

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های بدون شبکه برپایه جواب‌های اساسی و کاربرد آنها در معادلات دیفرانسیل

استادان راهنما

دکتر سعید عباس‌بندی و دکتر داود رستمی

استاد مشاور

دکتر الیاس شیوانیان

پژوهشگر

محمد اصل‌فلاح

آبان ۱۳۹۸

نام خانوادگی دانشجو: اصل فلاح

نام: محمد

عنوان: روش‌های بدون شبکه برپایه جواب‌های اساسی و کاربرد آنها در معادلات دیفرانسیل

استادان راهنما: دکتر سعید عباس‌بندی و دکتر داود رستمی

استاد مشاور: دکتر الیاس شیوانیان

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشکده علوم پایه

دانشگاه: بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین

تعداد صفحات: ۱۱۴

تاریخ فارغ‌التحصیلی: آبان ۱۳۹۸

واژگان کلیدی: روش مرزمنفرد، جواب اساسی، روش جواب خصوصی، توابع پایه‌ای شعاعی، حسابان کسری.

چکیده

در این رساله از یک روش بدون شبکه مرزی، به نام روش مرزمنفرد برای حل معادله‌های دیفرانسیل استفاده می‌شود. این روش که برپایه جواب اساسی عملگر دیفرانسیل می‌باشد را می‌توان به طور مستقیم برای معادلات همگن مورد استفاده قرارداد. برای معادلات غیرهمگن، ترکیبی از این روش و روش جواب خصوصی به کارگرفته می‌شود. با داشتن یک جواب خصوصی که لزوماً در شرایط مرزی صدق نمی‌کند می‌توان معادله را به یک معادله همگن با شرایط مرزی تغییر یافته تبدیل کرد. برای این مورد، جواب خصوصی توسط توابع پایه شعاعی بدست می‌آید. پس از یافتن جواب خصوصی، معادله همگن به روش مرزمنفرد حل می‌شود. از روش ارایه شده برای شبیه سازی عددی معادله‌ها استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم نتایج عددی منطبق بر نتایج تحلیلی می‌باشد. معادله لاپلاس به عنوان معادله همگن و معادله‌های مختلف دیگری به عنوان معادله‌های غیرهمگن بصورت عددی حل شده است. معادله تلگراف دوبعدی، معادله شبه-سهموی و معادله بنجامین-بونا با روش ارایه شده حل شده‌اند و جوابهای عددی بدست آمده با دیگر روشها مقایسه گردیده است. همچنین برای برخی از این معادلات آنالیز همگرایی و پایداری بیان شده است. برای پیاده سازی روش ارایه شده روی فضای مشتق کسری، معادله انتشار کسری و معادله کابل کسری مورد بحث قرار گرفته‌اند و پس از حل عددی آنها، جوابها با جواب تحلیلی و جواب روش‌های دیگر مقایسه شده است. در پایان، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی ارایه شده است.



تقدیم بہ

پدرم و روح مادرم،

محمدم

و

دخترم سنا

سپاسگزاری

سپاس و ستایش مر خدای را، که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. امید که شایستگی ادامه این راه را داشته باشم.

پس از پیمودن راهی طولانی که با راهنمایی‌های استادان عزیزم، آقای دکتر سعید عباس‌بندی و آقای دکتر داود رستمی و بهره‌مندی از مشاوره‌های آقای دکتر الیاس شیوانیان همراه بود، ضمن سپاس فراوان از این عزیزان، امیدوارم بتوانم در آینده نزدیک جوابگوی محبت آنها باشم.

همچنین، وظیفه خود می‌دانم از آقای دکتر محمود هادی‌زاده یزدی، آقای دکتر محمدرضا انصاری و خانم دکتر زهرا باریک‌بین که داوری این رساله را با دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر نمایم.

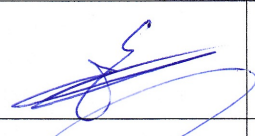
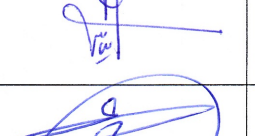
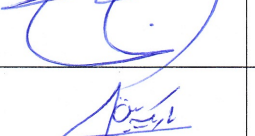
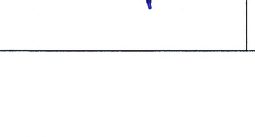


دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

معاونت آموزشی - مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم تأییدیه هیأت داوران جلسه دفاع از رساله (فرم شماره ۵۰)

بدین وسیله گواهی می شود جلسه دفاعیه از رساله دکتری آقای محمد اصل فلاح دانشجوی رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان روش های بدون شبکه برپایه جواب های اساسی و کاربرد آنها در معادلات دیفرانسیل در تاریخ ۱۳۹۸/۸/۲۵ در دانشگاه برگزار گردید و با نمره ۲۰ و به حروف سی و با درجه عالی مورد تایید هیأت داوران قرار گرفت.

ردیف	نام و نام خانوادگی	مرتبه یا دانشگاهی	دانشگاه یا مؤسسه	سمت	امضا
۱	دکتر سعید عباس بندی	استاد	دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)	استاد راهنما	
۲	دکتر داود رستمی	استاد	دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)	استاد راهنما	
۳	دکتر الیاس شیوانیان	دانشیار	دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)	استاد مشاور	
۴	دکتر محمود هادی زاده یزدی	دانشیار	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی	داور خارج	
۵	دکتر زهرا باریک بین	استادیار	دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)	داور داخل	
۶	دکتر محمدرضا انصاری	استادیار	دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)	داور داخل	



تعه‌دنامه اصالت اثر

اینجانب **محمد اصل فلاح** دانش آموخته مقطع دکتری در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

که در تاریخ ۲۵ آبان ۱۳۹۸ از رساله ی خود تحت عنوان **روش های بدون شبکه بر پایه جوابهای اساسی و کاربرد آنها در معادلات دیفرانسیل** با کسب درجه‌ی عالی دفاع کرده ام، شرعا و قانونا متعهد می شوم:

۱. مطالب مندرج در این رساله، حاصل تحقیق و مطالعه اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران اعم از رساله، کتاب، مقاله و غیره استفاده کرده ام، با رعایت کامل امانت، مطابق مقررات، اقدام به ارجاع در متن و ذکر آن در فهرست منابع و مآخذ نموده ام.
۲. تمامی یا بخشی از این رساله قبلا برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی به سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.
۳. مقالات مستخرج از این رساله کاملا حاصل کار اینجانب بوده و از هرگونه جعل داده و یا تغییر اطلاعات پرهیز کرده ام.
۴. از ارسال همزمان و یا تکراری مقالات مستخرج از این رساله (با بیش از ۳ درصد همپوشانی) به مجلات و یا همایش های گوناگون خودداری نموده و می نمایم.
۵. کلیه حقوق مادی و معنوی حاصل از این رساله متعلق به دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) بوده و متعهد می شوم هرگونه بهره مندی و یا نشر دستاوردهای حاصل از این تحقیق اعم از چاپ کتاب، مقاله، ثبت اختراع و غیره (چه در زمان دانشجویی و یا بعد از فراغت از تحصیل) با کسب اجازه از استاد (استادان) راهنما باشد.
۶. در صورت اثبات تخلف و نقض موارد پنجگانه فوق (در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) از درجه اعتبار ساقط و اینجانب هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

محمد اصل فلاح

امضاء



سوگندنامه دانش‌آموختگان دکتری دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)

به نام خدا

- سپاس ایزد منان را که مرا مشمول الطاف خویش نمود که با طی مراحل تحصیل موفق به اخذ درجه دکتری شوم. به شکرانه این نعمت بزرگ الهی که با امکانات این مرز و بوم، فراهم و نزد اینجانب به امانت گذاشته شده است، در پیشگاه ملت ایران به کتاب آسمانی خود، قرآن کریم، سوگند یاد می‌کنم که:
- در سراسر زندگی حرفه‌ای، در راه اعتلای کشور ایران و جامعه بشری به نحو احسن قدم برداشته و در این راه از هیچ تلاشی دریغ ننمایم.
 - در تمام فعالیت‌های تخصصی، رضای خدا را همراه با صداقت علمی و اجتماعی در نظر داشته و از موقعیت‌های به دست آمده در جهت رفع مشکلات جامعه استفاده کنم و در همه‌ی امور، منافع کشور را بر منافع فردی مقدم بدارم.
 - همواره علم و دانش خود را به روز نگاه داشته و در ایفای مسئولیت و تعهدات حرفه‌ای در حد توان سعی و تلاش خود را به کار گیرم.
 - و اینکه از خداوند علیم توفیق بندگی و پای بندی به مفاد این سوگندنامه را خواستارم و از او می‌خواهم که مرا در ایفای رسالت علمی و انسانی خویش موفق بدارد.

محمد اصل فلاح

امضاء



عنوان رساله:

روش های بدون شبکه بر پایه جواب های اساسی و کاربرد آنها در معادلات دیفرانسیل

دانشجو: محمد اصل فلاح

مجوز بهره برداری از پایان نامه / رساله

کلیه حقوق اعم از چاپ، تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از نتایج این پایان نامه برای دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) قزوین محفوظ است. بهره برداری از این پایان نامه / رساله در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

- ☒ بهره برداری از این پایان نامه / رساله برای همگان بلامانع است.
- ☐ بهره برداری از این پایان نامه / رساله با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.
- ☐ بهره برداری از این پایان نامه / رساله تا تاریخ ممنوع است.

استاد راهنما می تواند یکی از گزینه های بالا را انتخاب کند و مسئولین کتابخانه موظف به رعایت موارد تعیین شده می باشد.

استاد راهنما: دکتر داود رستمی

تاریخ: ۱۳۹۸/۰۸/۲۵

امضاء:

استاد راهنما: دکتر سعید عباس بندی

تاریخ: ۱۳۹۸/۰۸/۲۵

امضاء:

چکیده

در این رساله از یک روش بدون شبکه مرزی، به نام روش مرزمنفرد برای حل معادله‌های دیفرانسیل استفاده می‌شود. این روش که برپایه جواب اساسی عملگر دیفرانسیل می‌باشد را می‌توان به طور مستقیم برای معادلات همگن مورد استفاده قرارداد. برای معادلات غیرهمگن، ترکیبی از این روش و روش جواب خصوصی به کارگرفته می‌شود. با داشتن یک جواب خصوصی که لزوماً در شرایط مرزی صدق نمی‌کند می‌توان معادله را به یک معادله همگن با شرایط مرزی تغییر یافته تبدیل کرد. برای این مورد، جواب خصوصی توسط توابع پایه شعاعی بدست می‌آید. پس از یافتن جواب خصوصی، معادله همگن به روش مرزمنفرد حل می‌شود. از روش ارایه شده برای شبیه سازی عددی معادله‌ها استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم نتایج عددی منطبق بر نتایج تحلیلی می‌باشد. معادله لاپلاس به عنوان معادله همگن و معادله‌های مختلف دیگری به عنوان معادله‌های غیرهمگن بصورت عددی حل شده است. معادله تلگراف دوبعدی، معادله شبه-سهموی و معادله بنجامین-بونا با روش ارایه شده حل شده‌اند و جوابهای عددی بدست آمده با دیگر روشها مقایسه گردیده است. همچنین برای برخی از این معادلات آنالیز همگرایی و پایداری بیان شده است. برای پیاده سازی روش ارایه شده روی فضای مشتق کسری، معادله انتشار کسری و معادله کابل کسری مورد بحث قرار گرفته‌اند و پس از حل عددی آنها، جوابها با جواب تحلیلی و جواب روش‌های دیگر مقایسه شده است. در پایان، نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی ارایه شده است.

کلمه‌های کلیدی: روش مرزمنفرد، جواب اساسی، روش جواب خصوصی، توابع پایه‌ای شعاعی، حسابان کسری

فهرست مطالب

ی	لیست تصاویر
ج	لیست جداول
۴	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۴	۱.۱ پیش نیازها
۴	۱.۱.۱ تبدیل لاپلاس
۵	۲.۱.۱ تبدیل وارون لاپلاس
۵	۳.۱.۱ تلفیق
۵	۴.۱.۱ تبدیل های فوریه
۶	۵.۱.۱ تابع هویساید
۶	۶.۱.۱ تابع دلتای دیراک
۷	۷.۱.۱ تابع گرین
۸	۸.۱.۱ جواب اساسی
۹	۹.۱.۱ جواب اساسی عملگر لاپلاس
۱۰	۱۰.۱.۱ جواب اساسی برخی عملگرهای پرکاربرد
۱۱	۲.۱ روش های بدون شبکه
۱۱	۱.۲.۱ سه گام اصلی روش های بدون شبکه
۱۳	۲.۲.۱ روش های بدون شبکه ای سراسری (روش هم محلی)
۱۳	۳.۲.۱ پیاده سازی روش های بدون شبکه
۱۴	۴.۲.۱ روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی
۱۶	۵.۲.۱ توابع پایه شعاعی
۱۷	۶.۲.۱ درونیابی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی معین مثبت
۱۹	۷.۲.۱ روش کانسا
۲۰	۲ مروری بر روش های مبتنی بر جواب های اساسی
۲۰	۱.۲ مقدمه

۲۰	روش عناصرمرزی	۲.۲
۲۱	روش جواب اساسی	۳.۲
۲۲	روش مرزمنفرد	۴.۲
۲۲	۱.۴.۲ مزیت‌های روش مرزمنفرد	
۲۴	۲.۴.۲ پیاده سازی روش مرزمنفرد	
۲۶	۳.۴.۲ روش مرزمنفرد بهبودیافته	
۲۷	۵.۲ ترکیب روش مرزمنفرد و روش جواب خصوصی	
۲۷	۱.۵.۲ روش جواب خصوصی	
۲۸	۲.۵.۲ جواب خصوصی معادله هلمهلتز تغییر یافته	
۳۰	۶.۲ اهداف و نتایج مورد انتظار	
۳۱	۳ روش مرز منفرد برای حل معادله لاپلاس	
۳۱	۱.۳ مقدمه	
۳۱	۲.۳ پیاده سازی روش مرز منفرد برای معادله لاپلاس دوبعدی	
۳۲	۳.۳ مثال‌های عددی	
۳۷	۴.۳ نتیجه گیری	
۳۸	۴ روش مرز منفرد برای حل معادله تلگراف دو بعدی	
۳۸	۱.۴ مقدمه	
۳۹	۲.۴ گسسته سازی زمانی	
۴۰	۳.۴ مثال‌های عددی	
۴۳	۴.۴ نتیجه گیری	
۴۵	۵ روش مرز منفرد برای معادله شبه-سهموی	
۴۵	۱.۵ مقدمه	
۴۶	۲.۵ پیاده سازی روش و گسسته سازی زمانی	
۴۷	۳.۵ آنالیز پایداری و همگرایی	
۴۹	۴.۵ مثال‌های عددی	
۵۴	۵.۵ نتیجه گیری	
۵۷	۶ روش مرزمنفرد برای حل معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز	
۵۷	۱.۶ مقدمه	
۵۹	۲.۶ پیاده سازی روش و گسسته سازی زمانی	
۶۰	۳.۶ آنالیز پایداری و همگرایی	
۶۷	۴.۶ مثال‌های عددی	
۷۳	۵.۶ نتیجه گیری	

۷۴	۷	روش مرزمنفرد برای معادله انتشار کسری
۷۴	۱.۷	مقدمه
۷۵	۲.۷	گسسته‌سازی زمانی و پیاده سازی روش
۷۶	۳.۷	آنالیز پایداری و همگرایی
۸۱	۱.۳.۷	الگوریتم پیشگو-اصلاحگر
۸۱	۴.۷	مثال‌های عددی
۸۸	۵.۷	نتیجه گیری
۹۰	۸	روش مرز منفرد برای معادله کابل کسری
۹۰	۱.۸	مقدمه
۹۱	۲.۸	مشتق کسری ریمان-لیوویل
۹۱	۳.۸	گسسته‌سازی زمانی و پیاده سازی روش
۹۳	۴.۸	مثال‌های عددی
۹۸	۵.۸	نتیجه گیری
۱۰۰	۹	نتیجه گیری و پیشنهادها
۱۰۲		مراجع
۱۰۹		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۱۱		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

لیست تصاویر

۱.۱	نقاط یکنواخت تولید شده در دامنه‌های دو بعدی و سه بعدی.	۱۲
۲.۱	توزیع نقاط هالتون در دامنه مربعی دوبعدی.	۱۲
۳.۱	مقایسه گسسته‌سازی دامنه در روش‌های مختلف (RBF, FEM, FDM)	۱۵
۱.۲	نقاط و دامنه در روش MFS برای مساله با دامنه برون‌ی (راست) و مساله با دامنه درونی (چپ).	۲۲
۲.۲	نقاط و دامنه در روش SBM برای مساله با دامنه برون‌ی (راست) و مساله با دامنه درونی (چپ).	۲۳
۳.۲	نقاط منبع در یک مساله دوبعدی وابسته به زمان	۲۳
۴.۲	شکل کمان شامل نقطه منبع s_j در فضای دو بعدی	۲۶
۱.۳	شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۱.۳.۳.	۳۳
۲.۳	نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور جواب عددی با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۱.۳.۳	۳۴
۳.۳	شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۲.۳.۳.	۳۵
۴.۳	نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور جواب عددی با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۲.۳.۳	۳۵
۵.۳	شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۳.۳.۳.	۳۶
۶.۳	نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور جواب عددی با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۳.۳.۳	۳۶
۱.۴	شکل دامنه (راست) و نمودار جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۱.۳.۴.	۴۱
۲.۴	نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) برای ۲۰۴۸ نقطه برای مثال ۱.۳.۴	۴۱
۳.۴	نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۲.۳.۴	۴۳

۴۴	۴.۴	نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) با 1024 نقطه برای مثال ۳.۳.۴
۵۰	۱.۵	نمودار جواب عددی (راست) و نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ (چپ) با $\delta t = 0.001$ و $N = 441$ در زمان $T=1$ برای مثال ۱.۴.۵
۵۱	۲.۵	مقایسه خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ (راست) و خطای $\varepsilon_R(u)$ (چپ) با روش $SMRPI$ با $N = 441$ و $\delta t = 0.001$ در زمان t برای مثال ۱.۴.۵
۵۲	۳.۵	شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.005$ برای مثال ۱.۴.۵
۵۳	۴.۵	نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.01$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۵
۵۴	۵.۵	شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.005$ برای مثال ۳.۴.۵
۵۴	۶.۵	نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.01$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۵
۵۵	۷.۵	شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.005$ برای مثال ۴.۴.۵
۵۶	۸.۵	نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.01$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۵
۶۹	۱.۶	نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ در زمان $T = 1$ با $N = 256$ و $\delta t = 1/1024$ ، برای مثال ۱.۴.۶
۶۹	۲.۶	نمودار جواب عددی (راست) با $N = 256$ و $\delta t = 1/1024$ و جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۶
۷۰	۳.۶	نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ با $N = 225$ و $\delta t = 0.001$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۶
۷۱	۴.۶	نمودار جواب عددی (راست) با $N = 225$ و $\delta t = 0.001$ و جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۶
۷۲	۵.۶	نمودار جواب عددی (راست) با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ و نمودار خطا (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۶
۷۳	۶.۶	نمودار جواب عددی (راست) با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ و نمودار کانتور خطا (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۶
۸۳	۱.۷	نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ در زمان $T = 1$ با $(\mu, \nu) = (0.25, 0.45)$ و $N = 256$ و $\tau = 1/1024$ برای مثال ۱.۴.۷
۸۳	۲.۷	نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 1/1024$ ، $(\mu, \nu) = (0.25, 0.45)$ و $N = 256$ و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۷
۸۵	۳.۷	نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ در زمان $T = 1$ با $(\mu, \nu) = (0.65, 0.35)$ و $N = 900$ و $\tau = 0.01$ برای مثال ۲.۴.۷

- ۴.۷ نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 0.01$ ، $(\mu, \nu) = (0.65, 0.35)$ و $N = 900$ و نمودار
 ۸۵ جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۷
- ۵.۷ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.45, 0.75)$ و
 ۸۷ $\tau = 0.01, N = 949$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۷
- ۶.۷ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.15, 0.95)$ و
 ۸۷ $\tau = 0.01, N = 949$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۷
- ۷.۷ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.25, 0.75)$ و
 ۸۹ $\tau = 0.01, N = 418$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۷
- ۸.۷ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.45, 0.45)$ و
 ۸۹ $\tau = 0.01, N = 418$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۷
- ۱.۸ نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ با $\tau = 1/1024$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.3)$ و $N = 289$ و نمودار جواب
 ۹۴ تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۸
- ۲.۸ نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 1/1024$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.3)$ و $N = 289$ و نمودار
 ۹۴ جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۸
- ۳.۸ نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ با $\tau = 1/1024$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.5)$ و $N = 289$ و نمودار جواب
 ۹۵ تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۸
- ۴.۸ نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 1/1024$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.5)$ و $N = 289$ و نمودار
 ۹۶ جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۸
- ۵.۸ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 484$ و
 ۹۷ $(\alpha, \beta) = (0.35, 0.65)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۸
- ۶.۸ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 484$ و
 ۹۷ $(\alpha, \beta) = (0.15, 0.55)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۸
- ۷.۸ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 418$ و
 ۹۹ $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.5)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۸
- ۸.۸ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 418$ و
 ۹۹ $(\alpha, \beta) = (0.4, 0.8)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۸

لیست جداول

۱۰	جواب اساسی برخی عملگرهای پرکاربرد در فضاهاى دوبعدى و سه بعدى . .	۱.۱
۱۷	توابع پایه‌ای شعاعی	۲.۱
۳۳	خطاها با افزایش تعداد نقاط برای مثال ۱.۳.۳	۱.۳
۳۴	خطاها با افزایش تعداد نقاط برای مثال ۲.۳.۳	۲.۳
۳۶	خطاها با افزایش تعداد نقاط برای مثال ۳.۳.۳	۳.۳
۴۰	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با افزایش نقاط و مقدار ثابت $\tau = 0.001$ برای مثال ۱.۳.۴ .	۱.۴
۴۱	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 2048$ نقطه و مقادیر τ در زمان t برای مثال ۱.۳.۴ .	۲.۴
۴۲	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 1024$ نقطه و مقادیر τ در زمان t برای مثال ۲.۳.۴ .	۳.۴
۴۴	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 1024$ نقطه و مقادیر τ در زمان t برای مثال ۳.۳.۴ .	۴.۴
	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 441$ و $\delta t = 0.001$ در زمان t و مقایسه با روش	۱.۵
۵۰	$SMRPI$ برای مثال ۱.۴.۵	
۵۲	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 441$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۲.۴.۵	۲.۵
۵۳	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 441$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۳.۴.۵	۳.۵
۵۵	خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 441$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۴.۴.۵	۴.۵
۶۸	خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 256$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۱.۴.۶	۱.۶
۶۸	مقایسه خطاهای روش حاضر با دیگر روش‌ها برای مثال ۱.۴.۶	۲.۶
۶۸	خطا و مرتبه همگرایی با $N = 256$ و مقادیر δt در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۶	۳.۶
۷۰	خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 225$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۲.۴.۶	۴.۶
۷۱	خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 400$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۳.۴.۶	۵.۶
۷۲	خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 400$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۴.۴.۶	۶.۶
	خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 256$, $\tau = 1/1024$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای	۱.۷
۸۲	مثال ۱.۴.۷	
۸۳	مقایسه خطای $\varepsilon_\infty(u)$ روش با دیگر روش‌ها برای مثال ۱.۴.۷	۲.۷

۳.۷	خطاهای $\varepsilon_{\infty}(u)$ و RMS با $\tau = 0.01$, $N = 30 \times 30$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای	۲.۴.۷
۸۴	مثال ۲.۴.۷	
۴.۷	خطاهای $\varepsilon_{\infty}(u)$ و RMS با $\tau = 0.01$, $N = 949$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای مثال	۳.۴.۷
۸۶	مثال ۳.۴.۷	
۵.۷	خطاهای $\varepsilon_{\infty}(u)$ و RMS با $\tau = 0.01$, $N = 418$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای مثال	۴.۴.۷
۸۸	مثال ۴.۴.۷	
۱.۸	خطاهای $\varepsilon_{\infty}(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $\tau = 1/1024$, $N = 289$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای	۱.۴.۸
۹۳	مثال ۱.۴.۸	
۹۴	مقایسه خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ روش با دیگر روش‌ها برای مثال ۱.۴.۸	۳.۸
	خطاهای $\varepsilon_{\infty}(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $\tau = 1/1024$, $N = 289$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای	مثال ۲.۴.۸
۹۵	مثال ۲.۴.۸	
	خطاهای $\varepsilon_{\infty}(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $\tau = 0.01$, $N = 484$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای مثال	۳.۴.۸
۹۶	مثال ۳.۴.۸	
	خطاهای $\varepsilon_{\infty}(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $\tau = 0.01$, $N = 418$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای مثال	۴.۴.۸
۹۸	مثال ۴.۴.۸	

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل یکی از مهمترین ابزارها برای مدل سازی پدیده های طبیعی می باشند. از کاربردهای مدرن معادلات دیفرانسیل می توان به زمینه های گوناگونی همچون حرکت سیالات، شتاب دهنده های ذرات، مکانیک سیالات، الگوهای جمعیتی، شبکه های برق و دینامیک مولکولی اشاره کرد. از دیدگاه ریاضی، نظریه معادلات دیفرانسیل شامل بسیاری از زمینه های مختلف ریاضی می شود و مسایل برخاسته از این نظریه نقش اساسی در آنالیز تابعی، جبر خطی و نظریه گروه ها ایفا می کنند. به خاطر همین موضوع، روش ها و تکنیک های کلاسیک زیادی برای پیدا کردن جواب معادلات دیفرانسیل توسعه پیدا کرده اند. از طرفی به کار بردن ابزارهای جدید برای حل معادلات دیفرانسیل موضوع مورد علاقه ریاضی دانان و فیزیک دانان می باشد. اما برای خیلی از معادلات در نظر گرفته شده راه حل شناخته شده ای که جواب آن ها را به صورت توابع مقدماتی بیان کند، وجود ندارد. فقط تقریب های عددی به کمک کامپیوتر می توانند کمک کنند تا رفتار اینگونه معادلات دیفرانسیل فهمیده شود. در گذشته روش های عددی گوناگونی برای این مأموریت پیشنهاد شده اند که همه ی این روش ها دستگاه معادلات دیفرانسیل را گسسته می کنند تا معادلات تفاضلی ایجاد کنند.

در این رساله از یک روش بدون شبکه مرزی، به نام روش مرز منفرد برای حل معادله های دیفرانسیل استفاده می شود. این روش که برپایه جواب اساسی عملگر دیفرانسیل می باشد را به طور مستقیم می توان برای معادلات همگن مورد استفاده قرارداد. برای معادلات غیرهمگن، ترکیبی از این روش و روش جواب خصوصی به کار گرفته می شود. با داشتن یک جواب خصوصی که لزوما در شرایط مرزی صدق نمی کند می توان معادله را به یک معادله همگن با شرایط مرزی تغییر یافته تبدیل کرد. برای این مورد، جواب خصوصی توسط توابع پایه شعاعی به دست می آید. پس از یافتن جواب خصوصی، معادله همگن به روش مرز منفرد حل می شود.

این رساله شامل نه فصل می باشد. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز آورده شده است. در فصل دوم مروری بر روش های مبتنی بر جواب های اساسی ارائه شده است. در فصل سوم روش مرز منفرد برای معادله لاپلاس به کار گرفته شده است. در فصل چهارم ترکیب روش مرز منفرد و روش جواب خصوصی برای حل معادله تلگراف دوبعدی، در فصل پنجم معادله شبه-سهامی (سوبولف)، در فصل ششم معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز، در فصل هفتم معادله کلی انتشار ناهمگون کسری، در فصل هشتم روش ارائه شده برای حل معادله کابل کسری در حالت مشتق کسری ریمان-لیوویل استفاده شده است. در نهایت در فصل نهم، نتیجه گیری و

پیشنهادهایی ارایه شده است.

فهرست مقاله‌های مستخرج از رساله به شرح زیر است:

1. M. Aslefallah, D. Rostamy, Application of singular boundary method for two dimensional Telegraph equation on arbitrary domains, Journal of Engineering Mathematics, 118(1), (2019), 1-14.
2. M. Aslefallah, S. Abbasbandy, E. Shivanian, Numerical solution of a modified anomalous diffusion equation with nonlinear source term through meshless singular boundary method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 107, (2019), 198-207.
3. M. Aslefallah, S. Abbasbandy, E. Shivanian, Meshless formulation to two-dimensional nonlinear problem of generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers through singular boundary method; Analysis of stability and convergence, Numerical Methods for Partial Differential Equations, Online Published (2019).
4. M. Aslefallah, S. Abbasbandy, E. Shivanian, Fractional cable problem in the frame of meshless singular boundary method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 108, (2019), 124-132.
5. M. Aslefallah, S. Abbasbandy, D. Rostamy, E. Shivanian, Singular boundary method for two-dimensional pseudo-parabolic equation; Analysis of stability and convergence, Under Review.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای فصل‌های بعدی ارائه شده است. لازم به ذکر است که از بیان برخی تعاریف و مفاهیم ریاضیات مقدماتی صرف نظر شده است.

۱.۱ پیش‌نیازها

۱.۱.۱ تبدیل لاپلاس

یک روش متداول برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده از تبدیل لاپلاس^۱ است. تبدیل لاپلاس این امکان را به ما می‌دهد که از کارکردن با معادلاتی با مراتب مختلف دیفرانسیل اجتناب کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. تبدیل

$$T\{f(x)\} = \int_a^b k(s, x) f(x) dx,$$

را تبدیل انتگرالی می‌نامند و $k(s, x)$ هسته تبدیل T است.

تعریف ۲.۱.۱. اگر در تبدیل انتگرالی داشته باشیم $k(s, x) = e^{-sx}$ و $a = 0$ و $b = \infty$ در این صورت تبدیل انتگرالی با نماد $L\{f(x)\}$ نشان داده می‌شود و آن را تبدیل لاپلاس $f(x)$ گویند. بنابراین

$$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx,$$

و حوزه تعریف F مجموعه s ‌هایی است که به ازای آنها انتگرال فوق همگرا باشد، یعنی s ‌هایی که حد

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-sx} f(x) dx,$$

موجود باشد.

^۱Laplace Transform

نکته ۵.۲.۱: برخی از ویژگیهای مهم تبدیل لاپلاس:

(الف) خاصیت خطی: اگر c_1 و c_2 ثابت‌های دلخواه باشند آنگاه:

$$L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\} = c_1 L\{f_1(x)\} + c_2 L\{f_2(x)\},$$

(ب) اگر $L\{f(x)\} = F(s)$ آنگاه:

$$L\{f'(x)\} = sF(s) - f(0),$$

و در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$L\{f^{(n)}(x)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

۲.۱.۱ تبدیل وارون لاپلاس

اگر $F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع $f(x)$ باشد، می‌نویسیم: $L\{f(x)\} = F(s)$ درضمن $f(x)$ را وارون لاپلاس $F(s)$ گویند و آن را به صورت $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ نشان می‌دهند که در آن عملگر L^{-1} وارون تبدیل لاپلاس است و به وسیله انتگرال زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = L^{-1}\{F(s)\}(x) = \int_{\Gamma} e^{sx} F(s) ds.$$

که Γ یک خط مستقیم از $c - i\infty$ تا $c + i\infty$ و $c = \text{Re}(s)$. به عنوان مثال می‌دانیم $L\{1\} = \frac{1}{s}$ بنابراین $L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$ است.

۳.۱.۱ تلفیق

تعریف ۳.۱.۱: تلفیق^۲، یک عملگر ریاضی است که بر روی دو تابع f و g عمل می‌کند، و به صورت $f * g$ نوشته می‌شود. این تعریف به صورت انتگرال حاصلضرب دو تابع که یکی از آنها نسبت به محور عمودی مختصات برعکس شده و روی آن یکی جابه‌جا می‌گردد، تعریف می‌شود. با این تعریف، تلفیق یک نوع خاص از تبدیل انتگرالی است که خاصیت جابجایی نیز دارد.

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

۴.۱.۱ تبدیل‌های فوریه

تعریف ۴.۱.۱: فرض کنید که $f(t)$ یک تابع پیوسته از متغیر حقیقی $t \in (-\infty, \infty)$ باشد، تبدیل فوریه^۳ $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F\{f(t)\}(w) = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t) dt.$$

تعریف ۵.۱.۱: فرض کنید که $f(t)$ تابع معلوم در یک فضای توابع معلوم باشد. تبدیل فوریه معکوس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F^{-1}\{F(w)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt} F(w) dw.$$

^۲Convolution

^۳Fourier transform

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید که f و g دو تابع باشند، تلفیق فوریه f و g بوسیله $f * g$ تعریف می‌شود که:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t-u)du, \quad t \in R$$

و تبدیل فوریه برای تابع $f * g$ عبارت است از:

$$F\{(f * g)\}(w) = F\{f(t)\}F\{g(t)\} = F(w)G(w).$$

۵.۱.۱ تابع هویساید

تعریف ۷.۱.۱. تابع پله‌ای هویساید^۴ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(x-s) = \begin{cases} 0, & x < s, \\ 1, & x \geq s, \end{cases} \quad (۱.۱)$$

که با در نظر گرفتن تابع

$$h(x-s) = \begin{cases} 0, & x < s, \\ \frac{x-s}{\Delta s}, & s \leq x < s + \Delta s, \\ 1, & x \geq s + \Delta s, \end{cases} \quad (۲.۱)$$

می‌تواند بصورت حد تابع بالا وقتی که $\Delta s \rightarrow 0$ تعریف شود:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} h(x-s) = H(x-s). \quad (۳.۱)$$

۶.۱.۱ تابع دلتای دیراک

تعریف ۸.۱.۱. تابع دلتای دیراک^۵ تابعی بصورت زیر است:

$$\delta(x-s) = \begin{cases} 0, & x \neq s, \\ \infty, & x = s, \end{cases} \quad (۴.۱)$$

که مشتق تابع هویساید است برای وقتی که $\Delta s \rightarrow 0$ یعنی:

$$h'(x-s) = \begin{cases} 0, & x < s, \\ \frac{1}{\Delta s}, & s \leq x < s + \Delta s, \\ 0, & x \geq s + \Delta s, \end{cases} \quad (۵.۱)$$

و

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} h'(x-s) = \delta(x-s). \quad (۶.۱)$$

ملاحظه ۹.۱.۱. ویژگی غربال کردن تابع دلتای دیراک:

انتگرال حاصلضرب هر تابع پیوسته دلخواه f در تابع دلتای دیراک در نقطه $x = s$ برابر $f(s)$ می‌باشد. یعنی:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x-s) dx = f(s),$$

^۴Heaviside function

^۵Dirac delta function

و بویژه برای $f(x) = 1$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-s) dx = 1,$$

۷.۱.۱ تابع گرین

تعریف ۱۰.۱.۱. تابع گرین $G(t, s)$ ^۶، جواب مربوط به عملگر خطی $\mathcal{L}$ برحسب شرایط مرزی همگن B است که:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\{G(t, s)\} = -\delta(t-s), & t \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ B\{G(t, s)\} = 0, & t \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (۷.۱)$$

به عبارتی، G تابعی است که با اثر کردن $\mathcal{L}$ روی آن، تابع دلتای دیراک حاصل می‌شود. معادله دیفرانسیل $\mathcal{L}y = g$ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{L}y(t) = g(t),$$

$$\mathcal{L}y(t) = \int \delta(t-s)g(s)ds,$$

$$\mathcal{L}y(t) = - \int \mathcal{L}G(t-s)g(s)ds,$$

$$\mathcal{L}y(t) = -\mathcal{L} \int G(t-s)g(s)ds,$$

$$y(t) = - \int G(t-s)g(s)ds,$$

در حقیقت تابع گرین، نقش هسته انتگرال را در حل معادله $\mathcal{L}y = g$ ایفا می‌کند.

ملاحظه ۱۱.۱.۱. تابع گرین در معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن:

یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن مرتبه اول به صورت زیر است:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)y(t) + g(t),$$

معادله فوق را می‌توان با استفاده از شرط اولیه $y(t_0) = 0$ ، به صورت زیر حل کرد:

$$\frac{d}{dt} \left(y(t)e^{\int_{t_0}^t -f} \right) = \frac{dy}{dt} e^{\int_{t_0}^t -f} y(t)f(t)e^{\int_{t_0}^t -f},$$

$$\frac{d}{dt} \left(y(t)e^{\int_{t_0}^t -f} \right) = g(t)e^{\int_{t_0}^t -f},$$

$$y(t)e^{\int_{t_0}^t -f} = \int_{t_0}^t g(\xi)e^{\int_{t_0}^{\xi} -f} d\xi,$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(\xi)e^{\int_{t_0}^t f - \int_{t_0}^{\xi} f} d\xi,$$

$$y(t) = \int_{t_0}^t g(\xi)e^{\int_{\xi}^t f} d\xi,$$

^۶ Green Function

تابع گرین مربوط به یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن خطی در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{d}{dt}G(t, s) - f(t)G(t, s) = \delta(t - s),$$

با توجه به جواب به دست آمده، تابع $G(t, s)$ را می‌توان در بازه $t_0 < s < t$ به صورت زیر به دست آورد:

$$G(t, s) = \int_{t_0}^t \delta(\xi - s) e^{\int_{\xi}^t f} d\xi,$$

و در نتیجه:

$$G(t, s) = e^{\int_s^t f}.$$

۸.۱.۱ جواب اساسی

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک معادله عملگر دیفرانسیلی باشد، در این صورت F را جواب اساسی^۷ معادله عملگری غیرهمگن

$$\mathcal{L}\{F(t - s)\} = -\delta(t - s), \quad (۸.۱)$$

می‌گویند که در آن δ تابع دلتای دیراک می‌باشد.

پس از یافتن جواب اساسی یک عملگر دیفرانسیل، می‌توان جواب مورد نظر معادله اصلی مساله را با تلفیق به دست آورد. (از روش تبدیل فوری و روش تبدیل لاپلاس می‌توان برای تعیین جواب اساسی یک عملگر استفاده کرد.)

مثال ۱۳.۱.۱. معادله دیفرانسیل $\mathcal{L}f = \sin(x)$ را در نظر بگیرید که در آن،

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}, \quad (۹.۱)$$

جواب‌های اساسی با حل $\mathcal{L}F = -\delta(x)$ یعنی حل

$$\frac{d^2}{dx^2}F(x) = -\delta(x), \quad (۱۰.۱)$$

به دست می‌آیند. از طرفی چون برای تابع هویساید داریم:

$$\frac{d}{dx}H(x) = \delta(x), \quad (۱۱.۱)$$

در نتیجه

$$\frac{d}{dx}F(x) = -H(x) + C_1, \quad (۱۲.۱)$$

که در اینجا C_1 ثابت انتگرالگیری است. با انتگرالگیری دوباره داریم:

$$F(x) = -xH(x) + C_1x + C_2, \quad (۱۳.۱)$$

که با در نظر گرفتن ثابت‌های $C_1 = \frac{1}{2}$ و $C_2 = 0$ داریم:

$$F(x) = -xH(x) + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}|x|, \quad (۱۴.۱)$$

حال با توجه به معادله دیفرانسیل اصلی این مثال یعنی $f''(x) = \sin(x)$ با اعمال تلفیق جواب اساسی به سمت راست معادله داریم:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}|x - y| \sin(y) dy, \quad (۱۵.۱)$$

^۷Fundamental solution

۹.۱.۱ جواب اساسی عملگر لاپلاس

برای معادله لاپلاس

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (۱۶.۱)$$

با در نظر گرفتن تابع شعاعی F بر حسب r که

$$r = |\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

هدف یافتن تابع u به عنوان جواب معادله لاپلاس است بطوریکه:

$$u(\mathbf{x}) = F(r)$$

با توجه به مفروضات بالا، روابط زیر حاصل می‌گردند:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r},$$

و

$$u_{x_i} = F'(r) \frac{x_i}{r},$$

و

$$u_{x_i x_i} = F''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + F'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right),$$

در نتیجه:

$$\Delta u = F''(r) + \frac{n-1}{r} F'(r),$$

که با در نظر گرفتن معادله لاپلاس خواهیم داشت:

$$F''(r) + \frac{n-1}{r} F'(r) = 0,$$

که با حل معادله دیفرانسیل بالا، تابع مجهول به دست می‌آید:

$$F(r) = \begin{cases} b \ln r + c, & n = 2, \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c, & n \geq 3, \end{cases}$$

که b و c ثابت هستند. در حالت دوبعدی یعنی $n = 2$ از رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$F''(r) + \frac{1}{r} F'(r) = 0,$$

که:

$$\frac{F''(r)}{F'(r)} = -\frac{1}{r},$$

که با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\ln F'(r) = -\ln r + c_0,$$

و

$$F'(r) = \frac{c_1}{r},$$

در نتیجه:

$$F(r) = c_1 \ln r + c_2,$$

که ثابت c_2 اختیاری است و صفر در نظر می‌گیریم، برای یافتن c_1 با استفاده قضیه دیورژانس خواهیم داشت:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \cdot \nabla F(t, s) dt = \int_{\mathbb{R}^2} -\delta(t - s) dt = -1,$$

که با در نظر گرفتن گوی $B(R)$ با شعاع $R > 0$ رابطه‌های زیر حاصل می‌گردند:

$$\int_{B(R)} \nabla \cdot \nabla F(t, s) dt = \int_{\partial B(R)} \mathbf{n} \cdot \nabla F(t, s) dt = \int_{\partial B(R)} F'(R) dt = 2\pi R F'(R) = -1,$$

که:

$$F'(R) = -\frac{1}{2\pi R},$$

در نتیجه:

$$F(R) = -\frac{1}{2\pi} \ln R,$$

تعریف ۱۴.۱.۱. برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$ جواب اساسی معادله لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}|, & n = 2, \\ \frac{1}{\omega(n) |\mathbf{x}|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases}$$

که $\omega(n)$ مساحت سطح گوی واحد در $\mathbb{R}^n$ است.

۱۰.۱.۱ جواب اساسی برخی عملگرهای پرکاربرد

جواب اساسی برخی عملگرهای پرکاربرد در جدول ۱.۱ بیان شده است ([۱۰۱]) که در آن Y_0 و K_0 به ترتیب، تابع بسل و تابع بسل تغییریافته نوع دوم از مرتبه صفر هستند.

جدول ۱.۱: جواب اساسی برخی عملگرهای پرکاربرد در فضاهای دوبعدی و سه بعدی

$\Re$	$2D$	$3D$
Δ	$-\frac{1}{2\pi} \ln(r)$	$\frac{1}{4\pi r}$
$\Delta + \lambda^2$	$-\frac{1}{2\pi} Y_0(\lambda r)$	$\frac{1}{4\pi r} \cos(\lambda r)$
$\Delta - \lambda^2$	$-\frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r)$	$\frac{1}{4\pi r} e^{-\lambda r}$
$\Delta^2 - \lambda^4$	$-\frac{1}{2\pi} (Y_0(\lambda r) + K_0(\lambda r))$	$\frac{1}{4\pi r} (e^{-\lambda r} + \cos(\lambda r))$
$\Delta^2 - \lambda^2 \Delta$	$-\frac{1}{2\pi \lambda^2} (K_0(\lambda r) + \ln(r))$	$\frac{1}{4\pi \lambda^2 r} (e^{-\lambda r} + 1)$

۲.۱ روش‌های بدون شبکه

مدل‌سازی ریاضی بسیاری از پدیده‌های طبیعی و فیزیکی در صنعت، علوم مهندسی و علوم پایه منجر به معادلات با مشتقات جزئی می‌شوند. از این رو، برای توصیف این پدیده‌ها نیاز به محاسبه جواب‌های این دسته از معادلات می‌باشد. از آنجایی که محاسبه جواب دقیق برای اغلب این معادلات امکان‌پذیر نیست، روش‌ها و الگوریتم‌های عددی متنوعی برای حل معادلات با مشتقات جزئی ارائه شده‌اند. از روش‌های عددی پرکاربرد و استاندارد برای حل معادلات با مشتقات جزئی می‌توان به روش تفاضلات متناهی^۸، روش عناصر متناهی^۹ و روش حجم متناهی^{۱۰} اشاره کرد. این رده از روش‌ها را روش‌های عددی مبتنی بر شبکه‌بندی ناحیه جواب می‌نامند.

