

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

بررسی چند جمله‌ای‌های مجهز به یک پارامتر برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی

استاد راهنما

دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور

دکتر الیاس شیوانیان

پژوهشگر

جلال حاجی‌سفیعیا

زمستان ۹۹

نام خانوادگی دانشجو: حاجی شفیعیها

نام: جلال

عنوان: بررسی چندجمله‌ای‌های مجهز به یک پارامتر برای حل عددی معادلات دیفرانسیلی

استاد راهنما: دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور: دکتر الیاس شیوانیان

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره) قزوین
تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۹۹
تعداد صفحات: ۱۵۳

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره) قزوین
تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۹۹

واژگان کلیدی: a - چندجمله‌ای ها، a - چندجمله‌ای‌های گویا چندجمله‌ای‌های چبیشف، مسایل معکوس، معادله فاکنر-اسکن، معادله دیفرانسیلی کسری، مشتق کسری کاپوتو، مشتق کسری ریمان-لیوویل، معادله بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز.

چکیده

در این رساله نوع جدیدی از چندجمله‌ای‌ها تعریف شده است که مجهز به یک پارامتر کمکی a می‌باشد. این چندجمله‌ای‌ها ترکیبی از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم هستند. از این چندجمله‌ای‌ها برای حل معادلات BBMB، فاکنر-اسکن، مرتبه کسری و مسایل معکوس در این رساله استفاده شده است. جواب تقریبی هر معادله به صورت مجموع این چندجمله‌ای‌ها فرض می‌شود و سپس با کمک نقاط هم‌محلی ضرایب مجهول هر چندجمله‌ای و همچنین پارامتر کمکی به صورت بهینه بدست می‌آید. حال با قرار دادن مقدار بهینه a در چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های بدون پارامتر کمکی بدست می‌آیند که مرحله بازآغاز روش حاضر می‌باشد. جهت گسسته‌سازی زمانی در معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای از روش تفاضل متناهی و در معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای مرتبه کسری از روش $L1$ استفاده شده است. در ادامه قضیه همگرایی و پایداری روش نیز در این رساله به اثبات رسیده است.

تقدیم بہ

ساحت مقدس حضرت مہدی (عج)

سپاس‌گزاری

سپاس و ستایش خداوند یکتا را که به من توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امید که شایستگی ادامه این راه را داشته باشم. بر خود لازم می‌دانم که از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی‌های حکیمانه استاد راهنمای محترم جناب آقای پروفسور سعید عباس‌بندی، تشکر و قدردانی کنم. از استاد مشاور پایان‌نامه جناب آقای دکتر الیاس شیوانیان تشکر و قدر دانی می‌نمایم. به علاوه بر خود لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر داوود رستمی، دکتر محمدرضا انصاری و دکتر شهنام جوادی که داوری این پایان‌نامه را با دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر نمایم. با ادای احترام به وجود نازنین پدر و مادرم و سپاس فراوان از زحمات بی‌دریغ همسر مهربانم...

جلال حاجی‌شفیعی
زمستان ۹۹

فهرست مطالب

ح	فهرست تصاویر
د	فهرست جداول
۸	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۸	۱.۱ تعامد توابع
۹	۲.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف
۱۰	۳.۱ چندجمله‌ای‌های مجهز به یک پارامتر a
۱۶	۴.۱ نقاط شبکه‌ای
۱۷	۵.۱ مشتق کسری
۱۷	۱.۵.۱ تابع گاما و ویژگی‌های آن
۱۸	۲.۵.۱ حساب کسری
۲۰	۲ مروری بر روش‌های مبتنی بر چندجمله‌ای‌ها
۲۰	۱.۲ چندجمله‌ای‌های برنشتاین
۲۱	۲.۲ چندجمله‌ای‌های چبیشف
۲۲	۳.۲ چندجمله‌ای‌های بوبکر
۲۳	۴.۲ چندجمله‌ای‌های لوکاس
۲۴	۵.۲ چندجمله‌ای‌های فیبوناچی
۲۵	۳ حل عددی معادله کلی بنجامین - بونا - ماهونی - برگرز
۲۵	۱.۳ مقدمه
۲۶	۲.۳ پیاده‌سازی روش
۲۷	۱.۲.۳ پیاده‌سازی روش برای معادله BBMB یک بعدی
۲۸	۲.۲.۳ پیاده‌سازی روش برای معادله BBMB دو بعدی
۲۸	۳.۳ همگرایی روش
۳۱	۴.۳ نتایج عددی
۴۴	۵.۳ نتیجه‌گیری



۴۷	۴	حل عددی معادلات فالكتر-اسكن
۴۷	۱.۴	مقدمه
۴۸	۲.۴	فرمول مساله
۴۹	۳.۴	a- چندجمله ای های گویا
۵۱	۴.۴	قضیه همگرایی
۵۴	۵.۴	پیاده سازی روش
۵۵	۶.۴	نتایج عددی
۵۷	۷.۴	نتیجه گیری
۶۰	۵	حل عددی مسایل معكوس سهموی با شرط مرزی غیرموضعی
۶۰	۱.۵	مقدمه
۶۳	۲.۵	مسایل معكوس سهموی يك بعدی
۶۴	۱.۲.۵	وجود، یكتایی و پایداری جواب
۶۶	۲.۲.۵	پیاده سازی روش
۶۶	۱.۲.۲.۵	گسسته سازی زمانی
۶۷	۲.۲.۲.۵	پایداری روش
۶۸	۳.۲.۲.۵	اجرای روش
۶۹	۳.۲.۵	نتایج عددی
۷۷	۳.۵	مسایل معكوس سهموی دو بعدی
۷۸	۱.۳.۵	وجود، یكتایی و پایداری جواب
۷۹	۲.۳.۵	پیاده سازی روش
۸۰	۱.۲.۳.۵	گسسته سازی زمانی
۸۱	۲.۲.۳.۵	اجرای روش
۸۱	۳.۳.۵	نتایج عددی
۹۰	۴.۵	نتیجه گیری
۹۲	۶	حل عددی معادلات دیفرانسیلی مرتبه کسری
۹۲	۱.۶	مقدمه
۹۳	۲.۶	حل عددی معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه کسری
۹۳	۱.۲.۶	وجود و یكتایی جواب
۹۴	۲.۲.۶	پیاده سازی روش
۹۵	۳.۲.۶	نتایج عددی
۹۷	۴.۲.۶	باز آغاز روش
۹۸	۱.۴.۲.۶	بازآغاز مثال ۴.۲.۶
۱۰۰	۲.۴.۲.۶	بازآغاز مثال ۵.۲.۶



۳.۴.۲.۶	بازآغاز مثال ۶.۲.۶	۱۰۲
۳.۶	حل عددی معادله انتشار مرتبه کسری زمان-مکان با مشتق کاپوتو نسبت به زمان ۱۰۳	
۱.۳.۶	پیاپی سازی روش	۱۰۳
۱.۱.۳.۶	گسسته سازی زمانی	۱۰۴
۲.۱.۳.۶	اجرای روش	۱۰۴
۲.۳.۶	نتایج عددی	۱۰۴
۴.۶	نتیجه گیری	۱۰۹
۷	نتیجه گیری و کارهای آتی	۱۱۱
	مراجع	۱۱۳
	واژه نامه انگلیسی به فارسی	۱۴۳
	واژه نامه انگلیسی به فارسی	۱۴۷

فهرست تصاویر

۱.۳	نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL در حالت خطی سازی
۳۵	شده به ازای $\tau = \frac{1}{640}$ و $T = 10$
۲.۳	نمودار جواب تقریبی مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL در حالت خطی سازی شده
۳۵	به ازای $\tau = \frac{1}{640}$
۳.۳	نمودار خطای مطلق مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{2560}$ و $N = 5$
۳۸	$T = 1$
۴.۳	نمودار خطای مطلق مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{320}$ و $T = 1$.
۴۱	نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{5000}$.
۵.۳	نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{5000}$.
۴۳	$N = 18$ و $T = 1$
۶.۳	نمودار جواب تقریبی مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{5000}$ و $N = 18$.
۴۳	نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{100}$.
۷.۳	نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{100}$.
۴۵	$N = 50$ و $T = 10$
۴۵	نمودار جواب تقریبی مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{100}$ و $N = 50$.
۸.۳	نمودار جواب تقریبی مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{100}$ و $N = 50$.
۱.۴	گونه در زاویه حمله $\frac{\beta\pi}{2}$
۴۹	نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف β به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$
۵۶	نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف α به ازای $\beta = 1$ و $M = 0$
۳.۴	نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف M به ازای $\alpha = 0$ و $\beta = \frac{4}{3}(m = 2)$
۵۸	نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف M به ازای $\alpha = 0$ و $\beta = -3(m = -\frac{3}{5})$
۵۸	نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) مثال ۵.۲.۵ به ازای $N = a = 13.59440$.
۱.۵	نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) مثال ۵.۲.۵ به ازای $N = a = 13.59440$.
۷۱	$\tau = \frac{1}{1000}$ و $T = \frac{1}{2}$ در نقاط شبکه‌ای CGL
۲.۵	نمودار خطای نسبی u در مثال ۵.۲.۵ به ازای $N = 30$ ، $\tau = \frac{1}{1000}$ و $T = \frac{1}{2}$ در
۷۳	نقاط شبکه‌ای CGL
۳.۵	نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) مثال ۶.۲.۵ به ازای $a = -0.63627$.
۷۴	$N = 15$ ، $\tau = \frac{1}{5000}$ و $T = \frac{1}{2}$ در نقاط شبکه‌ای CGL

- ۴.۵ نمودار خطای نسبی u در مثال ۶.۲.۵ به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ ،
 ۷۷ $\tau = \frac{1}{1000}$ و $T = \frac{1}{2}$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۵.۵ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $p(t)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ،
 ۸۵ $\tau = 0.0005$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۶.۵ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, y)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ،
 ۸۵ $\tau = 0.0005$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۷.۵ نمودار جواب‌های عددی $u(x, y)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ،
 ۸۵ $\tau = 0.0005$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۸.۵ نمودار سطح تراز خطای مطلق $u(x, y)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ،
 ۸۶ $\tau = 0.0005$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۹.۵ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $p(t)$ در مثال ۳.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ،
 ۸۷ $\tau = 0.0002$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۱۰.۵ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, y)$ در مثال ۳.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ،
 ۸۹ $\tau = 0.0002$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۱۱.۵ نمودار جواب‌های عددی $u(x, y)$ در مثال ۳.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ،
 ۹۰ $\tau = 0.0002$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۱۲.۵ نمودار سطح تراز خطای مطلق $u(x, y)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ،
 ۹۰ $\tau = 0.0002$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۱.۶ نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $N = 5$ ، $\alpha = 0.9$ ،
 ۹۹ $\alpha = 0.9$.
- ۲.۶ نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $N = 20$ ، $\alpha = 0.9$ ،
 ۱۰۱ $\alpha = 0.9$.
- ۳.۶ نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) بازآغاز مثال ۶.۲.۶ به ازای $N = 20$ ، $\alpha = 1.5$ ،
 ۱۰۳ $\alpha = 1.5$.
- ۴.۶ نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ،
 ۱۰۷ $N = 15$ ، $(\gamma, \alpha) = (0.8, 1.8)$ و $T = 1$.
- ۵.۶ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, t)$ در مثال ۱.۳.۶ به ازای $N = 15$ ، $(\gamma, \alpha) = (0.8, 1.8)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای CGL،
 ۱۰۷ $(\gamma, \alpha) = (0.8, 1.8)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای CGL.
- ۶.۶ نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۲.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ،
 ۱۰۸ $N = 20$ ، $(\gamma, \alpha) = (0.5, 1.5)$ و $T = 1$.
- ۷.۶ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, t)$ در مثال ۲.۳.۶ به ازای $N = 20$ ، $(\gamma, \alpha) = (0.5, 1.5)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای CGL،
 ۱۰۹ $(\gamma, \alpha) = (0.5, 1.5)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

فهرست جداول

۱.۳	مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم بدست آمده از a -
۳۳	چندجمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌های لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$
۲.۳	مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL بدست آمده از a -
۳۳	چندجمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌های لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$
۳.۳	مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم بدست آمده از a -
۳۳	چندجمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌های لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$ در حالت خطی
۳۴	شده.
۴.۳	مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL بدست آمده از a -
۳۴	چندجمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌های لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$ در حالت خطی
۳۴	شده.
۵.۳	مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $N = 10$ و
۳۴	$T = 10$
۶.۳	مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $N = 5$ و $T = 1$.
۷.۳	مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 5$ و
۳۷	$T = 1$
۸.۳	مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $N = 5$ و $T = 1$.
۹.۳	مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 5$ و $T = 1$.
۱۰.۳	مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $\tau = 0.002$ و $T = 1$.
۱۱.۳	مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $\tau = 0.002$ و $T = 1$.
۱۲.۳	مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.002$ و
۴۰	$T = 1$
۱۳.۳	مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم و CGL به ازای
۴۰	$N = 5$ و $T = 1$ ($h = 0.2$)
۴۰	مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $T = 1$
۴۰	مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$



- ۱۶.۳ مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$ و $\tau = 1 \times 10^{-5}$ ۴۲
- ۱۷.۳ مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$ ۴۲
- ۱۸.۳ مقایسه نتایج خطای $L_2 \times 10^2$ در مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ۴۴
- در زمان‌های مختلف. ۴۴
- ۱.۴ مقایسه $f''(0)$ برای روش‌های مختلف به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$ ۵۵
- ۲.۴ مقایسه $f''(0)$ برای روش پیشنهادی با چندجمله‌ای‌های گویای چبیشف نوع دوم به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$ ۵۶
- ۳.۴ مقایسه $f''(0)$ برای روش‌های a - چندجمله‌ای‌ها و هموتوبی به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$ ۵۷
- ۴.۴ مقایسه $f''(0)$ برای روش‌های مختلف به ازای $f(0) = 0$ و $\beta = \frac{4}{3}(m = 2)$ ۵۸
- ۵.۴ مقایسه $f''(0)$ برای روش‌های مختلف به ازای $f(0) = 0$ و $\beta = -3(m = -\frac{3}{5})$ ۵۹
- ۶.۴ مقایسه $f''(0)$ و نرم L_2 مانده به ازای مقادیر مختلف M ، β و N ۵۹
- ۱.۵ خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$ ۷۰
- ۲.۵ خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$ ۷۱
- ۳.۵ خطای نسبی پارامتر منبع $r(t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$ ۷۲
- ۴.۵ خطای نسبی پارامتر منبع $r(t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$ ۷۲
- ۵.۵ خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ ۷۴
- ۶.۵ خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ ۷۵
- ۷.۵ خطای نسبی پارامتر منبع $p(t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ ۷۶
- ۸.۵ خطای نسبی پارامتر منبع $p(t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ ۷۶
- ۹.۵ خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0005$ ۸۳
- ۱۰.۵ خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = -3.1512 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0005$ ۸۳

- ۱۱.۵ خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a =$
 ۸۴ $\dots \dots \dots \tau = 0.0005$ و $N = 5, T = 1, -3.4341 \times 10^{-4}$
- ۱۲.۵ خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a =$
 ۸۴ $\dots \dots \dots \tau = 0.0005$ و $N = 5, T = 1, -3.1512 \times 10^{-4}$
- ۱۳.۵ خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به
 ۸۷ ازای $\dots \dots \dots \tau = 0.0002$ و $N = 5, T = 1, a = -3.1723 \times 10^{-4}$
- ۱۴.۵ خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به
 ۸۸ ازای $\dots \dots \dots \tau = 0.0002$ و $N = 5, T = 1, a = -3.1723 \times 10^{-4}$
- ۱۵.۵ خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a =$
 ۸۸ $\dots \dots \dots \tau = 0.0002$ و $N = 5, T = 1, -3.1723 \times 10^{-4}$
- ۱۶.۵ خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $T = 1,$
 ۸۹ $\dots \dots \dots \tau = 0.0002$ و $a = -3.1723 \times 10^{-4}, N = 5$
- ۱.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای مثال ۴.۲.۶ به ازای
 ۹۵ $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N
- ۲.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای مثال ۴.۲.۶ به ازای
 ۹۶ $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N
- ۳.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای مثال ۵.۲.۶ به ازای
 ۹۶ $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N
- ۴.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای مثال ۵.۲.۶ به ازای
 ۹۶ $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N
- ۵.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای مثال ۶.۲.۶ به ازای
 ۹۷ $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N
- ۶.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به
 ۹۸ ازای $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N
- ۸.۶ مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر
 ۹۸ مختلف α و N
- ۹.۶ مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر
 ۹۹ مختلف α و N
- ۱۰.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به
 ۱۰۰ ازای $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N
- ۱۱.۶ نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله‌ای‌ها برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به
 ۱۰۰ ازای $\dots \dots \dots t = 1$ و مقادیر مختلف α و N

- ۱۲.۶ مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N ۱۰۰
- ۱۳.۶ مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N ۱۰۱
- ۱۴.۶ مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای مثال ۵.۲.۶ به ازای $N = 20$ ، مقادیر مختلف α و پارامتر a ۱۰۱
- ۱۵.۶ مقایسه نتایج ماکزیمم خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۶.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف $0 < \alpha \leq 1$ و N ۱۰۲
- ۱۶.۶ مقایسه نتایج ماکزیمم خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۶.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف N و $\alpha = 1.5, 2$ ۱۰۲
- ۱۷.۶ نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۱.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ، $T = 1$ و $\gamma = 0.5$ ۱۰۵
- ۱۸.۶ نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۱.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ، $T = 1$ و $\gamma = 0.8$ ۱۰۶
- ۱۹.۶ مقایسه نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۱.۳.۶ با روش تفاضل متناهی کسری، در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$ و مقادیر مختلف N, τ, α و γ ۱۰۶
- ۲۰.۶ نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۲.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ و $T = 1$ ۱۰۸
- ۲۱.۶ مقایسه نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۲.۳.۶ با روش تفاضل متناهی کسری، در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$ و مقادیر مختلف N, τ, α و γ ۱۰۹

پیشگفتار

تاریخچه حضور چندجمله‌ای‌ها در ریاضیات از زمان باستان و با مسأله حل معادله درجه ۳ در یونان و بابل باستان و همچنین مصر آغاز شد. در قرن ۱۱ میلادی این معادله به روش هندسی توسط دانشمند ایرانی خیام حل شد. در طول قرن‌ها برای حل این معادله روش‌های مختلفی توسط دانشمندان ایرانی، هندی و عرب ارایه شد که سرانجام در قرن ۱۶ میلادی دانشمندی ایتالیایی اولین صورت معادله درجه ۳ را به صورت امروزی نوشت که می‌توان این قرن را قرن تولد چندجمله‌ای‌ها در ریاضیات دانست [۲۰۸]. در قرن ۱۷ میلادی رنه دکارت^۱ متغیرهای امروزی چندجمله‌ای‌ها را ابداع کرده و مجهولات به صورت حروف لاتینی یا یونانی استعمال شدند. همچنین کلمه *polynomial* نیز که از ترکیب دو کلمه لاتینی و یونانی می‌باشد در قرن ۱۷ میلادی برای اولین بار بکار رفته است. توابع چندجمله‌ای از دیرباز مورد استفاده دانشمندان علوم پایه و علوم مهندسی بوده است. همچنین به دلیل ساده و همه فهم بودن، محاسبه سریع و راحت، جذابیت بیشتری برای کاربرد چندجمله‌ای‌ها ایجاد کرده است. کاربردهای چندجمله‌ای‌ها در آنالیز عددی برای پیدا کردن تقریب توابع، روشهای درونیایی، پیدا کردن مشتق و انتگرال عددی و حل عددی معادلات دیفرانسیلی ساختار اساسی این بحث را نشان می‌دهد. چندجمله‌ای‌ها در زمینه‌های مختلف ریاضی و فیزیک کاربرد دارند که از آن جمله می‌توان به شاخه‌های زیر اشاره کرد:

- آنالیز مختلط: حدس بیرباخ^۲، مسأله گشتاور^۳، تقریب پاده^۴.
- آنالیز تابعی: تبدیل فوریه^۵، آنالیز طیفی عملگرهای ژاکوبی^۶.
- ریاضیات کاربردی: قضیه تقریب، انتگرال‌گیری، معادلات دیفرانسیل.
- نظریه اعداد: کسره‌های مسلسل، اثبات گنگ بودن اعداد.
- مکانیک کوانتوم: نوسانگر همساز و دگرذیسی‌های آن، عملگر شرودینگر^۷ با پتانسیل متقارن

¹R. Descartes

²Bieberbach Conjecture

³Moment Problem

⁴Padé Approximation

⁵Fourier Transform

⁶Jacobi Operators

⁷Schrödinger Operator

کروی.

● تبدیل رادون^۸، نظریه نمایش گروه، نظریه کدگذاری و ...

ساختار ساده چندجمله‌ای‌ها، آنها را در تجزیه و تحلیل توابع مختلف ریاضی با استفاده از تقریب چندجمله‌ای‌ها کاملاً متمایز می‌سازد. بسط تیلور^۹ و قضیه استون-وایرستراس^{۱۰} نمونه‌هایی از کاربردهای چندجمله‌ای‌ها در ریاضیات کاربردی می‌باشند. با توجه به قضیه تقریب وایرستراس^{۱۱} [۲۹۳] که بیان می‌کند، هر تابع پیوسته f را روی یک بازه با طول متناهی با یک چندجمله‌ای می‌توان تقریب زد، می‌توان به نقش مهم چندجمله‌ای‌ها در نظریه تقریب پی برد. همچنین درونیایی چندجمله‌ای‌ها و استفاده از اسپلاین‌ها اهمیت این موضوع را در ریاضیات کاربردی بیشتر برای ما نمایان می‌سازد. چندجمله‌ای‌ها جهت کدگذاری اطلاعات در برخی شاخه‌های ریاضیات استفاده می‌شوند. چندجمله‌ای‌های ویژه یک ماتریس یا عملگر خطی حاوی اطلاعات مقادیر ویژه آن ماتریس یا عملگر می‌باشند. چندجمله‌ای‌های فامی (رنگی) یک گراف، تعداد رنگ آمیزی آن را نمایش می‌دهد.

کاربردهای روزمره فراوانی برای چندجمله‌ای‌ها وجود دارد از جمله آنها، بازار سرمایه و مدل‌سازی بازارهای مختلف مالی، پیش‌بینی‌های هواشناسی، کنترل ترافیک مانند چراغ‌های راهنمایی، مدل‌سازی الگوهای رشد اقتصادی، توصیف رفتار باکتری‌ها در پزشکی، حتی یک راننده تاکسی نیز برای محاسبه کرایه به گونه‌ای پنهان از چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌کند. فیزیکدانان از چندجمله‌ای‌ها برای محاسبه سرعت، فاصله ستاره‌ها در فضا و تعیین فشار در دینامیک سیالات و شیمیدانان از آنها برای تعیین ترکیب مولکول‌ها و مواد و در علوم آماری و اقتصاد برای تعیین میزان زاد و ولد و مرگ و میر، جریان نقدینگی و رشد جمعیت استفاده می‌کنند. همچنین استفاده از چندجمله‌ای تیلور یا تقریب چندجمله‌ای‌ها تنها راه انجام محاسبات در ماشین حساب‌ها و رایانه‌ها برای محاسبات روزمره مانند هدایت سفینه‌های فضایی و هواپیماها می‌باشد.

از جمله انواع چندجمله‌ای‌ها، چندجمله‌ای‌های متعامد هستند که کارایی و استفاده فراوانی در ریاضیات، فیزیک و مهندسی پیدا کرده‌اند. چندجمله‌ای‌های لاگر^{۱۲} که توسط ادموند لاگر^{۱۳} در قرن ۱۹ میلادی کشف شد. از این چندجمله‌ای‌ها برای توصیف ویژگی‌های پرتوهای لیزری لاگر-گوسی، توابع موجی شعاعی اتم هیدروژن، انتگرال معادله هلمهولتز^{۱۴} در مختصات سهموی، نظریه انتشار امواج الکترومغناطیسی در امتداد خطوط انتقال و توصیف توابع ویگنر^{۱۵} سیستم‌های نوسان‌ساز در مکانیک کوانتوم^{۱۶} در فضای فاز استفاده می‌شود [۱۴].

⁸Radon Transform

⁹Taylor Expansion

¹⁰Stone-Weierstrass Theorem

¹¹Weierstrass Approximation Theorem

¹²Laguerre Polynomials

¹³E. Laguerre

¹⁴Helmholtz Equation

¹⁵Wigner Functions

¹⁶Quantum Mechanics

چندجمله‌ای‌های هرمیت^{۱۷}، توسط چارلز هرمیت^{۱۸} در قرن ۱۹ میلادی کشف شد که برای توصیف ویژگی‌های عرضی پرتوهای لیزری هرمیت-گوسی، تجزیه و تحلیل نوسان‌ساز هارمونیک مکانیک کوانتومی از آنها بهره برده شده است [۱۴].

چندجمله‌ای‌های لژاندر^{۱۹}، توسط آدریان-ماری لژاندر^{۲۰} در اواخر قرن ۱۸ میلادی کشف شد. این چندجمله‌ای‌ها اغلب در زمینه‌های فیزیکی و مهندسی کاربردهای فراوانی از خود به نمایش گذاشته‌اند. برای نمونه می‌توان اشاره کرد به: ضرایب بسط پتانسیل نیوتنی، مسائل گرانش، الکترواستاتیک درون یک پوسته کروی، مسائل هدایت گرمایی در اجسام کروی و داخل یک فضای جامد همگن [۱۴].

در سال ۱۹۲۹ بوچنر^{۲۱} [۱۸۵] نشان داد که همه این خانواده‌های چندجمله‌ای‌های متعامد در یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو با ضرایب چندجمله‌ای صدق می‌کنند. گابر زگو^{۲۲} از سال ۱۹۳۰ به بعد مقالات متنوعی در زمینه چندجمله‌ای‌های متعامد به چاپ رساند. اولین کتاب در زمینه چندجمله‌ای‌های متعامد توسط این دانشمند در سال ۱۹۳۹ به چاپ رسید [۳۲۹]. از کتابهای معروف در زمینه چندجمله‌ای‌های متعامد می‌توان به کتابهای زیر اشاره کرد:

- چندجمله‌ای‌های متعامد نوشته گابر زگو [۳۲۹]
- مقدمه‌ای بر چندجمله‌ای‌های متعامد نوشته چی هارا^{۲۳} [۸۱]
- توابع ویژه نوشته آندریوس^{۲۴}، آسکی^{۲۵} و روی^{۲۶} [۲۷]
- چندجمله‌ای‌های متعامد کلاسیک و کوانتومی یک متغیره نوشته ایسمایل^{۲۷} [۱۵۹]
- چندجمله‌ای‌های متعامد فوق هندسی و q -آنالوگهای آنها نوشته کوکوک^{۲۸} و لسکی^{۲۹} و اسوارتف^{۳۰} [۱۸۵]

یکی از مهمترین و پرکاربردترین چندجمله‌ای‌های متعامد، چندجمله‌ای‌های چبیشف هستند که ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به عنوان نقاط شبکه‌ای چبیشف در نظریه درونیابی به عنوان نقاط درونیاب استفاده می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها در سال ۱۸۵۳ میلادی توسط پاوناتی

¹⁷Hermite Polynomials

¹⁸C. Hermite

¹⁹Legendre polynomials

²⁰A.M. Legendre

²¹Bochner

²²Gábor Szegő

²³T.S. Chihara

²⁴G.E. Andrews

²⁵R. Askey

²⁶R. Roy

²⁷M.E.H. Ismail

²⁸R. Koekoek

²⁹P.A. Lesky

³⁰R.F. Swarttouw

لوویچ چبیشف^{۳۱} هنگامی که روی مسأله اتصالات (وسایلی که حرکت خطی یک ماشین بخار را به حرکت دایره‌ای یک چرخ تبدیل می‌کنند) کار می‌کرد، کشف شد [۷۵]. چندجمله‌ای‌های چبیشف در زمینه‌های مختلفی کاربرد دارند. از جمله این کاربردها می‌توان به زمینه‌های زیر اشاره کرد:

نظریه درونیابی، چندجمله‌ای‌های متعامد، نظریه تقریب، انتگرال عددی، نظریه ارگودیک^{۳۲} [۲۹۸]، حل مساله معکوس معادله رسانش گرمایی [۱۶۶]، حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل سهموی [۲۳۳]، رابطه بازگشتی و معادله دیفرانسیل برای یک دسته از چندجمله‌ای‌های متعامد [۸۸]، حل مساله آشفتگی تکین با شرایط مرزی غیر محلی [۱۷]، حل عددی معادلات انتگرالی و انتگرو-دیفرانسیل با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع سوم [۳۰۸]، آیرودینامیک هواپیما [۱۹۹]، مساله معکوس سهموی [۱۹۶]، روش طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی چند متغیره [۲۴۷]، حل عددی معادله تلگراف هذلولوی [۳۰۳]، حل معادلات انتشار کسری [۲۹۷]، حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی بیضوی [۲۰۵]، حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم و چهارم [۳۱۷]، حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای چند متغیره [۱۶۹]، حل دقیق معادله پواسون [۹۶، ۱۵۰]، تولید چندجمله‌ای‌های متعامد جدید [۲۴۴].

در این رساله با استفاده از ترکیب جدیدی از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم با حضور پارامتر کمکی a ، چندجمله‌ای‌های جدیدی به نام a -چندجمله‌ای‌ها تولید کرده‌ایم. این چندجمله‌ای‌ها مانند چندجمله‌ای‌های لاگر، لژاندر و چبیشف متعامد نیستند، اما جملات با اندیس مضارب ۴ آنها متعامد می‌شوند. رفتار a -چندجمله‌ای‌ها شباهت زیادی به چندجمله‌ای‌های متعامد دارد اما برخی خواص آنها را دارا نمی‌باشد که در فصل اول ویژگی‌هایی از آنها را مشاهده خواهید کرد. روشی که در این رساله برای حل عددی معادلات با استفاده از این چندجمله‌ای‌ها اتخاذ کرده‌ایم به صورت بازآغازی می‌باشد، یعنی ابتدا مساله داده شده با مجهول بودن پارامتر a حل می‌شود و سپس بعد از پیدا شدن پارامتر کمکی a و قرار دادن آن در a -چندجمله‌ای‌ها، با چندجمله‌ای‌های جدید دارای مقداری ثابت به جای a دوباره مساله حل می‌شود. این روش به این دلیل بکار گرفته شده است که مشاهده شد، تفاوت چشمگیری در دو مرحله بازآغازی و قبل آن وجود دارد. در مرحله بازآغازی مسأله از مقدار بهینه پارامتر کمکی بهره مند می‌شود. این موضوع در فصل ششم به صورت نمونه در رساله، آورده شده است.

این رساله در ۷ فصل نوشته شده است. فصل اول تعریف‌ها و گزاره‌هایی که در طول رساله استفاده می‌شوند را در خود جای داده است. در این فصل گزاره‌هایی درباره a -چندجمله‌ای‌ها ثابت شده و همچنین تعاریف انتگرال و مشتق کسری نیز در انتهای این فصل آورده شده است.

فصل دوم حل انواع دیگری از چندجمله‌ای‌ها آورده شده است که در شاخه‌های فیزیک و مهندسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. همچنین کارهایی که در آنها از این چندجمله‌ای‌ها استفاده شده، در این فصل آورده شده است. چندجمله‌ای‌هایی که در این فصل یادآور شده‌ایم شامل: چندجمله‌ای‌های

³¹Pafnuty Lvovich Chebyshev

³²Ergodic Theory

برنشتاین^{۳۳}، چبیشف^{۳۴}، بوبکر^{۳۵}، لوکاس^{۳۶} و فیبوناچی^{۳۷} می‌باشد.

فصل سوم حل عددی معادله غیرخطی بنجامین - بونا - ماهونی - برگرز (BBMB) به روش a - چندجمله‌ای‌ها ارایه شده است. این معادله، یکی از معادلات مشتقات پاره‌ای غیرخطی است که در فیزیک و علوم مهندسی نقش مهمی را بازی می‌کند. در این فصل این معادله در دو حالت یک بعدی و دو بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این فصل روش پیشنهادی با روش چندجمله‌ای‌های لوکاس مقایسه شده است.

فصل چهارم حل عددی معادله فاکنر - اسکن که یک معادله دیفرانسیل عادی غیرخطی است، ارایه شده است. معادلات دیفرانسیل عادی غیرخطی نقش اساسی در مدل‌سازی‌های علمی، فنی، اقتصادی و ریاضی دارند. از جمله کاربردهای معادلات دیفرانسیل عادی غیرخطی می‌توان به این زمینه‌ها اشاره کرد: محاسبه مسیرهای فضایی گلايدر و هواپیما، محاسبات پیش بینی و شیوع ایدز و اتوماسیون مانور پارکینگ وسایل نقلیه بر اساس سیستم‌های مکانیکی.

فصل پنجم این رساله به حل عددی مساله معکوس سهموی در ابعاد یک بعدی و دو بعدی پرداخته است. مسایل معکوس امروزه در زمینه‌های مختلف علمی خودنمایی می‌کند و به دلیل اهمیت آن در رشته‌های مختلف، ریاضیدانان را مجبور به ارایه راه حل‌های پیشرفته‌تر جهت جواب دقیق‌تر در سال‌های اخیر کرده است. شاید بتوان گفت، اولین مساله معکوسی که به طور صریح فرمول‌بندی شده در مکانیک کیهانی و توسط نیوتن^{۳۸} در سال ۱۶۸۷ میلادی و در کتاب اصول ریاضی فلسفه طبیعی^{۳۹} مطرح و حل شده، تعیین میدان نیروی پتانسیلی است که حرکت سیاره‌ای ایجاد می‌کند یعنی همان قوانین کپلر^{۴۰} [۲۰۶]. در سال ۱۸۷۷ میلادی برتراند^{۴۱} ثابت کرد که نیروی جاذبه نیوتن می‌تواند به طور مستقیم از اولین قانون کپلر بدست آید [۵۸]. او همچنین مساله کلی تعیین نیروی پتانسیل را بیان کرد که در آن یک ذره مقطع مخروطی را برای هر شرایط اولیه توصیف می‌کند. ایده‌های برتراند توسعه یافت به ویژه در کارهای [۹۲، ۱۲۷، ۱۶۷، ۳۲۲]. در محافل علمی اهمیت این نوع از مسایل معکوس در مکانیک کیهانی توسط زبهلی^{۴۲} شناخته شده است [۳۲۸]. اولین شرح یک مساله معکوس به عنوان مساله پیدا کردن کلی‌ترین سیستم دیفرانسیل درجه اول، یک مجموعه از ویژگیهای ارایه شده توسط اروگین^{۴۳} [۱۲۹] در دو بعد و توسعه یافته توسط گالیولین^{۴۴} [۱۳۶، ۱۳۷] بود.

فصل ششم این رساله به حل عددی معادلات دیفرانسیل عادی و پاره‌ای کسری پرداخته است.

³³Bernstein

³⁴Chebyshev

³⁵Boubaker

³⁶Lucas

³⁷Fibonacci

³⁸Newton

³⁹Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

⁴⁰Kepler's Laws

⁴¹Bertrand

⁴²Szebehely

⁴³Erugin

⁴⁴Galiullin

حساب کسری اغلب به عنوان شاخه‌ای از آنالیز ریاضی در نظر گرفته می‌شود که با معادلات انتگرو-دیفرانسیل سروکار دارد. این شاخه از ریاضیات تاریخچه‌ای تقریباً ۳۰۰ ساله دارد که می‌توان مبدأ آن را نامه هوپیتال^{۴۵} به لایب نیتس^{۴۶} دانست که در آن نامه از لایب نیتس در مورد مشتق مرتبه غیر صحیح $\frac{1}{2}$ پرسیده بود. برای اولین بار در سال ۲۰۰۲ میلادی پودلبنی در مقاله [۲۸۰] یک تعبیر هندسی و فیزیکی از انتگرال و مشتق کسری ارائه داد که برای مشاهده آن می‌توانید به این مقاله مراجعه کنید.

فصل هفتم این رساله به موضوعاتی پرداخته که می‌توان در فعالیت‌های بعدی به عنوان پژوهشهای جدید از آنها یاد کرد. همچنین مسائلی که این چندجمله‌ای‌ها در حل آنها می‌توانند توانایی بیشتری از خود نشان دهند، در این فصل ذکر شده است.

فهرست مقالات مستخرج از رساله به شرح زیر است:

1. J. Hajishafieiha, S. Abbasbandy, A new class of polynomial functions for approximate solution of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers (gBBMB) equations, *Applied Mathematics and Computation*, 367 (2020) 124765.
2. J. Hajishafieiha, S. Abbasbandy, A new method based on polynomials equipped with a parameter to solve two parabolic inverse problems with a nonlocal boundary condition, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 28(5) (2020) 739-753.

⁴⁵G. L'Hopita⁴⁶G.W. Leibniz

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه‌ی مورد نیاز برای فصل‌های بعدی را ارائه خواهیم نمود.

۱.۱ تعامد توابع

تعریف ۱.۱.۱. (فضای ضرب داخلی). یک فضای ضرب داخلی، یک فضای برداری V روی میدان F می‌باشد با یک ضرب داخلی

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$$

که سه مشخصه زیر را برای هر بردار $x, y, z \in V$ و هر اسکالر $a \in F$ داشته باشد:

• تقارن مزدوج:

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

• خطی بودن نسبت به اولین آرگومان :

$$\begin{aligned}\langle ax, y \rangle &= a \langle x, y \rangle, \\ \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,\end{aligned}$$

• معین مثبت بودن:

$$\langle x, x \rangle > 0, \quad x \in V - \{0\},$$

تعریف ۲.۱.۱. (ضرب داخلی توابع). برای توابع f و g ضرب داخلی زیر تعریف می‌شود:

$$(f, g)_\omega = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx, \quad (1.1)$$

که در آن $\omega(x) > 0$ تابع وزن مثبت برای ضرب داخلی است.

تعریف ۳.۱.۱. دو تابع غیر صفر f و g را متعامد نامند هرگاه ضرب داخلی‌شان برابر صفر شود.

۲.۱ چندجمله ایهای چبیشف

تعریف ۱.۲.۱. توابع ویژه عملگر اشتورم-لیوویل^۱ [۱۵۲]:

$$\left[(a-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \left((a-x^2)^{1/2} \frac{d}{dx} \right) + \lambda_n \right] u_n = 0, \quad (2.1)$$

روی بازه $[-a, a]$ با مقادیر ویژه $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, چندجمله ایهای چبیشف نوع اول نامیده می شوند.

این چندجمله ایها، توابعی متعامد با تابع وزن $\omega(x) = (a-x^2)^{-1/2}$ می باشند. این توابع به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$u_n(x) = T_n(x/a) = \cos(ncos^{-1}(x/a)),$$

در اغلب موارد چندجمله ایهای چبیشف روی بازه $[-1, 1]$ تعریف می شوند. چندجمله ایهای چبیشف نوع اول در رابطه بازگشتی زیر صدق می کنند:

$$\begin{cases} T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

که به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, & T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \end{aligned}$$

به طوریکه $|T_n(x)| \leq 1$ برای $x \in [-1, 1]$.

تعریف ۲.۲.۱. توابع ویژه عملگر اشتورم-لیوویل [۱۵۲]:

$$\left[(a-x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx} \left((a-x^2)^{3/2} \frac{d}{dx} \right) + \lambda_n \right] u_n(x) = 0, \quad (3.1)$$

روی بازه $[-a, a]$ با مقادیر ویژه $\lambda_n = n(n+2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, چندجمله ایهای چبیشف نوع دوم نامیده می شوند.

این چندجمله ایها، توابعی متعامد با تابع وزن $\omega(x) = (a-x^2)^{1/2}$ می باشند. این توابع به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$u_n(x) = U_n(x/a) = \frac{\sin[(n+1)cos^{-1}(x/a)]}{\sin[cos^{-1}(x/a)]},$$

چندجمله ایهای چبیشف نوع دوم روی بازه $[-1, 1]$ در رابطه بازگشتی زیر صدق می کنند:

$$\begin{cases} U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, \\ U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

¹Sturm-Liouville operator

که به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, & U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \end{aligned}$$

به طوریکه $|U_n(x)| \leq n+1$ برای $x \in [-1, 1]$.

گزاره ۳.۲.۱. هرگاه در تعریف ۲.۲.۱ قرار دهیم $a = 1$ ، تابع وزن $\omega(t) = \sqrt{1-t^2}$ بدست می آید که رابطه های زیر حاصل می شود:

$$(U_n, U_m)_\omega = \int_{-1}^1 U_n(t) U_m(t) \omega(t) dt = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}, \quad (4.1)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dU_n(t)}{dt} \frac{dU_m(t)}{dt} \omega^3(t) dt = \frac{1}{2} n(n+2) \pi \delta_{n,m}. \quad (5.1)$$

$$\int_{-1}^1 \omega^3(t) \frac{dU_n(t)}{dt} dt = 0, \quad (6.1)$$

$$\int_{-1}^1 \omega^3(t) U_n(t) dt = 0. \quad (7.1)$$

برهان. به [۱۴۶] رجوع کنید.

□

۳.۱ چندجمله ایهای مجهز به یک پارامتر a

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید a یک ثابت دلخواه و $U_n(x)$ چندجمله ای چیشف نوع دوم باشد. با فرض $A_0(x) = 1$ ، $a -$ چندجمله ایها به صورت زیر تعریف می شوند [۱]:

$$A_n(x) = axU_{n-1}(x) + U_n(x), \quad n \geq 1. \quad (8.1)$$

با توجه به تعریف بالا، خواهیم داشت:

$$A_1(x) = (2+a)x,$$

$$A_2(x) = -1 + 2(2+a)x^2,$$

$$A_3(x) = -(4+a)x + 4(2+a)x^3,$$

$$A_4(x) = 1 - 4(3+a)x^2 + 8(2+a)x^4,$$

⋮

$$A_{n+1}(x) = 2xA_n(x) - A_{n-1}(x).$$

گزاره های زیر، برخی از ویژگی های این چندجمله ایها را که در فصل های بعد از برخی از آنها استفاده شده، بیان می کنند.

گزاره ۲.۳.۱. فرض کنید $T_n(x)$ و $U_n(x)$ به ترتیب چندجمله ایهای چیشف نوع اول و دوم باشند،
آنگاه

$$A_n(x) = (a+1)\frac{x}{n}T'_n(x) + T_n(x), \quad n \geq 1. \quad (9.1)$$

$$A_n(x) = (1 + \frac{a}{2})U_n(x) + \frac{a}{2}U_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \quad (10.1)$$

$$A_n(x) = \frac{ax}{1-x^2}T_{n-1}(x) + \frac{1-ax^2}{1-x^2}T_n(x) - \frac{x}{1-x^2}T_{n+1}(x), \quad n \geq 1, |x| \neq 1, \quad (11.1)$$

$$A_n(x) = \frac{(a+1)x}{2(1-x^2)}T_{n-1}(x) + T_n(x) - \frac{(a+1)x}{2(1-x^2)}T_{n+1}(x), \quad n \geq 1, |x| \neq 1, \quad (12.1)$$

$$A_n(x) = \frac{(a+1)x}{1-x^2}T_{n-1}(x) - \frac{(a+2)x^2}{1-x^2}T_n(x), \quad n \geq 1, |x| \neq 1, \quad (13.1)$$

$$A_n(x) = ax\frac{T'_n(x)}{n} + \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1}, \quad (14.1)$$

$$A_n(x) = (a+1)U_n(x) - aT_n(x), \quad (15.1)$$

برهان. برای درستی (۹.۱) به [۱] مراجعه کنید.
با توجه به رابطه زیر [۲۱۷]:

$$xU_{n-1}(x) = \frac{1}{2}(U_n(x) + U_{n-2}(x)), \quad n \geq 2.$$

کافی است به جای $xU_{n-1}(x)$ ، در (۸.۱) رابطه بالا را قرار دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \frac{a}{2}(U_n(x) + U_{n-2}(x)) + U_n(x) \\ &= (1 + \frac{a}{2})U_n(x) + \frac{a}{2}U_{n-2}(x), \end{aligned}$$

که (۱۰.۱) را نتیجه می دهد.
با توجه به رابطه زیر [۲۴۹]:

$$U_n(x) = \frac{T_n(x) - xT_{n+1}(x)}{1-x^2} \quad n \geq 1, |x| \neq 1,$$

و قرار دادن این تساوی به ازای $U_n(x)$ و $U_{n-1}(x)$ در (۸.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= axU_{n-1}(x) + U_n(x) \\ &= ax\frac{T_{n-1}(x) - xT_n(x)}{1-x^2} + \frac{T_n(x) - xT_{n+1}(x)}{1-x^2} \\ &= \frac{ax}{1-x^2}T_{n-1}(x) + \frac{1-ax^2}{1-x^2}T_n(x) - \frac{x}{1-x^2}T_{n+1}(x), \end{aligned}$$

که (۱۱.۱) حاصل می شود.
رابطه زیر را داریم [۲۱۷]:

$$T'_n(x) = \frac{n}{2(1-x^2)}(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)), \quad n \geq 1, |x| \neq 1,$$

با استفاده از (۹.۱) و قرار دادن تساوی بالا در آن خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= (a+1)\frac{x}{n}T'_n(x) + T_n(x) \\ &= (a+1)\frac{x}{n}\frac{n}{2(1-x^2)}(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)) + T_n(x) \\ &= \frac{(a+1)x}{2(1-x^2)}T_{n-1}(x) + T_n(x) - \frac{(a+1)x}{2(1-x^2)}T_{n+1}(x), \end{aligned}$$

که (۱۲.۱) را حاصل می کند.
با استفاده از رابطه زیر [۲۴۹]:

$$T'_n(x) = \frac{n}{1-x^2}(T_{n-1}(x) - xT_n(x)),$$

و (۹.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= (a+1)\frac{x}{n}T'_n(x) + T_n(x) \\ &= (a+1)\frac{x}{n}\frac{n}{1-x^2}(T_{n-1}(x) - xT_n(x)) + T_n(x) \\ &= \frac{(a+1)x}{1-x^2}T_{n-1}(x) - \frac{(a+2)x^2}{1-x^2}T_n(x), \end{aligned}$$

که (۱۳.۱) حاصل می شود.
با داشتن روابط زیر [۲۱۷]:

$$\begin{aligned} U_{n-1}(x) &= \frac{1}{n}T'_n(x), \\ U_n(x) &= \frac{1}{(n+1)}T'_{n+1}(x), \end{aligned}$$

و قرار دادن آنها در (۸.۱) رابطه (۱۴.۱) حاصل می شود:

$$A_n(x) = ax\frac{1}{n}T'_n(x) + \frac{1}{(n+1)}T'_{n+1}(x).$$

با توجه به اتحاد زیر [۲۹۹]:

$$xU_{n-1}(x) = U_n(x) - T_n(x),$$

و قرار دادن تساوی بالا در (۸.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= axU_{n-1}(x) + U_n(x) \\ &= a(U_n(x) - T_n(x)) + U_n(x) \\ &= (a+1)U_n(x) - aT_n(x). \end{aligned}$$

□

که (۱۵.۱) را نتیجه می دهد.

گزاره ۳.۳.۱. [۱] فرض کنید [.] نمایش تابع کف باشد، آنگاه

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} \frac{(a+2)n-2(a+1)k}{2(n-k)} (2x)^{n-2k}, \quad n \geq 1.$$

گزاره ۴.۳.۱. [۱] چندجمله ای $A_n(x)$ برای $n \geq 1$ در معادله زیر صدق می کند:

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1)(1 + a + n + a(2 + a)nx^2)y''(x) \\ & + x(3(1 + n) + a(3 + (2 + a)n(2 + x^2)))y'(x) \\ & - n((1 + a + n)(2 + 2a + n) + a(2 + a)n^2x^2)y(x) = 0. \end{aligned}$$

گزاره ۵.۳.۱. [۱] برای $n \geq 1$ ، معادلات زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n A_k(x)A_k(y) &= -\frac{a}{2} + \frac{A_{n+1}(x)A_n(y) - A_n(x)A_{n+1}(y)}{2(x-y)}, \\ \sum_{k=0}^n A_k^2(x) &= -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}(A'_{n+1}(x)A_n(x) - A'_n(x)A_{n+1}(x)), \end{aligned}$$

گزاره ۶.۳.۱. [۱] با توجه به ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x)g(x)dx,$$

داریم:

$$(A_n(x), A_m(x)) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = m = 0, \\ \frac{1}{8}(2+a)^2\pi & n = m = 1, \\ \frac{1}{4}(2+2a+a^2)\pi & n = m \geq 2, \\ \frac{a\pi}{4} & |n-m|=2, nm=0, \\ \frac{1}{8}a(2+a)\pi & |n-m|=2, nm \neq 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (16.1)$$

نتیجه ۷.۳.۱. دستگاه $\{A_{4n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد از توابع چندجمله ای نسبت به ضرب داخلی تعریف شده در گزاره ۶.۳.۱ است.

