





معاونت پژوهش و فن آوری به نام خدا مشور اخلاق پژوهش

یاباری از خداوند سبحان و اعتقاد به اینکه عالم محضر خداست و بهواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اہمیت جایگاه دانشگاه در ارتقای فرهنگ و تمدن بشری، مآد انجمن و اعطاء بیات علمی واحد های دانشگاه

آزاد اسلامی متعدد می گردیم، اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

- ۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از حرکت پنهان سازی حقیقت.
- ۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
- ۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بکاران پژوهش.
- ۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن چه بر دو تومنه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
- ۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از حرکت جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
- ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهاد های مرتبط با تحقیق.
- ۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از حرکت حرمت شکنی.
- ۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشناء نتایج تحقیقات و انتقال آن به بکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
- ۹- اصل برکت: التزام به برکت جویی از حرکت رفقار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به مثابه های غیر علمی می آلائند.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات تهران

تعهدنامه اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب حسین صبحی دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی که در تاریخ ۱۳۹۸/۶/۱۲ از رساله خود تحت عنوان
روش مبتنی بر تولیدی و روش تحلیل هموتونی و کاربردشان برای حل مسائل انتقاشی مترو و مسائل دینفرانسیل-تفاضلی انتقاشی مترو با کسب نمره ۲۰ و درجه عالی دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

(۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آنرا در فهرست مربوط ذکر و درج کرده ام.

(۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

(۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و... از این رساله داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوط را اخذ نمایم.

(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: حسین صبحی
تاریخ و امضاء: ۱۳۹۸/۶/۲۵



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات تهران

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

روش بسته باز تولیدی و روش تحلیل بهیوتونی و کاربردشان برای حل مسائل اختشای متفر و مسائل دینفرانسیل - تفاضلی اختشای متفر

استادان راهنما:

دکتر سعید عباس بندی

دکتر توفیق الهویرانلو

استاد مشاور:

دکتر اسمعیل بایلیان

معارض:

حسین صیجی

تابستان ۹۸

سپاس بی کران پروردگار یکتا را که، مستیمان، بنشینید و به بنشینید روحوان علم و دانش مفتخران نمود و ذره‌ای ناچیز از دریای علم و معرفت خود را روزیایان ساخت. در اینجا لازم می‌دانم از زحمات اساتید ارجمندم، دکتر سعید عباس بندی و توفیق الهی و نلو که بارها بنمای کلاس و سازنده، همواره روشنگر راه بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر کنم و از جناب پرفور اسمعیل بایان که دست مشاور پایان نامه از گلشان بهره‌بردم پاساگذارم. همچنین از دکتر رضا عتی و دکتر محمد علی فیروز عی که زحمت داوری رساله این حقیر را انجام داده‌اند کمال سپاس و تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که همواره من را برای رسیدن به درجات عالی علمی حمایت کرده اند

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
ن	فهرست جداول
۱	چکیده
۲	۱ تعریف مسئله و مفاهیم اولیه
۳	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ معادله دیفرانسیل منفرد
۳	۳.۱ معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد
۴	۴.۱ لایه مرزی
۵	۱.۴.۱ بازه‌ی لایه مرزی
۵	۲.۴.۱ طول بازه‌ی لایه مرزی
۵	۵.۱ معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد
۷	۶.۱ مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت
۷	۷.۱ لایه درونی
۸	۸.۱ مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت تأخیری
۸	۹.۱ معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد دو پارامتری
۸	۱۰.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد
۱۰	۱۱.۱ مفاهیم پایه‌ای فضای هسته بازتولیدی
۱۰	۱.۱۱.۱ تعریف فضای هسته بازتولیدی
۱۰	۲.۱۱.۱ خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی
۱۱	۳.۱۱.۱ تابع مطلقاً پیوسته و خواص آن
۱۱	۴.۱۱.۱ فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ و تابع هسته بازتولیدی آن

۱۴	زیر فضاهای بسته‌ی فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$	۵.۱۱.۱
۱۶	تعریف تابع دوبعدی کاملاً پیوسته و خواص آن	۶.۱۱.۱
۱۷	فضای هسته بازتولیدی دوبعدی $W_p^{(m,n)}(D)$	۷.۱۱.۱
۱۹	معرفی روش هسته بازتولیدی و روش تحلیل هموتوبی برای حل معادله دیفرانسیل	۲
۲۰	روش هسته بازتولیدی	۱.۲
۲۰	مقدمه	۱.۱.۲
	فضاهای بازتولیدی و پایه‌های مربوط به آن برای معادله دیفرانسیل مقدار	۲.۱.۲
۲۱	مرزی غیرخطی اختشاشی منفرد	
۲۳	روش هسته بازتولیدی-حالت ۱	۳.۱.۲
۲۳	تقریب جواب معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی با استفاده از حالت ۱	۴.۱.۲
۲۴	آنالیز همگرایی حالت ۱ برای معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی . .	۵.۱.۲
	تقریب جواب معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد غیرخطی با استفاده از حالت	۶.۱.۲
۲۵	۱	
۲۶	آنالیز همگرایی حالت ۱ برای مسئله غیرخطی	۷.۱.۲
۲۶	روش هسته بازتولیدی-حالت ۲	۸.۱.۲
	تقریب جواب معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی و غیرخطی با استفاده	۹.۱.۲
۲۶	از حالت ۲	
	آنالیز همگرایی حالت ۲ برای معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی و	۱۰.۱.۲
۲۸	غیرخطی	
۳۰	روش هسته بازتولیدی-حالت ۳	۱۱.۱.۲
۳۱	مثال‌های عددی	۱۲.۱.۲
۳۲	روش تحلیل هموتوبی	۲.۲
۳۲	مقدمه	۱.۲.۲
۳۵	معادله دگرذیسی مرتبه صفر	۲.۲.۲
۳۷	معادله دگرذیسی مرتبه بالا	۳.۲.۲
۴۰	آنالیز همگرایی روش تحلیل هموتوبی	۴.۲.۲
	حل مسئله اختشاشی منفرد و مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد دارای رفتار لایه مرزی با	۳
۴۴	روش هسته بازتولیدی	
۴۵	مقدمه	۱.۳

۴۵	معرفی معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با رفتار لایه مرزی	۲.۳
۴۶	نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای مسئله (۲.۳)	۳.۳
۴۶	معادله (۲.۳) با رفتار لایه مرزی در سمت چپ	۱.۳.۳
۴۹	معادله (۲.۳) با رفتار لایه مرزی در سمت راست	۲.۳.۳
۵۱	آنالیز خطا	۴.۳
۵۴	مثالهای عددی	۵.۳

۶۰	حل مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد دارای تأخیر با روش هسته بازتولیدی	۴
۶۱	مقدمه	۱.۴
۶۱	معرفی معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با تأخیر	۲.۴
۶۲	نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای مسئله (۳.۴) با رفتار لایه مرزی	۳.۴
۶۳	معادله (۳.۴) با رفتار لایه مرزی در سمت چپ	۱.۳.۴
۶۴	معادله (۳.۴) با رفتار لایه مرزی در سمت راست	۲.۳.۴
۶۷	مثالهای عددی	۴.۴
۷۲	نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای مسئله (۱.۴) با رفتار نوسانی	۵.۴

۷۴	حل مسائل اختشاشی منفرد و مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با روش تحلیل هموتویی	۵
۷۵	مقدمه	۱.۵
۷۵	حل معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد جزئی خطی با رفتار لایه مرزی	۲.۵
۷۵	معادله دگرذیسی مرتبه صفر	۱.۲.۵
۷۶	معادله دگرذیسی مرتبه بالا	۲.۲.۵
۷۸	حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با رفتار لایه مرزی	۳.۵
۸۱	معادله دگرذیسی مرتبه صفر	۱.۳.۵
۸۲	معادله دگرذیسی مرتبه بالا	۲.۳.۵
۸۳	آنالیز همگرایی روش تحلیل هموتویی	۳.۳.۵
۸۵	آنالیز خطای روش تحلیل هموتویی	۴.۳.۵
۸۵	مثالهای عددی	۵.۳.۵

۹۲	نتیجه گیری و پیشنهادات	۶
----	------------------------	---

۹۵	منابع	
----	-------	--

۱۰۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۸	مقاله‌های مستخرج از پایان‌نامه
۱۰۹	چکیده انگلیسی

فهرست تصاویر

۴	رفتار جواب برای مسئله اختشاشی منفرد	۱.۱
۵	رفتار لایه مرزی برای مسئله اختشاشی منفرد با مشتقات جزئی	۲.۱
۳.۱	رفتار لایه مرزی و رفتار نوسانی برای مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد	۶
۷	رفتار لایه مرزی و رفتار لایه درونی برای مسئله نقطه بازگشت	۴.۱
۹	رفتار لایه مرزی برای مسئله اختشاشی منفرد دوپارامتری	۵.۱
۹	رفتار لایه مرزی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد	۶.۱
۱۰	طول بازه لایه مرزی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد	۷.۱
۳۳	قدر مطلق خطا برای مثال ۲۰.۱.۲ با $n = 100$, $\varepsilon = 2^{-30}$	۱.۲
۳۳	قدر مطلق خطا برای مثال ۲۱.۱.۲ با $n = 100$, $\varepsilon = 2^{-30}$	۲.۲
۳۴	قدر مطلق خطا برای مثال ۲۲.۱.۲ با $n = 100$, $\varepsilon = 10^{-20}$	۳.۲
۳۴	قدر مطلق خطا برای مثال ۲۳.۱.۲ با $n = 100$, $\varepsilon = 10^{-20}$	۴.۲
۳۵	رفتار جواب معادله (۱۳.۲) برای مقادیر مختلف ε	۵.۲
۴۰	نمودار $\hbar$ برای معادله (۱۳.۲) در $U(10^{-5})$, $U(10^{-6})$	۶.۲
۷.۲	نمودار نرم دو خطا برای معادله (۱۳.۲) با مقادیر $m = 7$, $\varepsilon = 10^{-6}$ برای پیدا کردن $\hbar$ بهینه	۴۰
۸.۲	نمودار جواب تقریبی معادله (۱۳.۲) با استفاده از روش تحلیل هموتوپی برای $\varepsilon = 10^{-6}$	۴۱
۵۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۵.۳) با $\varepsilon = 10^{-4}$ و $N = 41$	۱.۳
۵۹	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۵.۳) با $\varepsilon = 10^{-4}$ و $N = 41$	۲.۳
۳.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۳.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی بدون تقسیم بازه و $N = 100$	۵۹

۴.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۳.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی
۵۹	با تقسیم بازه و $N = 100$
۵.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۴.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی
۵۹	بدون تقسیم بازه و $N = 100$
۶.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۴.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی
۵۹	با تقسیم بازه و $N = 100$
۱.۴	رفتار لایه مرزی و رفتار نوسانی برای مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی
۶۲	منفرد
۶۸	ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۱.۴.۴ با $N = 128$ و $\delta = 10^{-12}$
۶۸	ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۲.۴.۴ با $N = 100$ و $\delta = 0.5\varepsilon$
۶۹	ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۳.۴.۴ با $N = 100$ و $\delta = 0.5\varepsilon$
۷۰	ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۴.۴.۴ با $N = 100$ و $\delta = 1.5\varepsilon$
۶.۴	جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی با $N = 100$ و $\delta = 0.5\varepsilon$ و
۷۰	$\varepsilon = 10^{-2}$
۷.۴	جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی با $N = 100$ و $\delta = 0.5\varepsilon$ و
۷۱	$\varepsilon = 10^{-5}$
۸.۴	جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی برای مثال ۴.۴.۴ با $N = 100$
۷۲	و $\delta = 10\varepsilon$
۷۲	جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی با $N = 100$
۱۰.۴	رفتار لایه مرزی و رفتار نوسانی برای مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی
۷۳	منفرد (۱.۵.۴)
۷۵	رفتار جواب معادله (۱.۵) برای مقادیر مختلف ε
۲.۵	نمودار $\hbar$ برای مسئله (۱.۵) در $u_m(0.999999, t)$, $u_m(0.999999, t)$ که $t =$
۷۹	$0.1, 0.5, 1$
۳.۵	نرم دو خطای جواب تقریبی معادله (۱.۵) با مقادیر $m = 8$, $\varepsilon = 10^{-6}$
۷۹	برای پیدا کردن $\hbar$ بهینه
۴.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای جواب تقریبی معادله (۱.۵) با $\varepsilon = 10^{-6}$
۷۹	تکرار و $m = 8$
۵.۵	جواب تقریبی معادله (۱.۵) با استفاده از روش تحلیل هموتوپی برای ε
۷۹	$m = 8$, 10^{-6}

۸۰	۶.۵	مشتق جواب معادله (۱.۵) برای $\varepsilon = 10^{-6}$
۸۰	۷.۵	نمودار $\hbar$ برای مشتق جواب تقریبی $\frac{\partial u_m(x,t)}{\partial x}$ با مقادیر $\varepsilon = 10^{-6}$, $m = 8$
	۸.۵	نرم دو خطا برای مشتق جواب تقریبی معادله (۱.۵) با مقادیر $\varepsilon = 10^{-6}$, $m = 8$
۸۰		۸ برای پیدا کردن $\hbar$ بهینه
	۹.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مشتق جواب تقریبی معادله (۱.۵) با $m = 8$
۸۰		۸ تکرار و $\varepsilon = 10^{-6}$ و $\hbar = -1.48$
۸۶	۱۰.۵	رفتار جواب مثال (۴.۳.۵) برای مقادیر مختلف ε و δ
	۱۱.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای جواب تقریبی
۸۷		مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 0.03$ و $\varepsilon = 0.1$ و $m = 10$ تکرار
	۱۲.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای جواب تقریبی
۸۷		مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 10^{-12}$ و $\varepsilon = 10^{-6}$ و $m = 10$ تکرار
۸۸	۱۳.۵	رفتار جواب مثال (۵.۳.۵) برای مقادیر مختلف ε و δ
	۱۴.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای جواب تقریبی
۸۹		مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 0.25$ و $\varepsilon = 0.1$ و $m = 10$ تکرار
	۱۵.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای جواب تقریبی
۸۹		مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 0.2$ و $\varepsilon = 0.01$ و $m = 10$ تکرار
۸۹	۱۶.۵	رفتار مشتق جواب مثال (۴.۳.۵) برای مقادیر مختلف ε و δ
	۱۷.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای مشتق جواب
۸۹		تقریبی مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 0.03$ و $\varepsilon = 0.1$ و $m = 10$ تکرار
	۱۸.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای مشتق جواب
۹۰		تقریبی مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 10^{-12}$ و $\varepsilon = 10^{-6}$ و $m = 10$ تکرار
۹۰	۱۹.۵	رفتار مشتق جواب مثال (۵.۳.۵) برای مقادیر مختلف ε و δ
	۲۰.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای مشتق جواب
۹۰		تقریبی مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 0.25$ و $\varepsilon = 0.1$ و $m = 10$ تکرار
	۲۱.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\hbar$ برای مشتق جواب
۹۱		تقریبی مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 0.2$ و $\varepsilon = 0.01$ و $m = 10$ تکرار

فهرست جداول

۱.۲	مقایسه‌ی نتایج مثالهای (۲۰.۱.۲) و (۲۱.۱.۲) با هر سه حالت روش هسته
۳۲	بازتولیدی
۲.۲	مقایسه‌ی نتایج مثالهای (۲۲.۱.۲) و (۲۳.۱.۲) با هر سه حالت روش هسته
۳۳	بازتولیدی
۱.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳ با $\epsilon = 0.1$
۵۶	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳ با $\delta = 10^{-12}$
۳.۳	مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۱.۵.۳ با $\epsilon = 0.1$
۵۷	مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۱.۵.۳ با $\delta = 10^{-12}$
۵.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۲.۵.۳ با $\epsilon = 0.1$
۶.۳	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۲.۵.۳ با $\epsilon = 0.01$
۷.۳	مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۲.۵.۳ با $\epsilon = 0.1$
۸.۳	مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۲.۵.۳ با $\epsilon = 0.01$
۱.۴	ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۱.۴.۴ با $\delta = 10^{-12}$ و مقادیر مختلف ϵ
۲.۴	ماکسیم مقدار خطا برای مثال (۳.۴.۴)، (۲.۴.۴)، (۱.۴.۴)، با $\delta = 0.5\epsilon$ و
۶۹	مقادیر مختلف ϵ
۳.۴	مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال (۳.۴.۴)، (۲.۴.۴)، (۱.۴.۴)،
۷۰	با $\delta = 0.5\epsilon$ و مقادیر مختلف ϵ
۴.۴	ماکسیم مقدار خطای روش هسته بازتولیدی برای مثال (۴.۴.۴)، (۲.۴.۴)،
۷۱	ϵ, δ
۵.۴	ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۲.۴.۴ با $\epsilon = 0.1$ و مقادیر مختلف δ
۷۱	
۱.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۴.۳.۵ برای $\epsilon = 0.1$ و $m = 10$ تکرار
۸۶	