از معایب عمده این روش‌ها می‌توان به هزینه محاسباتی بالای شبکه‌بندی در این روش‌ها اشاره کرد. از طرفی در صورت نیاز به شبکه‌بندی‌های ظریف‌تر نمی‌توان از اطلاعات شبکه‌های قبلی استفاده کرد و کلیه محاسبات باید از اول انجام شوند. به علاوه به کارگیری این روش‌ها برای مسایل با ابعاد بالا یا دامنه‌های با اشکال هندسی نامتعارف در اغلب موارد بسیار دشوار یا انجام‌پذیر نمی‌باشد. از این رو، برای محاسبه سریع و آسان جواب‌های تقریبی مسایل پیچیده مهندسی روش‌های بدون شبکه معرفی شده‌اند. در این روش‌ها برای اجتناب از شبکه‌بندی ناحیه از مجموعه‌ای از نقاط پراکنده در داخل ناحیه و روی مرز آن به جای شبکه‌بندی استفاده می‌شود.

در روش‌های بدون شبکه^{۱۱} مهمترین هدف، فائق آمدن بر مشکل شبکه‌بندی کل دامنه می‌باشد. روش‌های بدون شبکه از یک مجموعه نقاطی که در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده برای نمایش دامنه و مرزهای آن (نه برای گسسته‌سازی دامنه) استفاده می‌کند. این مجموعه نقاط پخش شده، نقاط میدانی^{۱۲} نامیده می‌شوند، و این نقاط یک شبکه نمی‌سازند، به این معنی که هیچگونه اطلاعات قبلی درباره رابطه بین این گره‌ها برای درونیایی یا تقریب تابع مجهول و ... نیاز نیست. اخیراً روش‌های متنوعی مبتنی بر روش‌های بدون شبکه معرفی شده‌اند و نشان داده شده‌است که توانایی بالایی برای تبدیل شدن به یک ابزار عددی قوی دارند. با این وجود، این روش‌ها هنوز در مرحله توسعه قرار دارند و هنوز سوالات و مسایل فنی وجود دارند که باید پاسخ داده شوند.

۱.۲.۱ سه گام اصلی روش‌های بدون شبکه

هر چند روش‌های بدون شبکه متعددی ارائه شده‌اند ولی در همه این روش‌ها، اجرای روش بر سه گام اساسی و معمول استوار می‌باشد:

^۸Finite differences method

^۹Finite element method

^{۱۰}Finite volume method

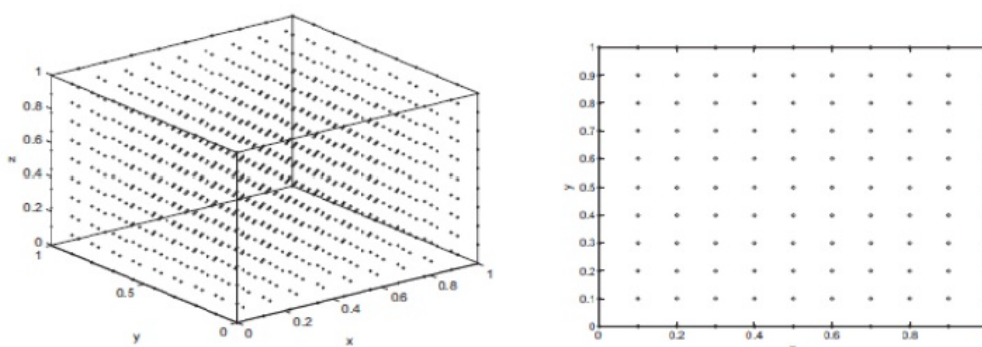
^{۱۱}Meshless method

^{۱۲}Field nodes

الف) تولید نقاط^{۱۳}

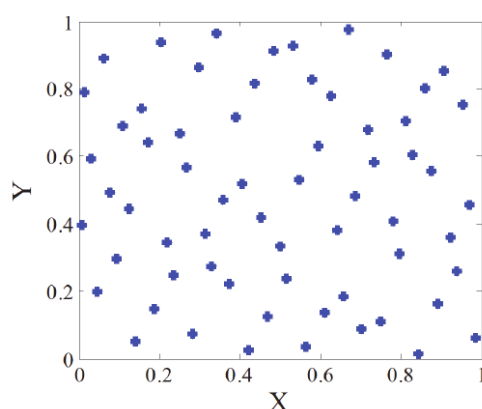
در یک روش بدون شبکه در اولین گام باید کل دامنه و مرز مساله توسط مجموعه ای نقاط گسسته پوشش داده شوند. این پوشش می‌تواند بصورت های مختلف مانند منظم، نامنظم و تصادفی انجام گیرد. همچنین برخی از شکل‌های متداول در انتخاب داده‌های پراکنده در دامنه‌ها به صورت زیر می‌باشند:

- داده‌های یکنواخت: یکی از متداول‌ترین نوع انتخاب نقاط در روش‌های بدون شبکه، انتخاب نقاط با پراکندگی یکنواخت در دامنه می‌باشد. در شکل ۱.۱ داده‌های یکنواخت در فضاهای دو بعدی و سه بعدی رسم شده‌اند.



شکل ۱.۱: نقاط یکنواخت تولید شده در دامنه‌های دو بعدی و سه بعدی.

- داده‌های تصادفی: داده‌ها بصورت تصادفی در دامنه پخش شده‌اند. از معروفترین داده‌های تصادفی، توزیع نقاط هالتون^{۱۴} است که در شکل ۲.۱ نشان داده شده‌است.



شکل ۲.۱: توزیع نقاط هالتون در دامنه مربعی دوبعدی.

^{۱۳}Node generation

^{۱۴}Halton points

ب) تقریب جواب^{۱۵}

در گام دوم اجرای روش‌های بدون شبکه، تابع مجهول به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای مشخص از اعضای جواب تقریب زده می‌شوند. این عمل را تقریب جواب می‌نامیم.

ج) آزمودن^{۱۶}

در گام آخر اجرای روش‌های بدون شبکه، برای محاسبه ضرایب مجهول در تقریب جواب پیشنهادی در گام دوم باید آن جواب در معادلات حاکم صدق کند. این گام را آزمودن جواب می‌نامند. این آزمون می‌تواند به شکل ضعیف یا قوی و محلی یا سراسری باشد.

روش‌های متفاوت تقریب جواب و آزمودن منجر به روش‌های بدون شبکه متفاوتی شده‌اند، که روش‌های مهم آن عبارتند از:

الف) آزمودن به شکل قوی سراسری (روش هم محلی)

ب) آزمودن به شکل قوی موضعی

ج) آزمودن به شکل ضعیف سراسری

د) آزمودن به شکل ضعیف موضعی

۲.۲.۱ روش‌های بدون شبکه‌ای سراسری (روش هم محلی)

این روش بطور گسترده در تقریب توابع پایه‌ای شعاعی بکار می‌رود. در این روش تابع تقریب باید در یک مجموعه از نقاط هم محلی در شکل اصلی صدق کند، که این نقاط باید مجزا از یکدیگر بوده و تعداد آنها نباید از تعداد ضرایب مجهول کمتر باشد. در نتیجه مساله تبدیل به یک دستگاه معادلات می‌شود که ضرایب تقریب مجهول هستند. این روش یک روش ساده و سریع می‌باشد، اما مشکل اصلی آن ناپایداری است.

۳.۲.۱ پیاده سازی روش‌های بدون شبکه

مساله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{B}u = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (17.1)$$

که در رابطه فوق $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیلی، $\mathcal{B}$ عملگر دیفرانسیلی روی مرز، $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ناحیه داخلی دامنه مساله و $\partial\Omega$ مرز ناحیه و f, g توابع معلوم و به اندازه کافی هموار می‌باشند. در این جا فرض می‌شود که جواب دقیق $u(\mathbf{x})$ با $u_N(\mathbf{x})$ که به صورت مجموع متناهی زیر است تقریب زده می‌شود:

$$u(\mathbf{x}) \simeq u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi_j(\mathbf{x}), \quad (18.1)$$

^{۱۵} Approximation solution

^{۱۶} Testing

که در آن توابع Φ_j توابع پایه ای مشخص و λ_j ها ضرایب مجهول هستند که در گام سوم روش های بدون شبکه محاسبه می شوند.

۴.۲.۱ روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی

در این بخش به معرفی روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی^{۱۷} (RBF) می پردازیم. معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان به طور وسیعی در مدل بندی پدیده های متنوع طبیعی در علوم پایه و علوم مهندسی مورد استفاده قرار گرفته اند. جواب های این رده از مدل های ریاضی برای پیش بینی رفتار پدیده های مختلف به کار می روند، به طوری که کاملاً بر نتایج حاصل از شرایط تجربی و آزمایشگاهی منطبق می باشد. بررسی عددی این مسایل دارای اهمیت ویژه ای می باشد. روش های عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان ارائه شده اند که از آن جمله می توان به روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی، روش حجم متناهی و روش عناصر مرزی^{۱۸} اشاره کرد.

روش های مبتنی بر شبکه بندی یکی از متداول ترین و قوی ترین روش های عددی می باشد که در دهه های اخیر نظریه های تحلیلی، کاربردهای فراگیر در علوم مهندسی و همچنین بسته های نرم افزاری و کاربردی وسیعی بر مبنای آن ارائه شده اند. هر چند روش های مبتنی بر شبکه بندی روشی پرکاربرد در علوم مهندسی می باشد ولی دارای دو اشکال اساسی می باشد:

- محدودیت در شبکه بندی مسایل با دامنه های با شکل های هندسی پیچیده.

- پیچیدگی محاسباتی برای حل مسایل با ابعاد بالا.

به طور کلی در حل عددی بسیاری از مسایل با استفاده از روش های مبتنی بر شبکه بندی اغلب موارد به اصلاح کردن شبکه ها در نواحی خاصی از دامنه، به خصوص نزدیک مرزها می باشد که سبب پیچیدگی محاسباتی خواهد شد. بعلاوه روش های مبتنی بر شبکه بندی برای حل مسایل سه بعدی، بسیار پیچیده و دشوار می باشد. در مسایل با ابعاد بالاتر از سه، عملاً به کارگیری روش های معمول مبتنی بر شبکه، مانند تفاضلات متناهی، امکان پذیر نمی باشد.

در دهه های اخیر برخی روش های عددی ارائه و توسعه یافته اند که بدون نیاز به شبکه بندی دامنه، برای حل معادلات استفاده می شوند. مهمترین هدف ارائه و توسعه روش های بدون شبکه، فائق آمدن بر مشکل شبکه بندی و شبکه بندی مجدد کل دامنه می باشد.

اخیراً روش های بدون شبکه گوناگونی در زمینه های مختلف ارائه شده است که از مهمترین آنها می توان به روش ذرات هیدرودینامیکی هموار^{۱۹} (SPH)، روش عناصر پخش شده^{۲۰} (DEM)،

^{۱۷}Radial basis function

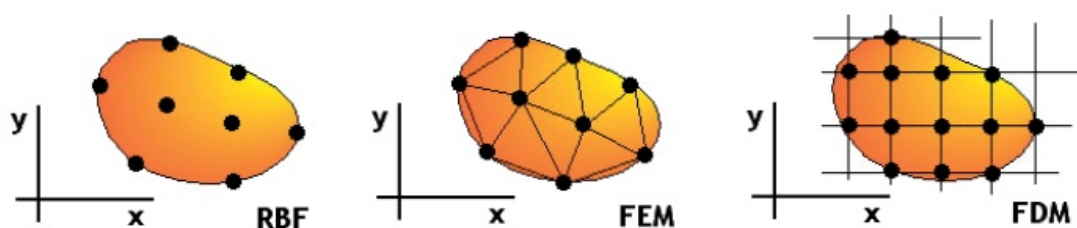
^{۱۸}Boundary element method

^{۱۹}Smoothed particle hydrodynamic

^{۲۰}Diffuse element method

روش گالرکین با عناصر آزاد^{۲۱} (EFG)، روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین^{۲۲} ($MLPG$) و روش بدون شبکه هم محلی بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی (RBF) اشاره کرد. به طور کلی، در روش‌های بدون شبکه، برای به دست آوردن میدان‌ها در محدوده‌ی بین گره‌ها از یک تابع تقریب استفاده می‌شود. به این منظور از تعدادی توابع پایه برای تخمین جواب در بین گره‌ها، بر اساس مقادیر دقیق گره‌ها، استفاده می‌شود تا در نهایت تابع شکل تولید گردد. برای تولید توابع شکل، روش‌های مختلفی مانند روش کمترین مربعات متحرک^{۲۳} (MLS)، روش درونیابی نقطه چندجمله‌ای^{۲۴} ($PPIM$) و روش درونیابی نقطه شعاعی^{۲۵} ($RPIM$) وجود دارد. هر کدام از این روش‌ها از توابع پایه خاصی استفاده می‌کنند با استفاده از این توابع پایه و اعمال یک روند مشخص در هر گره، در نهایت توابع شکل تولید می‌گردند. این توابع، متناسب با نوع تابع پایه‌ی به کار گرفته شده، دارای خصوصیات خاصی هستند. از این مرحله به بعد، توابع شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند و در فرایندی مشابه روش عناصر متناهی، معادله دیفرانسیل مربوطه در کل دامنه مساله حل می‌شود. روش‌های بدون شبکه دارای مزایای برجسته‌ای هستند:

- به طور معمول در روش‌های مبتنی بر شبکه، عمده هزینه محاسباتی صرف شبکه‌بندی دامنه‌ها می‌شود در حالی که در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی انتخاب نقاط کاملاً آزاد و هیچ وابستگی بین نقاط نیاز نیست.
- همان‌گونه که اشاره شد عدم وابستگی به بعد فضا در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی و امکان به کارگیری آسان آن برای مسایل با ابعاد بالا از عمده مزیت‌های این روش‌ها می‌باشد.



شکل ۳.۱: مقایسه گسسته‌سازی دامنه در روش‌های مختلف (RBF, FEM, FDM)

شکل ۳.۱ مقایسه گسسته‌سازی دامنه در روش‌های مختلف را نشان می‌دهد. برای دامنه نامنظم دلخواه Ω که توسط $\partial\Omega$ محدود شده است، شبکه‌بندی معمولی FDM از گره‌های مرتب شده در یک

^{۲۱}Element free galerkin method

^{۲۲}Meshless local petrov-galerkin method

^{۲۳}Moving least Square

^{۲۴}Polynomial Point Interpolation Method

^{۲۵}Radial Point Interpolation Method

شبکه متعامد تشکیل شده است، در روش FEM نیز شبکه‌بندی دامنه معمولاً از طریق تقسیم ناحیه به المان‌های مثلثی برای تعریف اطلاعات اتصال و زیردامنه است. این در حالی است که روش RBF تنها به مجموعه‌ای از گره‌ها در محدوده‌ی دامنه در هر توزیع دلخواه نیاز دارد.

۵.۲.۱ توابع پایه شعاعی

این بخش را با تعریف تابع شعاعی آغاز کرده و سپس تابع پایه‌ای شعاعی و ارتباط آن با تابع شعاعی را در یک مثال نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. تابع $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع شعاعی گوئیم هرگاه تابع تک‌متغیره پیوسته $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ با $\varphi(0) \geq 0$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$\phi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{r}) \quad \text{که} \quad \mathbf{r} = \|\mathbf{x}\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

که در اینجا $\|\cdot\|$ یک نرم روی $\mathbb{R}^n$ است که معمولاً آن را، نرم اقلیدسی در نظر می‌گیریم. در واقع این تعریف بیانگر آن است که برای یک تابع شعاعی ϕ داریم

$$\|\mathbf{x}\| = \|\bar{\mathbf{x}}\| \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = \phi(\bar{\mathbf{x}})$$

که $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$.

به عبارت دیگر، مقدار ϕ در هر نقطه در یک فاصله‌ی معین از مبدا ثابت است. بنابراین، ϕ از لحاظ شعاعی نسبت به مرکز خودش متقارن است. به همین دلیل ϕ را یک تابع شعاعی می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. تابع گاوسی را در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(r) = e^{-(\epsilon r)^2}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

که در آن، ϵ پارامتر شکل است که به واریانس (σ^2) از تابع توزیع نرمال به وسیله‌ی فرمول $\epsilon^2 = \frac{1}{2\sigma^2}$ ارتباط داده می‌شود.

حال اگر تابع گاوسی را با تابع فاصله‌ی اقلیدسی $\|\cdot\|_2$ ترکیب نماییم برای هر مرکز ثابت $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ یک تابع چندمتغیره به صورت

$$\phi_k(\mathbf{x}) = e^{-\epsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|_2^2}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

را به دست می‌آوریم. روشن است که، ارتباط بین ϕ_k و φ به وسیله‌ی

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|)$$

نمایش داده می‌شود. این همان ارتباطی است که نام توابع پایه‌ای شعاعی را مطرح می‌کند. در جدول ۲.۱ برخی از توابع پایه‌ای شعاعی معرفی شده است. که ϵ پارامتر شکل^{۳۸} نامیده می‌شود. نمودار توابع پایه‌ای شعاعی برای مقادیر کوچک ϵ بسیار مسطح بوده و برای مقادیر بزرگ آن نوک‌تیز می‌شوند. در هر صورت انتخاب ϵ مناسب در اغلب موارد وابسته به نوع مسأله‌ی مورد نظر است و نمی‌توان برای انتخاب ϵ از قبل با قاطعیت اظهار نظر کرد.

^{۳۸}Shape Parameter

جدول ۲.۱: توابع پایه‌ای شعاعی

تابع پایه شعاعی	$\phi(r)$
گوسی ^{۲۶} (GA)	$e^{-(\epsilon r)^2}$
درجه دوم چندربعی ^{۲۷} (MQ)	$\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}$
درجه دوم معکوس ^{۲۸} (IM)	$\frac{1}{1 + (\epsilon r)^2}$
چندربعی درجه دوم معکوس ^{۲۹} (IMQ)	$\frac{1}{\sqrt{1 + (\epsilon r)^2}}$
چندربعی درجه دوم تعمیم یافته ^{۳۰}	$(1 + (\epsilon r)^2)^{\frac{\nu}{2}} \quad \nu \neq 0, \nu \notin 2N$
بسل ^{۳۱}	$\frac{J_{\frac{d}{2}-1}(\epsilon r)}{(\epsilon r)^{\frac{d}{2}-1}}$
اسپلاین مکعبی ^{۳۲}	r^3
تک جمله‌ای ^{۳۳}	$r^{2m+1} \quad m \in N$
اسپلاین صفحه نازک ^{۳۴}	$r^{2l} \ln r$
اسپلاین صفحه نازک تعمیم یافته ^{۳۵}	$\begin{cases} r^{2k} \log r & k \in N \\ r^{2\nu} & \nu \notin N \end{cases}$
وندلاند ^{۳۶}	$(1-r)^k {}_2p(r) \quad k \in N$
ماترن ^{۳۷}	$\frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} r^\nu k_\nu(r) \quad \nu > 0$

۶.۲.۱ درونیایی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت

مساله‌ی درونیایی شامل پیدا کردن تابع (پیوسته) f است به طوری که $f(x_i) = y_i, i = 0, \dots, N-1$ که $y_i \in \mathbb{R}, x_i \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ است. حال اگر نقاط به طور یکنواخت قرار نگرفته باشند یا نامنظم باشد، این نوع مساله را درونیایی داده پراکنده می‌نامیم. متأسفانه، این مسایل بدو وضع هستند، به عبارت دیگر، بی‌نهایت تابع وجود دارد که می‌تواند در این شرایط صدق نمایند. در مساله‌ی درونیایی داده پراکنده، یک فرمول‌بندی خوش‌وضع زمانی به دست می‌آید که هسته‌های به کار گرفته شده معین مثبت (شرطی) باشند. اگر این فرض را به وجود آوریم که تحت هر تبدیل متعامدی تغییری به وجود نیاید، به طور طبیعی به توابع پایه‌ای شعاعی منجر می‌شود.

دو نوع مهم از توابع پایه‌ای شعاعی به ترتیب عبارتند از: توابع پایه‌ای شعاعی مثبت معین اکید و توابع پایه‌ای شعاعی مثبت معین شرطی. بسته به نوع تابع پایه شعاعی، تابع f و ضرایب آن حالت‌های مختلفی را دارا هستند. در اینجا توابع پایه‌ای شعاعی مثبت معین اکید بیان شده و برای توابع پایه‌ای شعاعی مثبت معین شرطی می‌توان به [۹۴] مراجعه کرد.

تعریف ۳.۲.۱. (توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت) فرض کنید که φ یک تابع پایه‌ای شعاعی روی $\mathbb{R}^n$ باشد. گوییم φ یک تابع معین مثبت است هرگاه برای تمام مجموعه‌هایی از N نقطه‌ی متمایز $\{x_j\}_{j=1}^N \subseteq \mathbb{R}^n$ فرم درجه‌ی دوم زیر

$$\lambda^T A \varphi \lambda = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \lambda_j \lambda_i \varphi(\|x_i - x_j\|), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N),$$

برای $\lambda \neq 0$ مثبت باشد. به عبارت دیگر، برای $\lambda \neq 0$ ماتریس درونیاب

$$A_\varphi = (A_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|))_{i,j=1}^N$$

معین مثبت باشد. (φ) را یک تابع معین مثبت اکید گوئیم اگر و تنها اگر برای $\lambda \neq 0$ $\lambda^T A_\varphi \lambda > 0$ به عبارت دیگر، ماتریس درونیاب A_φ معین مثبت اکید باشد. روشن است که، اگر φ معین مثبت باشد، آنگاه مساله‌ی درونیابی برای φ خوش‌وضع است. به عبارت دیگر، دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \phi_j(x) = \sum_{i=1}^N A_{ij} \varphi(\|x_i - x_j\|) \\ j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (19.1)$$

برای هر مجموعه از نقاط متمایز $\{x_j\}_{j=1}^N$ جواب یکتا دارد. حال اگر توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید استفاده شود، f به صورت زیر بیان می‌شود

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(\|x - x_i\|).$$

که φ یک تابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت است، $\{x_i\}_{i=1}^N$ را مراکز و $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^N$ را ضرایب می‌نامیم.

ضرایب به وسیله‌ی حل دستگاه $A\alpha = S$ محاسبه می‌شوند که A یک ماتریس مربعی $N \times N$ به صورت

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(\|x_1 - x_1\|) & \varphi(\|x_1 - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_1 - x_N\|) \\ \varphi(\|x_2 - x_1\|) & \varphi(\|x_2 - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_2 - x_N\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(\|x_N - x_1\|) & \varphi(\|x_N - x_2\|) & \cdots & \varphi(\|x_N - x_N\|) \end{pmatrix}$$

و S نیز یک بردار $N \times 1$ است که تمام عناصر آن $\{s_i\}$ است. چون توابع پایه‌ای شعاعی اکیدا مثبت معین هستند، A نیز اکیدا مثبت معین است. بنابراین، A معکوس پذیر است و دستگاه $A\alpha = S$ جواب یکتا دارد. تابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید ممکن است، محمل سراسری یا یک محمل فشرده داشته باشد. حال اگر توابع پایه شعاعی معین مثبت شرطی استفاده شوند، f می‌تواند به صورت زیر بیان گردد:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi(\|x - x_i\|) + \sum_{k=1}^Q \pi_k g_k(x).$$

که $\{g_k\}_{k=1}^Q$ یک پایه در فضای پوچ m بعدی شامل همه‌ی چندجمله‌ای‌های حقیقی d متغیره از مرتبه‌ی m است،

$$Q = \binom{m+d}{d}$$

و نیاز داریم که $N \geq Q$

$$\pi = \{\pi_k\}_{k=1}^Q$$

ضرایب تابع پایه شعاعی (α) و ضرایب چندجمله‌ای (π) به وسیله‌ی حل دستگاه معادلات خطی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{pmatrix} A & G^T \\ G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix}$$

که در اینجا $A_{ij} = \varphi(\|x_i - x_j\|)$ و $G_{ki} = g_k(x_i)$ و همچنین معادله‌ی $G\alpha = 0$ ساختار افزوده‌ای است که معکوس‌پذیری ماتریس را تضمین می‌کند.

۷.۲.۱ روش کانسا

یکی از معروف‌ترین روش‌های بدون شبکه، روش هم محلی کانسا^{۳۹} (نامتقارن) می‌باشد. روش کانسا در سال ۱۹۹۰ توسط ادوارد کانسا^{۴۰} مطرح شده است [۲۳]. هدف اصلی این روش درونیایی چند جمله‌ای است سپس برای حل معادلات با مشتقات جزئی مبتنی بر روش هم محلی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی معرفی شد و نشان داده شد که تقریب مشتقات جزئی با استفاده از توابع چنددرجی در درونیایی دقیق‌تر از روش‌های دیگر است. از آنجایی که در این روش از توابع پایه‌ای شعاعی برای تقریب جواب استفاده می‌شود از اینرو، در اغلب موارد این روش را روش هم محلی تابع پایه‌ای شعاعی نیز می‌نامند. مزیت اصلی روش کانسا در دقت بالا و انعطاف پذیری آن در برخورد با مسایل با دامنه‌های هندسی نامنظم می‌باشد و از آنجایی که اطلاعات هندسی مورد نظر در روش کانسا فاصله‌ی بین نقاط میدانی انتخاب شده در دامنه می‌باشد، بنابراین به راحتی می‌توان آن را برای مسایل با ابعاد بالا تعمیم داد.

معادله با مشتقات جزئی خطی در حالت کلی به شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = f(x), & x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \\ \mathcal{B}u(x) = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (20.1)$$

که در آن، u تابع مجهول، d بعد دامنه، $\partial\Omega$ مرز دامنه، $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیل داخلی و $\mathcal{B}$ عملگر شرایط مرزی است. توابع f و g هم دو تابع مفروض با نگاشت $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ است. در روش کانسا، جواب تقریبی برای مساله (۲۰.۱) به صورت زیر فرض می‌شود:

$$u(x_i) \simeq u_N(x_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi_j(r_{ij}), \quad (21.1)$$

که در آن، $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ ضرایب مجهول هستند که در طی فرایند محاسبه، تعیین خواهند شد. همچنین توابع $\phi_j(r_{ij}) = \phi(\|x_i - x_j\|)$ تابع پایه‌ای شعاعی هستند. با جایگذاری معادله (۲۱.۱) در (۲۰.۱) داریم:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N (\mathcal{L}\phi_j)(x_i) \alpha_j = f(x_i), & i = 1, 2, \dots, N_I \\ \sum_{j=1}^N (\mathcal{B}\phi_j)(x_i) \alpha_j = g(x_i), & i = N_I + 1, N_I + 2, \dots, N. \end{cases} \quad (22.1)$$

حال کافی است مقادیر $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ را بیابیم و با جایگذاری در (۲۱.۱) جواب تقریبی معادله (۲۰.۱) را به دست آوریم.

^{۳۹}Kansa method

^{۴۰}Edward Kansa

فصل ۲

مروری بر روش‌های مبتنی بر جواب‌های اساسی

۱.۲ مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی علاوه بر ریاضیات در مهندسی، اقتصاد و دیگر علوم کاربرد فراوان دارند. روش‌های عددی گوناگونی برای حل عددی این معادلات وجود دارد که در یک دسته‌بندی به دو گروه عمده روش‌های با شبکه‌بندی و بدون شبکه تقسیم می‌شوند. از جمله روش‌های با شبکه‌بندی دامنه‌ای روش تفاضل متناهی، روش عناصر متناهی و روش حجم متناهی می‌باشند. در این روش‌ها تقسیم بندی روی دامنه صورت می‌گیرد که پیاده‌سازی آنها را روی معادلاتی با نواحی نامنظم با بعد سه و بالاتر با مشکل مواجه می‌کند. در مقابل روش‌های دامنه‌ای، روش‌هایی مانند روش عناصرمرزی به وجود آمد که دارای ماهیت مرزی بوده و فقط به تقسیم بندی مرز اکتفا می‌کند. در روش عناصرمرزی ابتدا معادله دیفرانسیل داده شده با استفاده از توابع خاصی تحت عنوان جواب اساسی به یک معادله انتگرال تبدیل می‌شود و سپس معادله انتگرال به وجود آمده با روش‌های عددی حل می‌شود. از معایب روش عناصرمرزی وجود انتگرال‌های منفرد در معادله می‌باشد. همچنین روش عناصرمرزی فقط برای معادلاتی که جواب اساسی برای آن‌ها وجود دارد قابل استفاده می‌باشد.

۲.۲ روش عناصرمرزی

روش عناصرمرزی^۱ (BEM) که در سال ۱۹۷۸ توسط برییا^۲ پایه گذاری شد یک روش بدون شبکه می‌باشد و با توجه به ماهیت مرزی بودن آن، فقط به تقسیم بندی مرز اکتفا می‌کند. در نتیجه بعد مساله به اندازه یک واحد کاهش می‌یابد و حجم دستگاه معادلات بوجود آمده را بطور قابل ملاحظه ای کاهش می‌دهد. به عنوان مثال برای مسایل سه بعدی، گسسته سازی تنها روی سطح و برای مسایل دوبعدی، گسسته سازی تنها روی محیط ناحیه انجام می‌شود. مشخصه کاهش بعد، این روش را به یک ابزار محاسباتی جذاب تبدیل کرده است. این تاثیر، برای مسایل با مرز نامنظم و

^۱ Boundary element method

^۲ Brebbia

همچنین برای زمانی که دامنه مورد نظر، بی کران است بیش از هر زمانی قابل توجه می‌باشد. اما وجود جملات ناهمگون در معادلات، سبب بوجود آمدن انتگرالهای منفرد در فرمول روش عناصرمرزی می‌شود که کارایی روش را تا حد زیادی کاهش می‌دهد زیرا مستلزم استفاده از قواعد انتگرالگیری عددی از مرتبه بالاست. در این روش ابتدا معادله دیفرانسیل داده شده با استفاده از توابع خاصی تحت عنوان جواب اساسی به یک معادله انتگرال تبدیل می‌شود، سپس معادله انتگرال بوجود آمده، با روش‌های عددی حل می‌شود. در این روش با استفاده از تکنیک مانده وزنی و قضیه گرین-گاوس و در نظر گرفتن جواب اساسی به عنوان تابع وزن، معادله دیفرانسیل جزئی به یک معادله انتگرال مرزی تبدیل می‌شود.

۳.۲ روش جواب اساسی

روش جواب اساسی^۳ (MFS) اولین بار توسط کوپرادزه^۴ و الکسیدزه^۵ معرفی شد که برای تعدادی از مساله‌های مهندسی با موفقیت به کار برده شد. روش جواب‌های اساسی یک روش بدون شبکه بندی بوده و متعلق به رده روش‌های بدون شبکه بندی مرزی است که در آن نیازی به تقسیم بندی دامنه یا مرز مساله وجود ندارد. در این روش ابتدا یک مرز ساختگی (مجازی)^۶ که شامل مرز اصلی است در نظر گرفته می‌شود که از منفرد شدن جواب اساسی جلوگیری می‌کند. سپس جواب مساله بر حسب یک ترکیب خطی از جواب اساسی معادله بیان می‌شود و ضرایب این ترکیب چنان تعیین می‌شوند که شرایط مرزی مساله برقرار شوند. برای حل معادلات ناهمگون در این روش معمولاً از روش جواب خصوصی استفاده می‌شود و جواب خصوصی بر حسب توابع پایه‌ای شعاعی تقریب می‌شود. در این روش یک مرز ساختگی اطراف مرز فیزیکی در نظر گرفته می‌شود و نقاط منبع^۷ روی این مرز انتخاب می‌شوند. در نتیجه، از انطباق نقاط منبع و نقاط میدانی و از منفرد بودن جواب اساسی جلوگیری می‌شود. به شکل ۱.۲ توجه شود.

معادله دیفرانسیل جزئی همگن زیر را با شرایط داده شده در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \Re u = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ u = g(x, y), & (x, y) \in \Gamma_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h(x, y), & (x, y) \in \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.2)$$

که $\Re$ یک عملگر دیفرانسیل جزئی، Ω دامنه محاسباتی، Γ_D و Γ_N به ترتیب مرز دیریکله و مرز نیومان می‌باشند که $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$ و $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. روش جواب اساسی، از جواب اساسی عملگر موجود در معادله اصلی به عنوان تابع پایه برای تقریب تابع مجهول u بصورت زیر استفاده می‌کند:

$$u(x, y) \simeq u^*(x, y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi(r_i), \quad (2.2)$$

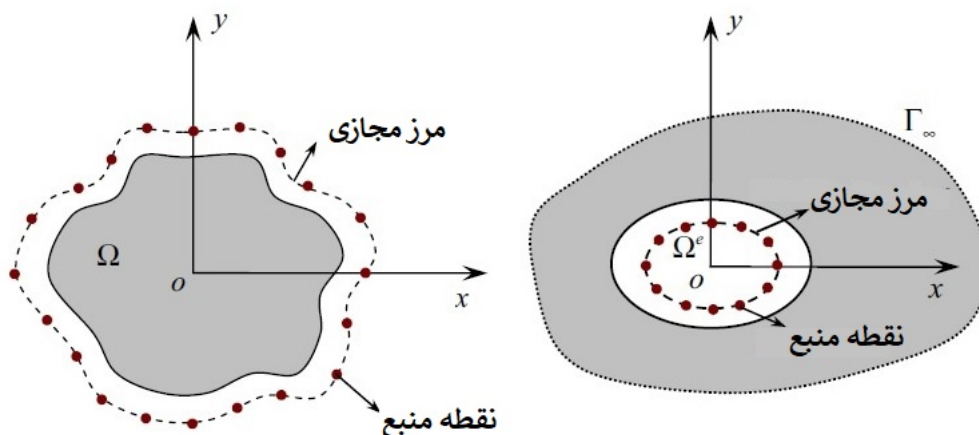
^۳Method of fundamental solution

^۴Kupradze

^۵Aleksidze

^۶Fictitious boundary

^۷Source point



شکل ۱.۲: نقاط و دامنه در روش MFS برای مساله با دامنه برونی (راست) و مساله با دامنه درونی (چپ).

که $\phi(\cdot)$ جواب اساسی عملگر، $r_i = \|(x_i, y_i) - (x'_i, y'_i)\|$ فاصله اقلیدسی نقاط هم‌محلی (x_i, y_i) و نقاط منبع (x'_i, y'_i) می‌باشند و α_i ‌ها ضرایب مجهول هستند. بادر نظر گرفتن نقاط منبع خارج از دامنه فیزیکی مساله، روش MFS از منفرد بودن جواب اساسی بر حذر خواهد بود. با جایگذاری تقریب بالا در شرایط مرزی معادله ماتریسی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} \phi(r_j | (x_i, y_i)) \\ \frac{\partial \phi(r_j | (x_k, y_k))}{\partial n} \end{bmatrix} \alpha = \begin{bmatrix} g(x_i, y_i) \\ h(x_k, y_k) \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

که (x_i, y_i) و (x_k, y_k) به ترتیب نقاط هم‌محلی روی مرزهای دیریکله و نیومان هستند. ضرایب مجهول α_i بصورت یکتا از معادله ماتریسی (۳.۲) بدست می‌آیند و با داشتن آنها، جواب تقریبی هر نقطه از دامنه فیزیکی مساله قابل محاسبه خواهد بود.

۴.۲ روش مرز منفرد

روش مرز منفرد^۸ (SBM) اولین بار توسط ون چن^۹ و همکارانش معرفی شد. ایده اصلی این روش، معرفی مفهوم (OIF)^{۱۰} برای برطرف کردن منفرد بودن (تکینگی) در جواب اساسی است بطوریکه نقاط منبع بصورت مستقیم روی مرز حقیقی قابل جایگزینی باشند. برای مقایسه، روش (MFS) نیاز به یک مرز ساختگی دارد تا جایگزینی نقاط منبع باعث منفرد بودن جواب اساسی نشود. در شکل ۱.۲ و شکل ۲.۲ تفاوت روش SBM و MFS در مواجهه با منفرد بودن جواب اساسی برای نقاط منبع مورد اشاره می‌باشد.

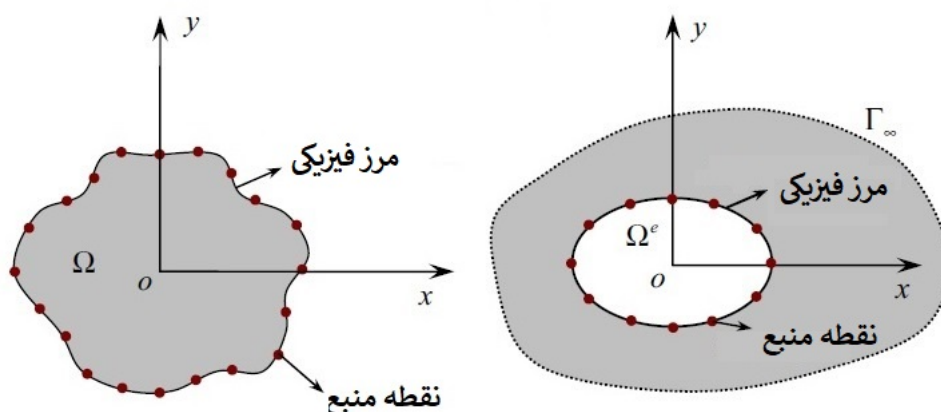
۱.۴.۲ مزیت‌های روش مرز منفرد

مزیت‌های روش مرز منفرد نسبت به روش‌های گسسته سازی دامنه و مرز عبارتست از:

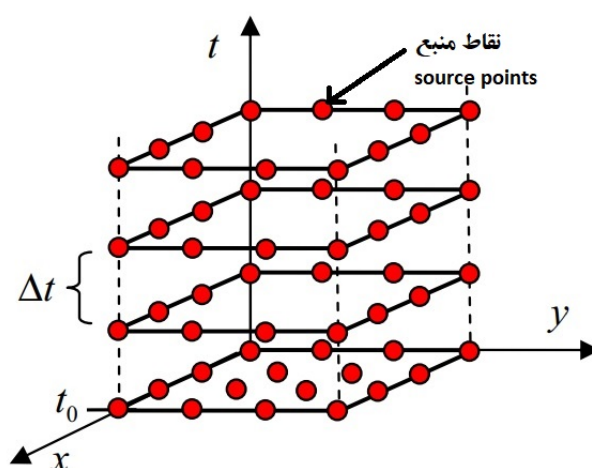
^۸Singular boundary method

^۹Wen Chen

^{۱۰}Origin intensity factor



شکل ۲.۲: نقاط و دامنه در روش SBM برای مساله با دامنه برونی (راست) و مساله با دامنه درونی (چپ).



شکل ۳.۲: نقاط منبع در یک مساله دوبعدی وابسته به زمان

۱. روش مرزمنفرد به عنوان یک روش از نوع مرزی، مزیت‌های روش عناصرمرزی نسبت به روش‌های گسسته سازی دامنه را حفظ می‌کند.

۲. روش مرزمنفرد نیازی به شبکه‌بندی دامنه و مرز ندارد. در صورتیکه این فرایند در روش‌های شبکه ای با توجه به هندسه و بعد مساله، دشوار، زمانبر و دارای پیچیدگی محاسباتی است.

۳. روش مرزمنفرد درگیر محاسبات انتگرالگیری نیست.

۴. روش مرزمنفرد بدون نیاز به مرز ساختگی روش MFS از لحاظ ریاضی روشی بدون شبکه، ساده و آسان برای برنامه‌نویسی است.

۲.۴.۲ پیاده سازی روش مرزمنفرد

معادله دیفرانسیل جزئی همگن زیر را با شرایط داده شده در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \Re u = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ q(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_N, \end{cases} \quad (۴.۲)$$

که $\Re$ یک عملگر دیفرانسیل جزئی، Ω دامنه محاسباتی کراندار و همبند و Γ_D و Γ_N به ترتیب مرز دیریکله و مرز نیومان می‌باشند که $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$ و $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. همچنین توابع g و h توابع معلوم هستند. روش مرزمنفرد از جواب اساسی عملگر موجود در معادله اصلی به عنوان تابع پایه برای تقریب استفاده می‌کند. اگر G جواب اساسی عملگر باشد، برای نقاط میدانی $\mathbf{x}_i$ و نقاط منبع $\mathbf{s}_j$ تقریب u و q عبارتند از:

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j), \quad \mathbf{x}_i \in \Omega - \Gamma_D, \quad (۵.۲)$$

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) + \alpha_i u_{ii}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_D, \quad (۶.۲)$$

$$q(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_j \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_i q_{ii}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_N, \quad (۷.۲)$$

که در آنها u_{ii} و q_{ii} عامل‌های OIF هستند که در واقع، درایه های قطر اصلی ماتریس درونیاب روش SBM می‌باشند و برای تعیین آنها می‌توان از چند روش استفاده کرد. روش‌های براساس درونیابی معکوس، روش‌های تحلیلی و روش‌های تجربی از مهمترین روش‌های تعیین عامل‌های OIF هستند که به دو مورد از آنها اشاره می‌شود. روش اول، تکنیک درونیابی معکوس^{۱۱} (IIT) و روش دوم، تکنیک کاستن و دوباره افزودن^{۱۲} (SAB) براساس یافتن فرمول تحلیلی برای محاسبه عامل‌های OIF می‌باشد.

الف) تکنیک درونیابی معکوس برای تعیین OIF

برای تعیین عامل‌های OIF مراحل زیر انجام می‌شود:

۱. یک جواب خصوصی معلوم و دلخواه از معادله به نام جواب نمونه^{۱۳} $u_s(\mathbf{x})$ در نظر می‌گیریم. (به عنوان مثال تابع $u_s(x, y) = x + y + C$ یک جواب خصوصی آسان برای معادله لاپلاس است.) سپس نقاط نمونه $\mathbf{y}_k$ از دامنه فیزیکی مساله انتخاب می‌شود ($N_k > N$). البته لزومی ندارد که نقاط نمونه منطبق بر نقاط منبع باشند.

^{۱۱}Inverse interpolation technique

^{۱۲}Subtracting and adding-back

^{۱۳}Sample solution

۲. با استفاده از فرمول درونیایی، ضرایب مجهول β_j از معادلات زیر تعیین می‌شوند:

$$u_s(\mathbf{y}_k) = \sum_{j=1}^{N_k} \beta_j G(\mathbf{y}_k, \mathbf{s}_j), \quad (۸.۲)$$

۳. با جایگزینی نقاط نمونه $\mathbf{y}_k$ با نقاط هم‌محلی مرزی $\mathbf{x}_i$ ماتریس درونیایی SBM مساله، بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_s(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) + \beta_i u_{ii}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_D, \quad (۹.۲)$$

و

$$\frac{\partial u_s(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial \mathbf{n}} + \beta_i q_{ii}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_N, \quad (۱۰.۲)$$

که عامل‌های u_{ii} و q_{ii} در معادلات بالا مجهول هستند که بصورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$u_{ii} = \frac{1}{\beta_i} \left[u_s(\mathbf{x}_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) \right], \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_D, \quad (۱۱.۲)$$

و

$$q_{ii} = \frac{1}{\beta_i} \left[\frac{\partial u_s(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{n}} - \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial \mathbf{n}} \right], \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_N, \quad (۱۲.۲)$$

نقاط نمونه از درون دامنه فیزیکی انتخاب می‌شوند و هیچکدام از آنها منطبق بر نقاط منبع نیستند و تعداد نقاط نمونه نباید کمتر از تعداد نقاط منبع باشد.

