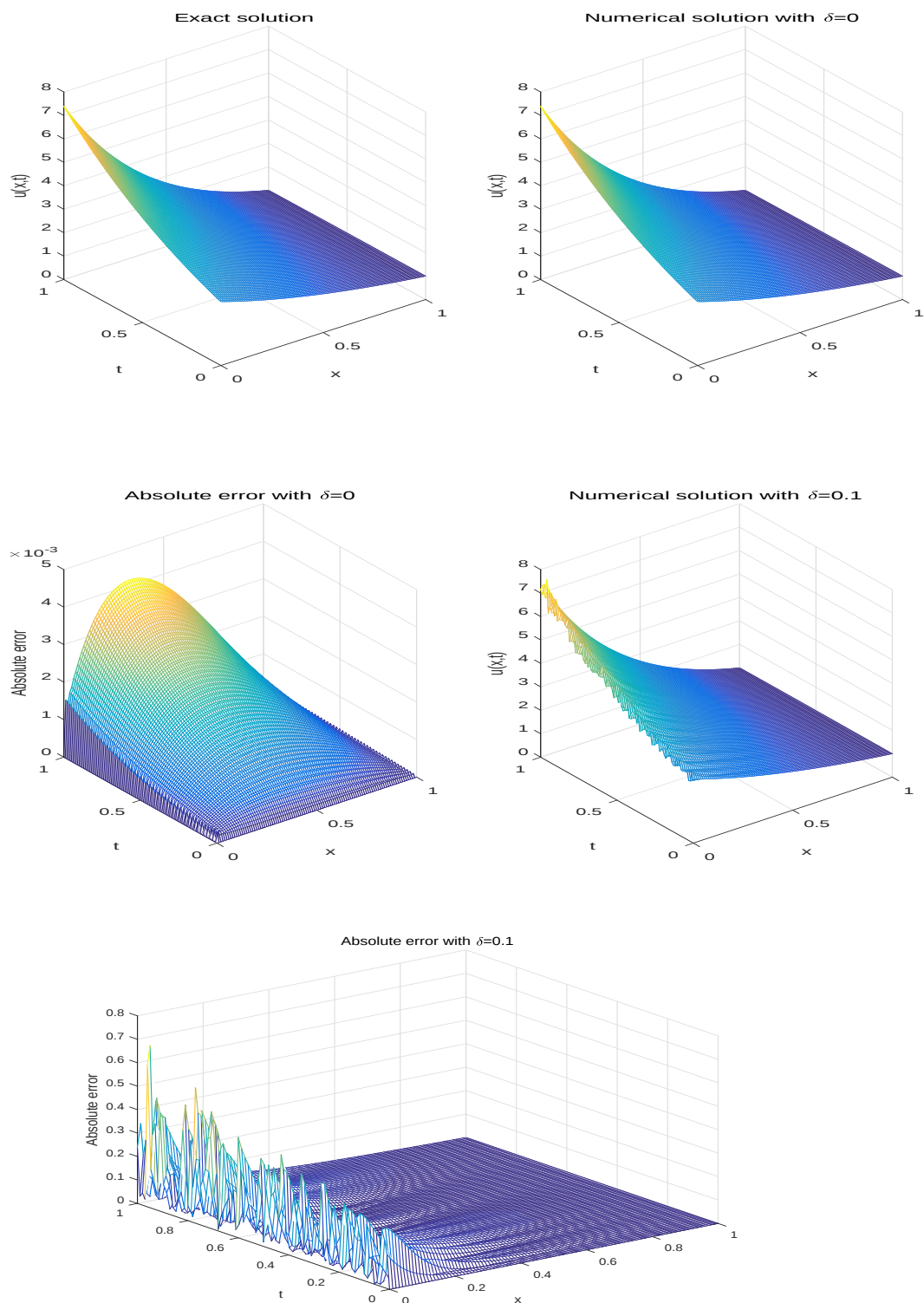
t	RMS Error for $u(x, t)$ with $\delta = 0$	RMS Error for $u(x, t)$ with $\delta = 0.1$	Absolute Error for $s(t)$ with $\delta = 0$	Absolute Error for $s(t)$ with $\delta = 0.1$
0	0	0	0	0
0.1	5.0608×10^{-4}	2.184549×10^{-2}	6.815×10^{-5}	4.45×10^{-6}
0.2	7.6318×10^{-4}	3.766709×10^{-2}	5.977×10^{-5}	6.7943×10^{-4}
0.3	9.7185×10^{-4}	5.135603×10^{-2}	3.313×10^{-5}	1.68936×10^{-3}
0.4	1.18114×10^{-3}	2.942010×10^{-2}	1.92×10^{-6}	2.93583×10^{-3}
0.5	1.40740×10^{-3}	3.451082×10^{-2}	3.002×10^{-5}	3.69751×10^{-3}
0.6	1.65791×10^{-3}	8.867908×10^{-2}	6.163×10^{-5}	3.85729×10^{-3}
0.7	1.93721×10^{-3}	6.922609×10^{-2}	9.272×10^{-5}	3.93321×10^{-3}
0.8	2.24902×10^{-3}	4.306378×10^{-2}	1.2333×10^{-4}	3.82775×10^{-3}
0.9	2.59697×10^{-3}	4.763296×10^{-2}	1.5360×10^{-4}	4.12823×10^{-3}
1.0	2.98488×10^{-3}	5.332613×10^{-2}	1.8367×10^{-4}	4.76457×10^{-3}



شکل ۳.۲: مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی برای $s(t)$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.



شکل ۴.۲: خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.



شکل ۵.۲: جواب دقیق و جواب تقریبی و خطای مطلق برای $u(x,t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.



در این صورت جواب تحلیلی مساله به صورت زیر است:

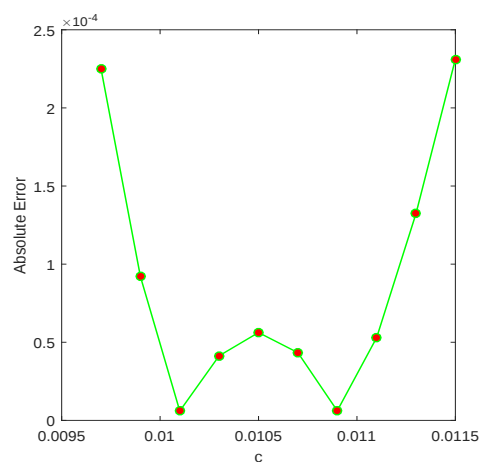
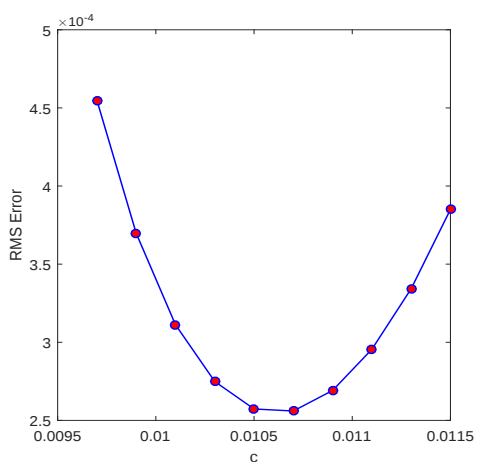
$$v(y, t) = \exp\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}(1 + y) + \frac{t}{5}\right) - 1, \quad s(t) = \frac{t}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1,$$

در نتیجه داریم:

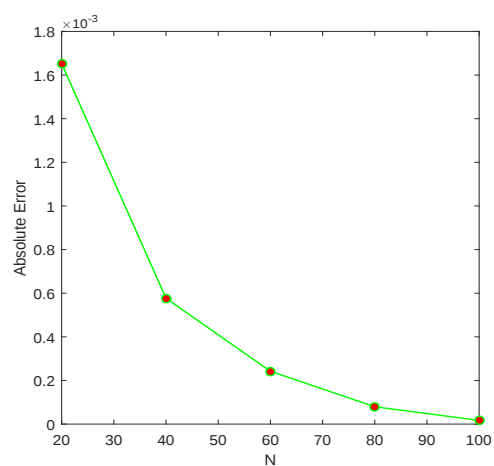
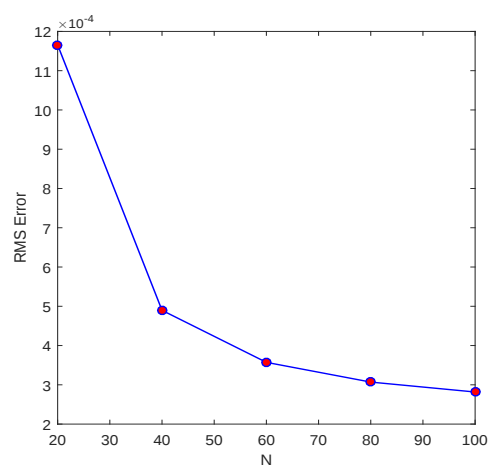
$$u(x, t) = v(xs(t), t) = \exp\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5}\left(1 + x\left(\frac{t}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1\right) + \frac{t}{5}\right)\right) - 1, \quad s(t) = \frac{t}{\sqrt{5}} + \sqrt{5} - 1.$$

نتایج حاصل از اجرای روش ارایه شده با انتخاب $\Delta t = 0.01$ و $h = 0.01$ به دست آمده‌اند. در شکل ۶.۲ نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ نسبت به پارامتر شکل c در لحظه $t = 1$ نشان داده شده است. برای مقادیر دیگر t نتایج مشابهی به دست می‌آید. در این مثال، بازه $(0.0097, 0.01155)$ برای انتخاب پارامتر شکل c پیشنهاد شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که با افزایش مقدار c بدوضعی رخ می‌دهد. در این مثال این پارامتر را برابر مقدار ثابت $c = 1.1h = 0.011$ در نظر می‌گیریم. در شکل ۷.۲، نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ بر حسب N رسم شده است. با توجه به این شکل ملاحظه می‌شود که مقادیر خطای RMS با افزایش مقادیر N کاهش می‌یابند. مقادیر خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ با سطح اختلال $\delta = 0$ (بدون اختلال در داده‌های کوشی) و همچنین با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در جدول ۲.۲ ارایه شده است. نتایج جدول نشان می‌دهد زمانی که اختلال در داده‌ها وجود ندارد جواب‌های به دست آمده دارای دقت مناسبی هستند. همچنین وقتی که داده‌های ورودی همراه با اختلال هستند نتایج عددی به دست آمده از روش $MLPG$ در حد قابل قبول هستند. نمودارهای جواب‌های دقیق و عددی و همچنین خطاهای مطلق برای $u(x, t)$ و $s(t)$ در شکل‌های ۸.۲، ۹.۲ و ۱۰.۲ رسم شده‌اند.

مثال ۳.۶.۲. در این مثال برای بررسی بیشتر کارایی و دقت روش ارایه شده، مقایسه‌ای برای مقادیر خطای مطلق میانگین بین روش حاضر (PM)، و نتایج به دست آمده با استفاده از روش تجزیه آدومین (ADM) و روش رانگ کوتای مرتبه چهار (RKM) ارایه شده در [۵۳] انجام شده است. برای این منظور مساله (۱.۲) - (۵.۲) را با پارامترهای $\alpha = 0.1$ ، $\kappa = 10$ ، $\beta = -1$ و $T = 0.5$ در



شکل ۶.۲: نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به پارامتر شکل c با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ و $\Delta t = 0.01$.

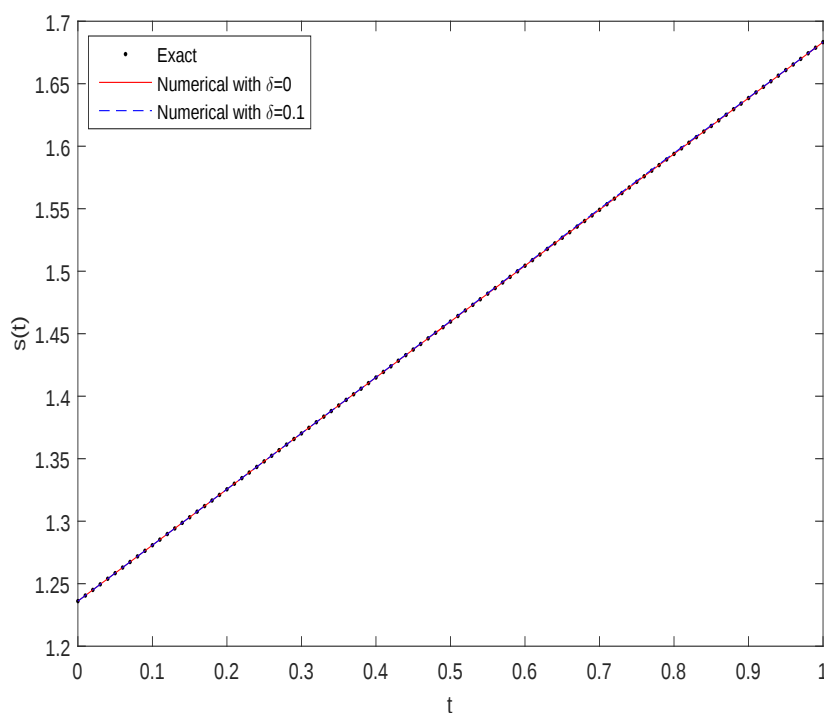


شکل ۷.۲: نمودارهای خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ در لحظه $t = 1$ نسبت به N با استفاده از روش $MLPG$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.

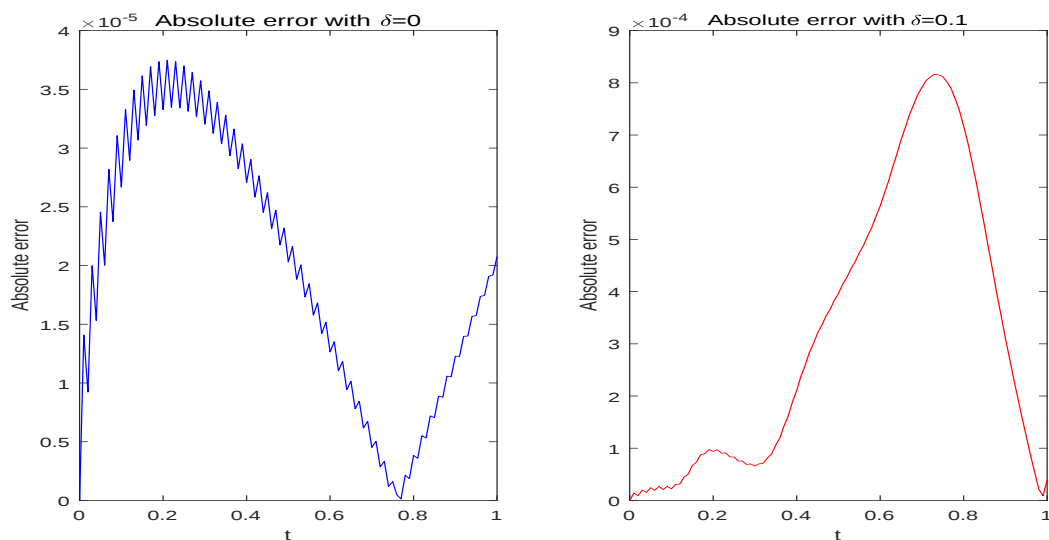


جدول ۲.۲: خطای RMS برای $u(x, t)$ و خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی برای گام‌های زمانی مختلف وقتی که $\Delta t = 0.01$ ، $c = 0.011$ و $h = 0.01$.

t	RMS Error for $u(x, t)$ with $\delta = 0$	RMS Error for $u(x, t)$ with $\delta = 0.1$	Absolute Error for $s(t)$ with $\delta = 0$	Absolute Error for $s(t)$ with $\delta = 0.1$
0	0	0	0	0
0.1	8.614×10^{-5}	1.535648×10^{-2}	2.668×10^{-5}	2.225×10^{-5}
0.2	1.3203×10^{-4}	3.35379×10^{-3}	3.327×10^{-5}	9.390×10^{-5}
0.3	1.6115×10^{-4}	9.07394×10^{-3}	3.203×10^{-5}	6.566×10^{-5}
0.4	1.8259×10^{-4}	5.16000×10^{-3}	2.708×10^{-5}	2.1054×10^{-4}
0.5	2.0051×10^{-4}	4.94580×10^{-3}	2.031×10^{-5}	3.9630×10^{-4}
0.6	2.1688×10^{-4}	6.29044×10^{-3}	1.264×10^{-5}	5.6382×10^{-4}
0.7	2.3270×10^{-4}	2.182342×10^{-2}	4.51×10^{-6}	7.9115×10^{-4}
0.8	2.4845×10^{-4}	8.48735×10^{-3}	3.83×10^{-6}	7.1690×10^{-4}
0.9	2.6441×10^{-4}	5.47081×10^{-3}	1.228×10^{-5}	3.1084×10^{-4}
1.0	2.8074×10^{-4}	1.056699×10^{-2}	2.077×10^{-5}	3.917×10^{-5}



شکل ۸.۲: مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی برای $s(t)$ وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.



شکل ۹.۲: خطای مطلق برای $s(t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.

نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم:

$$f(y) = \exp(1 - y), \quad g(t) = \exp(1 + 0.1t), \quad h(t) = 1.$$

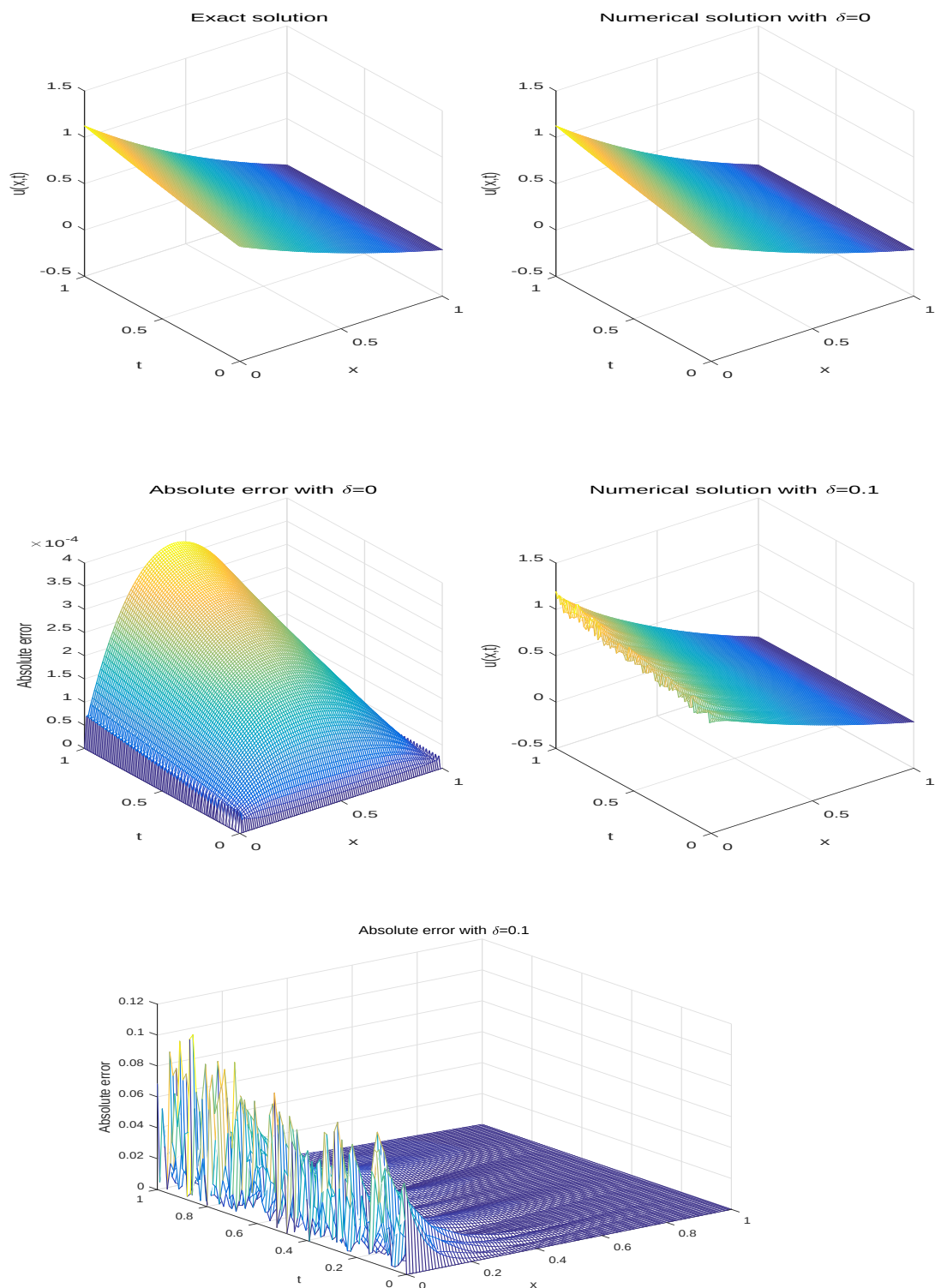
در این صورت جواب دقیق مساله به صورت زیر است:

$$v(y, t) = \exp(1 - y + 0.1t), \quad s(t) = 0.1t + 1,$$

بنابراین

$$u(x, t) = v(xs(t), t) = \exp(1 - x(0.1t + 1) + t), \quad s(t) = 0.1t + 1.$$

در جدول‌های ۳.۲ و ۴.۲ به ترتیب مقادیر خطای مطلق میانگین مربوط به محاسبه $s(t)$ و $u(x, t)$ با استفاده از روش‌های ADM ، RKM و $MLPG$ ارائه شده است. نتایج جدول‌ها نشانگر کارایی و دقت مناسب روش ارائه شده است.



شکل ۱۰.۲: نمودارهای جواب دقیق و جواب تقریبی و خطای مطلق برای $u(x, t)$ بدون وجود اختلال و با سطح اختلال $\delta = 0.1$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = 0.01$ ، $\Delta t = 0.01$ و $c = 0.011$.



جدول ۳.۲: مقادیر خطای مطلق میانگین برای $s(t)$ وقتی که $N = 7$ با استفاده از ADM ، RKM و روش $MLPG$.

	ADM		RKM	PM
$m = 1$	0.002545	$\Delta t = 0.05$	0.002376	0.000188
$m = 3$	0.002324	$\Delta t = 0.025$	0.002372	0.000177
$m = 5$	0.002200	$\Delta t = 0.01$	0.002370	0.000171
$m = 7$	0.002095	$\Delta t = 0.005$	0.002369	0.000169

جدول ۴.۲: مقادیر خطای مطلق میانگین برای $u(x, t)$ با استفاده از ADM ، RKM و روش $MLPG$ که Δ_{u_i} مقادیر خطای مطلق میانگین برای $u(x_i, t_j)$ ، $j = 0, 1, 2, \dots, M$ هستند.

	ADM ($M = 50$)	RKM($M = 50$)	PM($M = 50$)
$N = 5$			
Δ_{u_1}	0.004737	0.571854	0.001150
Δ_{u_2}	0.006836	0.1038585	0.000806
Δ_{u_3}	0.005531	0.012567	0.001228
$N = 6$			
Δ_{u_1}	0.004478	0.766475	0.000886
Δ_{u_2}	0.014252	0.198930	0.000641
Δ_{u_3}	0.003705	0.043138	0.000113
Δ_{u_4}	0.005107	0.003309	0.000807
$N = 7$			
Δ_{u_1}	0.020102	0.934229	0.000576
Δ_{u_2}	0.051464	0.310715	0.000327
Δ_{u_3}	0.017199	0.089096	0.000128
Δ_{u_4}	0.011347	0.021850	0.000115
Δ_{u_5}	0.003379	0.001768	0.000459

فصل ۳

بررسی مساله معکوس تعیین ضریب

وابسته به زمان و مرز آزاد در معادله

حرارت



۱.۳ مقدمه

در این فصل مساله معکوس تعیین همزمان ضریب نفوذ حرارتی^۱ و مرز آزاد را در معادله حرارت وابسته به زمان مورد بررسی قرار می‌دهیم. بسیاری از مسایل انتقال حرارت را می‌توان با استفاده از معادله حرارت با مرز ثابت مدل‌سازی کرد. با این حال، مسایل متعددی وجود دارد که دامنه یا مرز نسبت به زمان تغییر می‌کند و چنین مسایلی با عنوان مسایل مرز آزاد یا استفان شناخته می‌شوند [۲۲]. به عنوان مثال، هنگامی که یک رسانا در حال ذوب شدن و مایع در حال تخلیه است، مساله موجود در قسمت جامد باقیمانده جسم، شامل معادله حرارت در یک دامنه است که به طور فیزیکی نسبت به زمان در حال تغییر است. به طور خاص، مساله استفان یک فاز را می‌توان به عنوان یک مساله معکوس در نظر گرفت. در این فصل مساله معکوس تعیین ضریب وابسته به زمان و مرز آزاد در معادله حرارت با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین مورد بررسی قرار گرفته است. در ابتدا با استفاده از یک تغییر متغیر مساله مرز آزاد به شکل یک مساله با مرز ثابت تبدیل شده است. سپس، با فرض معلوم بودن معادلات مربوط به ضریب نفوذ حرارتی و مرز آزاد، روش *MLPG* را روی مساله تعدیل شده برای حل مساله مستقیم به منظور آزمایش کارایی حل کننده مستقیم پیاده سازی و اجرا می‌کنیم که این موضوع با ارایه مثال عددی تایید شده است. در مساله معکوس، ضریب نفوذ حرارتی و مرز آزاد مجهول هستند و مساله معکوس که غیرخطی است به صورت یک مساله می‌نیمم سازی کمترین مربعات مقید فرمول‌بندی شده است. می‌نیمم سازی تابع هدف غیرخطی که تابعی از ضریب نفوذ حرارتی و مرز آزاد در گام‌های زمانی مختلف است با استفاده از روش نقطه درونی^۲ در تابع *fmincon* موجود در جعبه ابزار متلب انجام شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده دقت مناسب و پایداری تقریب‌های به دست آمده می‌باشد.

۲.۳ فرمول‌بندی مساله

معادله انتقال حرارت

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2} + f(y, t), \quad 0 < y < s(t), \quad 0 < t < T < \infty, \quad (1.3)$$

¹Thermal diffusivity coefficient

²Interior-point



را با شرایط اولیه

$$v(y, 0) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq s_0, \quad s_0 = s(0), \quad (2.3)$$

و شرایط مرزی

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad v(s(t), t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

در نظر می‌گیریم که $v(y, t)$ ، $s(t)$ و $a(t)$ به ترتیب تابع توزیع دما، مرز آزاد و ضریب نفوذ حرارتی وابسته به زمان هستند. همچنین $f(x, y)$ ، که تابعی معلوم است تابع منبع^۳ گفته می‌شود. توابع $\mu_1(t)$ و $\mu_3(t)$ داده‌های کوشی در نقطه مرزی $x = 0$ و $\mu_4(t)$ مشخصات انرژی سیستم معادلات گرما را نشان می‌دهد.

به منظور تعیین ضریب $a(t)$ و مرز آزاد $s(t)$ ، شرایط اضافی زیر را بر مساله در نظر می‌گیریم:

$$-a(t)v_y(0, t) = \mu_3(t), \quad \int_0^{s(t)} v(y, t) dy = \mu_4(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.3)$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$x = \frac{y}{s(t)}, \quad v(y, t) = v(xs(t), t) = u(x, t). \quad (5.3)$$

در معادلات (۱.۳)–(۴.۳)، مساله مرز آزاد داده شده به یک سیستم معادلات با مرز ثابت به

³ source function



شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(t) \frac{1}{s^2(t)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + x \frac{s'(t)}{s(t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < t < T < \infty, \quad (6.3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(s_0 x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7.3)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.3)$$

$$-a(t)u_x(0, t) = \mu_3(t)s(t), \quad s(t) \int_0^1 u(x, t) dx = \mu_4(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9.3)$$

این مساله در [۴۰] و همچنین در [۶۶] با استفاده از روش تفاضل متناهی و ابزار بهینه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته است.

قضیه ۱.۲.۳. (قضیه وجود و یکتایی جواب): فرض می‌کنیم

$$1. \quad t \in [0, T] \quad , \quad (i = 1, 2, 4) \quad \mu_i(t) > 0, \quad \mu_i(t) \in C^1[0, T]$$

$$2. \quad t \in [0, T] \quad , \quad \mu_3(t) < 0, \quad \mu_3(t) \in C^1[0, T]$$

$$3. \quad x \in [0, s_0] \quad , \quad \varphi'(x) > 0, \quad \varphi(x) > 0, \quad \varphi(x) \in C^2[0, s_0]$$

$$4. \quad (x, t) \in [0, H_1] \times [0, T] \quad , \quad f(x, t) \geq 0, \quad f(x, t) \in C^{1,0}([0, H_1] \times [0, T])$$

که

$$H_1 = \max_{[0, T]} \mu_4(t) \left(\min \left\{ \min_{[0, s_0]} \varphi(x), \min_{[0, T]} \mu_1(t), \min_{[0, T]} \mu_2(t) \right\} \right)^{-1}$$

$$5. \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = \mu_4(0), \quad \varphi(s_0) = \mu_2(0), \quad \varphi(0) = \mu_1(0)$$

در این صورت وجود دارد $t_0 \in [0, T]$ به طوری که مساله (۶.۳) – (۹.۳) برای هر $(x, t) \in [0, 1] \times [0, t_0]$ جواب یکتا دارد.

□

برهان. اثبات در [۴۰].

در ادامه روش $MLPG$ را با به کارگیری تقریب MLS روی مساله (۶.۳) – (۹.۳) اجرا می‌کنیم. مساله مستقیم شامل تعیین تابع توزیع دمای $u(x, t)$ به همراه توابع $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ می‌باشد. در حالی که، در مساله معکوس با فرض معلوم بودن بقیه پارامترها، $a(t)$ ، $s(t)$ و $u(x, t)$ توابعی هستند که باید تعیین شوند.



۳.۳ حل مساله مستقیم

۱.۳.۳ گسسته‌سازی زمانی

به منظور گسسته‌سازی زمانی مساله تقریب‌های تفاضل متناهی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t} (u^{k+1}(x) - u^k(x)), \quad (10.3)$$

که

$$u^j(x) = u(x, t_j), \quad s^j = s(t_j), \quad t_0 = 0, \quad t_j = t_0 + j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

و $\Delta t = \frac{T}{M}$. همچنین با استفاده از روش کرانک-نیکلسون تقریب‌های زیر را داریم:

$$\frac{a(t)}{s^2(t)} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} u_{xx}^{k+1} + \frac{a^k}{(s^k)^2} u_{xx}^k \right), \quad (11.3)$$

$$\frac{s'(t)}{s(t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} u_x^{k+1} + \frac{s'^k}{s^k} u_x^k \right), \quad (12.3)$$

$$f(xs(t), t) \cong \frac{1}{2} (f^{k+1} + f^k), \quad (13.3)$$

که $f^{(j)} = f(xs^j, t_j)$.

با در نظر گرفتن تقریب‌های بالا، (۶.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} u_{xx}^{k+1} + \frac{a^k}{(s^k)^2} u_{xx}^k \right) \\ &+ \frac{x}{2} \left(\frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} u_x^{k+1} + \frac{s'^k}{s^k} u_x^k \right) + \frac{1}{2} (f^{k+1} + f^k). \end{aligned} \quad (14.3)$$



فرض می‌کنیم $\lambda = \frac{2}{\Delta t}$ ، در این صورت با توجه به معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} \lambda u^{k+1} - x \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} u_x^{k+1} - \frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} u_{xx}^{k+1} = \\ \lambda u^k + x \frac{s'^k}{s^k} u_x^k + \frac{a^k}{(s^k)^2} u_{xx}^k + (f^{k+1} + f^k). \end{aligned} \quad (15.3)$$

۲.۳.۳ فرمول‌بندی شکل ضعیف محلی مساله گسسته شده

نقاط $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ را در دامنه مساله و روی مرز آن در نظر می‌گیریم. فرض کنید Ω_q^i زیردامنه محلی در دامنه کلی مساله یعنی Ω و متناظر با نقطه x_i باشد. در این فصل زیردامنه های محلی Ω_q^i ، بازه‌هایی به مرکز x_i و شعاع r_q هستند. با به کارگیری روش $MLPG$ شکل ضعیف محلی مساله روی هر زیردامنه محلی Ω_q^i به دست می‌آید. برای هر نقطه x_i ، شکل ضعیف محلی (۱۵.۳) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_q^i} u^{k+1} \nu(x) dx - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \int_{\Omega_q^i} x u_x^{k+1} \nu(x) dx - \frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} \int_{\Omega_q^i} u_{xx}^{k+1} \nu(x) dx = \\ \lambda \int_{\Omega_q^i} u^k \nu(x) dx + \frac{s'^k}{s^k} \int_{\Omega_q^i} x u_x^k \nu(x) dx + \frac{a^k}{(s^k)^2} \int_{\Omega_q^i} u_{xx}^k \nu(x) dx \\ + \int_{\Omega_q^i} (f^{k+1} + f^k) \nu(x) dx, \end{aligned} \quad (16.3)$$

که در آن تابع هوی‌ساید

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_q^i, \\ 0, & x \notin \Omega_q^i. \end{cases} \quad (17.3)$$



به عنوان تابع آزمون استفاده شده است. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء در (۱۶.۳) رابطه زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\Omega_q^i} u^{k+1} dx - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \int_{\Omega_q^i} x u_x^{k+1} dx - \frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} u_x^{k+1} |_{\partial \Omega_q^i} = \\ & \lambda \int_{\Omega_q^i} u^k dx + \frac{s'^k}{s^k} \int_{\Omega_q^i} x u_x^k dx + \frac{a^k}{(s^k)^2} u_x^k |_{\partial \Omega_q^i} + \int_{\Omega_q^i} (f^{k+1} + f^k) dx, \quad (18.3) \end{aligned}$$

که $\partial \Omega_q^i$ مرز زیردامنه محلی Ω_q^i است. در بخش بعد با استفاده از تقریب MLS ، یک سیستم معادلات جبری به منظور تعیین کمیت های مجهول از معادلات انتگرالی (۱۸.۳) به دست می آوریم.