۲.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۴.۳.۵ برای $\delta = 10^{-12}$ و $m = 10$
۸۷	تکرار
۳.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۵.۳.۵ برای $\varepsilon = 10^{-1}$ و $m = 10$ تکرار
۴.۵	ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۵.۳.۵ برای $\varepsilon = 10^{-1}$ و $m = 10$ تکرار

چکیده

در این رساله مسائل اختشاشی منفرد و مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد که دارای رفتار لایه مرزی هستند و همچنین برخی از مسائلی که از لحاظ رفتار جواب تا حدود زیادی شبیه به این نوع مسائل هستند را با استفاده از روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت و همچنین روش تحلیل هموتویی حل می‌کنیم. ما روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت را در نظر گرفته و ابتدا آنرا معرفی کرده و سپس برای پیاده سازی آن روی مسائل مدنظر ابتدا بازه تعریف مسئله را به دو زیربازه تقسیم می‌کنیم به طوریکه در یکی از زیربازه‌ها رفتار لایه مرزی وجود داشته باشد و در دیگری نه. زیربازه‌ای که در آن رفتار لایه مرزی قرار دارد برای ما بسیار حائز اهمیت است به طوریکه اگر در سمت چپ بازه مسئله قرار داشته باشد در این صورت روش هسته بازتولیدی ذکر شده می‌تواند یک تقریب خوب از جواب مسئله را فراهم کند و اگر زیربازه لایه مرزی در سمت راست قرار داشته باشد در این صورت برای پیاده سازی روش هسته بازتولیدی نیاز به یک تغییر متغیر مناسب در مسئله برای انتقال زیربازه‌ی لایه مرزی به بازه‌ی دیگر داریم. نتایج حاصل از پیاده سازی الگوریتم ارائه شده در این رساله بیانگر حجم کم محاسبات، همگرایی سریع به جواب اصلی و دقت بالای روش ارائه شده در مقایسه با روش‌های عددی دیگر است. در مسائل اختشاشی منفرد و مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زمانیکه مقدار پارامتر تأخیر مسئله بزرگ است و یا مقدار پارامتر اختشاش مسئله بسیار کوچک است، به دست آوردن یک تقریب مناسب از جواب مسئله کار بسیار دشواری است، از این رو ما با استفاده از روش تحلیل هموتویی این مسائل را حل می‌کنیم و نتایج آنرا با دیگر روشها از جمله روش هسته بازتولیدی مطرح شده در این رساله مقایسه می‌کنیم. روش تحلیل هموتویی علاوه بر اینکه به آسانی قابل پیاده سازی بر روی مسائل مذکور است، همچنین می‌تواند تقریبهای بهتری از جواب دقیق مسئله فراهم آورد. علاوه بر این ما قضیه‌های مربوط به همگرایی و آنالیز خطا را جداگانه برای هریک از روشها و مسائل، بیان کرده و اثبات می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مسئله اختشاشی منفرد، مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد، رفتار لایه مرزی، روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت، روش تحلیل هموتویی، آنالیز خطا، آنالیز همگرایی

فصل ۱

تعریف مسئله و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا تعاریف مربوط به مسئله اختشاشی منفرد و مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد و همچنین برخی از مسائلی که از لحاظ رفتار جواب تا حدود زیادی شبیه به این نوع مسائل هستند را می‌آوریم، و سپس ویژگی‌های رفتار جواب آنها را بررسی می‌کنیم. مسائل اختشاشی منفرد در زمینه‌های زیادی از علوم پایه و علوم مهندسی کاربرد فراوانی دارند که از جمله آنها می‌توان به بیومکانیک^۱، اقتصاد^۲، فیزیولوژی^۳، فیزیو-شیمی^۴، بیوفیزیک^۵، بیولوژی^۶، نظریه کنترل^۷، دینامیک سیالات در ژئوفیزیک^۸ و واکنش‌های شیمیایی^۹ اشاره کرد [۵-۱]. در ادامه این فصل مفاهیم اولیه‌ی روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت^{۱۰} را برای حل مسائل ذکر شده می‌آوریم. مسائل اختشاشی منفرد در زمینه‌های زیادی از علوم مهندسی کاربرد فراوانی دارند از این رو بدست آوردن جواب تقریبی مناسب برای آنها با استفاده از روش‌های عددی مختلف و یا ترکیبی از این روشها و تکنیک‌های ابتکاری و یا استفاده از روش‌های نیمه تحلیلی مثل روش تحلیل هموتوپی از اهمیت زیادی برخوردار است. به عنوان مثال معادله نویر-استوک^{۱۱} در دینامیک سیالات برای مقادیر بزرگ عدد رینولد^{۱۲} یک معادله اختشاشی منفرد است [۶].

۲.۱ معادله دیفرانسیل منفرد

تعریف ۱.۲.۱. یک معادله دیفرانسیل منفرد یک معادله دیفرانسیل معمولی است که در آن حداقل یکی از تابع‌های ضریب تابع مجهول معادله، به ازای حداقل یک نقطه در دامنه تعریف خود، تعریف نشده باشد. به طور مثال مسئله زیر یک معادله دیفرانسیل مقدار مرزی منفرد است،

مثال ۲.۲.۱

$$u''(x) + \frac{1}{x}u'(x) + u(x) = x^2 + 5x^3 \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0.$$

۳.۱ معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد^{۱۳}

تعریف ۱.۳.۱. یک معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد یک معادله دیفرانسیل معمولی است که در آن یک پارامتر کوچک مثل ε در بزرگترین مرتبه مشتق معادله ضرب شده است، که ε را پارامتر اختشاش^{۱۴} می‌نامیم.

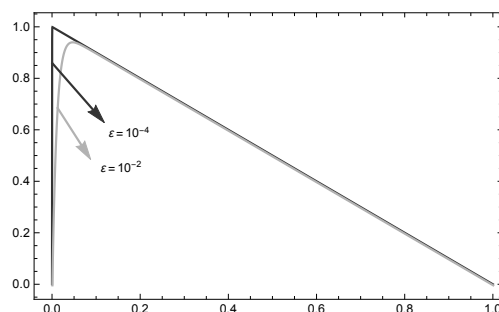
نکته ۲.۳.۱. در یک معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ در این صورت جواب معادله دیفرانسیل یا مشتقات آن دارای یک حد ناپیوسته در دامنه تعریف خود است. به عبارت دیگر این یک تعریف برای معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد است.

مثال ۳.۳.۱. مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید،

$$-\varepsilon u''(x) - u'(x) = 1 \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = u(1) = 1, \tag{۱.۱}$$

^۱Biomechanics ^۲Economical ^۳Physiological ^۴Physio-Chemical ^۵Biophysical ^۶Biology ^۷Control Theory
^۸Geophysical Fluid Dynamics ^۹Chemical Reactions ^{۱۰}Hilbert Space ^{۱۱}Navier-Stokes ^{۱۲}Reynolds number ^{۱۳}Singularly
 Perturbed Differential Equation ^{۱۴}Perturbation Parameter



شکل ۱.۱: رفتار جواب مسئله اختشاشی منفرد (۱.۱)

که $1 \gg \varepsilon > 0$. جواب دقیق معادله (۱.۱) به صورت زیر است

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} + 1 - x, \quad (2.1)$$

با حد گرفتن از جواب دقیق به صورت زیر

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0. \quad (3.1)$$

همان طور که مشخص است جواب مسئله (۱.۱) وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ در نقطه $x = 0$ دارای حد نمی باشد.

۴.۱ لایه مرزی^۱

تعریف ۱.۴.۱. مسئله مقدار مرزی (۱.۱) را در نظر بگیرید، فرض کنید قرار دهیم $\varepsilon = 0$ در نتیجه معادله تبدیل می شود به،

$$-u'(x) = 1 \quad x \in [0, 1] \quad u(0) = u(1) = 1, \quad (4.1)$$

مشخص است که معادله (۴.۱) در فضای $C^1[0, 1]$ جواب ندارد، در نتیجه وقتی مقدار ε به سمت صفر نزدیک می شود جواب معادله (۱.۱) در برخی از نقاط تعریف دامنه اش دارای رفتار بدی است. با توجه به وجود عبارت نمایی $e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$ در معادله (۱.۱) وقتی که $\varepsilon \rightarrow 0$ تابع جواب $u(x)$ و مشتقات آن دارای تغییر رفتار سریع در نزدیک $x = 0$ هستند. ناحیه هایی از دامنه مسئله که تغییر رفتار سریع جواب مسئله در آن اتفاق می افتد را لایه مرزی می نامند. مسئله اختشاشی منفرد معمولاً با وجود چنین لایه مرزی همراه است. عبارت لایه مرزی اولین بار توسط لودویگ پرنل^۲ در سال ۱۹۰۴ در سومین کنفرانس بین المللی ریاضیدانان در هیدلبرگ^۳ آلمان معرفی شده است [۷، ۸].

مثال ۲.۴.۱. مثال دیگری برای معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد با مشتقات جزئی که برای مقادیر مختلف ε دارای رفتار لایه مرزی به صورت شکل (۲.۱) می باشد.

$$-\varepsilon \partial_x^2 u(x, t) + (1 + x - x^2) \partial_x u(x, t) + \partial_t u(x, t) = f(x, t),$$

$$(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

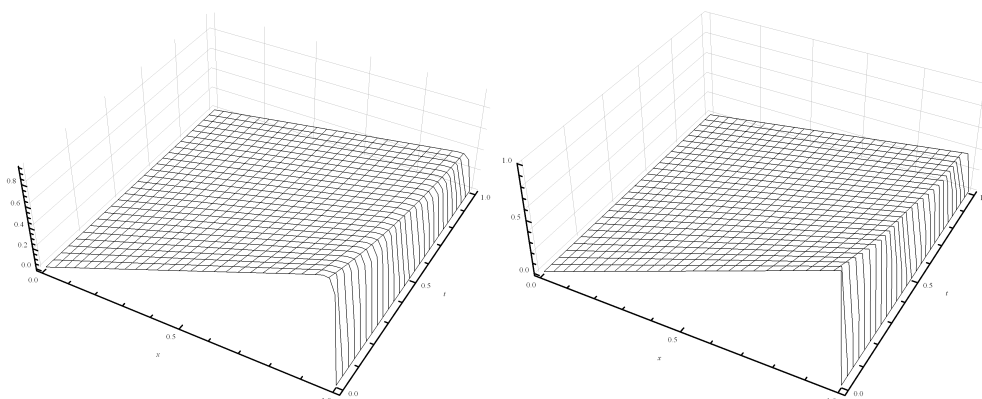
$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1].$$

^۱Boundary Layer

^۲Ludwig Prandtl

^۳Heidelberg



شکل ۲.۱: رفتار لایه مرزی برای مسئله اختشاشی منفرد با مشتقات جزئی (راست: $\varepsilon = 10^{-4}$ چپ: $\varepsilon = 10^{-2}$)

که جواب دقیق برای این معادله $u(x, t) = e^{-t}(x(1 - e^{\frac{-1}{\varepsilon}}) - e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + e^{\frac{-1}{\varepsilon}})$ است.

۱.۴.۱ بازه‌ی لایه مرزی

در این رساله برای مسئله‌ی اختشاشی منفرد که دارای یک رفتار لایه مرزی است، بازه مسئله را به دو زیربازه تقسیم می‌کنیم به طوری که یکی از زیربازه‌ها شامل رفتار لایه مرزی باشد.

تعریف ۳.۴.۱. زیربازه‌ای از بازه اصلی تعریف معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد که تغییرات سریع رفتار جواب معادله (لایه مرزی) در آن اتفاق می‌افتد را بازه لایه مرزی معادله می‌نامیم. همچنین زیربازه‌ای که رفتار لایه مرزی ندارد را بازه منظم می‌نامیم.

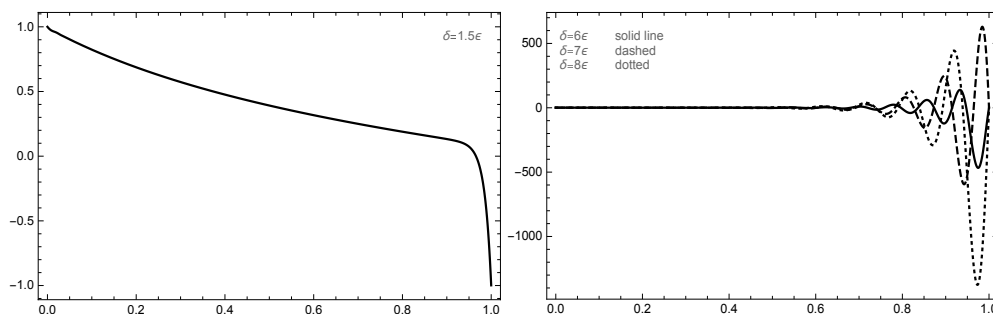
۲.۴.۱ طول بازه‌ی لایه مرزی

یکی از نکات مهم در حل معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد با روش هسته بازتولیدی در این رساله پیدا کردن نقطه‌ای از بازه تعریف معادله است که آنرا به دو زیربازه‌ی شامل رفتار لایه مرزی و رفتار منظم تقسیم می‌کند. در حقیقت محاسبه طول بازه‌ی لایه مرزی ارتباط مستقیم با پیدا کردن محل مناسب این نقطه دارد، همچنین اهمیت پیدا کردن محل مناسب این نقطه باتوجه به شدت رفتار لایه مرزی معادله، در تقریب هرچه بهتر جواب معادله بسیار تأثیرگذار است. محققین زیادی در خصوص نحوه محاسبه طول بازه یا بازه‌های لایه مرزی برای انواع مختلف مسائل اختشاشی منفرد روابطی را مشخص کرده‌اند که وجود یک نکته در همه آنها به وضوح به چشم می‌آید، برای مسئله‌ی اختشاشی منفرد که دارای رفتار لایه مرزی است، طول زیربازه دارای رفتار لایه مرزی ارتباط مستقیم با مقدار پارامتر اختشاش مسئله دارد به طوری که هرچه پارامتر اختشاش مسئله کوچکتر باشد در این صورت تغییر ناگهانی رفتار جواب مسئله در ناحیه کوچکتري از بازه مسئله رخ می‌دهد و در نتیجه طول زیربازه‌ای که دارای لایه مرزی است کوچکتر خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر رجوع کنید به [۷-۹].

۵.۱ معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد^۱

تعریف ۱.۵.۱. در حالت کلی یک معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد یک معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد است که شامل حداقل یک جمله تفاضلی یا تاخیری می‌باشد. مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد در زمینه‌های

^۱ Singularly Perturbed Differential-Difference Equation



شکل ۳.۱: رفتار لایه مرزی و رفتار نوسانی برای مثال $\varepsilon = 10^{-2}$ (۵.۵.۱)

زیادی از علوم استفاده شده است به عنوان مثال، فرآیندهای فیزیولوژیکی^۲ یا بیماری‌ها، نظریه کنترل بهینه، انتقال گرما در مقیاس کوچک، هیدرودینامیک هلیوم مایع^۳، نظریه دوم صدا، ترمو الاستیسیته^۴، انتشار در پلیمرها^۵، معادلات واکنش-انتشار^۶، کنترل سیستم‌های هرج و مرج^۷ [۱۹-۱۰]. مسئله‌های زیر از نوع معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد هستند،

مثال ۲.۵.۱

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(x) + u'(x) - u(x) &= f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) - u'(0) &= 0, & u(1) = 1, \\ \varepsilon u''(x) + u'(x - \delta) - u(x) &= f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x) &= 1 & x \in [-\delta, 0], & u(1) = 1, \end{aligned}$$

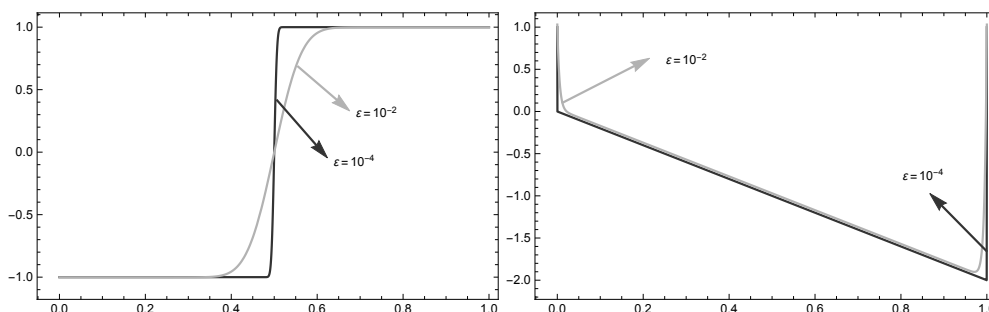
نکته ۳.۵.۱. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد در حالتی که دارای یک جمله تاخیری مانند $u'(x - \delta)$ باشد و مقدار پارامتر تاخیر^۱ معادله نسبت به پارامتر اختشاش مقدار کوچکی باشد در این صورت جواب معادله دارای یک رفتار لایه مرزی در نزدیکی‌های یکی از نقاط ابتدا یا انتها بازه تعریف خود است.