۴. در آخرین مرحله، تقریب جواب بدست می‌آید:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_j G(\mathbf{x}, \mathbf{s}_j) + \alpha_i u_{ii}, \quad (۱۳.۲)$$

ب) تکنیک کاستن و دوباره افزودن برای تعیین OIF

تکنیک کاستن و دوباره افزودن (SAB) که در [۲۶] ارایه شده است، در تعیین عامل‌های OIF روش مرزمنفرد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

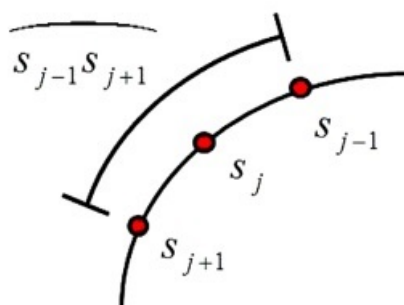
برای اعمال این تکنیک عددی، جواب نمونه u_s که در معادله اصلی صدق می‌کند و نقاط نمونه $\mathbf{y}_k$ که در داخل دامنه فیزیکی مساله قرار دارند را در نظر می‌گیریم.

با جایگزینی نقاط هم‌محلی مرزی $\mathbf{x}_i$ به جای نقاط نمونه $\mathbf{y}_k$ ماتریس درونیایی روش مرزمنفرد بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_s(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) + \beta_i u_{ii}, \quad (۱۴.۲)$$

و

$$\frac{\partial u_s(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{n}} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial \mathbf{n}} + \beta_i q_{ii}, \quad (۱۵.۲)$$


 شکل ۴.۲: شکل کمان شامل نقطه منبع s_j در فضای دو بعدی

که در معادله‌های بالا، فقط عامل‌های u_{ii} و q_{ii} مجهول هستند، که بصورت زیر تعیین می‌شوند:

$$u_{ii} = \frac{1}{\beta_i} \left[u_s(\mathbf{x}_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^N \beta_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) \right], \quad (۱۶.۲)$$

و

$$q_{ii} = -\frac{1}{L_i} \sum_{j=1, j \neq i}^N L_j \frac{\partial G_0(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial n_s}, \quad (۱۷.۲)$$

که L_i نصف فاصله منحنی بین نقاط منبع $\mathbf{s}_{i-1}$ و $\mathbf{s}_{i+1}$ می‌باشد. همچنین، G_0 جواب اساسی معادله لاپلاس دوبعدی است.

توجه کنید که به توجه است که نقاط نمونه $\mathbf{y}_k$ منطبق بر نقاط منبع $\mathbf{s}_j$ نیستند و تعداد نقاط نمونه نباید کمتر از تعداد نقاط منبع مرز فیزیکی دامنه باشد. درپایان، جواب تقریبی عبارتست از:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \alpha_j G(\mathbf{x}, \mathbf{s}_j) + \alpha_i u_{ii}, \quad (۱۸.۲)$$

که معادله (۱۸.۲) جواب معادله اصلی می‌باشد.

لازم به تاکید است که عامل‌های OIF بستگی به توزیع نقطه‌های منبع، جواب اساسی معادله اصلی و شرایط مرزی مساله دارد. از لحاظ نظری، عامل‌های OIF با جواب‌های نمونه مختلف، تغییری نمی‌کنند. بنابراین، با استفاده از تکنیک بیان شده، منفرد بودن جواب اساسی در هنگام انطباق نقاط منبع و هم‌محلی مرتفع می‌شود.

۳.۴.۲ روش مرز منفرد بهبود یافته

بررسی مساله‌هایی که جواب آنها شامل یک جمله پتانسیل ثابت می‌باشد نشان می‌دهد که جواب بدست آمده در روش SBM با جواب دقیق مساله دارای فاصله است. برای اصلاح روش و فایق

آمدن بر این مشکل در محاسبات روش، ثابت α_{N+1} را طوری در نظر می‌گیرند که:

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) + \alpha_{N+1}, \quad \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma_1,$$

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) + \alpha_i u_{ii} + \alpha_{N+1}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1,$$

$$q(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_j \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_i q_{ii}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2,$$

با شرط اینکه:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 0,$$

۵.۲ ترکیب روش مرزمنفرد و روش جواب خصوصی

در این بخش، روش مرزمنفرد با روش جواب خصوصی ترکیب می‌شود که برای بدست آوردن جواب خصوصی از روش MPS و برای جواب معادله همگن از روش مرزمنفرد استفاده می‌کنیم. در ادامه روش MPS توضیح داده می‌شود.

۱.۵.۲ روش جواب خصوصی

جواب‌های خصوصی خانواده مهمی از توابع پایه شعاعی وابسته به مساله هستند [۸۷، ۸۸، ۸۹]. با استفاده از تکنیک جداسازی، جواب معادله ناهمگن به دو قسمت جواب همگن و جواب خصوصی تقسیم می‌شود. ایده اصلی این است که جواب خصوصی باید در معادله اصلی صدق کند. مساله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۱۹.۲)$$

$$Bu(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (۲۰.۲)$$

که $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیل و B عملگر دیفرانسیل مرزی است. همچنین ψ و ω توابعی معلوم هستند، مجموعه Ω ناحیه داخلی و $\Gamma = \partial\Omega$ مرز دامنه محاسباتی است. فرض کنید $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ مجموعه نقاط درونیایی باشد که شامل N_i نقطه درونی در Ω و N_b نقطه مرزی روی Γ باشد که $N = N_i + N_b$.

اگر u_p جواب خصوصی مورد نظر مساله باشد باید در معادله اصلی صدق کند یعنی:

$$\mathcal{L}u_p(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۲۱.۲)$$

اما لزومی ندارد که در شرایط مرزی صدق کند.

اگر u_p از معادله (۲۱.۲) محاسبه شود آنگاه معادله اصلی (۱۹.۲) و (۲۰.۲) با تغییر متغیر $u_h = u - u_p$ تبدیل به معادله همگن زیر می‌گردد:

$$\mathcal{L}u_h(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۲۲.۲)$$

با شرایط:

$$Bu_h(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x}) - Bu_p(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (۲۳.۲)$$

معادله همگن (۲۲.۲) با شرایط (۲۳.۲) با استفاده از روش‌های مرزی حل خواهند شد. روش عددی بیان شده برای حل معادله دیفرانسیل جزئی با در اختیار بودن جواب خصوصی و جواب اساسی قابل دستیابی خواهد بود. در پایان، جواب معادله‌های (۱۹.۲) و (۲۰.۲) با جمع کردن جواب خصوصی و جواب همگن یعنی:

$$u = u_p + u_h,$$

بدست می‌آید. بوسیله روش جواب خصوصی، برای تقریب متغیر ψ با استفاده از ترکیب خطی توابع پایه شعاعی، فرض می‌کنیم جواب معادله‌های (۱۹.۲) و (۲۰.۲) با ترکیبی خطی از جواب‌های خصوصی متناظر تابع پایه شعاعی ϕ تقریب زده شده باشد، بطوریکه:

$$\psi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|), \quad (24.2)$$

که $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی و α_j ضرایب مجهول هستند، در نتیجه، جواب خصوصی تقریب زده شده u_p در معادله (۲۱.۲) بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$u_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|), \quad (25.2)$$

بطوریکه:

$$\mathcal{L}\Phi = \phi, \quad (26.2)$$

۲.۵.۲ جواب خصوصی معادله هلمهلتز تغییر یافته

در روش ارایه شده، از اسپلاینهای پلی‌هارمونیک مرتبه بالا یا همان اسپلاینهای صفحه نازک کلی (GTPS) به عنوان توابع پایه شعاعی استفاده می‌کنیم:

$$\phi(r) = r^m \ln(r), \quad m = 2, 4, 6, \dots \quad (27.2)$$

که برای عملگر هلمهلتز تغییر یافته $\mathcal{L} = \Delta - \mu^2$ با در نظر گرفتن معادله‌های (۲۶.۲) و (۲۷.۲) خواهیم داشت:

$$(\Delta - \mu^2)\Phi(r) = \phi(r). \quad (28.2)$$

که Δ بیانگر عملگر لاپلاس است. در نهایت خواهیم داشت:

$$\Phi(r) = -\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^{m/2} \left(\frac{\Delta}{\mu^2}\right)^i r^m \ln(r) - \frac{(m)!!^2}{\mu^{m+2}} K_0(\mu r), \quad (29.2)$$

که r فاصله اقلیدسی بین نقطه $\mathbf{x}$ و مرکز است. همچنین، تابع $K_0(\cdot)$ تابع بسل نوع دوم مرتبه صفر است.

اگر $m = 2$ باشد، یعنی اسپلاین صفحه نازک $\phi(r) = r^2 \ln(r)$ از معادله (۲۹.۲) جواب خصوصی متناظر بصورت زیر خواهد بود:

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{r^2 \ln(r)}{\mu^2} - \frac{4}{\mu^4} (1 + \ln(r) + K_0(\mu r)), & r \neq 0, \\ \frac{4}{\mu^4} (-1 + \gamma + \ln(\frac{\mu}{2})), & r = 0, \end{cases} \quad (30.2)$$

و برای اسپلین پلی هارمونیک مرتبه دوم در حالت دوبعدی یعنی $\phi(r) = r^4 \ln(r)$ جواب خصوصی عبارتست از:

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{r^4 \ln(r)}{\mu^2} - \frac{8r^2}{\mu^4} (2 \ln(r) + 1) - \frac{1}{\mu^6} (96 + 64 \ln(r) + 64 K_0(\mu r)), & r \neq 0, \\ \frac{1}{\mu^6} (-96 + 64\gamma + 64 \ln(\frac{\mu}{2})), & r = 0, \end{cases} \quad (31.2)$$

در معادله‌های (30.2) و (31.2) ثابت γ ثابت اویلر است.

ملاحظه ۱.۵.۲. برای محاسبه لاپلاس u_p با استفاده از معادله‌های (25.2) و (28.2) خواهیم داشت:

$$\Delta u_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Delta \Phi(r_j), \quad (32.2)$$

و همچنین:

$$\Delta \Phi(r_j) = \mu^2 \Phi(r_j) + \phi(r_j), \quad (33.2)$$

در نهایت با ادغام دو معادله بالا، عبارت زیر بدست می‌آید:

$$\Delta u_p(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j (\mu^2 \Phi(r_j) + \phi(r_j)). \quad (34.2)$$

ملاحظه ۲.۵.۲. برای معادله لاپلاس روی دامنه دوبعدی

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (35.2)$$

جواب اساسی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}_j) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|_2), \quad (36.2)$$

ملاحظه ۳.۵.۲. برای معادله هلمهلتز تغییر یافته روی دامنه دوبعدی یعنی:

$$(\Delta - \mu^2)u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (37.2)$$

جواب اساسی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}_j) = -\frac{1}{2\pi} K_0(\mu \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|_2), \quad (38.2)$$

ملاحظه ۴.۵.۲. رابطه بین عامل OIF در عملگرهای لاپلاس و هلمهلتز تغییر یافته بصورت زیر است [۱۰۳]:

$$u^{ii} = u_L^{ii} - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\mu}{2}\right) - \frac{\gamma}{2\pi}, \quad (39.2)$$

و

$$q^{ii} = q_L^{ii}, \quad (40.2)$$

که u_L^{ii} عامل OIF شرایط مرزی دیریکله و q_L^{ii} عامل OIF شرایط مرزی نیومان عملگر لاپلاس می‌باشد. همچنین γ ثابت اویلر است.

ملاحظه ۵.۵.۲. (یکتایی جواب معادله هلمهلتز تغییر یافته) اگر Ω یک دامنه کراندار و u_1 و u_2 جواب‌های معادله هلمهلتز تغییر یافته باشند، آنگاه برای $w := u_1 - u_2$ خواهیم داشت:

$$(\Delta - \mu^2)w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (41.2)$$

که:

$$w(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (42.2)$$

با ضرب معادله بالا در w و انتگرالگیری روی Ω و استفاده از اتحاد اول گرین خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} w \Delta w d\mathbf{x} - \mu^2 \int_{\Omega} w^2 d\mathbf{x} &= 0, \\ \left(\int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial n} ds - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x} \right) - \mu^2 \int_{\Omega} w^2 d\mathbf{x} &= 0, \\ \int_{\Omega} |\nabla w|^2 d\mathbf{x} + \mu^2 \int_{\Omega} w^2 d\mathbf{x} &= 0, \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد: $w = 0$ بنابراین: $u_1 = u_2$.

۶.۲ اهداف و نتایج مورد انتظار

روشی که در بخش قبلی شرح داده شد، یک توسعه جالب و کارا از روش‌های مبتنی بر جواب‌های اساسی می‌باشد. انتظار داریم در این رساله برای اهداف و سوال‌های زیر جواب مناسبی بیابیم.

سوال ۱. آیا می‌توان روش مرزمنفرد و دیگر روش‌های مبتنی بر جواب‌های اساسی را برای مساله‌های مختلف، مانند معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری و مساله‌های معکوس به کاربرد؟

سوال ۲. آیا می‌توان این روش‌ها را با روش‌های عددی دیگر ترکیب کرد به گونه‌ای که دقت روش جدید بیشتر شود؟

سوال ۳. آیا می‌توان روش مرزمنفرد و دیگر روش‌های مبتنی بر جواب‌های اساسی را برای معادلات غیرخطی به کاربرد؟

سوال ۴. آیا می‌توان روش مرزمنفرد و دیگر روش‌های مبتنی بر جواب‌های اساسی را برای مساله‌های از مرتبه‌های بالا و مساله‌هایی که دارای شرایط مرزی پیچیده هستند، به کاربرد؟

فصل ۳

روش مرز منفرد برای حل معادله لاپلاس

۱.۳ مقدمه

معادله لاپلاس یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که از اهمیت و کاربرد فراوانی در ریاضیات، فیزیک، و مهندسی برخوردار است. به عنوان نمونه می‌شود به زمینه‌هایی همچون الکترومغناطیس، ستاره‌شناسی، و دینامیک سیالات اشاره کرد که حل این معادله در آن‌ها کاربرد دارد. این معادله، حالت همگن معادله پواسن است. جواب‌های کلی این معادله در نظریه پتانسیل بررسی می‌شوند و تمام آن‌ها توابع همساز هستند.

جواب معادله لاپلاس دو ویژگی دارد:

(الف) خاصیت میانگین: مقدار پتانسیل در هر نقطه برابر میانگین نقاط اطرافش است. در دو بعد نقاط اطراف را می‌توان دایره‌ای به شعاع r حول نقطه مورد نظر در نظر گرفت و در سه بعد نقاط اطراف را می‌توان کره‌ای به شعاع r حول نقطه مورد نظر تعریف کرد.

(ب) خاصیت نداشتن ماکزیمم و مینیمم نسبی: جواب معادله لاپلاس هیچ ماکزیمم و مینیمم نسبی ندارد و نقاط اکسترمم تنها در مرزهای مساله رخ می‌دهند. این خاصیت را می‌توان با استفاده از خاصیت قبلی ثابت کرد.

معادله لاپلاس را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \\ u = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_D, \\ q(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = h(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma_N, \end{cases} \quad (1.3)$$

که $\mathbf{n}$ بردار نرمال برونسوی، Ω دامنه محاسباتی مساله که کراندار و همبند می‌باشد، Γ_D و Γ_N به ترتیب مرز اساسی (دیریکله) و مرز طبیعی (نیومان) هستند که: $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ و $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ، که $\partial\Omega$ کل مرز مساله است. همچنین g و h توابعی معلوم هستند.

۲.۳ پیاده سازی روش مرز منفرد برای معادله لاپلاس دوبعدی

روش مرز منفرد از جواب اساسی به عنوان تابع پایه در بسط تقریب استفاده می‌کند. در این روش نقاط منبع روی مرز فیزیکی انتخاب می‌شوند و در هنگام انطباق با نقاط هم محلی، برای جلوگیری

از منفرد بودن، عامل OIF معرفی می‌شود. روش مرز منفرد، جواب عددی $u(x)$ را با استفاده از ترکیب خطی توابع پایه‌ای که همان جوابهای اساسی هستند، تقریب می‌زند. اگر $G(\mathbf{x})$ جواب اساسی عملگر موجود در معادله (۱.۳) باشد، برای نقاط میدانی $\mathbf{x}_i$ و نقاط منبع $\mathbf{s}_j$ تقریب u و عبارت خواهد بود از:

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^N \alpha_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j), \quad \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma_D, \quad (2.3)$$

$$u(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_j G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j) + \alpha_i u_{ii}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (3.3)$$

$$q(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1, i \neq j}^N \alpha_j \frac{\partial G(\mathbf{x}_i, \mathbf{s}_j)}{\partial \mathbf{n}} + \alpha_i q_{ii}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (4.3)$$

که N تعداد نقاط منبع و α_j -امین ضریب مجهول است. جواب اساسی G هنگامیکه $\mathbf{x}_i = \mathbf{s}_j$ باشد، منفرد خواهد بود. برای رفع این مشکل، مفهوم عامل OIF تعریف شده است. همه نقاط محاسباتی روی یک مرز فیزیکی یکسان در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، نقاط منبع $\{\mathbf{s}_j\}$ و نقاط هم محلی $\{\mathbf{x}_i\}$ مجموعه یکسانی از نقاط مرزی هستند. برای وقتی که $\mathbf{x}_i = \mathbf{s}_j$ از عامل OIF برای جایگزینی جمله منفرد در فرمول استفاده می‌شود. که u_{ii} و q_{ii} در معادله‌های (۳.۳) و (۴.۳) به عنوان عاملهای OIF وابسته به جوابهای اساسی و بردار نرمال برونسوی یک جوابهای اساسی می‌باشند، یعنی، این عاملها درایه‌های قطری ماتریس درونیایی روش مرز منفرد هستند. ازاینرو، برای حل همه انواع مساله‌ها، مرحله اصلی، تعیین کردن عاملهای OIF هستند. که برای تعیین این عاملها معمولاً از تکنیک درونیایی معکوس استفاده می‌شود. همانطور که قبلاً توضیح داده شده است، در تکنیک درونیایی معکوس، یک جواب نمونه u_s که در معادله اصلی صدق می‌کند و نقاط نمونه $\mathbf{y}_k$ که داخل دامنه فیزیکی مساله هستند را در نظر می‌گیریم.

۳.۳ مثال‌های عددی

در این بخش، دقت و کارایی روش، برای معادله لاپلاس دوبعدی روی دامنه‌های نامنظم مختلف بررسی می‌شود. برای این منظور دو نوع خطا مورد بررسی قرار می‌گیرد که به صورت زیر تعریف می‌شوند. خطای مطلق ماکزیمم

$$\varepsilon_\infty(u) = \|u_{exact}(\mathbf{x}_i) - u_{approx}(\mathbf{x}_i)\|_\infty, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3)$$

و خطای نسبی به صورت

$$\varepsilon_R(u) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_{exact}(\mathbf{x}_i) - u_{approx}(\mathbf{x}_i))^2}{\sum_{i=1}^N (u_{exact}(\mathbf{x}_i))^2}} \quad (6.3)$$

که $u_{exact}(\mathbf{x}_i)$ مقدار دقیق و $u_{approx}(\mathbf{x}_i)$ جواب تقریبی حاصل از روش می‌باشند. همانطور که در فصل قبلی اشاره شد، جواب اساسی عملگر لاپلاس دوبعدی به صورت زیر است:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r(\mathbf{x}, \mathbf{s})) = -\frac{1}{2\pi} \ln(\|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|_2), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad (7.3)$$

که $r(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ فاصله اقلیدسی بین نقطه هم محلی $\mathbf{x}$ و نقطه منبع $\mathbf{s}$ می‌باشد.

مثال ۱.۳.۳. در این مثال، معادله لاپلاس (۱.۳) با شرایط مرزی دیریکله را روی دامنه فیزیکی دایره ای Γ که به صورت زیر تعریف شده، در نظر می گیریم:

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in R^2 : \frac{7}{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \right\}$$

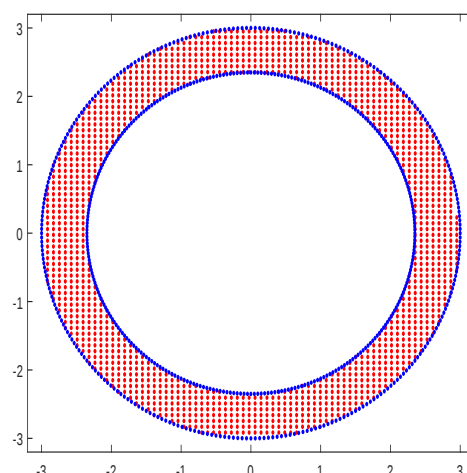
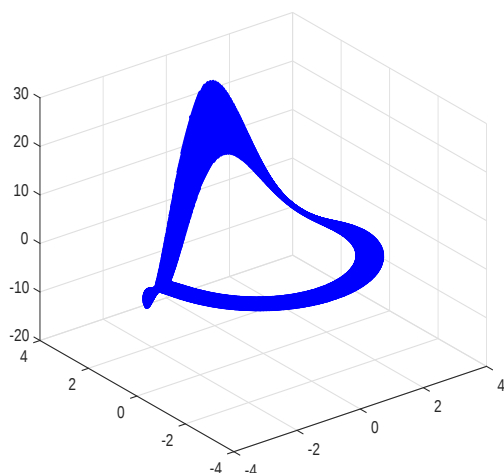
که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y) = (\sin x + \cos x)e^y, \quad (۸.۳)$$

خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ برای مقادیر مختلف N در جدول ۱.۳ گزارش شده است. دقت و کارایی روش استفاده شده، برای مقادیر مختلفی از N در شکل ۱.۳ نشان داده شده است. همچنین نمودار جواب عددی در این شکل رسم شده است. نمودار خطای مطلق و نمودار کانتور جواب عددی در شکل ۲.۳ نشان داده شده است.

جدول ۱.۳: خطاها با افزایش تعداد نقاط برای مثال ۱.۳.۳

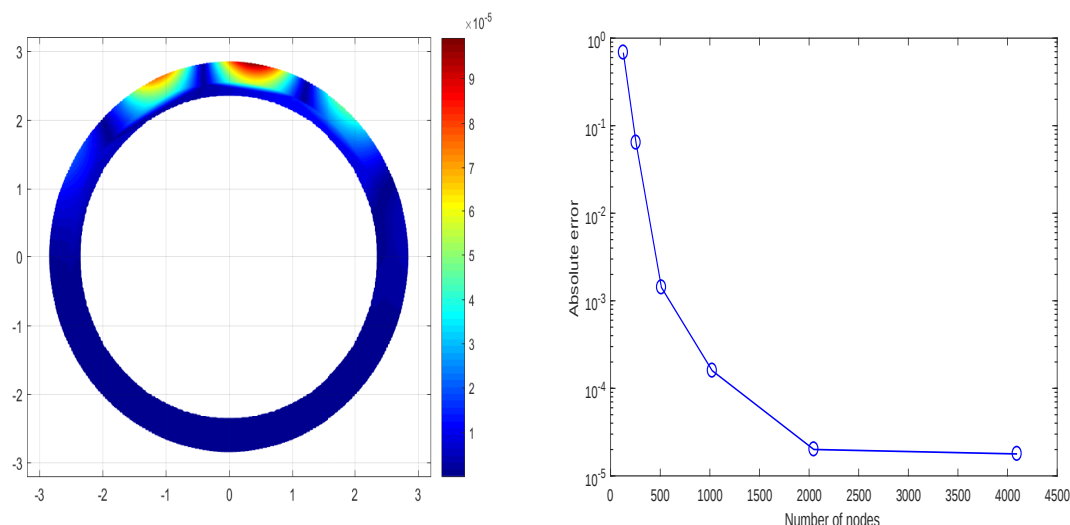
N	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
128	6.8277×10^{-1}	1.8427×10^{-2}
256	6.3923×10^{-2}	1.8528×10^{-3}
512	1.4192×10^{-3}	5.1798×10^{-5}
1024	1.5895×10^{-4}	5.8932×10^{-6}
2048	2.0030×10^{-5}	7.2986×10^{-7}
4096	1.7815×10^{-5}	3.1823×10^{-7}



شکل ۱.۳: شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۱.۳.۳.

مثال ۲.۳.۳. در این مثال، کارایی روش ارایه شده را برای حل معادله لاپلاس روی یک دامنه پیچیده بررسی می کنیم. دامنه محاسباتی در این مثال، یک دامنه همبند آمیب-شکل $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma_1 = \left\{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r = e^{\sin \theta} \sin^2(2\theta) + e^{\cos \theta} \cos^2(2\theta) \right\}$$



شکل ۲.۳: نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور جواب عددی با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۱.۳.۳.

و

$$\Gamma_2 = \left\{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r = -\frac{1}{3} + e^{\sin \theta} \sin^2(2\theta) + e^{\cos \theta} \cos^2(2\theta) \right\}$$

با اعمال شرایط مرزی دیریکله، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y) = (\sin x + \cos x)e^y, \quad (9.3)$$

خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ برای مقادیر مختلف N در جدول ۲.۳ گزارش شده است. دقت و کارایی روش استفاده شده، برای مقادیر مختلف N در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. همچنین نمودار جواب عددی در این شکل رسم شده است. نمودار خطای مطلق و نمودار کانتور جواب عددی در شکل ۴.۳ نشان داده شده است.

جدول ۲.۳: خطاها با افزایش تعداد نقاط برای مثال ۲.۳.۳

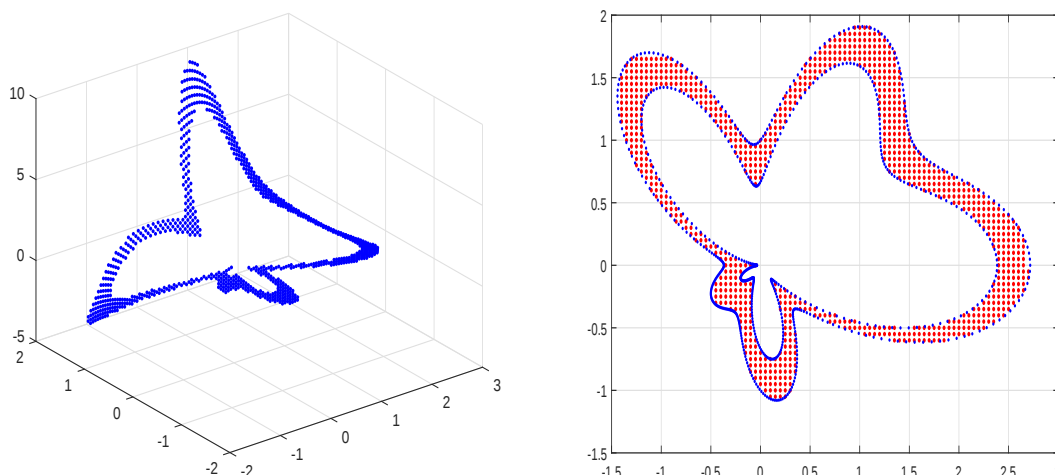
N	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
128	3.2979×10^{-1}	1.3107×10^{-2}
256	2.7894×10^{-2}	1.5482×10^{-3}
512	1.6980×10^{-2}	6.5131×10^{-4}
1024	8.0323×10^{-3}	3.9797×10^{-4}
2048	5.2666×10^{-3}	2.8166×10^{-4}
4096	2.6477×10^{-3}	1.6378×10^{-4}

مثال ۳.۳.۳. در این مثال، روش مرز منفرد را برای حل معادله لاپلاس روی یک دامنه دیگر بکار می‌بندیم. با در نظر گرفتن نقاط هم محلی به صورت توزیع یکنواخت روی دامنه فیزیکی مساله، نتایج را بررسی خواهیم کرد. دامنه $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

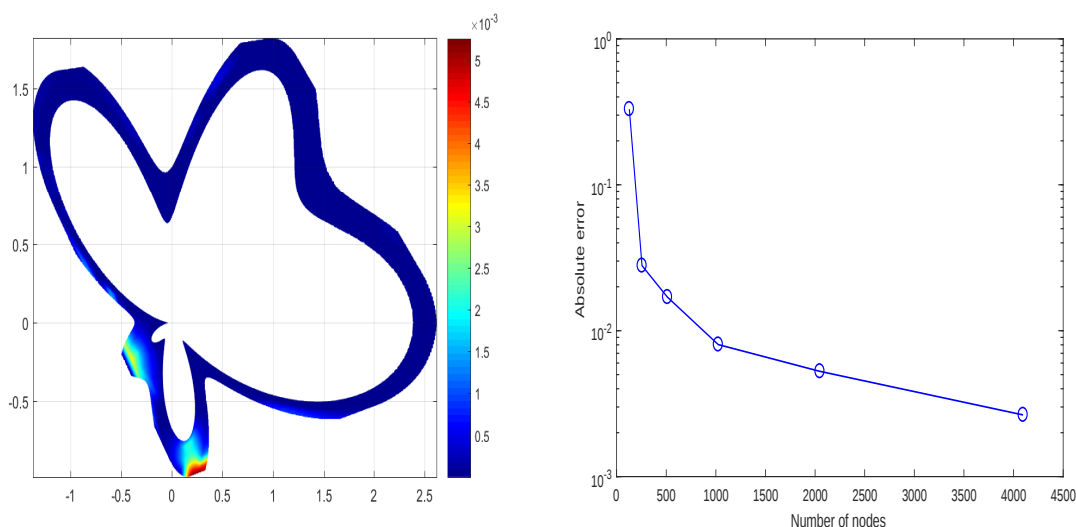
$$\Gamma_1 = \left\{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r = \frac{1}{16}(26 - 10 \cos(4\theta)) \right\}$$

و

$$\Gamma_2 = \left\{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r = -\frac{3}{4} + \frac{1}{16}(26 - 10 \cos(4\theta)) \right\}$$



شکل ۳.۳: شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۲.۳.۳.



شکل ۴.۳: نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور جواب عددی با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۲.۳.۳.

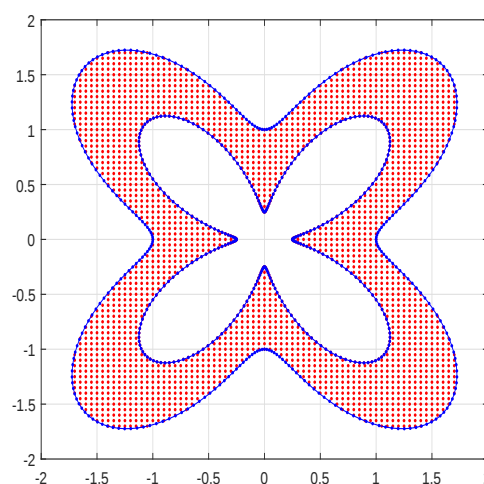
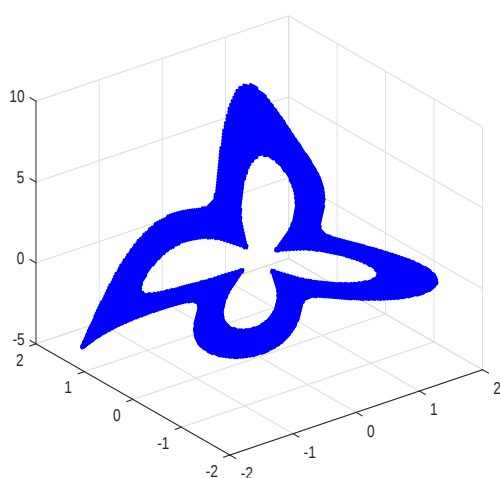
با در نظر گرفتن شرایط مرزی دیریکله، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y) = (\sin x + \cos x)e^y, \quad (10.3)$$

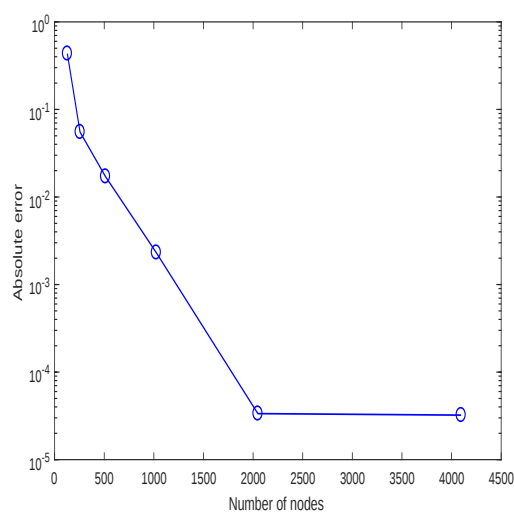
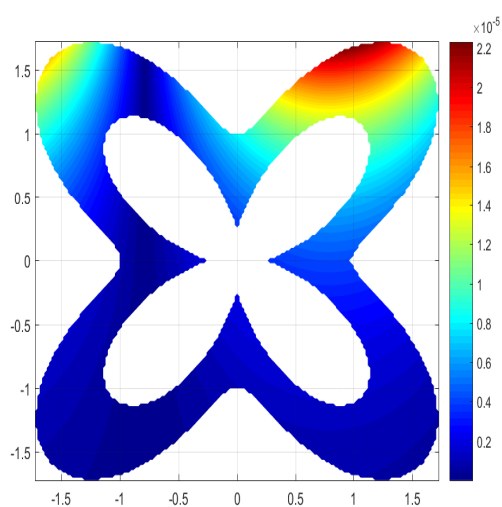
خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ برای مقادیر مختلف N در جدول ۲.۳ گزارش شده است. دقت و کارایی روش استفاده شده، برای تعداد مختلفی از N در شکل ۵.۳ نشان داده شده است. همچنین نمودار جواب عددی در این شکل رسم شده است. نمودار خطای مطلق و نمودار کانتور جواب عددی در شکل ۶.۳ نشان داده شده است.

جدول ۳.۳: خطاها با افزایش تعداد نقاط برای مثال ۳.۳.۳

N	$\varepsilon_{\infty}(u)$	$\varepsilon_R(u)$
128	4.3429×10^{-1}	2.6277×10^{-2}
256	5.5209×10^{-2}	3.3112×10^{-3}
512	1.7155×10^{-2}	6.8710×10^{-4}
1024	2.3195×10^{-3}	8.2592×10^{-5}
2048	3.3564×10^{-5}	1.6548×10^{-6}
4096	3.2267×10^{-5}	1.2913×10^{-6}



شکل ۵.۳: شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۳.۳.۳.



شکل ۶.۳: نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور جواب عددی با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۳.۳.۳.

۴.۳ نتیجه گیری

در این فصل روش مرز منفرد را برای حل معادله لاپلاس دو بعدی روی دامنه‌های مختلف استفاده کردیم. براساس مثال‌های عددی، مشخص شد که نتایج حاصل از روش ارایه شده با جواب دقیق مساله‌ها سازگاری خوبی دارند و کارایی روش مرز منفرد مورد تایید است. از جمله مزیت‌های این روش نسبت به روشهای دیگر که از جواب اساسی استفاده می‌کنند این است که مشکل منفردبودن در این روش با معرفی عامل OIF برطرف شده است. . مثال‌های عددی حل شده کارایی روش را بخوبی نشان می‌دهند. برای کارهای بعدی به عنوان توسعه این روش می‌توان روش ارایه شده را برای مسایل پیچیده، غیرخطی و سه بعدی به کار گرفت.

فصل ۴

روش مرز منفرد برای حل معادله تلگراف دو بعدی

۱.۴ مقدمه

معادله تلگراف یک معادله دیفرانسیل جزئی است که ولتاژ و جریان در یک خط انتقال را برحسب مسافت و زمان توصیف می‌کند و یکی از مهمترین معادله‌های فیزیک اتمی می‌باشد. این معادله، توسط کریشهف^۱ در سال ۱۸۵۷ ارایه شد، سپس توسط هویساید^۲ و دیگران توسعه داده شد. معادله تلگراف برای مدل‌سازی مسایل گوناگونی از قبیل آنالیز سیگنال‌ها، انتشار امواج و غیره مهم می‌باشد و در انتشار سیگنال‌های میان یک خط انتقال، پردازش تصویرهای دیجیتالی، ارتباطات از راه دور و سیستم‌ها ظاهر شده‌است. زیست‌شناسان با معادلات در مطالعه گردش خون در سرخرگ‌ها، حرکت یک بعدی شکل‌ها در امتداد خط مستقیم و در انتشار امواج صوتی برخورد کرده‌اند. در این فصل، معادله دیفرانسیل تلگراف دوبعدی روی دامنه‌های دلخواه و بویژه دامنه‌های نامنظم، با ترکیب روش مرز منفرد و روش جواب خصوصی حل خواهد شد. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha u_{tt} + \beta u_t + \gamma u = \Delta u + f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (۱.۴)$$

با شرایط آغازین:

$$u(\mathbf{x}, 0) = g_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۲.۴)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۳.۴)$$

و شرایط مرزی:

$$u(\mathbf{x}, t) = h_D(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_D, \quad (۴.۴)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{n}} = h_N(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_N, \quad (۵.۴)$$

که Ω دامنه محاسباتی مساله، یک دامنه کراندار و همبند است و Γ_D و Γ_N به ترتیب مرز اساسی (دیریکله) و مرز طبیعی (نیومان) هستند که $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$ و $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ، که $\partial\Omega$ مرز

^۱Kirchhoff

^۲Heaviside

فیزیکی کلی مساله می‌باشد. همچنین f, g_1, g_2, h_D و h_N توابع معلوم هستند و ضرایب ثابت α و β مثبت بوده و ضریب γ می‌تواند مقداری منفی باشد. مدل‌های گوناگونی از معادلات به شکل بالا وجود دارد. اگر $\beta = \gamma = 0$ معادله موج است و اگر $\gamma = 0$ ، معادله تبدیل به معادله موج تعدیلی می‌گردد و برای $\alpha = \gamma = 0$ معادله انتشار است و اگر $\alpha = \beta = 0$ و $\gamma < 0$ باشند، معادله هلمهلتز بدست می‌آید [۹، ۱۰، ۱۱].

۲.۴ گسسته‌سازی زمانی

در این بخش، با در نظر گرفتن شبکه یکنواخت زمانی، فرایند گسسته‌سازی زمانی را با استفاده از روش تفاضل متناهی هابولت^۳ برای تقریب مشتق‌های مرتبه اول و مرتبه دوم متغیر زمان معادله اصلی در دو تراز زمانی متوالی k و $k+1$ به کار خواهیم بست.

فرض کنید $\tau = t^{k+1} - t^k$ طول گام زمانی باشد و $t^k = k\tau$ برای هر $t^k \leq t \leq t^{k+1}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u^{k+1}}{\partial t} \cong \frac{11u^{k+1} - 18u^k + 9u^{k-1} - 2u^{k-2}}{6\tau}, \quad (۶.۴)$$

و

$$\frac{\partial^2 u^{k+1}}{\partial t^2} \cong \frac{2u^{k+1} - 5u^k + 4u^{k-1} - u^{k-2}}{\tau^2}, \quad (۷.۴)$$

که $u^k = u(\mathbf{x}, k\tau)$ و $\Delta u^k(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}, k\tau)$ عملگر لاپلاس می‌باشد. با جایگزینی معادله‌های (۶.۴) و (۷.۴) در معادله (۱.۴) معادله اصلی بصورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$\Delta u^{k+1} - \mu^2 u^{k+1} = C_0 u^k + C_1 u^{k-1} + C_2 u^{k-2} - \tau^2 f^{k+1}, \quad (۸.۴)$$

که

$$\mu^2 = \frac{2\alpha}{\tau^2} + \frac{11\beta}{6\tau} + \gamma, \quad (۹.۴)$$

و

$$C_0 = -\frac{5\alpha}{\tau^2} - \frac{3\beta}{\tau}, \quad C_1 = \frac{4\alpha}{\tau^2} + \frac{3\beta}{2\tau}, \quad C_2 = -\frac{\alpha}{\tau^2} - \frac{\beta}{3\tau}, \quad (۱۰.۴)$$

اگر عبارت سمت راست معادله (۸.۴) را به عنوان تابعی مانند $b^k(\mathbf{x})$ در نظر بگیریم، معادله (۸.۴) را می‌توان به عنوان معادله هلمهلتز تغییر یافته بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\Delta - \mu^2)u^{k+1}(\mathbf{x}) = b^k(\mathbf{x}), \quad (۱۱.۴)$$

البته توجه شود که در معادله (۸.۴) برای u^{-1} و u^{-2} از روش اویلر استفاده می‌کنیم و با توجه به شرایط مساله بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{u^{-1} - u^0}{\tau} = g_2(\mathbf{x}), \quad (۱۲.۴)$$

و

$$\frac{u^{-2} - u^0}{2\tau} = g_2(\mathbf{x}), \quad (۱۳.۴)$$

که با در نظر گرفتن شرط آغازین $u^0 = g_1(\mathbf{x})$ داریم:

$$u^{-1} = g_1(\mathbf{x}) - \tau.g_2(\mathbf{x}), \quad (۱۴.۴)$$

^۳Houbolt

و

$$u^{-2} = g_1(\mathbf{x}) - 2\tau \cdot g_2(\mathbf{x}), \quad (15.4)$$

۳.۴ مثال‌های عددی

در این بخش، دقت و کارایی روش، برای معادله تلگراف دوبعدی روی دامنه‌های نامنظم مختلف بررسی می‌شود. برای این منظور دو نوع خطای ε_R و ε_∞ که قبلاً معرفی شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱.۳.۴. در این مثال، روی یک دامنه دایره‌ای به صورت

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$$

معادله تلگراف دوبعدی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_{tt} + 2u_t + u = \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad t > 0, \quad (16.4)$$

با شرایط آغازین

$$u(x, y, 0) = \sin x \sin y, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (17.4)$$

و

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\sin x \sin y, \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad (18.4)$$

و شرایط مرزی:

$$u(x, y, t) = e^{-t} \sin x \sin y, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1, \quad (19.4)$$

که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = e^{-t} \sin x \sin y, \quad (20.4)$$

و تابع منبع بصورت زیر است:

$$f(x, y, t) = 2e^{-t} \sin x \sin y, \quad (21.4)$$

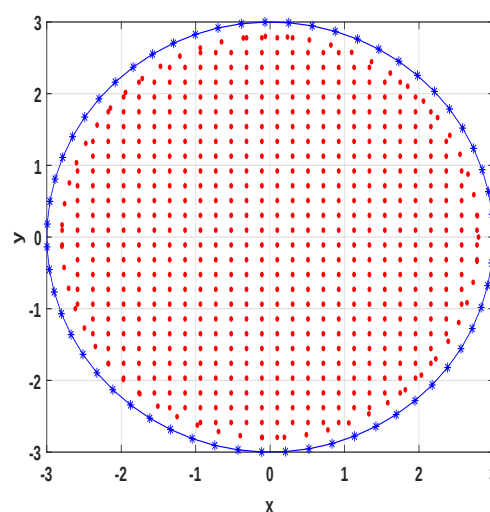
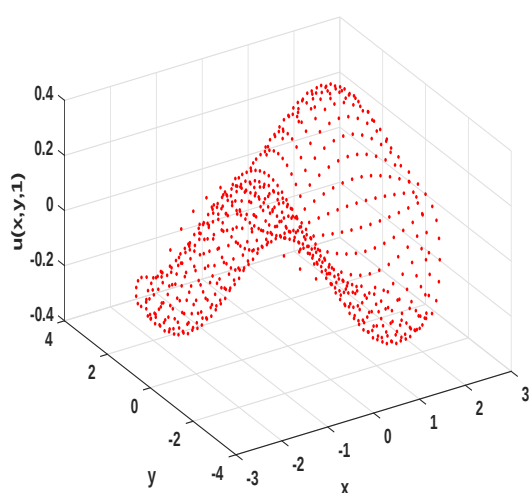
معادله با استفاده از روش ارایه‌شده بصورت عددی حل شده‌است و خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ برای مقادیر مختلف N در جدول ۱.۴ و برای مقادیر متفاوت τ در جدول ۲.۴ گزارش شده‌است. همچنین، در شکل ۱.۴ شکل دامنه (راست) و نمودار جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه نمایش داده شده‌است. در شکل ۲.۴ نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) برای ۲۰۴۸ نقطه نشان داده شده‌است.