۳.۳.۳ گسسته سازی $MLPG$

در این بخش گسسته سازی (۱۸.۳) با استفاده از تقریب MLS مورد نظر است. برای این منظور نقاط x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ را در دامنه مساله و روی مرز آن در نظر می گیریم. فرض کنید $u(x_i, t_k)$ معلوم و $u(x_i, t_{k+1})$ مجهول باشند. برای تعیین N کمیت مجهول $u(x_i, t_{k+1})$ به N معادله نیاز داریم. برای نقاطی که درون دامنه یعنی Ω قرار دارند، با جایگزینی فرمول تقریب کمترین مربعات متحرک (۱۹.۱) در (۱۸.۳) معادلات گسسته شده زیر نتیجه می شوند:

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx \right) u_j^{(k+1)} - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} x \phi_j'(x) dx \right) u_j^{(k+1)} - \\ & \frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} \sum_{j=1}^N \phi_j'(x) u_j^{(k+1)} |_{\partial \Omega_q^i} = \lambda \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx \right) u_j^{(k)} + \\ & \frac{s'^k}{s^k} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} x \phi_j'(x) dx \right) u_j^{(k)} + \frac{a^k}{(s^k)^2} \sum_{j=1}^N \phi_j'(x) u_j^{(k)} |_{\partial \Omega_q^i} + F_i^{(k)}, \quad (19.3) \end{aligned}$$

که

$$F_i^{(k)} = \int_{\Omega_q^i} (f^{k+1} + f^k) dx.$$



برای نقاط مرزی $x = 0$ و $x = 1$ با توجه به شرایط مرزی (۸.۳) قرا می‌دهیم:

$$u^{k+1}(0) = \mu_1((k+1)\Delta t), \quad (20.3)$$

$$u^{k+1}(1) = \mu_2((k+1)\Delta t). \quad (21.3)$$

شکل ماتریسی (۱۹.۳) برای تمام N نقطه گره x_i به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \left[\lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \sum_{j=1}^N b_{ij} - \frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} \sum_{j=1}^N c_{ij} \right] u_j^{(k+1)} = \\ & \left[\lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} + \frac{s'^k}{s^k} \sum_{j=1}^N b_{ij} + \frac{a^k}{(s^k)^2} \sum_{j=1}^N c_{ij} \right] u_j^{(k)} + F_i^{(k)}, \end{aligned} \quad (22.3)$$

که

$$a_{ij} = \int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx, \quad b_{ij} = \int_{\Omega_q^i} x \phi_j' dx, \quad c_{ij} = \phi_j'(x)|_{\partial \Omega_q^i}. \quad (23.3)$$

با فرض

$$A_{ij} = \lambda a_{ij} - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} b_{ij} - \frac{a^{k+1}}{(s^{k+1})^2} c_{ij}, \quad (24.3)$$

$$B_{ij} = \lambda a_{ij} + \frac{s'^k}{s^k} b_{ij} + \frac{a^k}{(s^k)^2} c_{ij}, \quad (25.3)$$

و $U = (u_i)_{N \times 1}$ ، دستگاه معادلات زیر از (۲۲.۳) به دست می‌آید:

$$AU^{(k+1)} = BU^{(k)} + F^k. \quad (26.3)$$



با توجه به روابط (۲۰.۳) و (۲۱.۳) در هر گام داریم:

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{NN} = 1, \quad \forall j \neq 1 : A_{1j} = 0, \quad \forall j \neq N : A_{Nj} = 0, \\ B_{11} = B_{NN} = 1, \quad \forall j \neq 1 : B_{1j} = 0, \quad \forall j \neq N : B_{Nj} = 0, \\ F_1^k = \mu_1((k+1)\Delta t), \quad F_N^k = \mu_2((k+1)\Delta t). \end{aligned}$$

درگام زمانی اول یعنی وقتی که $k = 0$ ، با توجه به شرایط اولیه (۷.۳) رابطه زیر را داریم:

$$U^{(0)} = [\varphi(s_0x_1), \varphi(s_0x_2), \dots, \varphi(s_0x_N)]^T. \quad (27.3)$$

۴.۳.۳ نتایج عددی

در این بخش روند ارایه شده برای حل مساله مستقیم را با یک مثال آزمایش می‌کنیم. برای این منظور مساله (۶.۳) - (۹.۳) را با

$$\begin{aligned} s(t) &= 1 + 2t, & a(t) &= 1 + t^2, \\ \mu_1(t) &= 1 + 8t, & \mu_2(t) &= (2 + 2t)^2 + 8t, \\ \varphi(y) &= (1 + y)^2, & f(y, t) &= 6 - 2t^2. \end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم. در مساله مستقیم $v(y, t)$ ، $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ مجهول هستند و می‌خواهیم آنها را تقریب بزنیم. با توجه به مفروضات بالا جواب تحلیلی مساله داده شده به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} v(y, t) &= (1 + y)^2 + 8t, \\ \mu_3(t) &= -(2 + 2t^2), \quad \mu_4(t) = \frac{(2 + 2t)^3 - 1}{3} + 8t(1 + 2t), \end{aligned}$$



در نتیجه داریم:

$$u(x, t) = v(xs(t), t) = (1 + x + 2xt)^2 + 8t,$$

$$\mu_3(t) = -(2 + 2t^2), \quad \mu_4(t) = \frac{(2 + 2t)^3 - 1}{3} + 8t(1 + 2t).$$

در این مثال انتگرال‌های عددی روی دامنه‌ها با استفاده از قاعده گاوس چهار نقطه‌ای محاسبه شده‌اند. به منظور بررسی دقت تقریب‌های به دست آمده و همچنین کارایی روش پیشنهادی، از فرمول‌های خطای RMS و خطای مطلق که به صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده شده است:

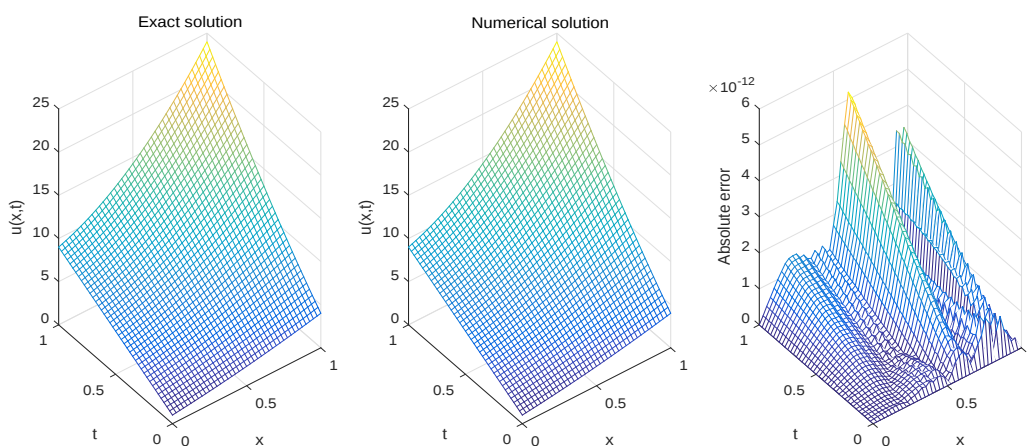
$$RMS(\mu(t)) = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^M (\mu_{exact}(t_j) - \mu_{approx}(t_j))^2}{M + 1}}, \quad (28.3)$$

$$Absolute\ error(u(x_i, t_j)) = |u_{exact}(x_i, t_j) - u_{approx}(x_i, t_j)|. \quad (29.3)$$

نتایج حاصل از اجرای روش ارایه شده با انتخاب $\Delta t = 0.025$ ، $h = 0.05$ و $T = 1$ به دست آمده‌اند. در اجرای شکل ضعیف بدون شبکه، هر دامنه محلی Ω_q^i به صورت بازه‌ای به مرکز x_i و شعاع $r_q = 0.7h$ در نظر گرفته شده است که $h = x_{i+1} - x_i$ ، $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. همچنین شعاع هر دامنه Ω_s برای تقریب MLS به صورت $r_s = 4r_q$ و پارامتر شکل برابر $c = 1.17h$ در نظر گرفته شده است و توابع پایه درجه دوم (۱۰.۱) در (۸.۱) استفاده شده است. در شکل‌های ۱.۳ و ۲.۳ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق برای $u(x, t)$ و $v(y, t)$ با $h = \Delta t = 0.025$ و $T = 1$ رسم شده‌اند. همچنین در شکل ۳.۳ نمودارهای جواب دقیق و تقریبی $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ نمایش داده‌اند. مقادیر خطای $RMS(\mu_3(t))$ و $RMS(\mu_4(t))$ در جدول ۱.۳ به ازای مقادیر مختلف h و Δt ارایه شده‌اند. این تقریب‌ها با استفاده از قاعده انتگرال‌گیری سیمپسون^۴ برای انتگرال و فرمول

$$\frac{\partial u(0, t_j)}{\partial x} \cong \sum_{j=0}^{j=M} \phi'(0) u_j^k, \quad (30.3)$$

⁴Simpson



شکل ۱.۳: نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق برای $u(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.

جدول ۱.۳: خطای RMS برای $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ وقتی که $h = \Delta t \in \{0.1, 0.05, 0.025, 0.01\}$.

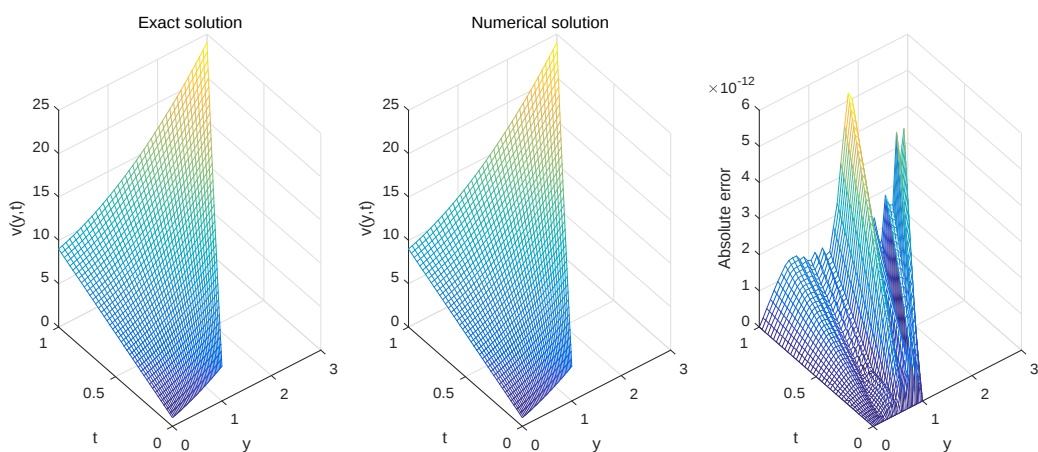
	$h = \Delta t = 0.1$	$h = \Delta t = 0.05$	$h = \Delta t = 0.025$	$h = \Delta t = 0.01$
$RMS(\mu_3(t))$	$2.008622e - 13$	$2.343945e - 12$	$3.216328e - 12$	$7.840626e - 11$
$RMS(\mu_4(t))$	$1.913527e - 13$	$2.200038e - 12$	$2.224144e - 12$	$4.993713e - 11$

برای محاسبه مشتقها به دست آمده‌اند. نتایج به دست آمده نشانگر دقت مناسب تقریب‌های به دست آمده با استفاده از روش ارایه شده است.

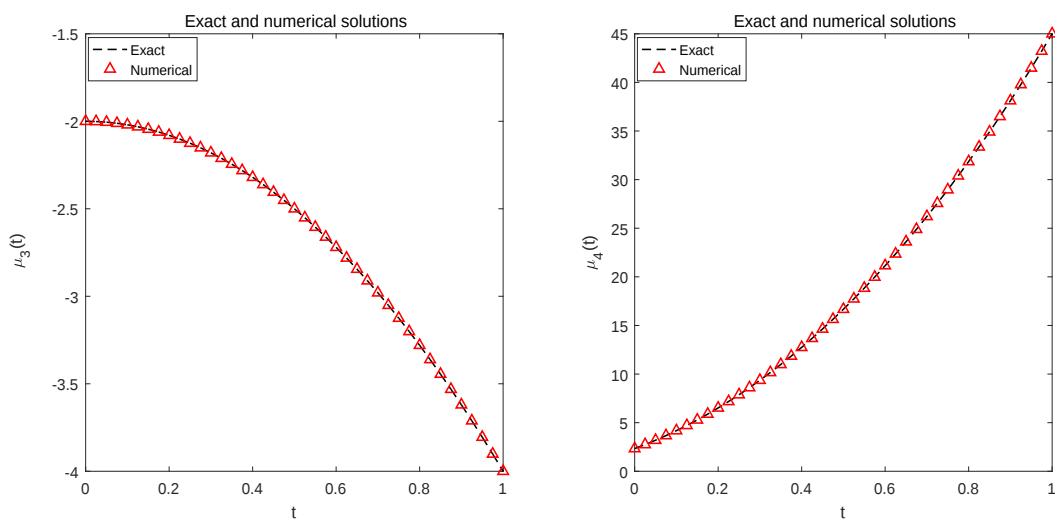
۴.۳ مساله معکوس

۱.۴.۳ فرمول‌بندی مساله معکوس

مساله (۶.۳) – (۹.۳) را در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه توابع توزیع دما، ضریب نفوذ دما و مرز آزاد یعنی $u(x, t)$ ، $a(t)$ و $s(t)$ توابع مجهولی باشند که با فرض معلوم بودن سایر پارامترهای مساله باید تعیین شوند این مساله، یک مساله معکوس خواهد بود که غیر خطی است. این مساله را می‌توان به صورت یک مساله می‌نیم سازی کمترین مربعات فرمول‌بندی کرد.



شکل ۲.۳: نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق برای $v(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۳.۳: نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق برای $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



تابع هدف ^۵ که باید می‌نیم شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = \left\| -\frac{a(t)}{s(t)} u_x(0, t) - \mu_3(t) \right\|_{L^2(0, T)}^2 + \left\| s(t) \int_0^1 u(x, t) dx - \mu_4(t) \right\|_{L^2(0, T)}^2 \quad (31.3)$$

شکل گسسته معادله اخیر به صورت زیر است:

$$E(\mathbf{s}, \mathbf{a}) = \sum_{j=0}^{j=M} \left[-\frac{a_j}{s_j} u_x(0, t_j) - \mu_3(t_j) \right]^2 + \sum_{j=0}^{j=M} \left[s_j \int_0^1 u(x, t_j) dx - \mu_4(t_j) \right]^2 \quad (32.3)$$

که $\mathbf{s} = (s_0, s_1, \dots, s_M)$ و $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_M)$. با توجه به نتایج عددی به دست آمده در بخش بعد، به نظر می‌رسد جواب‌های مساله حتی با وجود اختلال در داده‌های ورودی $\mu_3(t)$ و $\mu_4(t)$ نسبتاً پایدار هستند. بنابراین نیازی به استفاده از روش‌های منظم سازی نیست.

می‌نیم سازی تابع هدف غیرخطی $E(\mathbf{s}, \mathbf{a})$ با قیدهای $a_j > 0$ و $s_j > 0$ ($j = 0, 1, \dots, M$)، با استفاده از روش نقطه درونی در تابع $fmincon$ موجود در جعبه ابزار متلب انجام می‌شود. دستور $fmincon$ با شروع از یک حدس اولیه مقدار می‌نیم تابع هدف و می‌نیم کننده‌های تابع هدف یعنی $a_j > 0$ و $s_j > 0$ ($j = 0, 1, \dots, M$) را در ناحیه جواب جستجو می‌کند. در تابع هدف، $u_x(0, t_j)$ با فرمول (۳۰.۳) و انتگرال‌های $\int_0^1 u(x, t_j) dx$ با فرمول قاعده دوزنقه‌ای ^۶ جایگزین شده‌اند. علاوه بر این وقتی که حل کننده مساله معکوس را اجرا می‌کنیم، $s'(t_j)$ در مساله مستقیم توسط فرمول تفاضلی

$$s'(t_j) \cong \frac{s(t_{j+1}) - s(t_j)}{\Delta t}. \quad (33.3)$$

تقریب زده می‌شود. در اجرای دستور $fmincon$ به منظور می‌نیم سازی تابع هدف، بازه جستجوی $fmincon$ برای s_j و a_j در نظر گرفته شده است. سایر پارامترهای مورد نیاز در اجرای $fmincon$ به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

Maximum function evaluations = 3000 –

Maximum iterations = 1000 –

Optimality tolerance = 10^{-6} –

⁵Objective function

⁶Trapezoidal rule



$$\text{Step tolerance} = 10^{-10} \quad -$$

$$\text{Constraint tolerance} = 10^{-6} \quad -$$

۲.۴.۳ نتایج عددی

در این بخش با مثال‌هایی دقت روش ارایه شده برای حل مساله معکوس بررسی شده است. در کاربردها معمولاً داده‌های $\mu_3(t_j)$ و $\mu_4(t_j)$ همراه با خطا هستند. بنابراین، در مثال‌های حل شده برای مساله معکوس، این داده‌ها را بدون اختلال و همچنین با سطح اختلالی به صورت

$$\tilde{\mu}_3(t_j) = \mu_3(t_j)(1 + \delta R_1(j)), \quad (34.3)$$

$$\tilde{\mu}_4(t_j) = \mu_4(t_j)(1 + \delta R_2(j)), \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (35.3)$$

در نظر گرفته و نتایج عددی در هر دو حالت به منظور بررسی پایداری جواب‌ها گزارش شده است. در رابطه بالا δ سطح اختلال و $R_1(j)$ و $R_2(j)$ اعدادی تصادفی در فاصله $[-1, 1]$ هستند. به منظور بررسی دقت تقریب‌های به دست آمده و همچنین کارایی روش ارایه شده، از فرمول‌های خطای RMS و خطای نسبی^۷ که به صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده شده است:

$$RMS(s(t)) = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^M (s_{exact}(t_j) - s_{approx}(t_j))^2}{M+1}}, \quad (36.3)$$

$$RMS(a(t)) = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^M (a_{exact}(t_j) - a_{approx}(t_j))^2}{M+1}}, \quad (37.3)$$

$$\text{Relative error}(u(x_i, t_j)) = \frac{|u_{exact}(x_i, t_j) - u_{approx}(x_i, t_j)|}{|u_{exact}(x_i, t_j)|}. \quad (38.3)$$

⁷Relative error



مثال ۱.۴.۳. مساله (۶.۳) - (۹.۳) را با مفروضات زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &= 1 + 8t, & \mu_2(t) &= (2 + 2t)^2 + 8t, \\ \mu_3(t) &= -(2 + 2t^2), & \mu_4(t) &= \frac{(2 + 2t)^3 - 1}{3} + 8t(1 + 2t), \\ \varphi(y) &= (1 + y)^2, & f(y, t) &= 6 - 2t^2,\end{aligned}$$

که در آن $u(x, t)$ ، $s(t)$ و $a(t)$ مجهول هستند و هدف تعیین آنهاست. جواب تحلیلی و دقیق مساله با توجه به فرضیات بالا به صورت زیر است:

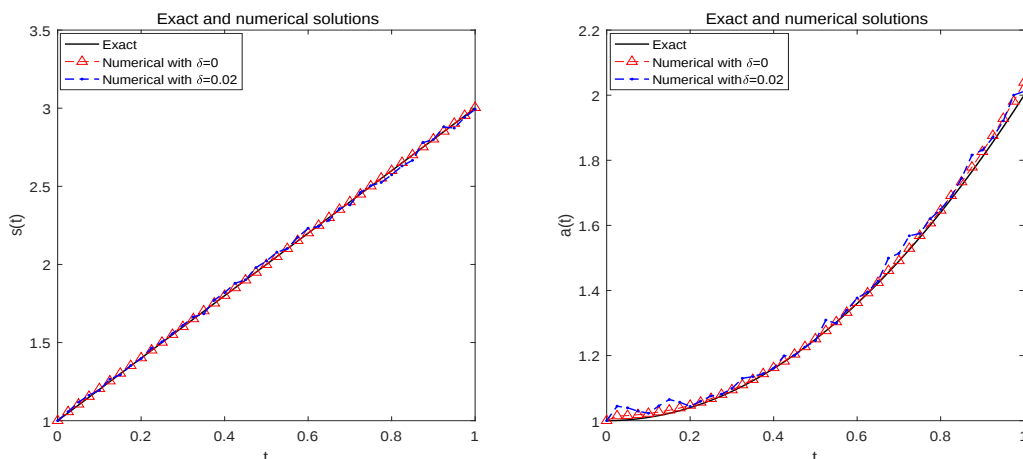
$$\begin{aligned}u(x, t) &= v(xs(t), t) = (1 + x + 2xt)^2 + 8t, \\ s(t) &= 1 + 2t, & a(t) &= 1 + t^2,\end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned}v(y, t) &= (1 + y)^2 + 8t, \\ s(t) &= 1 + 2t, & a(t) &= 1 + t^2.\end{aligned}$$

نتایج عددی حاصل از اجرای روند ارایه شده با $h = \Delta t = 0.025$ و $T = 1$ به دست آمده‌اند. در حل کننده مستقیم (ضمن حل مساله معکوس) هر دامنه محلی Ω_q^i به صورت بازه‌ای به مرکز x_i و شعاع $r_q = 0.7h$ در نظر گرفته شده است که $h = x_{i+1} - x_i$ ، $i = 1, 2, \dots, N$. همچنین، شعاع دامنه محلی Ω_s برای تقریب MLS برابر $r_s = 4r_q$ و پارامتر شکل برابر $c = 1.17h$ انتخاب شده است و از توابع پایه درجه دوم (۱۰.۱) در تقریب کمترین مربعات متحرک (۸.۱) استفاده شده است. انتگرال‌ها روی دامنه‌ها در سیستم معادلات حل کننده مساله مستقیم با استفاده از فرمول قاعده گاوس چهار نقطه‌ای محاسبه شده‌اند. در این مثال، حدس اولیه برای تابع مرز آزاد و ضریب نفوذ دما در گام‌های زمانی مختلف به صورت $s_j = 1$ ، $a_j = 1$ ($j = 0, 1, \dots, M$) در نظر گرفته شده است.