نکته ۴.۵.۱. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد در حالتی که دارای یک جمله تاخیری مانند $u'(x - \delta)$ باشد و مقدار پارامتر تاخیر معادله نسبت به پارامتر اختشاش مقدار بزرگی باشد در این صورت جواب معادله دارای یک رفتار نوسانی سریع^۲ در سراسر و یا در یکی از نقاط ابتدا یا انتهای بازه تعریف خود است.

مثال ۵.۵.۱

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(x) + u'(x - \delta) + u(x) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x) &= 1, & x \in [-\delta, 0], & u(1) = 1. \end{aligned}$$

^۱Physiological ^۲Hydrodynamics of Liquid Helium ^۳Thermo-Elasticity ^۴Diffusion in Polymers ^۵Reaction-Diffusion Equations
^۶Chaotic Systems ^۷Delay Parameter ^۸Rapid Oscillatory Behavior



شکل ۴.۱: رفتار لایه مرزی (راست) و رفتار لایه درونی (چپ) برای مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت

۶.۱ مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت^۳

تعریف ۱.۶.۱. یک معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد نقطه بازگشت یک معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد است به صورت زیر،

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) &= f(x), & x \in [-1, 1], \\ u(-1) &= A, & u(1) = B, \end{aligned} \quad (5.1)$$

که تابع های $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ به قدر کافی هموار هستند. نقطه x_i که $a(x_i) = 0$ را نقطه بازگشت می نامیم. رفتار جواب این مسئله در نزدیکی های نقطه x_i به پارامتر اختشاش مسئله و λ_i که $\lambda_i = \frac{b(x_i)}{a'(x_i)}$ بستگی دارد، اگر $\lambda_i < 0$ باشد در این صورت جواب مسئله در نقطه $x = x_i$ دارای رفتار لایه درونی^۱ نمی باشد. اگر $\lambda_i \geq 0$ در این صورت جواب مسئله دارای یک رفتار لایه درونی در نزدیکی های نقطه $x = x_i$ است [۲۰-۲۲].

نکته ۲.۶.۱. به طور کلی مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت (۵.۱) دارای رفتار لایه مرزی در نزدیکی نقطه $x = 1$ ($x = -1$) است، اگر و تنها اگر $a(1) < 0$ ($a(-1) > 0$).

نکته ۳.۶.۱. تحت شرایط زیر مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت (۵.۱) دارای دو لایه مرزی در نزدیکی های دو نقطه $x = 1$, $x = -1$ در دامنه تعریف خود می باشد.

$$\left\{ \begin{array}{ll} a(0) = 0, & a'(0) < 0, \\ |a(x)| > \alpha > 0, & \tau \leq |x| \leq 1, \\ b(x) \geq b_* > 0, & x \in [-1, 1], \\ |a'(x)| \geq \left| \frac{a'(0)}{\tau} \right|, & x \in [-1, 1]. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

۷.۱ لایه درونی

تعریف ۱.۷.۱. در معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد نقطه بازگشت، رفتار لایه درونی در حقیقت همان رفتار لایه مرزی در نقطه ای غیر از نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف مسئله است که با کوچکتر شدن مقدار پارامتر اختشاش مسئله تشدید می شود. نقطه x_i در دامنه تعریف مسئله که رفتار لایه درونی در نزدیکی های آن ایجاد می شود را نقطه بازگشت یا نقطه عطف می نامیم [۲۳، ۲۴].

^۳ Singularly Perturbed Turning Point Problem

^۱ Interior Layer

۸.۱ مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت تأخیری^۲

تعریف ۱.۸.۱. مسئله اختشاشی منفرد نقطه بازگشت تأخیری، یک معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \varepsilon u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) + c(x)u(x - \delta) &= f(x), \\ u(x) &= \phi(x), \quad x \in [-1 - \delta, -1], \quad u(1) = \gamma, \quad x \in [-1, 1], \end{aligned} \quad (7.1)$$

که γ مقدار ثابت است و پارامتر δ مقدار تأخیر مسئله است و $a(x), b(x), f(x), \phi(x), c(x)$ تابع‌هایی به قدر کافی هموار هستند به طوری که شرایط زیر برای آنها برقرار است،

$$\begin{cases} a(\circ) = \circ, & a'(\circ) > \circ, \\ b(x) \geq b_* > \circ, & x \in [-1, 1], \\ b(x) - c(x) > \circ, c(x) \geq \circ & \forall x \in [-1, 1], \\ |a'(x)| \geq |\frac{a'(\circ)}{\gamma}|, & \forall x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

تحت شرایط فوق مسئله (۷.۱) دارای جواب منحصر به فرد با رفتار لایه درونی در نزدیکی‌های نقطه $x = \circ$ است [۲۵، ۲۶]. از کاربردهای این مسائل می‌توان به مدل‌سازی تغییرات نوروئی^۱، زیست‌شناسی ریاضی^۲، فرآیندهای فیزیولوژیکی و بیماری‌ها^۳، مطالعه رفلکس نور در مردمک چشم انسان و... اشاره کرد [۲۷-۲۹].

۹.۱ معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد دوپارامتری^۴

تعریف ۱.۹.۱. یک معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد دوپارامتری یک معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد است که در آن دو پارامتر کوچک مثل $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ به ترتیب در بزرگترین مشتق‌های معادله ضرب شده‌اند [۳۰-۳۲].

مثال ۲.۹.۱. مثالی برای معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد دوپارامتری،

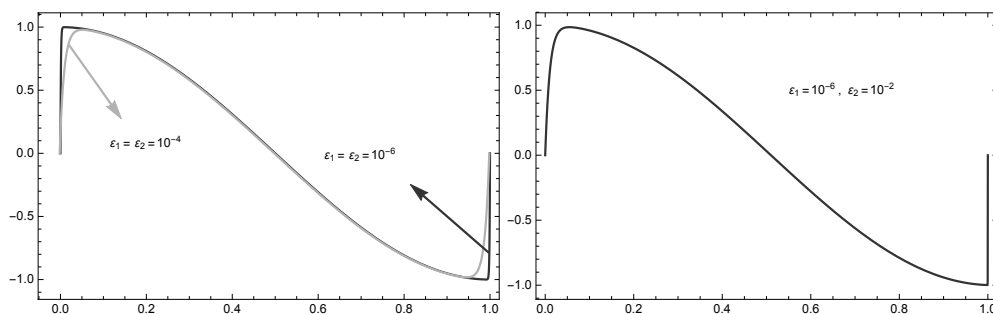
$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 u''(x) + \varepsilon_2 u'(x) + u(x) &= \cos(\pi x), \quad x \in [\circ, 1], \\ u(\circ) &= u(1) = \circ, \end{aligned}$$

نکته ۳.۹.۱. رفتار جواب معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد دوپارامتری بسیار شبیه به رفتار معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد نقطه بازگشت است و دارای دو لایه مرزی در نزدیکی‌های نقاط ابتدا و انتهای بازه تعریف خود است و نکته حائز اهمیت این است که طول بازه‌های لایه مرزی بستگی به مقدار پارامترهای اختشاش معادله دارد و اگر مقدار دوپارامتر اختشاش یکسان باشد، لایه‌های مرزی در دو سمت بازه دارای طول‌های یکسان هستند و اگر پارامتر ε_1 کوچکتر از پارامتر ε_2 باشد در این صورت طول بازه‌های لایه مرزی در دو سمت بازه معادله باهم یکسان نیست. این نکته در شکل (۵.۱) نشان داده شده است.

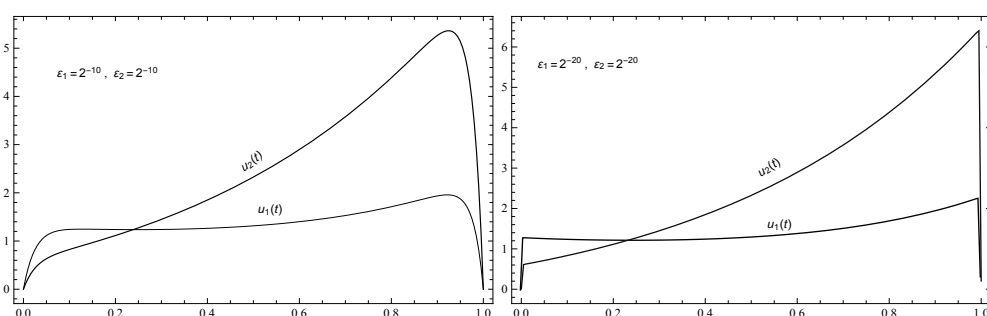
۱۰.۱ دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد^۵

تعریف ۱.۱۰.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد تشکیل شده از حداقل دو معادله دیفرانسیل که برای هر کدام از معادلات یک پارامتر اختشاش در بزرگترین مرتبه مشتق معادله ضرب شده است و تابع مجهول هر کدام از

^۲Singularly Perturbed Delay Turning Point Problem ^۱Modeling of Neuronal Variability ^۳Physiological Processes and Diseases ^۴Singularly perturbed problems with two parameters ^۵System of Singularly perturbed Differential Equations



شکل ۵.۱: رفتار لایه مرزی برای مسئله اختشاشی منفرد دوپارامتری



شکل ۶.۱: رفتار لایه مرزی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد

معادله‌ها در معادله دیگری وجود دارد، به عبارت دیگر دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد است به طوری که تابع مجهول هر معادله در معادله‌های دیگر دستگاه وجود داشته باشد.

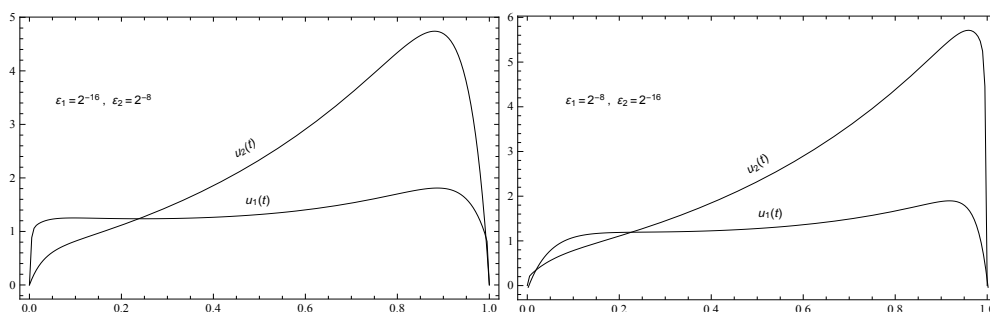
مثال ۲.۱۰.۱. مثالی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد،

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 u_1''(t) + 2(t+1)^2 u_1(t) - (t^3 + 1) u_2(t) &= 2e^t, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\varepsilon_2 u_2''(t) - 2 \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right) u_1(t) + \frac{22}{10} e^{1-t} u_2(t) &= 10t + 1, \\ u_1(0) = u_1(1) = 0, & \quad u_2(0) = u_2(1) = 0, \end{aligned}$$

نکته ۳.۱۰.۱. دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی کاربرد دارد و انواع مختلفی دارد که هر کدام دارای نام‌های خاصی برای خود هستند و علاوه بر این، ویژگی‌های رفتاری مختلفی نیز دارند [۳۳، ۳۴]. معمولاً جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد دارای رفتار لایه مرزی در نزدیکی‌های نقاط ابتدا و انتهای بازه‌های تعریف هر کدام از معادلات خود است. این نکته در شکل (۶.۱) نشان داده شده است.

نکته بعد در خصوص طول بازه لایه مرزی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد است.

نکته ۴.۱۰.۱. از آنجا که دستگاه معادلات اختشاشی منفرد دارای حداقل دو معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد است که هر معادله خود دارای یک پارامتر اختشاش است، از این رو تأثیر پذیری معادلات از هم و همچنین تأثیر پارامتر اختشاش هر معادله روی رفتار لایه مرزی معادله دیگر بسیار حائز اهمیت است. نتایجی که در اینجا ارائه شده، حاصل حل عددی این معادلات با روش هسته بازتولیدی برای مقادیر مختلفی از پارامتر اختشاش برای هر معادله است. اگر مقادیر پارامترهای


 شکل ۷.۱: طول بازه لایه مرزی برای دستگاه معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد برای مقادیر مختلف ϵ_1, ϵ_2

اختشاش باهم برابر باشد و یا فقط مقدار بسیار کمی اختلاف داشته باشد در این حالت طول بازه لایه مرزی برای هر معادله باهم برابر است ولی اگر مقدار اختلاف پارامترهای اختشاش زیاد باشد در این حالت طول بازه لایه مرزی برای معادله‌ای که پارامتر اختشاش کوچکتری دارد کوچکتر از طول بازه لایه مرزی معادله‌ای است که پارامتر اختشاش بزرگتری دارد، این نکته در شکل (۷.۱) نشان داده شده است.

۱۱.۱ مفاهیم پایه‌ای فضای هسته بازتولیدی^۱

۱.۱۱.۱ تعریف فضای هسته بازتولیدی

تعریف ۱.۱۱.۱. قرار می‌دهیم،

$$\mathcal{H} = \left\{ u(x) \mid u(x) \text{ یک تابع حقیقی مقدار یا مختلط است} \right\}$$

یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی زیر،

$$\langle u(x), g(x) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad u(x), g(x) \in \mathcal{H}.$$

اگر یک تابع $R_y(x)$ برای هر $y \in X$ وجود داشته باشد، آنگاه $R_y(x) \in \mathcal{H}$ و برای هر $u(x) \in \mathcal{H}$ که در شرط زیر صدق می‌کند،

$$\langle u(x), R_y(x) \rangle_{\mathcal{H}} = u(y),$$

آنگاه $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ نامیده می‌شود و $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی نامیده می‌شود.

۲.۱۱.۱ خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی^۲

خاصیت ۲.۱۱.۱. اگر $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی و $R_y(x)$ هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه $R_y(x)$ مزدوج متقارن^۳ است، یعنی $R_y(x) = \overline{R_x(y)}$.

خاصیت ۳.۱۱.۱. اگر $\mathcal{H}$ فضای هسته بازتولیدی و $R_y(x)$ هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه $R_y(x)$ هسته بازتولیدی منحصر به فرد فضای $\mathcal{H}$ است.

^۱ Reproducing Kernel Space

^۲ Fundamental Properties of Reproducing Kernel

^۳ Conjugate Symmetric

خاصیت ۴.۱۱.۱. اگر فضای هسته بازتولیدی و $R_y(x)$ هسته بازتولیدی این فضا باشد آنگاه $R_x(x) \geq 0, \forall x \in X$ و $R_x(x) = 0$ است اگر و تنها اگر $\mathcal{H} = \{0\}$.

خاصیت ۵.۱۱.۱. هسته بازتولیدی $R_y(x)$ یک هسته معین مثبت^۴ برای فضای $\mathcal{H}$ است، یعنی

$$\sum_{i,j=1}^n R_{x_i}(x_j) \bar{\xi}_i \xi_j \geq 0, \quad \forall x_i \in X,$$

که $\xi_i, \xi_j, \dots, n$ اعداد مختلط هستند

خاصیت ۶.۱۱.۱. فضای تابعی هیلبرت $\mathcal{H}$ یک فضای هسته بازتولیدی است اگر و تنها اگر $\forall x \in X$ که x فیکس شده، عملگر تابعی خطی $I(f) = f(x)$ کراندار باشد.

برای ملاحظه اثبات هر پنج خاصیت رجوع شود به [۳۶، ۳۵].

۳.۱۱.۱ تابع مطلقاً پیوسته^۱ و خواص آن

تعریف ۷.۱۱.۱. تابع $f(x)$ را روی بازه $[a, b]$ فرض کنید، قرار می‌دهیم $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ را یک مجموعه از بازه‌های باز متقابلاً گسسته^۲ که $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ اگر $\forall \varepsilon, \exists \delta$ به طوری که،

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon, \quad \text{برای} \quad \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta,$$

در این صورت تابع $f(x)$ یک تابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a, b]$ است.

گزاره ۸.۱۱.۱. یک تابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a, b]$ یک تابع پیوسته است.

گزاره ۹.۱۱.۱. تابع $f(x)$ را روی بازه $[a, b]$ فرض کنید، اگر $|f'(x)| \leq M, \forall x \in [a, b]$ آنگاه $f(x)$ یک تابع مطلقاً پیوسته است.

نتیجه ۱۰.۱۱.۱. فرض کنید تابع $f'(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ مطلقاً پیوسته است.

گزاره ۱۱.۱۱.۱. اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x f(t)dt$ یک تابع مطلقاً پیوسته روی بازه $[a, b]$ است.

برای ملاحظه اثبات گزاره‌ها و نتایج فوق رجوع شود به [۳۵].