گزاره ۸.۳.۱. بسط چندجمله ای $A_n(x)$ بر حسب چندجمله ایهای چیشف نوع اول به صورت ذیل است:

$$A_n(x) = T_n(x) + (a+1) \sum_{j=1}^n x^j T_{n-j}(x).$$

برهان. با توجه به رابطه زیر در چندجمله ایهای چیشف [۲۹۹]:

$$U_n(x) = \sum_{j=0}^n x^j T_{n-j}(x),$$

و (۸.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A_n(x) &= axU_{n-1}(x) + U_n(x) \\ &= ax \sum_{j=0}^{n-1} x^j T_{n-1-j}(x) + \sum_{j=0}^n x^j T_{n-j}(x) \\ &= ax \sum_{i=1}^n x^{i-1} T_{n-i}(x) + \sum_{j=0}^n x^j T_{n-j}(x) \\ &= a \sum_{i=1}^n x^i T_{n-i}(x) + \sum_{j=0}^n x^j T_{n-j}(x) \\ &= T_n(x) + (a+1) \sum_{j=1}^n x^j T_{n-j}(x). \end{aligned}$$

□

گزاره ۹.۳.۱. برای $n \geq 1$ ، روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned} A_n(-x) &= (-1)^n A_n(x), \\ |A_n(x)| &\leq |a+1|n+1, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ A_n(1) &= (a+1)n+1, \\ A_n(0) &= \begin{cases} 0, & n \text{ فرد}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ زوج}. \end{cases} \end{aligned} \quad (۱۷.۱)$$

برهان. روابط زیر در چندجمله ایهای چبیشف نوع دوم برقرار است [۲۴۹]:

$$\begin{aligned} U_n(-x) &= (-1)^n U_n(x), \\ |U_n(x)| &\leq n+1, \quad -1 \leq x \leq 1, \\ U_n(1) &= n+1, \\ U_n(0) &= \begin{cases} 0, & n \text{ فرد}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n \text{ زوج}. \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به روابط بالا، نامساوی مثلث و (۸.۱)، روابط موجود در این گزاره نتیجه می شود. □

گزاره ۱۰.۳.۱. برای $n \geq 1$ ، تابع مولد $A_n(x)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1+atx}{1-2tx+t^2} = \sum_{t=0}^{\infty} A_n(x)t^n, \quad -1 < t < 1. \quad (۱۸.۱)$$

برهان. برای بدست آوردن تابع مولد $A_n(x)$ کافی است از (۱۵.۱) و توابع مولد چندجمله ایهای چبیشف نوع اول و دوم کمک بگیریم [۲۴۹]:

$$\begin{aligned} \frac{1-tx}{1-2tx+t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n, \quad -1 < t < 1, \\ \frac{1}{1-2tx+t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n, \quad -1 < t < 1, \end{aligned}$$

حال از سمت راست (۱۸.۱) به سمت چپ می‌رسیم:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} [(1+a)U_n(x) - aT_n(x)]t^n \\ &= (1+a) \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n - a \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n \\ &= \frac{1+a}{1-2tx+t^2} - \frac{a(1-tx)}{1-2tx+t^2} = \frac{1+atx}{1-2tx+t^2},\end{aligned}$$

□

گزاره ۱۱.۳.۱. نمایش $A_n(x)$ برای $n \geq 1$ ، به صورت دترمینان زیر است:

$$A_n(x) = \begin{vmatrix} (2+a)x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x \end{vmatrix}_{n \times n}.$$

برهان. اثبات این گزاره به روش استقرا می‌باشد. برای $n=1$ داریم:

$$A_1(x) = (2+a)x = |(2+a)x|_{1 \times 1},$$

حال فرض می‌کنیم این رابطه برای $k=n$ برقرار باشد یعنی:

$$A_k(x) = \begin{vmatrix} (2+a)x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x \end{vmatrix}_{k \times k},$$

می‌خواهیم ثابت کنیم که این رابطه برای $k=n+1$ نیز برقرار است. برای این کار دترمینان ماتریس را روی سطر آخر آن بسط می‌دهیم:

$$\begin{aligned}& \begin{vmatrix} (2+a)x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x \end{vmatrix}_{(k+1) \times (k+1)} \\ &= (-1)^{2k+1} \times \begin{vmatrix} (2+a)x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & -1 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}_{k \times k} + (-1)^{2k+2}(2x) \begin{vmatrix} (2+a)x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2x \end{vmatrix}_{k \times k} \\ &= -A_{k-1}(x) + 2xA_k(x) = 2xA_k(x) - A_{k-1}(x) = A_{k+1}(x).\end{aligned}$$



□

گزاره ۱۲.۳.۱. انتگرال از تابع $A_n(x)$ بر حسب چندجمله ایهای چیشف نوع اول به صورت زیر خواهد شد:

$$\int_x^1 A_n(x) dx = \frac{(a+1)n-1}{n^2-1} - \frac{a}{2(n-1)} T_{n-1}(x) - \frac{2+a}{2(n+1)} T_{n+1}(x).$$

برهان. با توجه به روابط زیر در چندجمله ایهای چیشف نوع اول و دوم [۲۴۹، ۲۹۹]:

$$\begin{aligned} \int_x^1 U_n(x) dx &= \frac{1 - T_{n+1}(x)}{n+1}, \\ \int T_n(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right) + c, \end{aligned}$$

و با استفاده از (۱۵.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_x^1 A_n(x) dx &= \int_x^1 [(1+a)U_n(x) - aT_n(x)] dx && arc \\ &= (1+a) \int_x^1 U_n(x) dx - a \int_x^1 T_n(x) dx \\ &= (1+a) \frac{1 - T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{a}{2} \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} - \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} + \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right] \\ &= \frac{(a+1)n-1}{n^2-1} - \frac{a}{2(n-1)} T_{n-1}(x) - \frac{2+a}{2(n+1)} T_{n+1}(x), \end{aligned}$$

□

نتیجه ۱۳.۳.۱. با توجه به گزاره ۱۲.۳.۱ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 A_n(x) dx &= \frac{a}{2(n-1)} (1 - (-1)^{n-1}) + \frac{2+a}{2(n+1)} (1 - (-1)^{n+1}) \\ &= \begin{cases} 2 \frac{n(a+1)-1}{n^2-1}, & \text{زوج } n, \\ 0, & \text{فرد } n. \end{cases} \end{aligned}$$

برهان. کافی است در تساوی گزاره قبل $x = -1$ جایگذاری شود.

□

۴.۱ نقاط شبکه ای

نقاط شبکه ای نقش مهمی در حل معادلات به روش های مبتنی بر شبکه دارند، بنابراین دو نوع از این نقاط در زیر معرفی می شوند:

تعریف ۱.۴.۱. بازه $[a, b]$ مفروض است، این بازه را به N قسمت تقسیم می کنیم:

● نقاط شبکه‌ای منظم^۲

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, N+1, \quad a \leq x_i \leq b, \quad (۱۹.۱)$$

● نقاط شبکه‌ای (CGL)^۳

$$x_i = a + \frac{b-a}{2}(1 - \zeta_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad a \leq x_i \leq b, \quad (۲۰.۱)$$

$$\zeta_i = \cos\left(\frac{i\pi}{N}\right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad -1 \leq \zeta_i \leq 1 \quad \text{که}$$

۵.۱ مشتق کسری

۱.۵.۱ تابع گاما و ویژگی‌های آن

تابع گاما^۴ که یکی از مفاهیم پایه‌ای برای تعریف مشتق کسری است، در این بخش معرفی می‌شود.

تعریف ۱.۵.۱. تابع گاما $\Gamma(p)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt, \quad (\operatorname{Re}(p) > 0) \quad (۲۱.۱)$$

این انتگرال برای هر $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(p) > 0$ همگراست.

گزاره ۲.۵.۱. ویژگی‌های تابع گاما [۲۲۱]:

● $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$

● تابع $\Gamma(p)$ برای $\operatorname{Re}(p) > 0$ پیوسته است.

●

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1) \cdots (p+1)p\Gamma(p)$$

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(0) = 0$$

● برای $n = -p$ داریم:

$$\Gamma(-n) = \frac{\Gamma(-n+1)}{-n} = \cdots = (-1)^n \frac{\Gamma(0)}{n!} = (-1)^n,$$

●

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \left(m - \frac{1}{2}\right)\left(m - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{5}{2} \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

●

$$\Gamma(p) = \int_0^1 \left(Ln \frac{1}{y}\right)^{p-1} dy,$$

²Regular Grid Points

³Chebyshev–Gauss–Lobatto

⁴Gamma Function

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{-1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(q+1)\Gamma(p-q+1)} = \binom{p}{q},$$

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad 0 \leq p \leq 1,$$

۲.۵.۱ حساب کسری

اکنون با توجه به تعریف تابع گاما می توانیم حساب کسری^۵ را معرفی کنیم.

تعریف ۳.۵.۱. (انتگرال تکراری مرتبه n). اگر f یک تابع انتگرال پذیر موضعی^۶ روی بازه (c, ∞) باشد آنگاه انتگرال زیر را انتگرال تکراری مرتبه n نامیم:

$$\begin{aligned} {}_c J_t^n f(t) &= {}_c D_t^{-n} f(t) = \int_c^t ds_1 \int_c^{s_1} ds_2 \cdots \int_c^{s_{n-1}} f(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_c^t (t-s)^{n-1} f(s) ds, \end{aligned}$$

برای هر t که $-\infty \leq c < t < \infty$ و $n \in \mathbb{N}$. با قرار دادن $\Gamma(n) = (n-1)!$ ، می توان این انتگرال را به انتگرال f از مرتبه کسری $\alpha > 0$ تعمیم داد:

• انتگرال چپ: برای هر t که $-\infty \leq c < t < \infty$

$${}_c J_t^\alpha f(t) = {}_c D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

• انتگرال راست: برای هر t که $-\infty < t < d \leq \infty$

$${}_t J_d^\alpha f(t) = {}_t D_d^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^d (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

حال انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل و کاپوتو را معرفی می کنیم.

تعریف ۴.۵.۱. (انتگرال های کسری ریمان-لیوویل چپ و راست). فرض کنید $I = [a, b]$ یک بازه متناهی از $\mathbb{R}$ باشد. انتگرال های کسری ریمان-لیوویل چپ و راست ${}_R L J_{a,t}^\alpha f(t)$ و ${}_R L J_{t,b}^\alpha f(t)$ از مرتبه $\alpha \in \mathbb{R}^+$ به ترتیب ع:

⁵Fractional Calculus

^۶تابع f را انتگرال پذیر موضعی نامیم هرگاه روی هر زیرمجموعه فشرده دامنه تعریفش انتگرال پذیر باشد.

$${}_R L J_{a,t}^{\alpha} f(t) = {}_R L D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

$${}_R L J_{t,b}^{\alpha} f(t) = {}_R L D_{t,b}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

تعریف ۵.۵.۱. (مشتق‌های کسری ریمان-لیوویل چپ و راست). فرض کنید $I = [a, b]$ یک بازه متناهی از $\mathbb{R}$ باشد. مشتق‌های کسری ریمان-لیوویل چپ و راست ${}_R L D_{a,t}^{\alpha} f(t)$ و ${}_R L D_{t,b}^{\alpha} f(t)$ از مرتبه $\alpha \in \mathbb{R}^+$ به ترتیب عبارتند:

$$\begin{aligned} {}_R L D_{a,t}^{\alpha} f(t) &= \frac{d^n}{dt^n} \left[D_{a,t}^{-(n-\alpha)} f(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \end{aligned} \quad (22.1)$$

$$\begin{aligned} {}_R L D_{t,b}^{\alpha} f(t) &= (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \left[D_{t,b}^{-(n-\alpha)} f(t) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds \right), \end{aligned} \quad (23.1)$$

که n عددی صحیح و مثبت است که $n-1 \leq \alpha < n$.

تعریف ۶.۵.۱. (مشتق‌های کسری کاپوتوی چپ و راست). مشتق‌های کسری کاپوتوی چپ و راست ${}_C D_b^{\alpha} f(t)$ و ${}_C D_t^{\alpha} f(t)$ از مرتبه $\alpha \in \mathbb{R}^+$ به ترتیب عبارتند:

$$\begin{aligned} {}_C D_{a,t}^{\alpha} f(t) &= D_{a,t}^{-(n-\alpha)} \left[f^{(n)}(t) \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \end{aligned} \quad (24.1)$$

$$\begin{aligned} {}_C D_{t,b}^{\alpha} f(t) &= (-1)^n D_{t,b}^{-(n-\alpha)} \left[f^{(n)}(t) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \end{aligned} \quad (25.1)$$

که n عددی صحیح و مثبت است که $n-1 < \alpha \leq n$.

تعریف ۷.۵.۱. تابع میتاگ-لفلر^۷ دو پارامتری که در حساب کسری نقش مهمی را داراست به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{C}. \quad (26.1)$$

⁷Mittag-Leffler

فصل ۲

مروری بر روش‌های مبتنی بر چندجمله‌ای‌ها

چندجمله‌ای‌های زیادی در حل معادلات دیفرانسیل بکار گرفته شده‌اند. در این فصل به مرور چند نمونه از این چندجمله‌ای‌ها به طور خلاصه می‌پردازیم.

۱.۲ چندجمله‌ای‌های برنشتاین

در [۵۹] الگوریتمی برای تقریب جواب‌های یک معادله دیفرانسیل بر پایه چندجمله‌ای‌های برنشتاین^۱ اصلاح شده تولید شده است. این الگوریتم، جواب معادله را بر اساس ترکیبی خطی از این چندجمله‌ای‌ها بسط داده و سپس با استفاده از روش گالرکین ضرایب بسط را بدست آورده و جواب حاصل می‌شود. فرم ماتریسی در تمام مراحل این روش استفاده می‌شود. دقت و کارایی این روش بستگی به اندازه مجموعه چندجمله‌ای‌های برنشتاین داشته و در مقایسه با روش B-اسپلاین، برای حل یک معادله دیفرانسیل، ساده‌تر می‌باشد. از این روش برای حل معادلات خطی و غیرخطی استفاده می‌شود.

چندجمله‌ای‌های برنشتاین از درجه n به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{x^i (R-x)^{n-i}}{R^n}, \quad 0 \leq x \leq R, i = 0, 1, \dots, n,$$

R کران بالای بازه‌ای باشد که چندجمله‌ای‌های تعریف شده روی آن یک پایه کامل می‌سازند. برای تقریب جواب معادله قرار می‌دهند:

$$y(x) = \sum_{i=0}^n C_i B_{i,n}(x), \quad n \geq 1,$$

¹Bernstein Polynomial

۲.۲ چندجمله‌ای‌های چبیشف

یکی از معروف‌ترین چندجمله‌ای‌ها در ریاضیات، چندجمله‌ای‌های چبیشف است. تعریف این چندجمله‌ای‌ها در فصل قبل آمده است. این چندجمله‌ای‌ها کاربردهای فراوانی در اغلب شاخه‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی دارند. از جمله این کاربردها می‌توان اشاره کرد به: ستاره شناسی [۱۷۰]، پیش‌گویی رفتار سیالات شامل آسفالتین [۳۳۰]، پردازش سیگنال توزیع شده [۳۲۱]، تولید فیلترهای اقتصادی FIR [۲۷۳] و تجزیه و تحلیل داده‌های آزمایش اپتیک در دیافراگم‌های مستطیلی [۲۰۴].

برای حل معادلات دیفرانسیلی از این چندجمله‌ای استفاده‌های زیادی در ریاضیات کاربردی شده است که از آن جمله می‌توان به موضوعات زیر اشاره کرد:

حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای خطی چندبعدی [۲۴۷]، مسائل مقدار مرزی [۲۴۸، ۱۱۴]، حل عددی معادله برگر^۲ [۹۶]، روش چبیشف-گالرکین^۳ برای حل معادلات دیفرانسیلی مرتبه زوج بالا [۱۱۵]، حل مساله معکوس سهموی جهت پیدا کردن ضریب نفوذ^۴ مجهول [۱۹۶]، مساله پدیده جابجایی^۵ [۶۱]، حل معادلات انتگرو-دیفرانسیلی فردهم-ولترا خطی و غیرخطی [۱۵۵]، حل معادلات انتگرالی و انتگرو-دیفرانسیلی سهموی [۲۳۳، ۳۰۸] و مساله آشفته منفرد^۶ با شرایط مرزی غیرموضعی [۱۷].

با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول، توابع کاردینال چبیشف^۷ از مرتبه N در بازه $[-1, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۶۸]:

$$C_j(z) = \frac{T_{N+1}(z)}{T'_{N+1}(z_j)(z - z_j)},$$

که $T_{N+1}(z)$ تابع چبیشف نوع اول از مرتبه $N+1$ در بازه $[-1, 1]$ است و $T'_{N+1}(z)$ مشتق $T_{N+1}(z)$ نسبت به z و $z_j = 1, 2, \dots, N+1$ صفرهای $T_{N+1}(z)$ می‌باشند.

با تغییر متغیر $x = \frac{(z+1)L}{2}$ برای استفاده از این توابع روی بازه $[0, L]$ ، هر تابع $g(x)$ روی بازه $[0, L]$ می‌تواند تقریب زده شود:

$$g(x) \approx \sum_{j=1}^{N+1} g(x_j) C_j(x) = G^T \Phi_N(x),$$

که $x_j = 1, 2, \dots, N+1$ نقاط تبدیل یافته z_j ، $j = 1, 2, \dots, N+1$ بوسیله تبدیل $x = \frac{(z+1)L}{2}$ هستند و

$$\Phi_N(x) = [C_1(x), \dots, C_{N+1}(x)]^T, \quad G = [g(x_1), \dots, g(x_{N+1})]^T,$$

²Burgers Equation

³Chebyshev-Galerkin Method

⁴Diffusion Coefficient

⁵Transport Phenomena Problem

⁶Singularly Perturbed Problem

⁷Chebyshev Cardinal Functions

از این روش در مقاله [۱۹۶] جهت حل یک مساله معکوس سهموی استفاده شده است که با قرار دادن این تقریب در روابط موجود در مساله، به یک دستگاه معادله خطی خواهیم رسید.

۳.۲ چندجمله‌ای‌های بوبکر

یکی از چندجمله‌ای‌های پرکاربرد دیگر در ریاضیات، چندجمله‌ای‌های بوبکر^۸ است که در زمینه‌های مختلف ریاضی و مهندسی در مقالات مختلفی به کار گرفته شده است. این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند [۶۵]:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x, \\ B_2(x) &= x^2 + 2, \\ B_3(x) &= x^3 + x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2, \\ &\vdots \\ B_m(x) &= xB_{m-1}(x) - B_{m-2}(x), \quad m \geq 3, \end{aligned}$$

از جمله کاربردهای این چندجمله‌ای‌ها در شاخه‌های مختلف علوم می‌توان به زمینه‌های زیر اشاره کرد:

حل عددی مسایل مرزی [۱۹]، حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری چندمرتبه‌ای^۹ [۶۵]، حل دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی ولترا-فردهلم [۹۷]، حل دستگاه‌های بیولوژیک [۲۷۰]. همچنین در شاخه‌های زیر از سیستم BPES^{۱۰} استفاده شده است:

در مقاله [۲۶۰] از شباهت‌های موجود بین سیستم جریان خون در برخی از بافت‌های آلی و سیستم BPES استفاده شده و بوسیله آن پاسخ بافت به تحریک میدان مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفته است. در مقاله [۱۸۹] با استفاده از این سیستم میدان نرمال شده بین دو دیسک هم‌محور مجزا، محاسبه شده است. در [۱۴۱] جهت بررسی پارادوکس ایجاد خطوط تولید هم‌دمای غیرگوسی در زیر سطح هدف توسط پرتو گوسی، از این سیستم استفاده شده است. در [۳۲۵] برای حل مساله انتقال گرما در سیستم‌های جوشکاری و تابکاری روش‌هایی ارائه شده که از این سیستم برای حل معادلات پایستاری گسسته گرمایی در طول فازهای خنک کننده و سرعت سرمایش، کمک گرفته شده است. در مقالات [۱۹۷، ۳۶۰] خواص فیزیکی ریزلایه‌های نیمه هادی با استفاده از این سیستم تحلیل شده است. در [۳۵۰] برای حل تحلیلی معادله کلاین-گوردن^{۱۱} در یک رژیم ثابت پالسی از روش تکراری تغییرات تعدیل یافته (MVIM)^{۱۲} و سیستم BPES استفاده شده است.

در شاخه‌های بیولوژی حیوانی و علوم دارویی نیز می‌توان به مطالعات زیر اشاره کرد: در [۱۱۸] یک روش تحلیلی برای شناسایی جمعیت شکار و شکارچی وابسته به زمان در یک مدل

^۸Boubaker Polynomials

^۹Multi-order Fractional Differential Equations

^{۱۰}Boubaker Polynomials Expansion Scheme

^{۱۱}Klein-Gordon Equation

^{۱۲}Modified Variational Iteration Method

شکار و شکارچی لوتکا-ولترا^{۱۳} ارایه شده است که در آن از روش BPES کمک گرفته است. در [۲۲] یک فرمول ریاضی برای معادله نفوذ NMR^{۱۴} از جریان بلوچ^{۱۵} NMR در جریان کرومر پایین قلب پیشنهاد شده است که این فرمول براساس BPES پایه گذاری شده است. برای حل معادلات دیفرانسیل شبیه نگار^{۱۶} از مرتبه کسری در هر بازه دلخواه در مقاله [۲۸۵] از چندجمله ایهای بوبکر مرتبه کسری استفاده شده است. از ویژگی های این چندجمله ایها برای ساخت ماتریس های جدید عملگر شبیه نگار و انتگرال کسری استفاده شده است. سپس این ماتریس ها و روش کمترین مربعات، مسأله را به یک دستگاه معادلات غیرخطی تبدیل می کنند که به روش تکراری نیوتن حل می شود. بسط چندجمله ایهای بوبکر به صورت زیر می باشد [۶۷]:

$$B_0(t) = 1, \\ B_i(t) = \sum_{r=0}^{[i/2]} (-1)^r \binom{i-r}{r} \frac{i-4r}{i-r} t^{i-2r}, \quad i \geq 1,$$

بسط چندجمله ایهای بوبکر از مرتبه کسری با قرار دادن x^α , $(\alpha > 0)$ به جای t در چندجمله ایهای بوبکر بدست می آید [۲۸۷]:

$$B_i^\alpha(x) = B_i(x^\alpha) = \sum_{r=0}^{[i/2]} (-1)^r \binom{i-r}{r} \frac{i-4r}{i-r} x^{\alpha(i-2r)}, \quad i \geq 1,$$

همچنین این توابع در رابطه زیر صدق می کنند:

$$B_m^\alpha(x) = x^\alpha B_{m-1}^\alpha(x) - B_{m-2}^\alpha(x), \quad m \geq 2,$$

۴.۲ چندجمله ایهای لوکاس

چندجمله ایهای لوکاس^{۱۷} به صورت زیر تعریف می شوند:

$$L_0(x) = 2, \\ L_i(x) = \sum_{r=0}^{[i/2]} \frac{i}{i-r} \binom{i-r}{r} x^{i-2r}, \quad i \geq 1,$$

یا به صورت بازگشتی زیر نمایش داده می شوند:

$$L_0(x) = 2, \\ L_1(x) = x, \\ L_{n+1}(x) = xL_n(x) + L_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

¹³Lotka-Volterra

¹⁴Nuclear Magnetic Resonance

¹⁵Bloch

¹⁶Pantograph Differential Equations

¹⁷Lucas Polynomials

از این چندجمله‌ای‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل در موضوعات زیر استفاده شده است: حل عددی معادلات دیفرانسیل BBMB^{۱۸} [۲۵۴]، حل معادلات تابعی انتگرو-دیفرانسیل شامل متغیر تأخیری [۱۴۹]، حل معادله رسانش گرمایی غیرخطی [۲۷۸]، حل معادلات انتگرال خطی [۲۳۶]، حل مسایل مقدار مرزی خطی مرتبه بالا [۷۷]، حل معادلات لکس^{۱۹} در دینامیک گازی چندشکلی [۸۴]، حل معادلات دیفرانسیل کسری [۹، ۱۰، ۱۵۶، ۲۲۵]، حل عددی مسایل مقدار اولیه کسری [۲۳۰]، حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم [۱۴۹]. همچنین از این چندجمله‌ای‌ها در [۱۹۰] برای حل معادلات دیفرانسیل لین-امدن^{۲۰} و شبیه‌نگار از روش موجک‌ها که مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لوکاس می‌باشد، استفاده شده است.

از روش هم محلی^{۲۱} بر اساس چندجمله‌ای‌های لوکاس برای حل معادلات دیفرانسیل خطی با مرتبه بالا با ضرایب متغیر استفاده می‌شود که با تبدیل این مساله به یک دستگاه معادلات جبری خطی این ضرایب لوکاس بدست می‌آیند [۷۶]. جواب تقریبی معادله دیفرانسیل بر اساس چندجمله‌ای‌های لوکاس به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$y(x) \approx y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(x),$$

برای مشاهده اتحادها و برخی ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های لوکاس می‌توانید به [۱۶۵] مراجعه کنید.

۵.۲ چندجمله‌ای‌های فیبوناچی

چندجمله‌ای‌های فیبوناچی به صورت بازگشتی زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0, \\ F_1(x) &= 1, \\ F_{n+1}(x) &= xF_n(x) + F_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

این چندجمله‌ای‌ها با چندجمله‌ای‌های لوکاس رابطه زیادی دارند به طوریکه در اغلب مقالات این دو نوع چندجمله‌ای در کنار هم مطرح می‌شوند. از جمله زمینه‌هایی که از این چندجمله‌ای‌ها استفاده کرده‌اند می‌توان اشاره کرد به: حل معادلات دیفرانسیل کسری [۷]، حل دستگاه مزدوج معادلات دیفرانسیل کسری [۸]، حل معادلات دیفرانسیل-تفاضل آشفته تکین [۲۲۲]. رابطه‌های جالبی بین چندجمله‌ای‌های فیبوناچی و لوکاس وجود دارد که می‌توان در [۲۶۳] مشاهده کرد. همچنین می‌توان چندجمله‌ای‌های چبیشف را برحسب چندجمله‌ای‌های فیبوناچی نوشت [۱۱].

¹⁸Benjamin-Bona-Mahony-Burgers

¹⁹Lax Equations

²⁰Lane-Emden Differential Equations

²¹Collocation Method

فصل ۳

حل عددی معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز

۱.۳ مقدمه

یکی از معادلات مشتقات پاره‌ای غیرخطی که در فیزیک و علوم مهندسی نقش مهمی را بازی می‌کند، معادله دیفرانسیل بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز^۱ است که به صورت مختصر BBMB نام‌گذاری شده است. این معادله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w - \mu \Delta w) - \alpha \Delta w + \beta \nabla \cdot w = \nabla \cdot (F(w)) + f, \quad X \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

با شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$w(X, 0) = \varphi(X), \quad X \in \Omega,$$

$$w(X, t) = \psi(X, t), \quad X \in \partial\Omega,$$

که $\mu \in [0, 1]$ و $\alpha, \beta \geq 0$ ثابت‌های دلخواه، F تابع غیرخطی، f تابعی برحسب متغیرهای زمان و مکان، $n = 1, 2, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ و Δ و ∇ به ترتیب عملگرهای لاپلاس و گرادین هستند. در حالت $n = 1$ ، $w(x, t)$ سرعت سیال در مسیر افقی x می‌باشد.

هرگاه در (۱.۳)، $\alpha > 0, \mu = 0$ معادله برگرز بدست می‌آید. هرگاه $\alpha = 0, \mu > 0$ معادله خاص BBM یا R^۲WL بدست می‌آید که توسط بنیامین و همکاران [۵۵] مطالعه شد و به عنوان یک مدل معادله KdV^۳ برای تحلیل امواج گرانشی سطح انتشار با دامنه کوتاه بکار می‌رود. از جمله کاربردهای این معادله در زمینه‌های فیزیک و مکانیک می‌توان به کارهای زیر اشاره کرد:

مکانیک سیالات [۳۴۳، ۳۶۱]، تحلیل امواج بلند با دامنه کوتاه روی سطح آب در یک کانال

^۱ Benjamin-Bona-Mahony-Burgers

^۲ Regularized Long Wave

^۳ Korteweg-de Vries

[۵۵]، مطالعه امواج رانشی در پلاسما یا امواج راسبی^۴ در مایعات دوار [۲۱۸]، فیزیک جامدات [۱۱۹]، سینتیک شیمیایی [۱۴۷]، فیزیک پلاسما [۱۵۳]، مدل‌های جمعیتی، اپتیک غیرخطی [۱۲]، تحلیل امواج سطحی با طول موج بلند در مایعات، امواج هیدرومغناطیسی در پلاسمای سرد، امواج صوتی- گرانشی در سیالات متراکم، امواج صوتی در کریستال‌های ناموزون [۶]. برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی در کتاب‌ها و مقالات علمی استفاده شده است. برخی از این روش‌ها برای حل معادله BBMB بکار رفته است که در ادامه بیان شده است:

روش تفاضل متناهی [۲۵۳، ۲۹۳، ۱۹۲، ۶۰]، روش عنصر متناهی [۲۵۱]، روش عنصر متناهی بر پایه توابع اسپلاین-B مکعبی [۲۹۴، ۹۱، ۱۴۰، ۳۵۵، ۳۳۶، ۹۰]، روش تکرار تغییرات خ^۵ [۱۳۸، ۳۳۳، ۱۹۴]، روش شبه-طیفی^۶ [۲۲۴]، روش تجزیه آدومیان [۲۳، ۱۵]، روش هموتویی [۱۳۰، ۱۶]، روش موجک هار^۷ [۲۵۶]، روش پراکندگی معکوس^۸ [۱۳]، روش گالرکین [۱۰۶، ۲۹۵، ۱۱۳]، روش SMRPI^۹ [۳۲۰]، تابع نمایی [۱۳۹، ۱۷۶]، روش اسپلاین نمایی [۱۷۳]، روش طیفی هم‌محلی چیشف^{۱۰} [۲۲]، روش تانزانت هایپربولیک [۱۴۳]، توابع پایه‌ای شعاعی (RBF)^{۱۱} [۱۰۵]، روش موجک هرمیت [۲۵۵].

در این فصل با ارایه پنج مثال روش خود را بیان کرده و با درج نتایج در جدول‌ها و رسم نمودارهای توابع تقریبی و مقایسه روش پیشنهادی با روش‌های دیگر مزایای استفاده از روش پیشنهادی در بخش آخر بیان می‌شود.

۲.۳ پیاده‌سازی روش

برای پیاده‌سازی روش، ابتدا با استفاده از گسسته‌سازی متغیر زمان^{۱۲} (۱.۳) و سپس تقریب جواب با ترکیب خطی a -چندجمله‌ای‌ها و استفاده از نقاط هم‌محلی متغیر مکان، به یک دستگاه معادلات غیرخطی خواهیم رسید. حال به تبیین روش می‌پردازیم. فرض کنید $t_j = j\tau$ برای $j = 0, 1, \dots, M$ که $\tau = \frac{T}{M}$ برای زمان پایانی T . برای گسسته‌سازی زمانی (۱.۳) از روش تفاضل متناهی پیشرو استفاده می‌کنیم:

$$\frac{(w^{j+1} - \gamma \Delta w^{j+1}) - (w^j - \gamma \Delta w^j)}{\tau} - \alpha \frac{\Delta w^{j+1} + \Delta w^j}{2} + \beta \frac{\nabla \cdot w^{j+1} + \nabla \cdot w^j}{2} = \nabla \cdot (F(w^j)) + f^{j+1/2}, \quad (2.3)$$

⁴Rosby Waves

⁵He's Variational Iteration Method

⁶Pseudo-Spectral Method

⁷Haar Wavelet Method

⁸Inverse Scattering Method

⁹Spectral Meshless Radial Point Interpolation

¹⁰Chebyshev Collocation Spectral Method

¹¹Radial Basis Functions

¹²Time Discretization

که $w^{j+1} = w(X, t_{j+1})$ و $f^{j+1/2} = (f^j + f^{j+1})/2$ با ساده کردن (۲.۳) خواهیم داشت:

$$2w^{j+1} - (\Delta w^{j+1})(2\gamma + \tau\alpha) + \tau\beta(\nabla \cdot w^{j+1}) = 2(w^j - \gamma\Delta w^j) + \tau(\alpha\Delta w^j - \beta\nabla \cdot w^j) + 2\tau(\nabla \cdot F(w^j) + f^{j+1/2}), \quad (3.3)$$

برای $j = 0, 1, \dots, M-1$.

۱.۲.۳ پیاده سازی روش برای معادله BBMB یک بعدی

تابع w^{j+1} را با ترکیب خطی a -چندجمله ای های (۸.۱) تقریب می زنیم:

$$w^{j+1}(x) \cong \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} A_n(x), \quad (4.3)$$

همچنین برای مشتقات مراتب بالاتر w^{j+1} نسبت به x داریم:

$$w_x^{j+1} \cong \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} A'_n(x), \quad w_{xx}^{j+1} \cong \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} A''_n(x). \quad (5.3)$$

با قراردادن تقریب های (۴.۳) و (۵.۳) در (۳.۳) برای هر j و شبکه بندی بازه مکان (متغیر x) با استفاده از نقاط شبکه ای تعریف شده در بخش ۴.۱، یک دستگاه معادلات غیرخطی با $N+2$ مجهول، c_k^{j+1} ، $k=0, 1, \dots, N$ و پارامتر مجهول a ، بدست می آید. با کمک نقاط شبکه ای (هم محلی) $\{x_i\}_{i=1}^N$ ، (۳.۳) و شرایط اولیه و مرزی معادله (۱.۳)، $N+2$ معادله خواهیم داشت. برای بدست آوردن a ، نرم L_2 مانده^{۱۳} دستگاه معادلات غیرخطی را با روش کمترین مربعات مینیم می کنیم.

پس از بدست آمدن مقدار پارامتر a در دستگاه بالا و جایگذاری آن در a -چندجمله ای ها، چندجمله ای هایی بدست می آیند که دیگر دارای پارامتر a نیستند. حال در (۴.۳) به جای ترکیب خطی a -چندجمله ای ها از ترکیب خطی این چندجمله ای های بدون پارامتر استفاده کرده و همه مراحل بالا را، از جمله جایگزاری، شبکه بندی و حل دستگاه معادلات غیرخطی، تکرار می کنیم. حال برای بدست آوردن جواب معادله در بازه زمانی $[0, T]$ بوسیله توابع B -اسپلاین مکعبی درونیابی روی نقاط $(x_i, t_j, w_{x_i}^j)$ ، $i=0, 1, \dots, N$ ، $j=0, 1, \dots, M$ ، انجام می شود. این درونیابی در نرم افزار متمتیکای نسخه ۱۲ با دستور Interpolation انجام می شود. در همه مثال های این فصل، این روش مورد استفاده قرار گرفته است.

¹³Residual

۲.۲.۳ پیاده سازی روش برای معادله BBMB دو بعدی

برای پیاده سازی روش روی معادلات دو بعدی شبیه بخش قبل عمل می کنیم. تابع w^{j+1} را به صورت زیر تقریب می زنیم:

$$w^{j+1}(x, y) \cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A_l(x) A_m(y). \quad (۶.۳)$$

برای مشتقات مراتب بالاتر w^{j+1} نسبت به x و y داریم:

$$\begin{aligned} w_x^{j+1} &\cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A'_l(x) A_m(y), \\ w_{xx}^{j+1} &\cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A''_l(x) A_m(y), \\ w_y^{j+1} &\cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A_l(x) A'_m(y), \\ w_{yy}^{j+1} &\cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A_l(x) A''_m(y). \end{aligned}$$

که $w^{j+1}(x, y) = w(x, y, t_{j+1})$. با قرار دادن تقریب های بالا در (۳.۳) و شرایط اولیه و مرزی مساله و استفاده از نقاط شبکه ای $\{(x_i, y_j)\}_{i,j=0}^N$ که در بخش ۴.۱ تعریف شده اند، یک دستگاه معادلات غیرخطی بدست می آید. برای بدست آوردن a ، نرم L_2 مانده ^{۱۴} دستگاه معادلات غیرخطی را با روش کمترین مربعات مینیمم می کنیم. بقیه مراحل شبیه بخش ۱.۲.۳ می باشد.

۳.۳ همگرایی روش

فرض کنید $\Lambda = [-1, 1]$ و $L^2_\omega(\Lambda)$ فضای هیلبرت از توابع حقیقی با مربع انتگرال پذیر در Λ و ضرب داخلی زیر باشد:

$$(f, g)_\omega = \int_{-1}^1 \omega(t) f(t) g(t) dt,$$

که $\omega(t) = \sqrt{1-t^2}$ تابع وزن است. فرض کنید N عددی صحیح و مثبت و S_N زیرفضایی از $L^2_\omega(\Lambda)$ باشد که از $N+1$ چندجمله ای ابتدایی چبیشف نوع دوم تشکیل شده است:

$$S_N = \text{span} \{U_0, U_1, \dots, U_N\}.$$

تصویر متعامد $L^2_\omega(\Lambda)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} P_N : L^2_\omega(\Lambda) &\rightarrow S_N \\ (P_N v)(t) &= \sum_{i=0}^N c_i U_i(t), \end{aligned}$$

¹⁴Residual

به طوریکه برای هر $\varphi \in S_N$ ، $(P_N v - v, \varphi)_\omega = 0$.
برای تخمین $\|P_N v - v\|_\omega$ فضای درونیایی زیر را در نظر بگیرید:

$$H_{\omega,R}^r(\Lambda) = \{v \mid v \text{ اندازه پذیر باشد و } \|v\|_{r,\omega,R} < \infty\},$$

که $r > 0$ عدد حقیقی دلخواه، R عملگر اشتورم-لیوویل چندجمله ایهای چبیشف نوع دوم:

$$R(U_n(t)) = -\omega^{-1}(t) \frac{d}{dt}(\omega^3(t) \frac{d}{dt} U_n(t)), \quad (7.3)$$

و $\|v\|_{r,\omega,R}$ نرم تعریف شده در زیر باشد:

$$\|v\|_{r,\omega,R} = \left(\sum_{i=0}^r \left\| (t+2)^{\frac{r}{2}+i} \frac{d^i v}{dt^i} \right\|_\omega^2 \right)^{1/2}. \quad (8.3)$$

گزاره ۱.۳.۳. R^m یک نگاشت پیوسته از $H_{\omega,R}^{2m}(\Lambda)$ به $L_\omega^2(\Lambda)$ است.

برهان. ابتدا ثابت می کنیم که رابطه زیر برقرار است:

$$R^m v(t) = \sum_{k=1}^{2m} (t+2)^{m+k} q_k(t) \frac{d^k v(t)}{dt^k}, \quad (9.3)$$

که q_k تابعی کسری و کراندار یکنواخت روی بازه Λ است. تساوی بالا را با استفاده از استقراء ثابت می کنیم.
فرض کنید $m = 1$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Rv(t) &= 3t \frac{dv}{dt} - (1-t^2) \frac{d^2 v}{dt^2} \\ &= (2+t)^2 \left(\frac{3t}{(2+t)^2} \right) \frac{dv}{dt} - (2+t)^3 \left(\frac{1-t^2}{(2+t)^3} \right) \frac{d^2 v}{dt^2}. \end{aligned}$$

فرض کنید که (۹.۳) برای $m \leq n$ برقرار باشد. ثابت می کنیم که این رابطه برای $m = n+1$ نیز برقرار است:

$$\begin{aligned} R^{n+1}v(t) &= R(R^n v(t)) \\ &= R \left(\sum_{k=1}^{2(n-1)} (t+2)^{n+k} q_k(t) \frac{d^k v(t)}{dt^k} + (t+2)^{(3n-1)} q_{2n-1}(t) \frac{d^{2n-1} v(t)}{dt^{2n-1}} + (t+2)^{3n} q_{2n}(t) \frac{d^{2n} v(t)}{dt^{2n}} \right) \\ &= R \left(\sum_{k=1}^{2(n-1)} (t+2)^{(n-1)+k} (q_k(t)(t+2)) \frac{d^k v(t)}{dt^k} \right) + \\ &\quad R \left((t+2)^{(3n-1)} q_{2n-1}(t) \frac{d^{2n-1} v(t)}{dt^{2n-1}} + (t+2)^{3n} q_{2n}(t) \frac{d^{2n} v(t)}{dt^{2n}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} (t+2)^{n+k} p_k(t) \frac{d^k v(t)}{dt^k} + (t+2)^{3n-1} r_{2n-1}(t) \frac{d^{2n-1} v(t)}{dt^{2n-1}} + (t+2)^{3n} r_{2n}(t) \frac{d^{2n} v(t)}{dt^{2n}} \\ &\quad + (t+2)^{3n+2} p_{2n+1}(t) \frac{d^{2n+1} v(t)}{dt^{2n+1}} + (t+2)^{3n+3} p_{2n+2}(t) \frac{d^{2n+2} v(t)}{dt^{2n+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} (t+2)^{(n+1)+k} s_k(t) \frac{d^k v(t)}{dt^k}, \end{aligned}$$

که s_k, r_k, p_k, q_k توابع کسری و کراندار یکنواخت روی بازه Λ هستند. حال از خطی بودن عملگر R کمک گرفته و با توجه به مفروضات استقراء و فاکتورگیری جملات با مشتقات بالاتر و پیوستگی توابع کسری و جمع آنها نتیجه حاصل می شود. $\square$

گزاره ۲.۳.۳. برای عدد حقیقی و نامنفی r ، $v \in H_{\omega, R}^r(\Lambda)$ و $v = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{v}_n U_n(t)$ وجود دارد ثابت $c \in \mathbb{R}$ به قسمی که:

$$\|P_N v - v\|_{\omega} \leq c N^{-r} \|v\|_{r, \omega, R}. \quad (10.3)$$

برهان. ابتدا فرض می کنیم که $r = 2m$. با توجه به (۳.۱)، (۴.۱) و (۷.۳) و استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} \hat{v}_n &= \frac{2}{\pi} \int_{\Lambda} v(t) U_n(t) \omega(t) dt = \frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} v(t) R U_n(t) \omega(t) dt \\ &= -\frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} v(t) \frac{d}{dt} (\omega^3(t) \frac{d}{dt} U_n(t)) dt \\ &= \frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} \omega^3(t) \frac{d}{dt} v(t) \left(\frac{d}{dt} U_n(t) \right) dt \\ &= -\frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} \frac{d}{dt} (\omega^3(t) \frac{d}{dt} v(t)) U_n(t) dt \\ &= \frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} R v(t) U_n(t) \omega(t) dt \\ &= \dots = \frac{2}{\pi n^m (n+2)^m} \int_{\Lambda} R^m v(t) U_n(t) \omega(t) dt. \end{aligned} \quad (11.3)$$

طبق (۹.۳)، (۱۱.۳) و تعریف $H_{\omega, R}^r(\Lambda)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \|P_N v - v\|_{\omega}^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{v}_n^2 \|U_n\|_{\omega}^2 \\ &\leq c N^{-4m} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\int_{\Lambda} R^m v(t) U_n(t) \omega(t) dt}{\|U_n\|_{\omega}^2} \right)^2 \|U_n\|_{\omega}^2 \\ &\leq c N^{-4m} \|R^m v\|_{\omega}^2 \leq c N^{-4m} \|v\|_{r, \omega, R}^2. \end{aligned}$$

قرار می دهیم $r = 2m + 1$. با استفاده از (۳.۱)، (۵.۱) و انتگرالگیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} \hat{v}_n &= \frac{2}{\pi n^m (n+2)^m} \int_{\Lambda} R^m v(t) U_n(t) \omega(t) dt \\ &= -\frac{2}{\pi n^{m+1} (n+2)^{m+1}} \int_{\Lambda} R^m v(t) \frac{d}{dt} (\omega^3(t) \frac{d}{dt} U_n(t)) dt \\ &= -\frac{2}{\pi n^{m+1} (n+2)^{m+1}} \int_{\Lambda} \frac{d}{dt} (R^m v(t)) \frac{d}{dt} U_n(t) \omega^3(t) dt. \end{aligned} \quad (12.3)$$

با استفاده از (۵.۱) و (۷.۳) نامساوی زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
 \|P_N v - v\|_\omega^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{v}_n^2 \|U_n\|_\omega^2 \\
 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(n(n+2))^{2m+2}} \left(\int_{\Lambda} \frac{d}{dt}(R^m v(t)) \frac{d}{dt} U_n(t) \omega^3(t) dt \right)^2 \\
 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(n(n+2))^{2m+2}} \left(\frac{\int_{\Lambda} \frac{d}{dt}(R^m v(t)) \frac{d}{dt} U_n(t) \omega^3(t) dt}{\left\| \frac{d}{dt} U_n \right\|_{\omega^3}^2} \right)^2 \left\| \frac{d}{dt} U_n \right\|_{\omega^3}^2 \\
 &\leq cN^{-2(2m+1)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\int_{\Lambda} \frac{d}{dt}(R^m v(t)) \frac{d}{dt} U_n(t) \omega^3(t) dt}{\left\| \frac{d}{dt} U_n \right\|_{\omega^3}^2} \right)^2 \left\| \frac{d}{dt} U_n \right\|_{\omega^3}^2 \\
 &\leq cN^{-2(2m+1)} \left\| \frac{d}{dt}(R^m v) \right\|_{\omega^3}^2 \leq cN^{-2(2m+1)} \left\| \frac{d}{dt}(R^m v)(t+2)^{7/2} \right\|_{\omega}^2 \\
 &\leq cN^{-2(2m+1)} \|v\|_{r,\omega,R}^2.
 \end{aligned}$$

□

بنابراین نتایج مطلوب از روابط بالا و فضای درونیابی حاصل می شود.

قضیه ۳.۳.۳. برای هر عدد حقیقی و دلخواه $r > 0$ و $y \in H_{\omega,R}^r(\Lambda)$ داریم:

$$\|y_N - y\|_\omega \leq \tilde{a}c(N-2)^{-r} \|y\|_{r,\omega,R}. \quad (۱۳.۳)$$

برهان. با استفاده از (۱۰.۱) و (۱۰.۳)، نامساوی زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
 \|y_N - y\|_\omega &= \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i A_i(t) \right\|_\omega = \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \underbrace{\left(\left(1 + \frac{a}{2}\right) U_i(t) + \frac{a}{2} U_{i-2}(t) \right)}_{\text{رابطه (۱۰.۱)}} \right\|_\omega \\
 &\leq \left| 1 + \frac{a}{2} \right| \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i U_i(t) \right\|_\omega + \left| \frac{a}{2} \right| \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i U_{i-2}(t) \right\|_\omega \\
 &\leq \underbrace{\left| 1 + \frac{a}{2} \right| c' N^{-r} \|y\|_{r,\omega,R}}_{\text{رابطه (۱۰.۳)}} + \underbrace{\left| \frac{a}{2} \right| c'' (N-2)^{-r} \|y\|_{r,\omega,R}}_{\text{رابطه (۱۰.۳)}} \leq \tilde{a}c(N-2)^{-r} \|y\|_{r,\omega,R},
 \end{aligned}$$

□

$$\tilde{a} = \max\left\{ \left| 1 + \frac{a}{2} \right|, \left| \frac{a}{2} \right| \right\}, \quad c = \max\{c', c''\} \text{ که}$$

این قضیه نشان می دهد که تقریب با a - چندجمله ای ها همگرایی نمایی را حاصل می کند.

۴.۳ نتایج عددی

در این بخش خطاهای L_2 و L_∞ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(۱۴.۳)$$

$$\begin{aligned}
 L_\infty(\tau, h) &= \max |w(x_i, y_j, T) - W(x_i, y_j, T)|, \\
 L_2(\tau, h) &= \left(\sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} |w(x_i, y_j, T) - W(x_i, y_j, T)|^2 \right)^{1/2}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

که W و w به ترتیب جواب های تقریبی و تحلیلی (دقیق) مسأله می باشند.

مثال ۱.۴.۳. فرض کنید در (۱.۳)، $\mu = 1$ ، $\alpha = 1$ و $\beta = 1$ ، بنابراین معادله BBMB یک بعدی زیر روی بازه $\Omega = [0, \pi]$ حاصل می شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} (w - w_{xx}) - w_{xx} + w_x = -ww_x + f, \quad (15.3)$$

با شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \sin(x), \\ w(x, t) &= e^{-t} \sin(x), \quad x \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

و

$$f(x, t) = \left[\frac{1}{2} e^{-t} \sin(2x) - \sin(x) + \cos(x) \right] e^{-t}.$$

در جدول های ۱.۳ و ۲.۳ مشاهده می شود که به ازای $\tau = 0.0005$ و افزایش مقدار نقاط هم محلی N ، خطای L_∞ در زمان $T = 10$ کاهش می یابد که تاییدی بر قضیه همگرایی روش می باشد. با مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهادی و چندجمله ای های لوکاس [۲۵۴] می بینیم که a - چندجمله ای ها نتایج بهتری را حاصل کرده است. همچنین نتایج حاصل از نقاط شبکه ای چبیشف - گاوس - لوباتو (CGL) از نتایج نقاط شبکه ای منظم بهتر است.

در جدول های ۳.۳ و ۴.۳، نتایج حالت خطی شده نمایش داده شده است. به جای جمله ww_x ، از روش شبه - خطی زیر استفاده می کنیم [۳۵۴]:

$$(ww_x)^{j+1} = w^j w_x^{j+1} + w^{j+1} w_x^j - w^j w_x^j,$$

و در (۱۵.۳) به جای جمله ww_x قرار می دهیم. با مشاهده این جدول ها می بینیم که نتایج حالت خطی شده از حالت غیرخطی بهتر است. مشاهده می شود که به ازای $\tau = 0.0005$ و افزایش مقدار نقاط هم محلی N ، خطای L_∞ در زمان $T = 10$ کاهش می یابد که تاییدی بر قضیه همگرایی ۳.۳.۳ می باشد. همچنین نتایج حاصل از نقاط شبکه ای چبیشف - گاوس - لوباتو (CGL) از نتایج نقاط شبکه ای منظم بهتر است.

در جدول ۵.۳ در نقاط شبکه ای منظم و به ازای $N = 10$ و $T = 10$ نیز از حالت خطی شده استفاده شده است که نتایج روش پیشنهادی در مقایسه با روش های چندجمله ای های لوکاس [۲۵۴] و تفاضل متناهی [۲۵۲] نتایج بهتری را حاصل می کند. در این جدول با کاهش مقدار τ نتایج خطای L_∞ نیز کاهش می یابد.

در شکل ۱.۳ نمودار جواب دقیق (تحلیلی) و تقریبی (عددی) در نقاط شبکه ای چبیشف - گاوس - لوباتو (CGL) در حالت خطی سازی شده و به ازای $N = 10$ و $\tau = \frac{1}{640}$ در زمان $T = 10$ رسم شده است. در شکل ۲.۳ نیز نمودار جواب تقریبی با استفاده از درونیابی به روش B - اسپلاین ها در نقاط شبکه ای چبیشف - گاوس - لوباتو (CGL) و به ازای $\tau = \frac{1}{640}$ و در حالت

جدول ۱.۳: مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه ای منظم بدست آمده از a - چندجمله ایها و چندجمله ایهای لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$.

N	چندجمله ایهای لوکاس	a - چندجمله ایها	a	زمان اجرا (s)
3	$2.8509e - 04$	$1.6147e - 04$	$-4.3248e - 09$	102
4	$1.8740e - 05$	$1.0688e - 06$	$1.3585e - 06$	131
5	$1.4372e - 05$	$3.8544e - 07$	$1.6095e - 06$	162
6	$2.7993e - 07$	$1.0901e - 07$	$-2.2793e - 07$	264
7	$2.2358e - 07$	$7.7551e - 08$	0	361
8	$9.6354e - 08$	$9.2185e - 08$	$2.1490e - 08$	451
9	$9.6029e - 08$	$9.1665e - 08$	$2.2529e - 08$	458
10	$8.9870e - 08$	$8.9742e - 08$	$2.2017e - 08$	566

جدول ۲.۳: مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه ای CGL بدست آمده از a - چندجمله ایها و چندجمله ایهای لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$.