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که هیچ نوع اختلالی در داده‌های $\mu_3(t_j)$ و $\mu_4(t_j)$ وجود ندارد یعنی در حالتی که $\delta = 0$. با اجرای الگوریتم روش، تابع هدف به عنوان تابعی از پارامترهای s_j و a_j به سرعت کاهش یافته پس از تعداد اندکی تکرار تابع هدف به 10^{-9} همگرا می‌شود. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی برای $s(t)$ و $a(t)$ در شکل ۴.۳ رسم شده است. همچنین نمودارهای جواب دقیق و

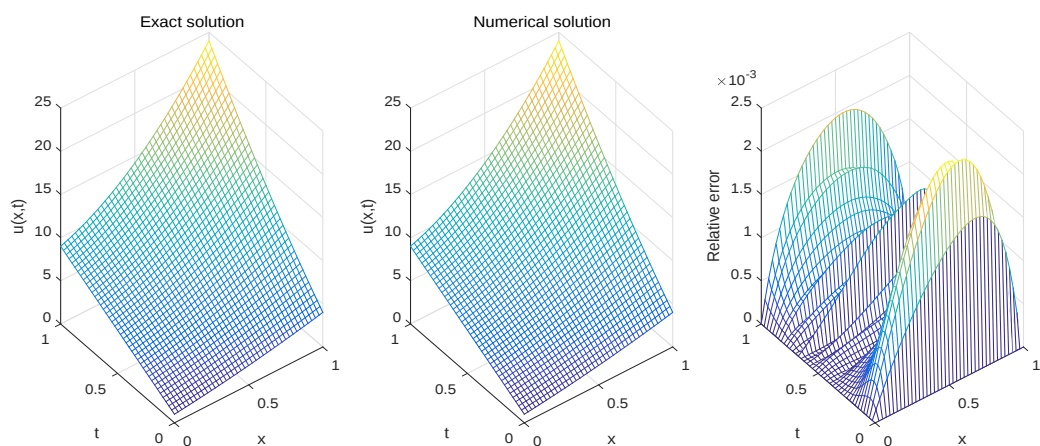


شکل ۴.۳: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی برای $s(t)$ و $a(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$

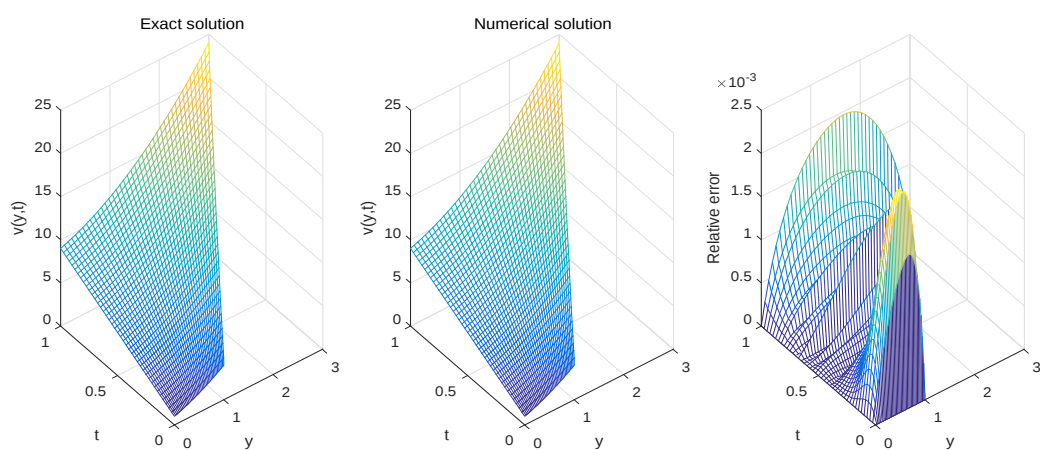
جدول ۲.۳: خطای RMS برای $s(t)$ و $a(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$

	RMS	$\delta = 0$	$\delta = 0.02$
Example 1	$RMS(s(t))$	0.002243	0.016018
	$RMS(a(t))$	0.011574	0.025649
	Values of objective function at final iteration	$2.230615e - 09$	$6.875563e - 07$
Example 2	$RMS(s(t))$	0.000427	0.010687
	$RMS(a(t))$	0.000540	0.012325
	Values of objective function at final iteration	$6.037903e - 13$	$1.037434e - 11$

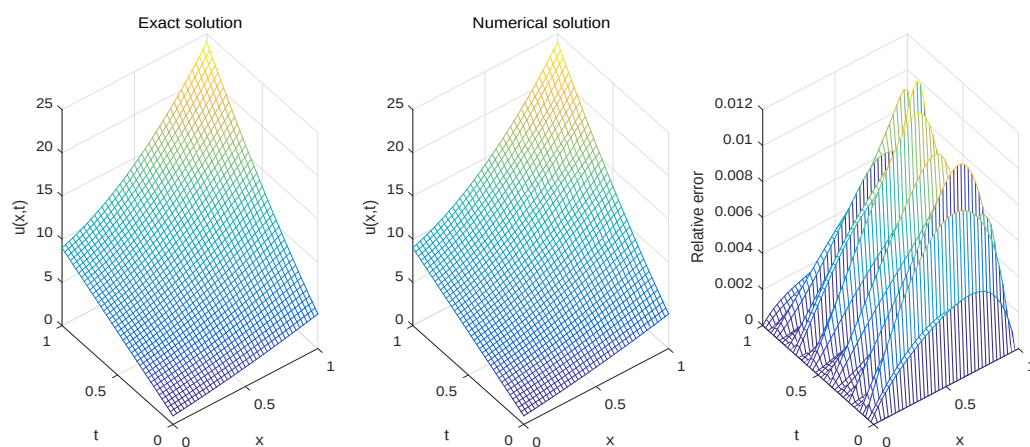
تقریبی و خطای نسبی برای توابع جواب $u(x, t)$ و $v(y, t)$ در شکل های ۵.۳ و ۶.۳ رسم شده‌اند. نتایج حاصل نشان دهنده دقت مناسب تقریب‌های به دست آمده هستند. وقتی که داده‌های $\mu_3(t_j)$ و $\mu_4(t_j)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در محاسبات در نظر گرفته شده‌اند، در این حالت نیز همگرایی سریع تابع هدف به 10^{-7} به دست می‌آید. جواب‌های دقیق و تقریبی $s(t)$ ، $a(t)$ ، $u(x, t)$ و $v(y, t)$ و خطای نسبی برای $u(x, t)$ و $v(y, t)$ در شکل های ۴.۳، ۷.۳ و ۸.۳ نمایش داده شده‌اند. مقادیر RMS برای $s(t)$ و $a(t)$ و مقدار تابع هدف در تکرار آخر در جدول ۲.۳ ارائه شده‌اند. با توجه به نتایج به دست آمده ملاحظه می‌شود که در این مثال اختلال کوچک در داده‌های ورودی باعث تغییرات قابل توجه در جواب‌های عددی نمی‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت جواب‌های عددی به دست آمده پایدار هستند.



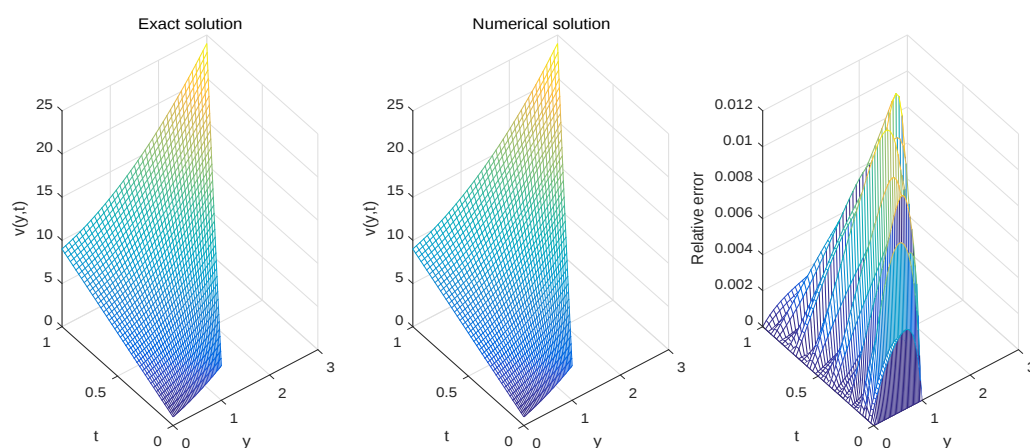
شکل ۵.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۶.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۷.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۸.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



مثال ۲.۴.۳. در این مثال، مساله (۶.۳) - (۹.۳) را با مفروضات زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\mu_1(t) &= 1 + 8t, & \mu_2(t) &= (1 + \sqrt{2-t})^2 + 8t, \\ \mu_3(t) &= -2\sqrt{1+t}, & \mu_4(t) &= \frac{(1 + \sqrt{2-t})^3 - 1}{3} + 8t\sqrt{2-t}, \\ \varphi(y) &= (1 + \sqrt{2}y)^2, & f(y, t) &= 8 - 2\sqrt{1+t}.\end{aligned}$$

با توجه به داده‌های بالا، جواب‌های دقیق مساله معکوس به صورت زیر است:

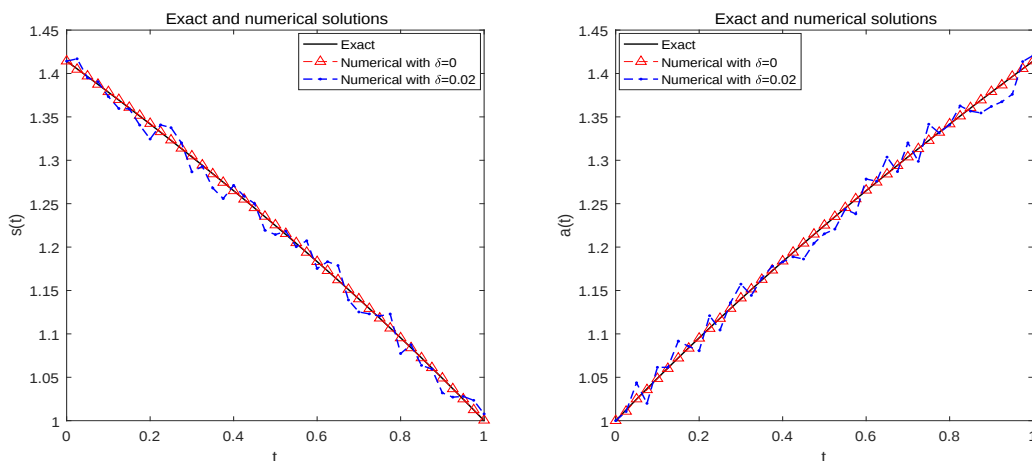
$$\begin{aligned}u(x, t) &= v(xs(t), t) = (1 + x\sqrt{2-t})^2 + 8t, \\ s(t) &= \sqrt{2-t}, & a(t) &= \sqrt{1+t},\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}v(y, t) &= (1 + y)^2 + 8t, \\ s(t) &= \sqrt{2-t}, & a(t) &= \sqrt{1+t}.\end{aligned}$$

نتایج عددی حاصل از اجرای روند ارایه شده با $h = \Delta t = 0.025$ و $T = 1$. به دست آمده‌اند. در حل کننده مستقیم (ضمن حل مساله معکوس) هر دامنه محلی Ω_q^i به صورت بازه‌ای به مرکز x_i و شعاع $r_q = 0.7h$ در نظر گرفته شده است که $h = x_{i+1} - x_i$ ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، همچنین شعاع دامنه محلی Ω_s برای تقریب MLS برابر $r_s = 4r_q$ ، پارامتر شکل برابر $c = 1.17h$ انتخاب شده است. و از توابع پایه درجه دوم (۱۰.۱) در تقریب کمترین مربعات متحرک (۸.۱) استفاده شده است. انتگرال‌های عددی روی دامنه‌ها در سیستم معادلات حل کننده مساله مستقیم، با استفاده از فرمول قاعده گاوس چهار نقطه‌ای محاسبه شده‌اند. در این مثال حدس اولیه برای تابع مرز آزاد و ضریب نفوذ دما در گام‌های زمانی مختلف به صورت $s_j = 1$ ، $a_j = 1$ ($j = 0, 1, \dots, M$) در نظر گرفته شده است.

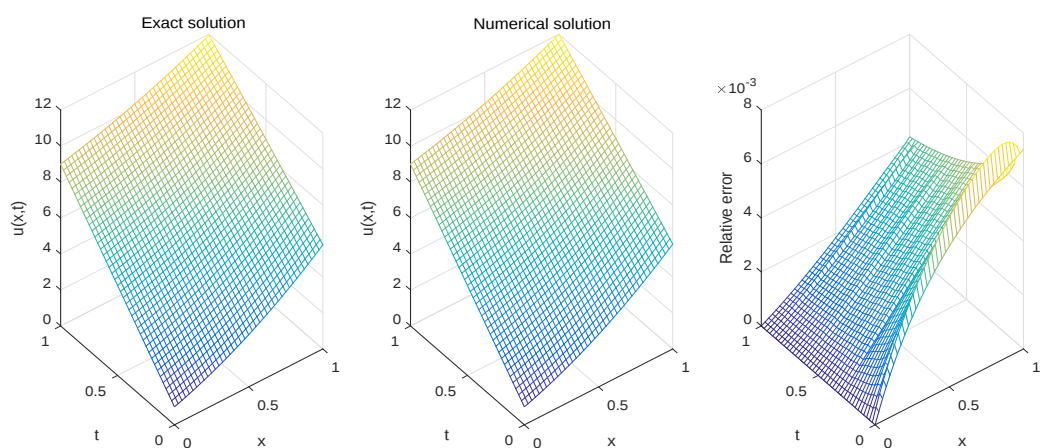
ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که هیچ نوع اختلالی در داده‌های $\mu_3(t_j)$ و $\mu_4(t_j)$ وجود ندارد یعنی در حالتی که $\delta = 0$. با اجرای الگوریتم روش، تابع هدف به عنوان تابعی از پارامترهای s_j و a_j به سرعت کاهش یافته پس از تعداد اندکی تکرار تابع هدف به 10^{-13} همگرا می‌شود. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی برای $s(t)$ و $a(t)$ در شکل ۹.۳ رسم شده است. همچنین نمودارهای جواب



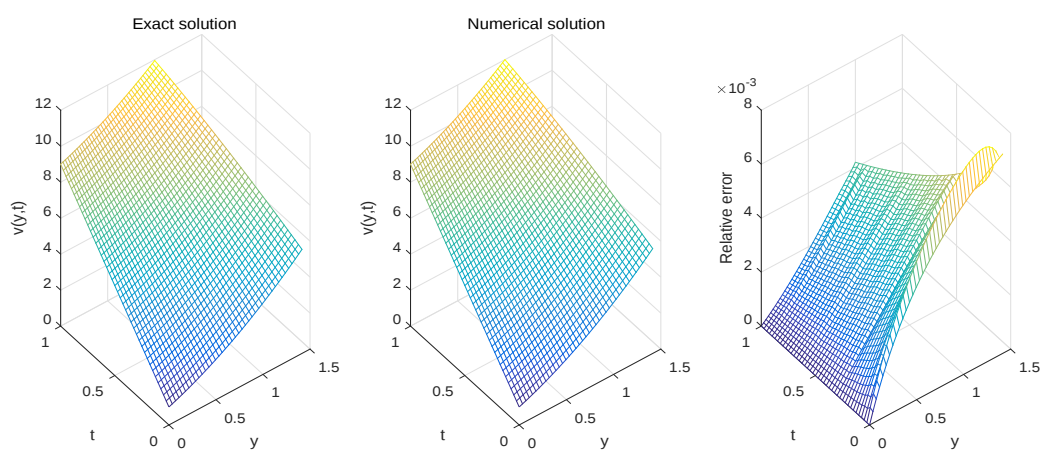
شکل ۹.۳: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی $s(t)$ و $a(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$

دقیق و تقریبی و خطای نسبی برای توابع جواب $u(x, t)$ و $v(y, t)$ در شکل‌های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ رسم شده‌اند. نتایج حاصل نشان دهنده دقت مناسب تقریب‌های به دست آمده هستند. وقتی که داده‌های $\mu_4(t_j)$ و $\mu_3(t_j)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در محاسبات در نظر گرفته شده‌اند، در این حالت نیز همگرایی سریع تابع هدف به 10^{-11} به دست می‌آید. جواب‌های دقیق و تقریبی $s(t)$ ، $a(t)$ ، $u(x, t)$ و $v(y, t)$ برای توابع جواب در شکل‌های ۹.۳، ۱۲.۳ و ۱۳.۳ نمایش داده شده‌اند. مقادیر RMS برای $s(t)$ و $a(t)$ و مقدار تابع هدف در تکرار آخر در جدول ۲.۳ ارائه شده‌اند.