جدول ۱.۴: خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با افزایش نقاط و مقدار ثابت $\tau = 0.001$ برای مثال ۱.۳.۴

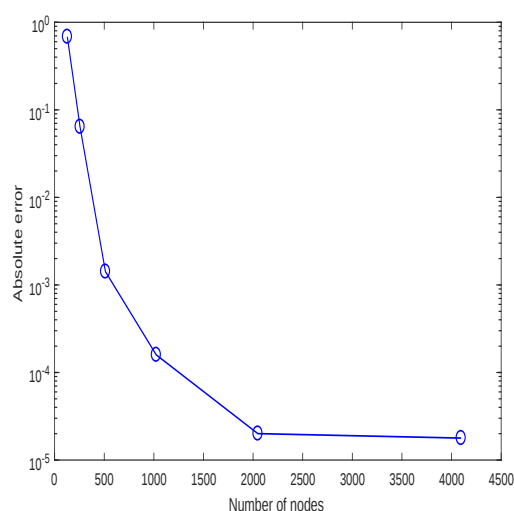
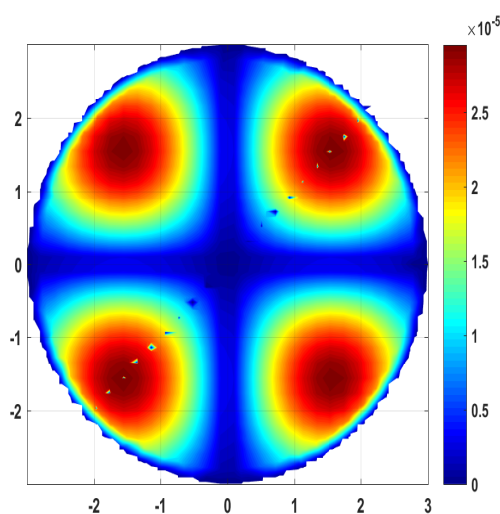
N	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
128	5.1377×10^{-1}	1.8427×10^{-2}
256	7.3113×10^{-2}	1.8528×10^{-3}
512	2.4222×10^{-3}	5.1798×10^{-5}
1024	1.6395×10^{-4}	5.8932×10^{-6}
2048	2.8030×10^{-5}	1.9260×10^{-6}

جدول ۲.۴: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $N = 2048$ نقطه و مقادیر τ در زمان t برای مثال ۱.۳.۴

t	$\tau = 0.002$		$\tau = 0.001$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
0.20	7.7119×10^{-4}	4.2381×10^{-6}	8.0507×10^{-4}	1.2960×10^{-6}
0.40	8.7298×10^{-4}	4.2958×10^{-6}	8.6639×10^{-4}	1.4534×10^{-6}
0.60	9.7899×10^{-4}	4.7499×10^{-6}	9.2771×10^{-4}	1.6109×10^{-6}
0.80	2.0085×10^{-5}	5.3667×10^{-6}	1.8902×10^{-5}	1.7684×10^{-6}
1.00	4.5501×10^{-5}	1.0671×10^{-5}	2.8030×10^{-5}	1.9260×10^{-6}



شکل ۱.۴: شکل دامنه (راست) و نمودار جواب عددی (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۱.۳.۴.



شکل ۲.۴: نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) برای ۲۰۴۸ نقطه برای مثال ۱.۳.۴.

مثال ۲.۳.۴. در این مثال، کارایی روش ارایه‌شده را برای حل عددی معادله روی یک دامنه پیچیده بررسی خواهیم کرد. دامنه محاسباتی در این مثال، یک دامنه همبند آمیب-شکل Ω_2 است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega_2 = \left\{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r = e^{\sin \theta} \sin^2(2\theta) + e^{\cos \theta} \cos^2(2\theta) \right\} \quad (22.4)$$

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{tt} + 8u_t + 4u = \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad t > 0, \quad (23.4)$$

با شرایط آغازین:

$$u(x, y, 0) = \sin x + \cos y, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (24.4)$$

و

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\sin x - \cos y, \quad (x, y) \in \Omega_2, \quad (25.4)$$

و شرایط مرزی از نوع نیومان:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (-e^{-t}(\sin x + \cos y)), \quad \mathbf{x} \in \partial \Omega_2, \quad (26.4)$$

که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = e^{-t}(\sin x + \cos y), \quad (27.4)$$

و تابع منبع بصورت زیر است:

$$f(x, y, t) = -2e^{-t}(\sin x + \cos y), \quad (28.4)$$

معادله با استفاده از روش ارایه‌شده بصورت عددی حل شده‌است و خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ برای مقادیر مختلف N در جدول ۳.۴ گزارش شده‌است. همچنین، در شکل ۳.۴ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) با 10^{24} نقطه و $\tau = 0.001$ نمایش داده شده‌است.

جدول ۳.۴: خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 1024$ نقطه و مقادیر τ در زمان t برای مثال ۲.۳.۴

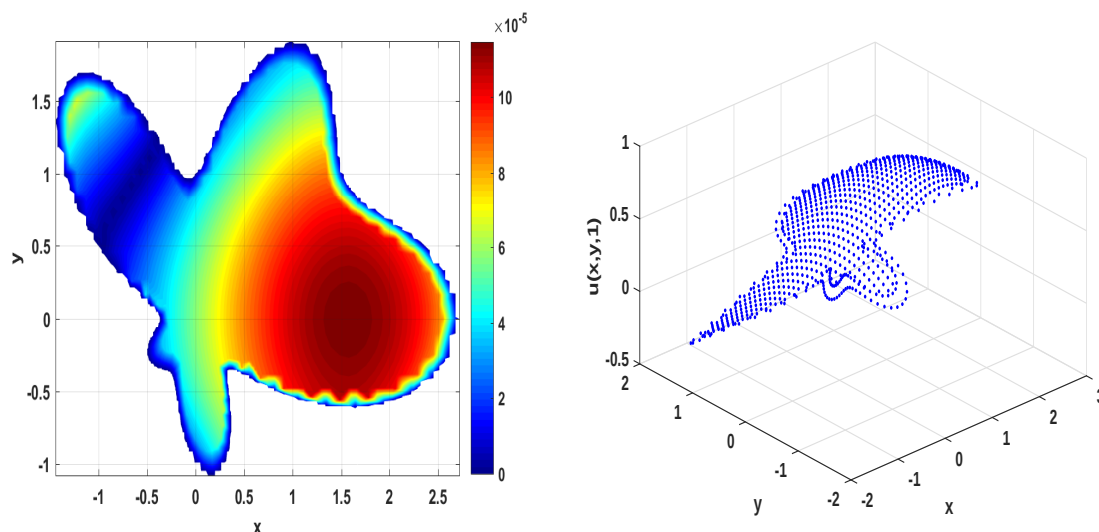
t	$\tau = 0.002$		$\tau = 0.001$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
0.20	6.7119×10^{-4}	8.2381×10^{-6}	7.0507×10^{-5}	5.2960×10^{-6}
0.40	6.7298×10^{-4}	8.2958×10^{-6}	7.6639×10^{-5}	5.4534×10^{-6}
0.60	7.7899×10^{-4}	8.7499×10^{-6}	8.2771×10^{-5}	6.6109×10^{-6}
0.80	8.0085×10^{-4}	9.3667×10^{-6}	9.8902×10^{-5}	7.7684×10^{-6}
1.00	8.5501×10^{-4}	1.0671×10^{-5}	1.0030×10^{-4}	1.0200×10^{-5}

مثال ۳.۳.۴. در این مثال، کارایی روش ارایه‌شده را برای حل عددی معادله روی یک دامنه پیچیده بررسی خواهیم کرد. دامنه محاسباتی در این مثال، یک دامنه نامنظم Ω_3 است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega_3 = \left\{ (r \cos(\theta), r \sin(\theta)) : r = \frac{1}{16}(26 - 10 \cos(4\theta)) \right\} \quad (29.4)$$

معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u_{tt} + 12u_t + 4u = \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega_3, \quad t > 0, \quad (30.4)$$



شکل ۳.۴: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) با 10^{-5} نقطه برای مثال ۲.۳.۴.

با شرایط آغازین:

$$u(x, y, 0) = 2 + \sin x + \cos y, \quad (x, y) \in \Omega_3,$$

و

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_3,$$

و شرایط مرزی:

$$u(x, y, t) = 2 + \cos t(\sin x + \cos y), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_3,$$

که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = 2 + \cos t(\sin x + \cos y), \quad (31.4)$$

و تابع منبع بصورت زیر است:

$$f(x, y, t) = (4 \cos t - 12 \sin t)(\sin x + \cos y) + 8, \quad (32.4)$$

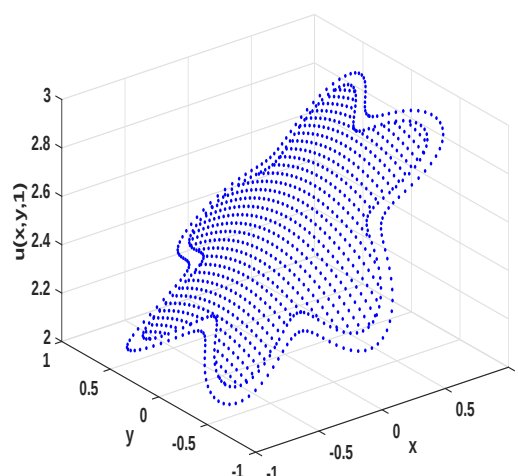
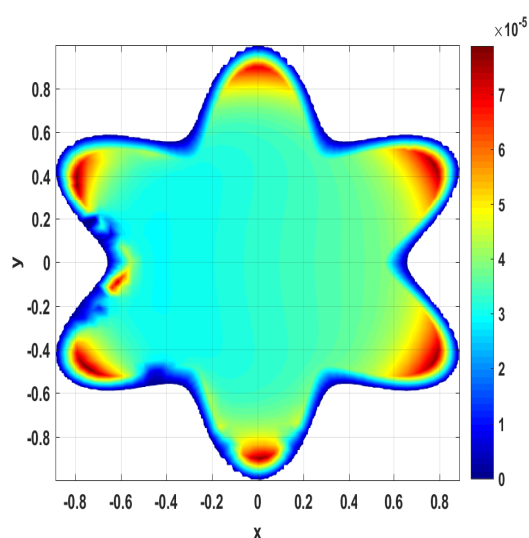
معادله با استفاده از روش ارایه شده بصورت عددی حل شده است و خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ برای مقادیر مختلف N در جدول ۴.۴ گزارش شده است. همچنین، در شکل ۴.۴ نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) با 10^{-5} نقطه و $\tau = 0.001$ نمایش داده شده است.

۴.۴ نتیجه گیری

در این فصل ترکیب روش مرز منفرد با روش جواب خصوصی برای حل معادله تلگراف دوبعدی روی دامنه‌های مختلف استفاده شد. براساس مثال‌های عددی، مشخص شد که نتایج حاصل از روش ارایه شده با جواب دقیق مساله‌ها سازگاری دارند. همچنین با توجه به استفاده از توابع پایه ای شعاعی می توان از این روش روی مسایل با بعد بالا و دامنه به شکل های مختلف استفاده کرد. مثال‌های عددی حل شده، کارایی روش را بخوبی نشان می‌دهند.

جدول ۴.۴: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $N = 1024$ نقطه و مقادیر τ در زمان t برای مثال ۳.۳.۴

t	$\tau = 0.002$		$\tau = 0.001$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
0.20	3.7119×10^{-4}	4.2381×10^{-6}	2.0507×10^{-5}	2.2960×10^{-6}
0.40	4.7298×10^{-4}	4.2958×10^{-6}	3.6639×10^{-5}	2.4534×10^{-6}
0.60	4.7899×10^{-4}	4.7499×10^{-6}	4.2771×10^{-5}	2.6109×10^{-6}
0.80	5.0085×10^{-4}	5.3667×10^{-6}	6.8902×10^{-5}	2.7684×10^{-6}
1.00	1.5501×10^{-5}	1.0671×10^{-5}	7.8030×10^{-5}	3.0260×10^{-6}



شکل ۴.۴: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای مطلق (چپ) با ۱۰۲۴ نقطه برای مثال ۳.۳.۴.

فصل ۵

روش مرز منفرد برای معادله شبه-سهموی

۱.۵ مقدمه

معادلات شبه سهموی یا معادلات سوپولف در زمینه های مهندسی مانند جریان مایعات از طریق سنگ های شکسته، هدایت گرمائی شامل درجه حرارت ترمودینامیکی و درجه حرارت رسانایی و فرآیندهای شبه ساکن در نیمه هادی ها ظاهر می شوند. ویژگی مهم این مدل ها این است که آنها بقای کمیت خاصی (جرم، سرعت، گرما و غیره) را در هر زیر دامنه بیان می کنند [۱۲، ۱۳، ۱۴]. روش های گوناگونی برای حل عددی این معادلات در حالت یک بعدی و دوبعدی پیشتر مورد استفاده قرار گرفته است [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸] و تکنیکهای دیگری از خانواده روش های تفاضلات متناهی و روش های مشتق برای این نوع معادلات به کار رفته است [۱۹، ۲۰].

در این فصل، معادله شبه سهموی وابسته به زمان را در حالت دوبعدی مکانی با شرایط آغازین و شرایط مرزی دیریکله به روش مرز منفرد مورد بحث قرار می دهیم. رویکرد این فصل، ترکیب روش مرز منفرد و روش جواب خصوصی مورد استفاده قرار می گیرد که برای این منظور معادله غیرهمگن اصلی به یک معادله همگن و یک جواب خصوصی معادله غیرهمگن تقسیم می گردد.

معادله دو بعدی مرتبه سوم زیر را روی دامنه Ω در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u - \eta \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) = f(x, t), \quad \text{in } \Omega \times (0, T], \quad (1.5)$$

با شرط آغازین:

$$u(x, 0) = g(x), \quad \text{in } \Omega, \quad (2.5)$$

و شرایط مرزی:

$$u(x, t) = h(x, t), \quad \text{on } \partial\Omega, \quad (3.5)$$

که Δ عملگر لاپلاس دوبعدی، $\Omega \subseteq R^2$ و $\partial\Omega$ مرز دامنه Ω می باشد. همچنین f و g توابع پیوسته معلوم هستند و ضرایب α ، η و $T > 0$ ثابتهای معینی هستند. علاوه براین، تابع h تابع هموار و معلوم می باشد. در حالت خاص اگر $\eta = 0$ باشد، معادله (۱.۵) معادله انتشار دو بعدی وابسته زمان می باشد.

۲.۵ پیاده سازی روش و گسسته‌سازی زمانی

در این بخش، با در نظر گرفتن شبکه یکنواخت زمانی، فرایند گسسته‌سازی زمانی را با استفاده از روش تفاضل متناهی پیشرو برای تقریب مشتق مرتبه اول متغیر زمان معادله اصلی در دو تراز زمانی متوالی k و $k+1$ به کار خواهیم بست.

فرض کنید $\delta t = t^{k+1} - t^k$ طول گام زمانی باشد و $t^k = k\delta t$ برای هر $t^k \leq t \leq t^{k+1}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \cong \frac{u^{k+1}(\mathbf{x}) - u^k(\mathbf{x})}{\delta t}, \quad (۴.۵)$$

و برای جمله دیگر در (۱.۵) مشتق نسبت به متغیر زمان به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u^k) \cong \frac{\Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) - \Delta u^k(\mathbf{x})}{\delta t}, \quad (۵.۵)$$

که $u^k = u(\mathbf{x}, k\delta t)$. همچنین، با استفاده از روش θ تقریب زیر در نظر گرفته می شود:

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) \cong \theta \Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \Delta u^k(\mathbf{x}), \quad (۶.۵)$$

در حالت خاص، اگر $\theta = \frac{1}{2}$ باشد، تکنیک کرانک-نیکلسون عبارتست از:

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) \cong \frac{1}{2} (\Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) + \Delta u^k(\mathbf{x})), \quad (۷.۵)$$

بطوریکه $\Delta u^k(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}, k\delta t)$ و

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (۸.۵)$$

با جایگزین کردن معادله های (۴.۵)-(۷.۵) در معادله (۱.۵) معادله اصلی به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} (\Delta u^{k+1} + \Delta u^k) - \frac{\eta}{\delta t} (\Delta u^{k+1} - \Delta u^k) = \frac{f^{k+1} + f^k}{2} + R^{k+1}, \quad (۹.۵)$$

بطوریکه $|R^{k+1}| < C\delta t$ و C یک ثابت مثبت است. آنگاه با حذف جمله کوچک R^{k+1} تقریب زیر حاصل می شود:

$$\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\eta}{\delta t}\right) \Delta u^{k+1} - \frac{1}{\delta t} u^{k+1} = \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta u^k - \frac{1}{\delta t} u^k - \frac{f^{k+1} + f^k}{2}, \quad (۱۰.۵)$$

با فرض $\lambda = \frac{\alpha}{2} + \frac{\eta}{\delta t}$ و $\mu^2 = \frac{1}{\delta t \lambda}$ و $F^{k+1} = -\frac{f^{k+1} + f^k}{2\lambda}$ خواهیم داشت:

$$\Delta u^{k+1} - \mu^2 u^{k+1} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta u^k - \mu^2 u^k + F^{k+1}, \quad (۱۱.۵)$$

اگر عبارت سمت راست معادله (۱۱.۵) را به عنوان تابعی مانند $b^k(\mathbf{x})$ با شرط $\lambda > 0$ در نظر بگیریم، معادله (۱۱.۵) به عنوان معادله هلمهلتز تغییر یافته به صورت زیر حاصل می شود:

$$(\Delta - \mu^2) u^{k+1}(\mathbf{x}) = b^k(\mathbf{x}), \quad (۱۲.۵)$$

که

$$b^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta u^k - \mu^2 u^k + F^{k+1}, \quad (۱۳.۵)$$

لازم به توجه است که برای $k = 0$ از معادله (۱۳.۵) و شرط اولیه $u^0 = u(\mathbf{x}, 0) = g_0$ خواهیم داشت:

$$b^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2}\right) \Delta g_0 - \mu^2 g_0 + F^1, \quad (۱۴.۵)$$

۳.۵ آنالیز پایداری و همگرایی

برای بررسی آنالیز پایداری و همگرایی معادله (۱۱.۵) با در نظر گرفتن شرط آغازین $u(\mathbf{x}, 0) = u^0$ و شرط مرزی

$$u^k|_{\partial\Omega} = u(\mathbf{x}, t_k), k = 0, 1, \dots, n$$

ضرب داخلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad (15.5)$$

و نرم در L^2 به صورت

$$\|u\|_2 = [(u, u)]^{1/2} = \left[\int_{\Omega} u^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} \right]^{1/2}. \quad (16.5)$$

خواهد بود. برای طرح تفاضل متناهی (۱۱.۵) قضیه‌های زیر را می‌توان بیان کرد.

قضیه ۱۳.۵. فرض کنید $u^k \in H_0^2(\Omega), k = 0, 1, \dots, n$ جواب معادله (۱۱.۵) باشد، اگر توابع $\frac{\partial u^k}{\partial x}$

و $\frac{\partial u^k}{\partial y}$ یک‌تایی بر حسب متغیر t باشند و $\alpha\delta t > 2\eta$ آنگاه:

$$\|u^k\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2.$$

برهان. (اثبات با استقرای ریاضی). برای $k = 0$ بدیهی است که:

$$\Delta u^1 - \mu^2 u^1 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta u^0 - \mu^2 u^0 + F^1, \quad (17.5)$$

اگر معادله (۱۷.۵) را در u^1 ضرب کرده و سپس روی Ω انتگرال بگیریم، آنگاه:

$$(\Delta u^1, u^1) - \mu^2 (u^1, u^1) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) (\Delta u^0, u^1) - \mu^2 (u^0, u^1) + (F^1, u^1). \quad (18.5)$$

با استفاده از فرمول گرین به صورت

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{s} - \int_{\Omega} u \Delta v d\mathbf{x},$$

که

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial x} n_1 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2$$

مشق نرمال برونسوی روی مرز $\partial\Omega$ است، در نتیجه:

$$(\nabla u^1, \nabla u^1) + \mu^2 (u^1, u^1) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) (\nabla u^0, \nabla u^1) + \mu^2 (u^0, u^1) - (F^1, u^1). \quad (19.5)$$

و آنگاه:

$$\|u^1\|_2^2 + \frac{1}{\mu^2} (\nabla u^1, \nabla u^1) = (u^0, u^1) + \frac{1}{\lambda\mu^2} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) (\nabla u^0, \nabla u^1) - \frac{1}{\mu^2} (F^1, u^1). \quad (20.5)$$

که این نتیجه به علت این است که: $u^1 \in H_0^2(\Omega)$ از طرفی، به خاطر اینکه $\alpha\delta t > 2\eta$ و اینکه توابع

$\frac{\partial u^k}{\partial y}$ و $\frac{\partial u^k}{\partial x}$ نسبت به متغیر t یک‌تایی هستند، آنگاه: $2\eta - \alpha\delta t < 0$ و $(\nabla u^1, \nabla u^0) > 0$

از اینرو، معادله (۲۰.۵) نتیجه می‌دهد:

$$\|u^1\|_2^2 \leq (u^0, u^1) + (F^1, u^1). \quad (21.5)$$

در پایان، با بکارگیری نامساوی شوارتز، خواهیم داشت:

$$\|u^1\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \|F^1\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2, \quad (22.5)$$

(فرض استقرا) فرض کنید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\|u^l\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2, \quad l = 1, 2, \dots, k. \quad (23.5)$$

اگر معادله (۱۱.۵) را در u^{k+1} ضرب کرده و سپس روی Ω انتگرال بگیریم، آنگاه:

$$(\Delta u^{k+1}, u^{k+1}) - \mu^2(u^{k+1}, u^{k+1}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) (\Delta u^k, u^{k+1}) - \mu^2(u^k, u^{k+1}) + (F^{k+1}, u^{k+1}),$$

با استفاده از فرمول گرین خواهیم داشت:

$$(\nabla u^{k+1}, \nabla u^{k+1}) + \mu^2(u^{k+1}, u^{k+1}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) (\nabla u^k, \nabla u^{k+1}) + \mu^2(u^k, u^{k+1}) - (F^{k+1}, u^{k+1}),$$

و آنگاه:

$$\|u^{k+1}\|_2^2 + \frac{1}{\mu^2} (\nabla u^{k+1}, \nabla u^{k+1}) = (u^k, u^{k+1}) + \frac{1}{\lambda \mu^2} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) (\nabla u^k, \nabla u^{k+1}) - \frac{1}{\mu^2} (F^{k+1}, u^{k+1}).$$

حال با استفاده از مفروضات قضیه و نامساوی شوارتز به نتیجه زیر می رسیم:

$$\|u^{k+1}\|_2 \leq \|u^k\|_2 + \|F^{k+1}\|_2, \quad (24.5)$$

و با استفاده از (۲۳.۵) خواهیم داشت:

$$\|u^{k+1}\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2, \quad (25.5)$$

□

درنتیجه، اثبات کامل است.

در ادامه، فرض می کنیم U^k جواب معادله (۱۱.۵) با شرط اولیه $u(\mathbf{x}, 0) = U^0$ و شرط مرزی $U^k|_{\partial\Omega} = u(\mathbf{x}, t_k)$ می باشد، قضیه های زیر برای همگرایی و پایداری بیان می شوند.

قضیه ۲.۳.۵. طرح عددی گسسته سازی زمانی (۱۱.۵) یک طرح H^1 - همگرا با مرتبه همگرایی $O(\delta t)$ است.

برهان. خطای زیر را تعریف می کنیم:

$$\epsilon^k(\mathbf{x}) = u^k(\mathbf{x}) - U^k(\mathbf{x}),$$

درنتیجه:

$$\Delta \epsilon^{k+1}(\mathbf{x}) - \mu^2 \epsilon^{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta \epsilon^k(\mathbf{x}) - \mu^2 \epsilon^k(\mathbf{x})$$

و

$$\epsilon^{k+1}|_{\partial\Omega} = 0.$$

با استفاده از قضیه ۱.۳.۵ خواهیم داشت:

$$\|\epsilon^k\|_2 \leq \|\epsilon^0\|_2, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

□

و درنتیجه اثبات کامل است.

در ادامه، یک تخمین خطا برای جواب تقریب حاصل از طرح گسسته سازی زمانی معادله (۱۱.۵) بیان می شود. البته لازم به توجه است که مقدار ثابت کلی C در موقعیتهای مختلف مقدار یکسانی ندارد.

قضیه ۳.۳.۵. با فرضیات قضیه ۱.۳.۵ و اینکه $\{u_e(\mathbf{x}, t^k)\}_{k=0}^{k=n}$ جواب دقیق مساله (۱.۵) - (۳.۵) باشد و $\{u(\mathbf{x}, t^k)\}_{k=0}^{k=n}$ جواب تقریب عددی (۱۱.۵) با شرط آغازین $u_e(\mathbf{x}, 0) = u(\mathbf{x}, 0)$ در نظر گرفته شود، آنگاه تخمین خطا عبارتست از:

$$\|u_e(\mathbf{x}, k\delta t) - u(\mathbf{x}, k\delta t)\|_2 \leq C(\delta t), \quad (26.5)$$

برهان. با توجه به اینکه $u_e(\mathbf{x}, t^k)$ جواب دقیق مساله (۱.۵) - (۳.۵) می باشد، از رابطه (۱۱.۵) خواهیم داشت:

$$\Delta u_e^{k+1}(\mathbf{x}) - \mu^2 u_e^{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta u_e^k(\mathbf{x}) - \mu^2 u_e^k(\mathbf{x}) - F^{k+1} + C(\delta t). \quad (27.5)$$

با در نظر گرفتن $\varepsilon^k(\mathbf{x}) = u_e(\mathbf{x}, t^k) - u(\mathbf{x}, t^k)$ و تفریق (۲۷.۵) از (۱۱.۵) نتیجه می شود:

$$\Delta \varepsilon^{k+1}(\mathbf{x}) - \mu^2 \varepsilon^{k+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\eta}{\delta t} - \frac{\alpha}{2} \right) \Delta \varepsilon^k(\mathbf{x}) - \mu^2 \varepsilon^k(\mathbf{x}) - F^{k+1} + C(\delta t). \quad (28.5)$$

و با توجه به

$$\varepsilon^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \varepsilon^0(\mathbf{x}) \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (29.5)$$

بنابراین، از قضیه ۱.۳.۵ نتیجه می شود:

$$\|\varepsilon^k(\mathbf{x})\|_2 \leq \|\varepsilon^0(\mathbf{x})\|_2 + C(\delta t) = C(\delta t), \quad (30.5)$$

آنگاه:

$$\|u_e(\mathbf{x}, t^k) - u(\mathbf{x}, t^k)\|_2 \leq C(\delta t). \quad (31.5)$$

□

و در نتیجه اثبات کامل است.

۴.۵ مثال‌های عددی

در این بخش، دقت و کارایی روش، برای معادله تلگراف دوبعدی روی دامنه های نامنظم مختلف بررسی می شود. برای این منظور دو نوع خطا ε_R و ε_∞ مورد بررسی قرار می گیرد که قبلاً تعریف شده‌اند.

در مثالهای زیر، از اسپلاین پلی هارمونیک مرتبه دوم یعنی $\phi(r) = r^4 \ln(r)$ ، به عنوان توابع پایه شعاعی استفاده شده است.

مثال ۱.۴.۵. مساله (۱.۵) - (۳.۵) را روی دامنه مربعی متناهی $\Omega_1 = [0, 1]^2$ در نظر می گیریم، با شرط آغازین:

$$u(\mathbf{x}, 0) = \cos x + \sin y, \quad \mathbf{x} \in [0, 1] \times [0, 1] \quad (32.5)$$

و شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= e^{2t} \cos x, & u(x, 1, t) &= e^{2t} (\cos x + \sin(1)), \\ u(0, y, t) &= e^{2t} (1 + \sin y), & u(1, y, t) &= e^{2t} (\cos(1) + \sin y), \end{aligned} \quad (33.5)$$

که جواب تحلیلی عبارتست از:

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{2t} (\cos x + \sin y),$$

و تابع منبع f به صورت زیر است:

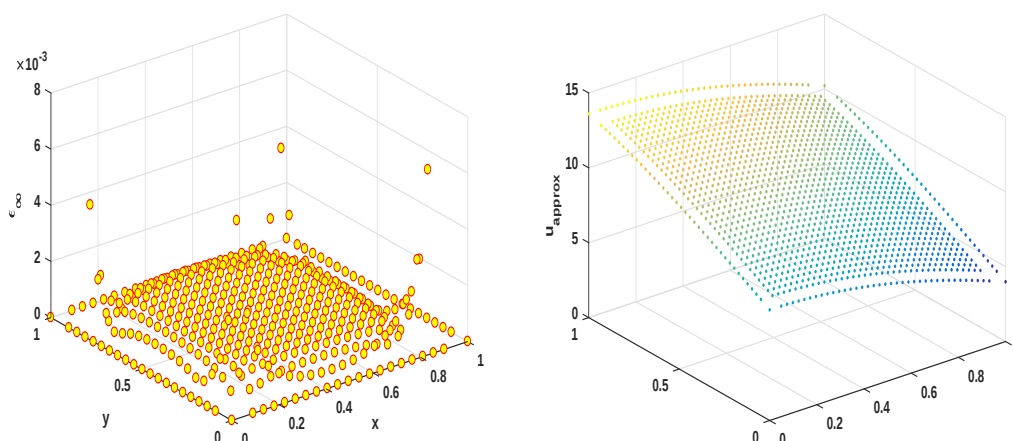
$$f(\mathbf{x}, t) = (2 + \alpha + 2\eta) e^{2t} (\cos x + \sin y).$$

در محاسبه جواب عددی، ثابتهای $\alpha = 1$ و $\eta = 0.00025$ را در نظر می گیریم. در جدول ۱.۵ دو نوع خطا، در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $t = 1$ گزارش شده است. این جدول نشان می دهد که خطای $\varepsilon_R(u)$ حاصل از روش، با افزایش زمان، دارای رشد نمی باشد و به عبارت دیگر، این موضوع نشان دهنده پایداری روش است.

نمودار جواب عددی و نمودار خطای مطلق ماکزیمم برای $\delta t = 0.001$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ در شکل ۱.۵ نمایش داده شده است. همچنین، در شکل ۲.۵ نتایج حاصل از روش ارایه شده با روش $SMRPI$ مقایسه شده است.

جدول ۱.۵: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $N = 441$ و $\delta t = 0.001$ در زمان t و مقایسه با روش $SMRPI$ برای مثال ۱.۴.۵

t	$\varepsilon_\infty(u)$		$\varepsilon_R(u)$	
	SBM	[۳۰]	SBM	[۳۰]
0.10	1.1566×10^{-3}	3.0755×10^{-3}	5.4282×10^{-4}	6.2135×10^{-4}
0.20	1.1650×10^{-3}	3.7662×10^{-3}	5.4214×10^{-4}	6.2740×10^{-4}
0.30	1.0926×10^{-3}	4.6011×10^{-3}	5.4139×10^{-4}	6.2794×10^{-4}
0.40	1.0161×10^{-3}	4.9199×10^{-3}	5.4053×10^{-4}	6.2800×10^{-4}
0.50	1.0082×10^{-3}	5.3642×10^{-3}	5.3953×10^{-4}	6.2800×10^{-4}
0.60	1.0018×10^{-3}	5.9839×10^{-3}	5.3836×10^{-4}	6.2800×10^{-4}
0.70	1.5911×10^{-3}	6.0240×10^{-3}	5.3697×10^{-4}	6.2800×10^{-4}
0.80	2.6354×10^{-3}	7.2507×10^{-3}	5.3534×10^{-4}	6.2800×10^{-4}
0.90	3.9023×10^{-3}	8.1276×10^{-3}	5.3346×10^{-4}	6.2800×10^{-4}
1.00	5.4020×10^{-3}	8.8658×10^{-3}	5.3130×10^{-4}	6.2800×10^{-4}

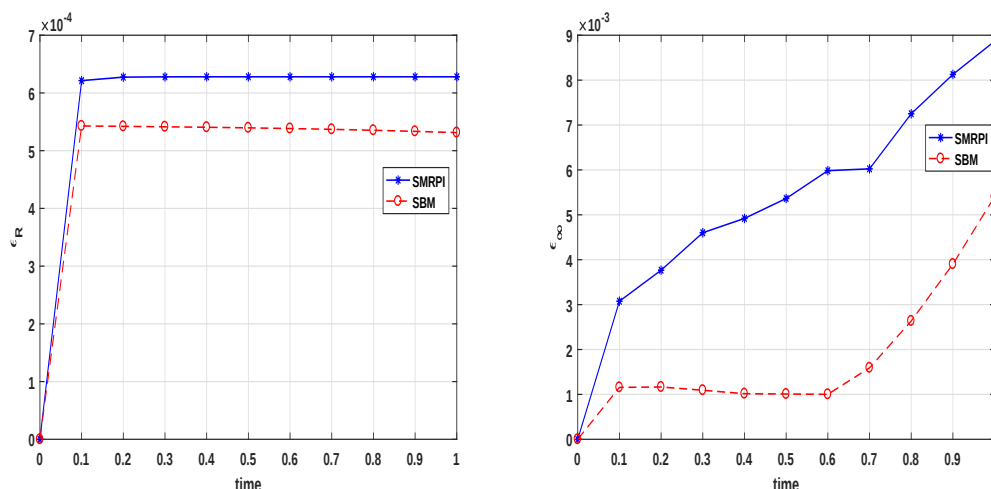


شکل ۱.۵: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ (چپ) با $\delta t = 0.001$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۵.

مثال ۲.۴.۵. در این مثال، مساله (۱.۵)–(۳.۵) را روی دامنه دایره ای $\Omega_2 = \{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3\}$

در نظر می گیریم، با شرط آغازین:

$$u(\mathbf{x}, 0) = \cos x + \sin y, \quad \mathbf{x} \in \Omega_2,$$



شکل ۲.۵: مقایسه خطای $\epsilon_\infty(u)$ (راست) و خطای $\epsilon_R(u)$ (چپ) با روش SMRPI با $N = 441$ و $\delta t = 0.001$ در زمان t برای مثال ۱.۴.۵

با در نظر گرفتن شرایط مرزی، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{2t}(\cos x + \sin y), \quad (34.5)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x}, t) = (2 + \alpha + 2\eta)e^{2t}(\cos x + \sin y). \quad (35.5)$$

در محاسبه جواب عددی، ثابتهای $\alpha = 1$ و $\eta = 0.00025$ را در نظر می گیریم. در جدول ۲.۵ دو نوع خطا، در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $t = 1$ گزارش شده است. این جدول نشان می دهد که خطای $\epsilon_R(u)$ حاصل از روش، با افزایش زمان، دارای رشد نمی باشد و به عبارت دیگر، این موضوع نشان دهنده پایداری روش است. شکل دامنه Ω_2 با توزیع یکنواخت و نمودار جواب عددی حاصل از روش مرز منفرد با $\delta t = 0.005$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ در شکل ۳.۵ نمایش داده شده است. همچنین، در شکل ۴.۵ رفتار خطای $\epsilon_\infty(u)$ با $\delta t = 0.01$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ نشان داده شده است.

مثال ۳.۴.۵. در این مثال، دامنه محاسباتی را یک دامنه آمیب-شکل به صورت

$$\Omega_3 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r = e^{\sin \theta} \sin^2(2\theta) + e^{\cos \theta} \cos^2(2\theta) \right\}$$

در نظر می گیریم.

مساله (۱.۵)-(۳.۵) را روی این دامنه در نظر می گیریم. با شرط آغازین:

$$u(\mathbf{x}, 0) = \cos x + \sin y, \quad \mathbf{x} \in \Omega_3, \quad (36.5)$$

که با در نظر گرفتن شرایط مرزی، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

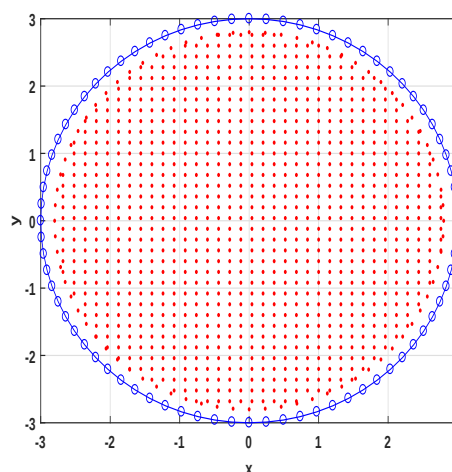
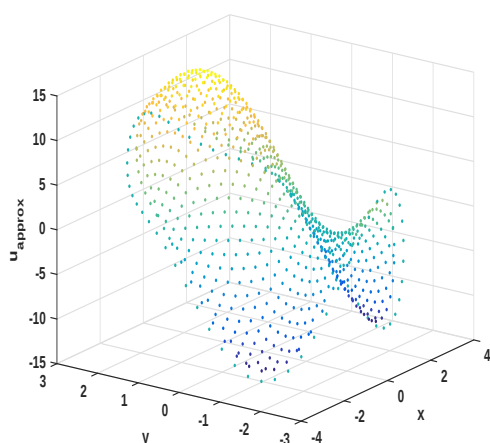
$$u(\mathbf{x}, t) = e^{2t}(\cos x + \sin y), \quad (37.5)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x}, t) = (2 + \alpha + 2\eta)e^{2t}(\cos x + \sin y). \quad (38.5)$$

جدول ۲.۵: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $N = 441$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۲.۴.۵

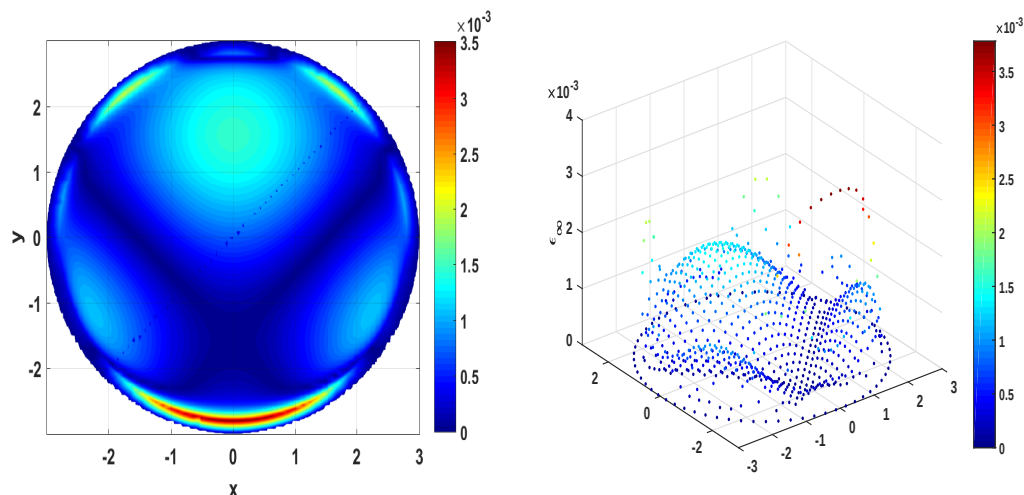
t	$\delta t = 0.01$		$\delta t = 0.005$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
0.10	1.4890×10^{-3}	7.4502×10^{-4}	9.4808×10^{-5}	1.7249×10^{-5}
0.20	1.4845×10^{-3}	7.3847×10^{-4}	1.4723×10^{-4}	2.7356×10^{-5}
0.30	1.4803×10^{-3}	7.2991×10^{-4}	1.5930×10^{-4}	3.0956×10^{-5}
0.40	1.4761×10^{-3}	7.2102×10^{-4}	1.4302×10^{-4}	2.8605×10^{-5}
0.50	1.4719×10^{-3}	7.1521×10^{-4}	9.7010×10^{-5}	2.1041×10^{-5}
0.60	1.4616×10^{-3}	7.1727×10^{-4}	5.9018×10^{-5}	1.1487×10^{-5}
0.70	1.9180×10^{-3}	7.3284×10^{-4}	1.0733×10^{-4}	1.8600×10^{-5}
0.80	2.5066×10^{-3}	7.6742×10^{-4}	2.3303×10^{-4}	4.1052×10^{-5}
0.90	3.1820×10^{-3}	8.2527×10^{-4}	3.8462×10^{-4}	6.9831×10^{-5}
1.00	3.9428×10^{-3}	9.0854×10^{-4}	5.6146×10^{-4}	1.0373×10^{-4}


 شکل ۳.۵: شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.005$ برای مثال ۱.۴.۵

در محاسبه جواب عددی، ثابتهای $\alpha = 1$ و $\eta = 0.00025$ را در نظر می‌گیریم. در جدول ۳.۵ دو نوع خطا، در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $t = 1$ گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد که خطای $\varepsilon_R(u)$ حاصل از روش، با افزایش زمان، دارای رشد نمی‌باشد و به عبارت دیگر، این موضوع نشان دهنده پایداری روش است. شکل دامنه Ω_2 با توزیع یکنواخت و نمودار جواب عددی حاصل از روش مرز منفرد با $\delta t = 0.005$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ در شکل ۵.۵ نمایش داده شده است. همچنین، در شکل ۶.۵ رفتار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ با $\delta t = 0.01$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ نشان داده شده است.