N	چندجمله ایهای لوکاس	a - چندجمله ایها	a	زمان اجرا (s)
3	$1.3114e - 04$	$3.0703e - 04$	$9.0672e - 09$	102
4	$6.5933e - 06$	$4.1727e - 06$	$-1.4280e - 06$	131
5	$4.0234e - 06$	$1.0881e - 06$	$-1.5637e - 07$	162
6	$1.5561e - 07$	$9.2321e - 08$	$-2.8303e - 07$	264
7	$9.8580e - 08$	$8.5431e - 08$	0	361
8	$8.8108e - 08$	$8.8194e - 08$	$1.8768e - 09$	451
9	$9.2060e - 08$	$9.2111e - 08$	$7.5354e - 08$	458
10	$9.0375e - 08$	$9.0376e - 08$	$-1.6487e - 07$	566

خطی سازی شده رسم شده است.

$$\begin{aligned}
 W(x, 10) = & 3.848601264040451 \times 10^{-20} + 0.00004539995012244618x \\
 & - 5.401558137596547 \times 10^{-11}x^2 - 0.000007566636198131456x^3 \\
 & - 1.95994382879332 \times 10^{-10}x^4 + 3.787025566407214 \times 10^{-7}x^5 \\
 & - 4.477549866525886 \times 10^{-10}x^6 - 8.656500822090306 \times 10^{-9}x^7 \\
 & - 1.795784548105326 \times 10^{-10}x^8 + 1.842290526035008 \times 10^{-10}x^9 \\
 & - 1.172341921459045 \times 10^{-11}x^{10}.
 \end{aligned}$$

مثال ۲.۴.۳. معادله دو بعدی زیر را روی بازه $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ فرض کنید:

$$\frac{\partial}{\partial t} (w - \Delta w) - \Delta w + \nabla \cdot w = ww_x + ww_y + f, \quad (16.3)$$

جدول ۳.۳: مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم بدست آمده از a - چندجمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌های لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$ در حالت خطی شده.

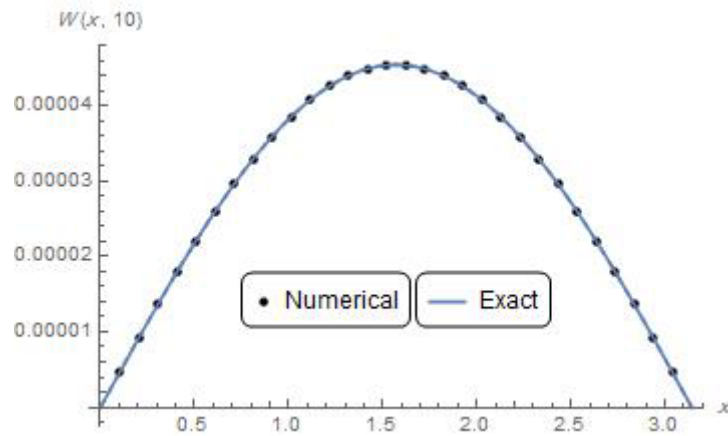
N	چندجمله‌ای‌های لوکاس	a - چندجمله‌ای‌ها	a	زمان اجرا (s)
3	$2.8528e - 04$	$1.6146e - 04$	$-4.3248e - 09$	105
4	$1.8670e - 05$	$1.1723e - 06$	$1.0845e - 06$	144
5	$1.4309e - 05$	$3.8667e - 07$	0	161
6	$3.7315e - 07$	$5.3886e - 09$	$-1.8997e - 6$	207
7	$3.1572e - 07$	$8.6330e - 09$	$-1.9885e - 06$	265
8	$5.7489e - 09$	$1.5227e - 10$	$1.6404e - 09$	327
9	$4.4877e - 09$	$1.4076e - 10$	$-1.7422e - 09$	406
10	$1.0394e - 11$	$6.0195e - 11$	$-1.1627e - 08$	505

جدول ۴.۳: مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL بدست آمده از a - چندجمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌های لوکاس به ازای $\tau = 0.0005$ و $T = 10$ در حالت خطی شده.

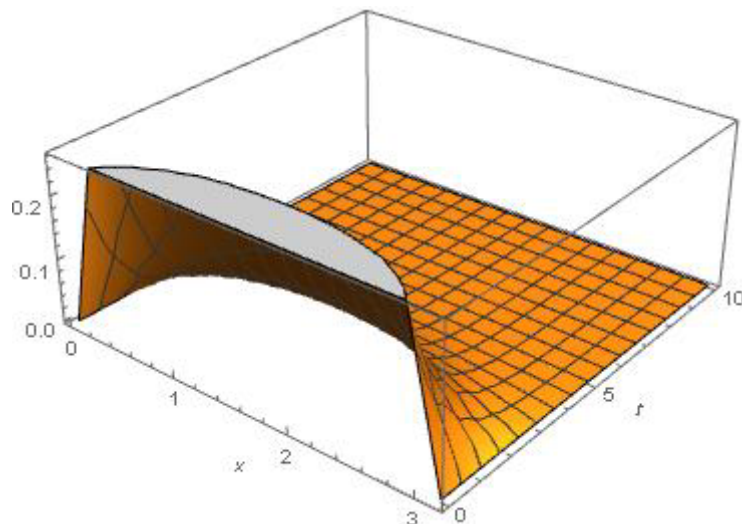
N	چندجمله‌ای‌های لوکاس	a - چندجمله‌ای‌ها	a	زمان اجرا (s)
3	$1.3118e - 04$	$3.0703e - 04$	$9.0627e - 10$	105
4	$6.5414e - 06$	$4.1051e - 06$	$-1.4262e - 13$	144
5	$4.1124e - 06$	$1.1732e - 06$	$4.9410e - 06$	161
6	$6.4082e - 08$	$1.4041e - 08$	$-1.7932e - 10$	207
7	$1.1712e - 08$	$7.9659e - 09$	$-2.0430e - 07$	265
8	$8.4614e - 11$	$6.8138e - 11$	$1.8590e - 13$	327
9	$1.9199e - 11$	$3.8480e - 11$	0	406
10	$6.1260e - 11$	$6.0905e - 11$	$2.0157e - 09$	505

جدول ۵.۳: مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $N = 10$ و $T = 10$.

τ	روش تفاضل متناهی	چ. لوکاس	چ. لوکاس خطی شده	a - چندجمله‌ای‌ها	a	زمان اجرا (s)
1/10	0.0218	$2.1292e - 05$	$2.4317e - 06$	$2.1255e - 05$	$-3.9496e - 07$	2
1/20	0.0053	$9.8171e - 06$	$6.0857e - 07$	$9.7989e - 06$	$-1.8309e - 06$	4
1/40	0.0013	$4.7005e - 06$	$1.5215e - 07$	$4.6914e - 06$	$8.1588e - 07$	8
1/80	$3.3291e - 04$	$2.2981e - 06$	$3.7998e - 08$	$2.2936e - 06$	$-4.5015e - 07$	17
1/160	$8.3133e - 05$	$1.1360e - 06$	$9.4581e - 09$	$1.1337e - 06$	$2.9561e - 12$	34
1/320	$2.0766e - 05$	$5.6472e - 07$	$2.3231e - 09$	$5.6362e - 07$	$-2.4071e - 07$	72
1/640	$5.1898e - 06$	$2.8152e - 07$	$5.3927e - 10$	$2.8100e - 07$	$2.6874e - 08$	128



شکل ۱.۳: نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL در حالت خطی سازی شده به ازای $T = 10$ و $\tau = \frac{1}{640}$.



شکل ۲.۳: نمودار جواب تقریبی مثال ۱.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL در حالت خطی سازی شده به ازای $\tau = \frac{1}{640}$.

با شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= 0, & x, y &\in \Omega, \\ w(x, y, t) &= t \sin(x + y), & x, y &\in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

با جواب دقیق $w(x, y, t) = t \sin(x + y)$ و

$$f(x, y, t) = (3 + 2t) \sin(x + y) - 2t \cos(x + y) (-1 + t \sin(x + y)).$$

فرض کنید دامنه این مسأله $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ باشد.

در جدولهای ۶.۳، ۷.۳، ۸.۳ و ۹.۳ نرم های خطای L_2 و L_∞ در روش پیشنهادی با روش های چندجمله ای های لوکاس [۲۵۴] و RBF [۱۰۵] مقایسه شده است. با مشاهده این جدول ها، برتری نقاط شبکه ای منظم به نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) نمایان است. همچنین خطاهای حاصل با روش چندجمله ای های لوکاس چندان تغییر محسوسی ندارد. این روش نسبت به روش RBF برتری محسوسی دارد. با کاهش مقدار τ نتایج خطا کاهش می یابد. در جدول ۱۰.۳ نیز نرم خطاهای L_2 و L_∞ با نتایج روش چندجمله ای های لوکاس مقایسه شده است که برابری دو روش را نشان می دهد. در شکل ۳.۳ نمودار خطای مطلق جواب عددی در نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) به ازای $\tau = \frac{1}{2560}$ ، $N = 5$ و $T = 1$ رسم شده است.

$$\begin{aligned} W(x, y, 1) &= -5.495603971894524 \times 10^{-15} + 0.9999888378635745y \\ &+ 0.0001861813943817292y^2 - 0.16753442548854686y^3 \\ &+ 0.0015930428642471457y^4 + 0.007237348174240155y^5 \\ &+ x^4(0.0015930428568531711 + 0.045214436957864756y \\ &+ 0.003378232768514414y^2 - 0.018594001659604984y^3 \\ &+ 0.01320929009035516y^4 - 0.005299767814521981y^5) \\ &+ x^2(0.00018618139195450412 - 0.49993446389920204y \\ &+ 0.0020466073719087596y^2 + 0.07908729687576663y^3 \\ &+ 0.003378232954060076y^4 - 0.005048022365481644y^5) \\ &+ x(0.9999888378639266 - 0.00008786170122054848y \\ &- 0.49993446391185725y^2 - 0.001145593253975244y^3 \\ &+ 0.045214436891120764y^4 - 0.0037596425225661922y^5) \\ &+ x^5(0.007237348177222246 - 0.003759642552395581y \\ &- 0.005048022273451247y^2 + 0.004914906128214054y^3 \\ &- 0.005299767770276762y^4 + 0.002538541930756691y^5) \\ &+ x^3(-0.16753442548205338 - 0.0011455933033677757y \\ &+ 0.07908729698086239y^2 + 0.011022116877773352y^3 \\ &- 0.018594001824733798y^4 + 0.0049149062353458645y^5). \end{aligned}$$

جدول ۶.۳: مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $N = 5$ و $T = 1$.

τ	چ.لوکاس	روش RBF	a - چندجمله‌ایها		زمان اجرا (s)
			$h = 0.1$	$h = 0.2$	
1/10	$2.0427e - 03$	$6.7487e - 03$	$2.0364e - 03$	-1.3582	2
1/20	$1.0248e - 03$	$2.6171e - 03$	$1.0202e - 03$	-1.4301	3
1/40	$5.1445e - 04$	$1.1038e - 03$	$5.1445e - 04$	0.1583	6
1/80	$2.5899e - 04$	$4.683e - 04$	$2.5899e - 04$	-1.3572	12
1/160	$1.3120e - 04$	$2.0224e - 04$	$1.3119e - 04$	-0.4841	24
1/320	$6.7284e - 05$	$8.9161e - 05$	$6.7283e - 05$	-1.5043	48
1/640	$3.5324e - 05$	$4.0189e - 05$	$3.5324e - 05$	0.2119	95
1/1280	$1.9344e - 05$	$1.8510e - 05$	$1.9343e - 05$	-1.4617	188
1/2560	$1.1353e - 05$	$8.9827e - 06$	$1.1291e - 05$	0.6547	337

جدول ۷.۳: مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 5$ و $T = 1$.

τ	چ.لوکاس	روش RBF	a - چندجمله‌ایها		زمان اجرا (s)
			$h = 0.1$	a	
1/10	$1.8616e - 03$	$6.7487e - 03$	$1.8584e - 03$	0.0744	2
1/20	$9.3271e - 04$	$2.6171e - 03$	$9.3121e - 04$	0.1033	3
1/40	$4.6673e - 04$	$1.1038e - 03$	$4.6665e - 04$	0	6
1/80	$2.3341e - 04$	$4.683e - 04$	$2.3340e - 04$	-0.4596	12
1/160	$1.1667e - 04$	$2.0224e - 04$	$1.1667e - 04$	-0.9895	24
1/320	$5.8287e - 05$	$8.9161e - 05$	$5.8287e - 05$	-0.0794	48
1/640	$2.9090e - 05$	$4.0189e - 05$	$2.9089e - 05$	-0.7045	95
1/1280	$1.4490e - 05$	$1.8510e - 05$	$1.4490e - 05$	2.5866	188
1/2560	$7.1901e - 06$	$8.9827e - 06$	$7.1335e - 06$	-2.0573	337

جدول ۸.۳: مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $N = 5$ و $T = 1$.

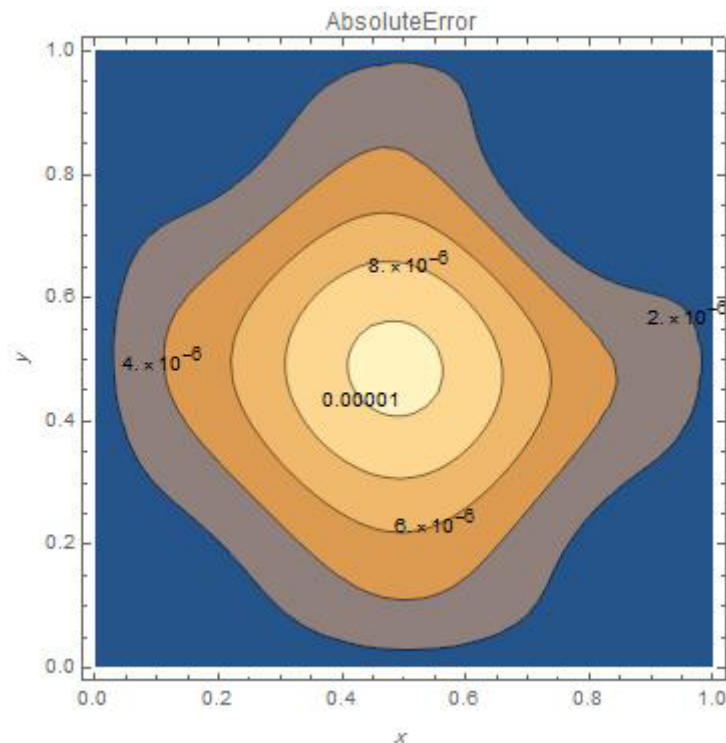
τ	چ.لوکاس	روش RBF	a - چندجمله‌ایها	
			$h = 0.1$	$h = 0.2$
1/10	$5.5678e - 03$	$2.6698e - 02$	$5.5206e - 03$	-1.3582
1/20	$2.7934e - 03$	$1.0355e - 02$	$2.7614e - 03$	-1.4301
1/40	$1.4041e - 03$	$4.6405e - 03$	$1.4041e - 03$	0.1583
1/80	$7.0912e - 04$	$2.0854e - 03$	$7.0912e - 04$	-1.3572
1/160	$3.6158e - 04$	$9.4879e - 04$	$3.6157e - 04$	-0.4841
1/320	$1.8782e - 04$	$4.3993e - 04$	$1.8781e - 04$	-1.5043
1/640	$1.0098e - 04$	$2.0868e - 04$	$1.0098e - 04$	0.2119
1/1280	$5.7639e - 05$	$1.0151e - 04$	$4.7973e - 05$	-1.4617
1/2560	$3.6066e - 05$	$5.1444e - 05$	$3.6065e - 05$	0.6547

جدول ۹.۳: مقایسه نتایج نرم L_2 خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 5$ و $T = 1$.

τ	چ.لوکاس	روش RBF	a - چندجمله‌ای‌ها	a
		$h = 0.1$		
1/10	$3.9399e-03$	$2.6698e-02$	$3.9133e-03$	0.0744
1/20	$1.9713e-03$	$1.0355e-02$	$1.9567e-03$	0.1033
1/40	$9.8547e-04$	$4.6405e-03$	$9.8546e-04$	0
1/80	$4.9230e-04$	$2.0854e-03$	$4.9230e-04$	-0.4596
1/160	$2.4568e-04$	$9.4879e-04$	$2.4567e-04$	-0.9895
1/320	$1.2236e-04$	$4.3993e-04$	$1.2235e-04$	-0.0794
1/640	$6.0703e-05$	$2.0868e-04$	$6.0703e-05$	-0.7045
1/1280	$2.9889e-05$	$1.0151e-04$	$2.9888e-05$	2.5866
1/2560	$1.4510e-05$	$5.1444e-05$	$1.4390e-05$	-2.0573

جدول ۱۰.۳: مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $\tau = 0.002$ و $T = 1$.

N	چ.لوکاس		a - چندجمله‌ای‌ها			زمان اجرا (s)
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	a	
3	$8.6353e-04$	$1.5820e-03$	$8.6353e-04$	$1.5820e-03$	-0.6026	9
4	$7.4249e-05$	$1.3255e-04$	$7.4249e-05$	$1.3254e-04$	-1.1185	26
5	$4.4237e-05$	$1.2529e-04$	$4.4237e-05$	$6.1730e-05$	-1.7006	73



شکل ۳.۳: نمودار خطای مطلق مثال ۲.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{2560}$ و $N = 5$ و $T = 1$.

جدول ۱۱.۳: مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $\tau = 0.002$ و $T = 1$.

زمان اجرا (s)	چندجمله‌ای‌ها			چ. لوکاس		N
	a	L_2	L_∞	L_2	L_∞	
9	1.4254	$1.8304e+00$	$1.2120e+00$	$1.9213e+00$	$1.2771e+00$	3
28	0.3811	$2.3701e-01$	$1.8052e-01$	$2.4834e-01$	$1.8940e-01$	4
79	1.0228	$5.9554e-02$	$1.9527e-02$	$6.3193e-02$	$2.0628e-02$	5

مثال ۳.۴.۳. معادله دو بعدی زیر را روی بازه $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ فرض کنید:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w - \Delta w) - \Delta w + \nabla \cdot w = \cos(w)w_x + \cos(w)w_y + f, \quad (17.3)$$

با شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) &= e^{2x+2y}, \quad x, y \in \Omega, \\ w(x, y, t) &= e^{2x+2y+2t}, \quad x, y \in \partial\Omega, 0 < t \leq T, \end{aligned}$$

با جواب دقیق $w(x, y, t) = e^{2x+2y+2t}$ و

$$f(x, y, t) = -2e^{2x+2y+2t}(9 + 2\cos(e^{2x+2y+2t})),$$

و دامنه به صورت $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ می‌باشد.

در جدول‌های ۱۱.۳ و ۱۲.۳ نرم‌های خطای L_2 و L_∞ به ترتیب در نقاط شبکه‌ای منظم و چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) با نتایج روش چندجمله‌ای‌های لوکاس [۲۵۴] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد نقاط شبکه‌ای یعنی N ، خطا کاهش می‌یابد. همچنین با مقایسه دو جدول می‌بینیم که نتایج در نقاط شبکه‌ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) در مقایسه با نتایج حاصل از نقاط شبکه‌ای منظم بهتر است.

در جدول ۱۳.۳ نرم خطای L_∞ در نقاط شبکه‌ای منظم و چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) به ازای $N = 5$ و $T = 1$ با هم مقایسه شده‌اند که برتری نقاط شبکه‌ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) مشهود است و همچنین با کاهش مقدار τ مقدار خطا کاهش می‌یابد. جدول‌های ۱۴.۳ و ۱۵.۳ نیز نرم خطا را برای مقادیر مختلف τ نشان می‌دهند که مانند جدول‌های دیگر نتایج مشابهی را بازگو می‌کنند.

در شکل ۴.۳ نمودار خطای مطلق جواب عددی در نقاط شبکه‌ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) به ازای $N = 5$ و $\tau = \frac{1}{320}$ در $T = 1$ رسم شده است.

$$\begin{aligned} W(x, y, 1) &= x^5(-86.0772y^5 + 187.273y^4 - 107.228y^3 + 30.5592y^2 + 11.1446y \\ &+ 5.58334) + x^4(187.273y^5 - 391.903y^4 + 248.169y^3 - 43.3725y^2 + 1.31112y \\ &+ 0.231269) + x^3(-107.228y^5 + 248.169y^4 - 138.559y^3 + 53.0732y^2 + 23.3432y \\ &+ 12.3333) + x^2(30.5592y^5 - 43.3725y^4 + 53.0732y^3 + 21.4336y^2 + 29.3609y \\ &+ 14.2516) + x(11.1446y^5 + 1.31112y^4 + 23.3432y^3 + 29.3609y^2 + 29.4593y \\ &+ 14.8096) + 5.58334y^5 + 0.231269y^4 + 12.3333y^3 + 14.2516y^2 + 14.8096y + 7.38906. \end{aligned}$$

جدول ۱۲.۳: مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.002$ و $T = 1$.

N	چ. لوکاس	a - چندجمله‌ای‌ها			زمان اجرا (s)
		L_2	L_∞	a	
3	$4.5902e - 01$	$8.6904e - 01$	$4.3740e - 01$	$8.2480e - 01$	0.8523
4	$6.0978e - 02$	$8.7362e - 02$	$5.7921e - 02$	$8.2734e - 02$	2.4068
5	$6.2537e - 03$	$8.2860e - 03$	$6.0775e - 03$	$7.9858e - 03$	0.8947

جدول ۱۳.۳: مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم و CGL به ازای $N = 5$ و $T = 1$ ($h = 0.2$).

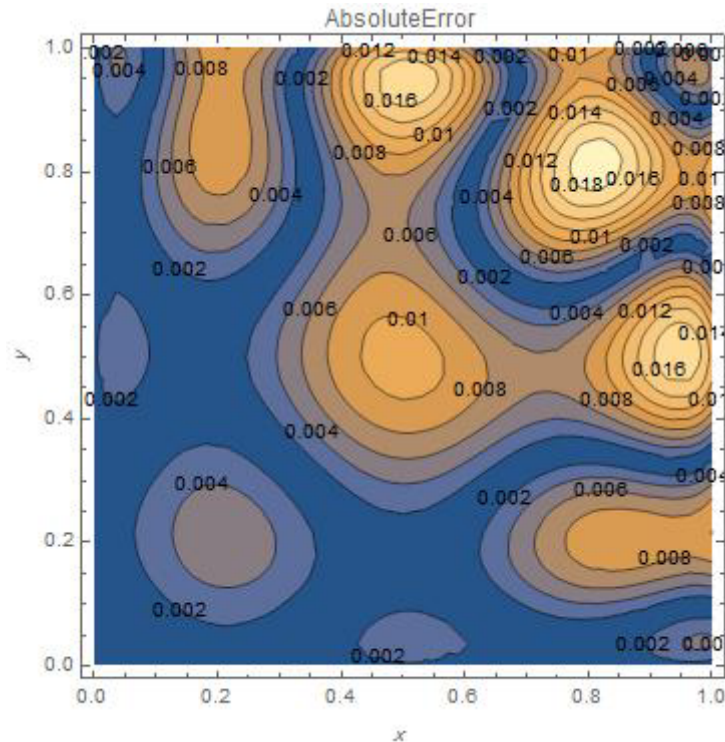
τ	نقاط شبکه‌ای منظم	a	نقاط شبکه‌ای CGL	a	زمان اجرا (s)
1/40	$1.1903e - 01$	5.2797	$3.2337e - 02$	1.5643	7
1/80	$4.7805e - 02$	2.6416	$1.3086e - 02$	0.4024	13
1/160	$2.3661e - 02$	4.9010	$7.6796e - 03$	0.8002	26
1/320	$2.0679e - 02$	3.3616	$6.4034e - 03$	0.5898	54

جدول ۱۴.۳: مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $T = 1$.

τ	N	چ. لوکاس			a - چندجمله‌ای‌ها			زمان اجرا (s)
		L_2	L_∞	a	L_2	L_∞	a	
1/100	3	$1.2120e + 00$	$1.8521e + 00$	$1.1447e + 00$	$1.7603e + 00$	1.4938	2	
1/200	4	$2.0475e - 01$	$2.6850e - 01$	$1.9593e - 01$	$2.5740e - 01$	0.8574	11	
1/400	5	$2.0953e - 02$	$6.0598e - 02$	$2.0050e - 02$	$5.7003e - 02$	3.4372	63	

جدول ۱۵.۳: مقایسه نتایج نرم خطا در مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$.

τ	N	چ. لوکاس			a - چندجمله‌ای‌ها			زمان اجرا (s)
		L_2	L_∞	a	L_2	L_∞	a	
1/100	3	$4.1702e - 01$	$7.9507e - 01$	$3.9369e - 01$	$7.5102e - 01$	0.1544	2	
1/200	4	$5.5982e - 02$	$8.3583e - 02$	$5.2969e - 02$	$7.9267e - 02$	0.6225	11	
1/400	5	$6.6421e - 03$	$1.0272e - 03$	$6.2188e - 03$	$1.4110e - 03$	0.0268	63	



شکل ۴.۳: نمودار خطای مطلق مثال ۳.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{320}$ و $T = 1$.

مثال ۴.۴.۳. فرض کنید در (۱.۳)، $\mu = 0.1$ ، $\alpha = 1$ و $\beta = 0.01$ ، بنابراین معادله BBMB یک بعدی زیر روی بازه $\Omega = [-1, 1]$ حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}(w - 0.1w_{xx}) - w_{xx} + 0.01w_x = -ww_x + f, \quad (18.3)$$

با جواب دقیق $w(x, t) = (1 - x^2)e^{x-t}$. شرایط اولیه و مرزی نیز از جواب دقیق حاصل خواهد شد. همچنین داریم:

$$f(x, t) = e^{-2t+x} (e^t (-0.09 + 3.58x + 1.89x^2) + e^x (1 - 2x - 2x^2 + 2x^3 + 1x^4)).$$

در جدول ۱۶.۳ نتایج نرم خطای L_∞ روش پیشنهادی در نقاط شبکه‌ای چبیشف-گاوس-لوباتو (CGL) با روش‌های چندجمله‌ای‌های لوکاس [۲۵۴] و شعاعی [۳۶۴] به ازای $T = 1$ و $\tau = 1 \times 10^{-5}$ برای مقادیر مختلف N مقایسه شده است. روش پیشنهادی در مقایسه با روش شعاعی نتایج بهتری را حاصل کرده است. روش چندجمله‌ای‌های لوکاس و روش پیشنهادی تفاوت چندانی در نتایج با یکدیگر نشان نمی‌دهند.

جدول ۱۷.۳ نتایج نرم خطای L_∞ روش حاضر را در نقاط شبکه‌ای CGL با روش چندجمله‌ای لوکاس [۲۵۴] به ازای $N = 18$ و روش طیفی به ازای $N = 36$ در زمان $T = 1$ مقایسه می‌کند. در این جدول با کاهش مقدار τ ، مقدار خطا نیز کاهش می‌یابد. همچنین با توجه به تعداد نقاط هم محلی روش حاضر از روش طیفی نتیجه بهتری را حاصل می‌کند. دو روش a -چندجمله‌ای و چندجمله‌ای لوکاس نتایج تقریباً مشابهی دارند.

در شکل ۵.۳ نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = \frac{1}{5000}$ ، $N = 18$ در $T = 1$ رسم شده است.

جدول ۱۶.۳: مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$ و $\tau = 1 \times 10^{-5}$.

a	a - چندجمله‌ای‌ها	چ. لوکاس	روش طیفی	N
$6.6047e - 06$	$4.8534e - 03$	$4.8568e - 03$	$1.722e - 02$	4
$5.2017e - 08$	$1.6888e - 07$	$1.6899e - 07$	$2.049e - 05$	8
$-4.7934e - 09$	$1.6195e - 12$	$1.6195e - 12$	$3.901e - 09$	12
$-5.0728e - 08$	$1.7164e - 12$	$1.9199e - 12$	$4.639e - 12$	16
$1.9185e - 08$	$1.6105e - 12$	$1.6105e - 12$	$4.718e - 12$	20

جدول ۱۷.۳: مقایسه نتایج نرم L_∞ خطا در مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$.

a	a - چندجمله‌ای‌ها	چ. لوکاس	روش طیفی	τ
a	$N = 18$	$N = 18$	$N = 36$	
$-9.8380e - 16$	$5.0010e - 08$	$5.0011e - 08$	$2.048e - 07$	2×10^{-3}
$-6.0070e - 09$	$1.2502e - 08$	$1.2503e - 08$	$5.119e - 08$	1×10^{-3}
$-6.5770e - 08$	$5.0011e - 10$	$5.0014e - 10$	$2.047e - 09$	2×10^{-4}
$-2.0389e - 08$	$1.2496e - 10$	$1.2511e - 10$	$5.117e - 10$	1×10^{-4}
$1.4291e - 08$	$4.7231e - 12$	$4.7720e - 12$	$2.028e - 11$	2×10^{-5}

در شکل ۶.۳ نمودار جواب تقریبی در نقاط شبکه‌ای چیشف - گاوس - لوباتو (CGL) به ازای $N = 18$ ، $\tau = \frac{1}{5000}$ رسم شده است.

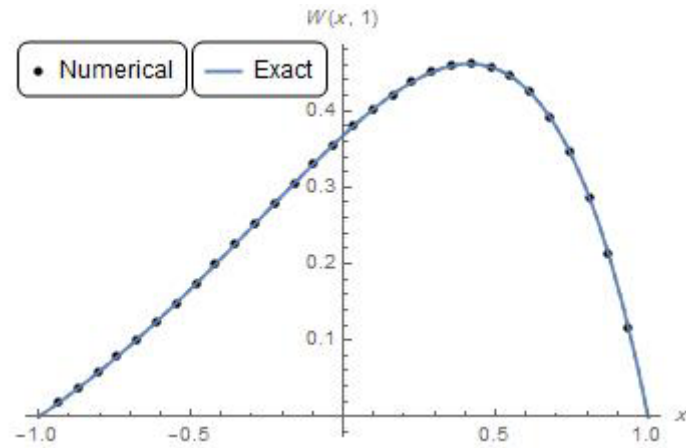
$$\begin{aligned}
 W(x, 1) = & 0.3678794411746825 + 0.3678794411636501x \\
 & - 0.1839397206013746x^2 - 0.3065662009752131x^3 \\
 & - 0.1686114105236529x^4 - 0.058247578179714946x^5 \\
 & - 0.014817366385585512x^6 - 0.002992670030769512x^7 \\
 & - 0.0005018196370183932x^8 - 0.00007197825958203979x^9 \\
 & - 0.000009022724127958333x^{10} - 0.000001004425485851973x^{11} \\
 & - 1.00437694892129910^{-7}x^{12} - 9.28357958334297410^{-9}x^{13} \\
 & - 9.27003732148685210^{-10}x^{14} + 3.61561184421020210^{-12}x^{15} \\
 & + 7.9854272348986410^{-11}x^{16} - 1.29208466253951110^{-11}x^{17} \\
 & - 1.80785132173997510^{-11}x^{18}.
 \end{aligned}$$

مثال ۵.۴.۳. فرض کنید $\mu = 1$ ، $\alpha = 0$ و $\beta = 1$ ، معادله BBM یک بعدی زیر روی بازه $\Omega = [-10, 30]$ بدست می‌آید. این معادله به نام معادله RLW نیز معروف است.

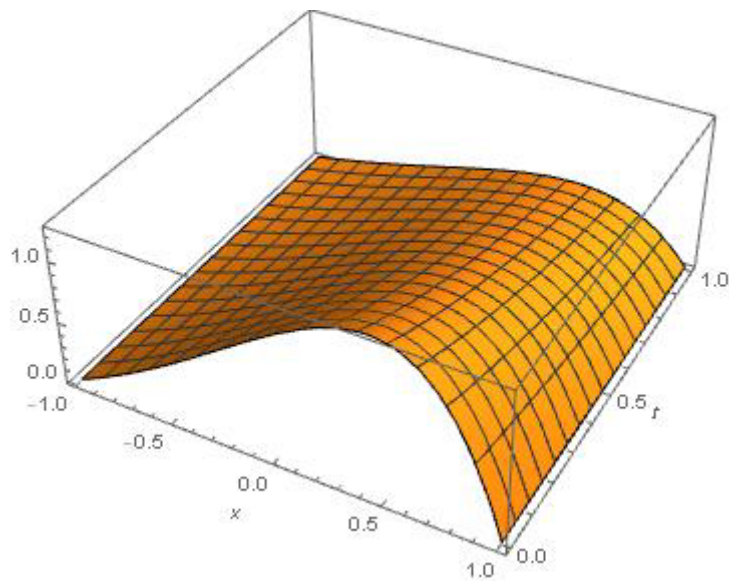
$$\frac{\partial}{\partial t}(w - w_{XX}) + w_X = -ww_X + f, \quad (19.3)$$

با شرایط ابتدایی و مرزی زیر:

$$\begin{aligned}
 w(X, 0) &= \text{sech}^2\left(\frac{X}{4}\right), \\
 w(X, t) &= \text{sech}^2\left(\frac{X}{4} - \frac{t}{3}\right), \quad X \in \partial\Omega, 0 < t \leq T.
 \end{aligned}$$



شکل ۵.۳: نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 18$ ، $\tau = \frac{1}{5000}$ و $T = 1$.



شکل ۶.۳: نمودار جواب تقریبی مثال ۴.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 18$ و $\tau = \frac{1}{5000}$.

جدول ۱۸.۳: مقایسه نتایج خطای $L_2 \times 10^2$ در مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ در زمان‌های مختلف.

T	چ. B-اسپلین	چ. چندجمله‌ای‌ها		چ. چیشف نوع دوم	زمان اجرا (s)
		a	$N = 50$	$N = 40$	
1	1.40316	0.618005	43.6154	58.9127	380
2	1.20716	0.433896	51.2281	56.8953	772
3	1.17837	0.358931	45.2990	54.6332	1037
4	1.20285	0.328144	33.1229	51.5032	1463

و

$$f(X, t) = 0.$$

در این مثال ابتدا بازه $[-10, 30]$ را به بازه $[-1, 1]$ با تبدیلی خطی، منتقل می‌کنیم. (۱۹.۳) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial t} (d^2 w - 4w_{xx}) + 2dw_x = -2dww_x + f,$$

که x متغیر جدید معادله بالا و $d = 30 - (-10) = 40$ و جواب دقیق معادله به صورت زیر تبدیل می‌شود:

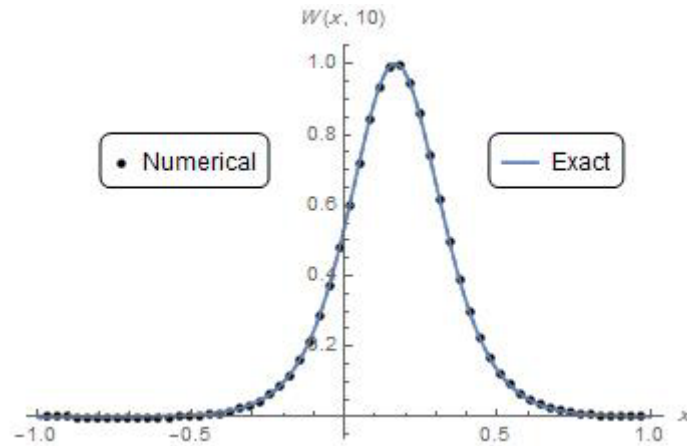
$$w(x, t) = \text{sech}^2(5x + \frac{10}{4} - \frac{t}{3}),$$

در جدول ۱۸.۳، نتایج خطای $L_2 \times 10^2$ روش پیشنهادی در نقاط شبکه‌ای چیشف-گوس-لوباتو (CGL) با روش B-اسپلین [۳۵۵] به ازای $\tau = 0.01$ در زمان‌های مختلف مقایسه شده است. با توجه به تعداد نقاط شبکه‌ای $N = 400$ در روش B-اسپلین و تعداد $N = 50$ در روش پیشنهادی مشاهده می‌شود که نتایج روش پیشنهادی از روش B-اسپلین بهتر می‌باشد. در این جدول برای مشاهده مزیت استفاده از پارامتر a در a -چندجمله‌ای‌ها، نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از چندجمله‌ای‌های چیشف نوع دوم مقایسه شده است. این جدول تفاوت بسیار زیادی را بین نتایج روش حاضر و چندجمله‌ای‌های چیشف نوع دوم نشان می‌دهد که برتری این روش را در مسایل با دامنه نامتناهی به نمایش می‌گذارد.

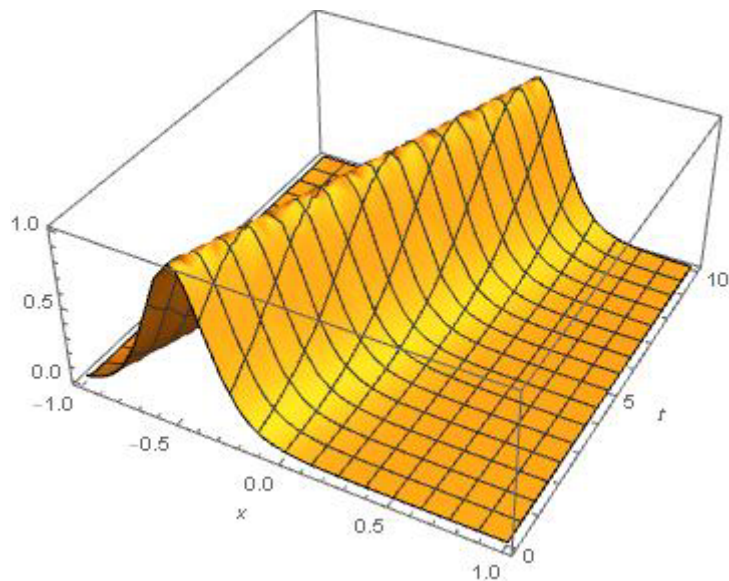
شکل ۷.۳، نمودار جواب‌های دقیق و عددی روش پیشنهادی را در نقاط شبکه‌ای چیشف-گوس-لوباتو (CGL) به ازای $\tau = \frac{1}{100}$ ، $N = 50$ و $T = 10$ نشان می‌دهد. در شکل ۸.۳ نمودار جواب عددی معادله در نقاط شبکه‌ای چیشف-گوس-لوباتو (CGL) به ازای $\tau = \frac{1}{100}$ و $N = 50$ رسم شده است.

۵.۳ نتیجه‌گیری

در این فصل یکی از مهمترین معادلات پاره‌ای در علوم مهندسی و فیزیک مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت. قضیه همگرایی روش پیشنهادی بوسیله a -چندجمله‌ای‌ها در این فصل اثبات شد. نتایج عددی بدست آمده به روش a -چندجمله‌ای‌ها با نتایج روش چندجمله‌ای‌های لوکاس و روش‌های دیگر مقایسه شد و برتری محسوسی نسبت به این روش‌ها از خود به نمایش گذاشت. همچنین با



شکل ۷.۳: نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 50$ ، $\tau = \frac{1}{100}$ و $T = 10$.



شکل ۸.۳: نمودار جواب تقریبی مثال ۵.۴.۳ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 50$ و $\tau = \frac{1}{100}$.

مقایسه روش پیشنهادی در دو نوع نقاط شبکه‌ای منظم و چبیشف- گاوس- لوباتو (CGL) مشاهده شد که نقاط شبکه‌ای چبیشف- گاوس- لوباتو (CGL) نتایج عددی بهتری را حاصل می‌کنند. با خطی‌سازی جمله غیرخطی این معادله نیز شاهد بهبود دوباره نتایج بودیم. با افزایش نقاط هم‌محلی، خطا کمتر شد و تاییدی بر قضیه همگرایی گردید. با مشاهده حل معادله RLW نتیجه می‌گیریم که هر معادله‌ای با دامنه بزرگ را نیز می‌توان بوسیله این روش حل کرد.

فصل ۴

حل عددی معادلات فالکنر-اسکن

۱.۴ مقدمه

دیفرانسیل عادی غیرخطی نقش اساسی در مدل‌سازی‌های علمی، فنی، اقتصادی و ریاضی دارند. از جمله کاربردهای معادلات دیفرانسیل عادی غیرخطی می‌توان به این زمینه‌ها اشاره کرد: محاسبه مسیرهای فضایی گلایدر و هواپیما، محاسبات پیش‌بینی و شیوع ایدز و اتوماسیون مانور پارکینگ و سایر مسائل بر اساس سیستم‌های مکانیکی.

حل عددی معادلات دیفرانسیل غیرخطی در ریاضیات کاربردی موضوع مهمی است. به ویژه، مسائل مقدار مرزی غیرخطی با دامنه بینهایت که در شاخه‌های مهندسی و فیزیک توجه بیشتری به خود جلب کرده است. یکی از معروفترین معادلات دیفرانسیل غیرخطی با دامنه نیمه نامتناهی معادله بلاسیوس^۱ است که در سال ۱۹۰۸ میلادی ظاهر شد [۶۴]. تعمیم معادله بلاسیوس در سال ۱۹۳۱ میلادی توسط فالکنر و اسکن کشف شد که به معادله فالکنر-اسکن^۲ معروف شد [۱۳۱]. معادله غیرخطی مرتبه سوم فالکنر-اسکن یک مساله مقدار مرزی غیرخطی با دامنه نیمه متناهی است. در سال ۱۹۳۷ میلادی اولین روش عددی برای حل این معادله توسط هارتری^۳ ارائه شد.

از جمله کاربردهای معادلات لایه مرزی، به این زمینه‌ها می‌توان اشاره کرد: خنک کردن یک صفحه فلزی در یک حمام خنک کننده، شکل دادن آیرودینامیکی ورق‌های پلاستیکی، طراحی فیلم‌های پلاستیکی، شکل‌دهی فلزی، صفحات فلزی، مواد عایق و مطالعه شیشه و پلیمر [۴۵]. دسته‌ای از این معادلات لایه مرزی، معادلات فالکنر-اسکن می‌باشد که در این فصل روشی جدید برای حل آن ارائه می‌شود. معادلات فالکنر-اسکن نقش مهمی در مکانیک سیالات، هوافضا و انتقال حرارت بازی می‌کند. از کاربردهای این معادلات می‌توان به موضوعات زیر اشاره کرد: شیمی [۲۱۵]، انتقال گرما [۳۳۷، ۳۵۷]، جریان سیال روی گوی با شرایط مرزی متحرک [۲۱۶]،

^۱Blasius Equation

^۲Falkner-Skan Equation

^۳Hartree

[۲۳۵]، حرکت نانوسیالات روی گُوه [۱۸۱، ۳۴۵]، جابجایی مخلوط سیال ماکسول^۴ [۲۶۶، ۱۵۴، ۵]، سیال کاسون^۵ [۲۹۰]، سیال با رفتار توانی [۲۸۱]، تحلیل مقاومت در برابر اصطکاک و انتقال گرما یا جرم، جریان بر روی سطوح نفوذپذیر با دمیدن یا مکش، جریان در امتداد مقطع منحنی الخط مانند: تیغه توربین گازی یا بال‌های هواپیما، جریان با تراکم یا تبخیر بر روی رابط‌ها، جریان با واکنش‌های کاتالیزوری بر روی یک دیوار.

معادلات فالكنر-اسکن به روش‌های مختلف عددی حل شده‌اند، از آن جمله می‌توان به روش‌های زیر اشاره کرد:

روش پرتابی [۳۲]، روش تفاضل متناهی [۳۴]، روش تکراری [۲۱۴، ۳۵۶]، روش شبکه عصبی [۱۶۰]، روش بازگشتی ضرایب تیلور [۲۷۱، ۳۳]، روش هم‌محلی چبیشف^۶ [۱۷۲، ۴، ۳۱۶]، روش تبدیل تکراری [۳۳۵]، روش تفاضل متناهی چبیشف [۱۲۱]، توابع کاردینال چبیشف [۱۹۵]، روش HAM^۷ [۳، ۵، ۳۴۷]، توابع تکه‌ای خطی [۳۵]، روش هم‌محلی^۸ [۲۶۹]، روش آدومیان [۲]، روش توابع سینک^۹ [۲۶۷]، روش نمایی چبیشف نوع دوم [۲۹۱، ۲۹۲]، چندجمله‌ای‌های گویای لژاندر [۱۴۵]، توابع اسپلاین [۱۲۲]، نظریه ناوردایی گروه^{۱۰} [۱۳۲]، شبکه عصبی گگن بایر^{۱۱} [۲۶۸].

۲.۴ فرمول مساله

در این بخش چگونگی بدست آمدن معادله دیفرانسیل فالكنر-اسکن مطرح می‌شود. فرض کنید معادلات لایه مرزی زیر برای جریان تراکم ناپذیر ثابت با گرانی^{۱۲} و چگالی ثابت باشد [۵]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\sigma B_0^2}{\rho} (u - U), \end{aligned} \quad (۱.۴)$$

با شرایط:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \quad v(x, 0) = 0, \\ u &= U(x), \quad y \rightarrow \infty, \\ U(x) &= ax. \end{aligned} \quad (۲.۴)$$

در این معادلات، دستگاه مختصات در راستای x موازی با صفحه در جهت جریان و مختصات y به سمت جریان آزاد انتخاب می‌شود. u و v مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y ، U سرعت

⁴Maxwell Fluid Mixed Convection

⁵Cason Fluid

⁶Shifted Chebyshev Collocation Method

⁷Homotopy Analysis Method

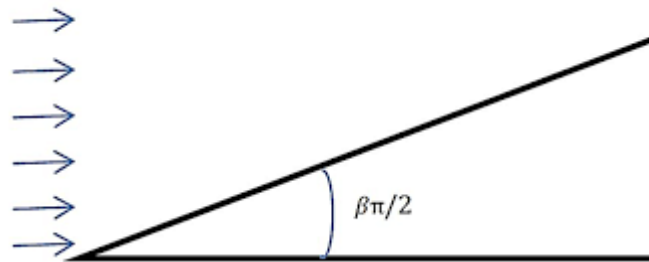
⁸Collocation Method

⁹Sinc Functions Method

¹⁰Group Invariance Theory

¹¹Gegenbaer Neural Network

¹²Viscosity



شکل ۱.۴: گوه در زاویه حمله $\frac{\beta\pi}{2}$.

مشخصه ذاتی^{۱۳}، σ رسانایی الکتریکی، ρ چگالی سیال و ν گرانیوی حرکتی^{۱۴} می باشد. می توان لایه مرزی بلاسیوس را با در نظر گرفتن یک گوه در زاویه حمله $\frac{\beta\pi}{2}$ در میدان سرعت یکنواخت U_0 تعمیم داد. همچنین برای تخمین جریان بیرونی با استفاده از متغیرهای تعریف شده و متغیرهای بدون بعد l طول مشخصه، m ثابت بدون بعد و η متغیر شباهت، نتیجه می شود [۳۰۰]:

$$\begin{aligned} u_e(x) &= U \left(\frac{x}{l} \right)^m, \\ \beta &= \frac{2m}{m+1}, \\ \eta &= y \sqrt{\frac{U(m+1)}{2\nu l}} \left(\frac{x}{l} \right)^{(m-1)/2}, \\ \psi &= \sqrt{\frac{2l\nu U}{m+1}} \left(\frac{x}{l} \right)^{(m+1)/2} f(\eta), \\ u &= U f', \quad v = -\sqrt{\frac{\nu U}{x}} f. \end{aligned}$$

بنابراین معادلات (۱.۴) و (۲.۴) به معادله دیفرانسیلی فالکنر-اسکن غیرخطی مرتبه سوم زیر تبدیل می شوند:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + \beta \left[1 - \left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 \right] - M^2 \left(\frac{df}{d\eta} - 1 \right) = 0, \quad (3.4)$$

با شرایط مرزی:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1,$$

$$M^2 = \sigma B_0^2 / \rho a \quad \text{که}$$

۳.۴ - چندجمله ای های گویا

سه طرح برای مسایل با دامنه های غیرکراندار وجود دارد [۶۸]:

۱. برش دامنه (تقریب $x \in [-\infty, \infty]$ بوسیله $[-L, L]$ با شرط $L \gg 1$).

۲. توسیع توابع پایه ای به بازه نامتناهی یا نیمه نامتناهی.

¹³Inherent Characteristic Velocity

¹⁴Kinematic Viscosity

۳. تغییر مختصات بازه نامتناهی به یک بازه متناهی.

در این بخش از طرح سوم استفاده می شود. با معرفی و تولید چندجمله ایهای گویای جدید از a - چندجمله ایهای معرفی شده در بخش ۳.۱ و تغییر متغیر، دامنه نیمه نامتناهی به دامنه متناهی تبدیل می شود. با توجه به (۸.۱):

$$A_n(z) = azU_{n-1}(z) + U_n(z), \quad n \geq 1.$$

و استفاده از تغییر متغیر $z = \frac{\eta-L}{\eta+L}$ برای $\eta \in [0, +\infty)$ که L یک عدد مثبت بزرگ و دلخواه است و بعدا انتخاب می شود، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۱.۳.۴. a - چندجمله ایهای گویا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$AL_n(\eta) = a \frac{\eta-L}{\eta+L} U_{n-1}\left(\frac{\eta-L}{\eta+L}\right) + U_n\left(\frac{\eta-L}{\eta+L}\right), \quad \eta \in [0, +\infty), \quad n \geq 1, \quad (4.4)$$

با $AL_0(\eta) = 1$. ثابت L پارامتر نگاشت نامیده می شود.

با استفاده از (۱۰.۱) و

$$R_n(\eta) = U_n\left(\frac{\eta-L}{\eta+L}\right), \quad (5.4)$$

نتیجه می شود:

$$AL_n(\eta) = \left(1 + \frac{a}{2}\right) R_n(\eta) + \frac{a}{2} R_{n-2}(\eta), \quad n \geq 2. \quad (6.4)$$

گزاره ۲.۳.۴. رابطه بازگشتی زیر برای a - چندجمله ایهای گویا برقرار است:

$$AL_{n+1}(\eta) = 2 \frac{\eta-L}{\eta+L} AL_n(\eta) - AL_{n-1}(\eta), \quad n \geq 1.$$

برهان. با توجه به رابطه بازگشتی a - چندجمله ایها و (۵.۴) نتیجه حاصل می شود.

□

گزاره ۳.۳.۴. ضرب داخلی زیر را فرض کنید:

$$(f, g)_\omega = \int_0^\infty \omega(\eta) f(\eta) g(\eta) d\eta, \quad (7.4)$$

که $\omega(\eta) = \frac{4L\sqrt{L\eta}}{(\eta+L)^3}$ تابع وزن مثبت است، داریم:

$$(AL_n, AL_m)_\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = m = 0, \\ \frac{1}{8}(2+a)^2\pi & n = m = 1, \\ \frac{1}{4}(2+2a+a^2)\pi & n = m \geq 2, \\ \frac{a\pi}{4} & |n-m|=2, nm=0, \\ \frac{1}{8}a(2+a)\pi & |n-m|=2, nm \neq 0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت,} \end{cases}$$

و

$$(R_n, R_m)_\omega = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}, \quad (8.4)$$

که $\delta_{n,m}$ دلتای کرونکر می باشد.