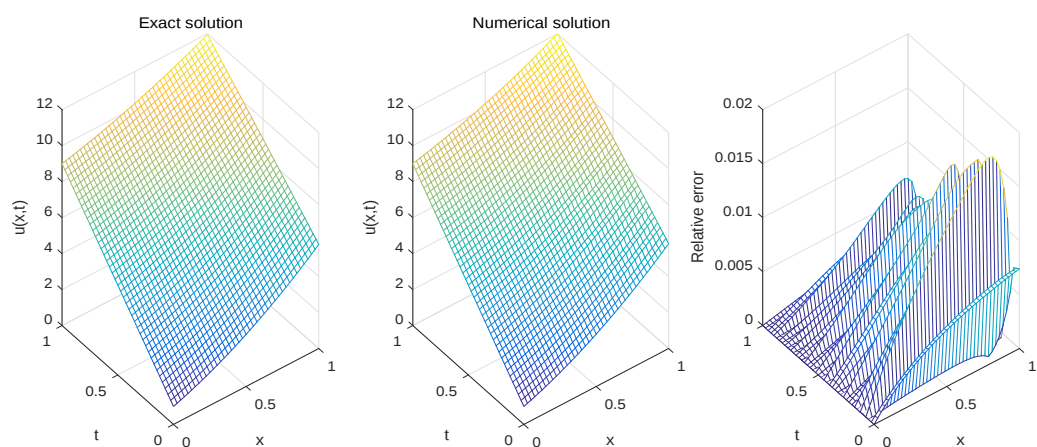
با توجه به نتایج به دست آمده ملاحظه می‌شود که در این مثال نیز اختلال کوچک در داده‌های ورودی باعث تغییرات قابل توجه در جواب‌های عددی نمی‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت جواب‌های عددی به دست آمده پایدار هستند.



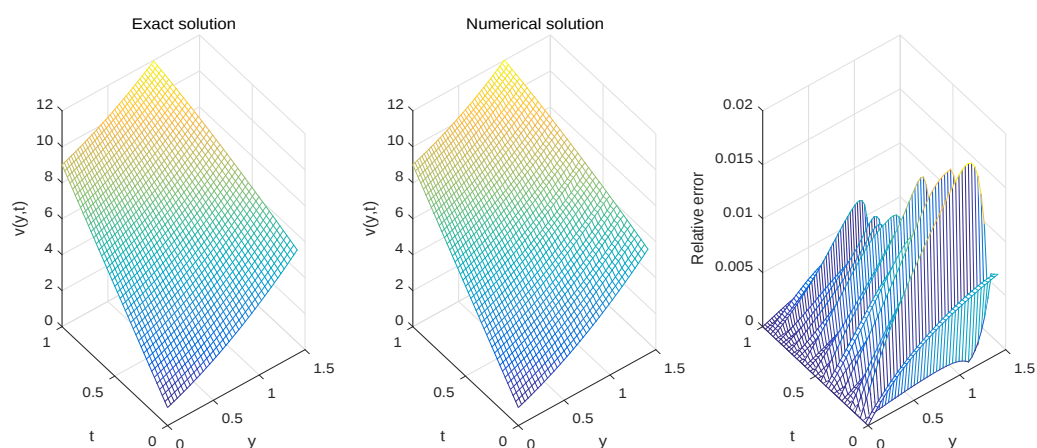
شکل ۱۰.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$



شکل ۱۱.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$



شکل ۱۲.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$



شکل ۱۳.۳: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$

فصل ۴

مساله معکوس تعیین مرز آزاد در یک

معادله انتشار غیر خطی



۱.۴ مقدمه

در این فصل، مساله معکوس تعیین مرز آزاد در یک مساله با انتشار غیرخطی^۱ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مسایل مرز آزاد با انتشار غیر خطی در کاربردهای مختلفی نظیر انجماد بر روی یک قالب با ویژگی‌های حرارتی غیرخطی غیر مشابه و جذب^۲ اشباع شده^۳ و اشباع نشده در خاک زیر یک تالاب رخ می‌دهد. برای حل مساله، ابتدا با یک تغییر متغیر مناسب مساله مرز آزاد غیرخطی داده شده را به یک مساله غیرخطی با مرز ثابت تبدیل می‌کنیم سپس، روش $MLPG$ را با به کارگیری تقریب MLS روی شکل مستقیم مساله تبدیل شده اجرا می‌کنیم. لازم به ذکر است که دستگاه به دست آمده از مساله مستقیم (حل کننده مستقیم) ضمن حل مساله معکوس استفاده می‌شود. مساله معکوس تعیین مرز آزاد را به صورت یک مساله می‌نیم سازی کمترین مربعات غیرخطی از یک تابع هدف فرمول بندی می‌کنیم. می‌نیم سازی تابع هدف با استفاده از الگوریتم برنامه نویسی درجه دوم متوالی^۴ (sqp) در تابع $fmincon$ موجود در جعبه ابزار متلب انجام می‌شود. برای تقریب مشتق‌های زمانی از فرمول‌های گسسته سازی دوگامی استفاده شده است. نتایج عددی بدست آمده با نتایج بدست آمده با استفاده از روش تفاضل متناهی در [۴۲]، به منظور بررسی دقت و کارایی روش مقایسه شده است. این نتایج نشان دهنده دقت مناسب و کارایی مطلوب روش ارائه شده در حل مساله مورد بررسی می‌باشد.

۲.۴ فرمول بندی مساله

معادله انتشار^۵ غیرخطی

$$\frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(a(v(y, t)) \frac{\partial v(y, t)}{\partial y} \right) + f(y, t), \quad 0 < y < s(t), \quad 0 < t < T < \infty, \quad (1.4)$$

را با شرایط اولیه

$$v(y, 0) = \varphi(y), \quad 0 \leq y \leq s_0, \quad s_0 = s(0), \quad (2.4)$$

¹Non linear diffusion

²Absorption

³Saturated

⁴Sequential quadratic programming

⁵diffusion



و شرایط مرزی دیریکله^۶

$$v(0, t) = \mu_1(t), \quad v(s(t), t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.4)$$

و شرط اضافی انتگرالی

$$\int_0^{s(t)} v(y, t) dy = \mu_3(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.4)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن $v(y, t)$ ، $s(t) > 0$ و $f(y, t)$ به ترتیب توابع توزیع دما، مرز آزاد و منبع می‌باشند. قضیه‌های وجود و یکتایی جواب برای مساله معکوس (۱.۴) - (۴.۴) در [۴۲] بیان و اثبات شده‌اند. با استفاده از تغییر متغیری به شکل

$$x = \frac{y}{s(t)}, \quad v(y, t) = v(xs(t), t) = u(x, t), \quad (5.4)$$

مساله مرز آزاد (۱.۴) - (۴.۴) به مساله با مرز ثابت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{s^2(t)} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(u(x, t)) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) \\ &+ x \frac{s'(t)}{s(t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + f(xs(t), t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$u(x, 0) = \varphi(s_0 x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7.4)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8.4)$$

$$s(t) \int_0^1 u(x, t) dx = \mu_3(t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (9.4)$$

در این فصل روش بدون شبکه محلی پتروف گالرکین را که بر اساس شکل ضعیف گالرکین بنا شده است با به کارگیری تقریب MLS برای حل مساله اخیر به کار می‌بریم. مساله مستقیم شامل تعیین تابع توزیع دمای $u(x, t)$ با فرض مشخص بودن سایر پارامترهای مساله است در حالی که، در مساله معکوس مرز آزاد یعنی $s(t)$ مجهول است و هدف تعیین آن است.

⁶Dirichlet



۳.۴ حل مساله مستقیم

۱.۳.۴ گسسته‌سازی زمانی

به منظور گسسته‌سازی زمانی مساله، تقریب‌های تفاضل متناهی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t} (u^{k+1}(x) - u^k(x)), \quad (10.4)$$

که

$$u^j(x) = u(x, t_j), \quad s^j = s(t_j), \quad t_0 = 0, \quad t_j = t_0 + j\Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, M$$

و $\Delta t = \frac{T}{M}$. همچنین، با استفاده از روش کرانک-نیکلسون تقریب‌های زیر را داریم:

$$x \frac{s'(t)}{s(t)} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cong \frac{1}{2} x \left(\frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} u_x^{k+1} + \frac{s'^k}{s^k} u_x^k \right), \quad (11.4)$$

$$f(xs(t), t) \cong \frac{1}{2} (f^{k+1} + f^k), \quad (12.4)$$

$$\frac{1}{(s(t))^2} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s^{k+1})^2} + \frac{1}{(s^k)^2} \right). \quad (13.4)$$

که

$$f^{(j)} = f(xs^j, t_j), \quad s^{(j)} = s(t_j).$$

با در نظر گرفتن تقریب‌های بالا (۶.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) \left(a(\tilde{u}^k) \tilde{u}_x^k \right)_x \\ &+ \frac{1}{2} x \left(\frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} u_x^{k+1} + \frac{s'^k}{s^k} u_x^k \right) + \frac{1}{2} (f^{k+1} + f^k). \end{aligned} \quad (14.4)$$



فرض می‌کنیم $\lambda = \frac{2}{\Delta t}$ ، در این صورت با توجه به معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} \lambda u^{k+1} - x \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} u_x^{k+1} &= \lambda u^k + x \frac{s'^k}{s^k} u_x^k \\ &+ \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) \left(a(\tilde{u}^k) \tilde{u}_x^k \right)_x + (f^{k+1} + f^k). \end{aligned} \quad (15.4)$$

۲.۳.۴ فرمول‌بندی شکل ضعیف محلی مساله گسسته شده

نقاط x_i ، $i = 1, 2, \dots, N$ ، را در دامنه مساله و روی مرز آن در نظر می‌گیریم. فرض کنید Ω_q^i زیر دامنه محلی در دامنه کلی مساله یعنی Ω و متناظر با نقطه x_i باشد. در این فصل زیردامنه‌های محلی Ω_q^i بازه‌هایی به مرکز x_i و شعاع r_q هستند. با به کارگیری روش $MLPG$ شکل ضعیف محلی مساله روی هر زیر دامنه محلی Ω_q^i ، به دست می‌آید. برای هر نقطه x_i ، شکل ضعیف محلی معادله (۱۵.۴) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_q^i} u^{k+1} \nu(x) dx - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \int_{\Omega_q^i} x u_x^{k+1} \nu(x) dx &= \lambda \int_{\Omega_q^i} u^k \nu(x) dx \\ &+ \frac{s'^k}{s^k} \int_{\Omega_q^i} x u_x^k \nu(x) dx + \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) \int_{\Omega_q^i} \left(a(\tilde{u}^k) \tilde{u}_x^k \right)_x \nu(x) dx \\ &+ \int_{\Omega_q^i} (f^{k+1} + f^k) \nu(x) dx. \end{aligned} \quad (16.4)$$

که در آن تابع هوی‌ساید

$$\nu(x) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_q^i, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_q^i, \end{cases} \quad (17.4)$$



به عنوان تابع آزمون استفاده شده است. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء روی Ω_q^i ، در معادله (۱۶.۴) شکل ضعیف محلی زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\Omega_q^i} u^{k+1} dx - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \int_{\Omega_q^i} x u_x^{k+1} dx &= \lambda \int_{\Omega_q^i} u^k dx + \frac{s'^k}{s^k} \int_{\Omega_q^i} x u_x^k dx \\ &+ \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) \left(a(\tilde{u}^k(x_i + r_q)) \tilde{u}_x^k(x_i + r_q) - a(\tilde{u}^k(x_i - r_q)) \tilde{u}_x^k(x_i - r_q) \right) \\ &+ \int_{\Omega_q^i} (f^{k+1} + f^k) dx. \end{aligned} \quad (۱۸.۴)$$

در بخش بعد با استفاده از تقریب MLS ، یک سیستم معادلات جبری برای تعیین کمیت های مجهول از معادلات انتگرالی (۱۸.۴) به دست می آوریم.

۳.۳.۴ گسسته سازی $MLPG$

در این بخش گسسته سازی معادلات (۱۸.۴) با استفاده از تقریب MLS مورد نظر است. برای این منظور نقاط $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ را در دامنه مساله و روی مرز آن در نظر می گیریم. فرض کنید $u(x_i, t_k)$ معلوم و $u(x_i, t_{k+1})$ مجهول باشند. برای تعیین N کمیت مجهول $u(x_i, t_{k+1})$ به N معادله نیاز داریم. برای نقاطی که درون دامنه یعنی Ω قرار دارند با جایگزینی فرمول تقریب کمترین مربعات متحرک (۱۹.۱) در (۱۸.۴) معادلات گسسته شده زیر نتیجه می شوند:

$$\begin{aligned} &\lambda \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx \right) u_j^{(k+1)} - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} x \phi_j'(x) dx \right) u_j^{(k+1)} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx \right) u_j^{(k)} + \frac{s'^k}{s^k} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_q^i} x \phi_j'(x) dx \right) u_j^{(k)} \\ &+ \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) \left(a \left(\sum_{j=1}^N \phi_j(x_i + r_q) \tilde{u}_j^{(k)} \right) \left(\sum_{j=1}^N \phi_j'(x_i + r_q) \tilde{u}_j^{(k)} \right) \right. \\ &\quad \left. - a \left(\sum_{j=1}^N \phi_j(x_i - r_q) \tilde{u}_j^{(k)} \right) \left(\sum_{j=1}^N \phi_j'(x_i - r_q) \tilde{u}_j^{(k)} \right) \right) + F_i^{(k)} \end{aligned} \quad (۱۹.۴)$$

که

$$F_i^{(k)} = \int_{\Omega_q^i} (f^{k+1} + f^k) dx.$$



برای نقاط مرزی $x = 0$ و $x = 1$ با توجه به شرایط مرزی (۸.۴) قرا می‌دهیم:

$$u^{k+1}(0) = \mu_1((k+1)\Delta t), \quad (20.4)$$

$$u^{k+1}(1) = \mu_2((k+1)\Delta t). \quad (21.4)$$

شکل ماتریسی (۱۹.۴) برای تمام N نقطه گره x_i ، به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\begin{aligned} \left[\lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} \sum_{j=0}^N b_{ij} \right] u_j^{(k+1)} &= \left[\lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} + \frac{s'^k}{s^k} \sum_{j=0}^N b_{ij} \right] u_j^{(k)} \\ &+ \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) (\tilde{V}_1 * \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 * \tilde{V}_4)_i + F_i^{(k)} \end{aligned} \quad (22.4)$$

که

$$a_{ij} = \int_{\Omega_q^i} \phi_j(x) dx, \quad b_{ij} = \int_{\Omega_q^i} x \phi_j' dx, \quad (23.4)$$

$$\tilde{V}_1 = a \left(\sum_{j=1}^N \phi_j(x_i + r_q) \tilde{u}_j^{(k)} \right), \quad \tilde{V}_2 = \sum_{j=1}^N \phi_j'(x_i + r_q) \tilde{u}_j^{(k)}, \quad (24.4)$$

$$\tilde{V}_3 = -a \left(\sum_{j=1}^N \phi_j(x_i - r_q) \tilde{u}_j^{(k)} \right), \quad \tilde{V}_4 = \sum_{j=1}^N \phi_j'(x_i - r_q) \tilde{u}_j^{(k)}. \quad (25.4)$$

توجه داشته باشید که در (۲۲.۴) نماد $*$ "عملگر ضرب هادامارد (ضرب مؤلفه به مؤلفه) می‌باشد. بافرض

$$A_{ij} = \lambda a_{ij} - \frac{s'^{k+1}}{s^{k+1}} b_{ij}, \quad (26.4)$$

$$B_{ij} = \lambda a_{ij} + \frac{s'^k}{s^k} b_{ij} \quad (27.4)$$



و $U = (u_i)_{N \times 1}$ ، دستگاه معادلات زیر از (۲۲.۴) به دست می‌آید:

$$AU^{(k+1)} = BU^{(k)} + \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) (\tilde{V}_1 * \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 * \tilde{V}_4) + F^k. \quad (28.4)$$

برای برقراری رابطه (۲۸.۴) در نقاط مرزی با توجه به (۲۰.۴) و (۲۱.۴)، در هر گام زمانی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} A_{11} = A_{NN} = 1, \quad \forall j \neq 1: A_{1j} = 0, \quad \forall j \neq N: A_{Nj} = 0, \\ B_{11} = B_{NN} = 1, \quad \forall j \neq 1: B_{1j} = 0, \quad \forall j \neq N: B_{Nj} = 0, \\ (\tilde{V}_1 * \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 * \tilde{V}_4)_i = 0, \quad i = 1, N, \\ F_1^k = \mu_1((k+1)\Delta t), \quad F_N^k = \mu_2((k+1)\Delta t). \end{aligned}$$

در گام زمانی اول یعنی وقتی که $k = 0$ ، با توجه به شرایط اولیه (۷.۴) رابطه زیر را داریم:

$$U^{(0)} = [\varphi(s_0x_1), \varphi(s_0x_2), \dots, \varphi(s_0x_N)]^T \quad (29.4)$$

به منظور غلبه بر عبارت غیرخطی در معادله (۲۸.۴) یک روند تکراری اجرا می‌شود. این روند تکراری یک طرح ساده پیشگو-اصلاح گر^۷ است [۴۱] که با روش کرانک-نیکلسون^۸ ترکیب شده است که به صورت زیر است:

$$AU_{l+1}^{(k+1)} = BU^{(k)} + \left(\frac{1}{(s^k)^2} + \frac{1}{(s^{k+1})^2} \right) \frac{1}{2} \left((\tilde{V}_1 * \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 * \tilde{V}_4) \Big|_{U^k} + (\tilde{V}_1 * \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 * \tilde{V}_4) \Big|_{U_l^{k+1}} \right) + F^k. \quad (30.4)$$

فرآیند تکراری تا برقراری شرط توقف زیر ادامه پیدا می‌کند:

$$\|U_{l+1}^{(k+1)} - U_l^{(k+1)}\|_\infty < \varepsilon \quad (31.4)$$

⁷Predictor-corrector

⁸Crank-Nicolson technique



که l شماره تکرارها در هر گام زمانی و ε یک عدد مثبت کوچک است. در مثال‌های این فصل $\varepsilon = 10^{-6}$ در نظر گرفته شده است.