مثال ۴.۴.۵: در این مثال، روش مرز منفرد روی یک دامنه پیچیده تر به کاررفته است. دامنه Ω_4 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و دامنه را برای $m = 6$ در نظر می‌گیریم.

$$\Omega_4 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r = m^2 + 5m + 2 - \frac{2m+2}{m^3} \cos(m\theta) \right\}$$



شکل ۴.۵: نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.01$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۵

جدول ۳.۵: خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 441$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۳.۴.۵

t	$\delta t = 0.01$		$\delta t = 0.005$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
0.10	1.4446×10^{-3}	7.4871×10^{-4}	2.0419×10^{-4}	6.9974×10^{-6}
0.20	1.6613×10^{-3}	7.4749×10^{-4}	2.6603×10^{-4}	1.2422×10^{-5}
0.30	2.4795×10^{-3}	7.4659×10^{-4}	4.0940×10^{-4}	1.6603×10^{-5}
0.40	3.4438×10^{-3}	7.4632×10^{-4}	7.2555×10^{-4}	1.9946×10^{-5}
0.50	4.5464×10^{-3}	7.4679×10^{-4}	1.1196×10^{-3}	2.2965×10^{-5}
0.60	6.9230×10^{-3}	7.4883×10^{-4}	1.7610×10^{-3}	2.6281×10^{-5}
0.70	9.7664×10^{-3}	7.5302×10^{-4}	2.5333×10^{-3}	3.0539×10^{-5}
0.80	1.2989×10^{-2}	7.6018×10^{-4}	3.4217×10^{-3}	3.6265×10^{-5}
0.90	1.6581×10^{-2}	7.7711×10^{-4}	4.4216×10^{-3}	4.3786×10^{-5}
1.00	2.0532×10^{-2}	7.8696×10^{-4}	5.5292×10^{-3}	5.3232×10^{-5}

مساله (۱.۵) - (۳.۵) را روی دامنه Ω_4 در نظر می‌گیریم. با شرط مرزی:

$$u(\mathbf{x}, 0) = \cos x + \sin y, \quad (x, y) \in \Omega_4, \quad (39.5)$$

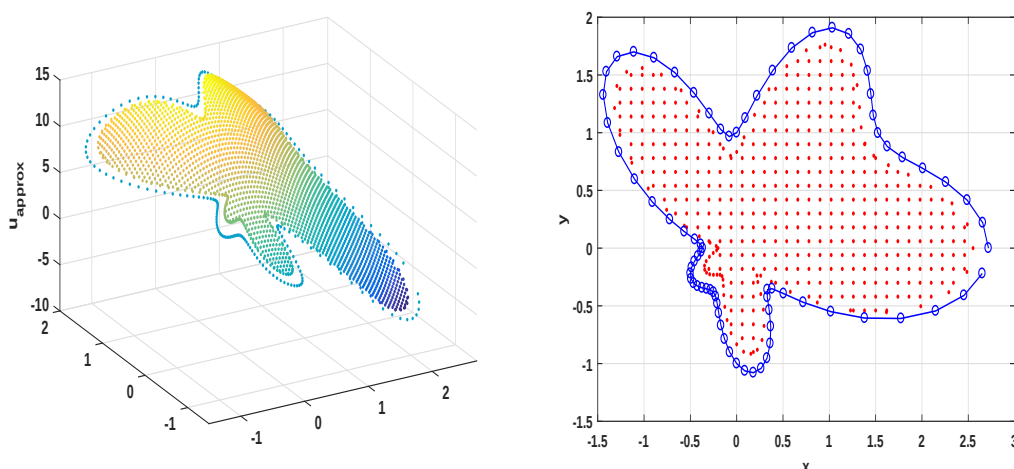
که بادر نظر گرفتن شرایط مرزی، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{2t}(\cos x + \sin y), \quad (40.5)$$

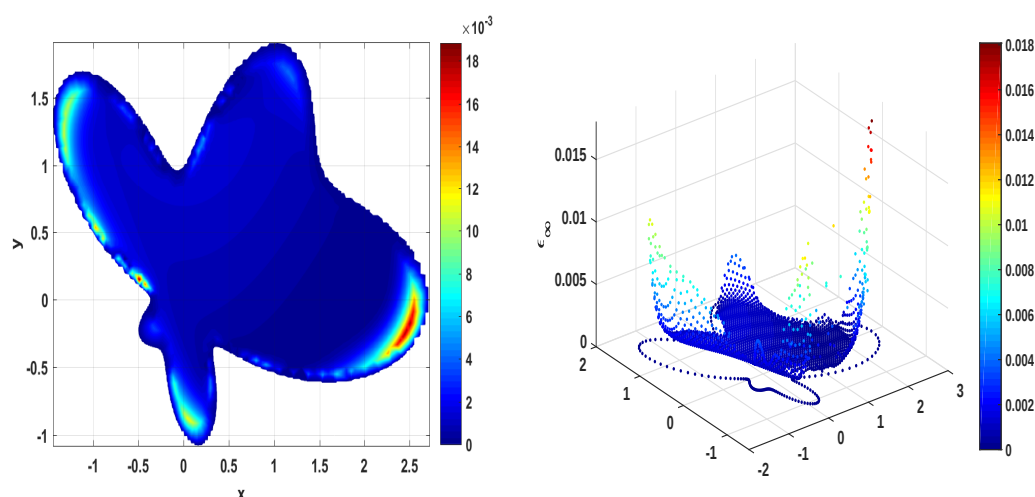
و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x}, t) = (2 + \alpha + 2\eta)e^{2t}(\cos x + \sin y). \quad (41.5)$$

در محاسبه جواب عددی، ثابتهای $\alpha = 1$ و $\eta = 0.00025$ را در نظر می‌گیریم. در جدول ۴.۵ دو نوع خطا، در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $t = 1$ گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد که خطای $\varepsilon_R(u)$ حاصل از روش، با افزایش زمان، دارای رشد نمی‌باشد و به عبارت دیگر، این موضوع نشان دهنده پایداری روش است. شکل دامنه Ω_2 با توزیع یکنواخت و نمودار جواب



شکل ۵.۵: شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.005$ برای مثال ۳.۴.۵



شکل ۶.۵: نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.01$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۵

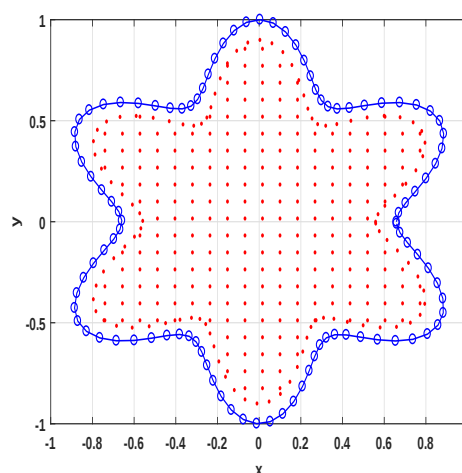
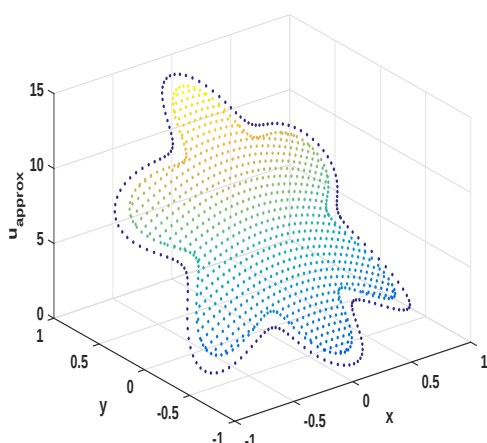
عدد حاصل از روش مرز منفرد با $\delta t = 0.005$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ در شکل ۷.۵ نمایش داده شده است. همچنین، در شکل ۸.۵ رفتار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ با $\delta t = 0.01$ و $N = 441$ در زمان $T = 1$ نشان داده شده است.

۵.۵ نتیجه گیری

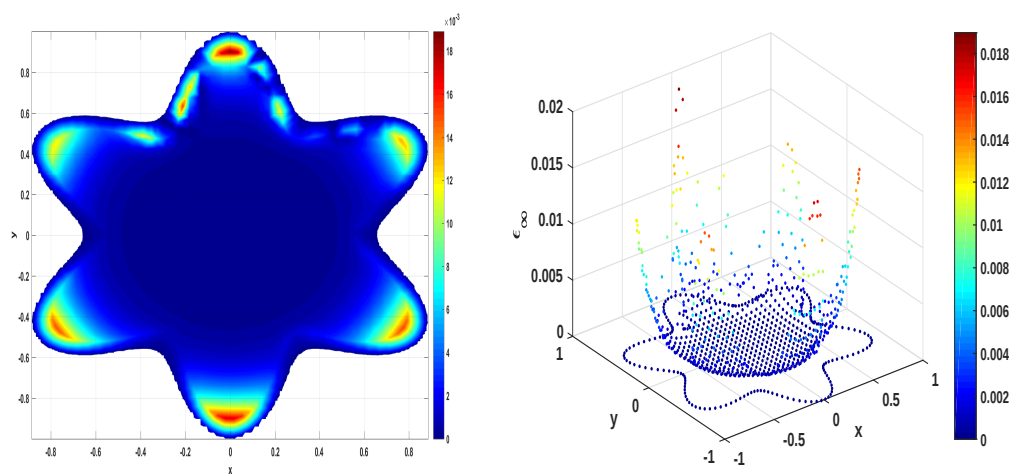
در این فصل ترکیب روش مرز منفرد با روش جواب خصوصی را برای حل معادله شبه-سه‌موی (معادله سوپولوف) دو بعدی روی دامنه‌های مختلف استفاده کردیم. براساس مثال‌های عددی، مشخص شد که نتایج حاصل از روش ارایه شده با جواب دقیق مساله‌ها سازگاری دارند و کارایی روش مورد تایید است، همچنین نتایج با روش‌های دیگر مقایسه شده است که نشان‌دهنده برتری روش ارایه شده است. آنالیز همگرایی و پایداری ارایه شده است. از جمله مزیت‌های این روش نسبت به

جدول ۴.۵: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $N = 441$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۴.۴.۵

t	$\delta t = 0.01$		$\delta t = 0.005$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
0.10	3.1625×10^{-4}	7.5448×10^{-5}	4.1081×10^{-5}	1.6569×10^{-6}
0.20	9.1407×10^{-4}	7.8911×10^{-5}	1.2720×10^{-4}	2.9022×10^{-6}
0.30	1.8465×10^{-3}	8.7706×10^{-5}	3.4071×10^{-4}	4.6787×10^{-6}
0.40	3.2214×10^{-3}	1.0387×10^{-4}	6.4957×10^{-4}	8.0416×10^{-6}
0.50	4.9675×10^{-3}	1.2865×10^{-4}	1.0509×10^{-3}	1.3356×10^{-5}
0.60	7.0901×10^{-3}	1.6244×10^{-4}	1.5432×10^{-3}	2.0662×10^{-5}
0.70	9.5977×10^{-3}	2.0523×10^{-4}	2.1258×10^{-3}	2.9957×10^{-5}
0.80	1.2500×10^{-2}	2.5694×10^{-4}	2.7984×10^{-3}	4.1259×10^{-5}
0.90	1.5811×10^{-2}	3.1755×10^{-4}	3.5615×10^{-3}	5.4580×10^{-5}
1.00	1.1954×10^{-2}	3.8710×10^{-4}	4.4155×10^{-3}	6.9948×10^{-5}


 شکل ۷.۵: شکل دامنه (راست) و جواب عددی (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.005$ برای مثال ۴.۴.۵

روش‌های دیگر که از جواب اساسی استفاده می‌کنند این است که مشکل منفرد بودن در این روش با معرفی عامل OIF برطرف شده است. همچنین با توجه به استفاده از توابع پایه ای شعاعی می‌توان از این روش روی مسایل با بعد بالا و دامنه به شکل های مختلف استفاده کرد. مثال های عددی حل شده کارایی روش را بخوبی نشان می دهند.



شکل ۸.۵: نمودار خطای مطلق (راست) و نمودار کانتور (چپ) با $N = 441$ و $\delta t = 0.01$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۵

فصل ۶

روش مرزمنفرد برای حل معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز

۱.۶ مقدمه

در حالت کلی بدست آوردن جواب دقیق برای معادلات غیرخطی مشکل و یا حتی امکان پذیر نمی باشد. بنابراین روش های عددی در حوزه معادلات غیرخطی دارای اهمیت هستند. روش های تفاضلات متناهی، عناصر متناهی و حجم متناهی در طول زمان ها ی متمادی برای حل عددی دسته وسیعی از مسائل مهندسی استفاده شده اند که این روش ها به شبکه بندی نیاز دارند و در واقع مشکل اصلی این روش ها می باشد. در این فصل برای نشان دادن کارایی روش مرزمنفرد، مساله مقدار مرزی و اولیه کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز^۱ ($GBBMB$) را با این روش حل می کنیم. هدف اصلی این فصل عبارت است از اینکه رفتار معادله $GBBMB$ را از طریق ترکیب روش مرزمنفرد با روش جواب خصوصی، به منظور بدست آوردن جواب دقیق تر در مقایسه با روش های دیگر، مورد بررسی قرار دهیم. علاوه بر این، در این فصل قضایایی برای پایداری و همگرایی روش مطرح شده در فضای H^1 با مرتبه همگرایی $O(\delta t)$ بیان و اثبات خواهد شد. از میان کاربرد های معادله بنجامین-بونا-ماهونی می توانیم به موارد زیر اشاره کنیم [۴۰، ۴۶]:

- آنالیز امواج سطحی از طول موج بلند در مایعات؛
- امواج هیدرو در پلاسمای سرد؛
- امواج صوتی-گرانش در سیالات متراکم؛
- امواج صوتی در بلورهای همساز.

روش های تحلیلی و عددی مختلفی برای حل معادله بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز در مقالات استفاده شده است که تعدادی از آن ها را مرور می کنیم. نویسنده در مقاله [۴۵] از روش انتگرال اولیه برای بدست آوردن یک جواب تحلیلی برای معادله اصلاح شده بنجامین-بونا-ماهونی استفاده کرده است. معادله بنجامین-بونا-ماهونی در مقاله [۴۰] توسط یک روش تعمیم یافته از روش

^۱Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers

معروف تانژانت- کوتانژانت هیپربولیک حل شده است. آنالیز غیرخطی از پروفایل‌های شوک چسبناک مسطح از معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز در دو بعد در مقاله [۴۶] انجام شده است. نویسنده و همکارانش در مقاله [۴۷] نرخ‌های واپاشی بهینه از جواب‌ها را برای معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی در فضای چند بعدی $n \geq 3$ مورد مطالعه قرار داده‌اند. نویسندگان در مقاله [۴۸] یک نرخ واپاشی نمایی از جواب‌ها برای مسئله کوشی از معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را با به کار گرفتن روش انرژی وزن دار فضا-زمان نشان می‌دهند. معادله‌های بنجامین-بونا-ماهونی و اصلاح شده بنجامین-بونا-ماهونی با استفاده از روش تابع نمایی در مقاله [۴۹] حل شده‌اند و تعدادی از جواب‌های سالیتون از آن‌ها بدست آمده است. نویسندگان در مقاله [۵۰] نرخ همگرایی از جواب‌های معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را برای انحطاط مربوط به جواب‌های لایه ای مرزی در نیم فضا مطالعه کرده‌اند. یک طرح تفاضل متناهی از نوع کرانک-نیکلسون با اثبات همگرایی از مرتبه دو در نرم گسسته H^1 در مقاله [۵۱] برای حل معادله بنجامین-بونا-ماهونی مورد بحث قرار گرفته است. نویسنده در مقاله [۵۲] یک روش برپایه ی روش گالرکین استاندارد و فرمول کرانک-نیکلسون به ترتیب برای متغیرهای فضا و زمان ارایه می‌کند و همگرایی طرح اصلاح شده گالرکین خطی را ثابت می‌کند. خوانندگان علاقه‌مند برای اطلاعات بیشتر می‌توانند به [۴۰، ۵۳] مراجعه کنند.

معادله غیرخطی کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را در نظر می‌گیریم:

$$u_t - (\Delta u)_t - \beta \Delta u + \alpha \nabla \cdot u = \eta \nabla \cdot G(u) + f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, T], \quad (۱.۶)$$

با شرط اولیه

$$u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۲.۶)$$

و شرط مرزی

$$u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (۳.۶)$$

که $G(u)$ یک تابع غیرخطی است، f یک تابع از متغیرهای فضا و زمان می‌باشد، توابع f, g توابعی معلوم هستند، $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ، Δ و ∇ به ترتیب عملگرهای لاپلاس و گرادیان می‌باشند. در معادله (۱.۶) ضرایب α و β ثابت‌های مثبت هستند و η یک عدد حقیقی است. در حالت خاص اگر $\alpha = 1$ ، $\beta = 0$ و $\eta = -1$ باشند، معادله منظم شده موج-بلند $RLWE$ ^۲ حاصل می‌شود که مطالعه بهبود یافته معادله KdV برای مدل‌سازی موج‌های با گرانش سطح بلند می‌باشد. روش‌های عددی و تحلیلی گوناگونی برای حل معادله بنجامین-بونا تاکنون ارایه شده است ([۳۸]-[۴۵]).

با انتخاب $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ ، معادله بالا بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز نامیده می‌شود. اگر جمله Δu را حذف کنیم، معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی را خواهیم داشت. همچنین اگر علاوه بر حذف Δu ، قرار دهیم $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ ، معادله بنجامین-بونا-ماهونی بدست می‌آید.

در این فصل، ترکیب روش مرزمنفرد و روش جواب خصوصی مورد استفاده قرار می‌گیرد که برای این منظور معادله ناهمگن اصلی به یک معادله همگن و یک جواب خصوصی معادله ناهمگن تقسیم می‌گردد.

^۲Regularized long-wave equation

۲.۶ پیاده سازی روش و گسسته سازی زمانی

در این بخش، با در نظر گرفتن شبکه یکنواخت زمانی، فرایند گسسته سازی زمانی را با استفاده از روش تفاضل متناهی پیشرو برای تقریب مشتق مرتبه اول متغیر زمان معادله اصلی در دو تراز زمانی متوالی k و $k+1$ به کار خواهیم بست.

فرض کنید $\delta t = t^{k+1} - t^k$ طول گام زمانی باشد و $t^k = k\delta t$ برای هر $t^k \leq t \leq t^{k+1}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} \cong \frac{u^{k+1}(\mathbf{x}) - u^k(\mathbf{x})}{\delta t}, \quad (۴.۶)$$

و برای جمله دیگر در (۱.۶) مشتق نسبت به متغیر زمان به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u^k) \cong \frac{\Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) - \Delta u^k(\mathbf{x})}{\delta t}, \quad (۵.۶)$$

که $u^k = u(\mathbf{x}, k\delta t)$.

همچنین، با استفاده از روش θ تقریب زیر در نظر گرفته می شود:

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) \cong \theta \Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) + (1 - \theta) \Delta u^k(\mathbf{x}), \quad (۶.۶)$$

در حالت خاص، اگر $\theta = \frac{1}{2}$ باشد، تکنیک کرانک-نیکلسون عبارتست از:

$$\Delta u(\mathbf{x}, t) \cong \frac{\Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) + \Delta u^k(\mathbf{x})}{2}, \quad (۷.۶)$$

که $\Delta u^k(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}, k\delta t)$ عملگر لاپلاس است، به صورت

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (۸.۶)$$

با جایگزینی معادله های (۴.۶)-(۷.۶) در معادله (۱.۶) معادله اصلی به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\delta t} - \frac{\Delta u^{k+1} - \Delta u^k}{\delta t} - \beta \frac{\Delta u^{k+1} + \Delta u^k}{2} + \alpha \nabla \cdot u^k = \eta \nabla \cdot G(u^k) + \frac{f^{k+1} + f^k}{2}, \quad (۹.۶)$$

و در نتیجه به عبارت زیر خواهیم رسید:

$$(1 + \frac{\beta \delta t}{2}) \Delta u^{k+1} - u^{k+1} = -u^k + (1 - \frac{\beta \delta t}{2}) \Delta u^k + \alpha \delta t \nabla \cdot u^k - \eta \delta t \nabla \cdot G(u^k) - \frac{\delta t (f^{k+1} + f^k)}{2}, \quad (۱۰.۶)$$

فرض کنید $\mu^2 = \frac{1}{\lambda}$ و $\lambda = 1 + \frac{\beta \delta t}{2}$ و $F^{k+1} = -\frac{\delta t (f^{k+1} + f^k)}{2}$ در نتیجه:

$$\Delta u^{k+1} - \mu^2 u^{k+1} = \frac{1}{\lambda} \left(-u^k + (1 - \frac{\beta \delta t}{2}) \Delta u^k + \alpha \delta t \nabla \cdot u^k - \eta \delta t \nabla \cdot G(u^k) + F^{k+1} \right), \quad (۱۱.۶)$$

اگر عبارت سمت راست معادله (۱۱.۶) را به عنوان تابعی مانند $b^k(\mathbf{x})$ با شرط $\lambda > 0$ در نظر بگیریم، معادله (۱۱.۶) به عنوان معادله هلمهلتز تغییر یافته به صورت زیر حاصل می شود:

$$(\Delta - \mu^2) u^{k+1}(\mathbf{x}) = b^k(\mathbf{x}), \quad (۱۲.۶)$$

که

$$b^k(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \left(-u^k + (1 - \frac{\beta \delta t}{2}) \Delta u^k + \alpha \delta t \nabla \cdot u^k - \eta \delta t \nabla \cdot G(u^k) + F^{k+1} \right), \quad (۱۳.۶)$$

لازم به توجه است که برای $k = 0$ از معادله (۱۳.۶) و شرط اولیه $u^0 = u(\mathbf{x}, 0) = g_0$ خواهیم داشت:

$$b^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} \left(-g_0 + (1 - \frac{\beta \delta t}{2}) \Delta g_0 + \alpha \delta t \nabla \cdot g_0 - \eta \delta t \nabla \cdot G(g_0) + F^1 \right), \quad (۱۴.۶)$$

۳.۶ آنالیز پایداری و همگرایی

این قسمت از مرجع [۳۸] اقتباس شده است. معادله تغییر یافته (۹.۶) با خطای برشی $\mathcal{O}(\delta t)$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1}(\mathbf{x}) - u^k(\mathbf{x})}{\delta t} - \frac{\Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) - \Delta u^k(\mathbf{x})}{\delta t} - \beta \frac{\Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) + \Delta u^k(\mathbf{x})}{2} \\ + \alpha \frac{\nabla \cdot u^{k+1}(\mathbf{x}) + \nabla \cdot u^k(\mathbf{x})}{2} = \gamma \nabla \cdot G(u^k) + \frac{f^{k+1}(\mathbf{x}) + f^k(\mathbf{x})}{2} + \mathcal{O}(\delta t). \end{aligned} \quad (۱۵.۶)$$

با ضرب در δt نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} u^{k+1}(\mathbf{x}) - \Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) - \frac{\beta \delta t}{2} \Delta u^{k+1}(\mathbf{x}) + \frac{\alpha \delta t}{2} \nabla \cdot u^{k+1}(\mathbf{x}) = u^k(\mathbf{x}) - \Delta u^k(\mathbf{x}) + \frac{\beta \delta t}{2} \Delta u^k(\mathbf{x}) \\ - \frac{\alpha \delta t}{2} \nabla \cdot u^k(\mathbf{x}) + \gamma \delta t \nabla \cdot G(u^k) + \frac{\delta t}{2} (f^{k+1}(\mathbf{x}) + f^k(\mathbf{x})) + \delta t \mathcal{O}(\delta t), \end{aligned} \quad (۱۶.۶)$$

و با حذف جمله کوچک $\delta t \mathcal{O}(\delta t)$ ، به معادله زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} U^{k+1}(\mathbf{x}) - \Delta U^{k+1}(\mathbf{x}) - \frac{\beta \delta t}{2} \Delta U^{k+1}(\mathbf{x}) + \frac{\alpha \delta t}{2} \nabla \cdot U^{k+1}(\mathbf{x}) = U^k(\mathbf{x}) - \Delta U^k(\mathbf{x}) \\ + \frac{\beta \delta t}{2} \Delta U^k(\mathbf{x}) - \frac{\alpha \delta t}{2} \nabla \cdot U^k(\mathbf{x}) + \gamma \delta t \nabla \cdot G(U^k) + \frac{\delta t}{2} (f^{k+1}(\mathbf{x}) + f^k(\mathbf{x})). \end{aligned} \quad (۱۷.۶)$$

در معادلات (۱۶.۶) و (۱۷.۶)، $u^k(\mathbf{x})$ و $U^k(\mathbf{x})$ به ترتیب جواب‌های واقعی و تقریبی معادله (۱.۶) می‌باشند. فرض کنید فضای توابع مربعی انتگرال پذیر همراه با نرم و ضرب داخلی به صورت زیر باشد:

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)d\Omega, \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle}. \quad (۱۸.۶)$$

همچنین $H^1(\Omega)$ فضای از نوع سوبولف^۳ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\}, \quad (۱۹.۶)$$

که $\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}}$ و $|\alpha| \leq 1$ و α نماد اندیس چندگانه برای مشتقات نسبی می‌باشد. ضرب داخلی، نرم و شبه نرم برای فضای $H^1(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\langle u, v \rangle_1 = \langle u, v \rangle + \langle \nabla u, \nabla v \rangle, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_1}, \quad |u|_1 = \sqrt{\langle \nabla u, \nabla u \rangle}. \quad (۲۰.۶)$$

از طرفی $H_0^1(\Omega)$ یک زیر مجموعه از $H^1(\Omega)$ هست که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}. \quad (۲۱.۶)$$

قضیه ۱.۳.۶. فرض کنیم U^k جواب تقریبی مساله (۱.۶) است که در معادله (۱۷.۶) صدق می‌کند و همچنین فرض می‌کنیم که $G(\cdot)$ در شرط لیپشیتز^۴ یعنی نامساوی زیر صدق می‌کند

$$|G(v_1) - G(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in H^1(\Omega),$$

^۳ Sobolev-type space

^۴ Lipschitz condition

آنگاه برای $\delta t \leq \frac{1}{\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha}$ طرح نیمه گسسته معرفی شده توسط معادله (۱۷.۶) در فضای $H^1(\Omega)$ پایدار است، که $\text{sign}(\cdot)$ تابع علامت^۵ می باشد.

برهان. فرض می کنیم U^{k+1} و $\hat{U}^{k+1}$ به ترتیب جواب های واقعی و تقریبی معادله (۱۷.۶) باشند. در این صورت خطای برشی به صورت زیر است

$$\begin{aligned} e^{k+1} &= (1 + \frac{\beta\delta t}{2})\Delta e^{k+1} + \frac{\alpha\delta t}{2}\nabla \cdot e^{k+1} \\ &= e^k - (1 - \frac{\beta\delta t}{2})\Delta e^k - \frac{\alpha\delta t}{2}\nabla \cdot e^k + \gamma\delta t\nabla \cdot (G(U^k) - G(\hat{U}^k)), \end{aligned} \quad (22.6)$$

که $e^{k+1} = U^{k+1} - \hat{U}^{k+1}$. با ضرب معادله (۲۲.۶) در e^{k+1} و انتگرال گیری روی Ω بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle &= (1 + \frac{\beta\delta t}{2})\langle \Delta e^{k+1}, e^{k+1} \rangle + \frac{\alpha\delta t}{2}\langle \nabla \cdot e^{k+1}, e^{k+1} \rangle \\ &= \langle e^k, e^{k+1} \rangle - (1 - \frac{\beta\delta t}{2})\langle \Delta e^k, e^{k+1} \rangle - \frac{\alpha\delta t}{2}\langle \nabla \cdot e^k, e^{k+1} \rangle \\ &\quad + \gamma\delta t\langle \nabla \cdot (G(U^k) - G(\hat{U}^k)), e^{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

از آنجائیکه $e^{k+1}, e^k \in H_0^1(\Omega)$ و با استفاده از فرمول گرین

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, ds - \int_{\Omega} u \Delta v \, d\mathbf{x},$$

که

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial x} n_1 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2$$

مشتق نرمال برونسوی روی مرز $\partial\Omega$ ، می باشد، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \langle e^{k+1}, e^{k+1} \rangle &= (1 + \frac{\beta\delta t}{2})\langle \nabla \cdot e^{k+1}, \nabla \cdot e^{k+1} \rangle - \frac{\alpha\delta t}{2}\langle e^{k+1}, \nabla \cdot e^{k+1} \rangle \\ &= \langle e^k, e^{k+1} \rangle + (1 - \frac{\beta\delta t}{2})\langle \nabla \cdot e^k, \nabla \cdot e^{k+1} \rangle + \frac{\alpha\delta t}{2}\langle e^k, \nabla \cdot e^{k+1} \rangle \\ &\quad - \gamma\delta t\langle (G(U^k) - G(\hat{U}^k)), \nabla \cdot e^{k+1} \rangle. \end{aligned}$$

حال با استفاده از خواص ضرب داخلی و شرط لیپشیتز، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \|e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &+ (1 + \frac{\beta\delta t}{2})\|\nabla \cdot e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha\delta t}{4}\|e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha\delta t}{4}\|\nabla \cdot e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}(1 - \frac{\beta\delta t}{2})\|\nabla \cdot e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \frac{\beta\delta t}{2})\|\nabla \cdot e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha\delta t}{4}\|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha\delta t}{4}\|\nabla \cdot e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\gamma L\delta t}{2}\|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma L\delta t}{2}\|\nabla \cdot e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

^۵Sign function

با ساده سازی بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha\delta t}{4}\right)\|e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\beta\delta t}{4} - \frac{\gamma L\delta t}{2} - \frac{\alpha\delta t}{2}\right)\|\nabla \cdot e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha\delta t}{4} + \frac{\gamma L\delta t}{2}\right)\|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta\delta t}{4}\right)\|\nabla \cdot e^k\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (23.6) \end{aligned}$$

از $\delta t \leq \frac{1}{\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha}$ نتیجه می‌شود

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3\beta\delta t}{4} - \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} - \frac{\alpha\delta t}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{\alpha\delta t}{4},$$

و

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3\beta\delta t}{4} - \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} - \frac{\alpha\delta t}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{3\beta\delta t}{4} - \frac{\gamma L\delta t}{2} - \frac{\alpha\delta t}{2}.$$

همچنین، برای سمت راست معادله (23.6)، به وضوح داریم

$$\frac{1}{2} + \frac{\alpha\delta t}{4} + \frac{\gamma L\delta t}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{3\beta\delta t}{4} + \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} + \frac{\alpha\delta t}{2},$$

و

$$\frac{1}{2} - \frac{\beta\delta t}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{3\beta\delta t}{4} + \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} + \frac{\alpha\delta t}{2},$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{3\beta\delta t}{4} - \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} - \frac{\alpha\delta t}{2}\right)\left\{\|e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot e^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2\right\} \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3\beta\delta t}{4} + \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} + \frac{\alpha\delta t}{2}\right)\left\{\|e^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot e^k\|_{L^2(\Omega)}^2\right\}. \end{aligned}$$

بر طبق نرم H^1 داریم

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{3\beta\delta t}{4} - \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} - \frac{\alpha\delta t}{2}\right)\|e^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{3\beta\delta t}{4} + \text{sign}(\gamma)\frac{\gamma L\delta t}{2} + \frac{\alpha\delta t}{2}\right)\|e^k\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

با تقسیم ضرایب و تکرار نامساوی

$$\begin{aligned} \|e^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 & \leq \left[\frac{1 + \frac{3\beta\delta t}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t + \alpha\delta t}{1 - \frac{3\beta\delta t}{2} - \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t - \alpha\delta t}\right]\|e^k\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \left[\frac{1 + \frac{3\beta\delta t}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t + \alpha\delta t}{1 - \frac{3\beta\delta t}{2} - \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t - \alpha\delta t}\right]^2\|e^{k-1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \dots \\ & \leq \left[\frac{1 + \frac{3\beta\delta t}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t + \alpha\delta t}{1 - \frac{3\beta\delta t}{2} - \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t - \alpha\delta t}\right]^{k+1}\|e^0\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (24.6) \end{aligned}$$

همچنین، می توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1 + \left(\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha \right) \delta t}{1 - \left(\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha \right) \delta t} \right]^{k+1} &= \frac{\exp\left(\left[\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha\right]T\right)}{\exp\left(-\left[\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha\right]T\right)} \\ &= \exp\left(2\left[\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha\right]T\right), \quad (25.6) \end{aligned}$$

که $\lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)\delta t = T$. بنابراین، ضریب $\|e^0\|_{H^1(\Omega)}^2$ در معادله (24.6)، هنگامی که $k+1$ به سمت بینهایت میل می کند، همگراست و بنابراین کراندار است، یعنی یک ثابت مثبت مانند C وجود دارد که برای هر k داریم

$$0 < \left[\frac{1 + \frac{3\beta\delta t}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t + \alpha\delta t}{1 - \frac{3\beta\delta t}{2} - \text{sign}(\gamma)\gamma L\delta t - \alpha\delta t} \right]^{k+1} \leq C.$$

حال از معادله (24.6) به رابطه زیر می رسیم

$$\|e^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|e^0\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

که به معنای پایداری روش می باشد. باید توجه کرد، در حالتی که ضریب $\|e^0\|_{H^1(\Omega)}^2$ در معادله (24.6)، نسبت به k افزایش می یابد، داریم

$$\|e^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \exp\left(2\left[\frac{3\beta}{2} + \text{sign}(\gamma)\gamma L + \alpha\right]T\right) \|e^0\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

□

فرض کنید $\{u(\mathbf{x}, t_k)\}_{k=0}^n = u^k$ جواب واقعی معادلات (1.6) - (3.6) و $\{U(\mathbf{x}, t_k)\}_{k=0}^n = U^k$ جواب تقریبی با همان شرط اولیه و مرزی باشد. حال قضیه زیر برای همگرایی گسسته سازی زمانی برقرار است.

قضیه 2.3.6. جواب گسسته سازی زمانی H^1 - همگراست با مرتبه همگرایی $O(\delta t)$.

برهان. با تفاضل معادله (16.6) و (17.6) از یکدیگر داریم

$$\begin{aligned} &\xi^{k+1} - \left(1 + \frac{\beta\delta t}{2}\right) \Delta \xi^{k+1} + \frac{\alpha\delta t}{2} \nabla \cdot \xi^{k+1} \\ &= \xi^k - \left(1 - \frac{\beta\delta t}{2}\right) \Delta \xi^k - \frac{\alpha\delta t}{2} \nabla \cdot \xi^k + \gamma\delta t \nabla \cdot (G(U^k) - G(\hat{U}^k)) + \delta t R_{k+1}, \quad (26.6) \end{aligned}$$

که $\xi^k = u^k - U^k$ و R_{k+1} خطای برشی است بطوری که $|R_{k+1}| \leq C_1 \delta t$ ، برای ثابت مثبت C_1 . حال با ضرب طرفین معادله بالا در ξ^{k+1} و با استفاده از ویژگی های ضرب داخلی و شرط لیپشیتز داریم

$$\begin{aligned} &\|\xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(1 + \frac{\beta\delta t}{2}\right) \|\nabla \cdot \xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha\delta t}{4} \|\xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\alpha\delta t}{4} \|\nabla \cdot \xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta\delta t}{2}\right) \|\nabla \cdot \xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta\delta t}{2}\right) \|\nabla \cdot \xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha\delta t}{4} \|\xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha\delta t}{4} \|\nabla \cdot \xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{\gamma L \delta t}{2} \|\xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma L \delta t}{2} \|\nabla \cdot \xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta t}{2} \|\xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta t}{2} \|R_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

با ساده سازی

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{4}\right) \|\xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\beta \delta t}{4} - \frac{\gamma L \delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2}\right) \|\nabla \cdot \xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha \delta t}{4} + \frac{\gamma L \delta t}{2}\right) \|\xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta \delta t}{4}\right) \|\nabla \cdot \xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta t}{2} \|R_{k+1}\|^2. \end{aligned} \quad (27.6)$$

اگر فرض کنیم $\delta t \leq \frac{1}{1 + \alpha + 3\beta + \text{sign}(\gamma)\gamma L}$ ، نتیجه می دهد که

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{4}$$

و

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{3\beta \delta t}{4} - \frac{\gamma L \delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2}.$$

همچنین، برای ضرایب سمت راست معادله (27.6) به وضوح

$$\frac{1}{2} + \frac{\alpha \delta t}{4} + \frac{\gamma L \delta t}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2},$$

و

$$\frac{1}{2} + \frac{\beta \delta t}{4} \leq \frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}\right) \left\{ \|\xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot \xi^{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}\right) \left\{ \|\xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot \xi^k\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} \\ & \quad + \delta t \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}\right) \|R_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

برطبق نرم H^1 ، بدست می آوریم

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}\right) \|\xi^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}\right) \|\xi^k\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ & \quad + \delta t \left(\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}\right) \|R_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

با تقسیم ضرایب و تکرار نامساوی

$$\begin{aligned} \|\xi^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}} \right] \|\xi^k\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \delta t \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}} \right] \|R_{k+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \dots \\ &\leq \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}} \right]^{k+1} \|\xi^0\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \delta t \sum_{j=1}^{k+1} \left[\frac{\frac{1}{2} + \frac{\delta t}{2} + \frac{\alpha \delta t}{2} + \frac{3\beta \delta t}{2} + \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{\delta t}{2} - \frac{\alpha \delta t}{2} - \frac{3\beta \delta t}{2} - \frac{\text{sign}(\gamma)\gamma L \delta t}{2}} \right]^j \|R_{k-j+2}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (28.6) \end{aligned}$$

قرار دهید $D = 1 + \alpha + 3\beta + \text{sign}(\gamma)\gamma L$ و $w_k = \left[\frac{1 + \delta t D}{1 - \delta t D} \right]^{k+1}$ ، آنگاه مشابه با قضیه (۱.۳.۶) دنباله w_k همگرا به $\exp(2TD)$ می باشد و بنابراین کراندار است، یعنی یک ثابت مثبت مانند C' وجود دارد که برای هر k داریم $0 < w_k \leq C'$. چون $\xi^0 = 0$ ، معادله (۲۸.۶) به صورت زیر بازنویسی می شود

$$\|\xi^{k+1}\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C' C_1^2 T \delta t^2. \quad (29.6)$$

با گرفتن ریشه دوم از دو طرف معادله (۲۹.۶) اثبات کامل می شود. $\square$

قضیه ۳.۳.۶. فرض کنید $u^k \in H_0^2(\Omega)$ جواب معادله (۱۱.۶) باشد، اگر توابع $\frac{\partial u^k}{\partial x}$ و $\frac{\partial u^k}{\partial y}$ توابع یکنوا برحسب متغیر t باشند و $\beta \delta t + 2 > 0$ آنگاه:

$$\|u^k\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2.$$

برهان. (اثبات به استقرا ریاضی)

برای $k = 0$ بدیهی است که

$$\Delta u^1 - \mu^2 u^1 = \frac{1}{\lambda} \left(-u^0 + \left(1 - \frac{\beta \delta t}{2}\right) \Delta u^0 + \alpha \delta t \nabla \cdot u^0 - \eta \delta t \nabla \cdot G(u^0) + F^1 \right), \quad (30.6)$$

اگر معادله (۳۰.۶) در u^1 ضرب شود و سپس روی Ω انتگرال بگیریم، آنگاه

$$\begin{aligned} (\Delta u^1, u^1) - \mu^2 (u^1, u^1) &= \\ \frac{1}{\lambda} \left(-(u^0, u^1) + \left(1 - \frac{\beta \delta t}{2}\right) (\Delta u^0, u^1) + \alpha \delta t (\nabla \cdot u^0, u^1) - \eta \delta t (\nabla \cdot G(u^0), u^1) + (F^1, u^1) \right), \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول گرین به صورت

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, ds - \int_{\Omega} u \Delta v \, d\mathbf{x},$$

که

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial x} n_1 + \frac{\partial v}{\partial y} n_2$$

مشتق نرمال برونسوی روی مرز $\partial\Omega$ است، و در نتیجه:

$$(\nabla u^1, \nabla u^1) + \mu^2(u^1, u^1) = \frac{1}{\lambda} \left(-(u^0, u^1) - (1 - \frac{\beta\delta t}{2})(\nabla u^0, \nabla u^1) + \alpha\delta t(\nabla \cdot u^0, u^1) - \eta\delta t(\nabla \cdot G(u^0), u^1) + (F^1, u^1) \right),$$

و آنگاه:

$$\|u^1\|_2^2 + \frac{1}{\mu^2}(\nabla u^1, \nabla u^1) = -(u^0, u^1) - (1 - \frac{\beta\delta t}{2})(\nabla u^0, \nabla u^1) + \alpha\delta t(\nabla \cdot u^0, u^1) - \eta\delta t(\nabla \cdot G(u^0), u^1) + (F^1, u^1),$$

که این نتیجه به علت این است که: $u^1 \in H_0^2(\Omega)$. از طرفی، به خاطر اینکه $\beta\delta t + 2 > 0$ و اینکه توابع $\frac{\partial u^k}{\partial x}$ و $\frac{\partial u^k}{\partial y}$ نسبت به متغیر t یکنوا هستند، آنگاه: $\xi = 1 - \frac{\beta\delta t}{2} > 0$ و $(\nabla u^1, \nabla u^0) > 0$ از اینرو، معادله (۳.۶) نتیجه می دهد:

$$\|u^1\|_2^2 \leq (u^0, u^1) + (F^1, u^1). \quad (۳۱.۶)$$

در پایان، با استفاده از نامساوی شوارتز، خواهیم داشت:

$$\|u^1\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \|F^1\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2, \quad (۳۲.۶)$$

فرض استقرا فرض کنید نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\|u^l\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2, \quad l = 1, 2, \dots, k. \quad (۳۳.۶)$$

اگر معادله (۱۱.۶) در u^{k+1} ضرب شود و سپس روی انتگرال بگیریم، آنگاه:

$$(\Delta u^{k+1}, u^{k+1}) - \mu^2(u^{k+1}, u^{k+1}) = \frac{1}{\lambda} \left(-(u^k, u^{k+1}) + \xi(\Delta u^k, u^{k+1}) + \alpha\delta t(\nabla \cdot u^k, u^{k+1}) - \eta\delta t(\nabla \cdot G(u^k), u^{k+1}) + (F^{k+1}, u^{k+1}) \right),$$

با استفاده از فرمول گرین نتیجه می شود:

$$(\nabla u^{k+1}, \nabla u^{k+1}) + \mu^2(u^{k+1}, u^{k+1}) = \frac{1}{\lambda} \left(-(u^k, u^{k+1}) - \xi(\nabla u^k, \nabla u^{k+1}) + \alpha\delta t(\nabla \cdot u^k, u^{k+1}) - \eta\delta t(\nabla \cdot G(u^k), u^{k+1}) + (F^{k+1}, u^{k+1}) \right),$$

و آنگاه:

$$\|u^{k+1}\|_2^2 + \frac{1}{\mu^2}(\nabla u^{k+1}, \nabla u^{k+1}) = -(u^k, u^{k+1}) - \xi(\nabla u^k, \nabla u^{k+1}) + \alpha\delta t(\nabla \cdot u^k, u^{k+1}) - \eta\delta t(\nabla \cdot G(u^k), u^{k+1}) + (F^{k+1}, u^{k+1}),$$

حال، با صرف نظر کردن برخی جملات برای مقادیر کوچک δt و به کار بستن مفروضات قضیه و نامساوی شوارتز، خواهیم داشت:

$$\|u^{k+1}\|_2 \leq \|u^k\|_2 + \|F^{k+1}\|_2, \quad (۳۴.۶)$$

و با استفاده از معادله (۳۳.۶) نتیجه می دهد:

$$\|u^{k+1}\|_2 \leq \|u^0\|_2 + \max_{0 \leq j \leq n} \|F^j\|_2, \quad (۳۵.۶)$$

□

در نتیجه، اثبات کامل است.

۴.۶ مثال‌های عددی

در این بخش، چهار مثال از معادله غیرخطی کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز دوبعدی با روش مرزمنفرد حل خواهد شد. دقت و همگرایی روش ارایه شده با دو نوع خطا که به صورت زیر تعریف می‌شوند، بررسی می‌گردد:

$$\varepsilon_{\infty}(u) = \|u_{exact} - u_{approx}\|_{\infty} = \max\{|u_{exact}(\mathbf{x}_i, t) - u_{approx}(\mathbf{x}_i, t)|, i = 1, 2, \dots, N\},$$

و

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_{exact}(\mathbf{x}_i, t) - u_{approx}(\mathbf{x}_i, t))^2}{N}}$$

که $u_{approx}(\mathbf{x}_i, t)$ و $u_{exact}(\mathbf{x}_i, t)$ به ترتیب، جواب دقیق و جواب عددی می‌باشند. برای بررسی مرتبه همگرایی از فرمول

$$Order = \frac{\log(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})}{\log(\frac{\tau_2}{\tau_1})}$$

استفاده می‌کنیم که $\tau_2 < \tau_1$ و ε_2 خطای بدست آمده به تعداد $N_2 = T/\tau_2 + 1$ گام زمانی و بطور مشابه، ε_1 خطای بدست آمده به تعداد $N_1 = T/\tau_1 + 1$ گام زمانی است. در مثال‌های زیر، از اسپلاین پلی هارمونیک مرتبه دوم یعنی $\phi(r) = r^4 \ln(r)$ به عنوان توابع پایه شعاعی استفاده شده است.

مثال ۱.۴.۶. معادله‌های (۱.۶) - (۳.۶) برای $G(u) = \frac{1}{2}u^2$ را روی دامنه متناهی مربعی $\Omega_1 = [0, 1]^2$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y, t), \quad (36.6)$$

با شرط آغازین:

$$u(x, y, 0) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (37.6)$$

و با شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= t \sin(x) + 1, & u(x, 1, t) &= t \sin(x + 1) + 1, \\ u(0, y, t) &= t \sin(y) + 1, & u(1, y, t) &= t \sin(1 + y) + 1, \end{aligned} \quad (38.6)$$

که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t \sin(x + y) + 1, \quad (39.6)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = (3 + 2t - 2t^2 \cos(x + y)) \cdot \sin(x + y). \quad (40.6)$$

در جدول ۱.۶ دو نوع خطای روش ارایه شده برای این مثال در زمانهای متفاوت تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است، که نتایج حاصل نشان دهنده پایداری این روش می‌باشد. در جدول ۲.۶ مقایسه بین روش مرزمنفرد با دیگر روش‌ها در شرایط یکسان ارایه شده است. همچنین، جدول ۳.۶ خطای ماکزیمم و مرتبه همگرایی را با افزایش δt و تعداد نقاط ثابت $N = 256$ در زمان $t = 1$ نشان می‌دهد. نمودار خطای ماکزیمم حاصل از این روش با $\delta t = 1/1024$ و $N = 256$ در زمان $T = 1$ در شکل ۱.۶ نمایش داده شده است. بعلاوه، نمودار جواب عددی (راست) و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در شکل ۲.۶ ارایه شده است.