برهان. به گزاره ۶.۳.۱ رجوع کنید.

□

گزاره ۴.۳.۴. دستگاه $\{AL_{4n}\}_{n=0}^\infty$ یک دستگاه متعامد نسبت به ضرب داخلی تعریف شده در گزاره ۳.۳.۱ می باشد.

□

برهان. با توجه به گزاره ۳.۳.۴ نتیجه حاصل می شود.

گزاره ۵.۳.۴. فرض کنید $\omega_1(\eta) = \frac{4\eta\sqrt{L\eta}}{\eta+L}$ آنگاه نتیجه می شود:

$$\int_0^\infty \frac{dR_n(\eta)}{d\eta} \frac{dR_m(\eta)}{d\eta} \omega_1(\eta) d\eta = \frac{1}{2} n(n+2) \pi \delta_{n,m}. \quad (9.4)$$

برهان. به [۱۴۵] مراجعه کنید.

□

گزاره ۶.۳.۴.

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} R_n(\eta) = n+1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{dR_n(\eta)}{d\eta} = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \left(\frac{4\eta\sqrt{L\eta}}{\eta+L} \right) \frac{dR_n(\eta)}{d\eta} = 0. \quad (10.4)$$

□

برهان. به [۱۴۵] مراجعه کنید.

۴.۴ قضیه همگرایی

فرض کنید ω تابع وزن معرفی شده در گزاره ۳.۳.۴ و $L_\omega^2(\Lambda)$ فضای هیلبرت توابع با مقدار حقیقی با ضرب داخلی (۷.۴) باشد. فرض کنید N عددی صحیح و مثبت بوده و فضای مولد زیر یک زیرفضای $L_\omega^2(\Lambda)$ باشد:

$$\mathcal{R}_N = \text{Span} \{R_0, R_1, \dots, R_N\},$$

تصویر متعامد $L_\omega^2(\Lambda)$ نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$P_N : L_\omega^2(\Lambda) \rightarrow \mathcal{R}_N$$

$$(P_N u)(\eta) = \sum_{i=0}^N c_i R_i(\eta), \quad (11.4)$$

به طوریکه

$$(P_N u - u, \varphi)_\omega = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{R}_N.$$

برای تقریب $\|P_N u - u\|_\omega$ ، فضای درونیایی زیر را داریم:

$$H_{\omega,Q}^r(\Lambda) = \{u \mid \|u\|_{r,\omega,Q} < \infty \text{ و } u \text{ اندازه پذیر باشد}\},$$

که $r > 0$ عددی حقیقی و دلخواه، Q عملگر اشتورم-لیوویل چبیشف گویای نوع دوم و $\|u\|_{r,\omega,Q}$ نرم تعریف شده در زیر است:

$$Qv(\eta) = -\omega^{-1}(\eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{4\eta\sqrt{L\eta}}{\eta+L} \frac{d}{d\eta} v(\eta) \right) = -\frac{\eta(\eta+L)^2}{L} \frac{d^2 v}{d\eta^2} - \frac{(\eta+L)(\eta+3L)}{2L} \frac{dv}{d\eta}, \quad (12.4)$$

$$\|u\|_{r,\omega,Q} = \left(\sum_{i=0}^r \left\| (\eta+L)^{\frac{r}{2}+i} \frac{d^i u}{d\eta^i} \right\|_\omega^2 \right)^{1/2}. \quad (13.4)$$

لم ۱.۴.۴. عملگر Q^m یک نگاشت پیوسته از $H_{\omega,Q}^{2m}(\Lambda)$ به روی $L_\omega^2(\Lambda)$ است.

برهان. همانگونه که در اثبات گزاره ۱.۳.۳ دیده شد، براحتی با استقراء ثابت می شود که:

$$Q^m v(\eta) = \sum_{k=1}^{2m} (\eta+L)^{m+k} q_k(\eta) \frac{d^k v(\eta)}{d\eta^k}, \quad (14.4)$$

که q_k یک تابع گویا و کراندار یکنواخت روی بازه Λ می باشد. $\square$

قضیه ۲.۴.۴. برای عدد حقیقی و نامنفی r ، $v \in H_{\omega,Q}^r(\Lambda)$ و $v = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{v}_n R_n(\eta)$ وجود دارد ثابت $c \in \mathbb{R}$ به قسمی که:

$$\|P_N v - v\|_\omega \leq c N^{-r} \|v\|_{r,\omega,Q}. \quad (15.4)$$

برهان. ابتدا فرض می کنیم که $r = 2m$. با توجه به (۸.۴)، (۳.۱) و (۱۲.۴) و روش انتگرال گیری جزء به جزء، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \hat{v}_n &= \frac{2}{\pi} \int_{\Lambda} v(\eta) R_n(\eta) \omega(\eta) d\eta = \frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} v(\eta) Q R_n(\eta) \omega(\eta) d\eta \\ &= -\frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} v(\eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{4\eta\sqrt{L\eta}}{\eta+L} \frac{d}{d\eta} R_n(\eta) \right) d\eta \\ &= \frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} \frac{4\eta\sqrt{L\eta}}{\eta+L} \frac{d}{d\eta} v(\eta) \left(\frac{d}{d\eta} R_n(\eta) \right) d\eta \\ &= -\frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{4\eta\sqrt{L\eta}}{\eta+L} \frac{d}{d\eta} v(\eta) \right) R_n(\eta) d\eta \\ &= \frac{2}{\pi n(n+2)} \int_{\Lambda} Qv(\eta) R_n(\eta) \omega(\eta) d\eta \\ &= \dots = \frac{2}{\pi n^m(n+2)^m} \int_{\Lambda} Q^m v(\eta) R_n(\eta) \omega(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (16.4)$$

حال طبق (۱۴.۴)، (۱۶.۴) و تعریف $H_{\omega,Q}^r(\Lambda)$ نامساوی زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \|P_N v - v\|_{\omega}^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{v}_n \|R_n\|_{\omega}^2 \\ &\leq cN^{-4m} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\int_{\Lambda} Q^m v(\eta) R_n(\eta) \omega(\eta) d\eta}{\|R_n\|_{\omega}^2} \right)^2 \|R_n\|_{\omega}^2 \\ &\leq cN^{-4m} \|Q^m v\|_{\omega}^2 \leq cN^{-4m} \|v\|_{r,\omega,Q}^2. \end{aligned}$$

حال با مجذور گرفتن از دو طرف نامساوی حکم نتیجه می شود. اکنون فرض کنید که $r = 2m + 1$. با توجه به (۳.۱) و انتگرال گیری جزء به جزء، نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \hat{v}_n &= \frac{2}{\pi n^m (n+2)^m} \int_{\Lambda} Q^m v(\eta) R_n(\eta) \omega(\eta) d\eta \\ &= -\frac{2}{\pi n^{m+1} (n+2)^{m+1}} \int_{\Lambda} Q^m v(\eta) \frac{d}{d\eta} \left(\frac{4\eta\sqrt{L\eta}}{\eta+L} \frac{d}{d\eta} R_n(\eta) \right) d\eta \quad (۱۷.۴) \\ &= -\frac{2}{\pi n^{m+1} (n+2)^{m+1}} \int_{\Lambda} \frac{d}{d\eta} (Q^m v(\eta)) \frac{d}{d\eta} R_n(\eta) \omega_1(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

با استفاده از (۹.۴) و (۱۴.۴) نامساوی زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \|P_N v - v\|_{\omega}^2 &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \hat{v}_n^2 \|R_n\|_{\omega}^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (n(n+2))^{2m+2}} \left(\int_{\Lambda} \frac{d}{d\eta} (Q^m v(\eta)) \frac{d}{d\eta} R_n(\eta) \omega_1(\eta) d\eta \right)^2 \\ &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (n(n+2))^{2m+2}} \left(\frac{\int_{\Lambda} \frac{d}{d\eta} (Q^m v(\eta)) \frac{d}{d\eta} R_n(\eta) \omega_1(\eta) d\eta}{\left\| \frac{d}{d\eta} R_n \right\|_{\omega_1}^2} \right)^2 \left\| \frac{d}{d\eta} R_n \right\|_{\omega_1}^2 \\ &\leq cN^{-2(2m+1)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{\int_{\Lambda} \frac{d}{d\eta} (Q^m v(\eta)) \frac{d}{d\eta} R_n(\eta) \omega_1(\eta) d\eta}{\left\| \frac{d}{d\eta} R_n \right\|_{\omega_1}^2} \right)^2 \left\| \frac{d}{d\eta} R_n \right\|_{\omega_1}^2 \\ &\leq cN^{-2(2m+1)} \left\| \frac{d}{d\eta} (Q^m v) \right\|_{\omega_1}^2 \leq cN^{-2(2m+1)} \left\| \frac{d}{d\eta} (Q^m v)(\eta+L)^{7/2} \right\|_{\omega}^2 \\ &\leq cN^{-2(2m+1)} \|v\|_{r,\omega,Q}^2. \end{aligned}$$

با مجذور گرفتن از دو طرف نامساوی حکم نتیجه می شود. نتیجه مطلوب از نامساوی های بالا و فضای درونیایی حاصل می شود. $\square$

حال کران بالای خطای تقریب تابع $f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A L_i(\eta)$ را با تابع $f_N(\eta) = \sum_{i=0}^N c_i A L_i(\eta)$ بدست می آوریم.

قضیه ۳.۴.۴. برای عدد حقیقی و نامنفی r و $f \in H_{\omega,Q}^r(\Lambda)$ ، داریم:

$$\|f_N - f\|_{\omega} \leq \tilde{a} c (N-2)^{-r} \|f\|_{r,\omega,Q}. \quad (۱۸.۴)$$

برهان. با استفاده از (۴.۴) و قضیه ۲.۴.۴ نامساوی زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \|f_N - f\|_\omega &= \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i AL_i(\eta) \right\|_\omega = \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i \underbrace{\left(\left(1 + \frac{a}{2}\right) R_i(\eta) + \frac{a}{2} R_{i-2}(\eta) \right)}_{\text{رابطه (۶.۴)}} \right\|_\omega \\ &\leq \left| 1 + \frac{a}{2} \right| \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i R_i(\eta) \right\|_\omega + \left| \frac{a}{2} \right| \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} c_i R_{i-2}(\eta) \right\|_\omega \\ &\leq \left| 1 + \frac{a}{2} \right| \underbrace{c' N^{-r} \|f\|_{r,\omega,Q}}_{\text{رابطه (۱۵.۴)}} + \left| \frac{a}{2} \right| \underbrace{c'' (N-2)^{-r} \|f\|_{r,\omega,Q}}_{\text{رابطه (۱۵.۴)}} \leq \tilde{a} c (N-2)^{-r} \|f\|_{r,\omega,Q}, \end{aligned}$$

□

که $\tilde{a} = \max\{|1 + \frac{a}{2}|, |\frac{a}{2}|\}$, $c = \max\{c', c''\}$

این قضیه نشان می دهد که تقریب a - چندجمله ای های گویا همگرایی نمایی دارد.

۵.۴ پیاده سازی روش

در این بخش برای پیدا کردن جواب معادله فالدکتر-اسکن، جواب را با تابع زیر تقریب می زنیم:

$$f_N(\eta) = \eta + \sum_{i=0}^N c_i AL_i(\eta), \quad (19.4)$$

با توجه به (۶.۴) و گزاره ۶.۳.۴ خواهیم داشت:

$$(AL_i)'(\infty) = 0, \quad i = 0, \dots, N.$$

بنابراین همواره شرط مرزی $f'_N(\infty) = 1$ برقرار است. با فرض نقاط شبکه ای تعریف شده در بخش ۴.۱:

$$z_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

برای a - چندجمله ای ها روی بازه $[-1, 1]$ ، نقاط هم محلی $\{\eta_j\}_{j=0}^N$ برای مانده معادله (۳.۴) بکار می رود به طوریکه $z_j = \frac{\eta_j - L}{\eta_j + L}$. بنابراین ضرایب مجهول $\{c_j\}_{j=0}^N$ و پارامترهای a و L با حل دستگاه معادلات غیرخطی زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} Res(\eta_j) &= 0 \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ f(0) &= 0, \\ f'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (20.4)$$

که

$$Res(\eta) = \frac{d^3 f_N}{d\eta^3} + f_N \frac{d^2 f_N}{d\eta^2} + \beta \left[1 - \left(\frac{df_N}{d\eta} \right)^2 \right] - M^2 \left(\frac{df_N}{d\eta} - 1 \right).$$

شامل $N + 3$ معادله و $N + 3$ مجهول می باشد. حال با بدست آوردن a و L و قرار دادن آنها در a - چندجمله ای های گویا، چندجمله ای هایی بدون پارامتر خواهیم داشت. این چندجمله ای ها برای تقریب تابع استفاده می شوند و در بخش بعد نتایج حاصل از آنها با روش های مختلف مقایسه می شود.

جدول ۱.۴: مقایسه $f''(0)$ برای روش‌های مختلف به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$.

β	N	L	a	$-a$ چندجمله‌ای‌ها	تابع اسپلاین	چ.چیشف	تفاضل متناهی	توابع تکه ای خطی
0	20	2.0000	0.5016	0.46967501	0.4696000	0.4696000	0.46960012	0.469600
0.3	16	2.2426	2.0491	0.77475892	0.7747827	0.7747830	0.77478274	
0.5	16	2.0077	2.4937	0.92768032	0.9278054	0.9278050	0.92780539	0.927680
1	16	1.7691	2.0433	1.23258818		1.232588		1.232588
2	16	1.7814	2.4100	1.68721867	1.6872256	1.6872260	1.68722586	1.687222
10	16	2.1498	3.8498	3.67523403	3.6752130	3.6752340	3.67523431	
15	16	2.0645	3.6235	4.49148686	4.4916430	4.4914870	4.49148688	

۶.۴ نتایج عددی

برای حل معادله فالدکرن-اسکن بدست آوردن مقدار ضریب اصطکاک پوسته‌ای $f''(0)$ بسیار مهم است زیرا با بدست آوردن این مقدار می‌توان با پیدا کردن شرط‌های اولیه این معادله‌ی مرتبه سوم با روش‌های تحلیلی و عددی جواب معادله را محاسبه کرد. برای بررسی دقت و همگرایی روش نیز از خطای نرم L_2 مانده استفاده شده است.

در جدول ۱.۴ نتایج روش ارایه شده در این پایان‌نامه با روش تابع اسپلاین [۱۲۲]، چندجمله‌ای‌های چیشف [۲۳۸]، روش تفاضل متناهی چیشف [۱۲۱] و توابع تکه‌ای خطی مقایسه شده است. در این جدول نتایج مساله به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$ برای مقادیر مختلف β با تعداد N نقطه هم‌محلی بدست آمده است که نتایج خوب و قابل قبولی در مقایسه با روش‌های دیگر دارد. در شکل ۲.۴ نیز نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف β به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$ رسم شده است که با افزایش β نمودار تابع به محور عرض‌ها نزدیک‌تر می‌شود.

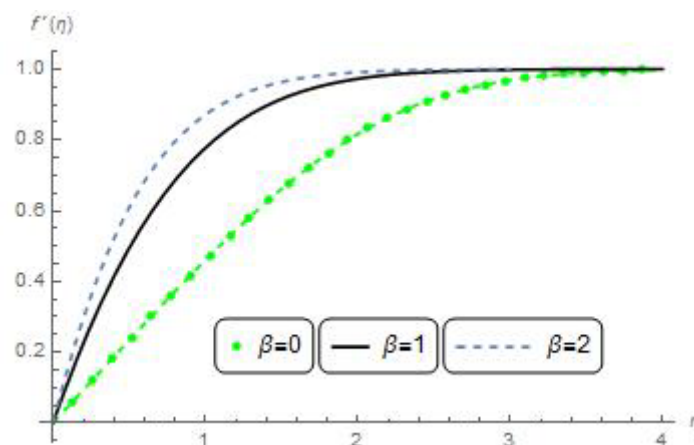
در جدول ۲.۴ نتایج روش پیشنهادی و چندجمله‌ای‌های گویای چیشف نوع دوم به ازای مقادیر مختلف β با یکدیگر مقایسه شده‌اند. با مشاهده این جدول می‌توان به کارایی پارامتر a پی برد. تفاوت مقادیر در دو ستون نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نتایج را با دقت بهتری ارایه می‌دهد. در دستگاه معادلات غیرخطی (۲۰.۴) با تغییر شرط $f(0) = 0$ به $f(0) = \alpha$ ، شرط اولیه را تعمیم می‌دهیم. در جدول ۳.۴ نتایج بدست آمده در روش پیشنهادی به ازای مقادیر مختلف α و β با روش تحلیلی هموتویی [۳۴۷] (HAM) مقایسه شده است، مشاهده می‌شود که جواب‌ها در هر دو روش یکسان می‌باشند. در شکل ۳.۴ نیز نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف α به ازای $\beta = 1$ و $M = 0$ رسم شده است که با افزایش α نمودار به محور عرض‌ها نزدیک‌تر می‌شود. این پدیده با توجه به نتایج جدول ۳.۴ قابل پیش‌بینی بود زیرا با افزایش مقدار α مشاهده می‌شود که مقدار $f''(0)$ نیز افزایش می‌یابد پس باید نمودار $f'(\eta)$ به محور عرض‌ها نزدیک‌تر شود.

در جدول‌های ۴.۴ و ۵.۴ نتایج حل عددی جریان مگنتوهیدرودینامیک فالدکرن-اسکن^{۱۵} به

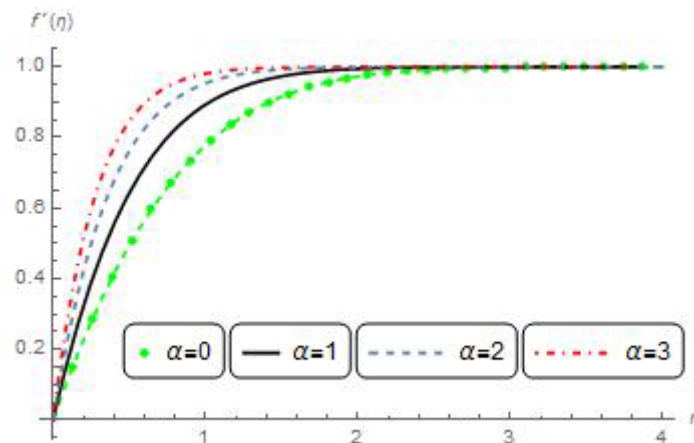
¹⁵MHD Falkner-Skan

جدول ۲.۴: مقایسه $f''(0)$ برای روش پیشنهادی با چندجمله ایهای گویای چیشف نوع دوم به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$.

β	N	L	a	$-a$ - چندجمله ایها	چ. گویای چیشف نوع دوم
0	20	2.0000	0.5016	0.46967501	0.45836580
0.3	16	2.2426	2.0491	0.77475892	0.77918564
0.5	16	2.0077	2.4937	0.92768032	0.92173652
1	16	1.7691	2.0433	1.23258818	1.22537660
2	16	1.7814	2.4100	1.68721867	1.68586448
10	16	2.1498	3.8498	3.67523403	3.67512630
15	16	2.0645	3.6235	4.49148686	4.49148064



شکل ۲.۴: نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف β به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$.



شکل ۳.۴: نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف α به ازای $\beta = 1$ و $M = 0$.

جدول ۳.۴: مقایسه $f''(0)$ برای روش‌های a - چندجمله‌ای‌ها و هموتویی به ازای $f(0) = 0$ و $M = 0$.

روش HAM	a - چندجمله‌ای‌ها	a	L	N	α	β
1.28363	1.283562	0.8648	2.7686	20	1	0
2.19415	2.194461	0.6182	1.8274	20	2	0
3.14510	3.145043	2.4447	5.6529	20	3	0
1.88931	1.889314	1.0381	5.7300	16	1	1
2.67006	2.670056	0.9195	2.8792	16	2	1
3.52664	3.526640	1.5980	2.8102	16	3	1
2.30982	3.309817	0.5433	4.1231	16	1	2
3.03961	3.039609	4.8856	2.4124	16	2	2
3.84614	3.846143	0.1696	2.8005	16	3	2

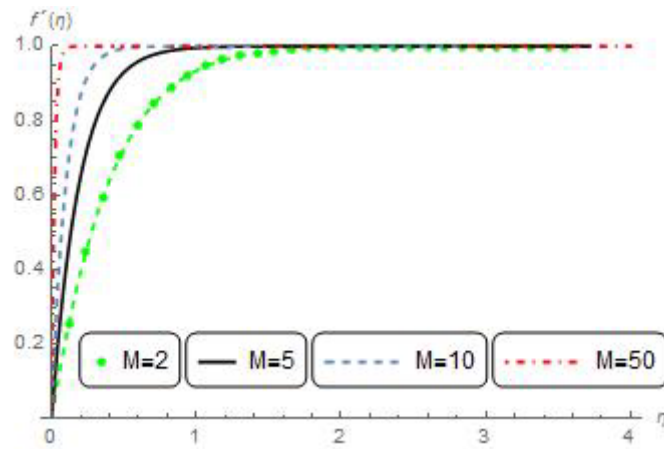
ترتیب به ازای $\beta = \frac{4}{3}(m=2)$ و $\beta = -3(m=-\frac{3}{5})$ نمایش داده شده است. در این جدول‌ها روش a - چندجمله‌ای‌ها با روش تحلیلی هموتویی [۳]، (HAM) روش هم‌محلی توابع سینک [۲۶۷] و روش شبکه عصبی گگن‌بایر [۲۶۸] مقایسه شده است که دقت جواب‌های روش a - چندجمله‌ای‌ها در بیشتر موارد بهتر از روش‌های دیگر می‌باشد.

در جدول ۶.۴ مشاهده می‌شود که برای حالت‌های مختلف معادله فاکنر-اسکن به بررسی خطای نرم L_2 مانده پرداخته شده است. طبق نتایج بدست آمده در این جدول، با افزایش تعداد نقاط هم‌محلی خطای نرم L_2 مانده کاهش می‌یابد و قضیه همگرایی را تایید می‌کند. بنابراین روش پیشنهادی دارای دقت مناسب جهت حل عددی این معادله می‌باشد.

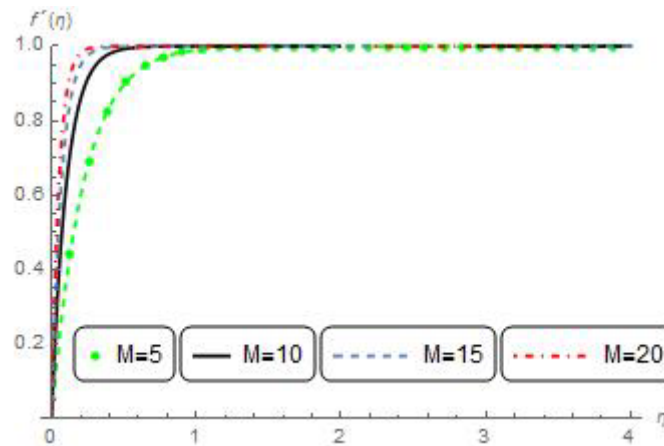
در شکل‌های ۴.۴ و ۵.۴ نیز نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف M به ازای $\alpha = 0$ و به ترتیب $\beta = \frac{4}{3}(m=2)$ و $\beta = -3(m=-\frac{3}{5})$ رسم شده است که با افزایش M نمودار به محور عرض‌ها نزدیک‌تر می‌شود. این پدیده با توجه به نتایج جدول‌های ۴.۴ و ۵.۴ قابل پیش‌بینی بود زیرا با افزایش مقدار M مشاهده می‌شود که مقدار $f''(0)$ نیز افزایش می‌یابد پس باید نمودار $f'(\eta)$ به محور عرض‌ها نزدیک‌تر شود.

۷.۴ نتیجه‌گیری

در این فصل، a - چندجمله‌ای‌های گویا تعریف شدند و برای روش a - چندجمله‌ای‌های گویا قضیه همگرایی را ثابت کردیم. با توجه به اینکه معادله فاکنر-اسکن معادله‌ای کلاسیک و پرکاربرد می‌باشد، روش‌های مختلفی برای حل آن استفاده شده است. روش a - چندجمله‌ای‌های گویا با توجه به سادگی اجرا و پیاده‌سازی و دقت بالای آن نسبت به روش‌های دیگر برتری محسوسی را



شکل ۴.۴: نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف M به ازای $\alpha = 0$ و $\beta = \frac{4}{3}(m = 2)$.



شکل ۵.۴: نمودار تابع $f'(\eta)$ برای مقادیر مختلف M به ازای $\alpha = 0$ و $\beta = -3(m = -\frac{3}{5})$.

جدول ۴.۴: مقایسه $f''(0)$ برای روش های مختلف به ازای $f(0) = 0$ و $\beta = \frac{4}{3}(m = 2)$.

M	N	L	a	$-a$ – چندجمله ای ها	روش عصبی	توابع سینک	روش HAM
2	16	2.04313	1.60234	2.4394987898	2.439498330	2.43949833	2.43949870
5	16	1.96659	0.99668	5.1909597728	5.190959450	5.196856696	5.19095980
10	16	1.99899	0.45163	10.096775790	10.09677545	10.09677545	10.09677575
50	24	0.5760	1.00009	50.019440805	50.01944071	50.01944071	50.01944084

جدول ۵.۴: مقایسه $f''(0)$ برای روش‌های مختلف به ازای $f(0) = 0$ و $\beta = -3(m = -\frac{3}{5})$.

M	N	L	a	$-a$ - چندجمله‌ای‌ها	روش عصبی	توابع سینک	روش HAM
5	16	1.85338	2.78404	4.600752311	4.600754940	4.60075494	4.60075228
10	16	0.96345	0.13215	9.806462982	9.806464200	9.80646420	9.80646300
15	16	0.98355	0.11675	14.871674010	14.87167484	14.87167484	14.87167401
20	16	0.99522	0.22466	19.903936209	19.90393701	19.90393701	19.90393626

جدول ۶.۴: مقایسه $f''(0)$ و نرم L_2 مانده به ازای مقادیر مختلف M ، β و N .

$(\beta, M) = (-3, 15)$		$(\beta, M) = (\frac{4}{3}, 5)$		$(\beta, M) = (1, 0)$		N
$\ Res\ _2$	$f''(0)$	$\ Res\ _2$	$f''(0)$	$\ Res\ _2$	$f''(0)$	
$1.19098e - 02$	0.005569596	$4.99015e - 01$	1.89000995	$1.43824e - 01$	1.19144878	4
$1.00832e - 01$	14.82029709	$6.98400e - 03$	5.19046006	$1.35223e - 02$	1.23240042	8
$1.11867e - 03$	14.87165002	$4.57503e - 05$	5.19095840	$1.03911e - 03$	1.23260193	12
$1.86876e - 05$	14.87167401	$2.33879e - 06$	5.19095977	$1.33224e - 04$	1.23258818	16
$4.06301e - 07$	14.87167401	$9.68830e - 09$	5.19095980	$5.08971e - 05$	1.23258749	20

نشان می‌دهد. این روش در حالات مختلف این معادله جواب‌های دقیقی را حاصل کرد که تنها با روش هموتویی جواب‌های تقریباً یکسانی را ارائه داد.

فصل ۵

حل عددی مسایل معکوس سهموی با شرط مرزی غیرموضعی

۱.۵ مقدمه

اغلب مسایل تحلیلی در ریاضیات با پیدا کردن یک تابع یا توزیع یک یا چند متغیر در دامنه‌ای با اندازه و شکلی داده شده که می‌تواند وابسته به زمان نیز باشد، سروکار دارند. نتایج این مسایل نیز به شرایط مرزی یا اولیه داده شده در هر نقطه دامنه بستگی دارد. همچنین در این مسایل باید معادلات حاکم بر متغیرها داده شده باشد. در این شرایط، مساله خوش وضع بوده و می‌توان با استفاده از روش‌های عددی مناسب آن را حل کرد. اما اگر حداقل یک از داده‌های اولیه مساله‌ای از دست برود، این مساله تبدیل به مساله‌ای معکوس برای پیدا کردن آن داده مجهول می‌شود که در این حالت باید اطلاعات دیگری از مساله داشته باشیم تا بتوانیم آن را حل کنیم.

مسایل معکوس، مسایلی هستند جهت پیدا کردن یک مشخصه مجهول از یک شی یا محیط، با توجه به مشاهده واکنش‌های دیده یا آزمایش شده از آن شی یا محیط. بنابراین نظریه مسایل معکوس ارایه دهنده یک راه برای سنجش از راه دور و ارزیابی غیر مخرب است. برای مثال، اگر یک موج صفحه صوتی بوسیله یک منبع پراکنده شود و فردی این میدان پراکنده را دور از منبع یا خارج از منطقه منبع مشاهده کند، مسایل معکوس می‌توانند به شکل و ویژگی منبع دست یابند. با این نظریه می‌توان به شناسایی اشیاء پروازی (موشک‌های هوایی، ماهواره‌ها و ...)، اشیاء غوطه‌ور در آب (زیر دریایی، گروه ماهی‌ها و ...) و بسیاری موارد دیگر پرداخت.

در ژئوفیزیک، یک موج صوتی از سطح زمین فرستاده می‌شود و میدان پراکنده شده روی سطح برای موقعیت‌های مختلف منبع میدان و برای یک بسامد ثابت یا بسامدهای مختلف، جمع می‌شود. مسایل معکوس برای پیدا کردن ناهمگونی‌های زیرسطحی بکار می‌رود. این ناهمگونی می‌تواند یک رسوب نفتی، یک غار یا یک معدن باشد. در صنعت، ویژگی‌های یک قطعه اندازه‌گیری می‌شود و یک مساله معکوس هرگاه نقصی را در این قطعه باشد مثل یک سوراخ در قطعه، پیدا می‌کند. در

پزشکی، کاربرد یک مساله معکوس، پیدا کردن یک تومور یا یک اختلال در بدن انسان می‌باشد. اگر فردی قادر به یافتن ناهمگونی‌ها در یک محیط بوسیله پردازش میدان پراکنده شده روی سطح باشد، نیازی به حفاری در محیط نیست. این مسایل به نوبه خود، از ارزیابی گران و مخرب جلوگیری می‌کند. مزایای عملی سنجش از راه دور است که باعث می‌شود مسایل معکوس مهم باشند.

مسایل معکوس می‌توانند به دو دسته کلی تقسیم شوند:

- تقریب یک پارامتر

- تقریب یک تابع

یک مساله غیرمستقیم^۱ که همان مساله معکوس می‌باشد، یک قسمت از تعریف مساله مستقیم^۲ است که موجود نیست و باید یافت شود. در عوض این قسمت مفقود، باید اطلاعاتی تکمیلی از یک آزمایش یا فرآیند در دسترس قرار گیرد. مسایل معکوس را می‌توان براساس نوع اطلاعات مجهول در مساله به صورت‌های زیر طبقه‌بندی کرد:

- مسایل معکوس مرزی که عبارتند از تعیین اطلاعات مربوط به شرایط مرزی مفقود.

- مسایل معکوس ضربی که مربوط به تعیین ضرایب موجود در معادله می‌باشد. این مساله می‌تواند یک مساله ساده تخمین پارامتر باشد اگر این ضرایب، عددی ثابت باشند اما اگر ضرایب وابسته به زمان یا متغیر دیگری باشند این مساله، یک مساله تخمین تابع خواهد بود.

- مساله معکوس پسرو یا گذشته‌نگر که شرط اولیه برای یک دستگاه را تعیین می‌کند.

اهمیت مسایل معکوس به دلیل طیف گسترده کاربردهای آنها می‌باشد. از این مسایل می‌توان در زمینه‌های مختلف علمی و مهندسی استفاده کرد مانند: آکوستیک [۲۷۵، ۱۶۲]، الکترومغناطیس، فیبرهای نوری، تصویربرداری پزشکی [۱۴۸]، تعیین پارامترهای سیستم‌های فیزیکو-شیمیایی^۳، زیست پزشکی^۴ [۵۴]، مدل‌سازی گازهای گلخانه‌ای^۵ [۱۲۶]، اکتشافات چاه‌های نفت و گاز [۲۳۲]، لرزه‌نگاری [۱۷۷]، نظریه پراکندگی معکوس^۶، کیهان‌شناسی، مکانیک شکست^۷ [۷۲]، نظریه پراکندگی کوانتوم [۷۸]، مدل برازش^۸، پادهمامیخت^۹ [۳۳۲]، تصویربرداری رادیویی-نجومی، ناوبری، مکانیک [۱۵۸، ۱۳۳، ۱۴۲، ۳۳۸، ۳۳۹]، اپتیک [۳۴۲، ۸۷، ۴۶]، هوافضا

¹Indirect Problem

²Direct Problem

³Physico-Chemical Systems

⁴Biomedical

⁵Greenhouse Gas Modelling

⁶Inverse Scattering Theory

⁷Fracture Mechanics

⁸Model Fitting

⁹Deconvolution

[۴۴، ۲۵، ۸۲، ۳۱۱]، اپتیک جوئی [۵۲]، بیومکانیک [۱۳۴]، مکانیک کوانتوم [۲۵۸]، مکترونیک [۳۱۴]، علوم زیستی [۲۵۹، ۹۸، ۱۹۹]، سیستم‌های دینامیکی آشفته [۶۶]، شیمی [۴۳، ۱۸۶، ۳۲۶]، اقتصاد [۱۶۸]، مهندسی محیط زیست [۳۵۳، ۲۵۰، ۱۸۷، ۱۸۳، ۲۴۵، ۳۱۰، ۱۵۱، ۲۰۷]، فعالیت‌های هسته‌ای [۲۷۴]، پردازش تصویر^{۱۰} [۹۵، ۶۲، ۲۳۷]، پزشکی [۸۵، ۵۶، ۲۶۴، ۲۱، ۶۹]، ژئوفیزیک [۲۰۳، ۱۹۸، ۳۰۷]، فیزیک [۲۱۲، ۱۱۲، ۱۶۴، ۸۳، ۳۴۴، ۹۳]، روان‌شناسی [۱۹۳]، سیستم‌های رادار [۷۹، ۸۰، ۵۰]، پردازش سیگنال [۳۰۱، ۳۰۵، ۳۱۴].

از نمونه‌های کاربرد مسایل معکوس به صورت جزئی‌تر می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۲۴۲]: تشخیص مواد غیرفلزی زیرزمینی توسط پرتوهای ارسالی، شدت و موقعیت تابش نورانی از یک منبع بیولوژیکی با استفاده از تابش‌های آزمایشی، رادیولوژی (پرتونگاری) کامپیوتری^{۱۱}، پرتونگاری کامپیوتری تک فوتون منتشر شده^{۱۲}، پرتونگاری نوری مادون قرمز^{۱۳}، تخمین شدت منابع حرارتی وابسته به مکان و زمان در مسایل انتقال حرارت، برآورد شرایط اولیه مسایل گذرا در انتقال گرما، آزمایش غیرمخرب جهت تشخیص خواص مواد توسط روش‌های فراصوتی یا اشعه X، مساله سینماتیک در لرزه‌شناسی، زمان تحلیل فلورسنت، پردازش سیگنال و تصویر [۱۲۵] (نمونه‌اش در تلسکوپ هابل بکار رفت)، همچنین مساله نیوتن در کشف نیروهای وارده از سیارات که مطابق قانون کپلر حرکت می‌کنند، یکی از اولین مسایل معکوس در دینامیک سیستم‌های مکانیکی می‌باشد [۲۸۴].

یکی از معروفترین مسایل معکوس، مساله رسانش گرمایی معکوس (IHCP)^{۱۴} است که با اندازه‌گیری دما در یک مرز قابل دسترس می‌توان شار و دما را در سطوح غیرقابل دسترس تخمین زد و همچنین این مساله منجر به مساله ای بدوضع می‌شود. اغلب مسایل معکوس را نمی‌توان به صورت تحلیلی حل کرد، در نتیجه روش‌های محاسباتی عددی نقشی اساسی در حل مسایل معکوس بازی می‌کنند.

مسایل معکوس، خود بدوضع هستند و از جمله روش‌هایی که منجر به بدوضع^{۱۵} در مسایل معکوس می‌شود، روش گسسته‌سازی است که در این فصل از آن استفاده شده است. در گسسته‌سازی، حل یک مساله معکوس تبدیل به یک معادله ماتریسی می‌شود که ماتریس ضرایب این معادله بسته به اینکه وارون‌پذیر باشد یا نه ممکن است به ما مساله‌ای بدوضع بدهد.

روش‌های مختلفی برای حل مسایل معکوس بکار گرفته شده است که از میان آنها می‌توان به روش‌های زیر اشاره کرد:

روش بایسیان^{۱۶} [۲۷۵، ۲۴۶، ۱۲۳، ۴۱، ۳۵۹، ۱۳۴]، روش آدومیان^{۱۷} [۱۰۲]، روش اعضاء

¹⁰Image Processing

¹¹Computerized Tomographi(CT)

¹²SPECT

¹³NIROT

¹⁴Inverse Heat Conduction Problem

¹⁵Ill-Posedness

¹⁶Bayesian Method

¹⁷Adomian Method

متناهی [۳۳۸، ۲۶۴، ۲۵۷]، روش شتاب‌نما^{۱۸} [۸۲]، روش عنصر مرزی^{۱۹} [۹۴، ۵۱]، روش گالرکین [۵۷]، روش بهینه‌سازی فراگیر^{۲۰} [۱۹۱]، روش بهینه‌سازی موضعی^{۲۱} [۱۳۵]، روش تکرار تغییرات هی^{۲۲} [۳۳۴]، چندجمله‌ای‌های چیشف [۱۴۴، ۲۴۰، ۲۴۱]، روش بدون شبکه^{۲۳} [۲۷۶، ۲۵۷]، روش شبکه عصبی^{۲۴} [۲۵۷، ۲۵۸، ۱۵۷، ۳۱۵]، روش مونت کارلو [۲۴]، روش نمونه‌گیری خطی^{۲۵} [۸۰]، چندجمله‌ای‌های متعامد [۲۴]، روش تفاضل متناهی [۹۹]، روش فضای هسته بازتولیدی [۳۴۰، ۲۷۷، ۲۲۶]، توابع پایه‌ای شعاعی^{۲۶} (RBF) [۱۰۷].

در این فصل با دو نوع مساله معکوس در دو حالت یک بعدی و دو بعدی سروکار داریم. این مسایل معکوس به صورت مساله معکوس تقریب ضریب و تقریب تابع می‌باشند که باید مقدار تابع و ضریبی را که در فرمول معادله بکار رفته است پیدا کنیم.

۲.۵ مسایل معکوس سهموی یک بعدی

در این بخش دو نوع مساله معکوس یک بعدی بحث و بررسی می‌شود:

● مساله ۱:

در این مساله می‌خواهیم یک جفت از توابع $\{u(x, t), r(t)\}$ را در معادله سهموی زیر پیدا کنیم.

$$u_t - u_{xx} = r(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, 1) \times [0, T], \quad (۱.۵)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1],$$

و شرایط مرزی غیرموضعی

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

شرط اضافی انتگرالی

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad t \in [0, T],$$

که $f(x, t)$ ، $\varphi(x)$ و $E(t)$ توابعی معلوم هستند.

¹⁸Hodograph Method

¹⁹Boundary Element Method

²⁰Global Optimization Method

²¹Local Optimization Method

²²He's Variational Iteration Method

²³Meshless Method

²⁴Neural Network Method

²⁵Linear Sampling Method

²⁶Radial Basis Functions

- مساله ۲: در این مساله می‌خواهیم یک جفت از توابع $\{u(x, t), p(t)\}$ را در معادله سهموی زیر پیدا کنیم.

$$u_t - u_{xx} = p(t)u + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega = (0, 1) \times [0, T], \quad (۲.۵)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, 1],$$

شرایط مرزی غیرموضعی

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

و شرط اضافی در یک نقطه در دامنه مکان

$$u(x^*, t) = E(t), \quad t \in [0, T],$$

که $f(x, t)$ ، $\varphi(x)$ و $E(t)$ توابعی معلوم هستند.

۱.۲.۵ وجود، یکتایی و پایداری جواب

- مساله ۱:

$$u_t = u_{xx} - r(t)u - f(x, t), \quad Q_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\},$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

فرض می‌کنیم در این مساله داریم:

۱.

$$\varphi(x) \in C^4[0, 1],$$

$$\varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(1) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(1), \quad (۳.۵)$$

$$\varphi_{2k} \leq 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

۲.

$$E(t) \in C^1[0, T],$$

$$E(0) = \int_0^1 \varphi(x) dx, \quad (۴.۵)$$

$$E(t) > 0, \quad g'(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

۳.

$$\begin{aligned} f(x, t) &\in C^4[0, 1] \times [0, T], \quad \forall t \in [0, T], \\ f(0, T) &= f(1, T), \quad f_x(1, T) = 0, \quad f_{xx}(0, T) = f_{xx}(1, T), \\ f_0(t) &\geq 0, \quad f_{2k}(t) \geq 0, \quad \forall t \in [0, T], \\ \min_{0 \leq t \leq T} f_{2k}(t) &+ [e^{-(2k\pi)^2 T} - 1] \max_{0 \leq t \leq T} f_{2k}(t) \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.5)$$

که

$$\varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) Y_k(x) dx, \quad f_k(t) = \int_0^1 f(x, t) Y_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

و

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= x, \quad Y_{2k-1}(x) = x \cos(2k\pi x), \\ Y_{2k}(x) &= \sin(2k\pi x), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

یک دستگاه از توابع روی بازه $[0, 1]$ می باشد.

قضیه ۱.۲.۵. [۱۶] هرگاه (۳.۵)، (۴.۵) و (۵.۵) برقرار باشند آنگاه مساله معکوس (۱) برای مقادیر کوچک T جواب یکتا دارد.

قضیه ۲.۲.۵. [۱۶] با توجه به (۳.۵)، (۴.۵) و (۵.۵) جواب (u, r) نسبت به داده های مساله وابستگی پیوسته دارد (پایداری جواب).

● مساله ۲:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + p(t)u + f(x, t, u), \quad Q_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 < t \leq T\}, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, t) &= \chi(x, t), \quad \{0, 1\} \times [0, T], \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x_0, t) &= E(t), \quad 0 < x_0 < 1, 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

فرض می کنیم در این مساله داریم:

۱.

$$\varphi \geq 0, \chi \geq 0, f \geq 0, E > 0,$$

۲.

$$\varphi(x) \in C^4[0, 1], \quad \chi \in C^2(\{0, 1\} \times [0, T]), \quad E \in C^2[0, T],$$

۳. F یک تابع هموار است و $|F(x, t, u)| \leq c(1 + |u|)$ که c عددی ثابت است.

با استفاده از تبدیل زیر خواهیم داشت:

$$u(x, t) = v(x, t) \exp\left\{\int_0^t p(\zeta) d\zeta\right\},$$

$$r(t) = \exp\left\{-\int_0^t p(\zeta) d\zeta\right\},$$

$$v = v(x, t) = u(x, t) \exp\left\{-\int_0^t p(\zeta) d\zeta\right\},$$

که $(u, p) \rightarrow (v, r)$ معادله تبدیل یافته زیر را می دهد:

$$v_t = v_{xx} + r(t)f(x, t, \frac{v}{r}),$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$v(x, t) = \chi(x, t)r(t), \quad \{0, 1\} \times [0, T],$$

$$r(t) = \frac{v(x_0, t)}{E(t)}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

(۶.۵)

قضیه ۳.۲.۵. [۷۳] با توجه به (۶.۵)، جواب یکتای (v, r) برای مساله (۶.۵) وجود دارد که نسبت به داده های مساله بستگی پیوسته دارد (پایداری جواب).

۲.۲.۵ پیاده سازی روش

در این روش ابتدا از دامنه زمانی نقاط شبکه ای t_j انتخاب می کنیم، سپس در هر نقطه t_j جواب مساله به صورت ترکیب خطی a - چندجمله ای ها تقریب زده می شود. برای بدست آوردن ضرایب مجهول این ترکیب خطی با کمک نقاط هم محلی بازه مکان در هر نقطه t_j یک دستگاه معادله غیرخطی با روش هم محلی بدست می آید که با حل این دستگاه ضرایب مجهول در ترکیب خطی بدست می آیند. در پایان، با درونیابی نقاط $(x_i, t_j, u(x_i, t_j))$ بوسیله چندجمله ای های B - اسپلاین مکعبی، جواب تقریبی مساله در بازه $\Omega = (0, 1) \times [0, T]$ بدست می آید.

۱.۲.۲.۵ گسسته سازی زمانی

برای گسسته سازی بازه زمانی $[0, T]$ ، انتخاب کنید:

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M,$$

که $\tau = \frac{T}{M}$ و T زمان پایانی متغیر t است. با استفاده از روش تفاضل متناهی پیشرو، برای گسسته سازی مسایل (۱) و (۲) داریم:

● مساله ۱:

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} - \frac{u_{xx}^{j+1} + u_{xx}^j}{2} = r^j u^j + f^{j+\frac{1}{2}},$$

$$u^{j+1} = u(x, t_{j+1}) \text{ و } f^{j+\frac{1}{2}} = \frac{f^j + f^{j+1}}{2}, \quad r^j = r(t_j)$$

با ساده و خلاصه کردن عبارت بالا خواهیم داشت:

$$2u^{j+1} - \tau u_{xx}^{j+1} = 2u^j + \tau u_{xx}^j + 2\tau r^j u^j + 2\tau f^{j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (۷.۵)$$

بعد از انتگرال‌گیری نسبت به x از ۰ تا ۱، از دو طرف (۱.۵) و استفاده از شرط اضافی انتگرالی و شرط مرزی غیرموضعی، می‌توان پارامتر $r(t)$ را بدست آورد:

$$r(t) = \frac{E'(t) + v_x(0, t) - \int_0^1 f(x, t) dt}{E(t)},$$

در نتیجه علاوه بر (۷.۵)، برای هر نقطه t_j داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{xx} dx &= u_x(1, t) - u_x(0, t), \\ u^j(0) &= u^j(1), \quad u_x^j(1) = 0, \\ r^j &= r(t_j) = \frac{E'(t_j) + u_x^j(0) - \int_0^1 f(x, t_j) dx}{E(t_j)}, \end{aligned}$$

که به ازای هر نقطه t_j ، یک دستگاه معادلات غیرخطی بدست می‌آید.

● مساله ۲:

$$\frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} - \frac{u_{xx}^{j+1} + u_{xx}^j}{2} = p^j u^j + f^{j+\frac{1}{2}},$$

$$u^{j+1} = u(x, t_{j+1}) \text{ و } f^{j+\frac{1}{2}} = \frac{f^j + f^{j+1}}{2}, \quad p^j = p(t_j)$$

با ساده و خلاصه کردن عبارت بالا خواهیم داشت:

$$2u^{j+1} - \tau u_{xx}^{j+1} = 2u^j + \tau u_{xx}^j + 2\tau p^j u^j + 2\tau f^{j+\frac{1}{2}}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (۸.۵)$$

برای بدست آوردن پارامتر $p(t)$ ، نقطه x^* را در (۲.۵) قرار داده و سپس خواهیم داشت:

$$u_t(x^*, t) = u_{xx}(x^*, t) + p(t)u(x^*, t) + f(x^*, t),$$

$$E'(t) = u_{xx}(x^*, t) + p(t)E(t) + f(x^*, t),$$

$$p(t) = \frac{E'(t) - u_{xx}(x^*, t) - f(x^*, t)}{E(t)},$$

در نتیجه علاوه بر (۸.۵) برای هر نقطه t_j داریم:

$$u^0 = \varphi(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u^j(0) = u^j(1), \quad u_x^j(1) = 0,$$

$$p^j = p(t_j) = \frac{E'(t_j) - u_{xx}^j(x^*) - f(x^*, t_j)}{E(t_j)},$$

که به ازای هر نقطه t_j ، یک دستگاه معادلات غیرخطی بدست می‌آید.

۲.۲.۲.۵ پایداری روش

در این بخش، پایداری روش پیشنهادی را در (۷.۵) تحلیل می‌کنیم. برای این کار از روش فوریه که به روش فون-نویمان^{۲۷} نیز معروف است، استفاده می‌کنیم [۳۲۷]. طبق روش فوریه خواهیم

²⁷Von-Numann Method

داشت:

$$2u_m^{j+1} - \tau(u_{xx})_m^{j+1} = 2u_m^j + (u_{xx})_m^j + 2\tau r_m^j u_m^j + 2\tau f^{j+\frac{1}{2}},$$

$$u_m^j = g^j e^{im\theta}, \quad i^2 = -1, \quad \theta = \xi h,$$

که h عدد حالت^{۲۸} و ξ اندازه المان^{۲۹} می باشد. با بکار بردن این روش، به معادله زیر می رسیم:

$$2g^{j+1} e^{im\theta} + \tau \xi^2 g^{j+1} e^{im\theta} = 2g^j e^{im\theta} - \tau \xi^2 g^j e^{im\theta} + 2\tau r_m^j g^j e^{im\theta}, \quad (9.5)$$

با تقسیم کردن دو طرف (۹.۵) بر $g^j e^{im\theta}$ می توان به رابطه زیر دست یافت:

$$(2 - \tau \xi^2)g(\xi) = 2 - \tau \xi^2 + 2\tau r, \quad (10.5)$$

که $r = \min_j \{r^j\}$. (۱۰.۵) می تواند به صورت ساده زیر نوشته شود:

$$g(\xi) = \frac{2 - \tau \xi^2}{2 - \tau \xi^2 + 2\tau r^j},$$

بنابراین

$$|g(\xi)| = \left| \frac{2 - \tau \xi^2}{2 - \tau \xi^2 + 2\tau r^j} \right| \leq 1,$$

که نشان می دهد روش پیشنهادی دارای پایداری می باشد. پایداری روش پیشنهادی را در (۸.۵) نیز به صورت مشابه ثابت می شود که دارای پایداری مشروط می باشد.