۴.۳.۴ نتایج عددی

در این بخش، روند ارایه شده برای حل مساله مستقیم را با یک مثال آزمایش می‌کنیم. برای این منظور، مساله (۶.۴) – (۹.۴) را با

$$\begin{aligned} a(v) &= e^{-v}, \quad s(t) = 1 + t, \quad s_0 = s(0), \quad \varphi(y) = 1 + (1 + y)^2 \\ \mu_1(t) &= 1 + e^t, \quad \mu_2(t) = (2 + 2t + t^2)^2 + e^t, \\ f(y, t) &= e^t + e^{-(1+y)^2 - e^t} (4(1 + y)^2 - 2). \end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم. در مساله مستقیم $v(y, t)$ و $\mu_3(t)$ مجهول هستند و می‌خواهیم آنها را تقریب بزنیم. با توجه به مفروضات بالا، جواب تحلیلی مساله داده شده به صورت زیر است:

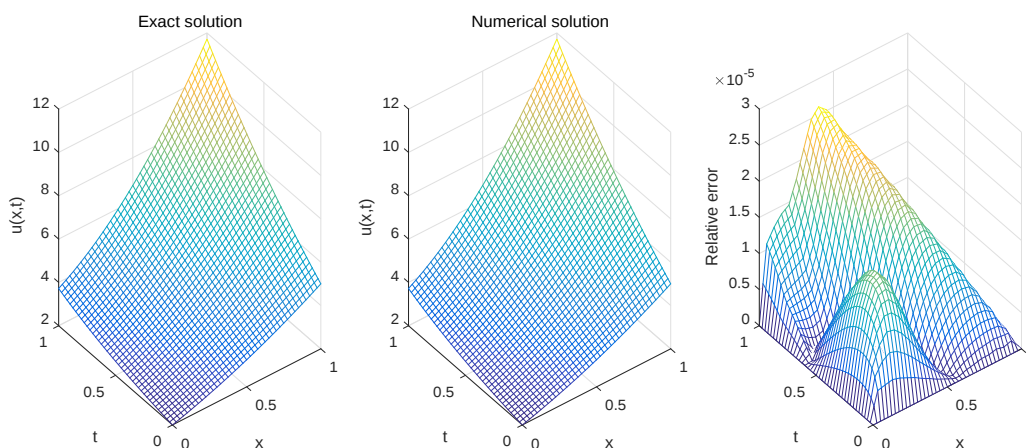
$$\begin{aligned} u(x, t) &= (1 + x + xt)^2 + e^t, \\ \mu_3(t) &= \frac{(2 + t)^3 - 1}{3} + e^t(1 + t). \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} v(y, t) &= (1 + y)^2 + e^t, \\ \mu_3(t) &= \frac{(2 + t)^3 - 1}{3} + e^t(1 + t). \end{aligned}$$

در این مثال، انتگرال‌های عددی روی دامنه‌ها با استفاده از قاعده گاوس چهار نقطه‌ای محاسبه شده‌اند. به منظور بررسی دقت تقریب‌های به دست آمده و همچنین کارایی روش پیشنهادی، از فرمول‌های (RMS) و خطای نسبی که به صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده شده است:

$$Relative\ error(u(x_i, t_j)) = \left| \frac{u_{exact}(x_i, t_j) - u_{approx}(x_i, t_j)}{u_{exact}(x_i, t_j)} \right| \quad (۳۲.۴)$$



شکل ۱.۴: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.

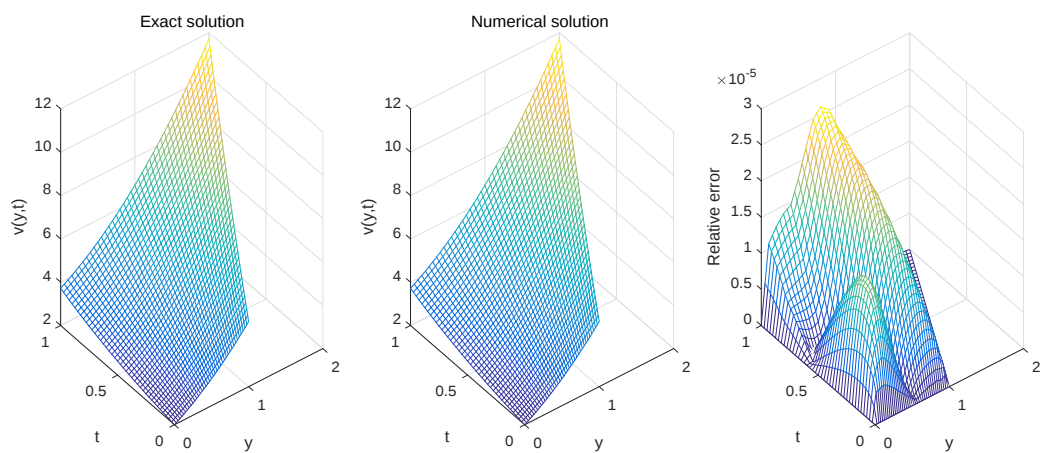
$$RMS(\mu(t)) = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^M (\mu_{exact}(t_j) - \mu_{approx}(t_j))^2}{M+1}} \quad (33.4)$$

نتایج حاصل از اجرای روش ارایه شده با انتخاب $\Delta t = 0.025$ ، $h = 0.05$ و $T = 1$ به دست آمده‌اند. در اجرای شکل ضعیف بدون شبکه هر دامنه محلی Ω_q^i ، به صورت بازه‌ای به مرکز x_i و شعاع $r_q = 1.4h$ در نظر گرفته شده است که $h = x_{i+1} - x_i$ ، $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$. همچنین شعاع هر دامنه Ω_s برای تقریب MLS به صورت $r_s = 4r_q$ و پارامتر شکل برابر $c = 1.17h$ در نظر گرفته شده است و توابع پایه درجه دوم (۱۰.۱) در معادله (۸.۱) استفاده شده است. در شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴ نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ و $v(y, t)$ با $h = \Delta t = 0.025$ رسم شده‌اند. همچنین، در شکل ۳.۴ نمودارهای جواب دقیق و تقریبی برای $\mu_3(t)$ نمایش شده‌اند. برای تقریب $\mu_3(t)$ از قاعده انتگرال‌گیری ذونقه‌ای استفاده شده است. نتایج به دست آمده نشانگر دقت مناسب تقریب‌های به دست آمده با استفاده از روش ارایه شده است.

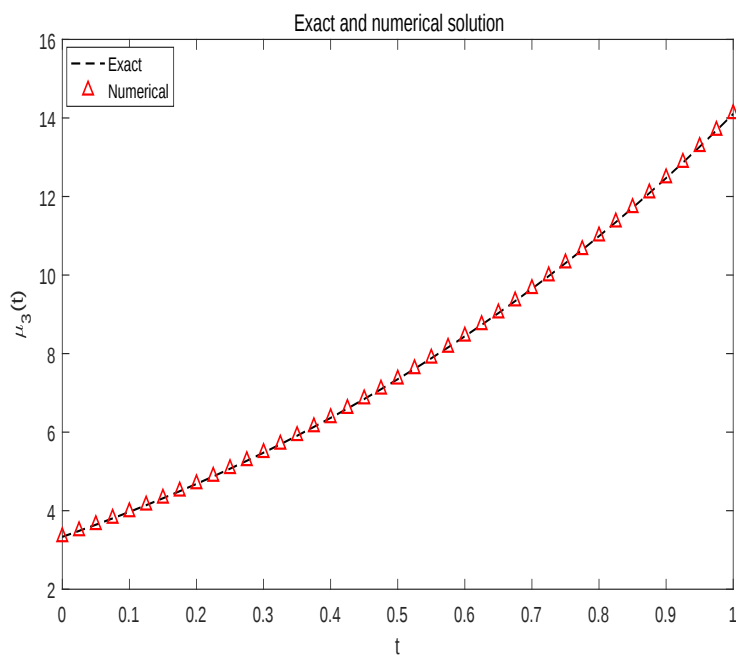
۴.۴ مساله معکوس

۱.۴.۴ فرمول‌بندی مساله معکوس

مساله (۶.۴)–(۹.۴) را در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه توابع توزیع دما و مرز آزاد یعنی $u(x, t)$ و $s(t)$ توابع مجهولی باشند که با فرض معلوم بودن سایر پارامترهای مساله باید تعیین شوند این



شکل ۲.۴: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۳.۴: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای مطلق $\mu_3(t)$ وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



مساله، یک مساله معکوس خواهد بود که غیرخطی است. این مساله را می توان به صورت یک مساله می نیمم سازی کمترین مربعات فرمول بندی کرد. تابع هدف^۹ که باید می نیمم شود را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$E(\mathbf{s}) = \left\| s(t) \int_0^1 u(x, t) dx - \mu_4(t) \right\|_{L^2(0, T)}^2 \quad (34.4)$$

که $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_M)$ شکل گسسته معادله اخیر به صورت زیر است:

$$E(\mathbf{s}) = \sum_{j=0}^M \left[s_j \int_0^1 u(x, t_j) dx - \mu_4(t_j) \right]^2 \quad (35.4)$$

با توجه به نتایج عددی به دست آمده، به نظر می رسد جواب های مساله حتی با وجود اختلال در داده های ورودی نسبتاً پایدار هستند. بنابراین، نیازی به استفاده از روش های منظم سازی نیست. می نیمم سازی تابع هدف غیرخطی $E(\mathbf{s})$ با قیدهای s_j ($j = 0, 1, \dots, M$)، با استفاده از روش *sqp* در تابع *fmincon*

موجود در جعبه ابزار متلب انجام شده است. دستور می نیمم ساز *fmincon* با شروع از یک حدس اولیه مقدار می نیمم تابع هدف و می نیمم کننده های تابع هدف یعنی s_j ($j = 0, 1, \dots, M$) را در ناحیه جواب جستجو می کند. در مساله معکوس، انتگرال های $\int_0^1 u(x, t_j) dx$ را با فرمول قاعده دوزنقه ای در حل کننده مستقیم، همچنین $s'(t_j)$ را با فرمول تفاضلی

$$s'(t_j) \cong \frac{s(t_{j+1}) - s(t_j)}{\Delta t} \quad (36.4)$$

جایگزین می کنیم. در اجرای دستور *fmincon* به منظور می نیمم سازی تابع هدف بازه جستجوی $(10^{-10}, 10^3)$ برای s_j در نظر گرفته شده است. سایر پارامترهای مورد نیاز در اجرای *fmincon*، مقادیر پیش فرض در متلب در نظر گرفته شده است.

⁹Objective function



۲.۴.۴ نتایج عددی

در این بخش، با مثال‌هایی دقت و کارایی روش ارایه شده برای حل مساله معکوس بررسی شده است. در کاربردها معمولاً داده‌های $\mu_3(t_j)$ ها همراه با خطا هستند. بنابراین، در مثال‌های حل شده برای مساله معکوس، این داده‌ها را بدون اختلال و همچنین با سطح اختلالی به صورت

$$\tilde{\mu}_3(t_j) = \mu_3(t_j)(1 + \delta R(j)). \quad (37.4)$$

در نظر گرفته و نتایج عددی در هر دو حالت به منظور بررسی پایداری جواب‌ها گزارش شده‌اند. در رابطه بالا δ سطح اختلال و $R(j)$ اعدادی تصادفی در فاصله $[-1, 1]$ هستند. نتایج عددی به دست آمده از اجرای روند ارایه شده با $h = \Delta t = 0.025$ و $T = 1$ به دست آمده‌اند. در حل کننده مستقیم (ضمن حل مساله معکوس) هر دامنه محلی Ω_q^i به صورت بازه‌ای به مرکز x_i و شعاع $r_q = 0.7h$ در نظر گرفته شده است که $h = x_{i+1} - x_i$ ، $i = 1, 2, \dots, N$. همچنین، شعاع دامنه محلی Ω_s برای تقریب MLS برابر $r_s = 4r_q$ ، پارامتر شکل برابر $c = 1.4h$ انتخاب شده است و از توابع پایه درجه دوم (۱۰.۱) در تقریب کمترین مربعات متحرک (۸.۱) استفاده شده است. انتگرال‌های عددی روی دامنه‌ها در سیستم معادلات حل کننده مساله مستقیم، با استفاده از فرمول قاعده گاوس چهار نقطه‌ای محاسبه شده‌اند. در این مثال، حدس اولیه برای تابع مرز آزاد در گام‌های زمانی مختلف به صورت $s_j = 1$ ($j = 0, 1, \dots, M$) در نظر گرفته شده است.

به منظور بررسی دقت تقریب‌های به دست آمده و همچنین کارایی روش ارایه شده از فرمول‌های خطای RMS و خطای نسبی که به صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده شده است:

$$RMS(s(t)) = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^M (s_{exact}(t_j) - s_{approx}(t_j))^2}{M+1}}, \quad (38.4)$$

$$Relative\ error(u(x_i, t_j)) = \frac{|u_{exact}(x_i, t_j) - u_{approx}(x_i, t_j)|}{|u_{exact}(x_i, t_j)|}. \quad (39.4)$$



مثال ۱.۴.۴. مساله (۶.۴) - (۹.۴) را با مفروضات زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} a(v) &= e^{-v}, \quad s_0 = s(0), \quad \varphi(y) = 1 + (1+y)^2 \\ \mu_1(t) &= 1 + e^t, \quad \mu_2(t) = (2 + 2t + t^2)^2 + e^t, \\ \mu_3(t) &= \frac{(2+t)^3 - 1}{3} + e^t(1+t), \quad f(y, t) = e^t + e^{-(1+y)^2 - e^t} (4(1+y)^2 - 2). \end{aligned}$$

جواب دقیق مساله با توجه به فرضیات بالا به صورت زیر است:

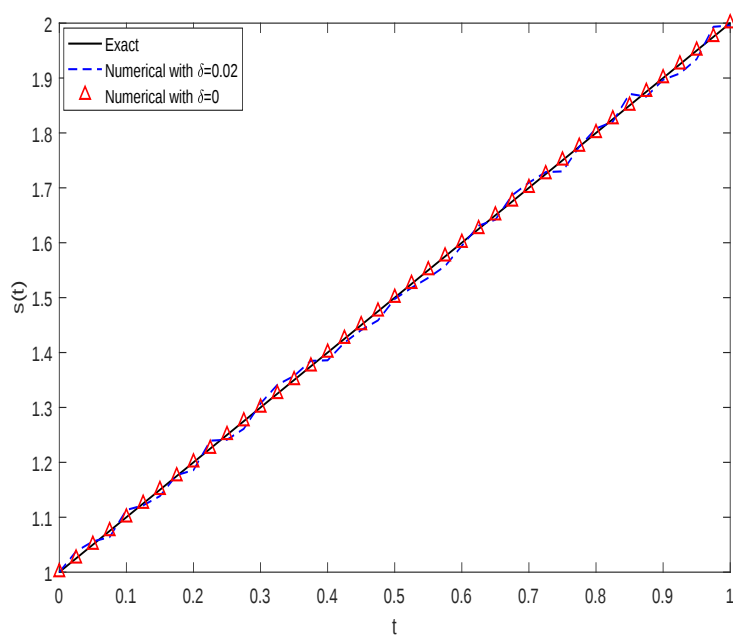
$$u(x, t) = (1 + x + xt)^2 + e^t, \quad s(t) = 1 + t.$$

و در نتیجه

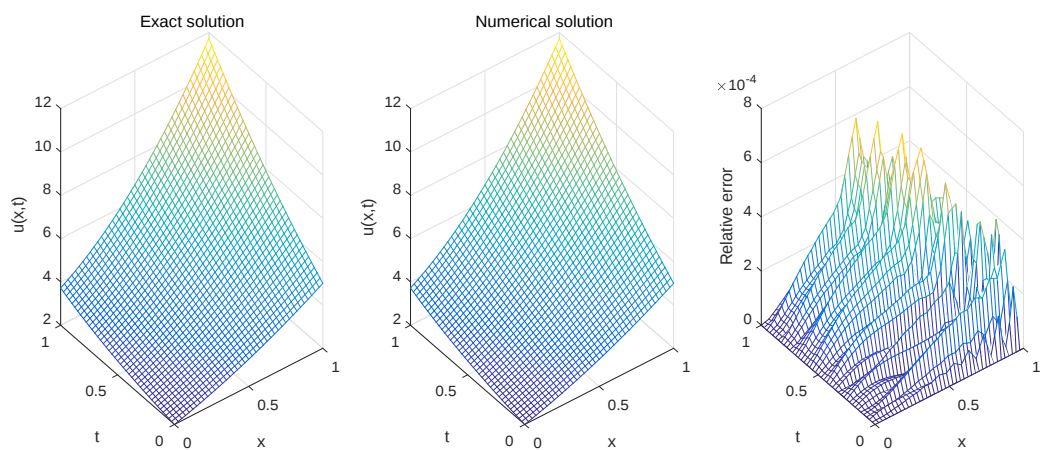
$$v(y, t) = (1 + y)^2 + e^t, \quad s(t) = 1 + t.$$

ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که هیچ نوع اختلالی در داده‌های $\mu_3(t_j)$ وجود ندارد یعنی در حالتی که $\delta = 0$. با اجرای الگوریتم روش ارایه شده تابع هدف به عنوان تابعی از پارامترهای s_j به سرعت کاهش یافته پس از تعداد اندکی تکرار به 10^{-11} همگرا می‌شود. نمودارهای جواب دقیق و تقریبی برای $s(t)$ در شکل ۴.۴ رسم شده است. همچنین نمودارهای جواب دقیق و تقریبی و خطای نسبی برای توابع جواب $u(x, t)$ و $v(y, t)$ در شکل‌های ۵.۴ و ۶.۴ رسم شده‌اند. نتایج بدست آمده نشان دهنده دقت مناسب تقریب‌های به دست آمده هستند. وقتی که داده‌های $\mu_3(t_j)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در محاسبات در نظر گرفته شده‌اند، در این حالت نیز همگرایی سریع تابع هدف به 10^{-8} به دست می‌آید. جواب‌های دقیق و تقریبی $s(t)$ ، $u(x, t)$ و $v(y, t)$ و خطای نسبی برای $u(x, t)$ و $v(y, t)$ در شکل‌های ۴.۴، ۷.۴ و ۸.۴ نمایش داده شده‌اند. همچنین، مقادیر RMS برای $s(t)$ و مقدار تابع هدف در تکرار آخر در جدول ۱.۴ ارایه شده‌اند و این مقادیر با نتایج به دست آمده در [۴۲] مقایسه شده‌اند.