۴.۱۱.۱ فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ و تابع هسته بازتولیدی آن

فضای تابعی $W_p^m[a, b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_p^m[a, b] = \left\{ u(x) \mid u^{(m-1)}(x) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u^{(m)}(x) \in L^p[a, b], x \in [a, b] \right\}$$

^۴ Positive Definite Kernel

^۱ Absolutely Continuous

^۲ Mutually Disjoint

همچنین ضرب داخلی و نرم را $\forall u_1(x), u_2(x) \in W_r^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1(x), u_2(x) \rangle_{W_r^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} u_1^{(i)}(a) u_2^{(i)}(a) + \int_a^b u_1^{(m)}(x) u_2^{(m)}(x) dx,$$

$$\|u(x)\|_{W_r^m[a, b]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_r^m[a, b]}},$$

به راحتی می‌توان ثابت کرد که فضای تابعی $W_r^m[a, b]$ یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۱۲.۱۱.۱. فضای تابعی $W_r^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۱۳.۱۱.۱. فضای تابعی $W_r^m[a, b]$ یک فضای هسته باز تولیدی است.

برای ملاحظه اثبات قضیه‌های فوق رجوع شود به [۳۵]. اکنون تابع هسته باز تولیدی $R_y(x)$ ، مربوط به فضای $W_r^m[a, b]$ را بدست می‌آوریم. فرض کنید $R_y(x)$ ، هسته باز تولیدی مربوط به فضای $W_r^m[a, b]$ باشد، آنگاه برای هر y فیکس شده که $y \in [a, b]$ و $\forall u(x) \in W_r^m[a, b]$ ، $R_y(x)$ ، در شرط زیر صدق کند،

$$\langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_r^m[a, b]} = u(y) \quad (۸.۱)$$

با بکاربردن تعریف ضرب داخلی برای فضای $W_r^m[a, b]$ داریم،

$$\langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_r^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b u^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx,$$

که با استفاده از انتگرال گیری جز به جز داریم،

$$\begin{aligned} & \int_a^b u^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i u^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_{x=a}^{x=b} + (-1)^m \int_a^b u(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \end{aligned}$$

همچنین داریم،

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i u^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} u^{(i)}(x) \frac{\partial^{m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{m-i-1}}.$$

در نتیجه ضرب داخلی به فرم زیر تبدیل می‌شود،

$$\begin{aligned} \langle u(x), R_y(x) \rangle_{W_r^m[a, b]} &= \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} u^{(i)}(b) \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b u(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \end{aligned} \quad (۹.۱)$$

با استفاده از تعریف تابع دلتای دیراک^۱ و انتگرال آن روی بازه $(-\infty, +\infty)$ و همچنین مفروضات زیر، خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی در رابطه (۹.۱) برقرار می‌شود،

$$\delta(x-y) = \begin{cases} 0 & x \neq y, \\ \infty & x = y, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\delta(x-y)dx = u(y),$$

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \\ (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (10.1)$$

مشخص است زمانی که $x \neq y$ ، تابع $R_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن زیر با مرتبه $2m$ است،

$$(-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = 0, \quad (11.1)$$

با شرایط مرزی زیر،

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \\ (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (12.1)$$

چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل (۱۱.۱) برابر $\lambda^{2m} = 0$ است که دارای ریشه تکراری صفر از مرتبه تکرار $2m$ است، بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱۱.۱) با شرایط مرزی (۱۲.۱) به صورت زیر است،

$$R_y(x) = \begin{cases} \ell R_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1} & x \leq y, \\ r R_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1} & x > y, \end{cases} \quad (13.1)$$

حال برای بدست آوردن تابع هسته بازتولیدی $R_y(x)$ کافی است که ثابتهای $c_i(y)$ ، $d_i(y)$ که $i = 1, 2, \dots, 2m$ را محاسبه کنیم. مشخص است برای محاسبه این $2m$ مجهول، نیاز به $2m$ معادله داریم که در ادامه نحوه بدست آوردن آنها را توضیح می‌دهیم. با استفاده از تعریف انتگرال تابع دلتای دیراک روی بازه $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ و رابطه

$$(-1)^m \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x-y),$$

$$\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \delta(x-y)dx = 1, \quad \varepsilon > 0,$$

^۱ Dirac Delta Function

داریم،

$$\begin{cases} (-1)^m \left(\frac{\partial^{m-1} r R_y(y+\varepsilon)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} \ell R_y(y-\varepsilon)}{\partial x^{m-1}} \right) = 1, \\ \frac{\partial^i \ell R_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r R_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, m-2 \end{cases} \quad (14.1)$$

رابطه (14.1)، m مورد نیاز برای محاسبه‌ی ثابتهای $c_i(y)$ ، $d_i(y)$ را فراهم می‌آورد، و با استفاده از شرایط مرزی (12.1) می‌توانیم m معادله دیگر را بدست بیاوریم. بنابراین با استفاده از این m معادله به راحتی می‌توان تابع هسته بازتولیدی $R_y(x)$ را تعیین کرد. در ادامه برخی از خواص تابع هسته بازتولیدی $R_y(x)$ را می‌آوریم که اثبات آنها در مرجع [35] یافت می‌شود.

گزاره 14.11.1. قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را هسته بازتولیدی مربوط به فضای $W_p^m[a, b]$ ، آنگاه داریم

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^1[a, b], \quad i + j = m - 1.$$

نتیجه 15.11.1. تابع زیر یک تابع مطلقاً پیوسته در بازه $[a, b]$ است،

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad 0 \leq i + j \leq m - 2.$$

از نتیجه و گزاره فوق، قضیه زیر را داریم.

قضیه 16.11.1. قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را هسته بازتولیدی فضای $W_p^m[a, b]$ ، آنگاه داریم

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in W_p^m[a, b], \quad i + j = m - 1.$$

قضیه 17.11.1. قرار می‌دهیم $W_p^m[a, b]$ را یک فضای هسته بازتولیدی و $f_n(x)$ ، $f(x) \in W_p^m[a, b]$ که $(n = 1, 2, \dots)$ اگر تابع $f_n(x)$ همگرا باشد به تابع $f(x)$ به مفهوم نرم $\|\cdot\|_{W_p^m}$ ، آنگاه تابع $f_n^{(k)}(x)$ همگرا می‌باشد به تابع $f^{(k)}(x)$ به طور یکنواخت، که $0 \leq k \leq m - 1$.

5.11.1 زیر فضاهای بسته^۱ فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$

ما در این بخش زیرفضای بسته ${}^\circ W_p^m[a, b]$ از فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ را با اعمال کردن یک سری شرایط مرزی بر روی $W_p^m[a, b]$ می‌سازیم. ابتدا فضای تابعی ${}^\circ W_p^m[a, b]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$${}^\circ W_p^m[a, b] = \left\{ u(x) \mid u(x) \in W_p^m[a, b], u'(a) = 0, u(b) = 0 \right\}$$

به راحتی همانند فضای $W_p^m[a, b]$ ثابت می‌شود که ${}^\circ W_p^m[a, b]$ یک فضای هسته بازتولیدی هیلبرت است. تابع فضای هسته بازتولیدی ${}^\circ W_p^m[a, b]$ را $Q_y(x)$ می‌نامیم و اکنون درصدد پیدا کردن تابع $Q_y(x)$ هستیم و قابل ذکر است که

¹Closed Subspaces

نحوه پیدا کردن $Q_y(x)$ کاملاً شبیه به روش پیدا کردن تابع $R_y(x)$ است. مشخص است که $Q_y(x)$ باید در ضرب داخلی زیر صدق کند،

$$\begin{aligned} \langle u(x), Q_y(x) \rangle_{W_+^m[a,b]} &= \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} u^{(i)}(b) \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} \\ &+ (-1)^m \int_a^b u(x) \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} dx \end{aligned}$$

و بنابراین تابع $Q_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر است، با این تفاوت که به خاطر نوع تعریف فضای ${}^\circ W_+^m[a, b]$ دارای دوشروط مرزی متفاوت نسبت به محاسبه تابع $R_y(x)$ است.

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^m \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} = \delta(x - y), \\ \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1 \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (15.1)$$

همانند قبل مشخص است که زمانی که $x \neq y$ است آنگاه تابع $Q_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل مرتبه $2m$ خطی همگن زیر،

$$(-1)^m \frac{\partial^m Q_y(x)}{\partial x^m} = 0, \quad (16.1)$$

با شرایط مرزی،

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^i Q_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{m-i-1} Q_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m-1 \\ Q_y(b) = 0, \\ \frac{\partial Q_y(a)}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (17.1)$$

است. چند جمله‌ای مشخصه معادله دیفرانسیل (۱۶.۱) برابر $\lambda^{2m} = 0$ است که دارای ریشه تکراری صفر از مرتبه تکرار $2m$ است، بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل (۱۶.۱) با شرایط مرزی (۱۷.۱) به صورت زیر است،

$$Q_y(x) = \begin{cases} \ell Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1} & x \leq y, \\ r Q_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1} & x > y, \end{cases} \quad (18.1)$$

اکنون با استفاده از معادلات حاصل از $2m$ تا شرط مرزی (۱۷.۱) و همچنین $2m$ معادله زیر، که با استفاده از انتگرال از دو طرف رابطه $(-1)^m \frac{\partial^{2m} Q_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y)$ روی بازه $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ بدست می‌آید،

$$\begin{cases} (-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} r R_y(y+\varepsilon)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} \ell R_y(y-\varepsilon)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1, \\ \frac{\partial^i \ell Q_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r Q_y(y)}{\partial x^i}, \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2 \end{cases} \quad (19.1)$$

می‌توان ثابتهای $c_i(y), d_i(y)$ در تابع بازتولیدی (۱۶.۱) را بدست آورد.

قضیه ۱۸.۱۱.۱. فضای هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$ ، یک زیرفضای بسته از فضای $W_p^m[a, b]$ است [۳۵].

مثال ۱۹.۱۱.۱. به عنوان مثال تابع‌های بازتولیدی $Q_y(x), R_y(x)$ به ترتیب برای فضاهای هسته بازتولیدی $W_p^r[0, 1]$ و $W_p^r[0, 1]$ به صورت زیر هستند.

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{x^0}{11^0} - \frac{x^1 y}{11^1} + \frac{x^2 y^2}{11^2} + \frac{x^3 y^3}{11^3} + xy + 1 & x \leq y, \\ \frac{1}{11} x^2 (y^3 + 3y^2) + \frac{1}{11} x (24y - y^4) + \frac{1}{11} (y^5 + 12^0) & x > y, \end{cases}$$

$$Q_y(x) = \begin{cases} \frac{x^0(-y^0 + 5y^1 - 10y^2 + 3^0 y^3 + 3^6)}{1872^0} + \frac{x^1(y^0 - 5y^1 + 10y^2 + 3^0 y^3 - 15^6 y + 12^0)}{3744} + \frac{x^2(-y^0 + 5y^1 - 10y^2 + 12^6 y^3 - 12^0)}{1872} \\ + \frac{1}{6336} x^3 (-y^0 + 5y^1 - 10y^2 + 12^6 y^3 - 12^0) + \frac{1}{156} (-y^0 + 5y^1 - 10y^2 + 3^0 y^3 + 3^6), & x \leq y, \\ \frac{x^0(-y^0 + 5y^1 - 10y^2 + 3^0 y^3 - 12^0)}{1872^0} + \frac{x^1(y^0 - 5y^1 + 10y^2 + 3^0 y^3 + 12^0)}{3744} + \frac{x^2(-y^0 + 5y^1 - 10y^2 + 3^0 y^3 - 12^0)}{1872} \\ + \frac{1}{6336} x^3 (-y^0 + 5y^1 + 42y^2 + 12^6 y^3 - 12^0) - \frac{xy^1}{11} + \frac{3y^0 + 5y^1 - 10y^2 - 3^0 y^3 + 3^6}{156^0}, & x > y, \end{cases}$$

۶.۱۱.۱ تعریف تابع دوبعدی کاملاً پیوسته^۱ و خواص آن

قرار می‌دهیم $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$

تعریف ۲۰.۱۱.۱. تابع $f(x, y)$ را روی ناحیه D فرض کنید، قرار می‌دهیم

$$\{I_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]\}_{k=1}^n$$

^۱ Completely Continuous

را یک مجموعه از ناحیه‌های متقابلاً گسسته که $I_k \subset D$. اگر $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ به طوری که، $\sum_{i=1}^n |f(I_i)| < \varepsilon$ برای $\sum_{i=1}^n |I_i| < \delta$ و

$$f(I_i) = f(b_i, d_i) - f(b_i, c_i) - f(a_i, d_i) + f(a_i, c_i)$$

و $f(a, y), f(x, c)$ به ترتیب تابع‌های مطلقاً پیوسته نسبت به متغیر x, y آنگاه $f(x, y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۱.۱۱.۱. اگر $f(x, y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D باشد، آنگاه $\forall y \in [c, d]$ تابع $f(x, y)$ یک تابع مطلقاً پیوسته نسبت به متغیر x بر روی بازه $[a, b]$ است و به طور مشابه $\forall x \in [a, b]$ تابع $f(x, y)$ یک تابع مطلقاً پیوسته نسبت به متغیر y بر روی بازه $[c, d]$ است.

گزاره ۲۲.۱۱.۱. اگر $f(x, y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D باشد، آنگاه $f(x, y)$ یک تابع پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۳.۱۱.۱. اگر $f(x, y)$ بر روی ناحیه D انتگرال پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds, (x, y) \in D$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۴.۱۱.۱. اگر $f(x)$ یک تابع مطلقاً پیوسته بر روی بازه $[a, b]$ باشد، آنگاه $f(x)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

گزاره ۲۵.۱۱.۱. اگر $f(x), g(y)$ تابع‌های مطلقاً پیوسته بر روی بازه‌های $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، آنگاه تابع $f(x)g(y)$ یک تابع کاملاً پیوسته بر روی ناحیه D است.

برای ملاحظه اثبات گزاره‌های فوق رجوع شود به [۳۵].

۷.۱۱.۱ فضای هسته بازتولیدی دوبعدی $W_r^{(m,n)}(D)$

فضای تابعی دوبعدی $W_r^{(m,n)}(D)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_r^{(m,n)}(D) = W_r^m[a, b] \otimes W_r^n[c, d] \\ = \left\{ u(x, t) \mid \frac{\partial^{m+n} u(x, t)}{\partial x^m \partial t^n} \in L^r(D), (x, t) \in D \right\}$$

همچنین ضرب داخلی و نرم را $\forall u_1(x, t), u_2(x, t) \in W_r^{(m,n)}(D)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1(x, t), u_2(x, t) \rangle_{W_r^{(m,n)}(D)} = \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u_1(a, t) \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u_2(a, t) \right] dt \\ + \sum_{j=0}^{n-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j} u_1(x, c), \frac{\partial^j}{\partial t^j} u_2(x, c) \right\rangle_{W_r^m[a, b]} \\ + \int_a^b \int_c^d \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} u_1(x, t) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial t^n} u_2(x, t) dx dt$$

$$\|u(x, t)\|_{W_{\gamma}^{(m,n)}(D)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_{\gamma}^{(m,n)}(D)}}, \quad u_1(x, t), u_2(x, t) \in W_{\gamma}^{(m,n)}(D),$$

به راحتی می توان ثابت کرد که فضای تابعی $W_{\gamma}^{(m,n)}(D)$ یک فضای ضرب داخلی است.

قضیه ۲۶.۱۱.۱. فضای تابعی $W_{\gamma}^{(m,n)}(D)$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۲۷.۱۱.۱. قرار می دهیم $f(x, y), g_1(x), g_2(y) \in W_{\gamma}^{(m,n)}(D)$ آنگاه،

$$\langle f(x, y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_{\gamma}^{(m,n)}(D)} = \langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{W_{\gamma}^m}, g_2(y) \rangle_{W_{\gamma}^n}.$$

نتیجه ۲۸.۱۱.۱. قرار می دهیم $f_1(x), f_2(y), g_1(x), g_2(y) \in W_{\gamma}^{(m,n)}(D)$ آنگاه،

$$\langle f_1(x), f_2(y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{W_{\gamma}^{(m,n)}(D)} = \langle f_1(x), g_1(x) \rangle_{W_{\gamma}^m} \langle f_2(y), g_2(y) \rangle_{W_{\gamma}^n}.$$

نتیجه ۲۹.۱۱.۱. اگر تابع $f(x) \in W_{\gamma}^m[a, b]$ آنگاه برای $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$\|f(x)\|_{W_{\gamma}^m[a, b]} = \|f(x)\|_{W_{\gamma}^{(m,n)}}.$$

قضیه ۳۰.۱۱.۱. فضای تابعی دوبعدی $W_{\gamma}^{(m,n)}(D)$ یک فضای هسته بازتولیدی است و تابع هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است

$$K_{(\eta, \xi)}(x, t) = R_{\eta}(x)Q_{\xi}(t).$$

که $R_{\eta}(x)$ و $Q_{\xi}(t)$ به ترتیب هسته های بازتولیدی فضای فضاهای $W_{\gamma}^m[a, b]$ و $W_{\gamma}^n[c, d]$ هستند.