۳.۲.۲.۵ اجرای روش

فرض کنید که تابع u^{j+1} به صورت زیر بوسیله a - چندجمله ای ها تقریب زده شود:

$$u^{j+1} \cong \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} A_n(x),$$

برای تقریب مشتقات بالاتر u^{j+1} نسبت به x خواهیم داشت:

$$u_x^{j+1} \cong \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} A'_n(x), \quad u_{xx}^{j+1} \cong \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} A''_n(x),$$

با جایگزین کردن تقریب های بالا به ازای هر t_j در (۷.۵) و (۸.۵)، گسسته سازی بر روی دامنه مکانی $[0, 1]$ و شرایط اولیه و اضافی این مسایل، یک دستگاه معادلات غیرخطی با $N + 2$ معادله و $N + 2$ مجهول c_n^{j+1} , $n = 0, 1, 2, \dots, N$ و پارامتر مجهول a ، بدست می آید. برای حل این دستگاه معادلات غیرخطی، نرم L_2 مجموع مربعات مانده ها را به روش کمترین مربعات مینیمم می کنیم. در این مسایل نیز مانند فصل های قبل ابتدا پارامتر a را بدست آورده و در a - چندجمله ای ها قرار می دهیم و سپس با این چندجمله ای ها روش را تکرار می کنیم با یک مجهول (a) کمتر. بعد از بدست آوردن تقریب تابع در هر زمان t_j ، با درونیابی نقاط $(x_i, t_j, u(x_i, t_j))$ بوسیله چندجمله ای های B - اسپلاین مکعبی، جواب تقریبی مساله در بازه $\Omega = (0, 1) \times [0, T]$ بدست می آید.

²⁸Mode Number

²⁹Element Size

ملاحظه ۴.۲.۵. الگوریتم روش پیشنهادی:

۱. قرار دهید $u^0(x) = \varphi(x)$.

۲. دستگاه معادلات غیرخطی $u^0(x_i) = \sum_{n=0}^N c_n^0 A_n(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. را حل کن.

۳. دستگاه های معادلات غیرخطی زیر را به ازای $u^{j+1} \cong \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} A_n(x)$ و $j = 0, 1, \dots, M-1$ حل کن:

مساله ۱:

$$2u^{j+1}(x_i) - \tau u_{xx}^{j+1}(x_i) = 2u^j(x_i) + \tau u_{xx}^j(x_i) + 2\tau r^j(x_i)u^j(x_i) + 2\tau f^{j+\frac{1}{2}}(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

مساله ۲:

$$2u^{j+1}(x_i) - \tau u_{xx}^{j+1}(x_i) = 2u^j(x_i) + \tau u_{xx}^j(x_i) + 2\tau p^j(x_i)u^j(x_i) + 2\tau f^{j+\frac{1}{2}}(x_i), i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

۴. درونیابی با B - اسپلاین ها مکعبی داده های زیر:

$$u(x_i, t_j) = u^i(x_j), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, M.$$

۳.۲.۵ نتایج عددی

برای ارایه حل عددی از دو نوع نقاط شبکه ای منظم و چبیشف - گاوس - لوباتو (CGL) که در بخش ۴.۱ تعریف شد، استفاده می کنیم. در این بخش دو مثال، یک مثال از مساله (۱) و یک مثال از مساله (۲)، برای بررسی نتایج عددی انتخاب شده اند.

مثال ۵.۲.۵. [۲۲۶] مساله (۱) را با داده های زیر فرض کنید:

$$\varphi(x) = 1 + \cos^2(2\pi x),$$

$$E(t) = \frac{1}{2}e^t + 1,$$

$$f(x, t) = -8\pi^2 e^t + 16\pi^2 e^t \cos^2(2\pi x) - t - te^t \cos^2(2\pi x) - 1,$$

جواب دقیق (تحلیلی) به صورت زیر داده می شود:

$$\{u(x, t), r(t)\} = \{1 + e^t \cos^2(2\pi x), 1 + t\},$$

در این مثال، خطای نسبی روش پیشنهادی با خطای نسبی روش فضای هیلبرت هسته بازتولید [۲۲۶] مقایسه شده است. با مشاهده جدول های ۱.۵ و ۲.۵، می بینیم که خطای نسبی جواب تقریبی $u(x, t)$ با استفاده از نقاط شبکه ای منظم نسبت به خطای نسبی روش موجود در [۲۲۶] نتایج بهتری را داده است و خطای نسبی تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه ای چبیشف - گاوس - لوباتو (CGL) از نتایج بدست آمده از تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه ای منظم، بهتر است.

جدول ۱.۵: خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$.

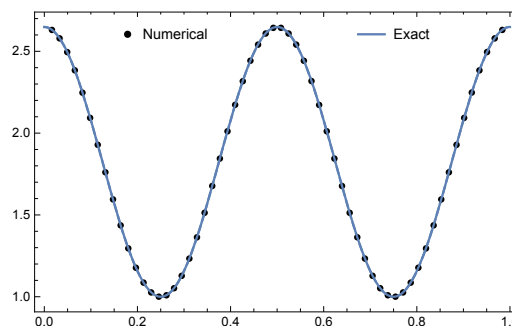
(x, t)	دقیق u	عددی u	روش $RKHS$	a - چندجمله‌ای‌ها
$(1, \frac{1}{1000})$	2.001000	1.990999	$1.254372e - 05$	$4.997859e - 03$
$(\frac{1}{2}, \frac{12}{1000})$	2.012072	2.012559	$8.098069e - 05$	$2.422318e - 04$
$(1, \frac{1}{100})$	2.010050	2.007643	$1.252541e - 04$	$1.197321e - 03$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	1.723344	1.722830	$3.107279e - 04$	$2.980527e - 04$
$(1, \frac{1}{10})$	2.105171	2.104739	$1.756113e - 03$	$2.051458e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$	1.279380	1.278830	$5.345218e - 03$	$4.291483e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{9})$	1.279380	1.278832	$5.345218e - 03$	$4.280929e - 04$
$(1, \frac{1}{8})$	2.133148	2.132737	$2.635284e - 03$	$1.924323e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{8})$	1.283287	1.282724	$5.913283e - 03$	$4.380405e - 04$
$(\frac{7}{8}, \frac{1}{6})$	1.590680	1.590156	$1.938927e - 03$	$3.291381e - 04$
$(1, \frac{1}{6})$	2.181360	2.180950	$4.463001e - 03$	$1.878411e - 04$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$	1.799418	1.798895	$2.587782e - 03$	$2.904718e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{5})$	1.305351	1.304733	$6.505095e - 03$	$4.725092e - 04$
$(\frac{1}{10}, \frac{2}{9})$	1.817382	1.816849	$3.694167e - 03$	$2.933668e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{2}{9})$	1.817382	1.816664	$3.634623e - 03$	$3.948590e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$	1.312212	1.311578	$5.713727e - 03$	$4.831508e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{1}{4})$	1.840405	1.839666	$5.269811e - 03$	$4.017101e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$	1.321006	1.320353	$4.886044e - 03$	$4.941974e - 04$
$(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$	1.321006	1.320461	$5.775571e - 03$	$4.125653e - 04$
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	1	0.999146	$6.996070e - 03$	$8.539304e - 04$
$(\frac{2}{7}, \frac{1}{2})$	1.081637	1.080914	$3.425978e - 03$	$6.684268e - 04$
$(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$	1	0.999151	$5.194440e - 03$	$8.486204e - 04$

همچنین جدول‌های ۳.۵ و ۴.۵ نشان می‌دهند که خطای نسبی تقریب ضریب $r(t)$ با استفاده از روش پیشنهادی از نتایج خطای نسبی [۲۲۶] بهتر است. با مشاهده جدول‌های ۳.۵ و ۴.۵ به وضوح دیده می‌شود که در روش پیشنهادی نقاط شبکه‌ای چیشف-گوس-لوباتو (CGL) خطای نسبی بهتری نسبت به نقاط شبکه‌ای منظم حاصل می‌کنند.

در شکل ۱.۵، نمودار جواب‌های دقیق و عددی این مساله در زمان $T = \frac{1}{2}$ و با استفاده از نقاط شبکه‌ای چیشف-گوس-لوباتو (CGL) و به ازای $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$ رسم شده است. در شکل ۲.۵، قسمت (آ) نمودار خطای نسبی v در زمان $T = \frac{1}{2}$ و به ازای $N = 30$ و $\tau = \frac{1}{1000}$ و در قسمت (ب) نمودار خطای نسبی با همان داده‌های قسمت (آ) با این تفاوت که در $f(x, t)$ و شرط $E(t)$ خطای مصنوعی (نویز) 10^{-2} تولید کردیم، رسم شده‌اند. شکل ۲.۵ نشان می‌دهد که این روش پایدار می‌باشد.

جدول ۲.۵: خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$.

(x, t)	دقیق u	عددی u	روش $RKHS$	a - چندجمله‌ای‌ها
$(1, \frac{1}{1000})$	2.001000	2.000996	$1.254372e - 05$	$2.106716e - 06$
$(\frac{1}{2}, \frac{12}{1000})$	2.012072	2.012005	$8.098069e - 05$	$3.318788e - 05$
$(1, \frac{1}{100})$	2.010050	2.010012	$1.252541e - 04$	$1.898628e - 05$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	1.723344	1.122964	$3.107279e - 04$	$2.200594e - 04$
$(1, \frac{1}{10})$	2.105171	2.104810	$1.756113e - 03$	$1.712410e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$	1.279380	1.279251	$5.345218e - 03$	$1.005594e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{9})$	1.279380	1.279252	$5.345218e - 03$	$9.933721e - 05$
$(1, \frac{1}{8})$	2.133148	2.132712	$2.635284e - 03$	$2.043305e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{8})$	1.283287	1.283128	$5.913283e - 03$	$1.236194e - 04$
$(\frac{7}{8}, \frac{1}{6})$	1.590680	1.590152	$1.938927e - 03$	$3.314801e - 04$
$(1, \frac{1}{6})$	2.181360	2.180820	$4.463001e - 03$	$2.474264e - 04$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$	1.799418	1.798794	$2.587782e - 03$	$3.466885e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{5})$	1.305351	1.305052	$6.505095e - 03$	$2.280638e - 04$
$(\frac{1}{10}, \frac{2}{9})$	1.817382	1.816716	$3.694167e - 03$	$3.664306e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{2}{9})$	1.817382	1.816473	$3.634623e - 03$	$5.001915e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$	1.312212	1.311880	$5.713727e - 03$	$2.524892e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{1}{4})$	1.840405	1.839442	$5.269811e - 03$	$5.231972e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$	1.321006	1.320637	$4.886044e - 03$	$2.793744e - 04$
$(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$	1.321006	1.320408	$5.775571e - 03$	$4.523814e - 04$
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	1	0.999522	$6.996070e - 03$	$4.779452e - 04$
$(\frac{2}{7}, \frac{1}{2})$	1.081637	1.081202	$3.425978e - 03$	$4.016747e - 04$
$(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$	1	0.999520	$5.194440e - 03$	$4.795079e - 04$



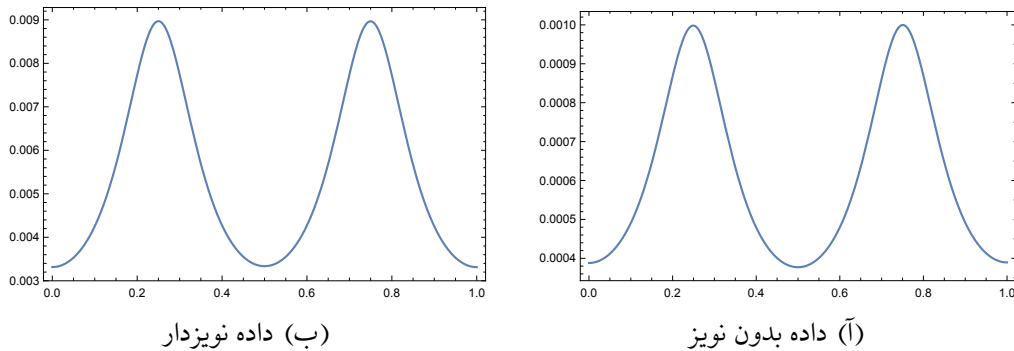
شکل ۱.۵: نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) مثال ۵.۲.۵ به ازای $N = 40$ ، $a = 13.59440$ ، $T = \frac{1}{2}$ و $\tau = \frac{1}{1000}$ در نقاط شبکه‌ای CGL .

جدول ۳.۵: خطای نسبی پارامتر منبع $r(t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$.

t	r دقیق	r عددی	روش $RKHS$	a - چندجمله‌ای‌ها
$\frac{1}{1000}$	1.001000	1.292254	$3.027572e - 05$	$2.909633e - 01$
$\frac{12}{1000}$	1.012000	1.011919	$3.202180e - 04$	$8.035308e - 05$
$\frac{1}{100}$	1.010000	1.010542	$2.774495e - 04$	$5.366620e - 04$
$\frac{1}{10}$	1.100000	1.099358	$5.356182e - 03$	$5.835386e - 04$
$\frac{1}{9}$	1.111111	1.1104521	$5.803190e - 03$	$5.923620e - 04$
$\frac{1}{8}$	1.125000	1.124331	$6.494860e - 03$	$5.940311e - 04$
$\frac{1}{6}$	1.166667	1.165970	$8.344175e - 03$	$5.964303e - 04$
$\frac{1}{5}$	1.200000	1.199274	$9.600923e - 03$	$6.042648e - 04$
$\frac{2}{9}$	1.222222	1.221483	$1.040393e - 02$	$6.041307e - 04$
$\frac{1}{4}$	1.250000	1.249239	$1.134528e - 02$	$6.083429e - 04$

جدول ۴.۵: خطای نسبی پارامتر منبع $r(t)$ برای مثال ۵.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = 13.59440$ ، $N = 40$ و $\tau = \frac{1}{1000}$.

t	r دقیق	r عددی	روش $RKHS$	a - چندجمله‌ای‌ها
$\frac{1}{1000}$	1.001000	1.001377	$3.027572e - 05$	$3.770534e - 04$
$\frac{12}{1000}$	1.012000	1.012015	$3.202180e - 04$	$1.569588e - 05$
$\frac{1}{100}$	1.010000	1.010042	$2.774495e - 04$	$4.236360e - 05$
$\frac{1}{10}$	1.100000	1.099557	$5.356182e - 03$	$4.021124e - 04$
$\frac{1}{9}$	1.111111	1.111404	$5.803190e - 03$	$3.053927e - 04$
$\frac{1}{8}$	1.125000	1.125189	$6.494860e - 03$	$1.683268e - 04$
$\frac{1}{6}$	1.166667	1.166693	$8.344175e - 03$	$7.265121e - 05$
$\frac{1}{5}$	1.200000	1.199995	$9.600923e - 03$	$3.687908e - 06$
$\frac{2}{9}$	1.222222	1.222211	$1.040393e - 02$	$8.834914e - 06$
$\frac{1}{4}$	1.250000	1.249985	$1.134528e - 02$	$1.198785e - 05$



شکل ۲.۵: نمودار خطای نسبی u در مثال ۵.۲.۵ به ازای $N = 30$ ، $\tau = \frac{1}{1000}$ و $T = \frac{1}{2}$ در نقاط شبکه ای CGL.

مثال ۶.۲.۵. [۲۲۶] مساله (۲) را با داده های زیر فرض کنید:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \cos^2(\pi x), \\ E(t) &= \frac{1}{4}e^t, \\ f(x, t) &= -e^t(2\pi^2 + \cos^2(\pi x)(-4\pi^2 + t^2)), \\ x^* &= \frac{1}{3},\end{aligned}$$

جواب دقیق (تحلیلی) به صورت زیر داده شده است:

$$\{u(x, t), p(t)\} = \{e^t \cos^2(\pi x), 1 + t^2\},$$

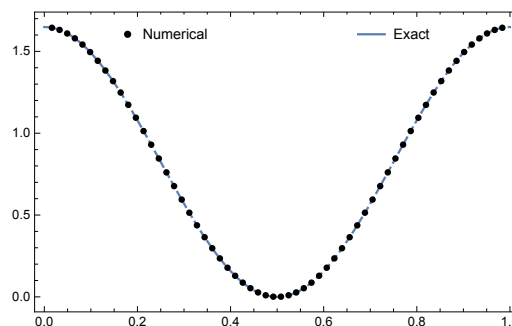
در این مثال نیز، خطای نسبی روش پیشنهادی با خطای نسبی روش فضای هیلبرت هسته بازتولید [۲۲۶] مقایسه شده است. با مشاهده جدول های ۵.۵ و ۶.۵، می بینیم که خطای نسبی جواب تقریبی $u(x, t)$ با استفاده از نقاط شبکه ای منظم نسبت به خطای نسبی [۲۲۶] نتایج بهتری را داده است و خطای نسبی تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) از نتایج بدست آمده از تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه ای منظم، بهتر است.

همچنین جدول های ۷.۵ و ۸.۵ نشان می دهند که خطای نسبی تقریب ضریب $p(t)$ با استفاده از روش پیشنهادی از نتایج خطای نسبی بدست در مقاله [۲۲۶] بهتر است. با مشاهده جدول های ۷.۵ و ۸.۵ به وضوح دیده می شود که در روش پیشنهادی نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) خطای نسبی بهتری نسبت به نقاط شبکه ای منظم حاصل می کنند.

در شکل ۳.۵، نمودار جواب های دقیق و عددی این مساله در زمان $T = \frac{1}{2}$ و با استفاده از نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) و به ازای $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ رسم شده است که نشان دهنده دقت بالای روش پیشنهادی است. در شکل ۴.۵، قسمت (آ) نمودار خطای نسبی v در زمان $T = \frac{1}{2}$ و به ازای $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ که در $f(x, t)$ و شرط $E(t)$ خطای مصنوعی (نویز) 10^{-2} تولید کردیم، و در قسمت (ب) نمودار خطای نسبی با همان داده های قسمت (آ) بدون تولید نویز، رسم شده اند. شکل ۴.۵ نشان می دهد که این روش پایدار است.

جدول ۵.۵: خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$.

(x, t)	دقیق u	عددی u	روش $RKHS$	a - چندجمله‌ای‌ها
$(1, \frac{1}{1000})$	1.001000	1.000998	$3.634763e - 05$	$2.124565e - 06$
$(\frac{1}{2}, \frac{12}{1000})$	0	0.000335	—	—
$(1, \frac{1}{100})$	1.010050	1.009966	$3.669768e - 04$	$8.238902e - 05$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	0.999636	0.999262	$3.743112e - 04$	$3.743112e - 04$
$(1, \frac{1}{10})$	1.105171	1.105114	$3.176440e - 03$	$5.133585e - 05$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$	0.279380	0.279323	$6.915318e - 07$	$2.001190e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{9})$	0.279380	0.279323	$1.003347e - 04$	$2.005758e - 04$
$(1, \frac{1}{8})$	1.133148	1.133090	$3.155529e - 03$	$5.130210e - 05$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{8})$	0.283287	0.283230	$1.438367e - 04$	$2.010074e - 04$
$(\frac{7}{8}, \frac{1}{6})$	1.008354	1.008158	$2.290763e - 03$	$1.945543e - 04$
$(1, \frac{1}{6})$	1.181360	1.181299	$2.431706e - 03$	$5.137710e - 05$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$	1.104769	1.104355	$1.025735e - 03$	$3.741129e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{5})$	0.305351	0.305289	$1.951084e - 04$	$2.017787e - 04$
$(\frac{1}{10}, \frac{2}{9})$	0.112959	0.112917	$1.039568e - 04$	$3.741372e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{2}{9})$	0.119254	0.119191	$5.718319e - 04$	$5.274899e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$	0.312212	0.312149	$1.178045e - 06$	$2.001556e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{1}{4})$	0.122613	0.122548	$4.727312e - 03$	$5.277928e - 04$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$	0.321006	0.320942	$2.740444e - 06$	$2.001663e - 04$
$(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$	0.963019	0.962725	$1.825324e - 03$	$3.043692e - 04$
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	0.824361	0.824242	$3.738026e - 02$	$1.438332e - 04$
$(\frac{2}{7}, \frac{1}{2})$	0.640923	0.640977	$2.668476e - 02$	$8.442645e - 05$
$(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$	0.824361	0.824240	$3.693455e - 02$	$1.452184e - 04$



شکل ۳.۵: نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) مثال ۶.۲.۵ به ازای $N = 15$ ، $a = -0.63627$ ، $T = \frac{1}{2}$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ در نقاط شبکه‌ای CGL .

جدول ۶.۵: خطای نسبی $u(x, t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه ای CGL به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$.

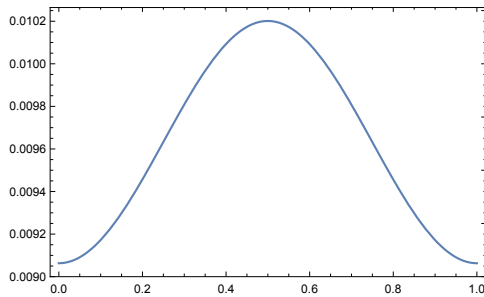
(x, t)	دقیق u	عددی u	روش $RKHS$	a - چندجمله ایها
$(1, \frac{1}{1000})$	1.001000	1.000985	$3.634763e - 05$	$1.537601e - 05$
$(\frac{1}{2}, \frac{12}{1000})$	0	0.002044	—	—
$(1, \frac{1}{100})$	1.010050	1.009953	$3.669768e - 04$	$9.566978e - 05$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$	0.999636	0.999520	$3.743112e - 04$	$1.164640e - 04$
$(1, \frac{1}{10})$	1.105171	1.105114	$3.176440e - 03$	$5.068616e - 05$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$	0.279380	0.279569	$6.915318e - 07$	$6.803728e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{9})$	0.279380	0.279569	$1.003347e - 04$	$6.799966e - 04$
$(1, \frac{1}{8})$	1.133148	1.133091	$3.155529e - 03$	$5.060933e - 05$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{8})$	0.283287	0.283479	$1.438367e - 04$	$6.796107e - 04$
$(\frac{7}{8}, \frac{1}{6})$	1.008354	1.007991	$2.290763e - 03$	$3.594921e - 04$
$(1, \frac{1}{6})$	1.181360	1.181300	$2.431706e - 03$	$5.061205e - 05$
$(\frac{1}{10}, \frac{1}{5})$	1.104769	1.104640	$1.025735e - 03$	$1.161943e - 04$
$(\frac{2}{3}, \frac{1}{5})$	0.305351	0.305557	$1.951084e - 04$	$6.788711e - 04$
$(\frac{1}{10}, \frac{2}{9})$	0.112959	0.1129463	$1.039568e - 04$	$1.162056e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{2}{9})$	0.119254	0.121068	$5.718319e - 04$	$1.521541e - 02$
$(\frac{1}{3}, \frac{2}{9})$	0.312212	0.312424	$1.178045e - 06$	$6.803400e - 04$
$(\frac{3}{5}, \frac{1}{4})$	0.122613	0.124479	$4.727312e - 03$	$1.521627e - 02$
$(\frac{1}{3}, \frac{1}{4})$	0.321006	0.321224	$2.740444e - 06$	$6.803309e - 04$
$(\frac{1}{6}, \frac{1}{4})$	0.963019	0.962939	$1.825324e - 03$	$8.243972e - 05$
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$	0.824361	0.824277	$3.738026e - 02$	$1.003791e - 04$
$(\frac{2}{7}, \frac{1}{2})$	0.640923	0.641493	$2.668476e - 02$	$8.899443e - 04$
$(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$	0.824361	0.824276	$3.693455e - 02$	$1.015589e - 04$

جدول ۷.۵: خطای نسبی پارامتر منبع $p(t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ ، $a = -0.63627$

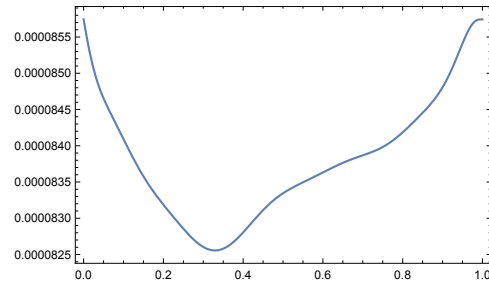
t	$p_{\text{دقیق}}$	$p_{\text{عددی}}$	روش $RKHS$	a - چندجمله‌ای‌ها
$\frac{1}{1000}$	1.000001	0.974267	$1.761649e - 04$	$2.573396e - 02$
$\frac{12}{1000}$	1.000144	1.000137	$1.878036e - 04$	$6.573181e - 06$
$\frac{1}{100}$	1.000100	0.999376	$1.844624e - 04$	$7.235768e - 04$
$\frac{1}{10}$	1.010000	1.010127	$1.126239e - 03$	$1.260774e - 04$
$\frac{1}{9}$	1.012346	1.012479	$2.427768e - 03$	$1.320850e - 04$
$\frac{1}{8}$	1.015625	1.015765	$6.019765e - 03$	$1.380792e - 04$
$\frac{1}{6}$	1.027778	1.027932	$2.323355e - 02$	$1.503308e - 04$
$\frac{1}{5}$	1.040000	1.040165	$3.425239e - 03$	$1.592648e - 04$
$\frac{2}{9}$	1.049383	1.049556	$4.395779e - 02$	$1.652488e - 04$
$\frac{1}{4}$	1.062500	1.062682	$6.325459e - 03$	$1.718720e - 04$

جدول ۸.۵: خطای نسبی پارامتر منبع $p(t)$ برای مثال ۶.۲.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 15$ و $\tau = \frac{1}{5000}$ ، $a = -0.63627$

t	$p_{\text{دقیق}}$	$p_{\text{عددی}}$	روش $RKHS$	a - چندجمله‌ای‌ها
$\frac{1}{1000}$	1.000001	0.973126	$1.761649e - 04$	$2.687455e - 02$
$\frac{12}{1000}$	1.000144	1.000555	$1.878036e - 04$	$4.112742e - 04$
$\frac{1}{100}$	1.000100	0.999809	$1.844624e - 04$	$2.902477e - 04$
$\frac{1}{10}$	1.010000	1.010103	$1.126239e - 03$	$1.023528e - 04$
$\frac{1}{9}$	1.012346	1.012464	$2.427768e - 03$	$1.176213e - 04$
$\frac{1}{8}$	1.015625	1.015738	$6.019765e - 03$	$1.122422e - 04$
$\frac{1}{6}$	1.027778	1.027909	$2.323355e - 02$	$1.277133e - 04$
$\frac{1}{5}$	1.040000	1.040141	$3.425239e - 03$	$1.361278e - 04$
$\frac{2}{9}$	1.049383	1.049530	$4.395779e - 02$	$1.405234e - 04$
$\frac{1}{4}$	1.062500	1.062609	$6.325459e - 03$	$1.030532e - 04$



(ب) داده بدون نویز



(آ) داده نویزدار

شکل ۴.۵: نمودار خطای نسبی u در مثال ۶.۲.۵ به ازای $a = -0.63627$ ، $N = 15$ ، $\tau = \frac{1}{1000}$ و $T = \frac{1}{2}$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

۳.۵ مسایل معکوس سهموی دو بعدی

در این بخش دو نوع مساله معکوس دو بعدی بحث و بررسی می‌شود:

- مساله ۱: در این مساله می‌خواهیم زوجی از توابع $\{v(x, y, t), p(t)\}$ را در معادله سهموی زیر پیدا کنیم:

$$v_t - v_{xx} - v_{yy} = p(t)v + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega = [0, 1]^2 \times [0, T], \quad (11.5)$$

با شرایط اولیه

$$v(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

و شرایط مرزی غیرموضعی

$$\begin{aligned} v(0, y, t) &= g_0(y, t), & (y, t) &\in [0, 1] \times [0, T], \\ v(1, y, t) &= g_1(y, t), & (y, t) &\in [0, 1] \times [0, T], \\ v(x, 0, t) &= h_0(x, t), & (x, t) &\in [0, 1] \times [0, T], \\ v(x, 1, t) &= h_1(x, t), & (x, t) &\in [0, 1] \times [0, T], \end{aligned}$$

شرط اضافی انتگرالی

$$\int_0^1 \int_0^1 v(x, y, t) dx dy = E(t), \quad t \in [0, T],$$

که φ ، g_0 ، g_1 ، h_0 ، h_1 و f توابعی پیوسته و معلوم و p و v توابعی مجهول هستند.

- مساله ۲: در این مساله می‌خواهیم زوجی از توابع $\{v(x, y, t), p(t)\}$ را در معادله سهموی زیر پیدا کنیم:

$$v_t - v_{xx} - v_{yy} = p(t)v + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega = [0, 1]^2 \times [0, T], \quad (12.5)$$

با شرط اولیه

$$v(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

شرایط مرزی غیرموضعی

$$\begin{aligned} v(0, y, t) &= g_0(y, t), \quad (y, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\ v(1, y, t) &= g_1(y, t), \quad (y, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\ v(x, 0, t) &= h_0(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \\ v(x, 1, t) &= h_1(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T], \end{aligned}$$

و شرط اضافی در یک نقطه (x_0, y_0) در دامنه مکان

$$v(x_0, y_0, t) = E(t), \quad (x_0, y_0) \in [0, 1]^2, \quad t \in [0, T],$$

که $\varphi, g_0, g_1, h_0, h_1$ و f توابعی پیوسته و معلوم و p و v توابعی مجهول هستند.

۱.۳.۵ وجود، یکتایی و پایداری جواب

فرض کنید:

$$\begin{aligned} v_t &= Lv + p(t)v + F(x, y, t), \quad Q_T = \{(x, y, t) : (x, y) \in [0, 1]^2, t \in [0, T]\}, \\ v(x, y, 0) &= \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2, \\ v(x, y, t) &= \chi(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial[0, 1]^2 \times (0, T), \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 v(x, y, t) dx dy = E(t), \quad t \in [0, T], \quad (13.5)$$

که عملگر L به صورت زیر می باشد:

$$Lv = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x, y, t) v_{x_i})_{x_j},$$

که در مساله (۲) شرط زیر جایگزین شرط (۱۳.۵) در مساله (۱) می شود:

$$v(x_0, y_0, t) = E(t), \quad (x_0, y_0) \in [0, 1]^2, \quad t \in [0, T],$$

حال فرض کنید:

۱.

$$\varphi \geq 0, \chi \geq 0, F \geq 0, E > 0, 0 < \alpha < 1,$$

$$\varphi \in C^{2+\alpha}([0, 1]^2), \quad \chi \in C^{(2+\alpha)/2}(\partial[0, 1]^2 \times [0, T]),$$

$$E \in C^{1+\alpha/2}([0, T]),$$

۲. F تابعی هموار است و $|F(x, y, t, v)| \leq c(1 + |v|)$ که c عددی ثابت است.

۳.

$$a_{ij}, a_{ijx_k} \in C^\alpha(\bar{Q}_T),$$

$$a_0|y|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_iy_j \leq A_0|y|^2, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad a_0, A_0 > 0,$$

قضیه ۱.۳.۵. [۷۳] با توجه به فرض های بالا، مسایل معکوس (۱) و (۲) دارای جوابی یکتا بوده و جواب (v, a) وابستگی پیوسته به داده های مسئله دارد (پایداری جواب).

۲.۳.۵ پیاده سازی روش

در این مسایل برای حذف جمله $p(t)v$ از تبدیل زیر استفاده می کنیم:

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) \exp\left\{-\int_0^t p(\zeta) d\zeta\right\},$$

$$r(t) = \exp\left\{-\int_0^t p(\zeta) d\zeta\right\},$$

$$v = v(x, y, t) = u(x, y, t) \exp\left\{\int_0^t p(\zeta) d\zeta\right\},$$

$(v, p) \rightarrow (u, r)$ ، که نتیجه می دهد:

● مسأله ۱:

$$u_t = Lu + r(t)F(x, y, t),$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

$$u(x, y, t) = \chi(x, y, t)r(t), \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \times [0, T],$$

$$r(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) dx dy}{E(t)}, \quad t \in [0, T],$$
(۱۴.۵)

● مسأله ۲:

$$u_t = Lu + r(t)F(x, y, t),$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

$$u(x, y, t) = \chi(x, y, t)r(t), \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \times [0, T],$$

$$r(t) = \frac{u(x_0, y_0, t)}{E(t)}, \quad t \in [0, T],$$
(۱۵.۵)

در این بخش نیز مانند بخش قبل ابتدا گسسته سازی روی بازه زمانی مساله انجام می دهیم. سپس در هر نقطه t_k تابع جواب بوسیله مجموع a - چندجمله ای های معرفی شده در بخش ۳.۱ تقریب زده می شود. این تقریب با شبکه بندی نقاط بازه مکانی در نقطه t_k بدست می آید به عبارتی دیگر در هر نقطه t_k یک دستگاه معادله غیرخطی با روش هم محلی بدست می آید که با حل آن دستگاه ضرایب مجهول در سری جواب تقریبی، بدست می آیند. در پایان، با درونیابی نقاط $(x_i, y_j, t_k, u(x_i, y_j, t_k))$ بوسیله چندجمله ای های B - اسپلاین مکعبی، جواب تقریبی مساله در بازه $\Omega = (0, 1)^2 \times [0, T]$ بدست می آید.

۱.۲.۳.۵ گسسته سازی زمانی

برای گسسته سازی بازه زمانی $[0, T]$ ، فرض کنید:

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M,$$

که $\tau = \frac{T}{M}$ ، زمان پایانی متغیر t می باشد. با استفاده از روش تفاضل متناهی پیشرو، برای گسسته سازی مسایل (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} - \frac{u_{xx}^{k+1} + u_{xx}^k}{2} - \frac{u_{yy}^{k+1} + u_{yy}^k}{2} = r^k f^{k+\frac{1}{2}},$$

که $u^{k+1} = u(X, Y, t_{k+1})$ و $f^{k+\frac{1}{2}} = \frac{f^k + f^{k+1}}{2}$ ، $r^k = r(t_k)$ با ساده و خلاصه کردن عبارت بالا خواهیم داشت:

$$2u^{k+1} - \tau(u_{xx}^{k+1} + u_{yy}^{k+1}) = 2u^k + \tau(u_{xx}^k + u_{yy}^k) + 2\tau r^k f^{k+\frac{1}{2}}, \quad (۱۶.۵)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, M,$$

- مساله ۱: بعد از انتگرال گیری از دو طرف (۱۱.۵) و سپس اعمال شرط اضافه انتگرالی، پارامتر $r(t)$ به صورت زیر حاصل می شود:

$$r(t) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) dx dy}{E(t)},$$

علاوه بر (۱۶.۵)، برای هر نقطه t_k معادلات زیر را نیز خواهیم داشت:

$$u^0 = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

$$u^k(x, y) = \chi(x, y, t_k) r(t_k), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

$$r^k = r(t_k) = \frac{\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t_k) dx dy}{E(t_k)},$$

که به ازای هر نقطه t_k ، یک دستگاه معادلات غیرخطی بدست می آید.

- مساله ۲: طبق (۱۵.۵) و (۱۲.۵) برای هر نقطه t_k خواهیم داشت:

$$u^0 = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

$$u^k(x, y) = \chi(x, y, t_k) r(t_k), \quad (x, y) \in [0, 1]^2,$$

$$r^k = r(t_k) = \frac{u(x_0, y_0, t_k)}{E(t_k)},$$

که به ازای هر نقطه t_k ، یک دستگاه معادلات غیرخطی بدست می آید.

۲.۲.۳.۵ اجرای روش

برای اجرای روش پیشنهادی ابتدا u^{j+1} به صورت زیر نوشته می شود:

$$u^{j+1} \cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A_l(x) A_m(y). \quad (17.5)$$

مشتقات مراتب بالاتر تقریب بالا نسبت به x و y به صورت زیر می باشد:

$$u_x^{j+1} \cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A'_l(x) A_m(y),$$

$$u_{xx}^{j+1} \cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A''_l(x) A_m(y),$$

$$u_y^{j+1} \cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A_l(x) A'_m(y),$$

$$u_{yy}^{j+1} \cong \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^N c_{lm}^{j+1} A_l(x) A''_m(y),$$

با جایگزینی این معادلات در مسایل (۱) و (۲) برای هر t_k و گسسته سازی دامنه مکانی $(0,1)^2$ و شرایط اولیه و اضافی این مسایل، یک دستگاه معادلات غیرخطی با $(N+1)^2 + 1$ معادله و $(N+1)^2 + 1$ مجهول c_{lm}^{j+1} ، $l, m = 0, 1, 2, \dots, N$ و پارامتر مجهول a ، بدست می آید. برای حل این دستگاه معادلات غیرخطی، نرم L_2 مجموع مربعات مانده ها را به روش کمترین مربعات مینیمم می کنیم. در این مسایل نیز مانند فصل های قبل ابتدا پارامتر a را بدست آورده و در $a -$ چندجمله ای ها قرار می دهیم و سپس با این چندجمله ای ها روش را تکرار می کنیم با یک مجهول (a) کمتر. بعد از بدست آوردن تقریب تابع در هر زمان t_k ، با درونیابی نقاط $(x_i, y_j, t_k, u(x_i, y_j, t_k))$ بوسیله چندجمله ای های B - اسپلاین مکعبی، جواب تقریبی مساله در بازه $\Omega = (0,1)^2 \times [0, T]$ بدست می آید.

۳.۳.۵ نتایج عددی

برای ارایه حل عددی از دو نوع نقاط شبکه ای منظم و چیشف - گاوس - لوباتو (CGL) که در بخش ۴.۱ تعریف شد، استفاده می کنیم. در این بخش دو مثال، یک مثال از مساله (۱) و یک مثال از مساله (۲)، برای بررسی نتایج عددی انتخاب شده اند.

مثال ۲.۳.۵. فرض کنید مساله (۱) به صورت زیر داده شده باشد:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, t) &= \left(\frac{5\pi^2}{16} - 5t\right)e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right), \\ g_0(0, y, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \\ g_1(1, y, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(1 + 2y)\right), \\ h_0(x, 0, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), \\ h_1(x, 1, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2)\right), \\ E(t) &= \frac{8}{\pi^2} e^t, \\ f(x, y) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right),\end{aligned}$$

جواب دقیق (تحلیلی) این مساله به صورت زیر می باشد:

$$\{w(x, y, t), p(t)\} = \left\{e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right), 1 + 5t\right\},$$

در این مثال، خطای مطلق روش پیشنهادی با خطای مطلق روش $FTCS(1, 9)$ موجود در مقاله [۱۰۰] مقایسه شده است. در همه جدول های این مثال ستون آخر، نتایج روش پیشنهادی را با خطای مصنوعی (نویز) 10^{-2} در تابع f نمایش می دهد.

با مشاهده جدول های ۹.۵ و ۱۰.۵، می بینیم که خطای مطلق جواب تقریبی $p(t)$ با استفاده از نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) نسبت به خطای مطلق [۱۰۰] نتایج بهتری را حاصل کرده است و خطای مطلق تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) از نتایج بدست آمده از تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه ای منظم، بهتر است. همچنین نتایج ستون آخر پایداری روش پیشنهادی را نشان می دهد.

جدول های ۱۱.۵ و ۱۲.۵ نشان می دهند که خطای مطلق تقریب $u(x, y)$ با استفاده از روش پیشنهادی از نتایج خطای مطلق بدست آمده در مقاله [۱۰۰] بهتر است. با مشاهده جدول های ۱۱.۵ و ۱۲.۵ به وضوح دیده می شود که در روش پیشنهادی نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) خطای مطلق بهتری نسبت به نقاط شبکه ای منظم حاصل می کنند و نتایج ستون آخر پایداری روش پیشنهادی را نشان می دهد.

همه نمودارهای موجود در شکل های این مثال به ازای $N = 5$ ، $T = 1$ ، $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ و $\tau = 0.0005$ در نقاط شبکه ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) نمایش داده شده اند. در شکل ۵.۵، نمودار جواب های دقیق و عددی پارامتر کنترل $p(t)$ در دو حالت بدون نویز و نویزدار نمایش داده شده است که پایداری جواب را برای این مساله نشان می دهد. شکل ۶.۵، نمودار جواب های دقیق و عددی این مساله را نمایش می دهد. نمودار جواب عددی این مساله در دو حالت بدون نویز و نویزدار در شکل ۷.۵ مشاهده می شود که باز هم پایداری این روش را نشان می دهد. در شکل ۸.۵ نیز نمودار سطح تراز خطای مطلق $u(x, y)$ در دو حالت بدون نویز و نویزدار نمایش داده شده است که نشان از دقت بالا و پایداری روش پیشنهادی دارد. در این شکل فاصله بین دو تراز به عنوان خطای مطلق جواب شناخته می شود بنابراین مشاهده می شود که در دو حالت نویزدار و بدون نویز خطای مطلق به یکدیگر نزدیک هستند.

جدول ۹.۵: خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0005$.

t	روش $FTCS(1,9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ای‌ها با نویز
0.1	$7.8e-04$	$1.63775e-04$	$2.47881e-02$
0.2	$7.6e-04$	$4.92752e-05$	$4.31753e-03$
0.3	$7.5e-04$	$1.39452e-05$	$7.88542e-04$
0.4	$7.3e-04$	$6.91637e-05$	$2.05503e-04$
0.5	$7.0e-04$	$6.89632e-05$	$1.24470e-04$
0.6	$6.9e-04$	$1.63994e-04$	$1.74604e-04$
0.7	$6.5e-04$	$2.31303e-04$	$2.33300e-04$
0.8	$6.7e-04$	$2.92222e-04$	$2.92603e-04$
0.9	$6.9e-04$	$3.52198e-04$	$3.52272e-04$
1.0	$6.5e-04$	$4.13071e-04$	$4.13085e-04$

جدول ۱۰.۵: خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = -3.1512 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0005$.

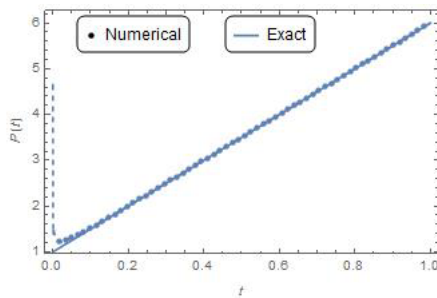
t	روش $FTCS(1,9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ای‌ها با نویز
0.1	$7.8e-04$	$6.74683e-05$	$2.52819e-02$
0.2	$7.6e-04$	$1.69208e-05$	$4.35818e-03$
0.3	$7.5e-04$	$2.10545e-05$	$7.95207e-04$
0.4	$7.3e-04$	$6.80101e-05$	$2.06179e-04$
0.5	$7.0e-04$	$1.21761e-04$	$1.46781e-04$
0.6	$6.9e-04$	$1.77630e-04$	$1.82226e-04$
0.7	$6.5e-04$	$2.34915e-04$	$2.35771e-04$
0.8	$6.7e-04$	$2.93410e-04$	$2.93572e-04$
0.9	$6.9e-04$	$3.53126e-04$	$3.53157e-04$
1.0	$6.5e-04$	$4.14122e-04$	$4.14129e-04$

جدول ۱۱.۵: خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0005$.

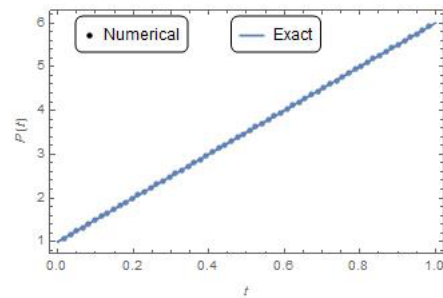
(x, y)	روش $FTCS(1, 9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ایها با نویز
(0.1, 0.1)	$3.8e - 04$	$1.87343e - 06$	$1.87344e - 06$
(0.2, 0.2)	$3.6e - 04$	$4.11858e - 06$	$4.11852e - 06$
(0.3, 0.3)	$3.5e - 04$	$9.80984e - 06$	$9.80974e - 06$
(0.4, 0.4)	$3.4e - 04$	$9.97414e - 06$	$9.97400e - 06$
(0.5, 0.5)	$3.3e - 04$	$1.37279e - 05$	$1.37278e - 05$
(0.6, 0.6)	$3.2e - 04$	$1.98700e - 05$	$1.98698e - 05$
(0.7, 0.7)	$3.7e - 04$	$1.76888e - 05$	$1.76887e - 05$
(0.8, 0.8)	$3.2e - 04$	$8.28951e - 06$	$8.28946e - 06$
(0.9, 0.9)	$3.0e - 04$	$3.59068e - 06$	$3.59066e - 06$

جدول ۱۲.۵: خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۲.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = -3.1512 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0005$.

(x, y)	روش $FTCS(1, 9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ای‌ها با نویز
(0.1, 0.1)	$3.8e - 04$	$5.34879e - 06$	$5.34879e - 06$
(0.2, 0.2)	$3.6e - 04$	$2.19912e - 06$	$2.19910e - 06$
(0.3, 0.3)	$3.5e - 04$	$1.19730e - 05$	$1.19729e - 05$
(0.4, 0.4)	$3.4e - 04$	$1.53551e - 05$	$1.53551e - 05$
(0.5, 0.5)	$3.3e - 04$	$1.79834e - 05$	$1.79833e - 05$
(0.6, 0.6)	$3.2e - 04$	$1.92278e - 05$	$1.92277e - 05$
(0.7, 0.7)	$3.7e - 04$	$1.54533e - 05$	$1.54532e - 05$
(0.8, 0.8)	$3.2e - 04$	$1.35557e - 05$	$1.35557e - 05$
(0.9, 0.9)	$3.0e - 04$	$1.46026e - 05$	$1.46026e - 05$

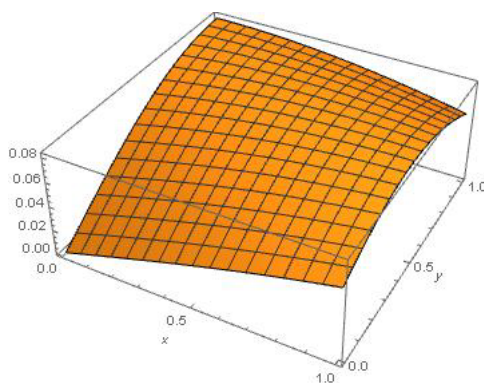


(ب) داده نویزدار

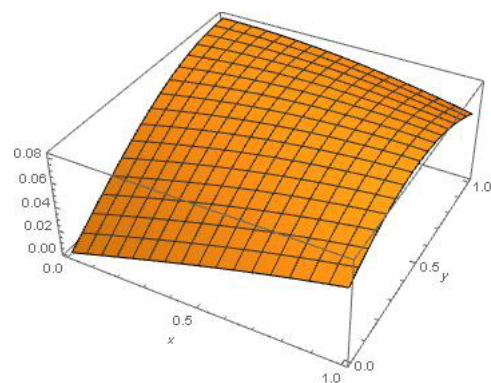


(آ) داده بدون نویز

شکل ۵.۵: نمودار جواب‌های دقیق و عددی در $p(t)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ، $N = 5$ ، $T = 1$ و $\tau = 0.0005$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

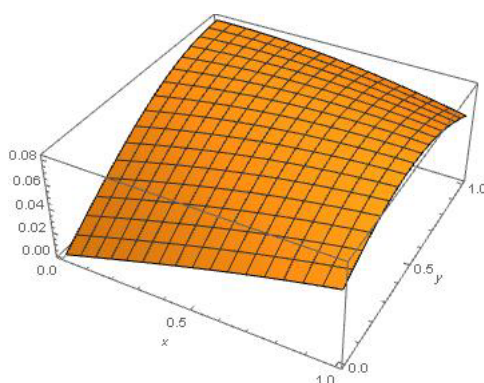


(ب) جواب عددی

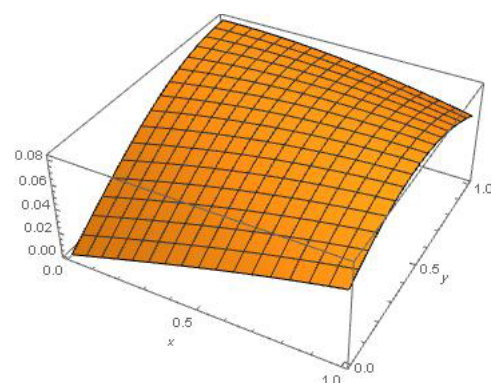


(آ) جواب دقیق

شکل ۶.۵: نمودار جواب‌های دقیق و عددی در $u(x, y)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ، $N = 5$ ، $T = 1$ و $\tau = 0.0005$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

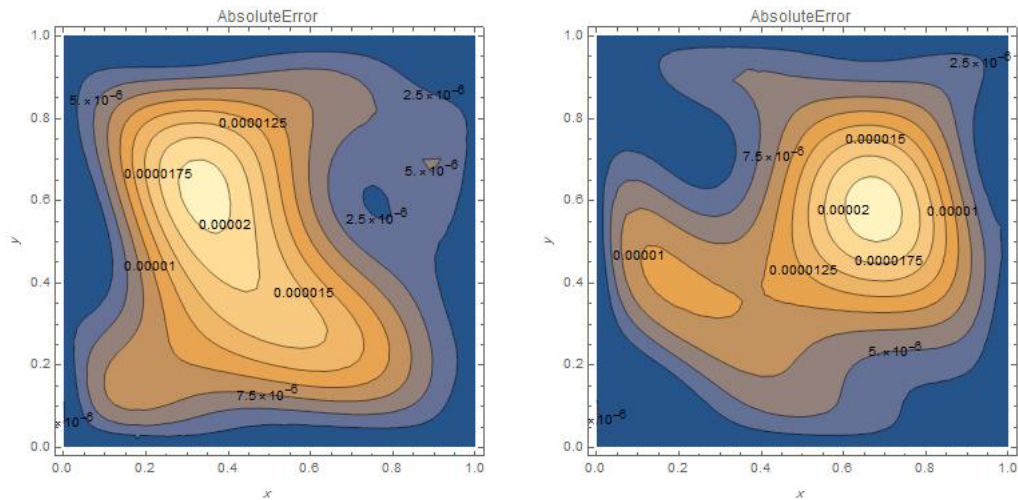


(ب) داده نویزدار



(آ) داده بدون نویز

شکل ۷.۵: نمودار جواب‌های عددی در $u(x, y)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ و $\tau = 0.0005$ در نقاط شبکه‌ای CGL.



(ب) داده نویزدار

(آ) داده بدون نویز

شکل ۸.۵: نمودار سطح تراز خطای مطلق $u(x, y)$ در مثال ۲.۳.۵ به ازای $a = -3.4341 \times 10^{-4}$ ، $N = 5$ ، $T = 1$ و $\tau = 0.0005$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

مثال ۳.۳.۵. فرض کنید مساله (۲) به صورت زیر داده شده باشد:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, t) &= \left(\frac{5\pi^2}{16} - 5t\right)e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right), \\ g_0(0, y, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right), \\ g_1(1, y, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(1 + 2y)\right), \\ h_0(x, 0, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right), \\ h_1(x, 1, t) &= e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2)\right), \\ E(t) &= e^t \sin(0.2\pi), \\ f(x, y) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right),\end{aligned}$$

جواب دقیق (تحلیلی) این مساله به صورت زیر می‌باشد:

$$\{w(x, y, t), p(t)\} = \left\{e^t \sin\left(\frac{\pi}{4}(x + 2y)\right), 1 + 5t\right\},$$

در این مثال، خطای مطلق روش پیشنهادی با خطای مطلق روش $FTCS(9, 9)$ موجود در مقاله [۱۰۱] مقایسه شده است. در همه جدول‌های این مثال، ستون آخر، نتایج روش حاضر را با خطای مصنوعی (نویز) 10^{-2} در تابع f نمایش می‌دهد.