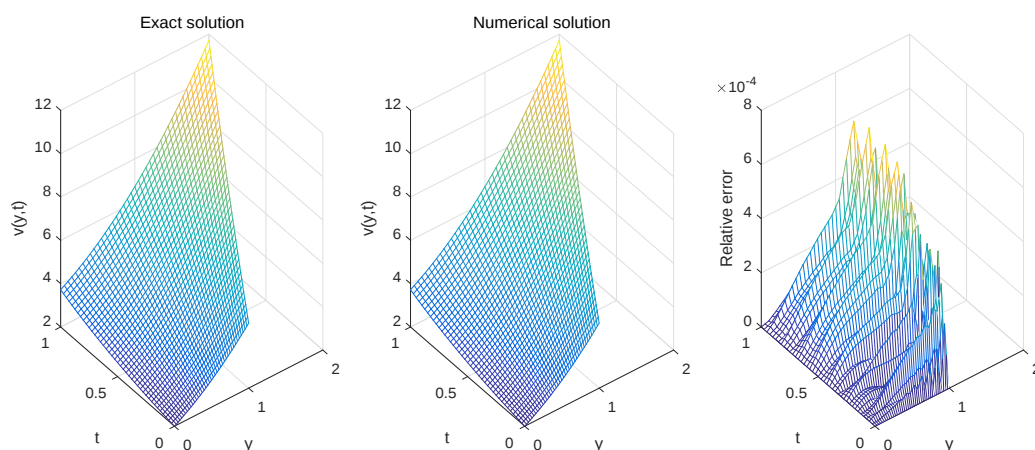
با توجه به نتایج به دست آمده ملاحظه می‌شود که در این مثال اختلال کوچک در داده‌های ورودی باعث تغییرات قابل توجه در جواب‌های عددی نمی‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت جواب‌های عددی به دست آمده پایدار هستند. همچنین نتایج حاصل نشان دهنده دقت بالاتر تقریب‌های بدست آمده از روش حاضر نسبت به روش ارایه شده در [۴۲] می‌باشد.



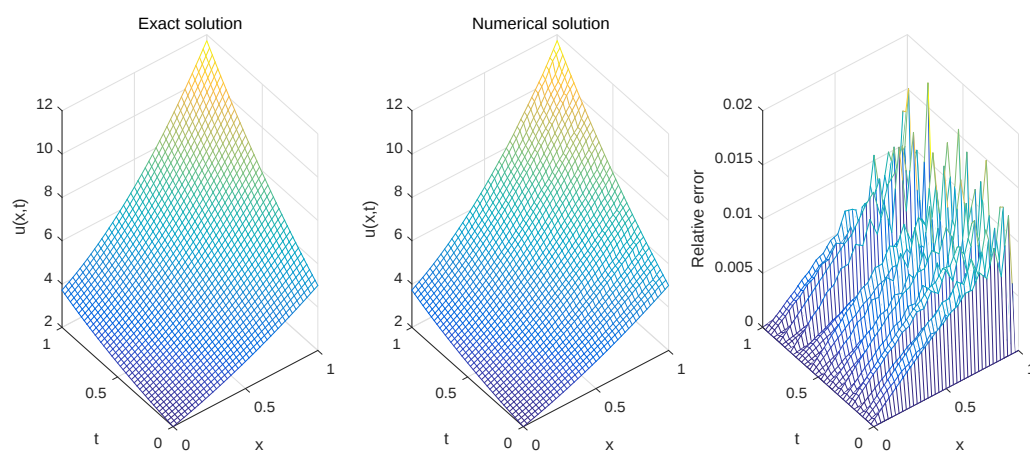
شکل ۴.۴: نمودارهای جواب دقیق و جواب تقریبی برای $s(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۵.۴: نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x,t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



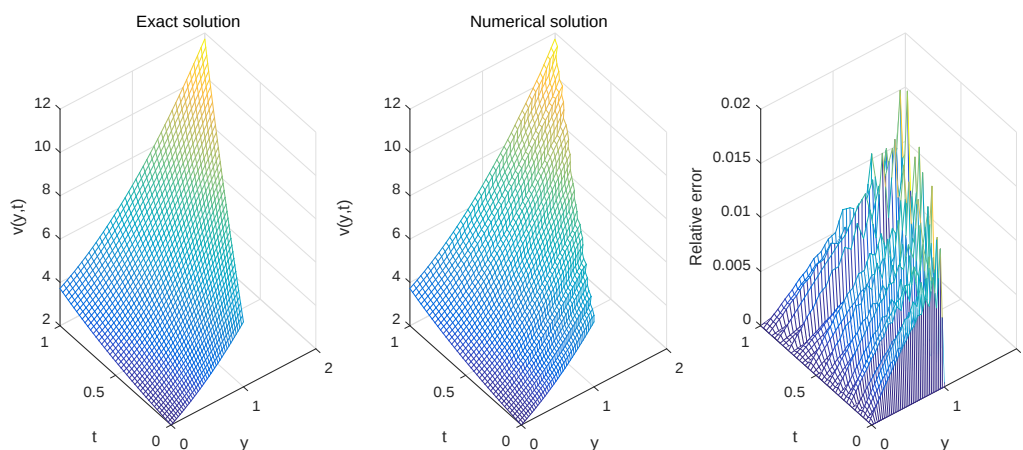
شکل ۶.۴: نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x,t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۷.۴: نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.

جدول ۱.۴: خطای RMS برای $s(t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.

		RMS with $\delta = 0$	cpu time	RMS with $\delta = 0.02$	cpu time
Example 1	present method	0.000156	120 seconds	0.008877	100 seconds
	in [42]	0.0035	————	0.0793	————
Example 2	present method	0.000049	99 second	0.004868	97 second
	in [42]	0.0023	————	0.0212	————



شکل ۸.۴: نمودارهای جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.

مثال ۲.۴.۴. در این مثال، مساله (۶.۴)–(۹.۴) را با مفروضات زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} a(v) &= e^{-v}, \quad s_0 = s(0), \quad \varphi(y) = 1 + (1+y)^2 \\ \mu_1(t) &= 1 + e^t, \quad \mu_2(t) = \left(\frac{2+t}{1+t}\right)^2 + e^t, \\ \mu_3(t) &= \frac{1}{3} \left(\frac{2+t}{1+t}\right)^3 + \frac{e^t}{1+t} - \frac{1}{3}, \quad f(y,t) = e^t + e^{-(1+y)^2 - e^t} (4(1+y)^2 - 2). \end{aligned}$$

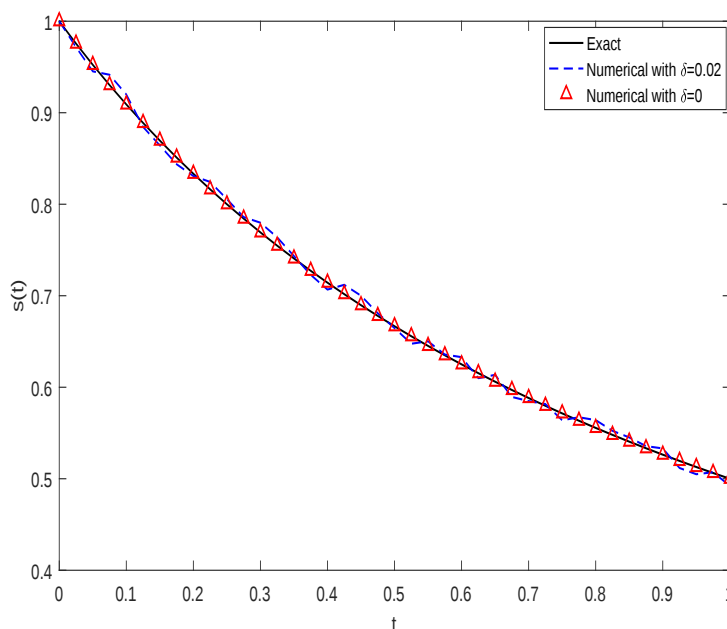
با توجه به داده‌های بالا، جواب‌های دقیق مساله معکوس به صورت زیر هستند:

$$u(x,t) = \left(1 + \frac{x}{1+t}\right)^2 + e^t, \quad s(t) = \frac{1}{1+t}.$$

و در نتیجه

$$v(y,t) = (1+y)^2 + e^t, \quad s(t) = \frac{1}{1+t}.$$

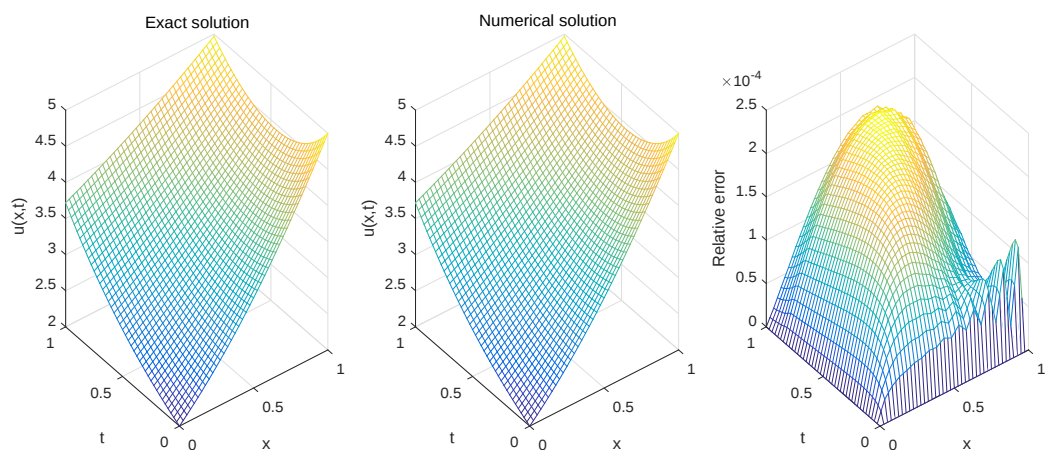
ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که هیچ نوع اختلالی در داده‌های $\mu_3(t_j)$ وجود ندارد یعنی در حالتی که $\delta = 0$. با اجرای الگوریتم روش پیشنهادی در این مثال نیز تابع هدف به عنوان تابعی از پارامترهای s_j به سرعت کاهش یافته پس از تعداد اندکی تکرار به 10^{-11} همگرا می‌شود. نمودارهای جواب



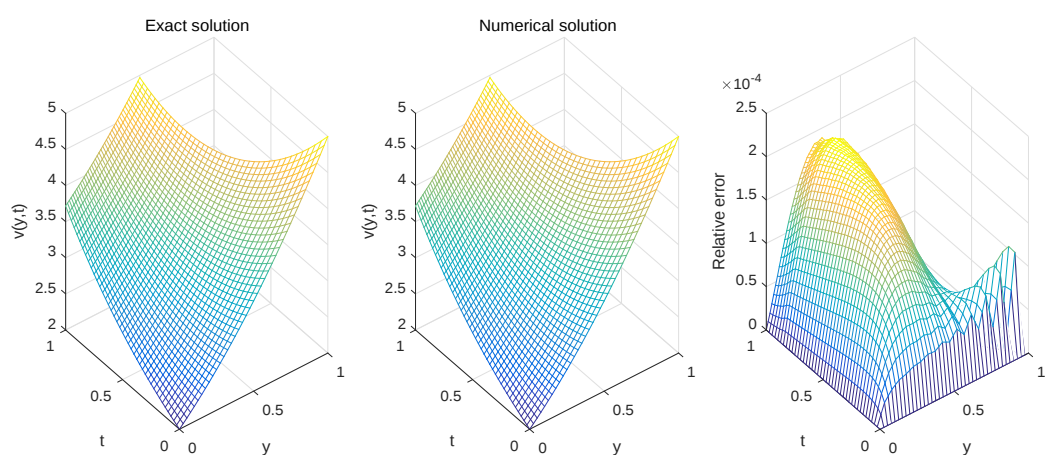
شکل ۹.۴: نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی برای $s(t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) و با سطح اختلال ($\delta = 0.02$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$

دقیق و تقریبی برای $s(t)$ در شکل ۹.۴ رسم شده است. همچنین، نمودارهای جواب دقیق و تقریبی و خطای نسبی برای توابع جواب $u(x, t)$ و $v(y, t)$ وقتی که $\delta = 0$ در شکل‌های ۱۰.۴ و ۱۱.۴ رسم شده‌اند. نتایج بدست آمده نشان دهنده دقت مناسب تقریب‌های به دست آمده هستند. وقتی که داده‌های $\mu_3(t_j)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در محاسبات در نظر گرفته شده‌اند، در این حالت نیز همگرایی سریع تابع هدف به 10^{-8} به دست می‌آید. جواب‌های دقیق و تقریبی $s(t)$ ، $u(x, t)$ و $v(y, t)$ و خطای نسبی برای $u(x, t)$ و $v(y, t)$ در شکل‌های ۹.۴، ۱۲.۴ و ۱۳.۴ نمایش داده شده‌اند. همچنین مقادیر RMS برای $s(t)$ و مقدار تابع هدف در تکرار آخر در جدول ۱.۴ ارائه شده‌اند و این مقادیر با نتایج به دست آمده در [۴۲] مقایسه شده‌اند.

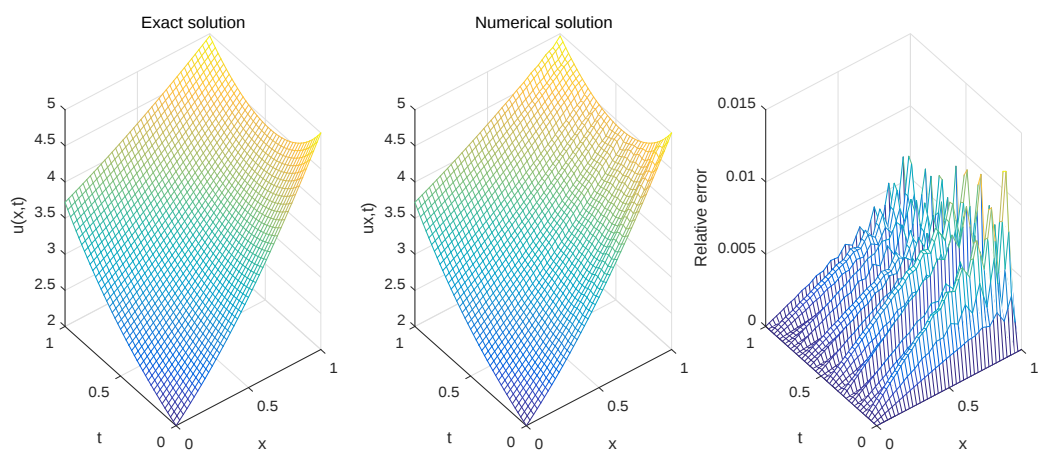
با توجه به نتایج به دست آمده ملاحظه می‌شود که در این مثال، اختلال کوچک در داده‌های ورودی باعث تغییرات قابل توجه در جواب‌های عددی نمی‌شوند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت جواب‌های عددی به دست آمده پایدار هستند. همچنین، نتایج حاصل نشان دهنده دقت بالاتر تقریب‌های به دست آمده از روش حاضر نسبت به روش ارائه شده در [۴۲] می‌باشد.



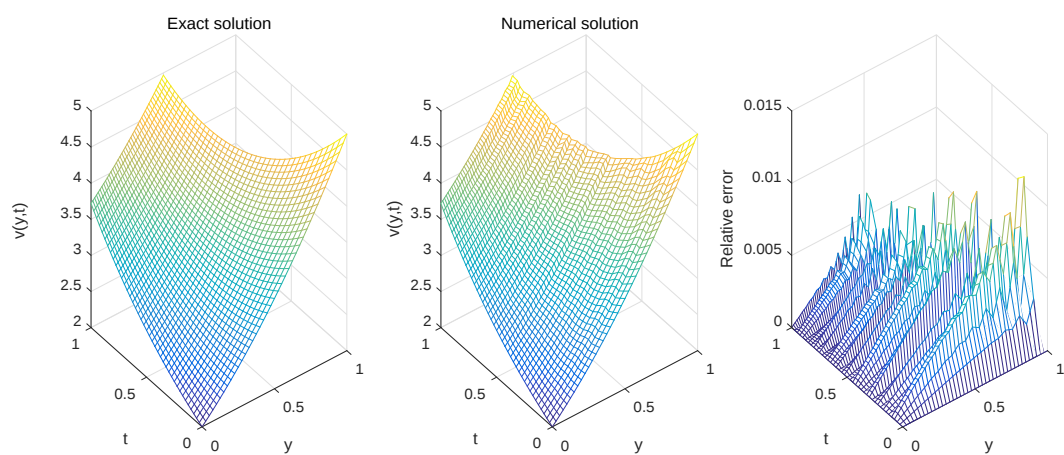
شکل ۱۰.۴: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۱۱.۴: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x, t)$ بدون اختلال ($\delta = 0$) در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۱۲.۴: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $u(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.



شکل ۱۳.۴: نمودار جواب دقیق، جواب تقریبی و خطای نسبی برای $v(x,t)$ با سطح اختلال $\delta = 0.02$ در داده‌های کوشی وقتی که $h = \Delta t = 0.025$.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادات



از نتایج مشترک و بارز فصل‌های پیشین، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:
(الف) دقت و کارایی روش ارایه شده در مقایسه با بعضی روش‌ها از جمله، روش تفاضل متناهی، رانگ کوتای مرتبه چهار و تجزیه آدومیان در مورد مسایل یکسان حل شده از نتایج واضح این رساله می‌باشد.