برای ملاحظه اثبات قضیه ها و نتایج فوق رجوع شود به [۳۵]. اکنون پس از معرفی کامل مقدمات مربوط به فضای هسته بازتولیدی و تابع فضای هسته بازتولیدی و قضیه های مربوطه، نوبت به معرفی روش هسته بازتولیدی و نحوه پیاده سازی آن برای حل معادله دیفرانسیل می رسد.

فصل ۲

کلیات روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت و روش تحلیل
هموتوپی برای حل معادله دیفرانسیل

۱.۲ روش هسته بازتولیدی

۱.۱.۲ مقدمه

روش هسته بازتولیدی یک روش عددی قدرتمند برای حل طیف وسیعی از معادلات دیفرانسیل می باشد، با استفاده از این روش و تکنیک های ابتکاری حتی می توان طیف وسیعی از مسائل دشوارتر را حل کرد و تقریب های مناسبی برای آنها بدست آورد، به عنوان مثال نمونه هایی از مسائلی که با روش هسته بازتولیدی حل شده اند در زیر آورده شده است [۳۷، ۳۵-۴۶].

- 1-Fractional differential equations
- 2-delay integro-differential equations
- 3-Nonlinear Volterra-Fredholm integrals
- 4-Nonlinear integro-differential equations
- 5-Variable-Coefficient Burgers equation
- 6-Damped Nonlinear Klein-Gorden
- 7-Linear and nonlinear partial differential equations
- :

مسائل اختشاشی منفرد و مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد توسط محققین مختلفی با استفاده از روش هسته بازتولیدی در سالهای اخیر حل شده اند، در حقیقت ما به دنبال استفاده از ایده ها و تکنیک های ابتکاری در این روش هستیم که بتوانیم تقریب ها و دقت های موجود را بهبود ببخشیم، و آن دسته از این مسائل که تابحال با روش هسته بازتولیدی حل نشده اند را حل کرده و با دقت های مناسبی جواب آنها را تقریب بزنیم. به طور کلی برای حل معادله دیفرانسیل با روش هسته بازتولیدی سه حالت خاص وجود دارد که با تغییر اندکی در نحوه استفاده از هسته بازتولیدی مرتبط با فضای جواب هر معادله دیفرانسیل، به وجود می آید. ابتدا ما هر کدام از حالت ها را به صورت کلی بیان می کنیم و سپس به بررسی اجمالی هر کدام می پردازیم. البته یادآوری می شود که در هر سه حالت بعد از ساختن هسته بازتولیدی متناسب با فضای عملگر مسئله، پایه های آن فضا را از روی هسته بازتولیدی اش بدست آورده و جواب را به صورت ترکیب خطی از این پایه ها نوشته و با بدست آوردن ضرائب مجهول جواب مساله را محاسبه می کنیم.

حالت ۱. حالت اول حالتی است که اکثر کسانی که با روش هسته بازتولیدی آشنایی نسبی داشته باشند آنرا می شناسند. در این حالت ما روش هسته بازتولیدی را با استفاده از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت^۱ پیاده سازی می کنیم. به این ترتیب که ابتدا فضای بازتولیدی عملگر مسئله را مشخص کرده و سپس هسته بازتولیدی متناسب با آن فضا را می سازیم و بعد از ساختن پایه ها از روی هسته بازتولیدی، پایه ها را با استفاده از الگوریتم گرام اشمیت متعامد کرده و در آخر جواب مسئله را بر حسب پایه ها بسط می دهیم.

حالت ۲. حالت دوم که در سالهای اخیر توسط یولان ونگ^۲ و همکارانش برای اولین بار مطرح شده [۴۷-۴۹] و مورد توجه تعداد کمی از محققین قرار گرفته، روش هسته بازتولیدی بدون استفاده از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت است. در این حالت هم ابتدا ما هسته بازتولیدی متناسب با فضای بازتولیدی عملگر مسئله را می سازیم و سپس پایه ها را به صورت مستقیم از روی هسته بازتولیدی بدست آورده و جواب مسئله را به صورت ترکیب خطی از همین پایه ها بسط داده و با محاسبه ی ثابتها جواب تقریبی مسئله را بدست می آوریم.

^۱ Gram-Schmidt Orthogonalization Process^۲ Yulan Wang

حالت ۳. حالت سوم نیز اولین بار توسط یولان ونگ و همکارانش معرفی شده و دقیقاً همانند حالت دوم است منتها یک تفاوت کوچک با حالت دوم دارد و آن در نحوه تولید پایه‌ها از روی هسته بازتولیدی عملگر مسئله است. اگر بخواهیم دقیقتر بگوییم حالت سوم ترکیبی از حالت اول و دوم است که در آن پایه‌ها با استفاده از تکنیک حالت اول ساخته می‌شود ولی فرایند متعامد سازی همانند حالت دوم درون آن حذف می‌شود.

نکته ۱.۱.۲. در اینجا لازم به توضیح است که روشها و حالت‌های مختلف دیگری در روند حل معادله دیفرانسیل با استفاده از روش هسته بازتولیدی توسط محققین مختلفی آورده شده است که ممکن است شامل بعضی یا تمامی از فرآیندهای ذکر شده در حالت دوم و سوم باشند و یا حتی تماماً با آنچه در تکنیک بدون متعامدسازی آورده شده فرق داشته باشند، ولی باز تاکید می‌شود که روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند متعامدسازی گرام اشمیت اولین بار توسط یولان ونگ و همکارانش معرفی شده و همچنین بسیار دیگری از نوآوری‌ها در زمینه حل معادله دیفرانسیل با روش هسته بازتولیدی که فرایند متعامدسازی در آن حذف شده توسط او و همکارانش ارائه شده است. برای اطلاعات بیشتر چند مقاله در منابع آورده شده که مربوط به روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی و با ماتریس ضرب داخلی و همچنین روش هسته بازتولیدی بدون فرآیند همگن سازی است که با مقایسه اجمالی آنها می‌توان به راحتی به این نکته پی برد [۵۰-۵۲، ۴۵].

نکته ۲.۱.۲. یکی از مزیت‌های اصلی روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی (حالت ۳ و ۲) کاهش چشمگیر زمان اجرای برنامه‌های کامپیوتری در مقایسه با روش حالت ۱ است که دارای فرایند به شدت زمانبر متعامدسازی است. کاهش زمان اجرا در برنامه‌های کامپیوتری برای روش‌های عددی از چند جهت قابل بررسی است، اول نحوه کدنویسی و شکستن الگوریتم کلی حل مسئله به چند الگوریتم ساده و دارای حجم محاسباتی کمتر که مشخص است نیاز به مهارت و تبحر در برنامه نویسی و شناخت نرم‌افزارها لازمه اصلی آن است. دوم، تغییر در ماهیت ریاضی الگوریتم یا بخش عددی الگوریتم که لازمه‌ی آن شناخت دقیق روند کار الگوریتم حل و تسلط کامل به روش عددی است.

نکته ۳.۱.۲. روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی (حالت ۳ و ۲) از جهت ایجاد تغییر در روند حل عددی الگوریتم روش هسته بازتولیدی، تغییر خلاقانه‌ای ایجاد کرده و با استفاده از مفاهیم ساده‌ای همچون بسط جواب معادله به فرم سری و مفهوم تابع مانده و حل دستگاه معادلات جبری، سبب ایجاد تغییر در الگوریتم حل شده و زمان اجرای حل مسئله با استفاده از برنامه کامپیوتری را به شدت کاهش داده و محققین را در بررسی سریعتر و رسیدن و به نتایج روشن و دقیقتر در این تکنیک کمک فراوان می‌کند. علاوه بر این به صورت تحقیقی مشاهده شده است که حتی در بیشتر مسئله‌هایی که با این روش حل می‌شوند دقت‌های حاصل حداقل یک رقم بهتر از تقریب‌هایی هست که از روش با فرایند متعامدسازی بدست می‌آید. البته این موضوع خود به تنهایی می‌تواند یک زمینه تحقیق مستقل برای کارهای آینده ایجاد کند.

پس از معرفی کلی سه حالت مختلف در پیاده‌سازی روش هسته بازتولیدی در این رساله، اکنون به تشریح کامل هر کدام از آنها می‌پردازیم. قابل ذکر است که ما در اینجا هر سه حالت را می‌آوریم ولی برای حل مسائل اختشاشی منفرد و مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با رفتار لایه مرزی، از حالت دوم استفاده می‌کنیم.

۲.۱.۲ فضاهای بازتولیدی و پایه‌های مربوط به آن برای معادله دیفرانسیل مقدار مرزی غیرخطی اختشاشی منفرد
معادله دیفرانسیل مقدار مرزی غیرخطی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{cases} \mathbb{L}(u(x)) = \mathbb{N}(u(x)) + \mathbb{F}(x) \\ u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta \end{cases} \quad (1.2)$$

که $\mathbb{L}(u(x)) \equiv \varepsilon a(x)u''(x) + \frac{1}{b(x)}u'(x) + \frac{1}{c(x)}u(x)$ و $a(x), b(x), c(x), \mathbb{F}(x)$ تابع‌های به قدر کافی هموار هستند به طوری که معادله (۱.۲) جواب داشته باشد و جواب آن منحصر به فرد باشد، و همچنین داریم $b(0)b(1) = 0$ و $c(0)c(1) = 0$ و $\mathbb{N}(u(x))$ عملگر قسمت غیرخطی معادله است و α, β ثابت هستند.

قدم اول در حل یک معادله دیفرانسیل با روش هسته بازتولیدی همگن کردن معادله و سپس انتخاب مناسب فضای هسته بازتولیدی تابع مجهول معادله و همچنین عملگر معادله می‌باشد، برای اینکار عملگر معادله اطلاعات خوب و مهمی در اختیار ما می‌گذارد که برای تعیین فضای مناسب عملگر و تابع مجهول معادله بسیار مفید است. در معادله (۱.۲) با توجه به اینکه بزرگترین مشتق معادله از مرتبه دو است و ما می‌خواهیم که یک جواب تقریبی برای مسئله در فضای هسته بازتولیدی بدست بیاوریم فرض می‌کنیم که تابع مجهول عملگر یا همان $u(x)$ در فضای $W_1^3[0, 1]$ باشد که در اینصورت مشتق اول آن یعنی $u'(x)$ در فضای است $W_1^2[0, 1]$ ، و مشتق دوم آن، $u''(x)$ در فضای $W_1^1[0, 1]$ است. همچنین داریم،

$$W_1^3[0, 1] \subset W_1^2[0, 1] \subset W_1^1[0, 1],$$

پس بدیهی است، عملگر مسئله در بزرگترین فضایی که مجموع همه‌ی این فضاها است می‌باشد و بنابراین $\mathbb{L}(u(x))$ در فضای $W_1^1[0, 1]$ است. نکته دیگری که نباید در اینجا فراموش شود این است که فضای $W_1^3[0, 1]$ که تابع مجهول معادله $u(x)$ در آن فرض شده همراه با دو شرط مرزی $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$ است که پس از همگن سازی باید در تولید تابع هسته بازتولیدی لحاظ شوند، پس فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$${}^0W_1^3[0, 1] = \left\{ u(x) \mid u''(x) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'''(x) \in L^2[0, 1], x \in [0, 1], u(0) = u(1) = 0 \right\},$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای ${}^0W_1^3[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1(x), u_2(x) \rangle_{{}^0W_1^3[0, 1]} = \sum_{i=0}^2 u_1^{(i)}(0)u_2^{(i)}(0) + \int_0^1 u_1'''(x)u_2'''(x)dx,$$

$$\|u(x)\|_{{}^0W_1^3[0, 1]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{{}^0W_1^3[0, 1]}}, \quad \forall u_1(x), u_2(x) \in {}^0W_1^3[0, 1].$$

همچنین فضای عملگر معادله به صورت $W_1^1[0, 1] \rightarrow {}^0W_1^3[0, 1] : \mathbb{L}$ است. به راحتی می‌توان ثابت کرد که $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی کراندار است [۳۵]، با این فرض $\mathbb{L}^* : W_1^1[0, 1] \rightarrow {}^0W_1^3[0, 1]$ که عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ است را به صورت $\mathbb{L}^* : W_1^1[0, 1] \rightarrow {}^0W_1^3[0, 1]$ تعریف می‌کنیم.

نکته ۴.۱.۲. در بعضی مواقع مخصوصاً زمان‌هایی که به دنبال ارائه یک آنالیز خطا از روش هسته بازتولیدی هستیم یا به دنبال تقریب مشتق‌های از مرتبه بالاتر تابع مجهول معادله هستیم نیاز داریم که فضاهای هسته بازتولیدی کوچکتری را اختیار کنیم در این صورت است که باید فضای بازتولیدی عملگر هم متناسب با فضای بازتولیدی انتخابی برای تابع مجهول مسئله باشد، به عنوان مثال اگر بخواهیم تابع مجهول معادله (۱.۲) را به ترتیب در فضاهای بازتولیدی $W_1^4[0, 1]$ و $W_1^5[0, 1]$ فرض کنیم، آنگاه فضای عملگر به صورت زیر می‌شود،

$$\mathbb{L} : {}^0W_1^4[0, 1] \rightarrow W_1^1[0, 1]$$

$$\mathbb{L} : {}^0W_1^5[0, 1] \rightarrow W_1^1[0, 1].$$

قرار می‌دهیم $r_y(x)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $W_1^1[0, 1]$ و با مشخص کردن y با استفاده از نقاط $x_i \in [0, 1]$ داریم $\varphi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که $\varphi_i(x)$ پایه‌های فضای $W_1^1[0, 1]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\psi_i(x) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x).$$

با فرض اینکه عملگر $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی کراندار است، لم زیر را داریم [۳۵]. لم زیر یک پایه کامل برای فضای ${}^{\circ}W_{\mathcal{P}}^{\mathcal{F}}[0, 1]$ ارائه می‌دهد که می‌توان هر کدام از اعضای این فضا را با استفاده از این پایه‌ها بسط داد.

لم ۵.۱.۲. مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم، آنگاه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه کامل برای فضای هسته بازتولیدی ${}^{\circ}W_{\mathcal{P}}^{\mathcal{F}}[0, 1]$ است.

قرار می‌دهیم $R_y(x)$ را تابع هسته بازتولیدی فضای ${}^{\circ}W_{\mathcal{P}}^{\mathcal{F}}[0, 1]$

$$R_y(x) = \begin{cases} (x^5(156 - 12y - 3y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/18720 + 1/156x(36y - 3y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5) + 1/624x^2(-12y + 12y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5) + (x^3(-12y + 12y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/1872 + (x^4(-36y + 3y^2 + 10y^3 - 5y^4 + y^5))/3744, & x \leq y, \\ y^5/120 + 1/312x(72y - 6y^2 - 2y^3 - 3y^4 - 2y^5) + (x^3(-12y - 3y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/1872 + (x^5(-12y - 3y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5))/18720 + 1/624x^2(-12y + 12y^2 + 42y^3 + 5y^4 - y^5) + (x^4(12y + 3y^2 + 10y^3 - 5y^4 + y^5))/3744, & x > y, \end{cases}$$

بنابراین نحوه محاسبه $\psi_i(x)$ به صورت زیر است،

$$\psi_i(x) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x) = \langle \mathbb{L}^* \varphi_i(y), R_x(y) \rangle_{{}^{\circ}W_{\mathcal{P}}^{\mathcal{F}}} = \langle \varphi_i(y), \mathbb{L}_y R_x(y) \rangle_{W_{\mathcal{P}}^{\mathcal{F}}} = \mathbb{L}_y R_x(y) \Big|_{y=x_i} \\ a(y) \frac{\partial^2 R_x(y)}{\partial y^2} \Big|_{y=x_i} + \frac{1}{b(y)} \frac{\partial R_x(y)}{\partial y} \Big|_{y=x_i} + \frac{1}{c(y)} R_x(y) \Big|_{y=x_i}.$$

با استفاده از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت پایه‌های $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ را به پایه‌های متعامد یک $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای بازتولیدی ${}^{\circ}W_{\mathcal{P}}^{\mathcal{F}}[0, 1]$ تبدیل می‌کنیم به طوری که در شرط زیر صدق کنند،

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x)$$

که β_{ik} ثابت‌های متعامدسازی هستند.

۳.۱.۲ روش هسته بازتولیدی-حالت ۱

۴.۱.۲ تقریب جواب معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی با استفاده از حالت ۱

قضیه ۶.۱.۲. قرار می‌دهیم مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ را یک مجموعه‌ای چگال از بازه $[0, 1]$ ، آنگاه جواب تحلیلی معادله (۱.۲) به فرم زیر است.