با مشاهده جدول‌های ۱۳.۵ و ۱۴.۵، می‌بینیم که خطای مطلق جواب تقریبی $p(t)$ با استفاده از نقاط شبکه‌ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) نسبت به خطای مطلق [۱۰۱] نتایج بهتری را داده است و خطای مطلق تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه‌ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) از نتایج بدست آمده از تقریب جواب با استفاده از نقاط شبکه‌ای منظم، بهتر است. همچنین نتایج ستون آخر پایداری روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

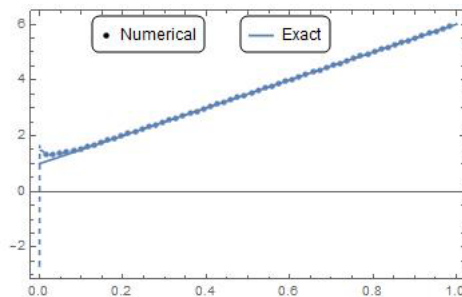
جدول‌های ۱۵.۵ و ۱۶.۵ نشان می‌دهند که خطای مطلق تقریب $u(x, y)$ با استفاده از روش پیشنهادی از نتایج خطای مطلق بدست آمده در مقاله [۱۰۱] بهتر است. با مشاهده جدول‌های

جدول ۱۳.۵: خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0002$.

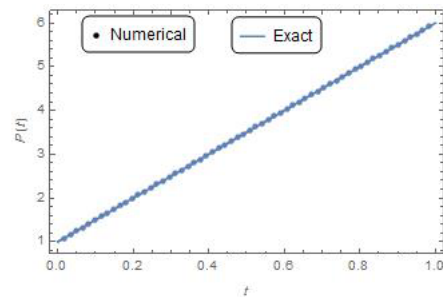
t	روش $FTCS(9,9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ای‌ها با نویز
0.1	$2.1e-05$	$1.46409e-04$	$4.92584e-02$
0.2	$2.3e-05$	$3.47002e-05$	$1.00857e-02$
0.3	$2.4e-05$	$1.76180e-05$	$2.06723e-03$
0.4	$2.5e-05$	$5.71086e-05$	$4.66622e-04$
0.5	$2.6e-05$	$9.36641e-05$	$1.74350e-04$
0.6	$2.6e-05$	$1.29301e-04$	$1.44968e-04$
0.7	$2.4e-05$	$1.64419e-04$	$1.67415e-04$
0.8	$2.3e-05$	$1.99088e-04$	$1.99652e-04$
0.9	$2.3e-05$	$2.33313e-04$	$2.33417e-04$
1.0	$2.2e-05$	$2.67086e-04$	$2.67105e-04$

۱۵.۵ و ۱۶.۵ به وضوح دیده می‌شود که در روش پیشنهادی نقاط شبکه‌ای چبیشف-گاوس-لوباتو (CGL) خطای مطلق بهتری نسبت به نقاط شبکه‌ای منظم حاصل می‌کنند و نتایج ستون آخر پایداری روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

همه نمودارهای موجود در شکل‌های این مثال به ازای $N = 5$ ، $T = 1$ ، $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ و $\tau = 0.0002$ در نقاط شبکه‌ای چبیشف-گاوس-لوباتو (CGL) نمایش داده شده‌اند. در شکل ۹.۵، نمودار جواب‌های دقیق و عددی پارامتر کنترل $p(t)$ در دو حالت بدون نویز و نویزدار نمایش داده شده است که پایداری جواب را برای این مساله نشان می‌دهد. شکل ۱۰.۵، نمودار جواب‌های دقیق و عددی این مساله را نمایش می‌دهد که دقت بالای تقریب روش پیشنهادی را نمایان می‌کند. نمودار جواب عددی این مساله در دو حالت بدون نویز و نویزدار در شکل ۱۱.۵ مشاهده می‌شود که باز هم پایداری این روش را نشان می‌دهد. در شکل ۱۲.۵ نیز نمودار سطح تراز خطای مطلق $u(x, y)$ در دو حالت بدون نویز و نویزدار نمایش داده شده است که نشان از دقت بالا و پایداری روش پیشنهادی دارد.



(ب) داده نویزدار



(آ) داده بدون نویز

شکل ۹.۵: نمودار جواب‌های دقیق و عددی $p(t)$ در مثال ۳.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ و $N = 5$ در نقاط شبکه‌ای CGL .

جدول ۱۴.۵: خطای مطلق پارامتر کنترل $p(t)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0002$.

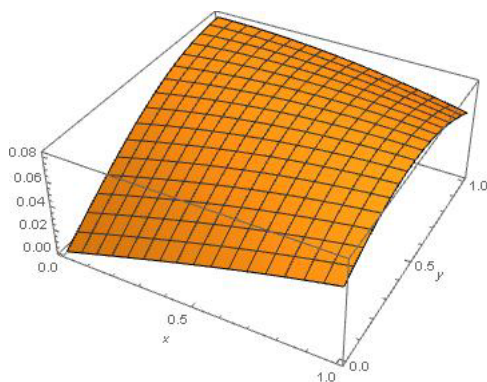
t	روش $FTCS(9, 9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ای‌ها با نویز
0.1	$2.1e - 05$	$8.79941e - 05$	$5.02518e - 02$
0.2	$2.3e - 05$	$2.93465e - 06$	$1.02132e - 02$
0.3	$2.4e - 05$	$7.60471e - 06$	$2.06522e - 03$
0.4	$2.5e - 05$	$3.86712e - 05$	$4.47073e - 04$
0.5	$2.6e - 05$	$7.35956e - 05$	$1.53445e - 04$
0.6	$2.6e - 05$	$1.08973e - 04$	$1.24341e - 04$
0.7	$2.4e - 05$	$1.44109e - 04$	$1.47018e - 04$
0.8	$2.3e - 05$	$1.78853e - 04$	$1.79394e - 04$
0.9	$2.3e - 05$	$2.13163e - 04$	$2.13262e - 04$
1.0	$2.2e - 05$	$2.47019e - 04$	$2.47036e - 04$

جدول ۱۵.۵: خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ، $T = 1$ ، $N = 5$ و $\tau = 0.0002$.

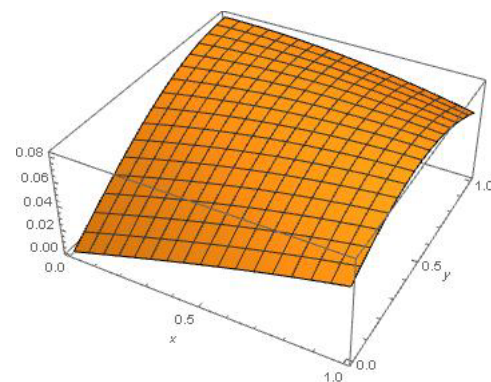
(x, y)	روش $FTCS(9, 9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ای‌ها با نویز
(0.1, 0.1)	$7.5e - 06$	$2.32376e - 07$	$2.32367e - 07$
(0.2, 0.2)	$7.4e - 06$	$6.93914e - 07$	$6.93881e - 07$
(0.3, 0.3)	$7.5e - 06$	$3.11295e - 06$	$3.11289e - 06$
(0.4, 0.4)	$7.8e - 06$	$6.16557e - 06$	$6.16549e - 06$
(0.5, 0.5)	$7.9e - 06$	$7.75301e - 06$	$7.75292e - 06$
(0.6, 0.6)	$7.6e - 06$	$6.72182e - 06$	$6.72174e - 06$
(0.7, 0.7)	$7.8e - 06$	$3.76836e - 06$	$3.76830e - 06$
(0.8, 0.8)	$7.7e - 06$	$1.09950e - 06$	$1.09947e - 06$
(0.9, 0.9)	$8.0e - 06$	$5.51475e - 07$	$5.51468e - 07$

جدول ۱۶.۵: خطای مطلق $u(x, y)$ برای مثال ۳.۳.۵ در نقاط شبکه‌ای منظم به ازای $T = 1$ ، $N = 5$ ، $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ و $\tau = 0.0002$.

(x, y)	روش $FTCS(9, 9)$	روش a -چندجمله‌ای‌ها	روش a -چندجمله‌ای‌ها با نویز
(0.1, 0.1)	$7.5e - 06$	$2.97402e - 06$	$2.97401e - 06$
(0.2, 0.2)	$7.4e - 06$	$4.56481e - 06$	$4.56478e - 06$
(0.3, 0.3)	$7.5e - 06$	$6.09955e - 06$	$6.09949e - 06$
(0.4, 0.4)	$7.8e - 06$	$7.74896e - 06$	$7.74888e - 06$
(0.5, 0.5)	$7.9e - 06$	$8.70313e - 06$	$8.70304e - 06$
(0.6, 0.6)	$7.6e - 06$	$8.38167e - 06$	$8.38159e - 06$
(0.7, 0.7)	$7.8e - 06$	$7.18318e - 06$	$7.18313e - 06$
(0.8, 0.8)	$7.7e - 06$	$5.92508e - 06$	$5.92505e - 06$
(0.9, 0.9)	$8.0e - 06$	$4.29058e - 06$	$4.29057e - 06$

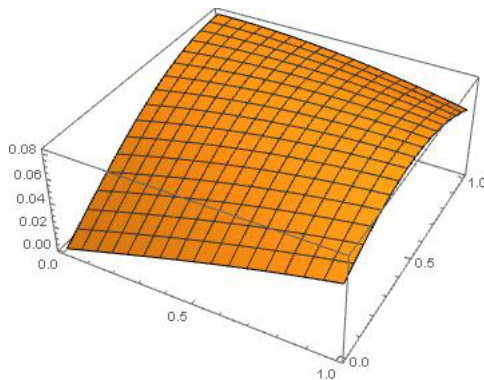


(ب) جواب عددی

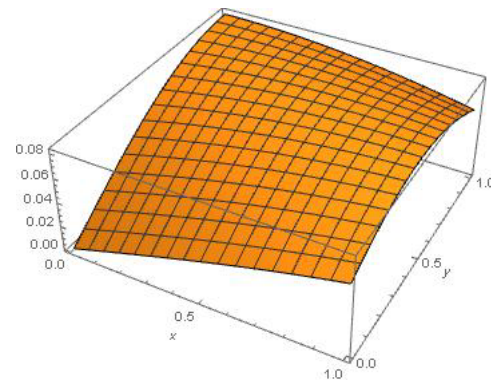


(آ) جواب دقیق

شکل ۱۰.۵: نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, y)$ در مثال ۳.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ، $N = 5$ ، $T = 1$ و $\tau = 0.0002$ در نقاط شبکه‌ای CGL .

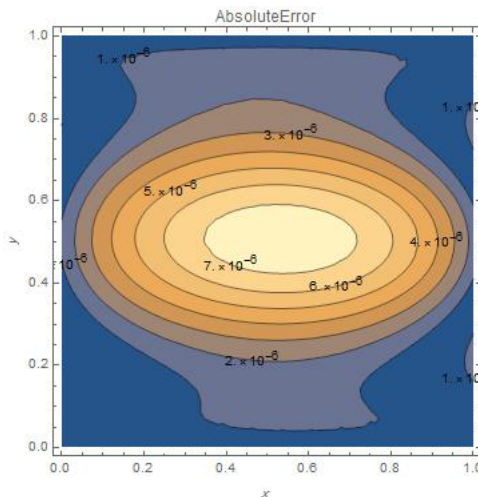


(ب) داده نویزدار

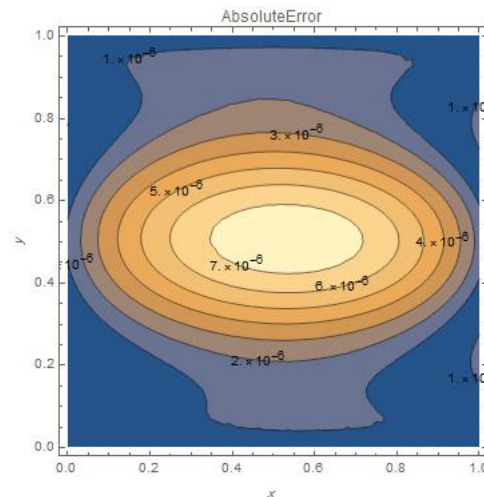


(آ) داده بدون نویز

شکل ۱۱.۵: نمودار جواب‌های عددی $u(x,y)$ در مثال ۳.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ، $\tau = 0.0002$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.



(ب) داده نویزدار



(آ) داده بدون نویز

شکل ۱۲.۵: نمودار سطح تراز خطای مطلق $u(x,y)$ در مثال ۳.۳.۵ به ازای $a = -3.1723 \times 10^{-4}$ ، $\tau = 0.0002$ و $N = 5$ ، $T = 1$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

۴.۵ نتیجه‌گیری

در این فصل حل عددی مسایل معکوس سهموی در ابعاد یک بعدی و دو بعدی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفت. در حل عددی مساله معکوس سهموی یک بعدی برای بدست آوردن جواب معادله و پارامتر منبع، نتایج بدست آمده در مقایسه با روش RHKS، خطای کمتری را نشان می‌دهد. همچنین پایداری روش نیز برتری روش a -چندجمله‌ای‌ها را دوچندان می‌کند. با توجه به ناپایداری جواب‌های عددی مسایل معکوس، با ایجاد نویز نیز همچنان دقت جواب‌های عددی حفظ می‌شود. در حل معادلات سهموی دو بعدی نیز نتایج مانند حالت یک بعدی قابل قبول و بلکه بهتر می‌باشد. در این حالت نیز ایجاد نویز و اختلال در داده‌های مساله، در نتایج خطا تغییر



محسوسی ایجاد نکرد. با مشاهده شکل‌های جواب در دو حالت نویزدار و بدون نویز نیز این ادعا ثابت می‌شود.

فصل ۶

حل عددی معادلات دیفرانسیلی مرتبه کسری

۱.۶ مقدمه

حساب کسری اغلب به عنوان شاخه‌ای از آنالیز ریاضی در نظر گرفته می‌شود که با معادلات انتگرو-دیفرانسیل سروکار دارد. این شاخه از ریاضیات تاریخچه‌ای تقریباً ۳۰۰ ساله دارد که می‌توان مبدأ آن را نامه هوپیتال^۱ به لایب نیتس^۲ دانست که در آن نامه از لایب نیتس در مورد مشتق مرتبه غیرصحیح $\frac{1}{2}$ پرسیده بود. برای اولین بار در سال ۲۰۰۲ میلادی پودلبنی در مقاله [۲۸۰] یک تعبیر هندسی و فیزیکی از انتگرال و مشتق کسری ارائه داد که برای مشاهده جزئیات آن می‌توانید به این مقاله مراجعه کنید.

کاربردهای فراوانی از حساب کسری در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی، فیزیک، پزشکی و ... شناخته شده و به کار رفته است که از آن جمله می‌توان به فعالیت‌های زیر اشاره کرد:

بیان خواص ریولوژیکی پلیمرها [۳۸، ۱۱۷، ۲۱۳]، پدیده‌های میرا در فوم‌های پلی‌اورتان با چگالی بالا [۳۲۴]، دینامیک راکتور هسته‌ای [۲۹۶]، گرما کشسانی^۳ [۲۸۲]، ارتعاشات مکانیکی [۱۰۹]، بافت‌های زیست‌شناختی^۴ [۷۱، ۲۱۱]، انتشار کسری و پوشش الکترولیتی کسری [۲۸۳، ۶۳]، توصیف ساختار فراکتالی پوشش الکترولیتی در انتشار کسری [۴۹]، پردازش سیگنال [۳۱۸]، واپاشی هسته‌ای، رشد جمعیت، نوسانگر هارمونیک کسری^۵، مدار الکتریکی RLC [۱۰۸]، حل معادلات انتگرالی [۲۰۲]، مدل انتشار امواج فراصوت در استخوان اسفنجی انسان [۳۱۳]، مدل‌سازی سیگنال‌های گفتار [۳۷]، مکانیک سیالات [۱۸۸]، مدل زیستی جمعیت [۲۲۷]، مدل‌سازی ایدز [۲۸، ۱۱۱، ۳۰]، مدل همه‌گیری ابولا [۲۹]، مدل‌سازی تومور سرطانی [۲۹۸، ۱۶۳]، طیف‌سنجی امپدانس الکتریکی^۶ [۲۰۹]، بازسازی استخوان در حضور متاستازها [۲۴۳]، مدل‌سازی عضلات اسکلتی [۲۱۹]، مدل‌سازی گسترش ویروس‌های کامپیوتری در کامپیوتر [۲۷۹]، مدل‌سازی سیستم

¹G. L'Hopital

²G.W. Leibniz

³Thermoelasticity

⁴Biological Tissues

⁵Fractional Harmonic Oscillator

⁶Electrical Impedance Spectroscopy

دینامیک آشوبناک ال نینو^۷ [۳۰۹]، مدل سازی گسترش بیماری کوری رودخانه [۴۰]، مدل سازی غیرخطی روابط بین فردی^۸ [۲۶۲، ۱۸۴]، مدل کسری برای تب خونریزی کننده لاسا [۳۹]، نانو تکنولوژی [۴۷]، اکترومغناطیس [۱۲۴]، انتشار شعله های کروی [۲۲۰]، مدل های دیفرانسیل کسری کوانتومی [۳۶۲، ۳۱۲].

روش های تحلیلی و عددی زیادی برای حل معادلات دیفرانسیلی کسری بکار رفته است که از آن جمله می توان به روش های زیر اشاره کرد:

روش تکراری تغییرات [۲۹۶، ۱۱۷]، روش گالرکین [۳۴۱، ۳۲۳، ۲۲۱]، روش کمترین مربعات، روش اویلر، روش رانگ- کوتا [۲۲۱]، روش تجزیه آدومیان [۱۷۴، ۲۳۱، ۲۹۶]، روش شبکه عصبی [۲۶، ۱۷۱، ۲۶۵]، روش هسته بازتولیدی [۳۱، ۲۰۱]، روش بدون شبکه [۴۸]، روش سری های نمایی [۳۵۲]، روش تفاضل متناهی [۱۰۳، ۲۶۱، ۲۹۶، ۳۴۱، ۷۰]، روش تحلیلی هموتویی [۲۹۶]، موجک برنولی مرتبه کسری [۲۸۸، ۲۸۹]، روش هم محلی چبیشف [۱۷۹، ۱۷۸، ۳۳۱]، روش تبدیل لاپلاس [۱۷۵]، روش تبدیل دیفرانسیل [۱۲۸]، ماتریس عملگر لژاندر [۳۰۲]، موجک CAS^۹ [۳۰۶]، چندجمله ای های برنشتاین^{۱۰} [۲۲۳، ۳۶]، روش عضو طیفی [۱۰۴]، روش عضو طیفی پتروف- گالرکین [۱۸۲]، روش شبه طیفی^{۱۱} [۱۲۰]، روش طیفی [۳۵۹، ۸۹، ۱۱۶]، چندجمله ای های چبیشف نوع سوم [۳۴۸]، موجک چبیشف [۲۲۹]، روش عضو متناهی [۷۰]، [۱۰۳، ۳۶۳]، روش تابع گویای نمایی [۲۲۸، ۲۰]، موجک لاگر [۱۶۱، ۳۱۹]، چندجمله ای های لژاندر مرتبه کسری [۳۰۴]، چندجمله ای های ژاکوبی [۳۲۲، ۲۳۴، ۵۳، ۱۸]، روش هموتویی لاپلاس معکوس [۳۴۹]، روش اسپلاین [۳۵۱]، چندجمله ای های بوبیکر [۲۸۶].

انواع مختلفی از مشتقات و انتگرال های کسری تا حال در ریاضیات معرفی شده است که از آنها می توان اشاره کرد به: ریمان، لیوویل، ریتز، لتیکوف، گرانوالد، ویل، مارچاد و کاپوتو. در این فصل از نوع کاپوتو و ریمان- لیوویل مشتقات کسری استفاده شده است.

۲.۶ حل عددی معادلات دیفرانسیلی معمولی مرتبه کسری

در این بخش، از روش a - چندجمله ای ها برای حل عددی مساله مقدار اولیه کسری زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{cases} {}^C D_{0,t}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t)), & m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{Z}^+, \\ u^{(j)}(0) = u_0^j \in \mathbb{R}, & j = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (۱.۶)$$

که مشتق کاپوتو نسبت به $t \in [0, T]$ گرفته شده است و $f \neq 0$.

۱.۲.۶ وجود و یکتایی جواب

قضایای زیادی برای نشان دادن وجود و یکتایی جواب معادله (۱.۶) وجود دارد که در زیر دو قضیه مهم از این قضایا برای وجود و یکتایی جواب این مساله اشاره شده است:

^۷El Nino Chaotic Dynamical System

^۸Interpersonal Relationships

^۹Cosine And Sine Wavelet

^{۱۰}Bernstein Polynomials

^{۱۱}Pseudo-Spectral Method

قضیه ۱.۲.۶. [۱۱۰] (وجود) فرض کنید برای $\chi^* > 0$ و $K > 0$ ، داشته باشیم

$$D = \{(t, u) : t \in [0, \chi^*], |u - \sum_{j=0}^{m-1} t^j u_0^j / j!| \leq K\}$$

و تابع پیوسته $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ و $\chi := \min \left\{ \chi^*, (K\Gamma(\alpha + 1) / \|f\|_\infty)^{1/\alpha} \right\}$ ، آنگاه تابعی مانند $u : [0, \chi] \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که جواب معادله دیفرانسیلی کسری (۱.۶) می باشد.

قضیه ۲.۲.۶. [۱۱۰] (یکتایی) با توجه به فرض های قضیه ۱.۲.۶، فرض کنید تابع $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته بوده و شرط لیپ شیتس نسبت به متغیر دوم را نیز ارضاء کند، یعنی

$$|f(t, w_1) - f(t, w_2)| \leq L |w_1 - w_2|,$$

برای ثابتی مانند $L > 0$ و مستقل از t ، w_1 و w_2 . آنگاه تابعی یکتا مانند $u : [0, \chi] \rightarrow \mathbb{R}$ جواب معادله دیفرانسیلی کسری (۱.۶) می باشد.

۲.۲.۶ پیاده سازی روش

در این روش، جواب معادله دیفرانسیلی کسری (۱.۶) به صورت سری زیر تقریب زده می شود:

$$y(t) \approx y_N(t) = \sum_{k=0}^N c_k A_k(t), \quad (2.6)$$

که $k = 0, 1, \dots, N$ ضرایب مجهول سری بالا برای $\alpha \in (0, 1]$ هستند. نقاط هم محلی روش پیشنهادی روی بازه $[0, T]$ به صورت $t_j = j \cdot \Delta t$ برای $j = 0, 1, \dots, N$ تعریف می شوند به طوریکه $\Delta t = \frac{T}{N}$. حال روش هم محلی را با استفاده از نقاط هم محلی t_j به ازای $j = 0, 1, \dots, N$ برای مانده (۱.۶) اجرا می کنیم. بنابراین، ضرایب مجهول $k = 0, 1, \dots, N$ ، c_k و پارامتر کمکی، a ، بوسیله حل دستگاه معادلات غیرخطی زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} Res(t_j) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

که

$$Res(t_j) = {}_C D_{0,t}^\alpha u(t_j) - f(t_j, u(t_j))$$

این دستگاه معادلات غیرخطی، $N + 2$ معادله و $N + 2$ مجهول دارد. در این مساله نیز مانند فصل های قبل ابتدا پارامتر a را بدست آورده و در a - چندجمله ای ها قرار می دهیم و سپس با این چندجمله ای ها روش را تکرار می کنیم با یک مجهول (a) کمتر.

ملاحظه ۳.۲.۶. برای $1 < \alpha \leq 2$ ، جواب (۱.۶) بوسیله سری زیر تقریب زده می شود:

$$y(t) \approx y_N(t) = \sum_{k=0}^{N+1} c_k A_k(t),$$

که $k = 0, 1, \dots, N + 1$ ، c_k ضرایب مجهول است. حال روش هم محلی را برای مانده (۱.۶) با استفاده از نقاط هم محلی t_j برای $j = 0, 1, \dots, N$ مانند روش بخش قبل اجرا می کنیم. بنابراین،

جدول ۱.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

a	$\alpha = 0.9$	a	$\alpha = 0.7$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.3$	a	$\alpha = 0.1$	N
-0.24743	0	-0.30442	$1.88738e-15$	-0.42908	$8.88178e-16$	-0.55414	$4.53724e-11$	-0.69004	$6.66134e-16$	5
-0.64318	$3.28954e-06$	-1.13123	$2.65046e-06$	-1.15393	$1.43781e-06$	-1.08360	$1.10818e-06$	-0.89343	$6.51037e-07$	10
-0.10941	$2.43905e-08$	-0.10809	$5.45319e-09$	-0.02370	$1.91705e-09$	-0.00853	$1.23402e-09$	0.38999	$1.57022e-08$	15
-0.26706	$1.63125e-11$	-0.16151	$2.72618e-10$	-0.64012	$2.64473e-11$	-0.01797	$1.53051e-10$	-0.11891	$2.49580e-11$	20
-0.12779	$4.06035e-12$	-0.13614	$9.72616e-13$	-0.11939	$5.82240e-11$	-0.30351	$2.54407e-11$	-0.06540	$5.57506e-11$	30

ضرایب مجهول $c_k, k = 0, 1, \dots, N+1$ و پارامتر کمکی، a ، بوسیله حل دستگاه معادلات غیرخطی زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} Res(t_j) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, N, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

برای مقادیر $\alpha \in (2, 3]$ ، نیز مانند بالا عمل می کنیم یعنی یک چندجمله ای دیگر به تعداد چندجمله ایهای ترکیب خطی $y(t) \approx y_N(t) = \sum_{k=0}^{N+1} c_k A_k(t)$ اضافه می کنیم، همچنین برای مقادیر بزرگتر α نیز این روش ادامه دارد. همگرایی این روش در بخش ۳.۳ اثبات شده است.

۳.۲.۶ نتایج عددی

در مثالهای زیر جواب عددی معادلات دیفرانسیلی کسری در زمان $t = 1$ محاسبه شده است. در دو مثال ۴.۲.۶ و ۵.۲.۶ برای مقایسه دقت روشها از خطای مطلق و در مثال ۶.۲.۶ از ماکسیمم خطای مطلق استفاده شده است.

مثال ۴.۲.۶

$$\begin{cases} {}^C D_{0,t}^\alpha y(t) + y^2(t) = f(t), & 0 < \alpha < 1, t > 0, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

که

$$f(t) = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha} - \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} t^{3-\alpha} + \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} + (t^5 - 3t^4 + 2t^3)^2,$$

و جواب دقیق مساله $y(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3$ می باشد.

در این مثال، روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف α در بازه $(0, 1]$ پیاده سازی شده است. با مشاهده جدولهای ۱.۶ و ۲.۶، می بینیم که به ازای هر مقدار ثابت α با افزایش مقدار N خطای مطلق جواب معادله کمتر می شود و مقدار بهینه پارامتر a در ستون بعد نمایش داده شده است. این جدولها تاییدی بر قضیه همگرایی روش در بخش ۳.۳ می باشد.

مثال ۵.۲.۶

$$\begin{cases} {}^C D_{0,t}^\alpha y(t) + y(t) = f(t), & 0 < \alpha < 1, t > 0, \\ y(0) = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

جدول ۲.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

a	$\alpha = 0.8$	a	$\alpha = 0.2$	N
-0.22276	$8.28670e - 13$	-0.61407	$1.43414e - 10$	5
-0.98035	$4.23465e - 06$	-1.02801	$9.30012e - 07$	10
-0.11363	$1.26547e - 08$	0.30148	$9.30027e - 09$	15
-0.16948	$3.10254e - 10$	-0.27356	$7.45238e - 11$	20
-0.17863	$1.25150e - 13$	-0.28686	$5.36688e - 11$	30

جدول ۳.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

a	$\alpha = 0.9$	a	$\alpha = 0.7$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.3$	a	$\alpha = 0.1$	N
$8.70857e - 06$	$1.09402e - 05$	$6.89648e - 06$	$9.90495e - 07$	$5.28523e - 06$	$3.31157e - 06$	$4.27453e - 06$	$2.61264e - 06$	$2.85789e - 06$	$9.08694e - 07$	5
$8.65594e - 06$	$1.40877e - 06$	$6.06018e - 06$	$5.40263e - 07$	$3.90141e - 06$	$2.18285e - 07$	$2.45541e - 06$	$5.95804e - 09$	$1.63710e - 06$	$1.02948e - 07$	10
$8.50093e - 06$	$5.05600e - 07$	$5.79629e - 06$	$1.73509e - 07$	$3.78399e - 06$	$1.39961e - 07$	$2.46551e - 06$	$1.15507e - 07$	$1.66372e - 06$	$2.28723e - 08$	15
$8.43666e - 06$	$4.11301e - 07$	$5.90865e - 06$	$2.39491e - 08$	$3.93267e - 06$	$1.45579e - 07$	$2.57212e - 06$	$1.62962e - 07$	$1.75826e - 06$	$4.27740e - 07$	20
$8.15670e - 06$	$1.88349e - 06$	5.00000	$8.15314e - 05$	$3.67470e - 06$	$9.78453e - 06$	$2.54370e - 06$	$1.08858e - 05$	$2.03536e - 06$	$4.37060e - 06$	30

که

$$f(t) = \frac{t^{4-\alpha}}{\Gamma(5-\alpha)},$$

و جواب دقیق معادله $y(t) = t^4 E_{\alpha,5}(-t^\alpha)$ می باشد که $E_{\alpha,\beta}(z)$ تابع میتاگ-لفلر دو پارامتری است. در این مثال، روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف α در بازه $(0, 1]$ پیاده سازی شده است. با مشاهده جدول های ۳.۶ و ۴.۶، می بینیم که به ازای هر مقدار ثابت α با افزایش تعداد نقاط هم محلی خطای مطلق از خود نوسان نشان می دهد و مقدار بهینه پارامتر a در ستون بعد نمایش داده شده است. دلیل این نوسان را می توان تابع میتاگ-لفلر و خطای انباشته در محاسبات دانست. این جدول ها نیز تاییدی بر قضیه همگرایی روش در بخش ۳.۳ می باشند.

جدول ۴.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

a	$\alpha = 0.8$	a	$\alpha = 0.2$	N
$7.78174e - 06$	$2.94423e - 06$	$3.51804e - 06$	$1.80983e - 06$	5
$3.34026e - 06$	$8.52872e - 07$	$1.97656e - 06$	$7.50054e - 08$	10
$7.09721e - 06$	$2.63812e - 07$	$2.00584e - 06$	$7.92095e - 08$	15
$7.11769e - 06$	$1.62623e - 07$	$2.10364e - 06$	$3.44833e - 06$	20
$7.12123e - 06$	$3.23110e - 06$	$2.30460e - 06$	$8.47195e - 06$	30

جدول ۵.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای مثال ۶.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

a	$\alpha = 2$	a	$\alpha = 1.5$	a	$\alpha = 1$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.2$	N
-4.35688e - 08	7.77156e - 16	-1.67192e - 06	1.82812e - 04	-6.15090e - 18	1.38778e - 16	1.94952e - 06	1.91606e - 05	1.27588e - 05	1.51553e - 05	5
2.15430e - 08	1.29072e - 15	3.13547e - 07	2.85591e - 06	-2.74071e - 08	9.87971e - 17	2.76030e - 07	5.31167e - 07	2.62275e - 06	4.09609e - 07	10
-4.97626e - 09	4.94262e - 13	2.72059e - 04	1.87494e - 07	3.03994e - 08	5.16752e - 15	6.97526e - 04	1.86906e - 07	7.84942e - 04	1.39032e - 07	20
-6.05070e - 09	5.43948e - 14	1.92011e - 06	3.54204e - 08	-5.78781e - 09	4.27778e - 13	1.94345e - 04	7.27004e - 08	1.34825e - 05	5.46084e - 08	30

مثال ۶.۲.۶.

$$\begin{cases} CD_{0,t}^{\alpha} y(t) + y(t) = f(t), & 0 < \alpha \leq 2, t > 0, \\ y(0) = 0, & (0 < \alpha \leq 2), \\ y'(0) = 0, & (1 < \alpha \leq 2), \end{cases} \quad (5.6)$$

که

$$f(t) = \frac{\Gamma(4 + \alpha)}{6} t^3 + t^{3+\alpha},$$

و جواب دقیق مساله به صورت $y(t) = t^{3+\alpha}$ می باشد.

در این مثال، روش پیشنهادی برای دو حالت $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < \alpha \leq 2$ پیاده سازی شده است. در جدول ۵.۶ مشاهده می شود که به ازای هر مقدار ثابت α با افزایش تعداد نقاط هم محلی ماکزیمم خطای مطلق جواب معادله، $\max_i |y(t_i) - y_N(t_i)|$ کمتر می شود و مقدار بهینه پارامتر a در ستون بعد نمایش داده شده است.

۴.۲.۶ باز آغاز روش

در این بخش، در هر یک از مثال های بخش قبل، پارامتر a را که در جدول های بخش قبل نمایش داده شده، در چندجمله ای های $\{A_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ قرار می دهیم. حال با چندجمله ای های $\{A_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ که هیچ پارامتری ندارند، جواب تقریبی معادلات دیفرانسیلی کسری داده شده در مثال های بخش قبل را بدست می آوریم. در نتیجه جواب معادله ۱.۶ به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$y(t) \approx y_N(t) = \sum_{k=0}^N c_k A_k(t),$$

که $c_k, k = 0, 1, \dots, N$ ضرایب مجهول می باشند و دیگر خبری از a نیست. نقاط هم محلی روش پیشنهادی روی بازه $[0, T]$ نیز به صورت $t_j = j \Delta t$ برای $j = 0, 1, \dots, N$ تعریف می شوند به طوریکه $\Delta t = \frac{T}{N}$. حال با کمک روش هم محلی مانده معادله (۱.۶) را با استفاده از نقاط هم محلی t_j برای $j = 0, 1, \dots, N$ به یک دستگاه معادلات تبدیل می کنیم. بنابراین، ضرایب مجهول $c_k, k = 0, 1, \dots, N$ از حل دستگاه معادلات غیرخطی زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} Res(t_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, N, \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

در نتیجه یک دستگاه معادلات غیرخطی با $N + 1$ معادله و $N + 1$ مجهول داریم.

جدول ۶.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

$\alpha = 0.9$	a	$\alpha = 0.7$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.3$	a	$\alpha = 0.1$	a	N
0	-0.24743	$1.11022e - 15$	-0.30442	$7.77156e - 16$	-0.42908	$4.44089e - 16$	-0.55414	$8.88178e - 16$	-0.69004	5
$2.66454e - 15$	-0.64318	$1.66533e - 16$	-1.13123	$1.66533e - 16$	-1.15393	0	-1.08360	0	-0.89343	10
$1.68901e - 14$	-0.10941	$6.61960e - 15$	-0.10809	$1.52290e - 15$	-0.02370	$3.61576e - 15$	-0.00853	$2.38081e - 15$	0.38999	15
$9.88071e - 13$	-0.26706	$7.25793e - 11$	-0.16151	$3.45167e - 15$	-0.64012	$3.57270e - 12$	-0.01797	$4.80258e - 15$	-0.11891	20
$2.55555e - 12$	-0.12779	$1.02665e - 12$	-0.13614	$1.05974e - 12$	-0.11939	$1.39640e - 11$	-0.30351	$2.70095e - 12$	-0.06540	30

جدول ۷.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

$\alpha = 0.8$	a	$\alpha = 0.2$	a	N
$4.44089e - 16$	-0.22276	$4.44089e - 16$	-0.61407	5
$4.44089e - 16$	-0.98035	$9.43690e - 16$	-1.02801	10
$9.61468e - 16$	-0.11363	$2.33578e - 15$	0.30148	15
$1.19124e - 13$	-0.16948	$1.65964e - 13$	-0.27356	20
$6.20391e - 12$	-0.17863	$1.60182e - 10$	-0.28686	30

۱.۴.۲.۶ بازآغاز مثال ۴.۲.۶

نتایج حاصل در جدول های ۶.۶ و ۷.۶ از نتایج بدست آمده در جدول های ۱.۶ و ۲.۶ بهتر بوده و این کاهش خطای مطلق کاملاً محسوس می باشد. در جدول های ۸.۶ و ۹.۶ خطای مطلق روش پیشنهادی با خطای مطلق روش های آدامز و اوایلر پیشرو [۲۰۲] مقایسه شده است.

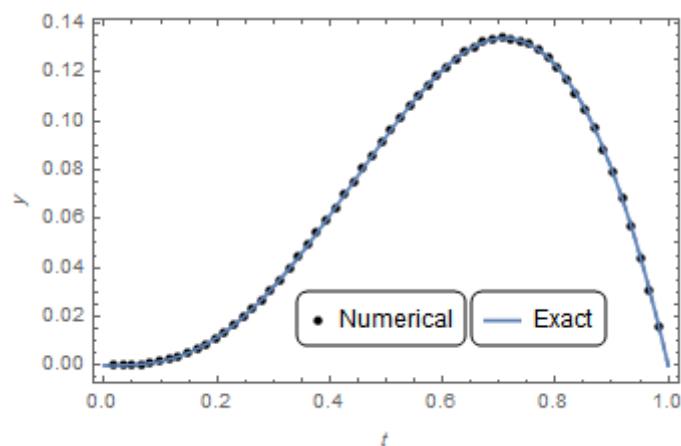
در جدول های ۸.۶ و ۹.۶، تعداد نقاط هم محلی روش های آدامز و اوایلر پیشرو به ترتیب، 640 و 10^5 نقطه می باشد در حالی که در روش پیشنهادی تعداد این نقاط تنها 5 نقطه است. مقدار خطای مطلق روش پیشنهادی خیلی کمتر از خطای مطلق دو روش دیگر می باشد که نشان از برتری روش پیشنهادی دارد. در شکل ۱.۶، نمودار تابع جواب های دقیق و عددی به ازای $\alpha = 0.9$ و $N = 5$ رسم شده است.

جدول ۸.۶: مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

روش	N	$\alpha = 0.1$	a	$\alpha = 0.3$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.7$	a	$\alpha = 0.9$	a
روش آدامز	640	$1.5675e - 07$	-	$4.5897e - 07$	-	$6.9794e - 07$	-	$7.4833e - 07$	-	$7.6184e - 07$	-
روش پیشنهادی	5	$8.88178e - 16$	-0.69004	$1.11022e - 16$	-0.55414	$2.22045e - 16$	-0.42908	$1.33227e - 15$	-0.30442	$5.55112e - 16$	-0.24743

جدول ۹.۶: مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

روش	N	$\alpha = 0.2$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.8$	a
روش اویلر پیشرو	$1e + 5$	$5.7566e - 05$	—	$4.9565e - 05$	—	$4.9614e - 05$	—
روش آدامز	$1e + 5$	$1.7998e - 08$	—	$2.1195e - 09$	—	$3.0764e - 09$	—
روش پیشنهادی	5	$1.11022e - 16$	-0.61407	$2.22045e - 16$	-0.42908	$1.11022e - 16$	-0.22276



شکل ۱.۶: نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) بازآغاز مثال ۴.۲.۶ به ازای $N = 5$ ، $\alpha = 0.9$.

جدول ۱۰.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

$\alpha = 0.9$	a	$\alpha = 0.7$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.3$	a	$\alpha = 0.1$	a	N
$3.12563e-06$	$8.70857e-06$	$1.28436e-06$	$6.89648e-06$	$5.44740e-07$	$5.28523e-06$	$1.83767e-07$	$4.27453e-06$	$1.87336e-08$	$2.85789e-06$	5
$1.31828e-09$	$8.65594e-06$	$1.06016e-09$	$6.06018e-06$	$2.21057e-11$	$3.90141e-06$	$2.68733e-10$	$2.45541e-06$	$4.84184e-11$	$1.63710e-06$	10
$5.86758e-11$	$8.50093e-06$	$6.88598e-11$	$5.79629e-06$	$4.56448e-11$	$3.78399e-06$	$2.37914e-11$	$2.46551e-06$	$3.32716e-12$	$1.66372e-06$	15
$7.35860e-12$	$8.43666e-06$	$9.43842e-12$	$5.90865e-06$	$1.32042e-11$	$3.93267e-06$	$4.74060e-12$	$2.57212e-06$	$2.35922e-13$	$1.75826e-06$	20
$2.85767e-12$	$8.15670e-06$	$2.19175e-12$	5.00000	$9.10436e-12$	$3.67470e-06$	$8.02888e-12$	$2.54370e-06$	$7.36466e-12$	$2.03536e-06$	30

جدول ۱۱.۶: نتایج خطای مطلق $y(t)$ به روش a - چندجمله ایها برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

$\alpha = 0.8$	a	$\alpha = 0.2$	a	N
$1.99484e-06$	$7.78174e-06$	$7.89151e-08$	$3.51804e-06$	5
$1.46735e-09$	$3.34026e-06$	$1.67384e-10$	$1.97656e-06$	10
$7.37907e-11$	$7.09721e-06$	$1.23647e-11$	$2.00584e-06$	15
$9.03327e-12$	$7.11769e-06$	$2.41157e-12$	$2.10364e-06$	20
$2.66556e-12$	$7.12123e-06$	$3.56624e-11$	$2.30460e-06$	30

۲.۴.۲.۶ بازآغاز مثال ۵.۲.۶

نتایج بدست آمده در جدول های ۱۰.۶ و ۱۱.۶ از نتایج حاصل از جدول های ۳.۶ و ۴.۶ بهتر بوده و خطای مطلق به صورت محسوس کمتر شده است. در جدول های ۱۲.۶ و ۱۳.۶ خطای مطلق روش پیشنهادی با خطای مطلق روش های آدامز و اوایلر پیشرو [۲۰۲] مقایسه شده است. در جدول های ۱۲.۶ و ۱۳.۶، تعداد نقاط هم محلی روش های آدامز و اوایلر پیشرو به ترتیب، 640 و 10^5 نقطه می باشد در حالی که در روش پیشنهادی تعداد این نقاط تنها 20 نقطه است. مقدار خطای مطلق روش پیشنهادی خیلی کمتر از خطای مطلق دو روش دیگر می باشد که نشان از برتری روش پیشنهادی دارد. در جدول ۱۴.۶، نتایج خطای مطلق $y(t)$ به ازای $N = 20$ ، مقادیر مختلف α و پارامتر a ثبت شده است. مشاهده می شود که به ازای مقادیر مختلف a تنها مقداری که بهترین خطا را نتیجه می دهد همان مقداری است که به صورت بهینه بدست آمده است. در برخی مقادیر ممکن است که خطای مقدار بهینه کمی بیشتر باشد که این مقدار اندک با توجه به خطای نرم افزار و محاسبات می تواند باشد. در شکل ۲.۶، نمودار تابع جواب های دقیق و عددی به ازای $\alpha = 0.9$ و $N = 20$ رسم شده است.

جدول ۱۲.۶: مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

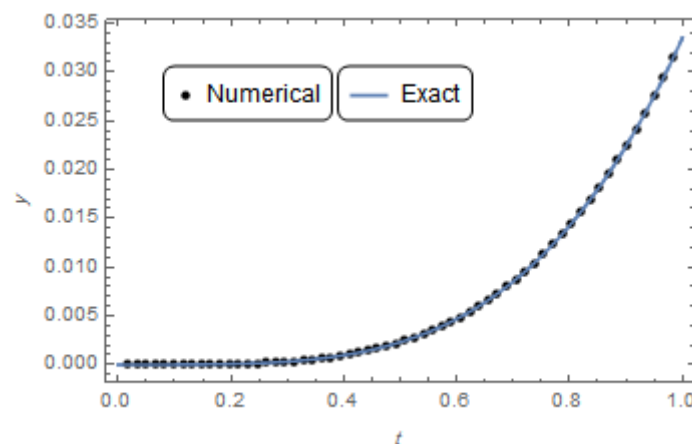
a	$\alpha = 0.9$	a	$\alpha = 0.7$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.3$	a	$\alpha = 0.1$	N	روش
-	$7.5914e-05$	-	$6.5923e-05$	-	$5.7071e-05$	-	$5.1741e-05$	-	$5.5794e-05$	640	روش اوایلر پیشرو
-	$1.7440e-07$	-	$5.1041e-07$	-	$1.7863e-06$	-	$7.3069e-06$	-	$5.5820e-05$	640	روش آدامز
0.3271	$5.3001e-13$	1.7686	$9.6235e-14$	2.8463	$3.9561e-14$	1.7773	$4.0436e-14$	1.9990	$4.5311e-15$	20	روش پیشنهادی

جدول ۱۳.۶: مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف α و N .

روش	N	$\alpha = 0.2$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 0.8$	a
روش اوایلر پیشرو	$1e + 5$	$5.7566e - 05$	—	$4.9565e - 05$	—	$4.9614e - 05$	—
روش آدامز	$1e + 5$	$1.7998e - 08$	—	$2.1195e - 09$	—	$3.0764e - 09$	—
روش پیشنهادی	20	$2.11120e - 12$	$2.10364e - 6$	$3.9561e - 14$	2.8463	$9.36692e - 12$	$7.11769e - 6$

جدول ۱۴.۶: مقایسه نتایج خطای مطلق $y(t)$ برای مثال ۵.۲.۶ به ازای $N = 20$ ، مقادیر مختلف α و پارامتر a .

α	بهینه a	روش پیشنهادی	$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$	$a = 2$
$\alpha = 0.1$	1.9990	$4.5311e - 15$	$3.1812e - 12$	$2.4823e - 11$	$1.3133e - 12$	$6.9510e - 15$
$\alpha = 0.3$	1.7773	$4.0436e - 14$	$7.5699e - 12$	$2.2912e - 12$	$1.8458e - 11$	$2.6795e - 13$
$\alpha = 0.5$	2.8463	$3.9561e - 14$	$1.0313e - 12$	$5.2153e - 14$	$6.0643e - 15$	$1.0747e - 14$
$\alpha = 0.7$	1.7686	$9.6235e - 14$	$1.3555e - 11$	$2.1330e - 13$	$4.6651e - 14$	$1.6240e - 12$
$\alpha = 0.9$	0.3271	$5.3001e - 13$	$2.7542e - 12$	$7.7098e - 13$	$4.0044e - 13$	$2.0332e - 12$



شکل ۲.۶: نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) بازآغاز مثال ۵.۲.۶ به ازای $N = 20$ ، $\alpha = 0.9$.

جدول ۱۵.۶: مقایسه نتایج ماکزیمم خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۶.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف $0 < \alpha \leq 1$ و N .

روش	N	$\alpha = 0.2$	a	$\alpha = 0.5$	a	$\alpha = 1$	a
روش مرتبه بالا	10	$5.8970e-05$	—	$1.0094e-04$	—	$9.3656e-05$	—
روش پیشنهادی	5	$1.51553e-05$	$1.2758e-05$	$1.91606e-05$	$1.9495e-06$	$3.60822e-16$	$-6.1509e-18$
روش مرتبه بالا	20	$6.6398e-06$	—	$9.5872e-06$	—	$6.0468e-06$	—
روش پیشنهادی	10	$4.96037e-05$	$2.6228e-07$	$5.31167e-07$	$2.7603e-07$	$5.58636e-16$	$-2.7407e-8$
روش مرتبه بالا	40	$7.4472e-07$	—	$8.9417e-07$	—	$3.8420e-07$	—
روش پیشنهادی	20	$9.84252e-09$	$8.8983e-04$	$2.87486e-08$	$7.2908e-04$	$7.76959e-16$	$3.0399e-8$
روش مرتبه بالا	80	$8.3430e-08$	—	$8.2222e-08$	—	$2.4212e-08$	—
روش پیشنهادی	30	$5.46084e-08$	$1.3683e-05$	$8.51659e-08$	$3.0866e-04$	$2.01571e-13$	$-5.7878e-9$

جدول ۱۶.۶: مقایسه نتایج ماکزیمم خطای مطلق $y(t)$ برای بازآغاز مثال ۶.۲.۶ به ازای $t = 1$ و مقادیر مختلف N و $\alpha = 1.5, 2$.

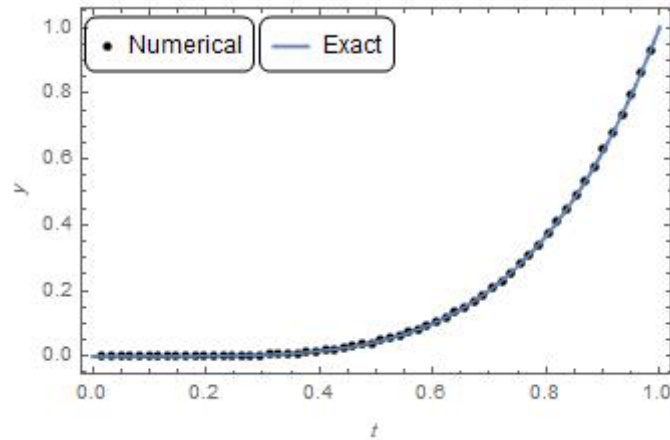
روش	N	$\alpha = 1.5$	a	$\alpha = 2$	a
روش مرتبه بالا	10	$2.7796e-04$	—	$5.9626e-04$	—
روش پیشنهادی	5	$1.82812e-04$	$-1.6719e-06$	$1.05840e-15$	$-4.3568e-08$
روش مرتبه بالا	20	$1.8079e-05$	—	$4.0515e-05$	—
روش پیشنهادی	10	$2.85591e-06$	$3.1355e-07$	$4.42162e-15$	$2.1543e-08$
روش مرتبه بالا	40	$1.1514e-06$	—	$2.6317e-06$	—
روش پیشنهادی	20	$5.59480e-08$	$2.5644e-04$	$4.75866e-14$	$-4.9763e-09$
روش مرتبه بالا	80	$7.2657e-08$	—	$1.6756e-07$	—
روش پیشنهادی	30	$2.98144e-08$	$1.9201e-06$	$5.43948e-14$	$-6.0507e-09$

۳.۴.۲.۶ بازآغاز مثال ۶.۲.۶

در این مثال، ماکزیمم خطای مطلق $\max_i |y(t_i) - y_N(t_i)|$ برای مقایسه روش پیشنهادی با روش مرتبه بالا [۷۴] استفاده می‌شود. در جدول ۱۵.۶، فرض شده که $0 < \alpha \leq 1$ و نتایج برای مقادیر $\alpha = 0.2, 0.5, 1$ بدست آمده است. به وضوح جدول ۱۵.۶ نشان می‌دهد که روش پیشنهادی با توجه به تعداد کم نقاط هم‌محلی نسبت به روش دیگر ماکزیمم خطای مطلق کمتری داشته و برتری این روش را به روش دیگر به خوبی نمایان می‌کند.