جدول ۱.۶: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 256$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۱.۴.۶

t	$\delta t = 0.002$		$\delta t = 0.001$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS
0.10	1.7037×10^{-5}	4.2289×10^{-6}	4.7441×10^{-6}	1.2173×10^{-6}
0.20	1.7119×10^{-5}	4.2381×10^{-6}	5.0507×10^{-6}	1.2960×10^{-6}
0.30	1.7187×10^{-5}	4.2501×10^{-6}	5.3573×10^{-6}	1.3747×10^{-6}
0.40	1.7298×10^{-5}	4.2958×10^{-6}	5.6639×10^{-6}	1.4534×10^{-6}
0.50	1.7501×10^{-5}	4.6476×10^{-6}	5.9705×10^{-6}	1.5321×10^{-6}
0.60	1.7899×10^{-5}	4.7499×10^{-6}	6.2771×10^{-6}	1.6109×10^{-6}
0.70	1.8744×10^{-5}	5.0064×10^{-6}	6.5836×10^{-6}	1.6896×10^{-6}
0.80	2.0085×10^{-5}	5.3667×10^{-6}	6.8902×10^{-6}	1.7684×10^{-6}
0.90	2.5415×10^{-5}	6.7048×10^{-6}	7.1968×10^{-6}	1.8472×10^{-6}
1.00	4.5501×10^{-5}	1.0671×10^{-5}	7.5034×10^{-6}	1.9260×10^{-6}

جدول ۲.۶: مقایسه خطاهای روش حاضر با دیگر روش‌ها برای مثال ۱.۴.۶

روش	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS
$T = 1, h = 1/16, \delta t = 1/1024$		
روش حاضر	7.0870×10^{-6}	1.8191×10^{-6}
$EFG[38]$	9.1254×10^{-4}	3.2228×10^{-4}
$SMRPI[39]$	4.2856×10^{-6}	2.7754×10^{-8}
$RBF[40]$	2.2672×10^{-3}	7.4241×10^{-4}
$T = 5, h = 1/10, \delta t = 1/1280$		
روش حاضر	4.1687×10^{-6}	1.0699×10^{-6}
$LG - RBF[41]$	8.7045×10^{-6}	5.7507×10^{-6}

جدول ۳.۶: خطا و مرتبه همگرایی با $N = 256$ و مقادیر δt در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۶

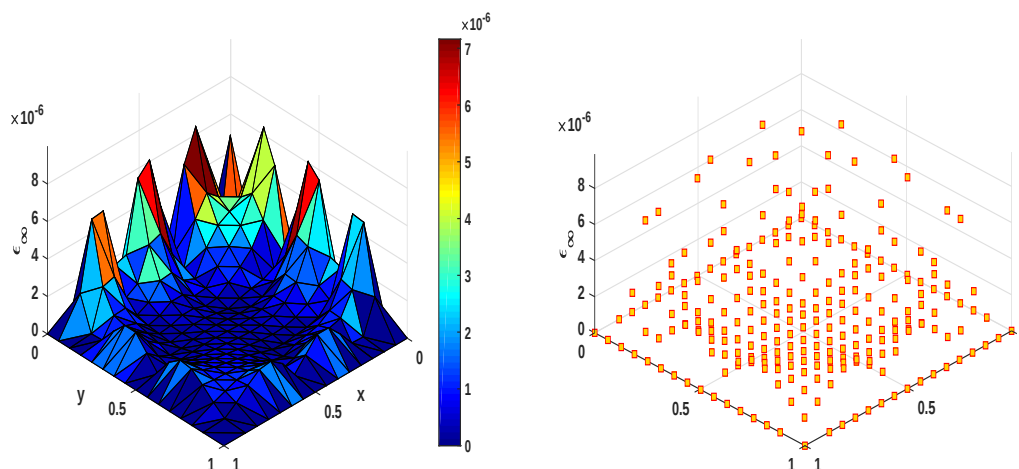
δt	$\varepsilon_\infty(u)$	مرتبه	RMS	مرتبه
0.010	1.8537×10^{-4}	—	6.8734×10^{-5}	—
0.005	8.9432×10^{-5}	0.9715	3.3987×10^{-5}	1.0160
0.002	4.5501×10^{-5}	0.7374	1.1671×10^{-5}	1.1665
0.001	7.5034×10^{-6}	2.6003	1.9260×10^{-6}	2.5992

مثال ۲.۴.۶. در این مثال، معادله‌های (۱.۶)–(۳.۶) برای $G(u) = \sin(u)$ را روی دامنه متناهی مربعی $\Omega_1 = [0, 1]^2$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

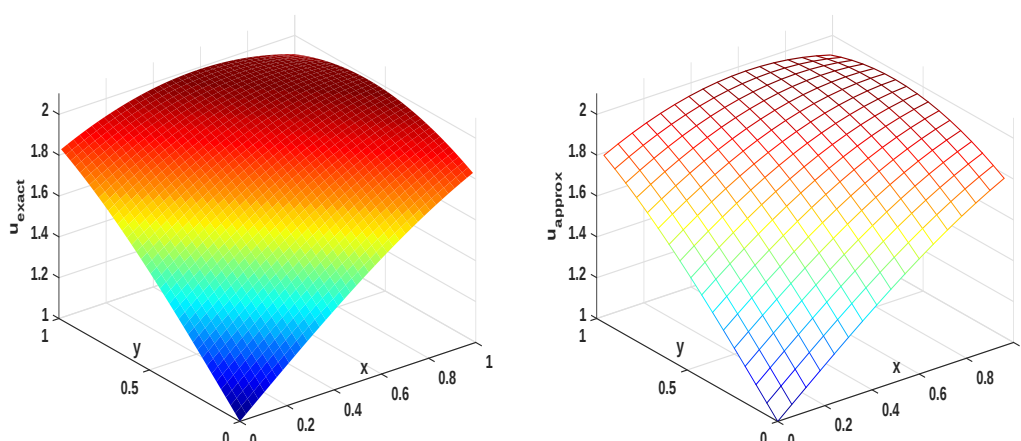
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \cos(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \cos(u) \frac{\partial u}{\partial y} + f(x, y, t), \quad (41.6)$$

با شرط آغازین:

$$u(\mathbf{x}, 0) = e^{2x+2y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1, \quad (42.6)$$



شکل ۱.۶: نمودار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ در زمان $T = 1$ با $N = 256$ و $\delta t = 1/1024$ برای مثال ۱.۴.۶



شکل ۲.۶: نمودار جواب عددی (راست) با $N = 256$ و $\delta t = 1/1024$ و جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۶

و شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= e^{2x+2t}, & u(x, 1, t) &= e^{2x+2+2t}, \\ u(0, y, t) &= e^{2y+2t}, & u(1, y, t) &= e^{2+2y+2t}, \end{aligned} \quad (43.6)$$

که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{2x+2y+2t}, \quad (44.6)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

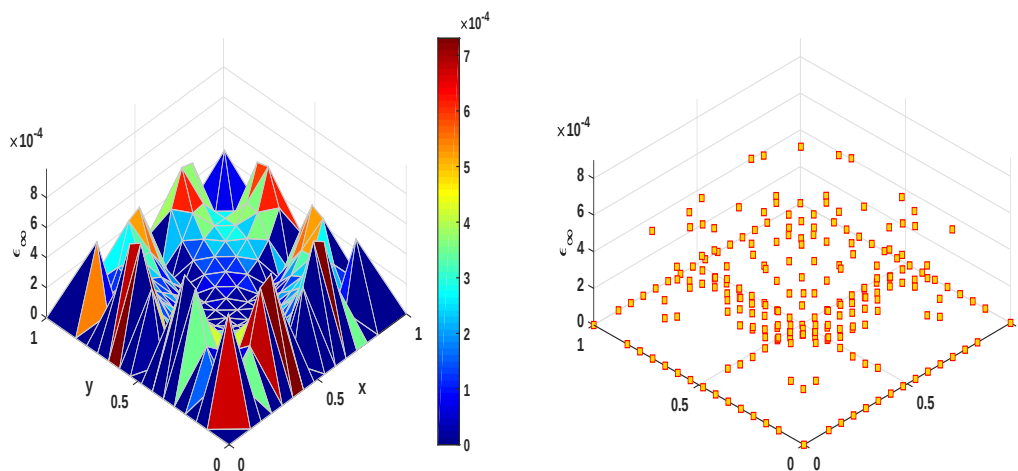
$$f(\mathbf{x}, t) = -2e^{2x+2y+2t} (9 + 2 \cos(e^{2x+2y+2t})). \quad (45.6)$$

در جدول ۴.۶ دو نوع خطای روش ارائه شده برای این مثال در زمانهای متفاوت تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است، که نتایج حاصل نشان دهنده پایداری این روش می باشد. نمودار خطای ماکزیمم حاصل از این روش با $\delta t = 0.001$ و $N = 225$ در زمان $T = 1$ در شکل ۳.۶ نمایش داده

شده است. بعلاوه، نمودار جواب عددی (راست) و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در شکل ۴.۶ ارائه شده است.

جدول ۴.۶: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 225$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۲.۴.۶

t	$\delta t = 0.002$		$\delta t = 0.001$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS
0.10	4.5723×10^{-4}	1.6435×10^{-4}	1.2050×10^{-4}	4.3219×10^{-5}
0.20	5.5940×10^{-4}	1.9141×10^{-4}	1.4721×10^{-4}	4.6242×10^{-5}
0.30	6.8575×10^{-4}	2.4643×10^{-4}	1.7988×10^{-4}	6.4516×10^{-5}
0.40	8.2876×10^{-4}	2.9797×10^{-4}	2.1940×10^{-4}	7.8696×10^{-5}
0.50	1.0156×10^{-3}	3.6513×10^{-4}	2.6812×10^{-4}	9.6165×10^{-5}
0.60	1.2368×10^{-3}	4.4470×10^{-4}	3.2734×10^{-4}	1.1741×10^{-4}
0.70	1.5188×10^{-3}	5.4593×10^{-4}	4.0014×10^{-4}	1.7511×10^{-4}
0.80	1.8477×10^{-3}	6.6429×10^{-4}	4.8860×10^{-4}	1.7524×10^{-4}
0.90	2.2538×10^{-3}	8.1034×10^{-4}	5.9649×10^{-4}	2.1394×10^{-4}
1.00	2.7718×10^{-3}	9.9625×10^{-4}	7.2923×10^{-4}	2.6154×10^{-4}



شکل ۳.۶: نمودار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 225$ و $\delta t = 0.001$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۶

مثال ۳.۴.۶. در این مثال، معادله (۳۶.۶) را روی دامنه دایره ای $\Omega_2 = \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 3 \right\}$

را در نظر می گیریم، با شرط آغازین:

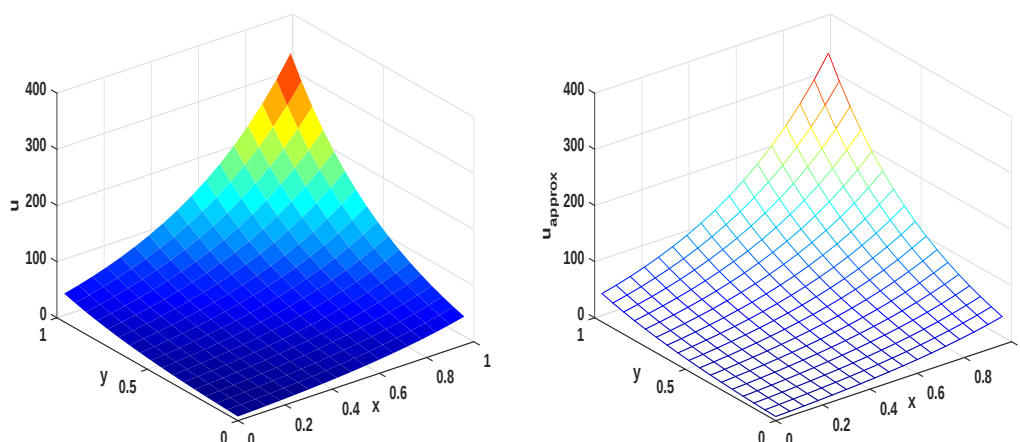
$$u(x, y, 0) = 1, \quad \mathbf{x} \in \Omega_2, \quad (46.6)$$

که با در نظر گرفتن شرایط مرزی، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t \sin(x + y) + 1, \quad (47.6)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = (3 + 2t - 2t^2 \cos(x + y)) \cdot \sin(x + y). \quad (48.6)$$



شکل ۴.۶: نمودار جواب عددی (راست) با $N = 225$ و $\delta t = 0.001$ و جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۶

در جدول ۵.۶ دو نوع خطای روش ارایه شده برای این مثال در زمانهای متفاوت تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است، که نتایج حاصل نشان دهنده پایداری این روش می باشد. نمودار جواب عددی (راست) و نمودار خطای ماکزیمم (چپ) حاصل از این روش با $\delta t = 0.001$ و $N = 400$ در زمان $T = 1$ در شکل ۵.۶ نمایش داده شده است.

جدول ۵.۶: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 400$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۳.۴.۶

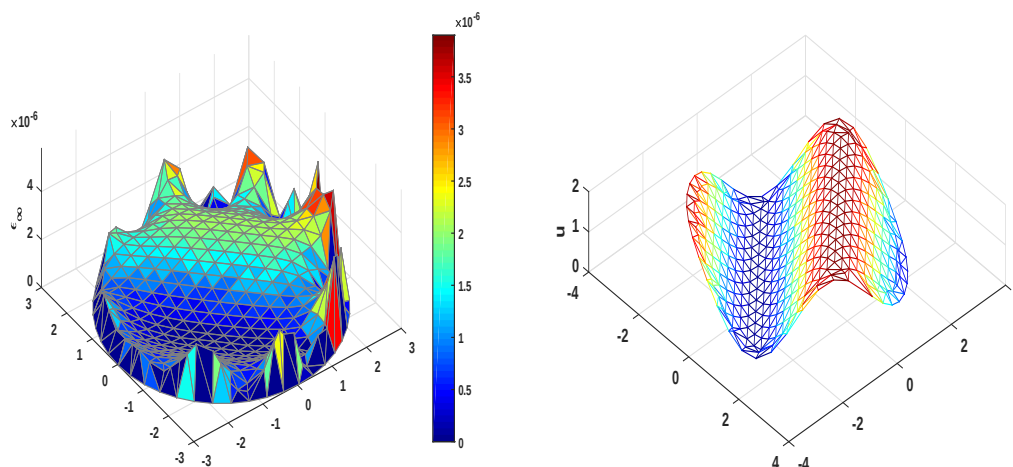
t	$\delta t = 0.002$		$\delta t = 0.001$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS
0.10	1.4422×10^{-5}	4.5876×10^{-6}	3.6057×10^{-6}	1.1469×10^{-6}
0.20	1.4552×10^{-5}	4.6050×10^{-6}	3.6382×10^{-6}	1.1513×10^{-6}
0.30	1.4682×10^{-5}	4.6323×10^{-6}	3.6707×10^{-6}	1.1581×10^{-6}
0.40	1.4812×10^{-5}	4.6695×10^{-6}	3.7032×10^{-6}	1.6748×10^{-6}
0.50	1.4942×10^{-5}	4.7162×10^{-6}	3.7357×10^{-6}	1.1791×10^{-6}
0.60	1.5072×10^{-5}	4.7722×10^{-6}	3.7682×10^{-6}	1.1932×10^{-6}
0.70	1.5202×10^{-5}	4.8372×10^{-6}	3.8007×10^{-6}	1.2094×10^{-6}
0.80	1.5330×10^{-5}	4.9108×10^{-6}	3.8332×10^{-6}	1.2278×10^{-6}
0.90	1.5463×10^{-5}	4.9927×10^{-6}	3.8657×10^{-6}	1.2483×10^{-6}
1.00	1.5593×10^{-5}	5.0823×10^{-6}	3.8982×10^{-6}	1.2708×10^{-6}

مثال ۴.۴.۶. در این مثال معادله (۴۱.۶) را روی یک دامنه آمیب-شکل

$$\Omega_3 = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r = e^{\sin \theta} \cdot \sin^2(2\theta) + e^{\cos \theta} \cdot \cos^2(2\theta) \right\}$$

در نظر می گیریم. با شرط آغازین:

$$u(x, y, 0) = e^{2x+2y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_3, \quad (49.6)$$



شکل ۵.۶: نمودار جواب عددی (راست) با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ و نمودار خطا (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۶

که با در نظر گرفتن شرایط مرزی، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(\mathbf{x}, t) = e^{2x+2y+2t}, \quad (50.6)$$

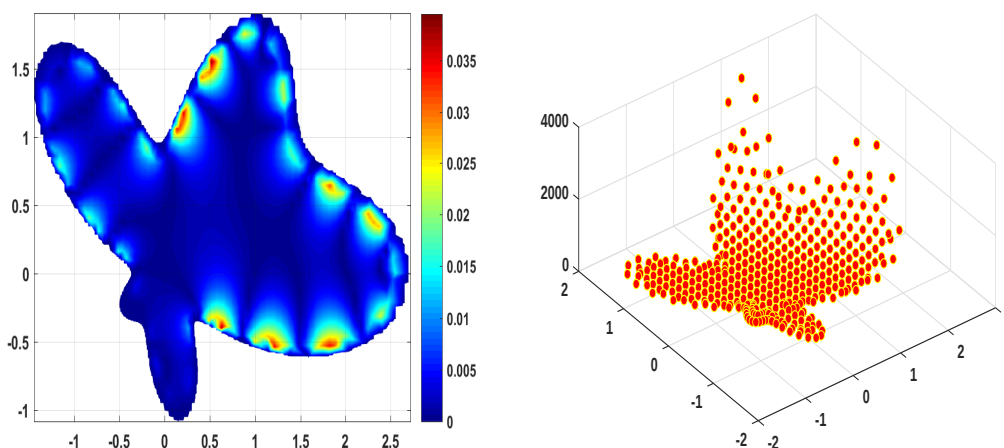
و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(\mathbf{x}, t) = -2e^{2x+2y+2t} (9 + 2 \cos(e^{2x+2y+2t})). \quad (51.6)$$

در جدول ۶.۶ دو نوع خطای روش ارایه شده برای این مثال در زمانهای متفاوت تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است، که نتایج حاصل نشان دهنده پایداری این روش می باشد. نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای ماکزیمم (چپ) حاصل از این روش با $\delta t = 0.001$ و $N = 400$ در زمان $T = 1$ در شکل ۶.۶ نمایش داده شده است.

جدول ۶.۶: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 400$ و مقادیر δt در زمان t برای مثال ۴.۴.۶

t	$\delta t = 0.002$		$\delta t = 0.001$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS
0.10	2.6382×10^{-2}	3.0815×10^{-3}	6.6409×10^{-3}	7.7581×10^{-4}
0.20	3.2224×10^{-2}	3.7637×10^{-3}	8.1112×10^{-3}	9.4757×10^{-4}
0.30	3.9359×10^{-2}	4.5971×10^{-3}	9.9071×10^{-3}	1.1573×10^{-3}
0.40	4.1072×10^{-2}	5.6148×10^{-3}	1.2100×10^{-2}	1.4136×10^{-3}
0.50	4.8716×10^{-2}	6.8580×10^{-3}	1.4779×10^{-2}	1.7266×10^{-3}
0.60	5.1716×10^{-2}	8.3765×10^{-3}	1.8052×10^{-2}	2.1088×10^{-3}
0.70	5.7940×10^{-2}	1.0231×10^{-2}	2.2048×10^{-2}	2.5757×10^{-3}
0.80	6.0698×10^{-2}	1.2496×10^{-2}	2.6930×10^{-2}	3.1460×10^{-3}
0.90	6.3067×10^{-2}	1.5263×10^{-2}	3.2892×10^{-2}	3.8426×10^{-3}
1.00	6.5960×10^{-2}	1.8642×10^{-2}	4.0175×10^{-2}	4.6933×10^{-3}



شکل ۶.۶: نمودار جواب عددی (راست) با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ و نمودار کانتور خطا (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۶

۵.۶ نتیجه گیری

در این فصل ترکیب روش مرزمنفرد با روش جواب خصوصی را برای حل معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز دوبعدی روی دامنه های مختلف استفاده کردیم. براساس مثال‌های عددی، مشخص شد که نتایج حاصل از روش ارایه شده با جواب دقیق مساله ها سازگاری خوبی دارند و کارایی روش مورد تایید است، همچنین نتایج با روش‌های دیگر مقایسه شده است که نشان دهنده برتری روش ارایه شده است. آنالیز همگرایی و پایداری ارایه شده است. همچنین با توجه به استفاده از توابع پایه ای شعاعی می‌توان از این روش روی مسائل با بعد بالا و دامنه به شکل های مختلف استفاده کرد. مثال های عددی حل شده کارایی روش را بخوبی نشان می دهند.

فصل ۷

روش مرزمنفرد برای معادله انتشار کسری

۱.۷ مقدمه

انتشار ناهمگونی فرایندی است که اندازه گیری زمان انحراف بین موقعیت ذره و برخی موقعیت مرجع جابه جایی ذرات یا میانگین جابه جایی مربع یک تابع غیرخطی از زمان است. رابطه غیرخطی بین میانگین جابجایی مربع و زمان با مقایسه جابه جایی نظری و تجربی در یک دوره نسبتاً کوتاه از زمان به دست آمده است.

حسابان کسری موضوعی جذاب برای اغلب پژوهشگران اعم از ریاضیدانان و مهندسان می باشد. در مقابل فرایندهای کلاسیک که معادله های دیفرانسیل از مرتبه صحیح می باشند، مشتق های کسری ابزاری کارآمد برای بیان ویژگی های فرایندهای پیچیده گوناگون ارائه کرده اند [۷۰، ۷۱، ۷۲].

انتشار دو یا چند ماده شیمیایی در سطوح غیرمستقیم روی یک سطح، برای ساخت نمونه های پایدار، که با یکدیگر واکنش نشان می دهد با معادله انتشار-واکنش بیان می شود. ماهیت انتشار، رابطه بین میانگین مربع جابجایی $x(t)$ از انتشار و زمان t به صورت $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\alpha$ است که اگر $\alpha = 1$ باشد انتشار نرمال (استاندارد) و اگر $0 < \alpha < 1$ باشد حالت زیرانتشار^۱ ناهمگون و اگر $\alpha > 1$ باشد حالت ابرانتشار^۲ ناهمگون خواهد بود [۷۳].

در این فصل، روش مرزمنفرد و روش جواب خصوصی برای حل عددی معادله انتشار ناهمگون دوبعدی شامل جمله غیرخطی به کارگرفته شده است:

$$u_t = (\kappa_\mu D_t^{1-\mu} + \kappa_\nu D_t^{1-\nu}) \Delta u + G(u) + f, \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad t \in [0, T], \quad (۱.۷)$$

با شرط اولیه:

$$u(\mathbf{x}, 0) = g_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۲.۷)$$

و شرایط مرزی دیریکله:

$$u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (۳.۷)$$

که f و g_0 و h توابع معلوم داده شده هستند و $G(u)$ جمله غیرخطی است. همچنین Δ عملگر لاپلاس است. ثابت های κ_μ و κ_ν نامنفی هستند که بیانگر ضرایب انتشار ناهمگون می باشند و همچنین $0 < \mu, \nu < 1$.

^۱ subdiffusion

^۲ superdiffusion

نماد ${}_0D_t^{1-\alpha}$ مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه $(1-\alpha)$ نسبت به متغیر زمان t برای تابع $u(\mathbf{x}, t)$ است که $(0 < \alpha < 1)$ و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$${}_0D_t^{1-\alpha}u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(\mathbf{x}, \eta)}{(t-\eta)^{1-\alpha}} d\eta, \quad (4.7)$$

که $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما است.

علاوه براین، جمله غیرخطی $G(u(\mathbf{x}, t))$ نسبت به تابع $u(\mathbf{x}, t)$ در شرط لیپشیتز صدق می‌کند، یعنی، ثابت مثبت $L > 0$ وجود دارد که:

$$\|G(u(\mathbf{x}, t)) - G(v(\mathbf{x}, t))\| \leq L \|u(\mathbf{x}, t) - v(\mathbf{x}, t)\|, \quad (5.7)$$

۲.۷ گسسته‌سازی زمانی و پیاده سازی روش

در این بخش، با در نظر گرفتن شبکه یکنواخت زمانی، فرایند گسسته‌سازی زمانی را با استفاده از روش تفاضل متناهی پیشرو برای تقریب مشتق مرتبه اول متغیر زمان معادله اصلی در دو تراز زمانی متوالی n و $n+1$ به کار خواهیم بست.

فرض کنید $\tau = t^{n+1} - t^n$ طول گام زمانی باشد و $t^n = n\tau$.

اگر نماد $I_{a+}^\gamma y(t)$ برای $y(t) \in L^1(a, b)$ بیانگر عملگر انتگرال ریمان-لیوویل باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{a+}^\gamma y(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_a^t \frac{y(s)}{(t-s)^{1-\gamma}} ds, \quad t > a, \gamma > 0, \quad (6.7)$$

آنگاه لم زیر بیان می‌گردد:

لم ۱.۲.۷. (۱۱۷) اگر $y(t) \in C^2[0, T]$ آنگاه:

$$I_{0+}^\gamma y(t_{n+1}) - I_{0+}^\gamma y(t_n) = \frac{\tau^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \left(y(t_{n+1}) + \sum_{j=0}^{n-1} (w_{j+1} - w_j) y(t_{n-j}) \right) + R_{n,\gamma}, \quad (7.7)$$

بطوریکه:

$$|R_{n,\gamma}| \leq C w_n \tau^{1+\gamma}, \quad 1 = w_0 > w_1 > \dots > w_n > 0, \quad w_j = (j+1)^\gamma - j^\gamma.$$

با نمادگذاری‌های فوق، می‌توان نوشت:

$${}_0D_t^{1-\gamma}u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} I_{0+}^\gamma u(\mathbf{x}, t). \quad (8.7)$$

با استفاده از طرح تفاضلات صریح مرکزی برای معادله (۱.۷) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{u(\mathbf{x}, t_{n+1}) - u(\mathbf{x}, t_n)}{\tau} &= \frac{\rho_1}{\tau} \left(I_{0+}^\alpha \Delta u(\mathbf{x}, t_{n+1}) - I_{0+}^\alpha \Delta u(\mathbf{x}, t_n) \right) \\ &+ \frac{\rho_2}{\tau} \left(I_{0+}^\beta \Delta u(\mathbf{x}, t_{n+1}) - I_{0+}^\beta \Delta u(\mathbf{x}, t_n) \right) + f^{n+1}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (9.7)$$

حال، از لم ۱.۲.۷ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} u^{n+1}(\mathbf{x}) - (\mu_1 + \mu_2) \Delta u^{n+1}(\mathbf{x}) &= u^n(\mathbf{x}) + \mu_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \Delta u^{n-j}(\mathbf{x}) \\ &+ \mu_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j) \Delta u^{n-j} + \tau f^{n+1}(\mathbf{x}) + \tau R^{\alpha,\beta}, \end{aligned} \quad (10.7)$$

که $|R^{\alpha,\beta}| < C \min\{\tau^{1+\alpha}, \tau^{1+\beta}\}$ و

$$\mu_1 = \frac{\rho_1 \tau^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \mu_2 = \frac{\rho_2 \tau^\beta}{\Gamma(1+\beta)}, \lambda_j = (j+1)^\alpha - j^\alpha, \omega_j = (j+1)^\beta - j^\beta.$$

با حذف کردن $R^{\alpha,\beta}$ معادله زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} U^{n+1}(\mathbf{x}) - (\mu_1 + \mu_2) \Delta U^{n+1}(\mathbf{x}) &= U^n(\mathbf{x}) + \mu_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \Delta U^{n-j}(\mathbf{x}) \\ &+ \mu_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j) \Delta U^{n-j}(\mathbf{x}) + \tau f^{n+1/2}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (11.7)$$

که $f^{n+1/2} = \frac{f^{n+1} + f^n}{2}$ بوسیله حالت خاصی از روش وزندار θ در حالت خاص $\theta = 1/2$ به نام فرمول کرانک-نیکلسون بیان شده است. همچنین $u^n(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, t_n)$ و $U^n(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x}, t_n)$ به ترتیب جواب دقیق و جواب تقریبی معادله (۱.۷) هستند. با بازنویسی معادله (۱۱.۷) به معادله زیر می رسم:

$$\begin{aligned} \Delta U^{n+1}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} U^{n+1}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(-U^n(\mathbf{x}) - \mu_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \Delta U^{n-j}(\mathbf{x}) \right. \\ &\left. - \mu_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j) \Delta U^{n-j}(\mathbf{x}) - \tau f^{n+1/2}(\mathbf{x}) \right). \end{aligned} \quad (12.7)$$

با فرض $\mu^2 = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}$ و $F^{n+1} = -\frac{\tau(f^{n+1} + f^n)}{2}$ و با در نظر گرفتن مفروضات زیر:

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \Delta U^{n-j}(\mathbf{x}), \quad B = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j) \Delta U^{n-j}(\mathbf{x}), \quad (13.7)$$

خواهیم داشت:

$$\Delta U^{n+1} - \mu^2 U^{n+1} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (-U^n - \mu_1 A - \mu_2 B + F^{n+1}), \quad (14.7)$$

اگر عبارت سمت راست معادله (۱۴.۷) را به عنوان تابعی مانند $b^n(\mathbf{x})$ در نظر بگیریم، معادله (۱۴.۷) به عنوان معادله هلمهلتز تغییر یافته به صورت زیر حاصل می شود:

$$(\Delta - \mu^2) U^{n+1}(\mathbf{x}) = b^n(\mathbf{x}), \quad (15.7)$$

که

$$b^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (-U^n - \mu_1 A - \mu_2 B + F^{n+1}), \quad (16.7)$$

لازم به توجه است که برای $n = 0$ از معادله (۱۶.۷) و شرط اولیه $u^0 = u(\mathbf{x}, 0) = g_0$ عبارت $b^0(\mathbf{x})$ محاسبه خواهد شد.

۳.۷ آنالیز پایداری و همگرایی

در این بخش، پایداری و همگرایی معادله های (۱.۷) - (۳.۷) که با طرح پیشنهاد شده گسسته سازی زمانی شده است با اقتباس از مراجع [۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹] بررسی شده است. برای معرفی فرم

تغییراتی معادله (۱۰.۷) چند فضای تابعی با نرم استاندارد و ضرب داخلی در این بخش ارایه شده است که در ادامه از آنها استفاده خواهد شد.

فرض کنید Ω یک دامنه باز و کراندار در $\mathbb{R}^d$ برای $d = 1, 2$ باشد و dx اندازه لبگ روی $\mathbb{R}^d$ باشد. برای $p < \infty$ فضای $L^p(\Omega)$ را فضای توابع اندازه پذیر $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم به‌طوریکه:

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

یک فضای باناخ با نرم استاندارد زیر باشد

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

فضای $L^2(\Omega)$ یک فضای هیلبرت است با ضرب داخلی

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

که نرم زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

همچنین، فرض کنید Ω یک دامنه باز در $\mathbb{R}^d$ باشد و $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d)$ یک d -تایی از اعداد صحیح نامنفی باشد و با نماد $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ که $|\alpha| \leq p$ خواهیم داشت:

$$D^{\alpha}u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

و تعریف می‌کنیم:

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha}u \in L^2(\Omega) \quad : \forall |\alpha| \leq m\}.$$

این فضا، یک فضای هیلبرت است با ضرب داخلی

$$\langle u, v \rangle_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u(x) D^{\alpha}v(x) dx,$$

که نرم زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

ملاحظه ۱.۳.۷. در قضیه‌های زیر به جای استفاده از H^1 -نرم استاندارد، نرم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\mu_1 + \mu_2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

که این نرم و H^1 -نرم، هم ارز هستند [۱۱۷].

لم ۲.۳.۷. ([۱۱۸]) اگر قرار دهیم:

$$\eta_{n+1} = \frac{\rho_1 \tau^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(n+1)^{1-\alpha}}, \quad \xi_{n+1} = \frac{\rho_2 \tau^{\beta}}{\Gamma(\beta)(n+1)^{1-\beta}}, \quad n \geq 0,$$

آنگاه روابط زیر حاصل می‌گردد:

$$\mu_1 \lambda_{n+1} \leq \eta_{n+1} \leq \mu_1 \lambda_n, \quad \mu_2 \omega_{n+1} \leq \xi_{n+1} \leq \mu_2 \omega_n, \quad n \geq 0.$$

قضیه ۳.۳.۷. با فرض $U^n \in H^1(\Omega)$ و اینکه $f(\cdot)$ در شرط لیپ شیتز صدق کند:

$$|f(v_1) - f(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in H^1(\Omega),$$

آنگاه طرح عددی گسسته‌سازی (۱۱.۷) در H^1 -نرم بدون قید پایدار است.

برهان. فرض کنید که U^n و $\hat{U}^n$ به ترتیب، جواب دقیق و جواب تقریب معادله (۱۱.۷) باشند. خطای گردکردن برشی به صورت زیر است:

$$e^{n+1} - (\mu_1 + \mu_2)\Delta e^{n+1} = e^n + \mu_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\Delta e^{n-j} + \mu_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j)\Delta e^{n-j}, \quad (17.7)$$

که $e^{n+1} = U^{n+1} - \hat{U}^{n+1}$. با ضرب e^{n+1} در معادله (۱۷.۷) و انتگرالگیری روی Ω خواهیم داشت:

$$\langle e^{n+1}, e^{n+1} \rangle - (\mu_1 + \mu_2)\langle \Delta e^{n+1}, e^{n+1} \rangle = \langle e^n, e^{n+1} \rangle + \mu_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\langle \Delta e^{n-j}, e^{n+1} \rangle + \mu_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j)\langle \Delta e^{n-j}, e^{n+1} \rangle, \quad (18.7)$$

با توجه به $e^n \in H_0^1(\Omega)$ ، e^{n+1} با استفاده از فرمول گرین نتیجه می‌شود:

$$\langle e^{n+1}, e^{n+1} \rangle + (\mu_1 + \mu_2)\langle \nabla e^{n+1}, \nabla e^{n+1} \rangle = \langle e^n, e^{n+1} \rangle + \mu_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1})\langle \nabla e^{n-j}, \nabla e^{n+1} \rangle + \mu_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_j - \omega_{j+1})\langle \nabla e^{n-j}, \nabla e^{n+1} \rangle. \quad (19.7)$$

حال از نامساوی $|ab| \leq \frac{1}{2}\vartheta^2 a^2 + \frac{1}{2\vartheta^2} b^2$ برای $\vartheta \neq 0$ نتیجه می‌شود:

$$\|e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\mu_1 + \mu_2)\|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \langle e^n, e^{n+1} \rangle + \tau \langle f(U^n) - f(\hat{U}^n), e^{n+1} \rangle + \frac{\mu_1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \{ \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \} + \frac{\mu_2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_j - \omega_{j+1}) \{ \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \}. \quad (20.7)$$

با ساده کردن خواهیم داشت:

$$\|e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\mu_1 + \mu_2)\|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \langle e^n, e^{n+1} \rangle + \tau \langle f(U^n) - f(\hat{U}^n), e^{n+1} \rangle + \frac{\mu_1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu_2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_j - \omega_{j+1}) \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu_1}{2} (1 - \lambda_n) \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu_2}{2} (1 - \omega_n) \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (21.7)$$

با استفاده از لم ۲.۳.۷، شرط لیب شیتز و نامساوی شوارتز نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\mu_1 + \mu_2) \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \langle e^n, e^{n+1} \rangle + \tau L \|e^n\|_{L^2(\Omega)} \|e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \frac{\mu_1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_j - \lambda_{j+1}) \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu_2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_j - \omega_{j+1}) \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{\mu_1}{2} (1 - \lambda_n) \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu_2}{2} (1 - \omega_n) \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{\mu_1 \lambda_n - \eta_{n+1}}{2} \|\nabla e^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu_1 \lambda_n - \eta_{n+1}}{2} \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{\mu_2 \omega_n - \xi_{n+1}}{2} \|\nabla e^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu_2 \omega_n - \xi_{n+1}}{2} \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (22.7)$$

از نامساوی پوانکاره $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ که فقط به Ω وابسته است و نامساوی‌های زیر

$$\eta_{n+1} \geq \mu_1 \lambda_{n+1}, \xi_{n+1} \geq \mu_2 \omega_{n+1}, |ab| \leq \frac{1}{2} \vartheta^2 a^2 + \frac{1}{2\vartheta^2} b^2, \vartheta \neq 0,$$

نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2}^2 &\leq \langle e^n, e^{n+1} \rangle + \frac{\mu_1}{2} \sum_{j=0}^n \lambda_j \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_2}{2} \sum_{j=0}^n \omega_j \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2}^2 \\ &- \frac{\mu_1}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j \|\nabla e^{n+1-j}\|_{L^2}^2 - \frac{\mu_2}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \omega_j \|\nabla e^{n+1-j}\|_{L^2}^2 + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2}^2 \\ &- \frac{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}}{2} \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \frac{C^2 \tau^2 L^2}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}} \|e^n\|_{L^2}^2 + \frac{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}}{2} \|\nabla e^{n+1}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (23.7)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_{L^2}^2 + \mu_1 \sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j \|\nabla e^{n+1-j}\|_{L^2}^2 + \mu_2 \sum_{j=0}^{n+1} \omega_j \|\nabla e^{n+1-j}\|_{L^2}^2 \\ \leq \|e^n\|_{L^2}^2 + \mu_1 \sum_{j=0}^n \lambda_j \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2}^2 + \mu_2 \sum_{j=0}^n \omega_j \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2}^2 + \frac{C^2 \tau^2 L^2}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}} \|e^n\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (24.7)$$

اگر قرار دهیم:

$$E^n := \|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_1 \sum_{j=0}^n \lambda_j \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_2 \sum_{j=0}^n \omega_j \|\nabla e^{n-j}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

آنگاه معادله (۲۴.۷) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} E^{n+1} &\leq E^n + \frac{C^2 \tau^2 L^2}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}} \|e^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \dots \\ &\leq E^0 + \sum_{j=0}^n \frac{C^2 \tau^2 L^2}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}} \|e^j\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq E^0 + \frac{C^2 L^2 T \tau}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}} \mathcal{M}^2, \end{aligned} \quad (25.7)$$

که

$$\mathcal{M}^2 = \max_{0 \leq j \leq n} \|e^j\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

در نتیجه از ملاحظه ۱.۳.۷ نتیجه می‌شود:

$$\|e^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|e^0\|_{H^1(\Omega)} + \sqrt{\frac{C^2 L^2 T \tau}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}}} \mathcal{M}. \quad (26.7)$$

به عبارت دیگر، نامساوی‌های زیر برقرار خواهند بود [۱۱۷]

$$\begin{cases} \frac{\rho_2}{\rho_1} \eta_{n+1} \leq \xi_{n+1}, & 0 < \beta \leq \alpha < 1, \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} \xi_{n+1} \leq \eta_{n+1}, & 0 < \alpha \leq \beta < 1, \end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \frac{T\tau}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}} \leq \frac{T\tau}{(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})\eta_{n+1}} = \frac{\Gamma(\alpha)(n+1)^{1-\alpha}T\tau}{\rho_1(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})\tau^\alpha} \leq \frac{\Gamma(\alpha)}{\rho_1(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1})}(T + \tau)^{2-\alpha}, \\ \quad 0 < \beta \leq \alpha < 1, \\ \frac{T\tau}{\eta_{n+1} + \xi_{n+1}} \leq \frac{T\tau}{(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2})\xi_{n+1}} = \frac{\Gamma(\beta)(n+1)^{1-\beta}T\tau}{\rho_2(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2})\tau^\beta} \leq \frac{\Gamma(\beta)}{\rho_2(1 + \frac{\rho_1}{\rho_2})}(T + \tau)^{2-\beta}, \\ \quad 0 < \alpha \leq \beta < 1, \end{cases}$$

حال، با استفاده از نامساوی‌های بالا و معادله (۲۶.۷) خواهیم داشت:

$$\|e^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|e^0\|_{H^1(\Omega)} + \mathbf{C}(T + \tau)^{1 - \frac{\min\{\alpha, \beta\}}{2}} \mathcal{M}. \quad (27.7)$$

□

که اثبات کامل است.

فرض کنید $u(\mathbf{x}, t_n) = u^n \in H^1(\Omega)$ جواب دقیق معادله (۱.۷)–(۳.۷) باشد و $U(\mathbf{x}, t_n) = U^n \in H^1(\Omega)$ جواب تقریبی معادله مذکور با شرایط اولیه و مرزی باشد. قضیه زیر برای همگرایی طرح گسسته‌سازی زمانی ارایه می‌شود.

قضیه ۴.۳.۷. فرض کنید $\varepsilon^{n+1} = u^{n+1} - U^{n+1}$ و $\mathcal{M}' = \max_{0 \leq j \leq n} \|\varepsilon^j\|_{L^2(\Omega)}$. اگر τ طوری باشد که $\mathcal{M}' \ll \tau$ آنگاه طرح گسسته زمانی، H^1 – همگراست.

برهان. از تفاضل معادله‌های (۱۰.۷) و (۱۱.۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1} - (\mu_1 + \mu_2)\Delta\varepsilon^{n+1} &= \varepsilon^n + \mu_1 \sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\Delta\varepsilon^{n-j} \\ &\quad + \mu_2 \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_{j+1} - \omega_j)\Delta\varepsilon^{n-j} + \tau R^{\alpha, \beta}, \end{aligned} \quad (28.7)$$

که $\varepsilon^0 = 0$ و $R^{\alpha, \beta}$ خطای برشی است به طوری که $|R^{\alpha, \beta}| < C\tau^{1+\min\{\alpha, \beta\}}$.

مشابه قضیه ۲.۳.۷ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\|e^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} &\leq C(T+\tau)^{1-\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}} \left(LM' + |R^{\alpha,\beta}| \right) \\ &\leq C(T+\tau)^{1-\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}} \left(LM' + \tau^{1+\min\{\alpha,\beta\}} \right) \\ &\leq CT^{1-\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}} \left(1 + \frac{\tau}{T} \right)^{1-\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}} \left(LM' + \tau^{1+\min\{\alpha,\beta\}} \right). \quad (29.7)\end{aligned}$$

حال، طبق فرض قضیه و استفاده از نامساوی برنولی خواهیم داشت:

$$0 \leq r \leq 1, x \geq -1 : \quad (1+x)^r \leq 1+rx,$$

در نتیجه معادله (۲۹.۷) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\|e^{n+1}\|_{H^1(\Omega)} \leq CT^{1-\frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2}} \left(\tau^{1+\min\{\alpha+\beta\}} + \left(1 - \frac{\min\{\alpha,\beta\}}{2} \right) \frac{\tau^{2+\min\{\alpha+\beta\}}}{T} \right), \quad (30.7)$$

□

که اثبات کامل می‌شود.

۱.۳.۷ الگوریتم پیشگو-اصلاحگر

در آنالیز عددی روش‌های پیشگو-اصلاحگر متعلق به رده ای از الگوریتم‌ها هستند که برای یافتن یک تابع مجهول که در یک معادله معلوم صدق می‌کند طراحی شده‌اند. در این فصل، در پیاده سازی عددی برای جمله غیرخطی این مساله از الگوریتم پیشگو-اصلاحگر استفاده شده است. جمله غیرخطی معادله (۱۴.۷) توسط الگوریتم زیر تقریب زده شده است.

الگوریتم ۱ الگوریتم پیشگو-اصلاحگر

۱: حدس اولیه روبرو رادر نظر بگیرید: $u^{n+1,*} = u^n$

۲: قرار دهید: $condition = 1$

۳: مادامی‌که: $condition > 0$ آنگاه:

۴: معادله (۱۴.۷) را حل کن.

۵: اگر: $\|u^{n+1,*} - u^{n+1}\| < \epsilon$ آنگاه:

۶: $condition = -1$

۷: در غیر این صورت: $u^{n+1,*} = u^{n+1}$

۴.۷ مثال‌های عددی

در این بخش، چهار مثال از معادله دوبعدی انتشار کسری نامتعارف تغییر یافته با روش مرزمنفرد حل خواهد شد. دقت و همگرایی روش ارایه شده با دو نوع خطا ϵ_∞ و RMS مورد بررسی قرار می‌گیرد که قبلاً تعریف شده‌اند.