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (\mathbb{F}(x_k) + \mathbb{N}u(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (2.2)$$

^۱ Normal Orthogonal Basis

برای ملاحظه اثبات قضیه فوق به [۳۵] رجوع کنید. اکنون می‌خواهیم روش بدست آوردن جواب تقریبی را از روی سری (۲.۲) شرح دهیم. اهمیت این بخش باتوجه به غیرخطی بودن مسئله و فرم کلی حل مسائل غیرخطی که به صورت تبدیل آن به یک تعداد تکرار برای حل مسئله خطی متناظر آن است، دوچندان می‌شود. برای حالتی که معادله (۱.۲) خطی است یعنی $\mathbb{N}(u(x)) = 0$ جواب تقریبی به صورت زیر محاسبه می‌شود،

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \mathbb{F}(x_k) \bar{\psi}_i(x). \quad (3.2)$$

که مجموعه نقاط $\{x_i\}_{i=1}^n$ متعلق به بازه $[0, 1]$ است و $u_n(x)$ را جواب تقریبی معادله دیفرانسیل با n تا نقطه در بازه $[0, 1]$ یا n تا پایه‌ی حاصل از هسته بازتولیدی فضای $W_1^r[0, 1]$ می‌نامیم.

۵.۱.۲ آنالیز همگرایی حالت ۱ برای معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنید $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ سیستم متعامد یک‌ه از فضای هیلبرت V باشند در این صورت نتایج زیر را داریم [۵۳]،
۱. نامساوی بسل^۱

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle v, v_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2, \quad \forall v \in V$$

۲. سری $\sum_{i=1}^{\infty} \langle v, v_i \rangle v_i$ در V همگراست.

۳. اگر $\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i \in V$ آنگاه $a_i = \langle v, v_i \rangle$.

۴. سری $\sum_{i=1}^{\infty} a_i v_i$ در V همگرا است اگر و تنها اگر $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$.

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنید $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ سیستم متعامد یک‌ه از فضای هیلبرت V باشند در این صورت $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ پایه‌های کامل و متعامد یک‌ه برای فضای هیلبرت V هستند [۵۳].

قضیه ۹.۱.۲. (قضیه همگرایی) اگر سری (۲.۲) برای حالتی که $\mathbb{N}(u(x)) = 0$ یک جواب تحلیلی برای معادله (۱.۲) در فضای بازتولیدی $W_1^r[0, 1]$ باشد و

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_1^r} \bar{\psi}_i(x),$$

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x),$$

که $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ پایه‌های متعامد یک‌ه از فضای $W_1^r[0, 1]$ است، آنگاه

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \mathbb{F}(x_k) \bar{\psi}_i(x),$$

جواب تقریبی معادله (۱.۲) است و داریم $\|u_n(x) - u(x)\|_{W_1^r} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

^۱ Bessel's Inequality

اثبات. داریم،

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_T^r} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle_{W_T^r} \bar{\psi}_i(x) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), \mathbb{L}^* \varphi_k \rangle_{W_T^r} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle \mathbb{N}(u(x)) + \mathbb{F}(x), \varphi_k \rangle_{W_T^r} \bar{\psi}_i(x) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (\mathbb{N}(u(x_k)) + \mathbb{F}(x_k)) \bar{\psi}_i(x),
 \end{aligned}$$

و با توجه به قضیه ۷.۱.۲ و ۸.۱.۲ به راحتی ثابت می‌شود که $u_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_T^r}} u(x) \quad (n \rightarrow \infty)$

□

۶.۱.۲ تقریب جواب معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد غیرخطی با استفاده از حالت ۱

اما برای حالتی که معادله (۱.۲) غیرخطی است یعنی $\mathbb{N}(u(x)) \neq 0$ جواب تقریبی را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم، ابتدا سری (۲.۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x),$$

که

$$A_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (\mathbb{F}(x_k) + \mathbb{N}u(x_k)) \bar{\psi}_i(x).$$

در حقیقت A_i مجهول هستند که با استفاده B_i ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند، برای اینکار نیاز به یک تابع اولیه $u_1(x)$ داریم به طوری که در شرایط مرزی معادله صدق کند و تعریف می‌کنیم

$$u_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x), \quad (4.2)$$

که

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \beta_1(\mathbb{F}(x_1) + \mathbb{N}u_1(x_1)), \\
 u_1(x) &= B_1\bar{\psi}_1(x), \\
 B_2 &= \sum_{k=1}^2 \beta_{2k}(\mathbb{F}(x_k) + \mathbb{N}u_2(x_k)), \\
 u_2(x) &= B_1\bar{\psi}_1(x) + B_2\bar{\psi}_2(x), \\
 &\dots \\
 B_n &= \sum_{k=1}^n \beta_{nk}(\mathbb{F}(x_k) + \mathbb{N}u_n(x_k)), \\
 u_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^n B_k\bar{\psi}_k(x).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

۷.۱.۲ آنالیز همگرایی حالت ۱ برای مسئله غیرخطی

برای اثبات همگرایی جواب تقریبی حاصل از سری (۴.۲) با شرایط (۵.۲) از لم و قضیه زیر بهره می‌گیریم که اثبات آنها در [۳۵] آمده است.

لم ۱۰.۱.۲. اگر $u_n(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_1^r}} \bar{u}(x)$ و $x_n \rightarrow y$ و $u_n(x)$ آنگاه

$$u_n(x_n) \rightarrow \bar{u}(y) \quad (n \rightarrow \infty).$$

قضیه ۱۱.۱.۲. فرض کنید که $\|u_n(x)\|_{W_1^r}$ در رابطه (۴.۲) کراندار است، اگر $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در بازه $[0, 1]$ چگال باشند، آنگاه جواب تقریبی $u_n(x)$ همگرا است به جواب دقیق $u(x)$ در معادله (۱.۲) و جواب دقیق را به صورت زیر داریم

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i\bar{\psi}_i(x),$$

که B_i ها طبق رابطه (۵.۲) داده شده‌اند.

۸.۱.۲ روش هسته بازتولیدی-حالت ۲

۹.۱.۲ تقریب جواب معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی و غیرخطی با استفاده از حالت ۲

همانند حالت اول معادله دیفرانسیل (۱.۲) را با همه مفروضات ذکر شده در نظر می‌گیریم. همچنین فضای هسته بازتولیدی را همانند حالت اول $W_1^3[0, 1]$ در نظر گرفته و به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$${}^\circ W_1^3[0, 1] = \left\{ u(x) \mid u'''(x) \in L^2[0, 1], x \in [0, 1], u(0) = u(1) = 0 \right\},$$

علاوه بر این نرم و ضرب داخلی را برای فضای ${}^\circ W_1^3[0, 1]$ همانند حالت اول تعریف می‌کنیم. فضای عملگر معادله به صورت $\mathbb{L} : {}^\circ W_1^3[0, 1] \rightarrow W_1^1[0, 1]$ است. فرض می‌کنیم $\mathbb{L}(u_m(x))$ یک عملگر دیفرانسیلی معکوس‌پذیر خطی

کراندار باشد و عملگر غیرخطی $\mathbb{N}(u_{m-1}(x))$ نیز پیوسته باشد. قرار می‌دهیم $m = 1$ و فرض می‌کنیم که $u_{m-1}(x)$ برای $m = 1$ یک تابع اولیه باشد به طوری که $u_0(x)$ در شرایط مرزی مسئله (۱.۲) صدق می‌کند و برای هر تکرار $m = 2, 3, \dots$ تابع $u_{m-1}(x)$ را محاسبه می‌کنیم. یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ مانند $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$\phi_i(x) = R_y(x)|_{y=x_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_1^2[0, 1]$ و $r_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_1^1[0, 1]$ می‌باشند. همچنین به راحتی ثابت می‌شود که $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل برای فضای $W_1^2[0, 1]$ است. $\varphi_i(x) = r_{x_i}(x)$ که $\varphi_i(x)$ پایه‌های فضای $W_1^1[0, 1]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\phi_i(x) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x).$$

که $\mathbb{L}^*$ عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ است.

قضیه ۱۲.۱.۲. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ باشد و $\mathbb{L}^{-1}$ وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (۱.۲) به صورت زیر است

$$u_m(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \phi_i(x), \quad m = 1, 2, \dots \quad (۶.۲)$$

که $c_{i,m}$ ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند و m تعداد تکرارها برای جمله غیرخطی مسئله $\mathbb{N}(u_{m-1}(x))$ است.

اثبات.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(u_m(x_j)) &= \langle \mathbb{L}(u_m(x)), \varphi_j(x) \rangle = \langle u_m(x), \mathbb{L}^* \varphi_j(x) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \phi_i(x), \mathbb{L}^* \varphi_j(x) \right\rangle = \\ &= \left\langle \mathbb{L} \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \phi_i(x) \right), \phi_j(x) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \mathbb{L}(\phi_i(x)), \phi_j(x) \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,m} \mathbb{L}(\phi_i(x))|_{x=x_j} = \\ &= \mathbb{N}(u_{m-1}(x))|_{x=x_j} + \mathbb{F}(x_j), \quad j = 1, 2, \dots \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

بنابراین $\mathbb{L}(u_m(x_j)) = \mathbb{N}(u_{m-1}(x))|_{x=x_j} + \mathbb{F}(x_j)$ و از آنجا که $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[0, 1]$ است در نتیجه داریم $\mathbb{L}(u_m(x)) = \mathbb{N}(u_{m-1}(x)) + \mathbb{F}(x)$ و جواب تقریبی مسئله (۱.۲) با n تا نقطه به صورت زیر است،

$$u_{n,m}(x) = \sum_{i=1}^n c_{i,m} \phi_i(x), \quad (۷.۲)$$

□

که m باید به قدر کافی بزرگ باشد.

اکنون نحوه محاسبه ضرایب مجهول $c_{i,m}$ ، $i = 1, 2, \dots$ $m = 1, 2, \dots$ را بیان می‌کنیم. با استفاده از جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ و قرار دادن آن در معادله (۱.۲) تابع مانده $\mathbb{R}_n(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{R}_n(x) = \mathbb{L}(u_{n,m}(x)) - \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) - \mathbb{F}(x), \quad (۸.۲)$$

اکنون ضرایب $c_{i,m}$ را طوری محاسبه می‌کنیم که ضرب داخلی زیر برابر صفر باشد، یعنی

$$\langle \mathbb{R}_n(x), \phi_j(x) \rangle_{\circ_{W_T}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (9.2)$$

با استفاده از تعریف تابع مانده و تعریف جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ داریم

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{R}_n(x), \phi_j(x) \rangle &= \langle \mathbb{L}(u_{n,m}(x)) - \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) - \mathbb{F}(x), \phi_j(x) \rangle \\ &= \langle \mathbb{L}(u_{n,m}(x)), \phi_j(x) \rangle - \langle \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) + \mathbb{F}(x), \phi_j(x) \rangle \\ &= \langle \mathbb{L}\left(\sum_{i=1}^n c_{i,m} \phi_i(x)\right), \phi_j(x) \rangle - \langle \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) + \mathbb{F}(x), \phi_j(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n c_{i,m} \langle \mathbb{L}(\phi_i(x)), \phi_j(x) \rangle - \langle \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x)) + \mathbb{F}(x), \phi_j(x) \rangle = 0, \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی به یک دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر می‌رسیم که با حل آن می‌توان ضرایب $c_{i,m}$ را محاسبه کرد.

$$\sum_{i=1}^n c_{i,m} \mathbb{L} \phi_i(x)|_{x=x_j} = \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x))|_{x=x_j} + \mathbb{F}(x_j), \quad m = 1, 2, \dots \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (10.2)$$

۱۰.۱.۲ آنالیز همگرایی حالت ۲ برای معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد خطی و غیرخطی

برای اثبات قضیه همگرایی در حالت دوم ما نیاز به یک سری تعاریف و قضیه‌ها و لم‌ها داریم که در ادامه آنها را می‌آوریم [۵۳].

تعریف ۱۳.۱.۲. (مجموعه‌ی فشرده)^۱ قرار می‌دهیم $\mathcal{B}$ را یک زیر مجموعه از فضای نرم‌دار $\mathcal{H}$ ، مجموعه $\mathcal{B}$ را فشرده می‌نامیم اگر هر دنباله $\{v_i\} \subset \mathcal{B}$ شامل یک زیردنباله‌ی همگرایی $\{v_{i_n}\}$ باشد که به یک عضو از $v \in \mathcal{B}$ همگراست.

تعریف ۱۴.۱.۲. (مجموعه‌ی نسبتاً فشرده) اگر $\mathcal{B}$ یک مجموعه‌ای باشد که بستار^۲ آن $(\overline{\mathcal{B}})$ فشرده باشد در این صورت $\mathcal{B}$ یک مجموعه نسبتاً فشرده^۳ می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۱.۲. (عملگر پیوسته)^۴ قرار می‌دهیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای نرم‌دار و عملگر $\mathbb{L} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ در $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ $v \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ پیوسته است اگر

$$\{\{v_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{L}), \quad v_n \rightarrow v \text{ در } \mathcal{H}_1\} \implies \{\mathbb{L}(v_n) \rightarrow \mathbb{L}(v) \text{ در } \mathcal{H}_2\}.$$

عملگر $\mathbb{L}$ را پیوسته می‌نامیم اگر در تمام دامنه خود $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ پیوسته باشد.

قضیه ۱۶.۱.۲. (عملگر پیوسته و کراندار)^۵ قرار می‌دهیم $\mathcal{H}_1$ و $\mathcal{H}_2$ دو فضای نرم‌دار و عملگر $\mathbb{L} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ یک عملگر خطی باشد آنگاه $\mathbb{L}$ را پیوسته می‌نامیم اگر و تنها اگر در $\mathcal{H}_1$ کراندار باشد.

^۱ Compact Set

^۲ Closure

^۳ Precompact Set

^۴ Continuous Operator

^۵ Bounded and Continuous Operator

قضیه ۱۷.۱.۲. (قضیه آرزلا-آسکلی)^۶ مجموعه $\mathcal{B}$ را در نظر می‌گیریم که $\mathcal{B} \subset C(D)$ و $D \subset \mathbb{R}$ بسته و کراندار است. فرض می‌کنیم که تابع‌ها در $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت کراندار و هم‌پیوسته^۷ باشند یعنی،

$$\sup_{y(x) \in \mathcal{B}} \|y(x)\|_{\infty} < \infty,$$

$$\forall \hat{x}, \check{x} \in D \quad \|(\hat{x} - \check{x})\| \leq \epsilon, \implies |y(\hat{x}) - y(\check{x})| \leq d_{\mathcal{B}}(\epsilon), \quad \forall y(x) \in \mathcal{B}$$

و $(\epsilon \rightarrow 0) \implies d_{\mathcal{B}}(\epsilon) \rightarrow 0$. آنگاه $\mathcal{B}$ یک مجموعه نسبتاً فشرده در $C(D)$ است.

لم ۱۸.۱.۲. اگر فرض کنیم $\mathcal{B} = \{u_{n,m}(x) \mid \|u_{n,m}(x)\|_{\circ W_r^r[\circ, 1]} \leq \zeta\}$ آنگاه $\mathcal{B}$ یک مجموعه فشرده در فضای $C[\circ, 1]$ است که ζ یک ثابت است.