در جدول ۱۶.۶، فرض شده که $1 < \alpha \leq 2$ و نتایج به ازای $\alpha = 1.5, 2$ بدست آمده است. در این مورد نیز، مانند جدول ۱۵.۶، روش پیشنهادی با توجه به تعداد کم نقاط هم‌محلی نسبت به روش دیگر، ماکزیمم خطای مطلق کمتری داشته و مزیت این روش را به روش دیگر به خوبی نمایان می‌کند.

در شکل ۳.۶، نمودار تابع جواب‌های دقیق و عددی به ازای $\alpha = 1.5$ و $N = 20$ رسم شده است.



شکل ۳.۶: نمودار جواب‌های عددی و دقیق (تحلیلی) بازآغاز مثال ۶.۲.۶ به ازای $\alpha = 1.5$, $N = 20$.

۳.۶ حل عددی معادله انتشار مرتبه کسری زمان-مکان با مشتق کاپوتو نسبت به زمان

در این فصل نوعی خاص از مشتقات پاره‌ای کسری را بررسی می‌کنیم. با توجه به گستردگی این معادلات، نوعی خاص از این معادلات را در این بخش انتخاب کرده‌ایم. در این معادله فرض بر این است که مشتق مکانی برحسب مشتق کسری ریمان-لیوویل محاسبه شود. فرض کنید معادله انتشار کسری زمان-مکان با مشتق کاپوتو نسبت به زمان به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} {}_C D_{0,t}^{\gamma} U = \left(L^{(\alpha)} U \right) (x, t) + g(x, t), & (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \\ U(x, 0) = \varphi_0(x), & x \in (a, b), \\ U(a, t) = 0, U(b, t) = 0, & t \in (0, T], \end{cases} \quad (6.6)$$

که $c, d > 0$ و $0 < \alpha < 2$, $0 < \gamma \leq 1$, $L^{(\alpha)} = c(x, t) {}_{RL} D_{a,x}^{\alpha} + d(x, t) {}_{RL} D_{x,b}^{\alpha}$ می‌باشد.

۱.۳.۶ پیاده‌سازی روش

در این بخش ابتدا گسسته‌سازی به روش $L1$ [۲۰۲] روی بازه زمانی مساله انجام می‌دهیم. سپس در هر نقطه t_k تابع جواب بوسیله مجموع a - چندجمله‌ای‌های معرفی شده در بخش ۳.۱ تقریب زده می‌شود. این تقریب با شبکه‌بندی نقاط بازه مکانی در نقطه t_k بدست می‌آید به عبارتی دیگر در هر نقطه t_k یک دستگاه معادله غیرخطی با روش هم‌محلی بدست می‌آید که با حل آن دستگاه، ضرایب مجهول در سری جواب تقریبی، بدست می‌آیند. در پایان، با درونیابی نقاط $(x_i, t_k, u(x_i, t_k))$ بوسیله چندجمله‌ای‌های B - اسپلاین مکعبی، جواب تقریبی مساله در بازه $\Omega = (a, b) \times [0, T]$ بدست می‌آید.

۱.۱.۳.۶ گسسته سازی زمانی

ابتدا تقریب تفاضل متناهی برای مشتق کاپوتو را به روش $L1$ می نویسیم [۲۰۲]:

$${}_C D_{0,t}^{\gamma} f(t) \Big|_{t=t_k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j-1} (f_{j+1} - f_j) + O(\Delta t^{2-\gamma}), \quad 0 < \gamma < 1, \quad (۷.۶)$$

که $b_j = \frac{\Delta t^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} [(j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}]$. این روش، روشی پایدار مشروط می باشد که برای مشاهده اثبات پایداری آن می توان به [۲۰۲] مراجعه کرد. برای گسسته سازی بازه زمانی $[0, T]$ ، فرض کنید:

$$t_k = k\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M,$$

که $T, \tau = \frac{T}{M}$ زمان پایانی متغیر t می باشد. با استفاده از روش تفاضل متناهی $L1$ ، برای گسسته سازی زمانی در (۶.۶) به جای ${}_C D_{0,t}^{\gamma} f(t)$ از (۷.۶) استفاده می کنیم:

$${}_C D_{0,t}^{\gamma} U(t) \Big|_{t=t_k} = \sum_{j=0}^{k-1} b_{k-j-1} (u^{j+1} - u^j) = L^{(\alpha)} u^{k+1} + g^{k+1}, \quad (۸.۶)$$

که $u^{k+1} = u(x, t_{k+1})$ و $g^{k+1} = g(x, t_{k+1})$. یک دستگاه معادلات غیرخطی بدست می آید.

۲.۱.۳.۶ اجرای روش

برای اجرای روش پیشنهادی، ابتدا u^{k+1} به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$u^{k+1} \cong \sum_{n=0}^N c_n^{k+1} A_n(x),$$

با جایگزین کردن تقریب بالا به ازای هر t_k در (۸.۶)، گسسته سازی بر روی دامنه مکانی $[a, b]$ و شرایط اولیه و مرزی این مساله، یک دستگاه معادلات غیرخطی با $N+2$ معادله و $N+2$ مجهول c_n^{j+1} ، $n = 0, 1, 2, \dots, N$ و پارامتر مجهول a ، بدست می آید. برای حل این دستگاه معادلات غیرخطی، نرم L_2 مجموع مربعات مانده ها را به روش کمترین مربعات مینیمم می کنیم. در این مسائل نیز مانند فصل های قبل ابتدا پارامتر a را بدست آورده و در a - چندجمله ای ها قرار می دهیم و سپس با این چندجمله ای ها روش را تکرار می کنیم با یک مجهول (a) کمتر. بعد از بدست آوردن تقریب تابع در هر زمان t_k ، با درونیابی نقاط $(x_i, t_k, u(x_i, t_k))$ به کمک چندجمله ای های B - اسپلاین مکعبی، جواب تقریبی مساله در بازه $\Omega = (a, b) \times [0, T]$ بدست می آید.

۲.۳.۶ نتایج عددی

در این بخش دو مثال از این مساله به صورت عددی مورد تحلیل قرار می گیرد. برای ارایه حل عددی از نقاط شبکه ای چبیشف - گاوس - لوباتو (CGL) که در بخش ۴.۱ تعریف شد، استفاده می کنیم. همچنین برای مقایسه خطای روش پیشنهادی با روش های دیگر از نرم خطای L_2 که در بخش (۱۴.۳) تعریف شده، بهره می بریم.

جدول ۱۷.۶: نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۱.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ، $T = 1$ و $\gamma = 0.5$.

$\alpha = 1.8$	a	$\alpha = 1.5$	a	$\alpha = 1.2$	a	N
$7.3510e - 4$	1.00024	$5.8764e - 4$	1.00002	$4.2673e - 4$	0.99991	5
$9.2696e - 8$	1.00205	$1.8147e - 7$	0.99996	$4.6334e - 7$	0.99997	10
$9.4210e - 8$	0.99997	$1.8452e - 7$	1	$4.7099e - 7$	1	15
$9.5839e - 8$	1	$1.8606e - 7$	1	$4.7593e - 7$	1	20
$9.6071e - 8$	1	$1.8778e - 7$	1	$4.7812e - 7$	1	25

مثال ۱.۳.۶. فرض کنید معادله انتشار کسری زمان-مکان به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} {}^C D_{0,t}^\gamma U = {}^{RL} D_{0,x}^\alpha U + {}^{RL} D_{x,1}^\alpha U + g(x,t), & (x,t) \in (0,1) \times (0,1], \\ U(x,0) = 2x^4(1-x^4), & x \in (0,1), \\ U(0,t) = U(1,t) = 0, & t \in (0,1], \end{cases}$$

که $0 < \gamma < 1$ و $1 < \alpha < 2$. تابع $g(x,t)$ به گونه‌ای باید انتخاب شود که جواب دقیق (تحلیلی) معادله فوق به صورت زیر باشد:

$$U(x,t) = (t^{2+\gamma} + t + 2)x^4(1-x^4),$$

در جدول‌های ۱۷.۶ و ۱۸.۶ نرم خطای L_2 به ازای $\tau = 0.01$ ، $T = 1$ ، مقادیر مختلف N و به ترتیب $\gamma = 0.5$ و $\gamma = 0.8$ ، محاسبه شده است. در جدول ۱۹.۶، نرم خطای L_2 روش پیشنهادی با روش تفاضل متناهی کسری [۲۰۲] به ازای $T = 1$ و مقادیر مختلف N ، τ ، α و γ مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که با توجه به تعداد کمتر N و مقدار تفاضل زمانی بیشتر τ روش پیشنهادی، باز هم خطای روش پیشنهادی از روش تفاضل متناهی کسری بهتر است.

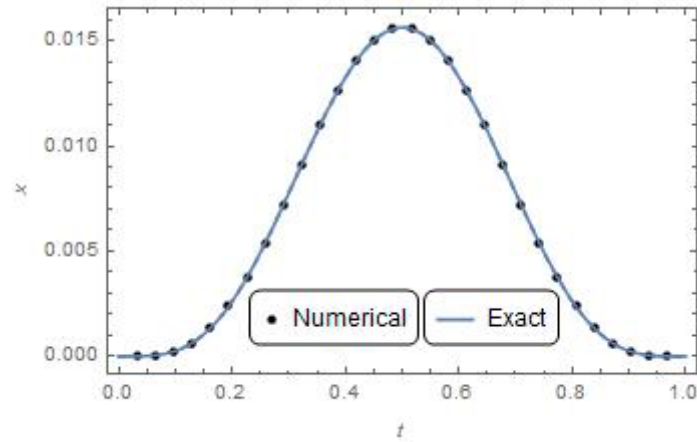
در شکل ۱.۳.۶، نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی در نقاط شبکه‌ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) به ازای $\tau = 0.01$ ، $N = 15$ ، $(\gamma, \alpha) = (0.8, 1.8)$ و $T = 1$ رسم شده است. در شکل ۵.۶ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x,t)$ به ازای $N = 15$ ، $(\gamma, \alpha) = (0.8, 1.8)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای چبیشف-گوس-لوباتو (CGL) رسم شده است.

جدول ۱۸.۶: نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۱.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ، $T = 1$ و $\gamma = 0.8$.

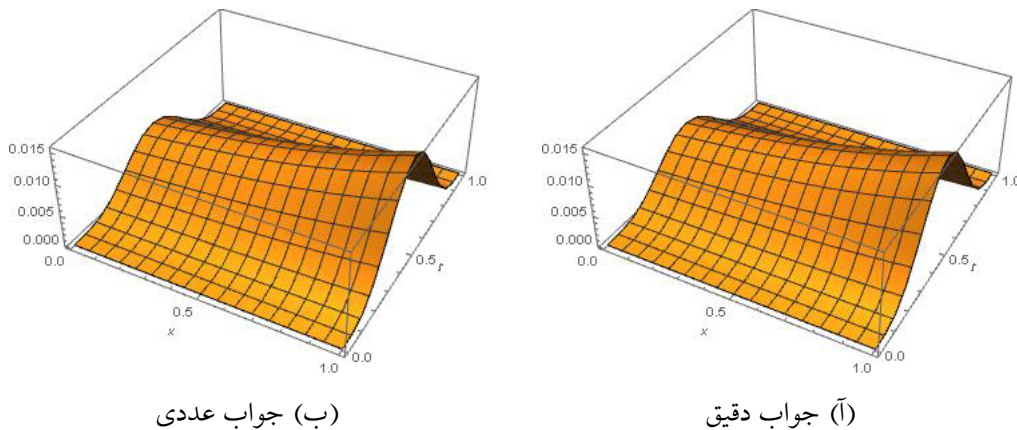
$\alpha = 1.8$	a	$\alpha = 1.5$	a	$\alpha = 1.2$	a	N
$7.3520e - 4$	1.00012	$5.8772e - 4$	0.99997	$4.2674e - 4$	0.99989	5
$8.2271e - 7$	1.00208	$1.5454e - 6$	0.99997	$3.8232e - 6$	0.99997	10
$8.3611e - 7$	0.99997	$1.6222e - 6$	0.99997	$3.8856e - 6$	1	15
$8.5072e - 7$	1	$1.6360e - 6$	1	$3.9240e - 6$	1	20
$8.5274e - 7$	1	$1.5606e - 6$	1	$3.9428e - 6$	1	25

جدول ۱۹.۶: مقایسه نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۱.۳.۶ با روش تفاضل متناهی کسری، در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$ و مقادیر مختلف N ، τ ، α و γ .

a	(γ, α) (0.8, 1.8)	a	(γ, α) (0.5, 1.5)	τ	N	روش
—	$5.9009e - 4$	—	$6.3601e - 4$	10^{-3}	8	روش تفاضل متناهی
1.00012	$7.3520e - 4$	1.00002	$5.8764e - 4$	10^{-2}	5	روش پیشنهادی
—	$1.6719e - 4$	—	$2.2826e - 4$	10^{-3}	16	روش تفاضل متناهی
1.00208	$8.2271e - 7$	0.99996	$1.8147e - 7$	10^{-2}	10	روش پیشنهادی
—	$4.3810e - 5$	—	$6.5588e - 5$	10^{-3}	32	روش تفاضل متناهی
0.99997	$8.3611e - 7$	1	$1.8452e - 7$	10^{-2}	15	روش پیشنهادی
—	$1.1180e - 5$	—	$1.7418e - 5$	10^{-3}	64	روش تفاضل متناهی
1	$8.5072e - 7$	1	$1.8778e - 7$	10^{-2}	20	روش پیشنهادی



شکل ۴.۶: نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $N = 15$, $\tau = 0.01$ و $(\gamma, \alpha) = (0.8, 1.8)$. $T = 1$



شکل ۵.۶: نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, t)$ در مثال ۱.۳.۶ به ازای $N = 15$, $(\gamma, \alpha) = (0.8, 1.8)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

مثال ۲.۳.۶. فرض کنید معادله انتشار کسری زمان-مکان به صورت زیر باشد:

$$\begin{cases} \partial_t U = {}_C D_{0,t}^{1-\gamma} ({}_{RL} D_{0,x}^\alpha U + {}_{RL} D_{x,1}^\alpha U) + g(x, t), & (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1], \\ U(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \\ U(0, t) = U(1, t) = 0, & t \in (0, 1], \end{cases}$$

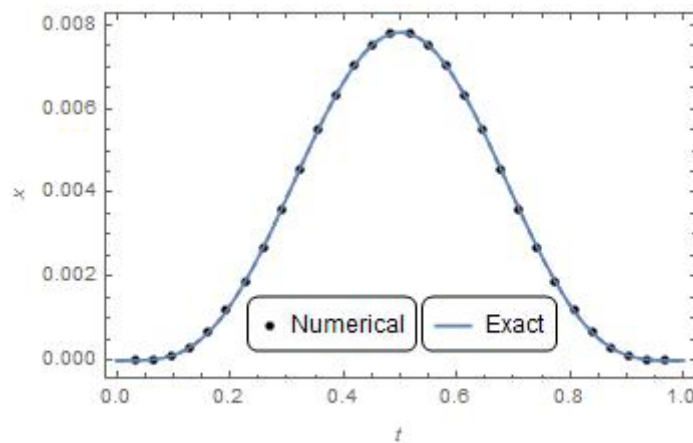
که $0 < \gamma < 1$ و $1 < \alpha < 2$. تابع $g(x, t)$ به گونه‌ای باید انتخاب شود که جواب دقیق (تحلیلی) معادله فوق به صورت زیر باشد:

$$U(x, t) = (t^{2.5} + t)x^4(1 - x^4),$$

در جدول ۲۰.۶ نرم خطای L_2 به ازای $T = 1$, $\tau = 0.01$ ، مقادیر مختلف N محاسبه شده است. در جدول ۲۱.۶، نرم خطای L_2 روش پیشنهادی با روش تفاضل متناهی کسری [۲۰۲] به

جدول ۲۰.۶: نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۲.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ و $T = 1$.

(γ, α)	a	(γ, α)	a	(γ, α)	a	N
$(0.8, 1.8)$		$(0.5, 1.5)$		$(0.2, 1.2)$		
$3.6056e-4$	-1.98034	$2.8872e-4$	-1.98183	$2.0981e-4$	-1.94639	5
$6.2429e-7$	-1.75972	$1.8147e-7$	-2.48306	$5.0059e-8$	-2.47892	10
$6.3448e-7$	-1.68443	$1.8452e-7$	-1.87973	$5.0886e-8$	-1.84856	15
$6.4589e-7$	-1.68385	$1.8714e-7$	-1.51669	$5.1440e-8$	-1.69363	20
$6.4743e-7$	-1.36792	$1.8719e-7$	-1.38683	$5.1731e-8$	-1.50459	25



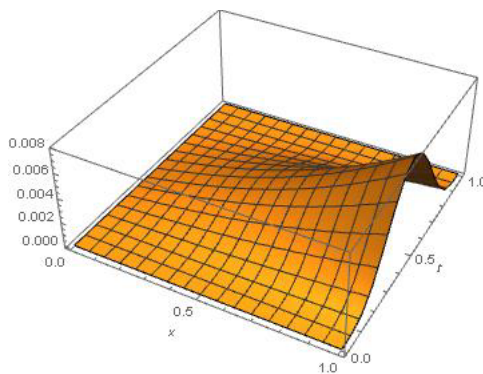
شکل ۶.۶: نمودار جواب دقیق و تقریبی مثال ۲.۳.۶ در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $\tau = 0.01$ ، $N = 20$ و $(\gamma, \alpha) = (0.5, 1.5)$ و $T = 1$.

ازای $T = 1$ و مقادیر مختلف N ، τ ، α و γ مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که با توجه به تعداد کمتر N و مقدار تفاضل زمانی بیشتر τ روش پیشنهادی، باز هم خطای روش پیشنهادی از روش تفاضل متناهی کسری بهتر است.

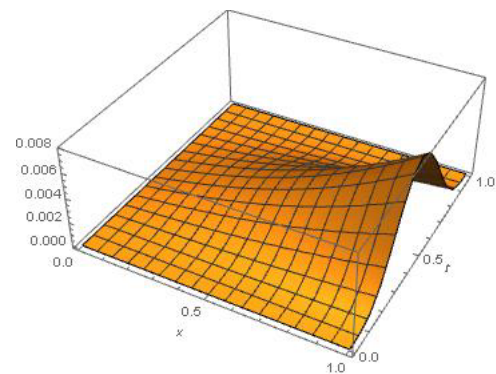
شکل ۲.۳.۶، نمودار جواب دقیق و تقریبی در نقاط شبکه‌ای چیشف-گوس-ل.باتو (CGL) به ازای $\tau = 0.01$ ، $N = 20$ و $(\gamma, \alpha) = (0.5, 1.5)$ و $T = 1$ رسم شده است. در شکل ۷.۶ نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, t)$ به ازای $N = 20$ و $(\gamma, \alpha) = (0.5, 1.5)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای چیشف-گوس-لوباتو (CGL) رسم شده است.

جدول ۲۱.۶: مقایسه نتایج نرم خطای L_2 در مثال ۲.۳.۶ با روش تفاضل متناهی کسری، در نقاط شبکه‌ای CGL به ازای $T = 1$ و مقادیر مختلف N ، τ ، α و γ .

روش	N	τ	(γ, α)	a	(γ, α)	a
			(0.5, 1.5)		(0.8, 1.8)	
روش تفاضل متناهی	8	10^{-3}	$3.0921e - 4$	—	$2.9140e - 4$	—
روش پیشنهادی	5	10^{-2}	$2.8872e - 4$	-1.98183	$3.6056e - 4$	-1.98034
روش تفاضل متناهی	16	10^{-3}	$1.1228e - 4$	—	$8.2738e - 5$	—
روش پیشنهادی	10	10^{-2}	$1.8147e - 7$	-2.48306	$6.2429e - 7$	-1.75972
روش تفاضل متناهی	32	10^{-3}	$3.2374e - 5$	—	$2.1694e - 5$	—
روش پیشنهادی	15	10^{-2}	$1.8452e - 7$	-1.87973	$6.3448e - 7$	-1.68443
روش تفاضل متناهی	64	10^{-3}	$8.6250e - 6$	—	$5.5311e - 6$	—
روش پیشنهادی	20	10^{-2}	$1.8714e - 7$	-1.51669	$6.4589e - 7$	-1.68385



(ب) جواب عددی



(آ) جواب دقیق

شکل ۷.۶: نمودار جواب‌های دقیق و عددی $u(x, t)$ در مثال ۲.۳.۶ به ازای $N = 20$ ، $(\gamma, \alpha) = (0.5, 1.5)$ و $\tau = 0.01$ در نقاط شبکه‌ای CGL.

۴.۶ نتیجه‌گیری

در این فصل از a - چندجمله‌ای‌ها برای حل معادلات دیفرانسیلی عادی کسری و نوعی خاص از معادلات دیفرانسیلی پاره‌ای کسری استفاده شد. نتایج بدست آمده از روش پیشنهادی برای تقریب این معادلات با روش‌های دیگر بکار رفته برای حل آنها در جدول‌های مختلف مقایسه شد و برتری محسوس این روش در حل معادلات دیفرانسیلی عادی کسری کاملاً مشهود می‌باشد. در حل معادلات انتشار زمان-مکان کسری نیز با توجه به انتخاب تعداد کم نقاط هم‌محلی و فاصله زمانی بزرگتر نسبت به روش دیگر، روش پیشنهادی تقریب بهتر و مزیت بیشتری را از خود نشان می‌دهد. سادگی استفاده از a - چندجمله‌ای‌ها در مشتقات کسری می‌تواند یکی از نقاط برتری روش

پیشنهادی باشد که پیچیدگی کمتری برای حل ایجاد می کند. نکته دیگر اینکه در این بخش تفاوت نتایج خطا را در حل معادلات دیفرانسیلی عادی کسری در مرحله بازآغازی و قبل آن مشاهده می کنیم که اعمال پارامتر کمکی در a - چندجمله ای ها خطا را بسیار کاهش می دهد.

فصل ۷

نتیجه‌گیری و کارهای آتی

از نتایج بارز این رساله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. تولید چندجمله‌ای‌هایی جدید در ریاضیات که با تجهیز آنها به یک پارامتر کمکی a می‌توان نتایج محاسبات را بهتر کرد.
 ۲. این روش حجم و پیچیدگی عملیات محاسباتی را نسبت به روش‌هایی که با آنها مقایسه شد، کاهش داده و قدرت مانور بالایی در حل انواع مسایل عددی از خود نشان داده است.
 ۳. تولید a - چندجمله‌ای‌های گویا و استفاده از آنها برای حل مسایل با دامنه بینهایت از جمله معادله فاکنر - اسکن.
 ۴. اثبات قضیه همگرایی برای a - چندجمله‌ای‌های ساده و گویا و اثبات پایداری روش.
 ۵. در حل مسایل معکوس یک بعدی و دو بعدی با ایجاد اختلال در داده‌های مساله، همچنان نتایج حاصله بدون تغییر محسوس بدست آمدند که پایداری روش را در این مسایل نشان می‌دهد.
 ۶. به دلیل ماهیت پیچیده مشتقات کسری، a - چندجمله‌ای‌ها توابعی هستند که مشتق کسری آنها با سرعت و سادگی بیشتری قابل محاسبه است.
 ۷. با ایجاد پارامتر کمکی a و سپس بدست آوردن مقدار بهینه آن، تفاوت چشم‌گیری در نتایج مرحله بازآغازی و قبل آن مشاهده شد.
 ۸. در این رساله برای حل معادلات پیچیده ریاضی از ابتدایی‌ترین توابع یعنی چندجمله‌ای‌ها، بهترین نتایج با بالاترین قابلیت‌ها بدست آمد.
- برای دانشجویانی که علاقه به کار در این زمینه دارند برخی از پیشنهادات به صورت زیر ارائه می‌شود:
۱. استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد یا غیرمتعامد دیگر به جای چندجمله‌ای‌های چبیشف در a - چندجمله‌ای‌ها و بررسی و تحلیل نتایج.

۲. استفاده از دو پارامتر کمکی در فرمول a - چندجمله‌ای‌ها و بدست آوردن مقادیر بهینه و جایگزین دوباره آنها در فرمول و بررسی خطا و نتایج عددی.
۳. استفاده از a - چندجمله‌ای‌های متعامد که با اندیس مضارب ۴ بوجود آمدند. بررسی ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های متعامد بر روی چندجمله‌ای‌ها متعامد جدید.
۴. حل مسایل معکوس مرتبه کسری، معادلات انتگرالی و انتگرو-دیفرانسیل به کمک a - چندجمله‌ای‌ها و بررسی و تحلیل و مقایسه با روش‌های موجود.
۵. استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع سوم و چهارم به جای چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و دوم در فرمول a - چندجمله‌ای‌ها.
۶. ایجاد پارامتر کمکی در روش‌هایی غیر از چندجمله‌ای‌ها.
۷. استفاده از ترکیب چندجمله‌ای‌های چبیشف مرتبه کسری و استفاده از آنها در حل معادلات مرتبه کسری و مسایل معکوس مرتبه کسری.
۸. استفاده از a - چندجمله‌ای‌ها در روش موجک‌ها و روش‌هایی که از چندجمله‌ای‌ها در آنها استفاده می‌شود و مقایسه نتایج و خطاهای حاصله با روش‌های دیگر.
۹. گسسته‌سازی مشتقات صحیح و کسری با استفاده از a - چندجمله‌ای‌ها و بکارگیری آنها در حل مسایل مربوطه.

- [1] S. Abbasbandy, A new class of polynomial functions equipped with a parameter. *Mathematical Sciences*, 11 (2017) 127-130.
- [2] S. Abbasbandy, A numerical solution of Blasius equation by Adomian's decomposition method and comparison with homotopy perturbation method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 31(1) (2007) 257-260.
- [3] S. Abbasbandy, T. Hayat, Solution of the MHD Falkner-Skan flow by homotopy analysis method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(9-10) (2009) 3591-3598.
- [4] S. Abbasbandy, T. Hayat, H.R. Ghehsareh, A. Alsaedi, MHD Falkner-Skan flow of Maxwell fluid by rational Chebyshev collocation method, *Applied Mathematics and Mechanics*, 34(8) (2013) 921-930.
- [5] S. Abbasbandy, R. Naz, T. Hayat, A. Alsaedi, Numerical and analytical solutions for Falkner-Skan flow of MHD Maxwell fluid, *Applied Mathematics and Computation*, 242 (2014) 569-575.
- [6] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, The first integral method for modified Benjamin-Bona-Mahony equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(7) (2010) 1759-1764.
- [7] W.M. Abd-Elhameed, Y.H. Youssri, A novel operational matrix of Caputo fractional derivatives of Fibonacci polynomials: spectral solutions of fractional differential equations, *Entropy*, 18(10) (2016) 345.
- [8] W.M. Abd-Elhameed, Y.H. Youssri, Spectral tau algorithm for certain coupled system of fractional differential equations via generalized Fibonacci polynomial sequence, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 43(2) (2019) 543-554.
- [9] W.M. Abd-Elhameed, Y.H. Youssri, Generalized Lucas polynomial sequence approach for fractional differential equations, *Nonlinear Dynamics*, 89(2) (2017) 1341-1355.

- [10] W.M. Abd-Elhameed, Y.H. Youssri, Spectral solutions for fractional differential equations via a novel Lucas operational matrix of fractional derivatives, *Rom. J. Phys*, 61(5-6) (2016) 795-813.
- [11] W.M. Abd-Elhameed, Y.H. Youssri, N. El-Sissi, M. Sadek, New hypergeometric connection formulae between Fibonacci and Chebyshev polynomials, *The Ramanujan Journal*, 42(2) (2017) 347-361.
- [12] M. Abdollahzadeh, M. Ghanbarpour, A. Hosseini, S. Kashani, Exact travelling solutions for Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations by (G'/G) -expansion method, *International Journal of Applied Mathematics and Computation*, 3(1) (2010) 70-76.
- [13] M.J. Ablowitz, P.A. Clarkson, *Soliton, Nonlinear evolution equations and inverse scattering*, Cambridge Univ. Press, New York, 1991.
- [14] V. Aboites, M. Ramírez, Simple approach to special polynomials: Laguerre, Hermite, Legendre, Tchebycheff, and Gegenbauer, In *Applied Mathematics*, 2019.
- [15] T. Achouri, K. Omrani, Numerical solutions for the damped generalized regularized long-wave equation with a variable coefficient by Adomian decomposition method, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(5) (2009) 2025-2033.
- [16] T. Achouri, K. Omrani, Application of the homotopy perturbation method to the modified regularized long-wave equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 26(2) (2010) 399-411.
- [17] N. Adžić, Chebyshev approximation to the solution of a singularly perturbed problem with nonlocal boundary conditions, *International Journal of Computer Mathematics*, 46(3-4) (1992) 207-218.
- [18] A. Ahmadian, M. Suleiman, S. Salahshour, D. Baleanu, A Jacobi operational matrix for solving a fuzzy linear fractional differential equation, *Advances in Difference Equations*, 2013(1) (2013) 104.
- [19] I.N. Ahmed, Numerical solution for solving two-points boundary value problems using orthogonal Boubaker polynomials, *Emirates Journal for Engineering Research*, 25(2) (2020) 4.
- [20] N. Ahmed, S. Bibi, U. Khan, S.T. Mohyud-Din, A new modification in the exponential rational function method for nonlinear fractional differential equations, *The European Physical Journal Plus*, 133(2) (2018) 1-11.
- [21] G.S. Alberti, H. Ammari, Disjoint sparsity for signal separation and applications to hybrid inverse problems in medical imaging, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 42(2) (2017) 319-349.

- [22] A.H. Ali, Chebyshev collocation spectral method for solving the RLW equation, *International Journal of Nonlinear Science*, 7(2)(2009) 131-142.
- [23] K. Al-Khaled, S. Momani, A. Alawneh, Approximate wave solutions for generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Applied Mathematics and Computation*, 171(1) (2005) 281-292.
- [24] R. Álvarez-Nodarse, J. Petronilho, N.C. Pinzón-Cortés, R. Sevinik-Adıgüzel, On linearly related sequences of difference derivatives of discrete orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 284 (2015) 26-37.
- [25] E. Amitt, D. Givoli, E. Turkel, Combined arrival-time imaging and time reversal for scatterer identification, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 313 (2017) 279-302.
- [26] G.A. Anastassiou, *Intelligent computations: abstract fractional calculus, inequalities, approximations*. Heidelberg: Springer, 2018.
- [27] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge university press, 2000.
- [28] A.A.M. Arafaa, S.Z. Ridab, M. Khalil, A fractional-order model of HIV infection with drug therapy effect, *J. Egypt.Math. Soc.*, 22 (2014) 538–543.
- [29] I. Area, H. Batarfi, J. Losada, J.J. Nieto, W. Shammakh, A. Torres, On a fractional order Ebola epidemic model, *Adv. Difference Equ.*, 2015 (2015).
- [30] S. Arshad, D. Baleanu, Y. Tang, Fractional differential equations with bio-medical applications, *Applications in Engineering, Life and Social Sciences*, (2019) 1.
- [31] O.A. Arqub, S. Momani, Numerical solutions of singular time-fractional PDEs, *Applications in Engineering, Life and Social Sciences*, (2019) 43.
- [32] N.S. Asaithambi, A numerical method for the solution of the Falkner-Skan equation, *Applied Mathematics and Computation*, 81(2-3) (1997) 259-264.
- [33] A. Asaithambi, Solution of the Falkner–Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 176(1) (2005) 203-214.
- [34] A. Asaithambi, A finite-difference method for the Falkner-Skan equation, *Applied Mathematics and Computation*, 92(2-3) (1998) 135-141.
- [35] A. Asaithambi, Numerical solution of the Falkner–Skan equation using piecewise linear functions, *Applied Mathematics and Computation*, 159(1) (2004) 267-273.

- [36] M. Asgari, R. Ezzati, Using operational matrix of two-dimensional Bernstein polynomials for solving two-dimensional integral equations of fractional order, *Applied Mathematics and Computation*, 307 (2017) 290-298.
- [37] K. Assaleh, W. M. Ahmad, Modeling of speech signals using fractional calculus, 9th International Symposium on Signal Processing and Its Applications, 2007 1–4.
- [38] T.M. Atanackovic, S. Pilipovic, B. Stankovic, D. Zorica, *Fractional calculus with applications in mechanics: wave propagation, impact and variational principles*, John Wiley and Sons, 2014.
- [39] A. Atangana, A novel model for the lassa hemorrhagic fever: deathly disease for pregnant women, *Neural Computing and Applications*, 26(8) (2015) 1895-1903.
- [40] A. Atangana, R.T. Alqahtani, Modelling the spread of river blindness disease via the caputo fractional derivative and the beta-derivative, *Entropy*, 18(2) (2016) 40.
- [41] S. Atkinson, N. Zabaras, Structured Bayesian Gaussian process latent variable model: Applications to data-driven dimensionality reduction and high-dimensional inversion, *Journal of Computational Physics*, 383 (2019) 166-195.
- [42] O.B. Awojoyogbe, B. Karim, M.A. Aweda, M. Dada, BPES-related mathematical development for the phase shift due to Rf magnetic field in heart inferior coronary artery NMR imaging, *J. Clin. Experiment Cardiol*, 1 (2010) 111.
- [43] Y.A. Babanov, D.A. Ponomarev, D.I. Devyaterikov, Y.A. Salamatov, L.N. Romashev, V.V. Ustinov, V.V. Vasin, A.L. Ageev, Local atomic structure of Fe/Cr multilayers: Depth-resolved method, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 440 (2017) 203-206.
- [44] P.J. Baddoo, L.J. Ayton, Potential flow through a cascade of aerofoils: direct and inverse problems, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 474(2217) (2018) 20180065.
- [45] H.O. Bakodah, A. Ebaid, A.M. Wazwaz, Analytical and numerical treatment of Falkner-Skan equation via a transformation and Adomian's method, *Roman. Rep. Phys*, 70(111) (2018) 1-7.
- [46] G. Bal, J.C. Schotland, Inverse scattering and acousto-optic imaging, *Physical review letters*, 104(4) (2010).
- [47] D. Baleanu, Z.B. Güvenç, J.T. Machado, editors, *New trends in nanotechnology and fractional calculus applications*, New York: Springer, 2010.

- [48] H. Bansu, S. Kumar, Numerical solution of space and time fractional telegraph equation: a meshless approach, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 20(3-4) (2019) 325-237.
- [49] A.L. Barabási, H.E. Stanley, *Fractal concepts in surface growth*(2nd ed.), Cambridge university press, 2002.
- [50] R. Baraniuk, P. Steeghs, Compressive radar imaging, In 2007 IEEE radar conference, (2007) 128-133, IEEE.
- [51] L.P. Barra, J.C. Telles, A geometric inverse problem identification procedure for detection of cavities, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(11) 92013) 1401-1407.
- [52] T.V. Bedareva, M.A. Sviridenkov, T.B. Zhuravleva, Retrieval of dust aerosol optical and microphysical properties from ground-based Sun-sky radiometer measurements in approximation of randomly oriented spheroids, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 146 (2014) 140-157.
- [53] M. Behroozifar, A. Sazmand, An approximate solution based on Jacobi polynomials for time-fractional convection–diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 296 (2017) 1-7.
- [54] L. Beilina, editor. *Inverse problems and applications*, Springer, 2015.
- [55] T.B. Benjamin, J.L. Bona, and J.J. Mahony, Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 272(1220) (1972) 47–78.
- [56] D. Benjamini, P.J. Basser, Use of marginal distributions constrained optimization (MADCO) for accelerated 2D MRI relaxometry and diffusometry, *Journal of magnetic resonance*, 271 (2016) 40-45.
- [57] M.I. Berenguer, H. Kunze, D. La Torre, M.R. Galán, Galerkin method for constrained variational equations and a collage-based approach to related inverse problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292 (2016) 67-75.
- [58] M.I. Bertrand, Sur la possibilité de déduire d’une seule de lois de Kepler le principe de l’attraction, *Comptes Rendues* 9, 1877.
- [59] M.I. Bhatti, P. Bracken, Solutions of differential equations in a Bernstein polynomial basis, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205(1) (2007) 272-280.
- [60] D. Bhardwaj, R. Shankar, A computational method for regularized long wave equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 40(12) (2000) 1397-1404.

- [61] H. Binous, A.A. Shaikh, A. Bellagi, Chebyshev orthogonal collocation technique to solve transport phenomena problems with Matlab and Mathematica, *Computer Applications in Engineering Education*, 23(3) (2015) 422-431.
- [62] N. Bissantz, H. Holzmam, K. Proksch, Confidence regions for images observed under the Radon transform, *Journal of Multivariate Analysis*, 128 (2014) 86-107.
- [63] K. Biswas, G. Bohannan, R. Caponetto, A.M. Lopes, J.A. Machado, *Fractional-order devices*, Springer International Publishing, 2017.
- [64] H. Blasius, Grenzsichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 56 (1908) 1-37.
- [65] A. Bolandtalat, E. Babolian, H. Jafari, Numerical solutions of multi-order fractional differential equations by Boubaker polynomials, *Open physics*, 14(1) (2016) 226-230.
- [66] E.M. Bollt, Regularized forecasting of chaotic dynamical systems, *Chaos, Solitons and Fractals*, 94 (2017) 8-15.
- [67] K. Boubaker, On modified Boubaker polynomials: some differential and analytical properties of the new polynomials issued from an attempt for solving bi-varied heat equation, *Trends in Applied Sciences Research*, 2(6) (2007) 540-544.
- [68] J.P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, Courier Corporation, 2001.
- [69] R. Brinks, Illness-death model in chronic disease epidemiology: characteristics of a related, differential equation and an inverse problem, *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, 2018 (2018).
- [70] W. Bu, A. Xiao, W. Zeng, Finite difference/finite element methods for distributed-order time fractional diffusion equations, *Journal of Scientific Computing*, 72(1) (2017) 422-441.
- [71] A. Bueno-Orovio, D. Kay, V. Grau, B. Rodriguez, K. Burrage, Fractional diffusion models of cardiac electrical propagation: role of structural heterogeneity in dispersion of repolarization, *Journal of the Royal Society Interface*, 11(97) (2014) 20140352.
- [72] H.D. Bui, *Fracture mechanics: inverse problems and solutions*, Springer Science and Business Media, 2007.
- [73] J.R. Cannon, Y. Lin, S. Wang, Determination of source parameter in parabolic equations. *Meccanica*, 27(2) (1992) 85-94.
- [74] J. Cao, C. Xu, A high order schema for the numerical solution of the fractional ordinary differential equations, *Journal of Computational Physics*, 238 (2013) 154-168.

- [75] N.L. Carothers, A short course on approximation theory, Bowling Green State University, Bowling Green, OH, 1998.
- [76] M. Çetin, M. Sezer, H. Kocayigit, An efficient method based on Lucas polynomials for solving high-order linear boundary value problems, Gazi University Journal of Science, 28(3) (2015) 483-496.
- [77] M. Çetin, M. Sezer, H. Kocayigit, An efficient method based on Lucas polynomials for solving high-order linear boundary value problems, Gazi University Journal of Science, 28(3) (2015) 483-496.
- [78] K. Chadan, P.C. Sabatier, Inverse problems in quantum scattering theory, Springer Science and Business Media 2012.
- [79] M. Charnley, A. Wood, Through-the-wall radar detection analysis via numerical modeling of Maxwell's equations, Journal of Computational Physics, 313 (2016) 532-548.
- [80] M. Charnley, A. Wood, A linear sampling method for through-the-wall radar detection, Journal of Computational Physics, 347 (2017) 147-159.
- [81] T.S. Chihara, An introduction to orthogonal polynomials, Gordon and Breach, 1978; reprinted, Dover, 2011.
- [82] A. Chikitkin, M. Petrov, R. Dushkov, E. Shifrin, Aerodynamic design of a Laval nozzle for real gas using hodograph method, Aerospace, 5(3) (2018) 96.
- [83] I.S. Ciuperca, M. Jai, J.I. Tello, Equilibrium analysis for a mass-conserving model in presence of cavitation, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 35 (2017) 250-264.
- [84] A. Constandache, A. Das, F. Toppan, Lucas polynomials and a standard Lax representation for the polytropic gas dynamics, Letters in Mathematical Physics, 60(3) (2002) 197-209.
- [85] E. Crossen, M.S. Gockenbach, B. Jadamba, A.A. Khan, B. Winkler, An equation error approach for the elasticity imaging inverse problem for predicting tumor location, Computers and Mathematics with Applications, 67(1) (2014) 122-135.
- [86] M.G. Cui, Y.Z. Lin, L.H. Yang, A new method of solving the coefficient inverse problem, Science in China Series A: Mathematics, 50(4) (2007) 561-572.
- [87] S. Cui, S. Yang, C. Zhu, N. Wen, Remote sensing of surface reflective properties: Role of regularization and a priori knowledge, Optik, 125(23) (2014) 7106-7112.

- [88] A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović, Recurrence relation and differential equation for a class of orthogonal polynomials, *Results in Mathematics*, 73(1) (2018) 1-9.
- [89] A. Dabiri, E.A. Butcher, Numerical solution of multi-order fractional differential equations with multiple delays via spectral collocation methods, *Applied Mathematical Modelling*, 56 (2018) 424-448.
- [90] İ. Dağ, A. Doğan, B. Saka, B-spline collocation methods for numerical solutions of the RLW equation, *International journal of computer mathematics*, 80(6) (2003) 743-757.
- [91] İ. Dağ, M.N. Özer, Approximation of the RLW equation by the least square cubic B-spline finite element method, *Applied Mathematical Modelling*, 25(3) (2001) 221-231.
- [92] U. Dainelli, Sul movimento per una linea qualunque, *Giorn. Mat.* 18 (1880).
- [93] M. Dalarsson, M. Norgren, Two-dimensional boundary shape reconstructions in rectangular and coaxial waveguides, *Wave Motion*, 66 (2016) 10-20.
- [94] M.L. Dan, W.J. Mansur, F.C. Peters, A BEM based methodology to solve inverse problems considering fictitious background media, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 66 (2016) 109-118.
- [95] H.P. Dang, P. Chainais, Indian buffet process dictionary learning: algorithms and applications to image processing, *International Journal of Approximate Reasoning*, 83 (2017) 1-20.
- [96] H. Dang-Vu, C. Delcarte, Hopf bifurcation and strange attractors in Chebyshev spectral solutions of the Burgers equation, *Applied mathematics and computation*, 73(2-3) (1995) 99-113.
- [97] S. Davaeifar, J Rashidinia, Boubaker polynomials collocation approach for solving systems of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations, *Journal of Taibah University for Science*, 11(6) (2017) 1182-1199.
- [98] S.M. Davidson, P.D. Docherty, R. Murray, The dimensional reduction method for identification of parameters that trade-off due to similar model roles, *Mathematical biosciences*, 285 (2017) 119-127.
- [99] M. Dehghan, An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation, *Applied Mathematical Modelling*, 25(9) (2001) 743-754.

- [100] M. Dehghan, Numerical methods for two-dimensional parabolic inverse problem with energy overspecification, *International journal of computer mathematics*, 77(3) (2001) 441-455.
- [101] M. Dehghan, Fourth-order techniques for identifying a control parameter in the parabolic equations, *International Journal of Engineering Science*, 40(4) (2002) 433-447.
- [102] M. Dehghan, Application of the Adomian decomposition method for two-dimensional parabolic equation subject to nonstandard boundary specifications, *Applied mathematics and computation*, 157(2) (2004) 549-560.
- [103] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A finite difference/finite element technique with error estimate for space fractional tempered diffusion-wave equation, *Computers and Mathematics with Applications*, 75(8) (2018) 2903-2914.
- [104] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, Spectral element technique for nonlinear fractional evolution equation, stability and convergence analysis, *Applied Numerical Mathematics*, 119 (2017) 51-66.
- [105] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, M. Mohebbi, The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation via the meshless method of radial basis functions, *Computers and Mathematics with Applications*, 68(3) (2014) 212-237.
- [106] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, M. Mohebbi, The use of interpolating element-free Galerkin technique for solving 2D generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and regularized long-wave equations on non-rectangular domains with error estimate, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 286 (2015) 211-231.
- [107] M. Dehghan, M. Tatari, Determination of a control parameter in a one-dimensional parabolic equation using the method of radial basis functions, *Mathematical and Computer Modelling*, 44(11-12) (2006) 1160-1168.
- [108] E.C. de Oliveira, *solved exercises in fractional calculus*, Springer International Publishing, 2019.
- [109] J.F. Deü, D. Matignon, Simulation of fractionally damped mechanical systems by means of a Newmark-diffusive scheme, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5) (2010) 1745-1753.
- [110] K. Diethelm, N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 265(2) (2002) 229-248.
- [111] Y. Ding, H. Ye, A fractional-order differential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells, *Mathematical and Computer Modelling*, 50(3-4) (2009) 386–392.

- [112] F.D. Dizeu, A. Bendada, D. Laurendeau, Nondestructive testing of objects of complex shape using infrared thermography: Determination of the spatiotemporal distribution of the irradiation heat flux, *Infrared Physics and Technology*, 83 (2017) 164-176.
- [113] A. Dogan, Numerical solution of RLW equation using linear finite elements within Galerkin's method, *Applied Mathematical Modelling*, 26(7) (2002) 771-783.
- [114] E.H. Doha, W.M. Abd-Elhameed, Integrals of Chebyshev polynomials of third and fourth kinds: An application to solution of boundary value problems with polynomial coefficients, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 49(6) (2014) 296-308.
- [115] E.H. Doha, W.M. Abd-Elhameed, M.A. Bassuony, New algorithms for solving high even-order differential equations using third and fourth Chebyshev–Galerkin methods, *Journal of Computational Physics*, 236 (2013) 563-579.
- [116] E.H. Doha, M.A. Abdelkawy, A.Z. Amin, D. Baleanu, Spectral technique for solving variable-order fractional Volterra integro-differential equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 34(5) (2018) 1659-1677.
- [117] G.E. Drăgănescu, Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives, *Journal of Mathematical Physics*, 47(8) (2006) 082902.
- [118] B. Dubey, T.G. Zhao, M. Jonsson, H. Rahmanov, A solution to the accelerated-predator-satiety Lotka–Volterra predator–prey problem using Boubaker polynomial expansion scheme, *Journal of theoretical biology*, 264(1) (2010) 154-160.
- [119] G. Eilenberger, *Solitons: mathematical methods for physicists*, Springer Science and Business Media, 2012.
- [120] N. Ejlali, S.M. Hosseini, A pseudospectral method for fractional optimal control problems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 174(1) (2017) 83-107.
- [121] E.M. Elbarbary, Chebyshev finite difference method for the solution of boundary-layer equations, *Applied mathematics and computation*, 160(2) (2005) 487-498.
- [122] H.M. El-Hawary, A deficient spline function approximation for boundary layer flow, *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, (2001).
- [123] L. Ellam, N. Zabaras, M. Girolami, A Bayesian approach to multiscale inverse problems with on-the-fly scale determination, *Journal of Computational Physics*, 326 (2016) 115-140.

- [124] N. Engheta, On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 44(4) (1996) 554-566.
- [125] H.W. Engl, M. Hanke, Neubauer A, Regularization of inverse problems, Springer Science and Business Media, 1996.
- [126] I.G. Enting, Inverse problems in greenhouse gas modelling, InMini Conference on Inverse Problems in Partial Differential Equations, (1992) 262-277, Centre for Mathematics and its Applications, Mathematical Sciences Institute, The Australian National University.
- [127] V.P. Ermakov, Determination of the potential function from given partial integrals, Math. Sbornik 15, serie 4, (1881).
- [128] V.S. Ertürk, S. Momani, Solving systems of fractional differential equations using differential transform method, Journal of Computational and Applied Mathematics, 215 (2008) 142-151.
- [129] N.P. Erugin, Construction of the whole set of Systems of differential equations having a given integral curve, Akad. Nauk SSSR. Prikl. Mat, (1952) 659-670 (in Russian).
- [130] A. Fakhari, G. Domairry, Approximate explicit solutions of nonlinear BBMB equations by homotopy analysis method and comparison with the exact solution, Physics Letters A, 368(1-2) (2007) 64-68.
- [131] V.M. Falkneb, S.W. Skan, LXXXV. Solutions of the boundary-layer equations, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 12(80) (1931) 865-896.
- [132] R. Fazio, The Falkneer-Skan equation: Numerical solutions within group invariance theory, Calcolo, 31(1-2) (1994) 115-124.
- [133] J. Fernández-Sáez, A. Morassi, L. Rubio, Crack identification in elastically restrained vibrating rods, International Journal of Non-Linear Mechanics, 94 (2017) 257-267.
- [134] I.M. Franck, P.S. Koutsourelakis, Multimodal, high-dimensional, model-based, Bayesian inverse problems with applications in biomechanics, Journal of Computational Physics, 329 (2017) 91-125.
- [135] E. Gajda-Zagórska, R. Schaefer, M. Smółka, D. Pardo, J. Álvarez-Aramberri, A multi-objective memetic inverse solver reinforced by local optimization methods, Journal of Computational Science, 18 (2017) 85-94.
- [136] A.S. Galiullin, Inverse problems of dynamics, Mir Publishers, Moscow, 1984.

- [137] A.S. Galiullin, I.A. Mukhametzhanov, R.G. Mukharlyamov, Investigations into the analytical design of the programmed-motion systems, Vestn. Ross. Univ. Druzh. Nar. Ser. Prikl. Mat. Inf., 98(1) (1994) 5–21.
- [138] D.D. Ganji, H. Babazadeh, M.H. Jalaei, H. Tashakkorian, Application of He's variational iteration method for solving nonlinear BBMB equations and free vibration of systems, Acta applicandae mathematicae, 106(3) (2009) 359.
- [139] Z.Z. Ganji, D.D. Ganji, H. Bararnia, Approximate general and explicit solutions of nonlinear BBMB equations by Exp-Function method, Applied Mathematical Modelling, 33(4) (2009) 1836-1841.
- [140] L.R. Gardner, G.A. Gardner, I. Dag. A B-spline finite element method for the regularized long wave equation, Communications in numerical methods in engineering, 11(1) (1995) 59-68.
- [141] J. Ghanouchi, H. Labiadh, An attempt to solve the heat transfer equation in a model of pyrolysis spray using 4q-order m-boubaker polynomials, International Journal of Heat and Technology, 26(1) (2008) 49-53.
- [142] M.A. Goldfeld, V.V. Pickalov, Application of method of deconvolution at temperature measurements in high-enthalpy impulse wind tunnels, Applied Thermal Engineering, 113 (2017) 731-738.
- [143] Ö.F. Gözükcıl, Ş. Akçağıl, Exact solutions of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers-type nonlinear pseudo-parabolic equations, Boundary Value Problems, 2012(1) (2012) 144.
- [144] V.Y. Grechka, G.A. McMechan, V.A. Volovodenko, Solving 1-D inverse problems by Chebyshev polynomial expansion, Geophysics, 61(6) (1996) 1758-1768.
- [145] B.Y. Guo, J. Shen, Z.Q. Wang, A rational approximation and its applications to differential equations on the half line, Journal of scientific computing, 15(2) (2000) 117-147.
- [146] B.Y. Guo, J. Shen, Z.Q. Wang, Chebyshev rational spectral and pseudospectral methods on a semi-infinite interval, International journal for numerical methods in engineering, 53(1) (2002) 65-84.
- [147] P. Gray, S. Scott, Chemical oscillations and instabilities, Clarendon, 1990.
- [148] F.A. Grünbaum, G.A. Latham, J.P. Zubelli, An inverse problem for a model of scattered and diffused radiation, InMini Conference on Inverse Problems in Partial Differential Equations, (1992) 69-81, Centre for Mathematics and its Applications, Mathematical Sciences Institute, The Australian National University.