در مثال‌های عددی این فصل، از اسپلاین پلی هارمونیک مرتبه دوم یعنی $\phi(r) = r^4 \ln(r)$ به عنوان توابع پایه شعاعی استفاده شده است.

جدول ۱.۷: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $\tau = 1/1024$ و $N = 256$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای مثال ۱.۴.۷

t	$(\mu, \nu) = (0.25, 0.45)$		$(\mu, \nu) = (0.75, 0.85)$	
	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS	$\varepsilon_\infty(u)$	RMS
0.10	6.3562×10^{-8}	2.1617×10^{-8}	3.0917×10^{-9}	1.4586×10^{-9}
0.20	2.0829×10^{-7}	7.0840×10^{-8}	1.8982×10^{-8}	8.9599×10^{-9}
0.30	4.1616×10^{-7}	1.4153×10^{-7}	5.4739×10^{-8}	2.5824×10^{-8}
0.40	6.7963×10^{-7}	2.1314×10^{-7}	1.1590×10^{-7}	5.4678×10^{-8}
0.50	9.9401×10^{-7}	3.3806×10^{-7}	2.0730×10^{-7}	9.7802×10^{-8}
0.60	1.3559×10^{-6}	4.6116×10^{-7}	3.3332×10^{-7}	1.5725×10^{-7}
0.70	1.7629×10^{-6}	5.9957×10^{-7}	4.9796×10^{-7}	2.3492×10^{-7}
0.80	2.2128×10^{-6}	7.5260×10^{-7}	7.0498×10^{-7}	3.3259×10^{-7}
0.90	2.7040×10^{-6}	9.1965×10^{-7}	9.5792×10^{-7}	4.5192×10^{-7}
1.00	3.3736×10^{-6}	1.1474×10^{-6}	1.3438×10^{-6}	6.3397×10^{-7}

مثال ۱.۴.۷. در این مثال، معادله خطی را روی دامنه مربعی $\Omega_1 = [0, 1]^2$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = (D_t^{1-\mu} + D_t^{1-\nu}) \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in [0, 1]^2 \times (0, 1], \quad (31.7)$$

با شرط آغازین همگن به صورت: $u(x, y, t) = 0$ و شرایط مرزی دیریکله روی مرز $\partial\Omega_1$ به صورت:

$$u(x, y, t) = \sin(x + y), \quad (x, y) \in \partial\Omega_1, \quad t \in [0, 1], \quad (32.7)$$

که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = \sin(x + y) t^{1+\mu+\nu}, \quad (33.7)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = \sin(x + y) \left[(1 + \mu + \nu) t^{\mu+\nu} + \frac{2\Gamma(\mu + \nu + 2)}{\Gamma(2\mu + \nu + 1)} t^{2\mu+\nu} + \frac{2\Gamma(\mu + \nu + 2)}{\Gamma(\mu + 2\nu + 1)} t^{\mu+2\nu} \right], \quad (34.7)$$

در جدول ۱.۷ دو نوع خطا در زمان‌های مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارائه شده می‌باشد. همچنین، در جدول ۲.۷ مقایسه روش مرزمنفرد با دیگر روش‌ها در شرایط یکسان ارائه شده است. نمودارهای خطای ماکزیمم این مثال برای $\tau = 1/1024$ و $N = 256$ در زمان $T = 1$ در شکل ۱.۷ نمایش داده شده است. همچنین، نمودار جواب عددی (راست) و جواب تحلیلی (چپ) در شکل ۲.۷ رسم شده است.

مثال ۲.۴.۷. در این مثال، معادله غیرخطی را روی دامنه مربعی $\Omega_2 = [0, 1]^2$ با $G(u) = u^3$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

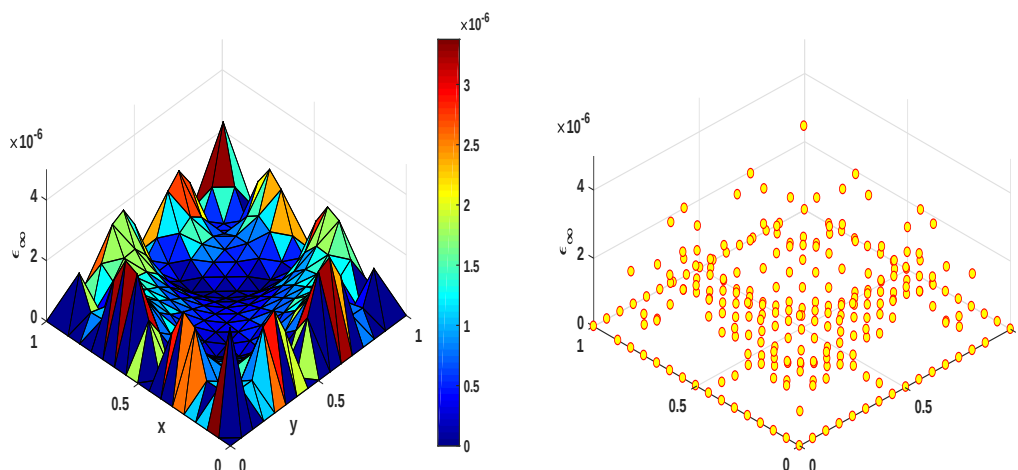
$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = (D_t^{1-\mu} + D_t^{1-\nu}) \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) + G(u(\mathbf{x}, t)), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_2 \times (0, 1], \quad (35.7)$$

با شرط آغازین همگن به صورت: $u(x, y, t) = 0$ و شرایط مرزی دیریکله روی مرز $\partial\Omega_2$ به صورت:

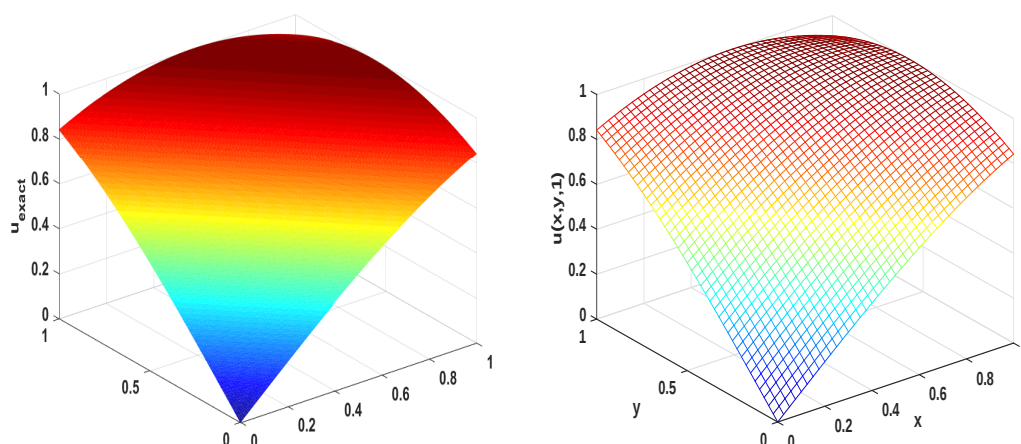
$$u(x, y, t) = t^2 \sin(x) \exp(y), \quad (x, y) \in \partial\Omega_2, \quad t \in [0, 1], \quad (36.7)$$

جدول ۲.۷: مقایسه خطای $\varepsilon_\infty(u)$ روش با دیگر روش‌ها برای مثال ۱.۴.۷

(μ, ν)	τ	روش حاضر	[۹۰]	[۹۱]
(0.25, 0.45)	$\frac{1}{160}$	5.8001×10^{-5}	8.3594×10^{-5}	9.8995×10^{-4}
	$\frac{1}{320}$	1.5307×10^{-5}	8.3413×10^{-5}	4.9498×10^{-4}
	$\frac{1}{640}$	4.0048×10^{-6}	8.3366×10^{-5}	2.4746×10^{-4}
(0.75, 0.85)	$\frac{1}{160}$	7.9946×10^{-5}	8.3466×10^{-5}	2.0269×10^{-3}
	$\frac{1}{320}$	2.3983×10^{-5}	8.3261×10^{-5}	1.0155×10^{-3}
	$\frac{1}{640}$	2.6822×10^{-6}	8.3252×10^{-5}	5.0828×10^{-4}



شکل ۱.۷: نمودار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ در زمان $T = 1$ با $(\mu, \nu) = (0.25, 0.45)$ و $N = 256$ و $\tau = 1/1024$ برای مثال ۱.۴.۷



شکل ۲.۷: نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 1/1024$ و $(\mu, \nu) = (0.25, 0.45)$ و $N = 256$ و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۷

جدول ۳.۷: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $\tau = 0.01$, $N = 30 \times 30$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای مثال ۲.۴.۷

		روشن‌حاضر		$TPS[90]$
(μ, ν)	t	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	
		RMS	RMS	
(0.65, 0.35)	0.25	2.7757×10^{-8}	4.1851×10^{-6}	
		4.6347×10^{-9}	2.2366×10^{-6}	
	0.50	1.1570×10^{-7}	5.8238×10^{-6}	
		1.9319×10^{-8}	2.4947×10^{-6}	
	0.75	2.6388×10^{-7}	1.2397×10^{-5}	
		4.4062×10^{-8}	3.4202×10^{-6}	
(0.25, 0.85)	1.00	1.2047×10^{-5}	2.5385×10^{-5}	
		2.0116×10^{-6}	1.1388×10^{-5}	
	0.25	2.5146×10^{-8}	4.6058×10^{-6}	
		4.8402×10^{-9}	2.4511×10^{-6}	
	0.50	1.0482×10^{-7}	5.8327×10^{-6}	
		2.0176×10^{-8}	2.5673×10^{-6}	
	0.75	2.3907×10^{-7}	1.2716×10^{-5}	
		4.6016×10^{-8}	3.4076×10^{-6}	
	1.00	1.0914×10^{-5}	2.5300×10^{-5}	
		2.1008×10^{-6}	1.1351×10^{-5}	

که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t^2 \sin(x) \exp(y), \quad (37.7)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = 2t \sin(x) \exp(y) - (t^2 \sin(x) \exp(y))^3. \quad (38.7)$$

در جدول ۳.۷ دو نوع خطا در زمان‌های مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارائه شده می‌باشد. نمودارهای خطای ماکزیمم این مثال برای $\tau = 0.01$ و $N = 900$ در زمان $T = 1$ در شکل ۳.۷ نمایش داده شده است. همچنین، نمودار جواب عددی (راست) و جواب تحلیلی (چپ) در شکل ۴.۷ رسم شده است.

مثال ۳.۴.۷. در این مثال، معادله خطی را روی دامنه دایره‌ای

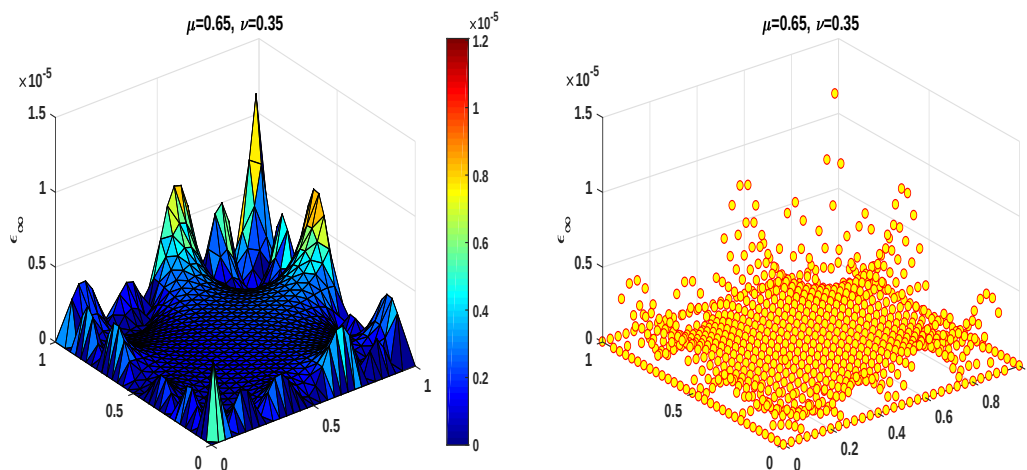
$$\Omega_3 = \left\{ \mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$

به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

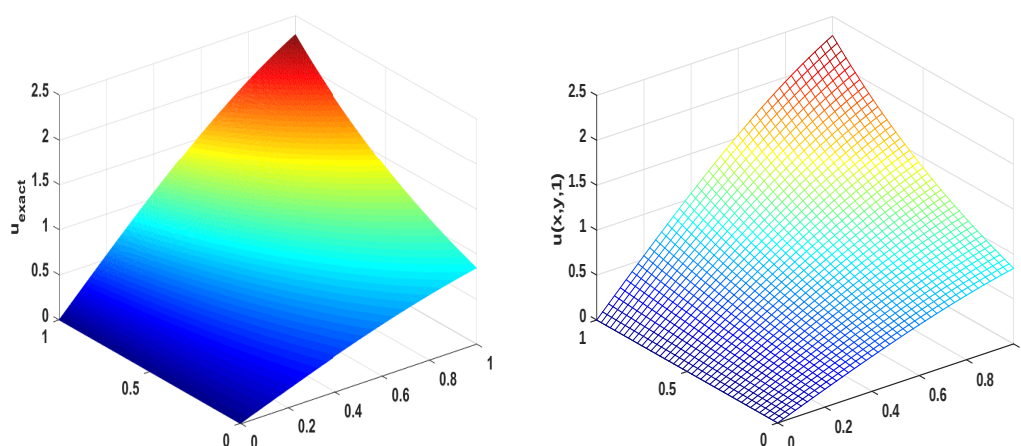
$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = (D_t^{1-\mu} + D_t^{1-\nu}) \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_3 \times (0, 1], \quad (39.7)$$

با شرط آغازین همگن به صورت: $u(x, y, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_3$ و شرایط مرزی دیریکله روی مرز $\partial\Omega_3$ که جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t^{1+\mu+\nu} \exp(-2(x-0.5)^2 - 2(y-0.5)^2), \quad (40.7)$$



شکل ۳.۷: نمودار خطای $\varepsilon_{\infty}(u)$ در زمان $T = 1$ با $(\mu, \nu) = (0.65, 0.35)$ و $\tau = 0.01, N = 900$ برای مثال ۲.۴.۷



شکل ۴.۷: نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 0.01, N = 900$ و $(\mu, \nu) = (0.65, 0.35)$ و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۷

جدول ۴.۷: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $N = 949$, $\tau = 0.01$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای مثال ۳.۴.۷

		روشن حاضر	
		$TPS[90]$	
(μ, ν)	t	$\varepsilon_\infty(u)$ RMS	$\varepsilon_\infty(u)$ RMS
(0.45, 0.75)	0.25	1.1092×10^{-6}	1.6322×10^{-5}
		3.3539×10^{-6}	5.9823×10^{-6}
	0.50	5.3333×10^{-6}	1.4610×10^{-5}
		3.6126×10^{-6}	5.3775×10^{-6}
	0.75	7.3209×10^{-6}	2.9125×10^{-5}
		3.9939×10^{-6}	5.7801×10^{-6}
(0.15, 0.95)	0.25	3.2505×10^{-5}	5.3592×10^{-5}
		3.5769×10^{-6}	8.2312×10^{-6}
	0.50	1.0623×10^{-6}	2.3802×10^{-5}
		3.1959×10^{-6}	8.4524×10^{-6}
	0.75	4.7558×10^{-6}	1.9198×10^{-5}
		3.4308×10^{-6}	6.8365×10^{-6}
	1.00	7.1303×10^{-6}	3.0202×10^{-5}
		3.4006×10^{-6}	6.3524×10^{-6}
		2.0828×10^{-5}	5.3601×10^{-5}
		3.2662×10^{-6}	8.2335×10^{-6}

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = \exp(-2(x - 0.5)^2 - 2(y - 0.5)^2) \left[(1 + \mu + \nu)t^{\mu+\nu} + 8 \frac{\Gamma(2 + \mu + \nu)}{\Gamma(1 + 2\mu + \nu)} t^{2\mu+\nu} \right. \\ \left. + 8 \frac{\Gamma(2 + \mu + \nu)}{\Gamma(1 + 2\nu + \mu)} t^{2\nu+\mu} - \left(\frac{16\Gamma(2 + \mu + \nu)}{\Gamma(1 + 2\mu + \nu)} t^{2\mu+\nu} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{16\Gamma(2 + \mu + \nu)}{\Gamma(1 + 2\nu + \mu)} t^{2\nu+\mu} \right) ((x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2) \right],$$

در جدول ۴.۷ دو نوع خطا در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارائه شده می باشد. نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای ماکزیمم (چپ) برای $\tau = 0.01$ و $N = 949$ و در زمان $T = 1$ و دو مقدار متفاوت (μ, ν) در شکل ۵.۷ و شکل ۶.۷ رسم شده است.

مثال ۴.۴.۷. به عنوان آخرین مثال، معادله غیرخطی را روی دامنه نامنظم

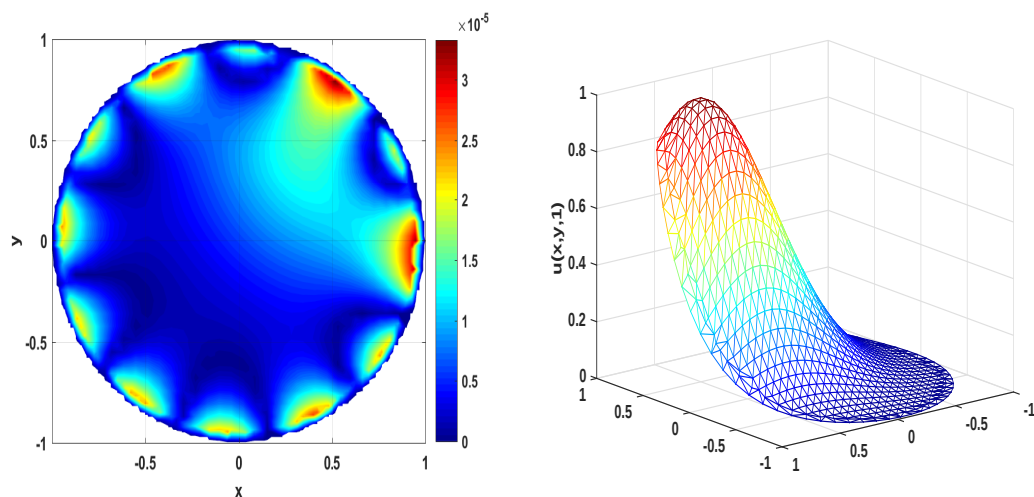
$$\Omega_4 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r = 0.8 + 0.1(\sin(6\theta) + \sin(3\theta)), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

با $G(u) = u^2$ به صورت زیر در نظر می گیریم:

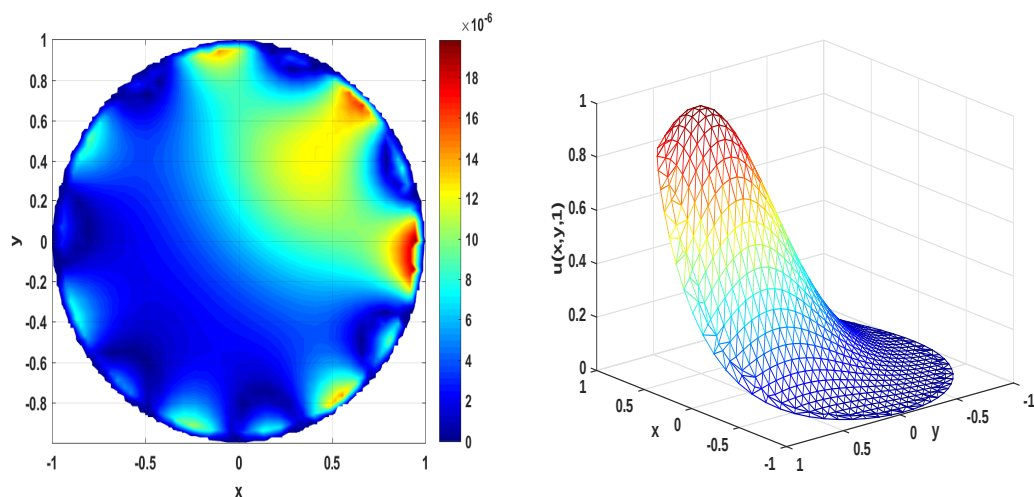
$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = (D_t^{1-\mu} + D_t^{1-\nu}) \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) + G(u(\mathbf{x}, t)), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_4 \times (0, 1], \quad (41.7)$$

با در نظر گرفتن شرایط آغازین همگن و شرایط مرزی، جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(\mathbf{x}, t) = t^{1+\mu+\nu} \exp(x + y), \quad (42.7)$$



شکل ۵.۷: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.45, 0.75)$ و $\tau = 0.01, N = 949$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۷



شکل ۶.۷: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.15, 0.95)$ و $\tau = 0.01, N = 949$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۷

جدول ۵.۷: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و RMS با $\tau = 0.01$, $N = 418$ و مقادیر (μ, ν) در زمان t برای مثال ۴.۴.۷

		روش حاضر		$TPS[90]$
(μ, ν)	t	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_\infty(u)$	
		RMS	RMS	
(0.25, 0.75)	0.25	2.3708×10^{-6}	4.1601×10^{-6}	
		3.3571×10^{-7}	6.1074×10^{-7}	
	0.50	9.8827×10^{-6}	1.5532×10^{-5}	
		2.6499×10^{-6}	3.2497×10^{-6}	
	0.75	2.2539×10^{-5}	3.4221×10^{-5}	
		6.0436×10^{-6}	8.9402×10^{-6}	
(0.45, 0.45)	1.00	1.4154×10^{-5}	5.9441×10^{-5}	
		1.0817×10^{-6}	1.8953×10^{-5}	
	0.25	3.4912×10^{-6}	4.8009×10^{-6}	
		8.5264×10^{-7}	9.7496×10^{-7}	
	0.50	1.3550×10^{-5}	1.6702×10^{-5}	
		3.6974×10^{-6}	3.1938×10^{-6}	
	0.75	2.9656×10^{-5}	3.5417×10^{-5}	
		8.0922×10^{-6}	8.6709×10^{-6}	
	1.00	1.5023×10^{-5}	5.9990×10^{-5}	
		1.4068×10^{-6}	1.7735×10^{-5}	

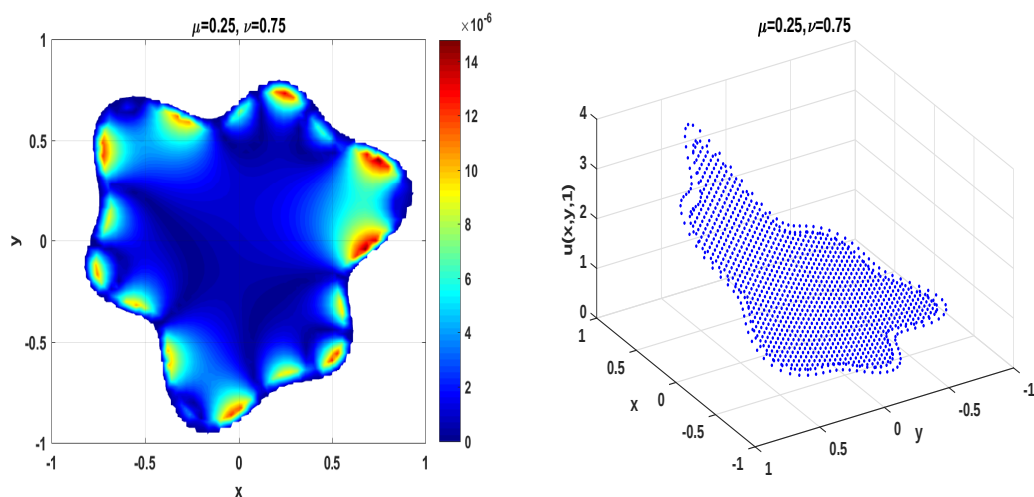
و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = \exp(x + y) \left[(1 + \mu + \nu) t^{\mu+\nu} - 2 \frac{\Gamma(2 + \mu + \nu)}{\Gamma(1 + 2\mu + \nu)} t^{2\mu+\nu} - 2 \frac{\Gamma(2 + \mu + \nu)}{\Gamma(1 + 2\nu + \mu)} t^{2\nu+\mu} - t^{2+2\mu+2\nu} \exp(x + y) \right], \quad (43.7)$$

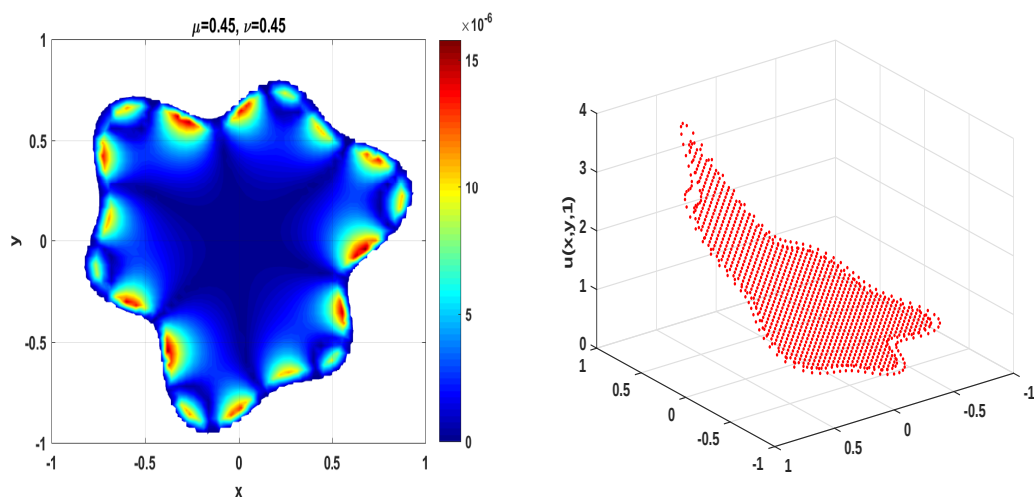
در جدول ۵.۷ دو نوع خطا در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارائه شده می باشد. نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای ماکزیمم (چپ) برای $\tau = 0.01$ و $N = 418$ و در زمان $T = 1$ و دو مقدار متفاوت (μ, ν) در شکل ۷.۷ و شکل ۸.۷ رسم شده است.

۵.۷ نتیجه گیری

در این فصل ترکیب روش مرزمنفرد با روش جواب خصوصی را برای حل معادله انتشارناهمگون کسری دو بعدی روی دامنه های مختلف استفاده کردیم. با توجه به وجود جمله غیرخطی، در مواجهه با این مشکل، از الگوریتم پیشگو-اصلاحگر استفاده شده است. براساس مثال های عددی، مشخص شد که نتایج حاصل از روش ارائه شده با جواب دقیق مساله ها سازگاری خوبی دارند و کارایی روش مورد تایید است، همچنین نتایج با روش های دیگر مقایسه شده است که نشان دهنده برتری روش است. آنالیز همگرایی و پایداری ارائه شده است.



شکل ۷.۷: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.25, 0.75)$ و $\tau = 0.01, N = 418$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۷



شکل ۸.۷: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $(\mu, \nu) = (0.45, 0.45)$ و $\tau = 0.01, N = 418$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۷

فصل ۸

روش مرز منفرد برای معادله کابل کسری

۱.۸ مقدمه

معادله کابل یکی از اساسی ترین معادلات برای مدل سازی دینامیک عصبی است. معادله کابل در بسیاری از حیطه های الکتروفیزیولوژی نقش مهمی ایفا می کند و در سال های اخیر به طور گسترده ای برای شبیه سازی دینامیک عصبی استفاده می شود. یک مدل تحریک الکترومغناطیسی، توزیع پتانسیل الکتریکی در حجم بافتی از عضو که تحریک می شود را نشان می دهد. تحریک عصب می تواند با استفاده از میدان الکتریکی یا میدان مغناطیسی صورت پذیرد. تحقیقات بسیاری در مورد تحریک الکتریکی عصب انجام شده است، در صورتی که در حوزه مغناطیسی هنوز جای تحقیقات بسیاری باقی است. منظور از تحریک یک عصب بطور کلی ایجاد پتانسیل عمل در آن است. پدیده ای که در آن پتانسیل عصب در مدت زمان کمی، تغییرات چشمگیری کرده و سپس به حالت قبل باز می گردد. بررسی روابط حاکم بر این تحریک ما را به معادله ای می رساند که در معادلات دیفرانسیل جزئی به معادله کابل معروف است. با حل این معادله و بررسی نتایج حاصل می توان در مورد ویژگی های تحریک الکترومغناطیسی بحث کرد، وابستگی این تحریک به عواملی چون قطر آکسون مورد آزمایش و مدت پالس اعمال شده روی مدل شبیه سازی شده مورد ارزیابی قرار می گیرد. در این راستا شدت پتانسیل تحریک با قطر آکسون نسبت مستقیم دارد. نتیجه دیگر آنکه در بررسی مدت زمان تحریک، اگر پالس ورودی بلند باشد، زمان تحریک مستقل از طول پالس است و چنانچه پالس ورودی کوتاه باشد، این نسبت به صورت معکوس خواهد بود.

حسابان کسری موضوعی جذاب برای اغلب پژوهشگران اعم از ریاضیدانان و مهندسان می باشد. در مقابل فرایندهای کلاسیک که معادله های دیفرانسیل از مرتبه صحیح می باشند، مشتقهای کسری ابزاری کارآمد برای بیان ویژگیهای فرایندهای پیچیده گوناگون ارایه کرده اند [۷۰، ۷۱، ۷۲].

یکی از معادلات اساسی برای مدل سازی دینامیک عصبی، معادله کابل است [۱۰۹، ۱۱۰].

در این فصل، ترکیب روش مرز منفرد و روش جواب خصوصی برای حل معادله دیفرانسیل کابل کسری دو بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \rho_1 ({}_0 D_t^{1-\alpha} \Delta u(\mathbf{x}, t)) + \rho_2 ({}_0 D_t^{1-\beta} u(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T], \end{cases} \quad (1.8)$$

با شرط آغازین:

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.8)$$

و شرط مرزی دیریکله:

$$u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

که f ، g و h توابع معلوم هموار هستند و Δ عملگر لاپلاس است. ثابت‌های ρ_1 و ρ_2 ضرایب مثبت هستند و $0 < \alpha, \beta < 1$.

نماد ${}_0D_t^{1-\alpha}$ مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه $(1 - \alpha)$ نسبت به متغیر زمان t برای تابع $u(\mathbf{x}, t)$ است که $(0 < \alpha < 1)$ که در ادامه معرفی می‌گردد.

۲.۸ مشتق کسری ریمان-لیوویل

نماد D_t^α بیانگر مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه α که $(0 < \alpha < 1)$ برای تابع $u(\mathbf{x}, t)$ نسبت به متغیر زمان t می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_0D_t^\alpha u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(\mathbf{x}, \eta)}{(t-\eta)^\alpha} d\eta, \quad (4.8)$$

که $\Gamma(\cdot)$ تابع گاما می‌باشد.

در مراجع [۸۵] و [۸۶] یک طرح گسسته‌سازی زمانی مرتبه دوم برای مشتق ریمان-لیوویل به صورت زیر ارائه شده است:

$$[{}_0^{RL}D_t^\alpha u(t)]_{t=t^{n+1}} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\omega^\alpha(j)}{\tau^\alpha} u(t^{n+1-j}) + O(\tau^2), \quad (5.8)$$

که

$$\omega^\alpha(j) = \begin{cases} \frac{\alpha+2}{2} p_0^\alpha, & j=0, \\ \frac{\alpha+2}{2} p_j^\alpha + \frac{-\alpha}{2} p_{j-1}^\alpha, & j \geq 1, \end{cases} \quad (6.8)$$

و

$$p_j^\alpha = \begin{cases} 1, & j=0, \\ \left(1 - \frac{\alpha+1}{j}\right) p_{j-1}^\alpha, & j \geq 1, \end{cases} \quad (7.8)$$

که τ طول گام زمانی است.

۳.۸ گسسته‌سازی زمانی و پیاده سازی روش

در این بخش، با در نظر گرفتن شبکه یکنواخت زمانی، فرایند گسسته‌سازی زمانی را با استفاده از روش تفاضل متناهی پیشرو برای تقریب مشتق مرتبه اول متغیر زمان معادله اصلی در دو تراز زمانی متوالی n و $n+1$ به کار خواهیم بست.

فرض کنید $\tau = t^{n+1} - t^n$ طول گام زمانی باشد و $t^n = n\tau$ برای هر $t^n \leq t \leq t^{n+1}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^n \cong \frac{u^{n+1}(\mathbf{x}) - u^n(\mathbf{x})}{\tau}, \quad (۸.۸)$$

باتوجه به اینکه $\Delta u^n(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}, n\tau)$ عملگر لاپلاس به صورت زیر است

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (۹.۸)$$

با جایگزین کردن معادله‌های (۵.۸)-(۷.۸) در معادله (۱.۸) معادله اصلی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \rho_1 \left(\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\omega^{1-\alpha}(j)}{\tau^{1-\alpha}} \Delta u(t^{n+1-j}) \right) + \rho_2 \left(\sum_{j=0}^{n+1} \frac{\omega^{1-\beta}(j)}{\tau^{1-\beta}} u(t^{n+1-j}) \right) + f^{n+1/2}, \quad (۱۰.۸)$$

که $f^{n+1/2} = \frac{f^{n+1} + f^n}{2}$ بوسیله حالت خاصی از روش وزندار θ در حالت خاص $\theta = 1/2$ به نام فرمول کرانک-نیکلسون بیان شده است.

با در نظر گرفتن مفروضات زیر:

$$A = \frac{\rho_1}{\tau^{1-\alpha}}, \quad B = \frac{\rho_2}{\tau^{1-\beta}}, \quad (۱۱.۸)$$

و

$$C = \sum_{j=1}^{n+1} \omega^{1-\alpha}(j) \Delta u(t^{n+1-j}), \quad D = \sum_{j=1}^{n+1} \omega^{1-\beta}(j) u(t^{n+1-j}), \quad (۱۲.۸)$$

آنگاه معادله (۱۰.۸) به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = A\omega^{1-\alpha}(0)\Delta u(t^{n+1}) + AC + B\omega^{1-\beta}(0)u^{n+1} + BD + f^{n+1/2}, \quad (۱۳.۸)$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\tau A\omega^{1-\alpha}(0)\Delta u^{n+1} + [\tau B\omega^{1-\beta}(0) - 1] u^{n+1} = -u^n - \tau AC - \tau BD - \tau f^{n+1/2}, \quad (۱۴.۸)$$

و اینکه:

$$\Delta u^{n+1} - \left(\frac{1 - \tau B\omega^{1-\beta}(0)}{\tau A\omega^{1-\alpha}(0)} \right) u^{n+1} = \frac{1}{\tau A\omega^{1-\alpha}(0)} (-u^n - \tau AC - \tau BD - \tau f^{n+1/2}), \quad (۱۵.۸)$$

با فرض $\lambda = \tau A\omega^{1-\alpha}(0)$ و $\mu^2 = \frac{1 - \tau B\omega^{1-\beta}(0)}{\tau A\omega^{1-\alpha}(0)}$ و $F^{n+1} = -\frac{\tau(f^{n+1} + f^n)}{2}$ خواهیم داشت:

$$\Delta u^{n+1} - \mu^2 u^{n+1} = \frac{1}{\lambda} (-u^n - \tau AC - \tau BD + F^{n+1}), \quad (۱۶.۸)$$

اگر عبارت سمت راست معادله (۱۶.۸) را به عنوان تابعی مانند $b^n(\mathbf{x})$ با شرط $\tau^\beta < \frac{1}{\rho_1}$ در نظر

بگیریم، معادله (۱۶.۸) به عنوان معادله هلمهلتز تغییر یافته به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$(\Delta - \mu^2)u^{n+1}(\mathbf{x}) = b^n(\mathbf{x}), \quad (۱۷.۸)$$

که

$$b^n(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} (-u^n - \tau AC - \tau BD + F^{n+1}), \quad (۱۸.۸)$$

لازم به توجه است که برای $n = 0$ از معادله (۱۸.۸) و شرط اولیه $u^0 = u(\mathbf{x}, 0) = g_0$ خواهیم داشت:

$$b^0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\lambda} (-g - \tau A\omega^{1-\alpha}(1)\Delta g - \tau B\omega^{1-\beta}(1)g + F^1), \quad (۱۹.۸)$$

جدول ۱.۸: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $\tau = 1/1024$ و $N = 289$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای مثال ۱.۴.۸

(α, β)	t	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
(0.1, 0.3)	0.25	5.8908×10^{-6}	9.5387×10^{-5}
	0.50	2.3655×10^{-5}	9.5378×10^{-5}
	0.75	5.3294×10^{-5}	9.5374×10^{-5}
	1.00	9.4991×10^{-5}	9.5373×10^{-5}
(0.4, 0.8)	0.25	9.4631×10^{-6}	1.2908×10^{-4}
	0.50	2.6309×10^{-5}	1.1099×10^{-4}
	0.75	5.3351×10^{-5}	1.0521×10^{-4}
	1.00	7.6176×10^{-5}	1.0244×10^{-4}

۴.۸ مثال‌های عددی

در این بخش، دقت و کارایی روش، برای معادله کابل کسری دوبعدی روی دامنه‌های نامنظم مختلف بررسی می‌شود. برای این منظور دو نوع خطا ε_∞ و ε_R مورد بررسی قرار می‌گیرد که قبلاً تعریف شده‌اند.

در مثال‌های زیر، از اسپلاین پلی هارمونیک مرتبه دوم یعنی $\phi(r) = r^4 \ln(r)$ به عنوان توابع پایه شعاعی استفاده شده‌است.

مثال ۱.۴.۸. به عنوان اولین مثال، معادله اصلی را برای $\rho_1 = \rho_2 = 1$ روی دامنه مربعی $\Omega_1 = [0, 1]^2$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = ({}_0D_t^{1-\alpha} \Delta u(\mathbf{x}, t)) + ({}_0D_t^{1-\beta} u(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_1 \times (0, 1], \quad (20.8)$$

بادرنظرگرفتن شرط آغازین همگن و شرایط مرزی دیریکله روی مرز $\partial\Omega_1$ جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t^2 \sin \pi x \sin \pi y, \quad (21.8)$$

و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = t^2 \sin \pi x \sin \pi y \left(2t + \frac{2t^{1+\beta}}{\Gamma(2+\beta)} + \frac{4\pi^2 t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \right), \quad (22.8)$$

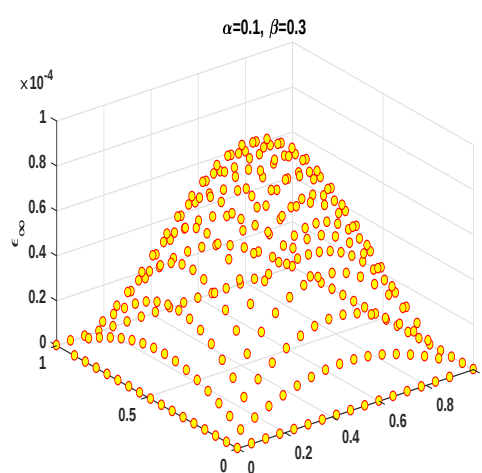
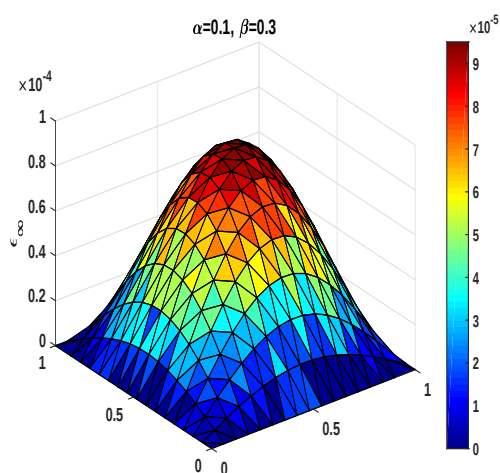
در جدول ۱.۸ دو نوع خطا در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارایه شده می‌باشد. همچنین، در جدول ۲.۸ مقایسه روش مرز منفرد با دیگر روش‌ها در شرایط یکسان ارایه شده است. نمودارهای خطای ماکزیمم این مثال برای $\tau = 1/1024$ و $N = 289$ و $\alpha = 0.1$ و $\beta = 0.3$ در زمان $T = 1$ در شکل ۱.۸ نمایش داده شده است. همچنین، نمودار جواب عددی (راست) و جواب تحلیلی (چپ) در شکل ۲.۸ رسم شده است.