اثبات. با استفاده از خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی داریم

$$\|R_x(y)\|^{\circ} = \langle R_x(y), R_x(y) \rangle = R_x(x) < \zeta,$$

که ζ یک ثابت است. با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز^۸ $\forall u_{n,m}(x) \in \mathcal{B}$ داریم،

$$\begin{aligned} |u_{n,m}(x)| &= |\langle u_{n,m}(y), R_x(y) \rangle| \\ &\leq \sqrt{\langle u_{n,m}(y), u_{n,m}(y) \rangle \cdot \langle R_x(y), R_x(y) \rangle} \\ &= \|u_{n,m}(y)\| \|R_x(y)\| \leq \zeta \zeta^{\frac{1}{\circ}}, \end{aligned}$$

بنابراین مجموعه $\mathcal{B}$ به طور یکنواخت کراندار است در $C[\circ, 1]$. همچنین $\forall \epsilon > 0$ و $\forall u_{n,m}(x) \in \mathcal{B}$ وجود دارد $\delta > 0$ به طوریکه داریم،

$$\begin{aligned} |u_{n,m}(x+h) - u_{n,m}(x)| &= |\langle u_{n,m}(y), R_{x+h}(y) - R_x(y) \rangle| \\ &\leq \|u_{n,m}(y)\| \|R_{x+h}(y) - R_x(y)\| \\ &\leq \zeta \cdot \left(\left\| \frac{\partial R_x(y)}{\partial x} \right\|_{x=\eta} \cdot |h| \right), \quad \eta \in [x, x+h]. \end{aligned}$$

و از خواص پایه‌ای هسته بازتولیدی داریم

$$\left\| \frac{\partial R_x(y)}{\partial x} \right\| \leq \zeta_2,$$

که ζ_2 یک ثابت است. اگر در نظر بگیریم $\delta = \frac{\epsilon}{\zeta \zeta_2}$ ، وقتی که $|h| < \delta$ داریم

$$|u_{n,m}(x+h) - u_{n,m}(x)| < \epsilon.$$

بنابراین $u_{n,m}(x)$ هم‌پیوسته است و در نتیجه با استفاده از قضیه آرزلا-آسکلی، مجموعه $\mathcal{B}$ نسبتاً فشرده است. از آنجا که بستار مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ خودش می‌باشد پس مجموعه‌ی $\mathcal{B}$ فشرده است. $\square$

قضیه ۱۹.۱.۲. (قضیه همگرایی) فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ نقاطی چگال در بازه $[\circ, 1]$ باشند، آنگاه جواب تقریبی معادله (۱.۲) به جواب دقیق معادله همگراست یعنی

$$u_{n,m}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x), \quad m = 1, 2, \dots$$

^۶Arzela-Ascoli

^۷Equicontinuous

^۸Cauchy-Schwartz

اثبات. مشخص است اگر ثابت کنیم که $u_{n,m}(x) \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_T^r}} u(x)$ آنگاه با استفاده از قضیه ۱۷.۱۱.۱ به راحتی می توان همگرایی یکنواخت را نتیجه گرفت. باتوجه به رابطه های (۷.۲) (۸.۲) و (۱۰.۲) داریم

$$\mathbb{L}(u_{n,m}(x_i)) = \mathbb{N}(u_{n,m-1}(x))|_{x=x_i} + \mathbb{F}(x_i),$$

$$m = 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, \dots, n$$

با استفاده از لم ۱۸.۱.۲ مجموعه $\mathcal{B}$ فشرده است و دنباله $\{u_{n,m}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ متعلق به مجموعه $\mathcal{B}$ است و بدیهی است که $u(x) \in \mathcal{B}$ و همچنین با استفاده از تعریف مجموعه فشرده در فضای نرم دار دنباله $\{u_{n,m}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ شامل یک زیر دنباله همگرا مانند $\{u_{n,m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ است که به یک عضو از مجموعه $\mathcal{B}$ همگراست. فرض می کنیم که $\{u_{n,m_i}(x)\}_{i=1}^{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x)$ داریم،

$$\mathbb{L}(u_{n,m_i}(x_i)) = \mathbb{N}(u_{n,m_i-1}(x))|_{x=x_i} + \mathbb{F}(x_i),$$

$$m = 1, 2, \dots \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11.2)$$

از آنجا که $\mathbb{L}$ یک عملگر خطی کراندار است پس بنابر قضیه ۱۶.۱.۲ عملگری پیوسته می باشد و همچنین فرض می کنیم که عملگر غیر خطی $\mathbb{N}$ نیز پیوسته باشد، بنابراین با استفاده از تعریف ۱۵.۱.۲ و $u_{n,m_i}(x) \rightarrow u(x)$ داریم،

$$\mathbb{L}(u_{n,m_i}(x)) \rightarrow \mathbb{L}(u(x)),$$

$$\mathbb{N}(u_{n,m_i-1}(x)) \rightarrow \mathbb{N}(u(x)).$$

بنابراین در معادله (۱۱.۲)، $\mathbb{R}_n(x) \rightarrow 0$ و در نتیجه $(n \rightarrow \infty)$ $\|u_{n,m_i}(x) - u(x)\|_{W_T^r} \rightarrow 0$ اکنون ما همگرایی یکنواخت $u_{n,m_i}(x) \xrightarrow{n,l \rightarrow \infty} u(x)$ ، $(m = 1, 2, \dots)$ را ثابت می کنیم. با استفاده از قضیه ۱۷.۱۱.۱ و خواص پایه ای تابع هسته تولیدی داریم

$$|u_{n,m_i}(x) - u(x)| = | \langle u_{n,m_i}(y) - u(y), R_x(y) \rangle_{W_T^r} |$$

$$\leq \|u_{n,m_i}(y) - u(y)\|_{W_T^r} \|R_x(y)\|_{W_T^r}$$

$$\leq M \|u_{n,m_i}(y) - u(y)\|_{W_T^r}$$

□

$$u_{n,m_i}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x) \text{ بنابراین}$$

۱۱.۱.۲ روش هسته بازتولیدی-حالت ۳

حالت سوم کاملاً شبیه به حالت دوم است با این تفاوت که پایه های مورد استفاده را، از تابع هسته بازتولیدی به صورت زیر بدست می آوریم،

$$\Psi_i(x) = \mathbb{L}_y R_y(x)|_{y=x_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (12.2)$$

که $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ و $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_T^r[0, 1]$ و $\mathbb{L}$ عملگر خطی کراندار مسئله (۱.۲) می باشند، همچنین تمام مفروضات در حالت دوم نیز عیناً برای این حالت وجود دارد و حل معادله دیفرانسیل و نحوه اثبات قضیه همگرایی نیز همانند حالت دوم است با این تفاوت که ما از پایه های جدید (۱۲.۲) استفاده می کنیم.

۱۲.۱.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱۲.۱.۲. معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد مقدار مرزی خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\varepsilon u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) + (1 + x^\gamma) u(x) = \frac{e^{-x} (x^5 - x^4 + x^3(\varepsilon + 1) - x^2(5\varepsilon + 2) + x(4\varepsilon + 3) - 1)}{x},$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

که جواب دقیق این معادله $u(x) = x(x-1)e^{-x}$ است.

مثال ۲۱.۱.۲. معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد مقدار مرزی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\varepsilon u''(x) + \frac{1}{x} u'(x) + (1 + x^\gamma) u(x) + u^\gamma(x) u'(x) = f(x),$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad x \in [0, 1]$$

جواب دقیق این معادله $u(x) = e^{x^\gamma} - e^x$ است و

$$f(x) = \frac{-e^x(x^\gamma + x\varepsilon + x + 1) + e^{x^\gamma}x(x^\gamma(\varepsilon + 1) + 2\varepsilon + 3) + 2e^{x^\gamma}x^\gamma - e^{x^\gamma + x}(\gamma x + 1)x - e^{x^\gamma}x + 2e^{x(x+\gamma)}(x+1)x}{x}$$

مثال ۲۲.۱.۲. معادله دیفرانسیل جزئی اختشاشی منفرد خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\varepsilon \partial_x^\gamma u(x, t) + \frac{1}{t-1} \partial_x u(x, t) + \frac{1}{x} \partial_t u(x, t) + u(x, t) = f(x, t),$$

$$(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

که جواب دقیق این معادله $u(x, t) = \sin(x(x-1))t$ است.

مثال ۲۳.۱.۲. معادله دیفرانسیل جزئی اختشاشی منفرد غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\varepsilon \partial_x^\gamma u(x, t) + \frac{1}{t-1} \partial_x u(x, t) + \frac{1}{x} \partial_t u(x, t) + u(x, t) + \partial_x u(x, t) u^\gamma(x, t) = f(x, t),$$

$$(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

که جواب دقیق این معادله $u(x, t) = (x-1)\sin(x)\sin(t)$ است.

ما این چهار مثال را با هر سه حالت مطرح شده در این بخش و استفاده از نرم‌افزار ریاضی متمتیکا^۱ حل می‌کنیم و نتایج حاصل از محاسبه‌ی مقادیر، ماکزیمم خطای مطلق^۲ و نرم دو خطا^۳ و زمان اجرای برنامه کامپیوتری^۴ را با یکدیگر در جدول ۱.۲ و ۲.۲ مقایسه می‌کنیم و همچنین قابل ذکر است که نقاط را در بازه $[0, 1]$ به صورت $x_i = \frac{i}{n+1}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

^۱ Mathematica

^۲ Maximum Absolute Error

^۳ Root Mean Square

^۴ CPU Time

جدول ۱.۲: مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل مثال (۲۰.۱.۲) و مثال (۲۱.۱.۲) با هر سه روش ذکر شده در این بخش

$\varepsilon = 2^{-10}$	مثال (۲۰.۱.۲)			مثال (۲۱.۱.۲)		
	روش اول	روش دوم	روش سوم	روش اول	روش دوم	روش سوم
L_{∞}						
$n = 64$	115×10^{-5}	190×10^{-6}	120×10^{-5}	540×10^{-5}	540×10^{-5}	230×10^{-5}
$n = 128$	160×10^{-6}	270×10^{-7}	160×10^{-6}	150×10^{-5}	700×10^{-6}	400×10^{-6}
$n = 256$	230×10^{-7}	310×10^{-8}	230×10^{-7}	160×10^{-6}	750×10^{-7}	560×10^{-7}
L_2						
$n = 64$	805×10^{-6}	904×10^{-7}	805×10^{-6}	407×10^{-5}	387×10^{-5}	195×10^{-5}
$n = 128$	105×10^{-6}	128×10^{-7}	105×10^{-6}	776×10^{-6}	483×10^{-6}	245×10^{-6}
$n = 256$	148×10^{-7}	139×10^{-8}	148×10^{-7}	103×10^{-6}	545×10^{-7}	241×10^{-7}
CPU Time (sec)						
$n = 64$	۱۱	۶.۵	۱۲	۱۷.۵	۱۰	۱۵.۵
$n = 128$	۴۹.۵	۱۴.۵	۲۵	۸۴	۲۶.۵	۳۹.۵
$n = 256$	۳۱۳.۵	۳۹	۶۲	۷۹۲.۵	۹۰.۵	۲۴۲.۵

و در ناحیه $[0, 1] \times [0, 1]$ به صورت $i = 1, 2, \dots, n_1$, $j = 1, 2, \dots, n_2$ که $n = n_1 \times n_2$ انتخاب می‌کنیم.

$$L_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x) - u_n(x)|,$$

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(u_n(x_i) - u(x_i))^2}{n}}.$$

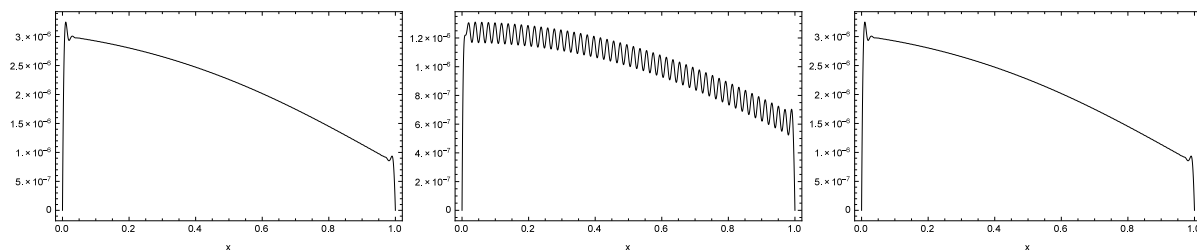
۲.۲ روش تحلیل هموتوپی^۱

۱.۲.۲ مقدمه

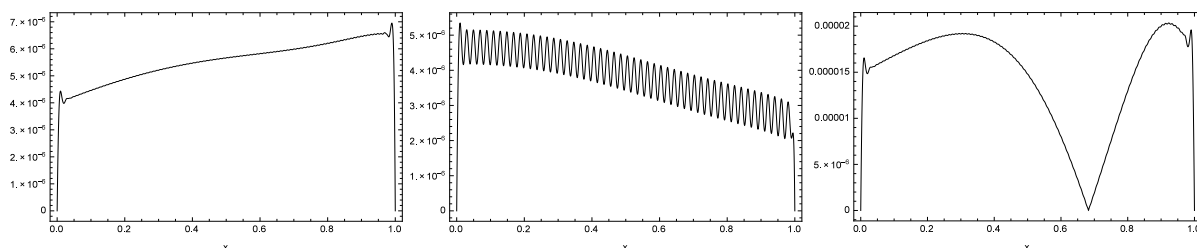
روش تحلیل هموتوپی که اولین بار توسط شیجون لیائو^۲ مطرح شده [۵۴]، یک روش نیمه تحلیلی بسیار قدرتمند برای حل مسائل غیرخطی با مرتبه غیرخطی بسیار بالا است. روش تحلیل هموتوپی در حل بسیاری از مسائل مهندسی نظیر

^۱ Homotopy Analysis Method

^۲ Shijun Liao



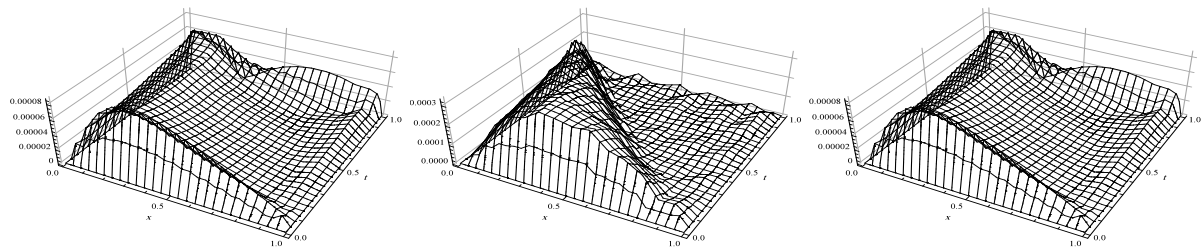
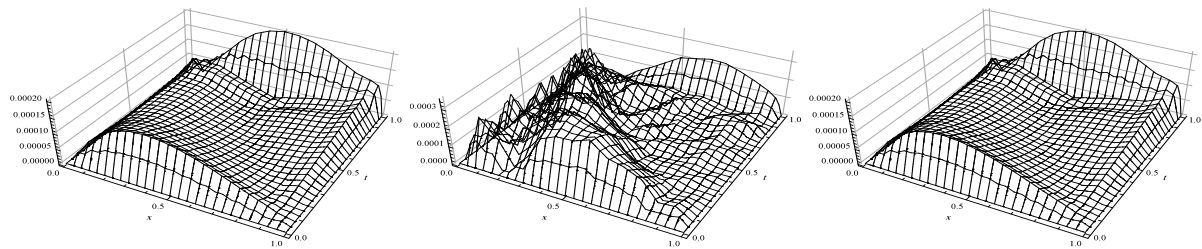
شکل ۱.۲: خطای مطلق برای مثال (۲۰.۱.۲) با $\varepsilon = 2^{-30}$, $n = 100$ (راست: روش اول وسط: روش دوم چپ: روش سوم)



شکل ۲.۲: خطای مطلق برای مثال (۲۱.۱.۲) با $\varepsilon = 2^{-30}$, $n = 100$ (راست: روش اول وسط: روش دوم چپ: روش سوم)

جدول ۲.۲: مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل مثال (۲۲.۱.۲) و مثال (۲۳.۱.۲) با هر سه روش ذکر شده در این بخش

$\varepsilon = 10^{-6}$	مثال (۲۲.۱.۲)			مثال (۲۳.۱.۲)		
	روش اول	روش دوم	روش سوم	روش اول	روش دوم	روش سوم
L_{∞}						
$n = 36$	3.20×10^{-4}	8.50×10^{-4}	3.20×10^{-4}	7.00×10^{-4}	8.00×10^{-4}	7.00×10^{-4}
$n = 72$	1.50×10^{-4}	6.00×10^{-4}	1.50×10^{-4}	3.00×10^{-4}	5.50×10^{-4}	3.00×10^{-4}
$n = 144$	4.50×10^{-5}	2.30×10^{-4}	4.75×10^{-5}	1.30×10^{-4}	2.40×10^{-4}	1.30×10^{-4}
L_T						
$n = 36$	1.53×10^{-4}	3.84×10^{-4}	1.53×10^{-4}	2.21×10^{-4}	3.19×10^{-4}	2.27×10^{-4}
$n = 72$	5.60×10^{-5}	2.65×10^{-4}	5.60×10^{-5}	7.55×10^{-5}	2.39×10^{-4}	7.73×10^{-5}
$n = 144$	2.01×10^{-5}	1.10×10^{-4}	2.01×10^{-5}	3.09×10^{-5}	9.75×10^{-5}	3.15×10^{-5}
CPU Time (sec)						
$n = 36$	۴.۵	۱.۵	۸.۵	۱۰.۵	۳	۱۴.۵
$n = 72$	۲۷.۵	۳	۱۹.۵	۶۹.۵	۸.۵	۴۸.۵
$n = 144$	۱۹۵.۵	۹.۵	۵۰	۷۹۰.۵	۳۰	۱۷۶.۵


 شکل ۳.۲: خطای مطلق برای مثال (۲۲.۱.۲) با $\varepsilon = 10^{-20}$, $n = 100$ (راست: روش اول وسط: روش دوم چپ: روش سوم)

 شکل ۴.۲: خطای مطلق برای مثال (۲۴.۱.۲) با $\varepsilon = 10^{-20}$, $n = 100$ (راست: روش اول وسط: روش دوم چپ: روش سوم)

مکانیک سیالات^۳ و انتقال گرما^۴ و انتقال جرم^۵ کاربرد گسترده دارد [۵۵، ۵۶]. معمولاً از روش تحلیل هموتوپی برای حل مسائل غیرخطی یا مسائل شدیداً غیرخطی استفاده می‌شود ولی چون اکثر مسائل اختشاشی منفرد و مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد که در این رساله آورده می‌شوند خطی هستند و دارای رفتارهای لایه مرزی یا رفتارهای نوسانی شدید هستند ما این تکنیک را برای حل آنها پیاده سازی می‌کنیم و نتایج حاصل را با دیگر روشها و حتی نتایج حاصل از نرم افزارهای ریاضی مقایسه می‌کنیم. ابتدا باید به این نکته توجه کرد که روش تحلیل هموتوپی تنها بر روی مسائلی قابل استفاده است که دارای جواب به فرم سری باشند و علاوه بر این مشتقات جواب هم به فرم سری وجود داشته باشند. جواب حاصل از روش تحلیل هموتوپی به فرم یک سری می‌باشد و یکی از مزیت‌های اصلی روش تحلیل هموتوپی فراهم کردن امکان استفاده از پایه‌های مختلف برای نوشتن جواب مسئله به فرم یک سری حاصل از ترکیب خطی این پایه‌ها است، به طوری که ما ابتدا پایه‌های متناسب با معادله را انتخاب می‌کنیم و سپس بر مبنای این پایه‌ها، روش هموتوپی را پیاده سازی می‌کنیم به گونه‌ای که همواره سری جواب متشکل از ترکیب خطی از اعضای پایه باشد. یک راه مناسب برای تضمین همگرایی سری جواب حاصل از روش تحلیل هموتوپی استفاده از پارامتر کمکی $\tilde{h}$ است که در دل این تکنیک وجود دارد. از مزیت‌های دیگر روش تحلیل هموتوپی آزادی در انتخاب پارامتر کمکی $\tilde{h}$ و همچنین عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ ^۷ است. برای معرفی روش تحلیل هموتوپی در این بخش ابتدا مسئله اختشاشی منفرد غیرخطی زیر را که دارای رفتار لایه مرزی است در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} \varepsilon U''(t) + U'(t) - tU^3(t) = t^2 - 1, \\ U(0) = 0, U(1) = 1, \quad t \in [0, 1] \end{cases} \quad (13.2)$$

رفتار جواب این معادله برای مقادیر مختلف ε در شکل ۵.۲ آورده شده است. اکنون مفاهیم پایه‌ای روش تحلیل هموتوپی برای حل معادله (۱۳.۲) معرفی می‌کنیم و همچنین قضیه همگرایی را برای این روش می‌آوریم.