(ب) در مورد مسایل معکوس، پایداری جواب‌های حاصل با وارد کردن اختلال‌های مختلف بررسی شد.

(پ) با توجه به نتایج به دست آمده با مقداری اطمینان بیشتر می‌توان طیف گسترده تر و انواع مختلفی از مسایل با مرز آزاد را با استفاده از روش ارایه شده در این رساله مورد بررسی قرار داد.

برای دانشجویان علاقمند به تحقیق در زمینه مسایل با مرز آزاد و همچنین، روش تقریب کمترین مربعات متحرک چند پیشنهاد به صورت زیر ارایه می‌شود:

(الف) استفاده از تقریب‌های کمترین مربعات بهبود یافته و توسیع‌های دیگر این تقریب در حل مسایل با مرز آزاد می‌تواند زمینه‌ای برای تحقیق پژوهشگران باشد.

(ب) همانطور که می‌دانیم روش تقریب MLS بیشتر بر پایه چند جمله‌ای‌هاست. استفاده از توابع پایه از انواع دیگر به منظور ساختن توسیع‌های دیگر نیز می‌تواند زمینه تحقیق جالبی باشد.

(پ) در این رساله عمده مسایل حل شده با به کارگیری تقریب MLS در روش $MLPG$ حل شده‌اند که بر مبنای شکل ضعیف معادلات است. به نظر می‌رسد به کارگیری تقریب MLS در روشهایی که بر مبنای فرم قوی معادلات هستند در این موارد ساده‌تر باشد.

(ت) در بیشتر مقالات برای حل مسایل مرز آزاد با یک تغییر متغیر مساله تبدیل به یک مساله با مرز ثابت می‌شود. ولی، شکل معادلات مساله حاصل پیچیده‌تر از مساله اولیه است. آیا می‌توان به گونه‌ای بدون استفاده از تغییر متغیر و تبدیل مساله به یک مساله با مرز ثابت آن را بررسی کرد؟

مراجع

- [1] A. Friedman, *Variational Principles and Free-Boundary Problems*, Wiley-Interscience Publication, Wiley, New York, 1982.
- [2] A. Meirmanov, *The Stefan Problem*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [3] A . J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology*, (1956), Dover, New York.
- [4] B. T. Johansson, D. Lesnic, T. Reeve, *A method of fundamental solutions for the one-dimensional inverse Stefan problem*, Appl. Math. Model. Simul. Comput. Eng. Environmental Syst. 35 (2011) 4367-4378.
- [5] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Comput. Mech. 10 (1992) 307-318.
- [6] C. S. Liu, *Solving two typical inverse Stefan problems by using the Lie-group shooting method*, Int. J. Heat and Mass Transfer. 54 (2011) 1941-1949.
- [7] C. A. Duarte, J. T. Oden, *An h-p adaptative method using clouds*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 237-262.
- [8] D. Shepard, *A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data*, In Proceedings of the 23th National Conference ACM. (1968) 517-523.



- [9] D. Slota, *The application of the homotopy perturbation method to one-phase inverse Stefan problem*, Int. J. Comput. Math. 37 (2010) 587-592.
- [10] D. H. McLain, *Drawing contours from arbitrary data points*, Comput. J. 17 (1974) 318-324.
- [11] D. Slota, *Direct and inverse one-phase Stefan problem solved by the variational iteration method*, Comput. Math. Appl. 54 (2007) 1139-1146.
- [12] D. Mirzaei, M. Dehghan, *Implementation of meshless LBIE method to the 2D non-linear SG problem*, Int. J. Numer. Methods Eng. 79 (2009) 1662-1682.
- [13] D. H. McLain, *Two dimensional interpolation from random data* Comput. J. 19 (1976) 178-181.
- [14] D. Slota, A. Zielonka, *A new application of He's variational iteration method for the solution of the one-phase Stefan problem*, Comput. Math. Appl. 58 (2009) 2489-2494.
- [15] E. Hetmaniok, D. Slota, R. Witula, A. Zielonka, *The solution of one-phase inverse Stefan problem by homotopy analysis method*, Appl. Math. Model. 39 (2015) 6793-6805.
- [16] E. J. Kansa, *Multiquadrics -a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics II. solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations*, Comput. Math. Appl. 19 (1990) 147-161.
- [17] E. J. Kansa, *Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-II*, J. Comput. Math. Appl. 19 (1990) 147-161.
- [18] G. R. Liu, *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*, CRC press, 2003.
- [19] H. P. Ren, Y. M. Cheng, *The interpolating element-free Galerkin (IEFG) method for twodimensional potential problems*, Eng. Anal. Boundary. Elem. 36 (2012) 873-880.
- [20] H. T. Banks, F. Kojima, *Boundary shape identification problems in twodimensional domains related to thermal testing of materials*, Quart. Appl. Math. 47 (1989) 273-293.



- [21] H. T. Banks, F. Kojima, W. P. Winfree, *Boundary estimation problems arising in thermal tomography*, Inverse Prob. 6 (1990) 897–921.
- [22] J. R. Cannon, *The One-dimensional Heat Equation*, Cambridge University Press, Florida, 1984.
- [23] J. Crank, *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [24] J. Sladek, V. Sladek, Y. C. Hon, *Inverse heat conduction problems by meshless local Petrov Galerkin method*, Eng. Anal. Boundary. Elem. 30 (2006) 650-661.
- [25] J. Sladek, V. Sladek, P. Wen, Y. Hon, *The Inverse Problem of Determining Heat Transfer Coefficients by the Meshless Local Petrov-Galerkin Method*, Comput. Model. Eng. Sci. 48 (2009) 20-32.
- [26] J. Sladek, V. Sladek, S .N. Atluri, *Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problem of elasticity with nonhomogeneous material properties*, Comput. Mech. 24 (2000) 456-462.
- [27] J. M. Melenk, I. Babuska, *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 289-314.
- [28] J. D. Evans, J .R. King, *Asymptotic results for the Stefan problems with kinetic undercooling*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 53 (2000) 449–473.
- [29] J. V. Beck, K. J. Arnold, *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Wiley, New York, 1997.
- [30] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*, Dover Publications, New York, 1953.
- [31] L. I. Rubinstein, *The Stefan Problem*, AMS, Providence, 1971.



- [32] L. B. Lucy, *A numerical approach to the testing of fusion process*, Astron. J. 88 (1977) 1013-1024
- [33] M. N. Ozisik, *Heat Conduction*, Wiley, New York, 1980.
- [34] M. Hussein, D. Lesnic, M. Ivanchov, H. Snitko, *Multiple time-dependent coefficient identification thermal problems with a free boundary*, App. Numer. Math. 99 (2016) 24-50.
- [35] M. Dehghan, D. Mirzaei, *Numerical solution to the unsteady twodimensional Schrodinger equation using meshless local boundary integral equation method*, Int. J. Numer. Methods Eng. 76 (2008) 501-520.
- [36] M. S. Hussein, D. Lesnic, *Determination of a time-dependent thermal diffusivity and free boundary in heat conduction*, Int. Commun. Heat Mass Transf. 53 (2014) 154-163.
- [37] M. J. Huntul, D. Lesnic, *Determination of a Time-Dependent free boundary in a Two-Dimensional Parabolic Problem*, Int. J. Appl. Comput. Math. 5 (2019) 118.
- [38] M. Dehghan, A. Shokri, *A meshless method for numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition using radial basis functions*, Numer. Algo. 52 (2009) 461-477.
- [39] M. Ozisik, *Heat Conduction*, Wiley, New York, 1980.
- [40] M. I. Ivancho, *Invesre problem with free boundary for heat equation*, Ukr. Math. J. 55 (2003) 1086-1098.
- [41] M. Dehghan and A. Ghesmati. *Numerical simulation of two-dimensional sine-gordon solitons via a local weak meshless technique based on the radial point interpolation method (rpim)*. *Computer Physics Communications*, 181(4) (2010) 772-786.
- [42] M. S. Hussein, D. Lesnic, M. Ivanchov, *Free Boundary Determination in Nonlinear Diffusion*, East Asian, J. Appl. Math. 3 (2013) 295-310.



- [43] M. J. Peng, P. Liu, Y. M. Cheng, *The complex variable element-free Galerkin (CVEFG) method for two-dimensional elasticity problems*, Int. J. Appl. Mech. 1(2) (2009) 367-385.
- [44] M. Dehghan, D. Mirzaei, *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the generalized two-dimensional non-linear Schrodinger equation*, Eng. Anal. Boundary. Elem. 32 (2008) 747-756.
- [45] M. Dehghan, D. Mirzaei, *Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity*, Appl. Numer. Math. 59 (2009) 1043-1058.
- [46] M. Dehghan, A. Shokri, *A numerical method for solution of the two dimensional sine-Gordon equation using the radial basis functions*, Math. Comput. Simul. 79 (2008) 700-715.
- [47] N. Zabaras, Y. Ruan, *A deforming finite element method analysis of inverse Stefan problems*, Int. J. for Numer. Meth. Eng. 28 (1989) 295-313.
- [48] O. N. Onyejekwe, *The solution of one-phase inverse Stefan problem by homotopy analysis method*, Appl. Math. Sci. 8 (2014) 2635-2644.
- [49] P. Lancaster, K. Salkauskas, *Surfaces generated by moving least squares methods*, AMS Mathematics of Computation. 37 (1981) 141-158.
- [50] R. Grzymkowski, D. Slota, *One-phase inverse Stefan problem solved by Adomian decomposition method*, Comput. Math. Appl. 51 (2006) 33-40.
- [51] R. Grzymkowski, D. Slota, *Stefan problem solved by Adomian decomposition method*, Int. J. Comput. Math. 82 (2005) 851-856.
- [52] R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, G. Pagnini, P. Paradisi, *Discrete random walk models for space time fractional diffusion*, Chemical Physics 284 (2002) 521-541.



- [53] R. Grzymkowsk, M. Pleszczynski, D. Słota, *Comparing the Adomian decomposition method and Runge–Kutta method for solutions of the Stefan problem*, Int. J. Comput. Math. 83 (2006) 409–417.
- [54] S. C. Gupta, *The Classical Stefan Problem. Basic Concepts, Modelling and Analysis*, Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [55] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, I. Hashim, *Numerical analysis of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis using a meshfree method based on the radial basis function*, Eng. Anal. Boundary. Elem. 36(12) (2012) 1811-1818.
- [56] S. N. Atluri, T. Zhu, *A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics*, Comput. Mech. 22(2) (1998) 117-127.
- [57] S. N. Atluri, *The Meshless Method (MLPG) for Domain and BIE Discretizations*, Tech Science Press, Amazon, 2004.
- [58] S. N. Atluri, S. P. Shen, *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple and lesscostly alternative to the finite element methods*, Comput. Model. Eng. Sci. 3(1) (2002) 11-51.
- [59] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, *MLPG method for two-dimensional diffusion equation with Neumann's and non-classical boundary conditions*, Appl. Numer. Math. 61 (2011) 170-180.
- [60] S. N. Atluri, T. Zhu, *A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computer modeling and simulation*, Comput. Model. Simul. Eng. 3(3) (1998) 187-196.
- [61] S. N. Atluri, T. Zhu, *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach for solving problems in elasto-statics*, Comput. Mech. 25 (2000) 169-179.



- [62] S. N. Atluri, T. Zhu, *New concepts in meshless methods*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 13 (2000) 537-556.
- [63] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, I. Hashim, *A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear Schrodinger equation*, Eng. Anal. Boundary. Elem. 37(6) (2013) 885-898.
- [64] S. Chantasiriwan, B. T. Johansson, D. Lesnic, *The method of fundamental solutions for free surface Stefan problems*, Eng. Anal. Boundary Elem. 33 (2009) 529-538.
- [65] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, *Element-free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Methods Eng. 37(2)(1994) 229-256.
- [66] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, *Element free Galerkin methods for static and dynamic fracture*, Int. J. Solids Struct. 32 (1995) 2547-2570.
- [67] T. Zhang, Y. He, L. Dong, S. Li, A. Alotaibi, S. N. Atluri, *Meshless Local Petrov-Galerkin Mixed Collocation Method for Solving Cauchy Inverse Problems of Steady-State Heat Transfer*, Comput. Model. Eng. Sci. 97 (2014) 509-533.
- [68] T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, *Element-free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Methods Eng. 37 (1994) 229-256.
- [69] T. Zhu, J. D. Zhang, S. N. Atluri, *A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach*, Comput. Mech. 21 (1998) 223-235.
- [70] T. P. Fredman, *A boundary identification method for an inverse heat conduction problem with an application in ironmaking*, Heat Mass Transfer 41 (2004) 95-103.
- [71] V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, *Meshless methods: A review and computer implementation aspects*, Math. Comput. Simulation 79 (2008) 763-8130.



- [72] V. Volterra, *Lessons sur la theorie mathematique de la lutte pur la vie*, (1931) Gauthier-Villars, Paris.
- [73] W. K. Liu, S. Jun, Y.F. Zhang, *Reproducing kernel particle methods*, Int. J. Numer. Methods Fluids 21 (1995) 1081-110
- [74] Y. Lotfi, K. Parand, K. Rashedi, J. AmaniRad, *Numerical study of temperature distribution in an inverse moving boundary problem using a meshless method*, Engineering with Computers. 35 (2019) 1-15.
- [75] Y. T. Gu, G. R. . Liu, *A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analyses for solids*, Comput. Mech. 27 (2001) 188-198.
- [76] Y. X. Mukherjee, S. Mukherjee, *The boundary node method for potential problems*, Int. J. Numer. Methods Eng. 40 (1997) 797-815.
- [77] Y. C. Hon, M. Li, *A computational method for inverse free boundary determination problem*, Int. J. Numer. Meth. Eng. 73 (2008) 1291-1309.
- [78] Z. Zhang, S. Hao, K. Liew, Y. Cheng, *The improved element-free Galerkin method for twodi-mensional elastodynamics problems*, Eng. Anal. Boundary. Elem. 37(12) (2013) 1576-1584.
- [79] Z. Zhang, D. Li, Y. Cheng, K. Liew, *The improved element-free Galerkin method for threedimensional wave equation*, Acta Mech Sin 28 (2012) 808-818.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

انتشار.....	diffusion.....
انجماد.....	Freezing.....
پارامتر شکل.....	Shape parameter.....
پایدار.....	Stable.....
تقریب جواب.....	Trial approximation.....
توابع پایه ای شعاعی.....	Radial basis function.....
درونیاب.....	Interpolant.....
روش منظم سازی.....	Regularization method.....
ذوب.....	Melting.....
فرم ضعیف.....	Weak form.....
کمترین مربعات متحرک.....	Moving least square.....
گسسته سازی.....	Discretization.....
معادله حاکم.....	Governing equation.....
می نیم سازی.....	Minimization.....
می نیم ساز.....	Minimizer.....
منبع.....	Source.....
نقاط میدانی.....	Field nodes.....
نقاط میدانی.....	Convergence.....
همسایگی.....	Neighborhood.....

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute Error	خطای مطلق
Accuracy	دقت
accessible	قابل دسترس
Analytical solution	تحلیلی جواب
Approximate solution	جواب تقریبی
Boundary condition	شرط مرزی
Boundary value	مقدار مرزی
Boundary Element Method	روش عناصر مرزی
Coefficient	ضریب
Costly	پرهزینه
Collocation method	روش هم محلی
Comparison	مقایسه
diffusion	انتشار
Exact solution	جواب دقیق
Free boundary problem	مسئله مرز آزاد
Finite difference method	روش تفاضل متناهی
Initial condition	شرط اولیه
Initial value	مقدار اولیه
Local	محلی
Meshless method	روش بدون شبکه
Node	گره



noise	اختلال
Operator	عملگر
Objective function	تابع هدف
Radial basis function	توابع پایه ای شعاعی
Relative Error	خطای نسبی
Surface	رویه
Stability	پایداری
Unknown	مجهول
Tolbox	جعبه ابزار
Weighted	وزن دار

Surname: Karami

Name: Akbar

Title: Application of moving least squares approximation in solving free boundary problems

Supervisor: Prof. S. Abbasbandy

Advisor: Dr. E. Shivanian

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University Faculty of Science, Department of Mathematics

Date: February, 2021

Number of pages: 102

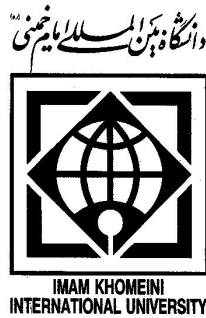
Keywords: Moving least squares approximation; Meshless methods; Weak form; Multi-dimensional surfaces; Weight function; Shape functions; Free boundary problems.

Abstract

In this thesis , we apply the moving least square approximation to solve the free boundary problems. The moving least squares approximation plays an important role in those meshless methods which are based on weak form. This method for a first time with inspiration of Shepard [8] and Maclain [10, 13] works, introduced by Lancaster and Salkauskas [49] in 1981 for approximation of multi-dimensional surfaces and then considered as a basis of meshless methods such as Meshless local Petrove Galerkin method for solving the partial differential equations. For every node in domain, moving least square approximation method solves a local weighted least squares problem. At first glance this method is computationally costly,

but we will see that this method is very efficient, in fact it is one of the best schemes to fit data with a reasonable accuracy.

In this thesis, we introduce the moving least square approximation and employ constructed shape functions in Meshless local Petrove Galerkin method in order to solving the free boundary problems, such as iverse Stefan problem, time-dependent coefficient and free boundary idetification problem and free boundary detemination in nonlinear diffusion problem. With several examples it shown that the solutions obtained using the introduced method in this thesis, are acceptable and stable even under a measurement noise in input data. By comparing the results obtained from the present method and known methods, it has be shown that the presented procedure is useful and efficient in finding solutions of the considered problems.



Imam Khomeini International University
Faculty of Science, Department of Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

Application of moving least squares approximation in solving free boundary problems

Supervisor

Prof. S. Abbasbandy

Advisor

Dr. E. Shivanian

by

Akbar Karami

February, 2021