- [149] S. Gümğüm, N.B. Savaşaneril, Ö.K. Kürkçü, M. Sezer, Lucas polynomial approach for second order nonlinear differential equations, Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 24(1) (2020) 230-236.
- [150] D.B. Haidvogel, T. Zang, The accurate solution of Poisson's equation by expansion in Chebyshev polynomials, Journal of Computational Physics, 30(2) (1979) 167-180.
- [151] S.K. Hansen, V.V. Vesselinov, Contaminant point source localization error estimates as functions of data quantity and model quality, Journal of contaminant hydrology, 193 (2016) 74-85.
- [152] G.W. Hanson, A.B. Yakovlev, Operator theory for electromagnetics: an introduction, Springer Science and Business Media, 2013.
- [153] A. Hasegawa, Plasma instabilities and nonlinear effects, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [154] Hayat T, Farooq M, Iqbal Z, Alsaedi A. Mixed convection Falkner–Skan flow of a Maxwell fluid. Journal of heat transfer, 134(11) (2012) 114504.
- [155] E. Hesameddini, M. Riahi, Shifted Chebyshev polynomial method for solving systems of linear and nonlinear Fredholm-Volterra integro-differential equations Journal of Mathematical Extension, 12(1) (2018) 55-79.
- [156] M.H. Heydari, A. Atangana, An optimization method based on the generalized Lucas polynomials for variable-order space-time fractional mobile-immobile advection-dispersion equation involving derivatives with non-singular kernels, Chaos, Solitons Fractals, 132 (2020) 109588.
- [157] M.S. Hossain, Z.C. Ong, Z. Ismail, S. Noroozi, S.Y. Khoo, Artificial neural networks for vibration based inverse parametric identifications: A review, Applied Soft Computing, 52 (2017) 203-219.
- [158] G. Inglese, R. Olmi, Detecting longitudinal damages in the internal coating of a tube, International Journal of Heat and Mass Transfer, 116 (2018) 1225-1236.
- [159] M.E.H. Ismail, Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable, Cambridge University Press, 2005.
- [160] Z. Iqbal, E. Azhar, Z. Mehmood, M.M. Sabir, Neural based hybrid metaheuristic technique for computing rotating transport of Falkner-Skan flow, Alexandria Engineering Journal, 57(3) (2018) 2123-2132.
- [161] M.A. Iqbal, U. Saeed, S.T. Mohyud-Din, Modified Laguerre wavelets method for delay differential equations of fractional-order, Egyptian journal of basic and applied sciences, 2(1) (2015) 50-54.

- [162] V. Isakov, S.F. Wu, On theory and application of the Helmholtz equation least squares method in inverse acoustics, *Inverse Problems*, 18(4) (2002) 1147.
- [163] O.S. Iyiola, F.D. Zaman, A fractional diffusion equation model for cancer tumor. *AIP Advances*, 4(10) (2014) 107121.
- [164] M. Jesenik, M. Beković, A. Hamler, M. Trlep, Searching for hidden cracks and estimations of their depths by using the database, *Nondestructive Testing and Evaluation International*, 86 (2017) 44-52.
- [165] Z. Jin, On the Lucas polynomials and some of their new identities, *Advances in Difference Equations*, 2018(1) (2018) 126.
- [166] M. Joachimiak, A. Frąckowiak, M. Ciałkowski, Solution of inverse heat conduction equation with the use of Chebyshev polynomials. *Archives of Thermodynamics*, 37(4) 2016 73-88.
- [167] N.E. Joukovsky, Construction of the potential functions from a given family of trajectories, *Gostekhizdat*, 1948.
- [168] G. Judge, Fellow's opinion corner: Econometric information recovery, *Journal of Econometrics*, 176(1) (2013) 1-2.
- [169] K. Julien, M. Watson, Efficient multi-dimensional solution of PDEs using Chebyshev spectral methods, *Journal of Computational Physics*, 228(5) (2009) 1480-1503.
- [170] J.L. Junkins, A.B. Younes, R.M. Woollands, X. Bai, Picard iteration, chebyshev polynomials and chebyshev-picard methods: Application in astrodynamics, *The Journal of the Astronautical Sciences*, 60(3-4) (2013) 623-653.
- [171] P. Kadam, G. Datkhile, V.A. Vyawahare, Artificial neural network approximation of fractional-order derivative operators: analysis and DSP implementation, In *Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, (2019) 93-126, Birkhäuser, Singapore.
- [172] M.T. Kajani, M. Maleki, M. Allame, A numerical solution of Falkner-Skan equation via a shifted Chebyshev collocation method, In *AIP Conference Proceedings*, (2014) 381-386.
- [173] A.R. Kanth, S. Deepika, Exponential Spline Method for One Dimensional Non-linear Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation, In *International Conference on Mathematics and Computing*, (2018) 205-215.
- [174] K.K. Kataria, P. Vellaisamy, Adomian decomposition method and fractional Poisson processes: A Survey. In *Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, (2019) 17-39, Birkhäuser, Singapore.

- [175] S. Kazem, Exact solution of some linear fractional differential equations by Laplace transform, *International Journal of nonlinear science*, 16 (2013) 3–11.
- [176] M. Kazemnia, P. Tolou, J. Mahmoudi, I. Khatami, N. Tolou, Solitary and periodic solutions of BBMB equation via Exp-function method, *Advanced Studies in Theoretical Physics*, 3(12) (2009) 461-471.
- [177] B.L. Kennett, Earthquake location as an inverse problem, In *Mini Conference on Inverse Problems in Partial Differential Equations*, (1992) 59-63, Centre for Mathematics and its Applications, Mathematical Sciences Institute, The Australian National University.
- [178] M.M. Khader, K. Saad, A numerical approach for solving the fractional Fisher equation using Chebyshev spectral collocation method, *Chaos, Solitons and Fractals*, 110 (2018) 169-177.
- [179] M.M. Khader, N.H. Sweilam, A.M.S. Mahdy, Numerical study for the fractional differential equations generated by optimization problem using Chebyshev collocation method and FDM, *Applied Mathematics and Information Sciences*, 7 (2013) 2011–2018.
- [180] N. Khalid, M. Abbas, M.K. Iqbal, Non-polynomial quintic spline for solving fourth-order fractional boundary value problems involving product terms, *Applied Mathematics and Computation*, 349 (2019) 393-407.
- [181] M. Khan, M. Azam, A.S. Alshomrani, Unsteady slip flow of Carreau nanofluid over a wedge with nonlinear radiation and new mass flux condition, *Results in physics*, 7 (2017) 2261-2270.
- [182] E. Kharazmi, M. Zayernouri, G.E. Karniadakis, A Petrov–Galerkin spectral element method for fractional elliptic problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 324 (2017) 512-536.
- [183] A. Khazâal, J. Tenerelli, F. Cabot, Impact of sun glint on the SMOS retrieved brightness temperature maps for almost four years of data, *Remote Sensing of Environment*, 180 (2016) 234-245.
- [184] I. Koca, A. Atangana, Analysis of a nonlinear model of interpersonal relationships with time fractional derivative, *Journal of Mathematical Analysis*, 7(2) (2016) 1-11.
- [185] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q-analogues*, Springer Science Business Media, 2010.
- [186] N. Koshev, A. Koshev, V. Kuzina, Voltammetry: mathematical modelling and inverse problem, *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 157 (2016) 78-84.

- [187] T. Koukal, C. Atzberger, W. Schneider, Evaluation of semi-empirical BRDF models inverted against multi-angle data from a digital airborne frame camera for enhancing forest type classification, *Remote sensing of environment*, 151 (2014) 27-43.
- [188] V.V. Kulish, J.L. Lage, Application of fractional calculus to fluid mechanics, *Journal of Fluids Engineering*, 124 (2002) 803-807.
- [189] A.S. Kumar, An analytical solution to applied mathematics-related Love's equation using the Boubaker polynomials expansion scheme, *Journal of the Franklin Institute*, 374(9) (2010) 1755-1761.
- [190] R. Kumar, R. Koundal, K. Srivastava, New wavelet method based on Shifted Lucas polynomials: A tau approach, *arXiv preprint arXiv:2003.00778*, (2020).
- [191] W. Kuś, Application of global optimization methods in multiscale inverse problem solution, In *International Conference on Engineering Optimization*, (2018) 1133-1138, Springer, Cham.
- [192] S.E. Kutluay, A.L. Esen, A finite difference solution of the regularized long-wave equation, *Mathematical Problems in Engineering*, (2006) 2006.
- [193] T. Kwon, Y. Li, T. Sawada, Z. Pizlo, Gestalt-like constraints produce veridical (Euclidean) percepts of 3D indoor scenes, *Vision research*, 126 (2016) 264-277.
- [194] M. Labidi, K. Omrani, Numerical simulation of the modified regularized long wave equation by He's variational iteration method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(2) (2011) 478-489.
- [195] M. Lakestani, Numerical solution for the Falkner-Skan equation using Chebyshev cardinal functions, *Acta Universitatis Apulensis*, 27 (2011) 229-238.
- [196] M. Lakestani, M. Dehghan, The use of Chebyshev cardinal functions for the solution of a partial differential equation with an unknown time-dependent coefficient subject to an extra measurement, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(3) (2010) 669-678.
- [197] S. Lazzez, K.B. Mahmoud, S. Abroug, F. Saadallah, M. Amlouk, A Boubaker polynomials expansion scheme (BPES)-related protocol for measuring sprayed thin films thermal characteristics, *Current Applied Physics*, 9(5) (2009) 1129-1133.
- [198] N. Lesparre, A. Boyle, B. Grychtol, J. Cabrera, J. Marteau, A. Adler, Electrical resistivity imaging in transmission between surface and underground tunnel for fault characterization, *Journal of Applied Geophysics*, 128 (2016) 163-178.
- [199] K.M. Levere, Changes in habitat of fish populations: An inverse problem, *Mathematical Biosciences*, 278 (2016) 48-55.

- [200] X. Li, P.J. Wong, A higher order non-polynomial spline method for fractional sub-diffusion problems, *Journal of Computational Physics*, 328 (2017) 46-65.
- [201] X. Li, B. Wu, A new reproducing kernel collocation method for nonlocal fractional boundary value problems with non-smooth solutions, *Applied Mathematics Letters*, 86 (2018) 194-199.
- [202] C. Li, F. Zeng, *Numerical methods for fractional calculus*, CRC press, New York, 2015.
- [203] N. Linde, P. Renard, T. Mukerji, J. Caers, Geological realism in hydrogeological and geophysical inverse modeling: A review, *Advances in Water Resources*, 86 (2015) 86-101.
- [204] F. Liu, B.M. Robinson, P. Reardon, J.M. Geary, Analyzing optics test data on rectangular apertures using 2-D Chebyshev polynomials, *Optical Engineering*, 50(4) (2011) 043609.
- [205] F. Liu, X. Ye, X. Wang, Efficient Chebyshev spectral method for solving linear elliptic PDEs using quasi-inverse technique, *Numerical Mathematics, Theory, Methods and Applications*, 4(2) (2011) 197-215.
- [206] J. Llibre, R. Ramírez, *Inverse problems in ordinary differential equations and applications*, Birkhäuser, 2016.
- [207] A. Loeb, C. Earls, Optimized inspection design for the thermographic characterization of sub-pixel sized through cracks, *Nondestructive Testing and Evaluation International*, 82 (2016) 44-55.
- [208] H.A. Looka, Polynomial equations from ancient to modern times – a review, *University Bulletin*, 16(2) (2014).
- [209] A.M. Lopes, J.T. Machado, D. Baleanu, Fractional-order modeling of electro-impedance spectroscopy information, *In Applications in engineering, life and social sciences, part A*, (2019) 21-42, De Gruyter Berlin, Boston.
- [210] C.Y. Ma, J.M. Zhao, L.H. Liu, L. Zhang, X.C. Li, B.C. Jiang, GPU-accelerated inverse identification of radiative properties of particle suspensions in liquid by the Monte Carlo method, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 172 (2016) 146-159.
- [211] R.L. Magin, Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues, *Computers and Mathematics with Applications*, 59(5) (2010) 1586-1593.

- [212] F.S. Magnani, R.N. da Silva, Influence of the errors in an infrared camera on the estimation of thermal conductivity and thermal capacity of a gypsum plaster sample, *Infrared Physics Technology*, 57 (2013) 14-20.
- [213] F. Mainardi, G. Spada, Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology, *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1) (2011) 133-160.
- [214] A.J. Majeed, Reliable iterative methods for solving the Falkner-Skan equation, *Gazi University Journal of Science*, 33(1) (2020) 168-186.
- [215] M. Manzur, M. ur Rahman, M. Khan, Computational study of Falkner-Skan flow of chemically reactive Cross nanofluid with heat generation/absorption, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, (2020) 124267.
- [216] M.J. Martin, I.D. Boyd, Falkner-Skan flow over a wedge with slip boundary conditions, *Journal of thermophysics and heat transfer*, 24(2) 2010) 263-270.
- [217] J.C. Mason, D.C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, CRC press, 2002.
- [218] J.D. Meiss, W. Horton, Fluctuation spectra of a drift wave soliton gas, *The Physics of Fluids*, 25(10) (1982) 1838-1843.
- [219] P. Melchior, S. Victor, M. Pellet, J. Petit, J.M. Cabelguen, A. Oustaloup, Skeletal muscle modeling by fractional multi-models: analysis of length effect, *Applications in Engineering, Life and Social Sciences*, 22 (2019) 95-118.
- [220] F.C. Meral, T.J. Royston, R. Magin, Fractional calculus in viscoelasticity: an experimental study, *Communications in nonlinear science and numerical simulation*, 15 (2010) 939-945.
- [221] C. Milici, G. Drăgănescu, J.T. Machado, *Introduction to fractional differential equations*, Springer, 2019.
- [222] F. Mirzaee, S.F. Hoseini, Solving singularly perturbed differential-difference equations arising in science and engineering with Fibonacci polynomials, *Results in Physics*, 3 (2013) 134-141.
- [223] F. Mirzaee, N. Samadyar, Application of orthonormal Bernstein polynomials to construct a efficient scheme for solving fractional stochastic integro-differential equation, *Optik*, 132 (2017) 262-273.
- [224] A.K. Mittal, L.K. Balyan, D. Tiger, Numerical solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burger (BBMB) and regularized long-wave (RLW) equations using time-space pseudo-spectral method, In *Journal of Physics: Conference Series*, 1039(1) (2018) 012002.

- [225] B.P. Moghaddam, A. Dabiri, A.M. Lopes, J.T. Machado, Numerical solution of mixed-type fractional functional differential equations using modified Lucas polynomials, *Computational and Applied Mathematics*, 38(2) (2019) 46.
- [226] M. Mohammadi, R. Mokhtari, H. Panahipour, Solving two parabolic inverse problems with a nonlocal boundary condition in the reproducing kernel space, *Applied and Computational Mathematics*, 13(1) (2014) 91-106.
- [227] S.T. Mohyud-Din, A. Ali, B. Bin-Mohsin, On biological population model of fractional order, *Int. J. Biomath.*, 9 (2016) 13.
- [228] S.T. Mohyud-Din, S. Bibi, Exact solutions for nonlinear fractional differential equations using exponential rational function method, *Optical and Quantum Electronics*, 49(2) (2017) 64.
- [229] S.T. Mohyud-Din, H. Khan, M. Arif, M. Rafiq, Chebyshev wavelet method to nonlinear fractional Volterra–Fredholm integro-differential equations with mixed boundary conditions, *Advances in Mechanical Engineering*, 9(3) (2017) 1687814017694802.
- [230] M.M. Mokhtar, A.S. Mohamed, Lucas polynomials semi-analytic solution for fractional multi-term initial value problems, *Advances in Difference Equations*, 2019(1) (2019) 1-3.
- [231] S. Momani, K. Al-Khaled, Numerical solutions for systems of fractional differential equations by the decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 162 (2005) 1351–1365
- [232] B.J. Moore, Inverse problems in seismic surveys, In *Mini Conference on Inverse Problems in Partial Differential Equations*, (1992) 64-68, Centre for Mathematics and its Applications, Mathematical Sciences Institute, The Australian National University.
- [233] A.V. Murthy, j.G. Verwer, Solving parabolic integro-differential equations by an explicit integration method, *Journal of computational and applied mathematics*, 39(1) (1992) 121-132.
- [234] P. Muthukumar, B. Ganesh Priya, Numerical solution of fractional delay differential equation by shifted Jacobi polynomials, *International Journal of Computer Mathematics*, 94(3) (2017) 471-492.
- [235] S. Nadeem, S. Ahmad, N. Muhammad, Computational study of Falkner-Skan problem for a static and moving wedge, *Sensors and Actuators B: Chemical*, 263 (2018) 69-76.
- [236] M. Nadir, Lucas polynomials for solving linear integral equations, *Journal of Theoretical and Applied Computer Science*, 11(1) (2017) 13-19.

- [237] Y.S. Nashed, T. Peterka, J. Deng, C. Jacobsen, Distributed automatic differentiation for ptychography, Argonne National Lab.(ANL), Argonne, IL (United States), (2017).
- [238] H. Nasr, I.A. Hassanien, H.M. El-Hawary, Chebyshev solution of laminar boundary layer flow, International journal of computer mathematics, 33(1-2) (1990) 127-132.
- [239] P. Natalini, P.E. Ricci, Solution of linear dynamical systems using Lucas polynomials of the second kind, Applied Mathematics, 7(07) (2016) 616.
- [240] S. Nemati, A. Babaei, S. Sedaghat, A numerical algorithm based on Chebyshev polynomials for solving some inverse source problems, Mathematical Researches, 2(1) (2016) 47-68.
- [241] A. Nematy, E. Yilmaz, S. Akbarpoor, A. Dabbaghian, Numerical solution of singular inverse nodal problem by using Chebyshev polynomials, Konuralp Journal of Mathematics, 5(2) (2017) 131-145.
- [242] F.D. Neto, A.J. da Silva Neto, An introduction to inverse problems with applications, Springer Science and Business Media, 2012.
- [243] J.P. Neto, D. Valério, S. Vinga, Variable-order derivatives and bone remodeling in the presence of metastases, Applications in Engineering, Life and Social Sciences, 22 (2019) 69.
- [244] P. Nevai, A new class of orthogonal polynomials, Proceedings of the American Mathematical Society, 91(3) (1984) 409-415.
- [245] L.T. Nguyen, T. Nestorović, Unscented hybrid simulated annealing for fast inversion of tunnel seismic waves, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 301 (2016) 281-299.
- [246] I. Nowak, Bayesian method for the solution of an engineering design inverse problem, In International Conference on Engineering Optimization, (2018) 307-314, Springer, Cham.
- [247] S. Oh, An efficient spectral method to solve multi-dimensional linear partial different equations using Chebyshev polynomials, Mathematics, 7(1) (2019) 90.
- [248] A.S. Olagunju, L. Joseph Folake, Third-kind Chebyshev polynomials $V_r(x)$ in collocation methods of solving boundary value problems, International Organization Of Scientific Research, 7 (2013) 42-47.
- [249] K.B. Oldham, J. Myland, J. Spanier, An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator, Springer Science and Business Media, 2010.

- [250] R. Oliveros-Ramos, P. Verley, V. Echevin, Y.J. Shin, A sequential approach to calibrate ecosystem models with multiple time series data, *Progress in Oceanography*, 151 (2017) 227-244.
- [251] K. Omrani, The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin–Bona–Mahony (BBM) equation, *Applied mathematics and computation*, 180(2) (2006) 614-621.
- [252] K. Omrani, M. Ayadi, Finite difference discretization of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24 (2008) 239-248.
- [253] K. Omrani, M. Ayadi, Finite difference discretization of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 24(1) (2008) 239-248.
- [254] Ö. Oruç, A new algorithm based on Lucas polynomials for approximate solution of 1d and 2d nonlinear generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation, *Comput. Math. Appl.* 74 (2017) 3042–3057.
- [255] Ö. Oruç, A computational method based on hermite wavelets for two-dimensional Sobolev and regularized long wave equations in fluids, *Numer. Methods Part. Differ. Eq.* 34 (2018) 1693–1715 .
- [256] Ö. Oruç, F.A. Bulut, A.L. Esen, Numerical solutions of regularized long wave equation by Haar wavelet method, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(5) (2016) 3235-3253.
- [257] S. Ossandón, C. Reyes, C.M. Reyes, Neural network solution for an inverse problem associated with the Dirichlet eigenvalues of the anisotropic Laplace operator, *Computers Mathematics with Applications*, 72(4) (2016) 1153-1163.
- [258] S. Ossandón, C. Reyes, P. Cumsille, C.M. Reyes, Neural network approach for the calculation of potential coefficients in quantum mechanics, *Computer Physics Communications*, 214 (2017) 31-38.
- [259] J.T. Ottesen, J. Mehlsen, M.S. Olufsen, Structural correlation method for model reduction and practical estimation of patient specific parameters illustrated on heart rate regulation, *Mathematical biosciences*, 257 (2014) 50-59.
- [260] O.D. Oyodum, O.B. Awojoyogbe, M. Dada, J. Magnuson, On the earliest definition of the Boubaker polynomials, *European Physical Journal Applied Physics*, 46 (2009) 21201-21203.
- [261] K.M. Owolabi, A. Atangana, *Numerical methods for fractional differentiation*, Springer Singapore, 2019.

- [262] N. Ozalp, I. Koca, A fractional order nonlinear dynamical model of interpersonal relationships, *Advances in Difference Equations*, 2012(1) (2012) 189.
- [263] E. Özkan, İ. Altun, Generalized Lucas polynomials and relationships between the Fibonacci polynomials and Lucas polynomials, *Communications in Algebra*, 47(10) (2019) 4020-4030.
- [264] C. Padra, N.N. Salva, Locating multiple tumors by moving shape analysis, *Mathematical biosciences*, 245(2) (2013) 103-110.
- [265] M. Pakdaman, A. Ahmadian, S. Effati, S. Salahshour, D. Baleanu, Solving differential equations of fractional order using an optimization technique based on training artificial neural network, *Applied Mathematics and Computation*, 293 (2017) 81-95.
- [266] A. Pantokratoras, Discussion: "Mixed convection Falkner-Skan flow of a Maxwell fluid (Hayat, T., Farooq, M., Iqbal, Z., and Alsaedi, A., *ASME J. Heat Transfer*, 2012, 134 (11), p. 114504", *Journal of Heat Transfer*, 140(5) (2018).
- [267] K. Parand, M. Dehghan, A. Pirkhedri, The use of Sinc-collocation method for solving Falkner-Skan boundary-layer equation, *International journal for numerical methods in fluids*, 68(1) (2012) 36-47.
- [268] K. Parand, S. Hashemi, A. Ghaderi, Application of Gegenbaer neural network to solve the MHD Falkner-Skan flow, In the second national conference on meta-heuristic algorithms and their applications in engineering and science, (2017).
- [269] K. Parand, N. Pakniat, Z. Delafkar, Numerical solution of the Falkner-Skan equation with stretching boundary by collocation method, *International Journal of Nonlinear Science*, 11(3) (2011) 275-283.
- [270] K. Parand, H. Yousefi, M. Fotouhifar, M. Delkhosh, M. Hosseinzadeh, Shifted Boubaker Lagrangian approach for solving biological systems, *International Journal of Biomathematics*, 11(03) (2018) 1850039.
- [271] S. Parveen, Numerical solution of the Falkner Skan equation by using shooting techniques, *International Organization of Scientific Research Journal of Mathematics*, 10(6) (2014) 78-83.
- [272] A.M. Pasqual, A patch near-field acoustical holography procedure based on a generalized discrete Fourier series, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 80 (2017) 285-297.
- [273] V.D. Pavlović, N.S. Dončov, D.G. Ćirić, 1D and 2D economical FIR filters generated by Chebyshev polynomials of the first kind, *International Journal of Electronics*, 100(11) 2013) 1592-1619.

- [274] V. Penenko, A. Baklanov, E. Tsvetova, Methods of sensitivity theory and inverse modeling for estimation of source parameters, *Future Generation Computer Systems*, 18(5) (2002) 661-671.
- [275] A. Pereira, J. Antoni, Q. Leclere, Empirical Bayesian regularization of the inverse acoustic problem, *Applied Acoustics*, 97 (2015) 11-29.
- [276] F.C. Peters, E.F. Junior, W.J. Mansur, D.M. Soares Filho, C.D. Monteiro, P. Carvalho, An adaptive meshless parameterization for full waveform inversion, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 83 (2017) 113-122.
- [277] G. Pillonetto, F. Dinuzzo, T. Chen, G. De Nicolao, L. Ljung, Kernel methods in system identification, machine learning and function estimation: A survey, *Automatica*, (2014) 657-682.
- [278] Z. Pinar, T. Ozis T, The solutions of nonlinear heat conduction equation via Fibonacci and Lucas approximation method, *arXiv preprint arXiv:1511.01787*, (2015).
- [279] J.R. Piqueira, V.O. Araujo, A modified epidemiological model for computer viruses, *Applied Mathematics and Computation*, 213(2) (2009) 355-360.
- [280] I. Podlubny, Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 5 (2002) 367-386.
- [281] A. Postelnicu, I. Pop, Falkner-Skan boundary layer flow of a power-law fluid past a stretching wedge, *Applied Mathematics and Computation*, 217(9) (2011) 4359-4368.
- [282] Y. Povstenko, *Fractional thermoelasticity*, New York: Springer, 2015.
- [283] Y. Povstenko, *Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers*, Switzerland: Springer International Publishing, 2015.
- [284] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, CRC Press, 2000.
- [285] K. Rabiei, Y. Ordokhani, Solving fractional pantograph delay differential equations via fractional-order Boubaker polynomials, *Engineering with Computers*, 35(4) (2019) 1431-1441.
- [286] K. Rabiei, Y. Ordokhani, E. Babolian, The Boubaker polynomials and their application to solve fractional optimal control problems, *Nonlinear Dynamics*, 88(2) (2017) 1013-1026.
- [287] K. Rabiei, Y. Ordokhani, E. Babolian, Fractional-order Boubaker functions and their applications in solving delay fractional optimal control problems, *Journal of Vibration and Control*, 24(15) (2018) 3370-3383.

- [288] P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, A numerical scheme based on Bernoulli wavelets and collocation method for solving fractional partial differential equations with Dirichlet boundary conditions, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 35(1) (2019) 34-59.
- [289] P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, Numerical solution of fractional pantograph differential equations by using generalized fractional-order Bernoulli wavelet, *Journal of Computational and applied mathematics*, 309 (2017) 493-510.
- [290] C.S. Raju, N. Sandeep, Nonlinear radiative magnetohydrodynamic Falkner-Skan flow of Casson fluid over a wedge, *Alexandria Engineering Journal*, 55(3) (2016) 2045-2054.
- [291] M.A Ramadan, K.R. Raslan, T.S. El Danaf, M.A. El Salam, An exponential Chebyshev second kind approximation for solving high-order ordinary differential equations in unbounded domains, with application to Dawson's integral, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 25(2) (2017) 197-205.
- [292] M.A Ramadan, K.R. Raslan, T.S. El Danaf, M.A. El Salam, On the exponential Chebyshev approximation in unbounded domains: A comparison study for solving high-order ordinary differential equations, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 105(3) (2015) 399-413.
- [293] A. Rashid, A three-levels finite difference method for nonlinear regularized long-wave equation. *Mem, Differential Equations Math. Phys*, 34 (2005) 135-146.
- [294] K.R. Raslan, A computational method for the regularized long wave (RLW) equation, *Applied Mathematics and Computation*, 167(2) (2005) 1101-1118.
- [295] M.A. Raupp, Galerkin methods applied to the Benjamin-Bona-Mahony equation, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, 6(1) (1975) 65-77.
- [296] S.S. Ray, *Fractional calculus with applications for nuclear reactor dynamics*, CRC press, 2015.
- [297] R.F. Ren, H.B. Li, W. Jiang, M.Y. Song, An efficient Chebyshev-tau method for solving the space fractional diffusion equations, *Applied Mathematics and Computation*, 224 (2013) 259-267.
- [298] F.A. Rihan, On fractional order cancer model, *Journal of Fractional Calculus and Applied Analysis*, 3 (2012) 1-6.
- [299] T.J. Rivlin, *Chebyshev polynomials*, Courier Dover Publications, 2020.

- [300] L. Rosenhead, editor, Laminar boundary layers: an account of the development, structure, and stability of laminar boundary layers in incompressible fluids, together with a description of the associated experimental techniques, Dover Publications, (1988).
- [301] L. Rubio, J. Fernández-Sáez, A. Morassi, Point mass identification in rectangular plates from minimal natural frequency data, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 80 (2016) 245-261.
- [302] A. Saadatmandi, M. Dehghan, A new operational matrix for solving fractional-order differential equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010) 1329-1336.
- [303] A. Saadatmandi, M. Dehghan, Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the Chebyshev tau method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations, An International Journal*, 26(1) (2010) 239-252.
- [304] S. Sabermahani, Y. Ordokhani, S.A. Yousefi, Fractional-order Lagrange polynomials: An application for solving delay fractional optimal control problems, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 41(11) (2019) 2997-3009.
- [305] A. Sadhu, S. Narasimhan, J. Antoni, A review of output-only structural mode identification literature employing blind source separation methods, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 94 (2017) 415-431.
- [306] H. Saeedi, M. Mohseni Moghadam, Numerical solution of nonlinear Volterra integrodifferential equations of arbitrary order by CAS wavelets, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16 (2011) 1216-1226
- [307] A.K. Saibaba, P.K. Kitanidis, Fast computation of uncertainty quantification measures in the geostatistical approach to solve inverse problems, *Advances in Water Resources*, 82 (2015) 124-138.
- [308] M.R. Sakran, Numerical solutions of integral and integro-differential equations using Chebyshev polynomials of the third kind, *Applied Mathematics and Computation*, 351 (2019) 66-82.
- [309] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.
- [310] M. Sanayei, P. Rohela, Automated finite element model updating of full-scale structures with PARAmeter Identification System (PARIS), *Advances in Engineering Software*, 67 (2014) 99-110.
- [311] D. Sanjaya, K. Fidkowski, I. Tobasco, Adjoint-accelerated statistical and deterministic inversion of atmospheric contaminant transport, *Computers and Fluids*, 100 (2014) 291-307.

- [312] R. Saxena, S.L. Kalla, Solution of space-time fractional Schrödinger equation occurring in quantum mechanics, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 13(2) (2010) 177-190.
- [313] N. Sebaa, Z.E.A. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier, Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone, *Signal Processing*, 86 (2006) 2668-2677.
- [314] L. Seminara, M. Capurro, M. Valle, Tactile data processing method for the reconstruction of contact force distributions, *Mechatronics*, 27 (2015) 28-37.
- [315] A. Sever, A neural network algorithm to pattern recognition in inverse problems, *Applied Mathematics and Computation*, 221 (2013) 484-490.
- [316] M. Sezer, M. Gülsu, B. Tanay, Rational Chebyshev collocation method for solving higher-order linear ordinary differential equations, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 27(5) (2011) 1130-1142.
- [317] J. Shen, Efficient spectral-Galerkin method II. Direct solvers of second-and fourth-order equations using Chebyshev polynomials, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(1) (1995) 74-87.
- [318] H. Sheng, Y. Chen, T. Qiu, *Fractional processes and fractional-order signal processing: techniques and applications*, Springer Science and Business Media, 2011.
- [319] S.C. Shiralashetti, S. Kumbinarasaiah, Theoretical study on continuous polynomial wavelet bases through wavelet series collocation method for nonlinear Lane–Emden type equations, *Applied Mathematics and computation*, 315 (2017) 591-602.
- [320] E. Shivanian, A. Jafarabadi, More accurate results for nonlinear generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (GBMB) problem through spectral meshless radial point interpolation (SMRPI), *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 72 (2016) 42-54.
- [321] D.I. Shuman, P. Vandergheynst, P. Frossard, Chebyshev polynomial approximation for distributed signal processing, In *2011 International Conference on Distributed Computing in Sensor Systems and Workshops (DCOSS)*, (2011) 1-8, IEEE.
- [322] H. Singh, Approximate solution of fractional vibration equation using Jacobi polynomials, *Applied Mathematics and Computation*, 317 (2018) 85-100.
- [323] S.J. Singh, A. Chatterjee, Three classes of FDEs amenable to approximation using a Galerkin technique, In *Advances in Fractional Calculus*, (2007) 3-14, Springer, Dordrecht.

- [324] R. Singh, P. Davies, A.K. Bajaj, Identification of nonlinear and viscoelastic properties of flexible polyurethane foam, *Nonlinear Dynamics*, 34(3-4) (2003) 319-346.
- [325] S. Slama, M. Bouhafs, K.B. Mahmoud, A boubaker polynomials solution to heat equation for monitoring A3 point evolution during resistance spot welding, *International Journal of Heat and Technology*, 26(2) (2008) 141-146.
- [326] S. Soltani, R. Andersson, B. Andersson, Enhancement of time resolution in transient kinetics, *Chemical Engineering Journal*, 254 (2015) 188-196.
- [327] J.C. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*, Siam, 2004.
- [328] V. Szebehely, Open problems on the eve of the next millennium, In *The Dynamical Behaviour of our Planetary System*, (1997) 205-211.
- [329] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, Fourth ed, 1975.
- [330] S.A. Tabatabaei-Nejad, E. Khodapanah, Application of Chebyshev polynomials to predict phase behavior of fluids containing asphaltene and associating components using SAFT equation of state, *Fuel*, 89(9) (2010) 2511-2521.
- [331] Y. Talaei, M.J. Asgari, An operational matrix based on Chelyshkov polynomials for solving multi-order fractional differential equations, *Neural Computing and Applications*, 30(5) (2018) 1369-1376.
- [332] S.M. Tan, C. Fox, G.K. Nicolls, *Physics 707 inverse problems*, Lecture Notes The University of Auckland, 2006.
- [333] H. Tari, D.D. Ganji, Approximate explicit solutions of nonlinear BBMB equations by He's methods and comparison with the exact solution, *Physics Letters A*, 367(1-2) (2007) 95-101.
- [334] M. Tatari, M. Dehghan, He's variational iteration method for computing a control parameter in a semi-linear inverse parabolic equation, *Chaos, Solitons Fractals*, 33(2) (2007) 671-677.
- [335] H. Temimi, M. Ben-Romdhane, Numerical solution of falkner-skan equation by iterative transformation method, *Mathematical Modelling and Analysis*, 23(1) (2018) 139-151.
- [336] I.A. Tirmizi, A numerical technique for solution of the MRLW equation using quartic B-splines, *Applied Mathematical Modelling*, 34(12) (2010) 4151-4160.
- [337] M. Turkyilmazoglu, Slip flow and heat transfer over a specific wedge: an exactly solvable Falkner-Skan equation, *Journal of Engineering Mathematics*, 92(1) (2015) 73-81.

- [338] K. Van Bockstal, L. Marin, Recovery of a space-dependent vector source in anisotropic thermoelastic systems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 321 (2017) 269-293.
- [339] A. Vatulyan, S. Nesterov, R. Nedin, Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 128 (2019) 1157-1167.
- [340] W. Wang, B. Han, M. Yamamoto, Inverse heat problem of determining time-dependent source parameter in reproducing kernel space, *nonlinear Analysis: real world applications*, 14(1) (2013) 875-887.
- [341] L. Wei, Analysis of a new finite difference/local discontinuous Galerkin method for the fractional diffusion-wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 304 (2017) 180-189.
- [342] J. Weng, D.C. Clark, M.K. Kim, Compressive sensing sectional imaging for single-shot in-line self-interference incoherent holography, *Optics Communications*, 366 (2016) 88-93.
- [343] G.B. Whitham, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley and Sons, New York, 1974.
- [344] M. Xiang-Fei, C. Ying, L. Yu-Bin, A quenched study for QCD phase-transition on anisotropic lattices, *Communications in Theoretical Physics*, 52(4) (2009) 665.
- [345] N.A. Yacob, A. Ishak, I. Pop, Falkner–Skan problem for a static or moving wedge in nanofluids, *International Journal of Thermal Sciences*, 50(2) (2011) 133-139.
- [346] X.J. Yang, J.A. Tenreiro Machado, H.M. Srivastava, A new numerical technique for solving the local fractional diffusion equation: Two-dimensional extended differential transform approach, *Applied Mathematics and Computation*, 274 (2016) 143-151.
- [347] B. Yao, Approximate analytical solution to the Falkner–Skan wedge flow with the permeable wall of uniform suction, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14(8) (2009) 3320-3326.
- [348] H. Yaslan, Numerical solution of fractional Riccati differential equation via shifted Chebyshev polynomials of the third kind, *Journal of Engineering Technology and Applied Sciences*, 2(1) (2017) 1-11.
- [349] M. Yavuz, N. Özdemir, Numerical inverse Laplace homotopy technique for fractional heat equations, *Thermal Science*, 22(1) (2018) 185-194.
- [350] A. Yildirim, S.T. Mohyud-Din, D.H. Zhang, Analytical solutions to the pulsed Klein–Gordon equation using modified variational iteration method (MVIM) and Boubaker

- polynomials expansion scheme (BPES), Computers and Mathematics with Applications, 59(8) (2010) 2473-2477.
- [351] W.K. Zahra, M. Van Daele, Discrete spline methods for solving two point fractional Bagley–Torvik equation, Applied Mathematics and Computation, 296 (2017) 42-56.
- [352] V.D. Zakharchenko, I.G. Kovalenko, Best approximation of the fractional semi-derivative operator by exponential series, Mathematics, 6(1) (2018) 12.
- [353] A. Zanini, A.D. Woodbury, Contaminant source reconstruction by empirical Bayes and Akaike’s Bayesian information criterion, Journal of contaminant hydrology, 185 (2016) 74-86.
- [354] M. Zarebnia, Numerical study of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, 35 (2017) 127-138.
- [355] M. Zarebnia, R. Parvaz, On the numerical treatment and analysis of Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation, Applied Mathematics and Computation, 284 (2016) 79-88.
- [356] J. Zhang, B. Chen, An iterative method for solving the Falkner–Skan equation, Applied Mathematics and Computation, 210(1) (2009) 215-222.
- [357] L. Zhang, L. Fan, Z. Yu, R. Mei, Correlating convection heat transfer for Falkner–Skan flow, International Journal of Heat and Mass Transfer, 131 (2019) 101-108.
- [358] Y.X. Zhang, J. Jia, L. Yan, Bayesian approach to a nonlinear inverse problem for a time-space fractional diffusion equation, Inverse Problems, 34(12) (2018) 125002.
- [359] H. Zhang, X. Jiang, X. Yang, A time-space spectral method for the time-space fractional Fokker–Planck equation and its inverse problem, Applied Mathematics and Computation, 320 (2018) 302-318.
- [360] D.H. Zhang, F.W. Li, Boubaker Polynomials Expansion Scheme (BPES) optimisation of copper tin sulfide ternary materials precursor’s ratio-related properties, Materials Letters, 64(6) (2010) 778-780.
- [361] H. Zhang, G.M. Wei, Y.T. Gao, On the general form of the Benjamin–Bona–Mahony equation in fluid mechanics, Czechoslovak Journal of Physics, 52 (2002) 344–373.
- [362] X. Zhang, C. Wei, Y. Liu, M. Luo, Fractional corresponding operator in quantum mechanics and applications: A uniform fractional Schrödinger equation in form and fractional quantization methods, Annals of Physics, 350 (2014) 124-136.



- [363] Y. Zhao, P. Chen, W. Bu, X. Liu, Y. Tang, Two mixed finite element methods for time-fractional diffusion equations, *Journal of Scientific Computing*, 70(1) (2017) 407-428.
- [364] T. Zhao, X. Zhang, J. Huo, W. Su, Y. Liu, Y. Wu, Optimal error estimate of Chebyshev-Legendre spectral method for the generalised Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations, In *Abstract and Applied Analysis*, 2012 (2012).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Initial	آغازی
Perturbation	اختلال
Rossby waves	امواج راسبی
Biological tissues	بافت‌های زیست شناختی
Upper	بالایی
Ill-posedness	بدوضع
Expansion	بسط
Deconvolution	پادهمامیخت
Lower	پایینی
Shooting	پرتابی
Image processing	پردازش تصویر
Gamma function	تابع گاما
Generating function	تابع مولد
Mittag-Leffler function	تابع میتاژ-لفلر
Weight function	تابع وزن
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Concavity	تقعر
Radial basis functions	توابع پایه ای شعاعی
Chebyshev cardinal functions	توابع کاردینال چیشف
Maxwell fluid mixed convection	جابجایی مخلوط سیال ماکسول
Flows	جریان
Exact solution	جواب دقیق
Numerical solution	جواب عددی
Multiple	چندگانه

چندجمله‌ای	Polynomial
چندجمله‌ای‌های برنشتاین	Bernstein polynomials
چندجمله‌ای‌های بوبیکر	Boubaker polynomials
چندجمله‌ای‌های چیشف	Chebyshev polynomials
چندجمله‌ای‌های لوکاس	Lucas polynomials
چندجمله‌ای‌های متعامد	Orthogonal polynomials
حساب کسری	Fractional calculus
خطا	Error
خطای مطلق	Absolute error
درونیابی	Interpolation
دستگاه متعامد	Orthogonal system
دستگاه مزدوج	Coupled system
دقیق	Exact
دقت	Accuracy
دلخواه	Arbitrary
رابطه بازگشتی	Recurrence relation
روش بدون شبکه	Meshless method
روش پراکندگی معکوس	Inverse scattering method
روش تحلیلی هموتوپي	Homotopy analysis method
روش تکراری وردشی تعدیل یافته	Modified variational iteration method
روش تکراری وردشی تعدیل یافته	modified variational iteration method
روش تکراری وردشی هی	He's variational iteration method
روش چیشف-گالرکین	Chebyshev-Galerkin method
روش شبکه عصبی	Neural network method
روش شبه-طیفی	Pseudo-spectral method
روش عضو مرزی	Boundary element method
روش طیفی هم محلی چیشف	Chebyshev collocation spectral method
روش هم محلی چیشف انتقال یافته	Shifted Chebyshev collocation method
روش موجک هار	Haar wavelet method
روش هم محلی	Collocation method
شبیه‌نگار	Pantograph
شرط	Condition

Nonlocal boundary condition.....	شرط مرزی غیرموضعی.....
Radial.....	شعاعی.....
Inner product.....	ضرب داخلی.....
Coefficient.....	ضریب.....
Diffusion coefficient.....	ضریب نفوذ.....
Implicitly.....	ضمنی.....
Scheme.....	طرح.....
Operator.....	عملگر.....
Sturm-Liouville operator.....	عملگر اشتروم-لیوویل.....
Weierstrass approximation theorem.....	قضیه تقریب وایرشتراس.....
Viscosity.....	گرانروی.....
Kinematic viscosity.....	گرانروی حرکتی.....
Time discretization.....	گسسته سازی زمانی.....
High-order.....	مرتبه بالا.....
Boundary.....	مرزی.....
Inverse problems.....	مسائل معکوس.....
Parabolic inverse problems.....	مسائل معکوس سهموی.....
Nonlinear.....	غیرخطی.....
Transport phenomena problem.....	مسأله پدیده جابجایی.....
Indirect problem.....	مسأله غیرمستقیم.....
Nonlocal.....	غیرموضعی.....
Residual.....	مانده.....
Direct problem.....	مسأله مستقیم.....
Riemann-Liouville derivative.....	مشتق ریمان-لیوویل.....
Caputo derivative.....	مشتق کاپوتو.....
Fractional derivative.....	مشتق کسری.....
Blasius equation.....	معادله بلاسیوس.....
Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation.....	معادله بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز.....
Falkner-Skan equation.....	معادله فالکنر-اسکن.....
Valid.....	معتبر.....
Fracture mechanics.....	مکانیک شکست.....
Regularized long wave.....	موج بلند منظم.....



Local	موضعی
Grid points	نقاط شبکه ای
Regular grid points	نقاط شبکه ای منظم
Oscillating	نوسانی
Existence	وجود
Convergence	همگرایی
Geometric	هندسی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accuracy	دقت
Absolute error	خطای مطلق
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Arbitrary	دلخواه
Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation	معادله بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز
Bernstein polynomials	چندجمله‌ای‌های برنشتاین
Biological tissues	بافت‌های زیست شناختی
Blasius equation	معادله بلاسیوس
Boubaker polynomials	چندجمله‌ای‌های بوبیکر
Rational polynomials	چندجمله‌ای‌های گویا
Boundary	مرزی
Boundary element method	روش عضو مرزی
Caputo derivative	مشتق کاپوتو
Chebyshev polynomials	چندجمله‌ای‌های چبیشف
Chebyshev cardinal functions	توابع کاردینال چبیشف
Chebyshev collocation spectral method	روش طیفی هم محلی چبیشف
Chebyshev-Galerkin method	روش چبیشف-گالرکین
Coefficient	ضریب
Collocation method	روش هم محلی
Condition	شرط
Convergence	همگرایی
Coupled system	دستگاه مزدوج
Deconvolution	پادهمامیخت
Diffusion coefficient	ضریب نفوذ

مسأله مستقیم	Direct problem
خطا	Error
دقیق	Exact
جواب دقیق	Exact solution
وجود	Existence
بسط	Expansion
معادله فالکنر-اسکن	Falkner-Skan equation
جریان	Flows
حساب کسری	Fractional calculus
مشتق کسری	Fractional derivative
مکانیک شکست	Fracture mechanics
تابع گاما	Gamma function
تابع مولد	Generating function
هندسی	Geometric
نقاط شبکه ای	Grid points
روش موجک هار	Haar wavelet method
روش تکراری وردشی هی	He's variational iteration method
مرتبه بالا	High-order
روش تحلیلی هموتویی	Homotopy analysis method
بدوضعی	Ill-posedness
پردازش تصویر	Image processing
ضمنی	Implicitly
مسأله غیرمستقیم	Indirect problem
آغازی	Initial
ضرب داخلی	Inner product
درونیایی	Interpolation
مسائل معکوس	Inverse problems
روش پراکندگی معکوس	Inverse scattering method
گرانروی حرکتی	Kinematic viscosity
خطی	Linear
موضعی	Local
پایینی	Lower

Lucas polynomials.....	چندجمله ایهای لوکاس
Maxwell fluid mixed convection.....	جابجایی مخلوط سیال ماکسول
Meshless method.....	روش بدون شبکه
Mittag-Leffler function.....	تابع میتاژ-لفلر
Modified variational iteration method.....	روش تکراری وردشی تعدیل یافته
Multiple.....	چندگانه
Neural network method.....	روش شبکه عصبی
Nonlinear.....	غیرخطی
Nonlocal.....	غیرموضعی
Nonlocal boundary condition.....	شرط مرزی غیرموضعی
Numerical solution.....	جواب عددی
Operator.....	عملگر
Orthogonal polynomials.....	چندجمله ایهای متعامد
Orthogonal system.....	دستگاه متعامد
Oscillating.....	نوسانی
Pantograph.....	شبیه‌نگار
Parabolic inverse problems.....	مسائل معکوس سهموی
Period.....	دوره تناوب
Perturbation.....	اختلال
Polynomial.....	چندجمله ای
Pseudo-spectral method.....	روش شبه-طیفی
Radial.....	شعاعی
Radial basis functions.....	توابع پایه ای شعاعی
Rational polynomials.....	چندجمله ایهای گویا
Recurrence relation.....	رابطه بازگشتی
Regular grid points.....	نقاط شبکه ای منظم
Regularized long wave.....	موج بلند منظم
Residual.....	مانده
Riemann-Liouville derivative.....	مشتق ریمان-لیوویل
Rossby waves.....	امواج راسبی
Scheme.....	طرح
Shifted Chebyshev collocation method.....	روش هم محلی چیشف انتقال یافته

Sturm-Liouville operator	عملگر اشتروم-لیوویل
Time discretization	گسسته سازی زمانی
Transport phenomena problem	مسأله پدیده جابجایی
Upper.....	بالایی
Valid	معتبر
Viscosity.....	گرانروی
modified variational iteration method.....	روش تکراری وردشی تعدیل یافته
Weierstrass approximation theorem	قضیه تقریب وایرستراس
Weight function	تابع وزن



$$a - a - - - -$$

Surname: Hajishafieiha

Name: Jalal

Title: Study of polynomials equipped with a parameter for numerical solution of differential equations

Supervisor: Prof. Saeid Abbasbandy

Advisor: Dr. Elyas Shivanian

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University

Faculty of Sciences

Department of Mathematics

Date: 2021

Number of pages: 153

Keywords: a -Polynomials, Rational a -polynomials, Chebyshev polynomials, Inverse problems, Falkner-Skan equation, Fractional differential equations, Caputo fractional derivative, Riemann-Liouville fractional derivative, BBMB equation.

Abstract

In this thesis, a novel type of polynomial is defined which is equipped with an auxiliary parameter a . These polynomials are a combination of the Chebyshev polynomials of the second kind. In this thesis, these polynomials have been used to solve the general BBMB equation, Falkner-Skan equation, fractional differential equations and inverse problems. The approximate solution of each equation is assumed as the sum of these polynomials and then, with the help of the collocation points, the unknown coefficients of each polynomial, as well as auxiliary parameter, are obtained optimally. Now, by placing the optimal value of a in polynomials, the polynomials are obtained without auxiliary parameter, which is the restarted step of the present method. The time discretization is performed in partial differential equations by finite difference method and in fractional partial differential equations by $L1$ method. In the following, the convergence theorem and stability of the method is proved in this thesis.

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

Imam Khomeini International University
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

Study of polynomials equipped with a parameter for numerical solution of differential equations

Supervisor

Prof. Saeid Abbasbandy

Advisor

Dr. Elyas Shivanian

by

Jalal Hajishafieiha

2021