مثال ۲.۴.۸. در این مثال، معادله اصلی را برای $\rho_1 = \rho_2 = 1$ روی دامنه مربعی $\Omega_2 = [0, 1]^2$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

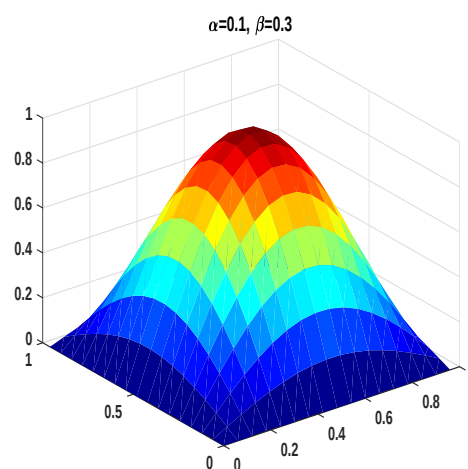
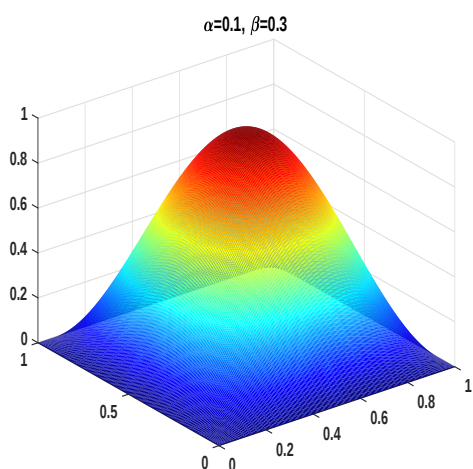
$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = ({}_0D_t^{1-\alpha} \Delta u(\mathbf{x}, t)) + ({}_0D_t^{1-\beta} u(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_2 \times (0, 1], \quad (23.8)$$

جدول ۲.۸: مقایسه خطای $\varepsilon_\infty(u)$ روش با دیگر روش‌ها برای مثال ۱.۴.۸

(α, β)	(N, τ)	روش حاضر	[۱۱۱]	[۱۱۲]
(0.1, 0.3)	(81, 1/64)	2.5809×10^{-4}	3.7521×10^{-3}	9.8494×10^{-3}
	(289, 1/1024)	9.4991×10^{-5}	3.2923×10^{-4}	7.7505×10^{-4}
(0.4, 0.8)	(81, 1/64)	2.4327×10^{-4}	3.2856×10^{-3}	1.6736×10^{-2}
	(289, 1/1024)	7.6176×10^{-5}	6.9360×10^{-4}	1.1455×10^{-3}
(0.2, 0.7)	(81, 1/64)	2.5114×10^{-4}	2.0448×10^{-3}	1.3395×10^{-2}
	(289, 1/1024)	6.0172×10^{-5}	2.3042×10^{-4}	9.9929×10^{-4}
(0.9, 0.5)	(81, 1/64)	2.4317×10^{-4}	4.3211×10^{-3}	1.8294×10^{-2}
	(289, 1/1024)	2.3470×10^{-5}	4.9788×10^{-5}	1.1822×10^{-3}



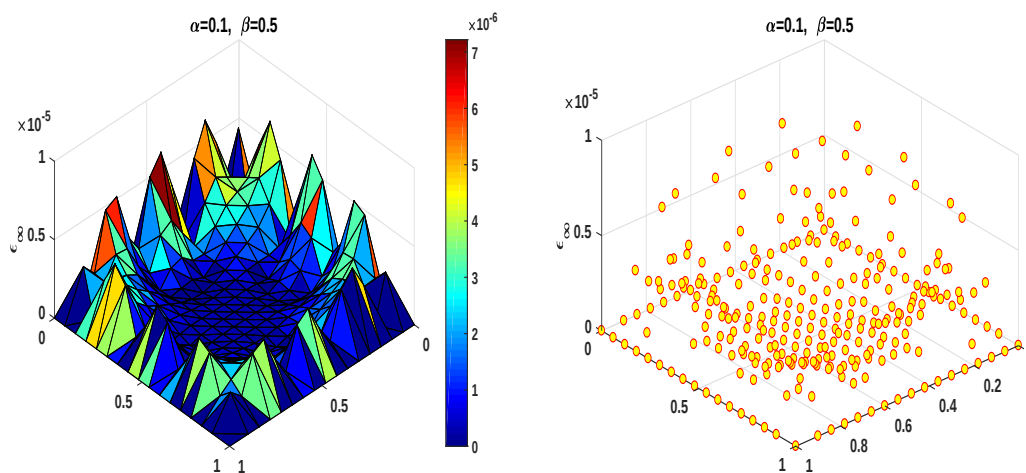
شکل ۱.۸: نمودار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ با $\tau = 1/1024$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.3)$ و $N = 289$ و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۸



شکل ۲.۸: نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 1/1024$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.3)$ و $N = 289$ و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۱.۴.۸

جدول ۳.۸: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $\tau = 1/1024$ و $N = 289$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای مثال ۲.۴.۸

(α, β)	t	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
(0.1, 0.5)	0.25	4.4753×10^{-7}	6.6473×10^{-7}
	0.50	1.7971×10^{-6}	6.6473×10^{-7}
	0.75	4.0489×10^{-6}	6.6472×10^{-7}
	1.00	7.2027×10^{-6}	6.6471×10^{-7}
(0.5, 0.1)	0.25	3.9146×10^{-7}	7.0845×10^{-7}
	0.50	1.5719×10^{-6}	7.0844×10^{-7}
	0.75	3.5415×10^{-6}	7.0844×10^{-7}
	1.00	6.3002×10^{-6}	7.0844×10^{-7}



شکل ۳.۸: نمودار خطای $\varepsilon_\infty(u)$ با $\tau = 1/1024$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.5)$ و $N = 289$ و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۸

بادر نظر گرفتن شرط آغازین همگن و شرایط مرزی دیریکله روی مرز $\partial\Omega_2$ جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t^2 \exp(x + y), \quad (24.8)$$

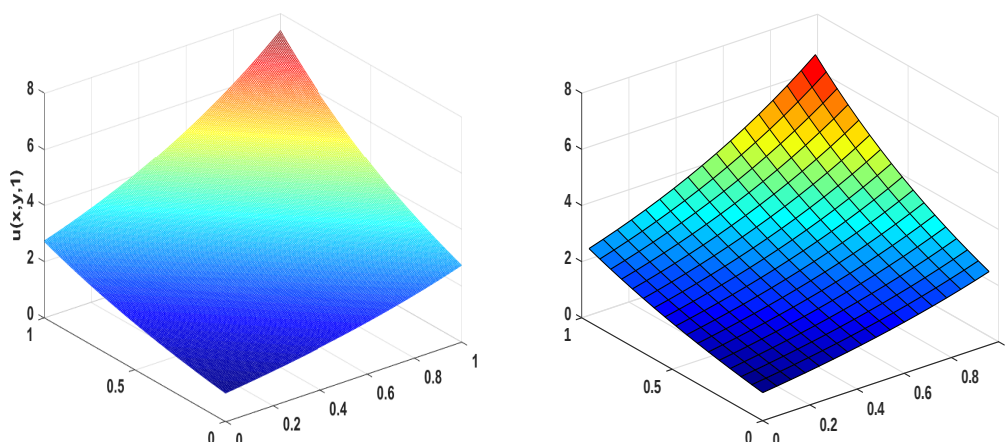
و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = 2t \exp(x + y) \left(1 - \frac{2t^\alpha}{\Gamma(2 + \alpha)} + \frac{t^\beta}{\Gamma(2 + \beta)} \right). \quad (25.8)$$

در جدول ۳.۸ دو نوع خطا در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارائه شده می باشد. نمودارهای خطای ماکزیمم این مثال برای $\tau = 1/1024$ و $N = 289$ و $\alpha = 0.1$ و $\beta = 0.5$ در زمان $T = 1$ در شکل ۳.۸ نمایش داده شده است. همچنین، نمودار جواب عددی (راست) و جواب تحلیلی (چپ) در شکل ۴.۸ رسم شده است.

مثال ۳.۴.۸. در این مثال، معادله اصلی را برای $\rho_1 = \rho_2 = 1$ روی دامنه نامنظم

$$\Omega_3 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r = 1 + 1.2 \cos(\theta) \sin^2(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$



شکل ۴.۸: نمودار جواب عددی (راست) با $\tau = 1/1024$ ، $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.5)$ و $N = 289$ و نمودار جواب تحلیلی (چپ) در زمان $T = 1$ برای مثال ۲.۴.۸

جدول ۴.۸: خطاهای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(u)$ با $N = 484$ ، $\tau = 0.01$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای مثال ۳.۴.۸

(α, β)	t	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
(0.35, 0.65)	0.25	2.9125×10^{-5}	7.9312×10^{-5}
	0.50	1.2156×10^{-4}	7.9437×10^{-5}
	0.75	2.7776×10^{-4}	7.9619×10^{-5}
	1.00	4.9846×10^{-4}	7.9882×10^{-5}
(0.15, 0.55)	0.25	1.2433×10^{-3}	1.6432×10^{-3}
	0.50	4.1838×10^{-3}	1.6433×10^{-3}
	0.75	8.4338×10^{-3}	1.6436×10^{-3}
	1.00	1.3837×10^{-2}	1.6442×10^{-3}

به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = ({}_0D_t^{1-\alpha} \Delta u(\mathbf{x}, t)) + ({}_0D_t^{1-\beta} u(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_3 \times (0, 1], \quad (26.8)$$

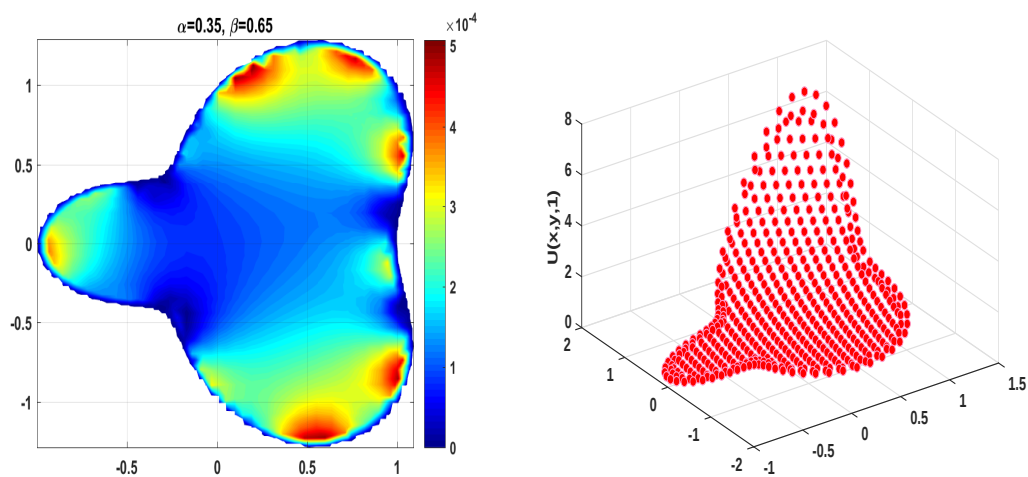
بدر نظر گرفتن شرط آغازین همگن و شرایط مرزی دیریکله روی مرز $\partial\Omega_3$ جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t^2 \sin \pi x \sin \pi y$$

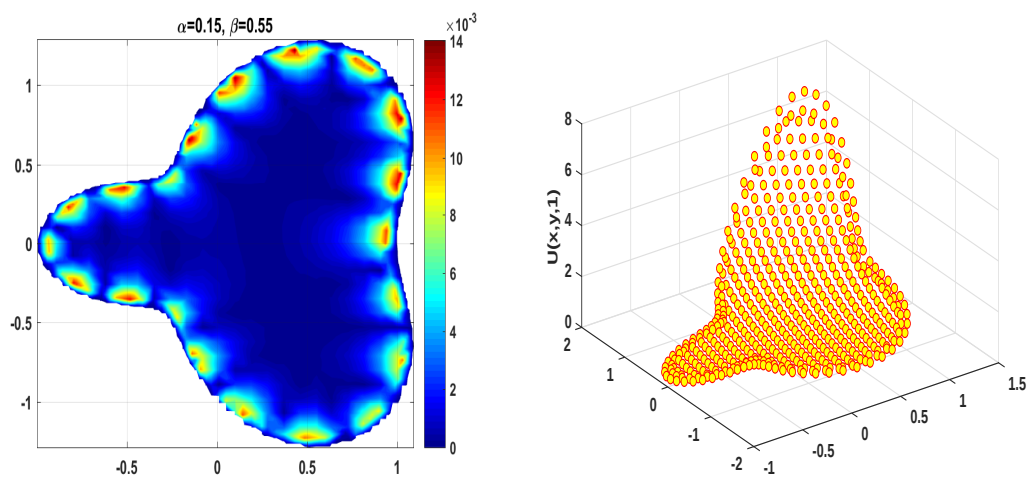
و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = t^2 \sin \pi x \sin \pi y \left(2t + \frac{2t^{1+\beta}}{\Gamma(2+\beta)} + \frac{4\pi^2 t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \right),$$

در جدول ۴.۸ دو نوع خطا در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارایه شده می باشد. نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای ماکزیمم (چپ) برای $\tau = 0.01$ و $N = 484$ و در زمان $T = 1$ و دو مقدار متفاوت (α, β) در شکل ۵.۸ و شکل ۶.۸ رسم شده است.



شکل ۵.۸: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 484$ و $(\alpha, \beta) = (0.35, 0.65)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۸



شکل ۶.۸: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 484$ و $(\alpha, \beta) = (0.15, 0.55)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۳.۴.۸

جدول ۵.۸: خطاهای $\varepsilon_\infty(u)$ و $\varepsilon_R(u)$ با $N = 418$, $\tau = 0.01$ و مقادیر (α, β) در زمان t برای مثال ۴.۴.۸

(α, β)	t	$\varepsilon_\infty(u)$	$\varepsilon_R(u)$
(0.1, 0.5)	0.25	4.2682×10^{-5}	8.0954×10^{-5}
	0.50	1.3371×10^{-4}	8.0946×10^{-5}
	0.75	2.5860×10^{-4}	8.0947×10^{-5}
	1.00	4.1202×10^{-4}	8.0955×10^{-5}
(0.4, 0.8)	0.25	4.5621×10^{-5}	1.6199×10^{-4}
	0.50	2.1941×10^{-4}	1.6206×10^{-4}
	0.75	5.4356×10^{-4}	1.6212×10^{-4}
	1.00	1.0315×10^{-3}	1.6220×10^{-4}

مثال ۴.۴.۸. در این مثال، معادله اصلی را برای $\rho_1 = \rho_2 = 1$ روی دامنه نامنظم $\Omega_4 = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) : r = 1 - 1/8 \cos(8\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = ({}_0D_t^{1-\alpha} \Delta u(\mathbf{x}, t)) + ({}_0D_t^{1-\beta} u(\mathbf{x}, t)) + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega_4 \times (0, 1], \quad (27.8)$$

بدر نظر گرفتن شرط آغازین همگن و شرایط مرزی دیریکله روی مرز $\partial\Omega_4$ جواب تحلیلی معادله عبارتست از:

$$u(x, y, t) = t^2 \sin \pi x \sin \pi y$$

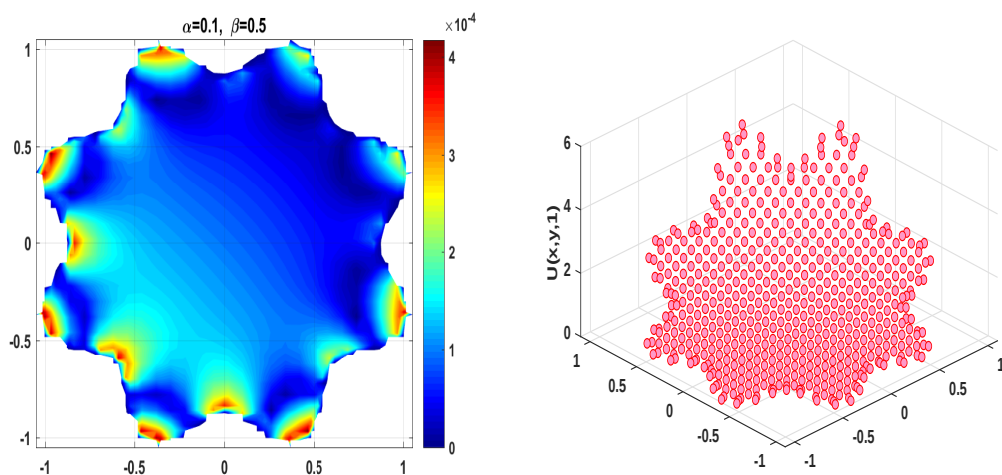
و تابع منبع به صورت زیر است:

$$f(x, y, t) = t^2 \sin \pi x \sin \pi y \left(2t + \frac{2t^{1+\beta}}{\Gamma(2+\beta)} + \frac{4\pi^2 t^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} \right),$$

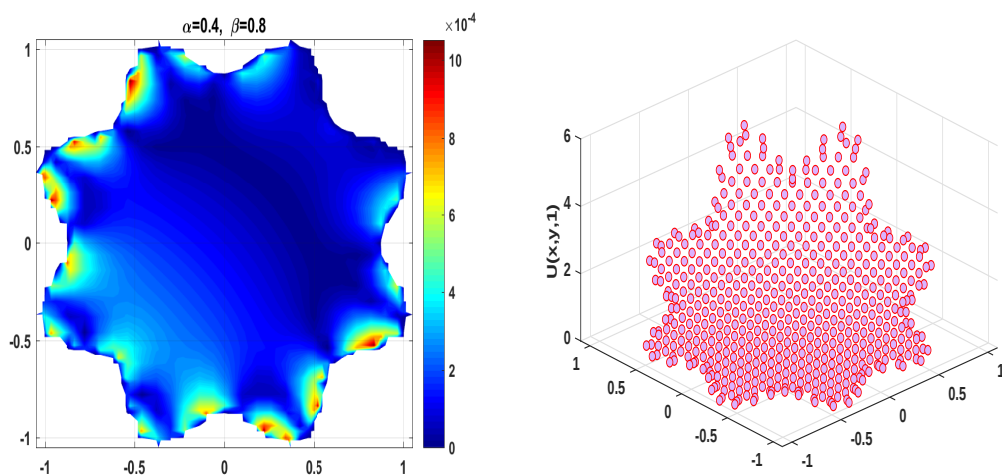
در جدول ۵.۸ دو نوع خطا در زمانهای مختلف تا رسیدن به زمان $T = 1$ گزارش شده است که نشان دهنده کارایی و پایداری روش ارایه شده می باشد. نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطای ماکزیمم (چپ) برای $\tau = 0.01$ و $N = 418$ و در زمان $T = 1$ و دو مقدار متفاوت (α, β) در شکل ۷.۸ و شکل ۸.۸ رسم شده است.

۵.۸ نتیجه گیری

در این فصل ترکیب روش مرز منفرد با روش جواب خصوصی را برای حل معادله کابل کسری دو بعدی روی دامنه‌های مختلف استفاده کردیم. با توجه به وجود جمله غیرخطی، در مواجهه با این مشکل، از الگوریتم پیشگو-اصلاحگر استفاده شده است. براساس مثال‌های عددی، مشخص شد که نتایج حاصل از روش ارایه شده با جواب دقیق مساله‌ها سازگاری خوبی دارند و کارایی روش مورد تایید است، همچنین نتایج با روش‌های دیگر مقایسه شده است که نشان دهنده برتری روش ارایه شده است. آنالیز همگرایی و پایداری ارایه شده است. همچنین با توجه به استفاده از توابع پایه ای شعاعی می توان از این روش روی مسایل با بعد بالا و دامنه به شکل های مختلف استفاده کرد.



شکل ۷.۸: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 418$ و $(\alpha, \beta) = (0.1, 0.5)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۸



شکل ۸.۸: نمودار جواب عددی (راست) و نمودار کانتور خطا (چپ) با $\tau = 0.01$ ، $N = 418$ و $(\alpha, \beta) = (0.4, 0.8)$ در زمان $T = 1$ برای مثال ۴.۴.۸

فصل ۹

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

نتیجه‌گیری

در این رساله، هدف اصلی پژوهش، استفاده از جواب‌های اساسی عملگرهای دیفرانسیل برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی بوده است. روش مورد استفاده در این رساله، یک روش بدون شبکه مرزی، به نام روش مرزمنفرد بود که به‌طور مستقیم می‌توان برای معادلات همگن مورد استفاده قرارداد. برای معادلات غیرهمگن، ترکیبی از این روش و روش جواب خصوصی به‌کارگرفته شده است. نتایج حاصل از روش ارایه‌شده، با روش‌های عددی دیگر مقایسه شده است که این مقایسه نشان از کارایی روش حاضر داشته است. از نتایج بارز این رساله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. حل عددی معادله لاپلاس دوبعدی به عنوان یک معادله همگن، روی دامنه‌های گوناگون با استفاده مستقیم از روش مرزمنفرد.

۲. کارآمدی روش ارایه شده برای حل عددی معادله تلگراف دوبعدی به عنوان یک معادله غیرهمگن، روی دامنه‌های گوناگون.

۳. بررسی روش ارایه شده برای حل عددی معادله شبه-سهموی (معادله سوبولف) روی دامنه‌های گوناگون با آنالیز همگرایی و پایداری و مقایسه نتایج با روش‌های دیگر.

۴. استفاده از روش ارایه شده برای حل عددی معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز روی دامنه‌های گوناگون با آنالیز همگرایی و پایداری و مقایسه نتایج با روش‌های دیگر.

۵. بررسی روش ارایه شده برای حل عددی معادله کلی انتشار ناهمگون کسری روی دامنه‌های گوناگون، ارایه آنالیز پایداری و همگرایی و مقایسه نتایج با روش‌های عددی دیگر.

۶. کارایی روش ارایه شده برای حل عددی معادله کابل کسری در حالت مشتق کسری ریمان-لیوویل روی دامنه‌های گوناگون و مقایسه نتایج با روش‌های دیگر.

پیشنهاده‌ها

برای دانشجویان و پژوهشگرانی که علاقه به کار در این زمینه دارند برخی از پیشنهادها به صورت زیر ارائه می‌شود:

۱. یافتن روش‌های دیگر برای محاسبه عامل‌های OIF در روش مرزمنفرد.
۲. استفاده از روش مرزمنفرد مطرح شده در رساله برای انواع دیگری از معادلات، از جمله معادله‌های کسری، معادله‌های انتگرالی، معادله‌های معکوس، معادله‌های انتگرو-دیفرانسیل و معادله‌ها در بعدهای بالاتر.
۳. همان طور که می‌دانیم روش‌های بدون شبکه بر سه گام اساسی تولید نقاط، تقریب جواب و آزمودن استوار می‌باشند که روش‌های متفاوت تقریب جواب و آزمودن، منجر به روش‌های بدون شبکه متفاوتی می‌شوند. استفاده از ایده‌های مطرح شده در این سه گام برای افزایش کارآمدی روش ترکیبی مرز منفرد با توابع پایه ای شعاعی.
۴. ترکیب روش مرزمنفرد با روش‌های دیگر.

مراجع

- [1] G.D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations : Finite Difference Methods, Oxford University Press, 1978.
- [2] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.
- [3] J.L. Lions and E. Magenes, Non-homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Volume 1. Springer-Verlag, 1972.
- [4] K. Atkinson , W. Han, Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework Texts in Applied Mathematics, Springer, 2000.
- [5] M. Caputo, The Green function of the diffusion of fluids in porous media with memory, Rend. Fis. Acc. Lincei (Ser. 9) 7 (1996), 243-250.
- [6] M. Caputo, Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent-II, Geophys. J.R.Astr.Soc.13(1967) 529-539.
- [7] C.A. Brebbia, J.C.F. Telles, L. Wrobel, Boundary Element techniques: Theory and Applications in Engineering, Springer Science and Business Media, 2012.
- [8] A.H.D. Cheng, D.T. Cheng, Heritage and early history of the boundary element method, Eng. Anal. Bound. Elem. 29 (2005) 268-302.
- [9] E. Shivanian, S. Abbasbandy, M. Alhuthali, H. Alsulami, Local integration of 2-D fractional telegraph equation via moving least squares approximation, Eng. Anal. Bound. Elem. 56 (2015) 98-105.
- [10] C.Y. Lin, M.H. Gu, D.L. Young, The Time-Marching Method of Fundamental Solutions for Multi-Dimensional Telegraph Equations, CMC: Computers, Materials and Continua, 18 (2010) 43-68.
- [11] S. Abbasbandy, H.R. Ghehsareh, I. Hashim, A. Alsaedi, A comparison study of meshfree techniques for solving the two-dimensional linear hyperbolic telegraph equation, Eng. Anal. Bound. Elem. 47 (2014) 10-20
- [12] G. Amiraliyev, Y. D. Mamedov, Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseudo-parabolic equations, Turkish J Math 19 (1995) 207-222.
- [13] G.I. Barenblatt, V.M. Entov, V.M. Ryzhik, Theory of fluid flows through natural rocks, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht ; Boston, 1990.
- [14] R.E. Ewing, Numerical solution of sobolev partial differential equations, SIAM Journal on Numerical Analysis 12 (3) (1975) 345-363.
- [15] D.N. Arnold, J. Douglas, V. Thom ´ee, Superconvergence of a finite element approximation to the solution of a sobolev equation in a single space variable, Mathematics of computation 36 (153) (1981) 53-63.
- [16] T. Liu, Y. Lin, M. Rao, J. Cannon, Finite element methods for sobolev equations, Journal of Mathematics-International Edition, 20 (6) (2002) 627-642.



- [17] M. Yang, Analysis of second order finite volume element methods for pseudo-parabolic equations in three spatial dimensions, *Appl. Math. Comput.* 196 (1) (2008) 94-104.
- [18] Q. Lin, S. Zhang, A direct global superconvergence analysis for sobolev and viscoelasticity type equations, *Applications of Mathematics* 42 (1) (1997) 23-34.
- [19] A. Quarteroni, Fourier spectral methods for pseudoparabolic equations, *SIAM journal on numerical analysis* 24 (2) (1987) 323-335.
- [20] T. Sun, D. Yang, The finite difference streamline diffusion methods for sobolev equations with convection-dominated term, *Appl. Math. Comput.* 125 (2) (2002) 325-345.
- [21] E. Shivanian, A. Jafarabadi, Error and stability analysis of numerical solution for the time fractional nonlinear Schrödinger equation on scattered data of general-shaped domains. *Numer. Methods for Partial Differential Eq.*, 33(4) (2017), 1043-1069.
- [22] E. Shivanian, Local radial basis function interpolation method to simulate 2D fractional-time convection-diffusion-reaction equations with error analysis. *Numer. Methods for Partial Differential Eq.*, 33(3) (2017), 974-994.
- [23] E. Kansa, Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. I. surface approximations and partial derivative estimates, *Comput. Math. Appl.* 19(8-9) (1990) 127-145.
- [24] R. Pan, V. Skala, A two-level approach to implicit surface modeling with compactly supported radial basis functions, *Engineering with Computers* 27(3) (2011) 299-307.
- [25] M. Dehghan, A. Shokri, Numerical solution of the nonlinear klein-gordon equation using radial basis functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 230(2) (2009) 400-410.
- [26] M. Aslefallah, E. Shivanian, Nonlinear fractional integro-differential reaction-diffusion equation via radial basis functions, *Eur. Phys. J. Plus* 130:47 (2015) 1-9.
- [27] E. Shivanian, A meshless method based on radial basis and spline interpolation for 2-D and 3-D inhomogeneous biharmonic BVPs, *Zeitschrift fur Naturforschung A* 70 (8) (2015) 673-682.
- [28] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *Int.J. Numer. Methods Eng.* 37(2) (1994) 229-256.
- [29] M. Dehghan, A. Ghesmati, Combination of meshless local weak and strong (mlws) forms to solve the two dimensional hyperbolic telegraph equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 34 (4) (2010) 324-336.
- [30] E. Shivanian, M. Aslefallah, Stability and convergence of spectral radial point interpolation method locally applied on two-dimensional pseudoparabolic equation, *Numer. Methods Partial Differential Eq.*, 33(3) (2017) 724-741.
- [31] L. Marin, D. Lesnic, The method of fundamental solutions for the Cauchy problem associated with two-dimensional Helmholtz-type equations. *Comput Struct* 83 (2005), 267-278.
- [32] L. Marin, An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation. *Comput Mech*, 45 (2010).
- [33] J. Lin, S.Y. Reutskiy, An accurate meshless formulation for the simulation of linear and fully nonlinear advection diffusion reaction problems, *Advances in Engineering Software* 126 (2018): 127-146.



- [34] J. Lin, S.Y. Reutskiy, Jun Lu, A novel meshless method for fully nonlinear advection–diffusion–reaction problems to model transfer in anisotropic media, *Appl. Math. Comput.*, 339, (2018), 459-476,
- [35] J. Lin, C.S. Chen, Chein-Shan Liu, Jun Lu, Fast simulation of multi-dimensional wave problems by the sparse scheme of the method of fundamental solutions, *Computers and Mathematics with Applications*, 72(3), (2016), 555-567,
- [36] W. Chen, J.Y. Zhang, Z.J. Fu, Singular boundary method for modified Helmholtz equations. *Eng Anal Bound Elem*, 44 (2014) 112-119.
- [37] A. Poulikkas, A. Karageorghis, G. Georgiou, The method of fundamental solutions for three-dimensional elastostatics problems. *Comput Struct*, (2002);80:365-370.
- [38] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi, The use of interpolating element-free galerkin technique for solving 2d generalized benjamin-bona-mahony-burgers and regularized long-wave equations on non-rectangular domains with error estimate. *J. Comput Appl Math* 286 (2015) 211-231.
- [39] E. Shivanian, A. Jafarabadi, More accurate results for nonlinear generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (GBMB) problem through spectral meshless radial point interpolation (SMRPI), *Eng. Anal. Bound. Elem.* 72 (2016) 42-54
- [40] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi, The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation via the meshless method of radial basis functions, *Comput. Math. Appl.* 68 (2014) 212–237.
- [41] M. Hajiketabi, S. Abbasbandy, F. Casas, The Lie-group method based on radial basis functions for solving nonlinear high dimensional generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation in arbitrary domains, *Appl. Math. Comput.* 321 (2018) 223-243.
- [42] Z.Z. Ganji, D.D. Ganji, H. Bararnia, Approximate general and explicit solutions of nonlinear BBMB equations by exp-function method, *Appl. Math. Model.* 33 (2009) 1836-1841.
- [43] M.A. Noor, K.I. Noor, A. Waheed, E.A. Al-Said, Some new solitary solutions of the modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Comput. Math. Appl.* 62 (2011) 2126-2131.
- [44] C.A. Gómez, A.H. Salas, B.A. Frias, New periodic and soliton solutions for the generalized BBM and BBM–Burgers equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010) 1430-1434.
- [45] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, The first integral method for modified Benjamin-Bona-Mahony equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15 (2010) 1759-1764
- [46] C. A. Gomez, A. H. Salas, B. A. Frias, New periodic and soliton solutions for the generalized BBM and BBM-Burgers equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010) 1430-1434.
- [47] Q. Xiao, H. Zhao, Nonlinear stability of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers shock profiles in several dimensions, *J. Math. Anal. Appl.* 406 (2013) 165-187.
- [48] H. Yin, J. Hu, Exponential decay rate of solutions toward traveling waves for the Cauchy problem of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Nonlinear Analysis* 73 (2010) 1729–1738.
- [49] M. A. Noor, K. I. Noor, A. Waheed, E. A. Al-Said, Some new solitary solutions of the modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Comput. Math. Appl.* 62 (2011) 2126–2131.



- [50] X. Qinghua, C. Z. Zheng, Degenerate boundary layer solutions to the generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *Acta Math. Scientia* 32 (2012) 1743-1758.
- [51] T. Achouri, N. Khiari, K. Omrani, On the convergence of difference schemes for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation, *Appl. Math. Comput.* 182 (2006) 999-1005.
- [52] K. Omrani, The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin-Bona-Mahony (BBM) equation, *Appl. Math. Comput.* 180 (2006) 614-621.
- [53] A. Mekki, M.M. Ali, Numerical simulation of Kadomtsev-Petviashvili-Benjamin-Bona-Mahony equations using finite difference method, *Appl. Math. Comput.* 219, (2013) 11214-11222.
- [54] W. Chen, Singular boundary method: a novel, simple, mesh-free, boundary collocation numerical method, *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 30,6,(2009) 592-599.
- [55] J. P. Li, W. Chen, Z.J. Fu, L L. Sun, Explicit empirical formula evaluating original intensity factors of singular boundary method for potential and Helmholtz problems, *Eng. Anal. Bound Elem.* 73 (2016), 161-169.
- [56] J.P. Li, W. Chen, Z.J. Fu, Numerical investigation on convergence rate of singular boundary method, *Math. Probl. Eng.* (2016), 1-13.
- [57] J. Lin, W. Chen, C.S. Chen, Numerical treatment of acoustic problems with boundary singularities by the singular boundary method, *Journal of Sound and Vibration*, 333,(14), (2014), 3177-3188.
- [58] W. Chen, Z. Fu and X. Wei, Potential Problems by Singular Boundary Method Satisfying Moment Condition. *CMES* (2009), 54, (1), 65-85.
- [59] W.Z. Qu, W. Chen, Y. Gu, Fast multipole accelerated singular boundary method for the 3D Helmholtz equation in low frequency regime, *Comput. Math. Appl.* 70 (2015), 679-690.
- [60] Ji Lin , C. Zhang , L. Sun and J. Lu, Simulation of seismic wave scattering by embedded cavities in an elastic half-plane using the novel singular boundary method, *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 10 (2) (2018), 322-342.
- [61] F. Wang, W. Chen, C. Zhang, J. Lin, Analytical evaluation of the origin intensity factor of time-dependent diffusion fundamental solution for a matrix-free singular boundary method formulation, *Appl. Math. Modell.* (2017).
- [62] W. Chen, M. Tanaka, A meshless, integration-free, and boundary-only RBF technique. *Comput Math Appl* 43(2002) 379-391.
- [63] D.L. Young, K.H. Chen, C.W. Lee, Novel meshless method for solving the potential problems with arbitrary domain, *J. Comput. Phys.* (2005) 209.
- [64] B. Sarler, Solution of potential flow problems by the modified method of fundamental solutions: formulations with the single layer and the double layer fundamental solutions. *Eng Anal Bound Elem* (2009);33
- [65] Y.J. Liu, A new boundary meshfree method with distributed sources. *Eng Anal Bound Elem* (2010);34.
- [66] Y. Gu, W. Chen, C.Z. Zhang, Singular boundary method for solving plane strain elastostatic problems. *Int J Solids Struct* (2011);48.
- [67] Y. Gu, W. Chen, X.Q. He, Singular boundary method for steady-state heat conduction in three dimensional general anisotropic media. *Int J Heat Mass Transfer* (2012).



- [68] Y. Gu, W. Chen, Infinite domain potential problems by a new formulation of singular boundary method. *Appl Math Model* 37 (2013) 1638-1651.
- [69] Y. Gu, W. Chen, J. Zhang, Investigation on near-boundary solutions by singular boundary method. *Eng Anal Bound Elem.* 36 (2012) 1173-1182.
- [70] R. Schumer, D.A. Benson, M.M. Meerschaert, S.W. Wheatcraft, Eulerian derivation of the fractional advection-dispersion equation, *Journal of Contaminant Hydrology.* 48, (69) (2001).
- [71] R. Gorenflo, F. Mainardi, E. Scalas, M. Raberto, Fractional calculus and continuous time finance, III. The diffusion limit, *Mathematical finance (Konstanz, 2000)*, Trends in Mathematics, (2001).
- [72] L. Sabatelli, S. Keating, J. Dudley, P. Richmond, Waiting time distributions in financial markets, *Eur. Phys. J. B.* 27 , 273 (2002).
- [73] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, A meshless method for two-dimensional diffusion equation with an integral condition, *Eng. Anal. Boundary. Elem.* 34(12) (2010) 1031-1037.
- [74] S. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Comput. Mech.* 22 (1998) 117-127.
- [75] E. Shivanian, Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for three-dimensional nonlinear wave equations via moving least squares approximation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 50 (2015) 249-257.
- [76] J.M. Melenk, I. Babuska, The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 139, 289 (1996).
- [77] M. Aslefallah, E. Shivanian, An efficient meshless method based on RBFs for the time fractional diffusion-wave equation, *Afrika Matematika* 29 (7-8), (2018), 1203-1214
- [78] E. Shivanian, M. Aslefallah, Numerical solution of two-dimensional hyperbolic equations with nonlocal integral conditions using radial basis functions, *International Journal of Industrial Mathematics* 11 (1), (2019), 25-34
- [79] G.R. Liu, *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*, CRC Press (2003).
- [80] E. Shivanian, Analysis of meshless local and spectral meshless radial point interpolation (mlrpi and smrpi) on 3-d nonlinear wave equations. *Ocean Eng* 89 (2014) 173-188.
- [81] P.K. Banerjee, *The boundary element methods in engineering*. Europe: McGRAW-HILL Book Company; 1994.
- [82] L. Marin, Regularized method of fundamental solutions for boundary identification in two-dimensional isotropic linear elasticity. *Int J Solids Struct* 47 (2010).
- [83] Z.C. Li, M.G. Lee, J.Y. Chiang, Y.P. Liu, The Trefftz method using fundamental solutions for biharmonic equations. *J Comput Appl Math* (2011).
- [84] A. Karageorghis, D. Lesnic, L. Marin, A survey of applications of the MFS to inverse problems. *Inverse Probl Sci Eng* 19 (2011).
- [85] W.Y. Tian, H. Zhou, W.H. Deng, A class of second order difference approximations for solving space fractional diffusion equations. *Math Comput* 84 (2015) 1703-1727.
- [86] Z.B. Wang, S.W. Vong, Compact difference schemes for the modified anomalous fractional sub-diffusion equation and the fractional diffusion-wave equation. *J Comput Phys* 277 (2014) 1-15.



- [87] C. S. Chen, C. M. Fan, and P. H. Wen, The method of approximate particular solutions for solving elliptic problems with variable coefficients, *International Journal of Computational Methods*, 8 (2011) 545-559.
- [88] A.S. Muleshkov, M.A. Golberg, and C.S. Chen, Particular solutions of Helmholtz-type operators using higher order polyharmonic splines, *Computational Mechanics*, 24 (1999) 411-419.
- [89] P.A. Ramachandran, K. Balakrishnan, Radial basis functions as approximate particular solutions: review of recent progress, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 24 (2000) 575-582.
- [90] H. Roohani Ghehsareh, M. Raei, A Zaghian, Numerical simulation of a modified anomalous diffusion process with nonlinear source term by a local weak form meshless method, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 98 (2019) 64-76
- [91] M. Abbaszadeh, A. Mohebbi, A fourth-order compact solution of the two-dimensional modified anomalous fractional sub-diffusion equation with a nonlinear source term, *Computers and Mathematics with Applications*, 66 (2013) 1345-1359
- [92] L.B. Lucy, A numerical approach to the testing of fusion process, *Astron. J.* 88 (1977) 1013-1024.
- [93] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Comput. Mech.* 10 (1992) 307-318.
- [94] G.E. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishers, Singapore, 2007.
- [95] P.W. Partridge, B. Sensale, The method of fundamental solutions with dual reciprocity for diffusion and diffusion-convection using subdomains. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 24 (2000) 633-641 .
- [96] J. Lin , C. Chen , C.-S. Liu , J. Lu , Fast simulation of multi-dimensional wave problems by the sparse scheme of the method of fundamental solutions, *Comput. Math. Appl.* 72 (2016) 555-567 .
- [97] Y.X. Mukherjee, S. Mukherjee, The boundary node method for potential problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 40 (1997) 797-815.
- [98] C.A. Brebbia , J.C.F. Telles , L. Wrobel , *Boundary Element techniques: Theory and Applications in Engineering*, Springer Science and Business Media, (2012).
- [99] A.H.-D. Cheng , D.T. Cheng , Heritage and early history of the boundary element method, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 29 (2005) 268-302 .
- [100] J.T. Katsikadelis, The BEM for numerical solution of partial fractional differential equations. *Comput Math Appl* 62(3) (2011) 891-901 .
- [101] W. Chen, Z-J Fu, C.S. Chen, Recent advances on radial basis function collocation methods. Berlin: Springer; 2013 .
- [102] W. Chen, Y. Gu, An improved formulation of singular boundary method. *Adv Appl Math Mech* 4(5) (2012) 543-58
- [103] W. Chen, J.Y. Zhang, Z.J. Fu, Singular boundary method for modified Helmholtz equations. *Eng Anal Bound Elem* (2014);44 .
- [104] W. Chen, F. Wang, Singular boundary method using time-dependent fundamental solution for transient diffusion problems. *Eng Anal Bound Elem* 68 (2016).
- [105] Z-J Fu, W. Chen, Y. Gu, Burton-Miller-type singular boundary method for acoustic radiation and scattering. *J Sound Vib* 333(16) (2014) 3776-3793



- [106] Z-J Fu, W. Chen, H-T Yang, Boundary particle method for Laplace transformed time fractional diffusion equations. *J Comput Phys* 235 (2013) 52–66.
- [107] Y. Gu, W. Chen, X. He, Improved singular boundary method for elasticity problems, *Comput Struct* 135 (2014) 73–82.
- [108] F. Wang , W. Chen, Accurate empirical formulas for the evaluation of origin intensity factor in singular boundary method using time-dependent diffusion fundamental solution, *Int. J. Heat Mass Transf.* 103 (2016) 360–369 .
- [109] Z.Z. Sun, D. Zhao, On the l1 convergence of a difference scheme for the coupled schrödinger equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010) 3286–3330.
- [110] W. Cao, Z.Z. Sun, Maximum norm error estimates of the Cranck–Nicolson scheme for solving a linear moving boundary problem, *J. Comput. Appl. Math.* 234 (2010) 2578–2586
- [111] E. Shivanian, A. Jafarabadi, An improved meshless algorithm for a kind of fractional cable problem with error estimate, *Chaos, Solitons and Fractals* 110 (2018) 138–151.
- [112] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, Analysis of the element free Galerkin (EFG) method for solving fractional cable equation with Dirichlet boundary condition, *Appl Numer Math* 109 (2016), 208–34.
- [113] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, I. Hashim, A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear Schrodinger equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 37, (2013) 885–898.
- [114] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, I. Hashim, Numerical analysis of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis using a meshfree method based on the radial basis function, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 36 (2012) 1811–1818.
- [115] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, M. Alhuthali, H. Alsulami, Comparison of meshless local weak and strong forms based on particular solutions for a non-classical 2-D diffusion model, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 39 (2014) 121–128.
- [116] A. Shirzadi, L. Ling, S. Abbasbandy, Meshless simulations of the two-dimensional fractional-time convection-diffusion-reaction equations, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 36 (2012) 1522–1527.
- [117] P-H. Zhuang, Q-X. Liu, Numerical method of Rayleigh-Stokes problem for heated generalized second grade fluid with fractional derivative, *Appl. Math. Mech. Engl. Ed.* 30(12) (2009), 1533–1546.
- [118] Y. Lin, X. Li, C. Xu, Finite difference/spectral approximations for the fractional cable equation, *Mathematics of Computation*, 80, 275, (2011), 1369–1396
- [119] E. Shivanian, A. Jafarabadi, Time fractional modified anomalous sub-diffusion equation with a nonlinear source term through locally applied meshless radial point interpolation, *Modern Physics Letters B* 32 (22) (2018).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Initial	آغازین-اولیه
Fundamental	اساسی
Horizontal	افقی
Diffusion	انتشار
Meshless	بدون شبکه
Upper	بالایی
Expansion	بسط
Lower	پایینی
Stability	پایداری
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Polynomial	چندجمله ای
Multiple	چندگانه
Particular	خصوصی
Error	خطا
Interpolation	درونیابی
Accuracy	دقت
Exact	دقیق
Arbitrary	دلخواه
Condition	شرط
Radial	شعاعی
Coefficient	ضریب
Implicitly	ضمنی
Scheme	طرح
Operator	عملگر

Nonlinear	غیر خطی
Efficiency	کارایی
Bounded	کراندار
Fractional	کسری
Discretization	گسسته سازی
High-order	مرتبه بالا
Boundary	مرزی
Valid	معتبر
Singular	منفرد
Irregular	نامنظم
Nonhomogeneous	ناهمگن
Existence	وجود
Connected	همبند
Convergence	همگرایی
Homogeneous	همگن

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accuracy	دقت
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Arbitrary	دلخواه
Boundary	مرزی
Bounded	کراندار
Coefficient	ضریب
Condition	شرط
Connected	همبند
Convergence	همگرایی
Diffusion	انتشار
Discretization	گسسته سازی
Efficiency	کارایی
Error	خطا
Exact	دقیق
Existence	وجود
Expansion	بسط
Fractional	کسری
Fundamental	اساسی
High-order	مرتبه بالا
Homogeneous	همگن
Implicitly	ضمنی
Initial	آغازین-اولیه
Interpolation	درونیابی
Irregular	نامنظم

Linear	خطی
Lower	پایینی
Meshless	بدون شبکه
Multiple	چندگانه
Operator	عملگر
Nonhomogeneous	ناهمگن
Nonlinear	غیرخطی
Particular	خصوصی
Polynomial	چندجمله‌ای
Radial	شعاعی
Scheme	طرح
Singular	منفرد
Stability	پایداری
Symmetric	متقارن
Upper	بالایی
Valid	معتبر

Surname: Aslefallah

Name: Mohammad

Title: Meshless methods based on fundamental solutions and their applications to differential equations

Supervisors: Prof. Saeid Abbasbandy and Prof. Davood Rostamy

Advisor: Dr. Elyas Shivanian

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University

Faculty of Basic Sciences

Department of Mathematics

Date: November 2019

Number of pages: 114

Keywords: Singular boundary method; Fundamental solution; Method of particular solution; Radial basis functions; Fractional calculus.

Abstract

In this dissertation, a boundary meshless method, called the single boundary method, is used to solve the differential equations. This method, which is based on the fundamental solution of the differential operator, can be directly applied to the homogeneous equations. For inhomogeneous equations, a combination of this method and the method of particular solution is used. Having a particular solution that does not necessarily apply to boundary conditions can be transformed into a homogeneous equation with modified boundary conditions. For this case, the particular solution is obtained by radial basis functions. After finding the private solution, the homogeneous equation is solved by the single boundary method. We use the proposed method to numerically simulate the equations and show that the numerical results are consistent with the analytical results. The Laplace equation as homogeneous equation and other equations as inhomogeneous equations are solved numerically. The two-dimensional telegraph equation, the pseudo-parabolic equation and the Benjamin-Bona equation are solved by the proposed method and the numerical solutions are compared with other methods. Convergence and stability analysis have also been described for some of these equations. To implement the method presented on the fractional derivative space, the fractional diffusion equation and the fractional cable equation is discussed and after numerical solution, the results are compared with analytical and other methods. Finally, conclusions and suggestions are presented.

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

Imam Khomeini International University
Faculty of Basic Sciences
Department of Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

Meshless methods based on fundamental solutions and their applications to differential equations

Supervisors

Prof. Saeid Abbasbandy and Prof. Davood Rostamy

Advisor

Dr. Elyas Shivanian

by

Mohammad Aslefallah

November 2019