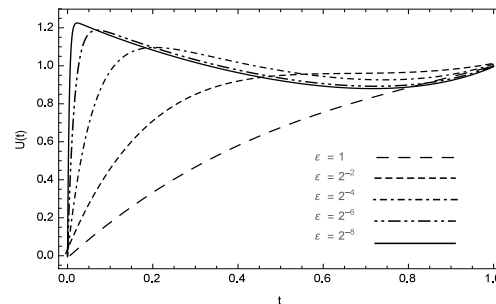
^۳ Fluid Mechanics

^۴ Heat Transfer

^۵ Mass Transfer

^۶ Auxiliary Parameter

^۷ Auxiliary Linear Operator


 شکل ۵.۲: رفتار جواب معادله (۱۳.۲) برای مقادیر مختلف ε با استفاده از دستور NDSolve نرم افزار متماتیکا

۲.۲.۲ معادله دگر دیسی مرتبه صفر^۱

تابع $U_*(t)$ را به عنوان یک حدس اولیه از جواب دقیق مسئله یعنی تابع $U(t)$ در نظر می گیریم به طوری که در شرایط مرزی معادله (۱۳.۲) صدق کند،

$$U_*(t) = t. \quad (14.2)$$

قرار می دهیم $q \in [0, 1]$ و آنرا پارامتر نشانده^۱ می نامیم. روش تحلیل هموتوبی بر پایه یک نوع نگاشت پیوسته^۲ $U(t) \rightarrow \Phi(t; q)$ است به طوریکه با افزایش مقدار پارامتر نشانده q از ۰ به ۱، $\Phi(t; q)$ از حدس اولیه $U_*(t)$ به جواب دقیق مسئله $U(t)$ تغییر پیدا می کند. برای این منظور پارامتر کمکی خطی $\mathcal{L}$ را به صورت زیر انتخاب می کنیم،

$$\mathcal{L}[\Phi(t; q)] = \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi(t; q)}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t}, \quad (15.2)$$

و عملگر غیر خطی $\mathcal{N}[\Phi(t; q)]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\mathcal{N}[\Phi(t; q)] = \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi(t; q)}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} - t \Phi^3(t; q) - t^2 + 1. \quad (16.2)$$

به ترتیب قرار می دهیم $\hbar \neq 0$ و $\mathcal{H}(t) \neq 0$ پارامتر کمکی و تابع کمکی^۳، با استفاده از پارامتر نشانده $q \in [0, 1]$ یک مجموعه از معادلات را به صورت زیر

$$(1 - q) \mathcal{L}[\Phi(t; q) - U_*(t)] = \hbar q \mathcal{H}(t) \mathcal{N}[\Phi(t; q)], \quad (17.2)$$

با شرایط مرزی زیر می سازیم،

$$\Phi(0; q) = 0, \quad \Phi(1; q) = 1. \quad (18.2)$$

وقتی $q = 0$ معادله (۱۷.۲) تبدیل می شود به،

$$\mathcal{L}[\Phi(t; 0) - U_*(t)] = 0, \quad t \geq 0. \quad (19.2)$$

با شرایط مرزی زیر،

$$\Phi(0; 0) = 0, \quad \Phi(1; 0) = 1. \quad (20.2)$$

^۱ Zero-Order Deformation Equation

^۲ Embedding Parameter

^۳ Continuous Mapping

^۴ Auxiliary Function

بر اساس معادله‌های (۱۴.۲) و (۱۵.۲) به راحتی می‌توان جواب معادله (۱۹.۲) و (۲۰.۲) را بدست آورد،

$$\Phi(t; \circ) = U_{\circ}(t). \quad (21.2)$$

وقتی $q = 1$ معادله (۱۷.۲) تبدیل می‌شود به،

$$\hbar \mathcal{H}(t) \mathcal{N}[\Phi(t; 1)] = \circ, \quad t \geq \circ. \quad (22.2)$$

با شرایط مرزی زیر،

$$\Phi(\circ; 1) = \circ, \quad \Phi(1; 1) = 1. \quad (23.2)$$

از آنجا که در معادله (۱۶.۲)، $\hbar \neq \circ$ و $\mathcal{H}(t) \neq \circ$ پس جواب معادله (۲۲.۲) با شرایط مرزی (۲۳.۲) برابر است با،

$$\Phi(t; 1) = U(t). \quad (24.2)$$

بنابراین بر اساس معادله‌های (۲۱.۲) و (۲۴.۲)، زمانی که پارامتر نشانده q از $\circ$ به ۱ افزایش پیدا می‌یابد آنگاه تابع $\Phi(t; q)$ از حدس اولیه $U_{\circ}(t)$ به جواب دقیق مسئله $U(t)$ تغییر پیدا می‌کند. معادله‌های (۱۷.۲) و (۱۸.۲) را معادلات دگرذیسی مرتبه صفر برای مسئله (۱۳.۲) می‌نامیم.

نکته ۱.۲.۲. با توجه به ویژگیها و مفاهیم روش تحلیل هموتوپی، ما آزادی زیادی در انتخاب پارامتر کمکی $\hbar$ و تابع کمکی $\mathcal{H}(t)$ و عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و همچنین حدس اولیه $U_{\circ}(t)$ داریم. این آزادی در انتخاب هر یک از پارامترهای گفته شده نقش مهمی دارد و اساس و پایه درستی و اعتبار و انعطاف پذیری این روش است.

با آزادی در انتخاب پارامتر کمکی $\hbar$ و حدس اولیه $U_{\circ}(t)$ از جواب تقریبی مسئله و عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و قرار دادن تابع کمکی $\mathcal{H}(t) = 1$ می‌توانیم فرض کنیم جواب $\Phi(t; q)$ برای معادله دگرذیسی مرتبه صفر (۱۷.۲) و (۱۸.۲) به طوری که $\circ \leq q \leq 1$ وجود داشته باشد، همچنین مشتق مرتبه m آن نسبت به پارامتر نشانده q به صورت زیر وجود داشته باشد

$$U_{\circ}^{(m)}(t) = \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=\circ}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (25.2)$$

$U_{\circ}^{(m)}(t)$ را مشتق دگرذیسی مرتبه m می‌نامیم. تعریف می‌کنیم

$$U_m(t) = \frac{U_{\circ}^{(m)}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=\circ}. \quad (26.2)$$

با استفاده از قضیه تیلور، $\Phi(t; q)$ را به صورت یک سری توانی بر حسب پارامتر نشانده q به صورت زیر بسط می‌دهیم،

$$\Phi(t; q) = \Phi(t; \circ) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=\circ} q^m, \quad (27.2)$$

با استفاده از معادله (۲۱.۲) و (۲۶.۲) سری (۲۷.۲) تبدیل می‌شود به،

$$\Phi(t; q) = U_{\circ}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t) q^m. \quad (28.2)$$

فرض کنید که پارامتر کمکی $\hbar$ و حدس اولیه $U_0(t)$ به طور مناسبی انتخاب شده باشند که سری (۲۸.۲) با عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و تابع کمکی $\mathcal{H}(t) = 1$ در $q = 1$ همگرا باشد. با فرض $q = 1$ ، سری (۲۸.۲) تبدیل می شود به

$$\Phi(t; 1) = U_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t). \quad (29.2)$$

بنابراین با استفاده از معادله (۲۴.۲) داریم،

$$U(t) = U_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t). \quad (30.2)$$

سری (۳۰.۲) یک رابطه بین تابع حدس اولیه $U_0(t)$ و جواب دقیق مسئله $U(t)$ با استفاده از تابع های مجهول $U_m(t)$ ، $m = 1, 2, 3, \dots$ ایجاد می کند، که تابع $U_m(t)$ در هر تکرار در روش تحلیل هموتوپی محاسبه می شود.

۳.۲.۲ معادله دگرذیسی مرتبه بالا^۱

با m بار مشتق گیری از معادله دگرذیسی مرتبه صفر (۱۷.۲) و (۱۸.۲) نسبت به پارامتر q و سپس قرار دادن $q = 0$ و در نهایت تقسیم کل عبارت حاصل به $m!$ معادله ی دگرذیسی مرتبه m ام به صورت

$$\mathcal{L}[U_m(t) - \chi_m U_{m-1}(t)] = \hbar \mathcal{H}(t) \mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}), \quad (31.2)$$

با شرایط مرزی زیر،

$$U_m(0) = 0, \quad U_m(1) = 0, \quad (32.2)$$

بدست می آید که

$$(33.2)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \\ &= \varepsilon U_{m-1}''(t) + U_{m-1}'(t) - t \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^j U_i(t) U_{i-j}(t) \right) U_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m)(t^2 - 1). \end{aligned}$$

و

$$\vec{U}_m = \{U_0(t), U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)\}, \quad \chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$

و در نهایت با محاسبه وارون عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}^{-1}$ یعنی $\mathcal{L}^{-1}$ و با فرض $\mathcal{H}(t) = 1$ معادله (۳۱.۲) و (۳۲.۲) تبدیل می شود به،

$$\begin{aligned} U_m(t) &= \chi_m U_{m-1}(t) + \hbar \mathcal{H}(t) \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1})], \\ U_m(0) &= 0, \quad U_m(1) = 0. \end{aligned} \quad (34.2)$$

^۱ High-Order Deformation Equation

که

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}(t))] \equiv \int_0^t \left(C_1 e^{-\frac{\eta}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\eta}{\varepsilon}} \int_0^\eta \frac{\mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}(\zeta)) e^{\frac{\zeta}{\varepsilon}}}{\varepsilon} d\zeta \right) d\eta + C_1$$

 توجه کنید که $\mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1})$ در رابطه (۳۳.۲) تنها به تابع‌های

$$U_0(t), U_1(t), U_2(t), \dots, U_{m-1}(t)$$

وابسته است که این تابع‌ها با حل کردن معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۳۱.۲) و (۳۲.۲) به ازای هر m در هر تکرار محاسبه می‌شوند و همچنین ثابت‌های C_1, C_2 با استفاده از شرایط مرزی $U_m(0) = 0, U_m(1) = 0$ در هر تکرار بدست می‌آیند. با قرار دادن $U_0(t) = 1$ و $\mathcal{H}(t) = 1$ و $m = 1$ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\vec{U}_0(t)) &= \varepsilon U_0''(t) + U_0'(t) - t U_0'(t) + 1 - t^2, \\ U_1(t) &= \hbar \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_1(\vec{U}_0(t))], \\ U_1(0) &= 0, \quad U_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (35.2)$$

و با حل آن $U_1(t)$ که جواب حاصل از تکرار اول در معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۳۱.۲) و (۳۲.۲) است به صورت زیر بدست می‌آید،

$$\begin{aligned} & \frac{24e^{1/\varepsilon}\varepsilon^2\hbar}{e^{1/\varepsilon}-1} - \frac{12e^{1/\varepsilon}\varepsilon^2\hbar}{e^{1/\varepsilon}-1} + \frac{6e^{1/\varepsilon}\varepsilon^2\hbar}{e^{1/\varepsilon}-1} - \frac{2e^{1/\varepsilon}\varepsilon\hbar}{e^{1/\varepsilon}-1} - \frac{22e^{1/\varepsilon}\hbar}{15(e^{1/\varepsilon}-1)} - \frac{t^5\hbar}{5} + \varepsilon t^2\hbar - 4\varepsilon^2 t^3\hbar - \frac{t^2\hbar}{3} + \\ & 12\varepsilon^2 t^2\hbar + \varepsilon t^2\hbar - 24\varepsilon^2 t\hbar - \frac{24\varepsilon^2\hbar e^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{t}{\varepsilon}}}{e^{1/\varepsilon}-1} + \frac{12\varepsilon^2\hbar e^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{t}{\varepsilon}}}{e^{1/\varepsilon}-1} - 2\varepsilon^2 t\hbar - \frac{6\varepsilon^2\hbar e^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{t}{\varepsilon}}}{e^{1/\varepsilon}-1} + \frac{2\varepsilon\hbar e^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{t}{\varepsilon}}}{e^{1/\varepsilon}-1} + \\ & \frac{22\hbar e^{\frac{1}{\varepsilon}-\frac{t}{\varepsilon}}}{15(e^{1/\varepsilon}-1)} + 2t\hbar \end{aligned}$$

 با قرار دادن $m = 2$ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(\vec{U}_1(t)) &= \varepsilon U_1''(t) + U_1'(t) - 3t U_1(t) U_0'(t), \\ U_2(t) &= \hbar \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_2(\vec{U}_1(t))], \\ U_2(0) &= 0, \quad U_2(1) = 0. \end{aligned} \quad (36.2)$$

و با حل آن $U_2(t)$ که جواب حاصل از تکرار دوم در معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۳۱.۲) و (۳۲.۲) است بدست می‌آید و به همین ترتیب تا تکرار مرحله m ام ادامه می‌دهیم. ملاحظه می‌شود که محاسبه جواب تقریبی مسئله غیرخطی (۱۳.۲) به حل یک سری از زیر مسئله‌های خطی متناظر آن در معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۳۱.۲) و (۳۲.۲) تبدیل شده است. بنابراین جواب تقریبی مرتبه m ام مسئله غیرخطی (۱۳.۲) برابر است با،

$$U_m(t) \approx U_0(t) + \sum_{i=1}^m U_i(t). \quad (37.2)$$

در تشریح معادله دگرذیسی مرتبه m ام مشخص است که روش تحلیل هموتوپی متأثر از چند پارامتر کلی است که در ذات این روش وجود دارد و در اینجا به طور خلاصه مجدداً یادآوری می‌شوند، اولین پارامتر، انتخاب پایه‌هایی است

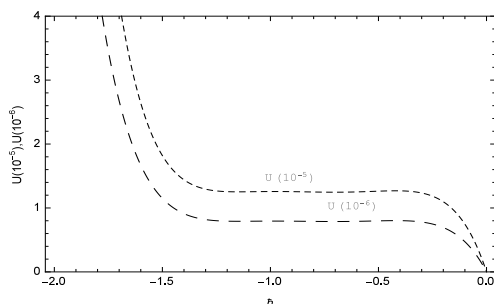
که می‌خواهیم جواب تقریبی مسئله را بر حسب آن بسط دهیم. دومین پارامتر، انتخاب تابع حدس اولیه $U_0(t)$ است که باید از جنس پایه‌ها باشد. سومین پارامتر، انتخاب عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ است که در حل معادله دگرذیسی مرتبه m ام به ازای هر m در هر تکرار مورد استفاده قرار می‌گیرد. چهارمین پارامتر، تابع کمکی $\mathcal{H}(t)$ است که جهت جلوگیری از ایجاد عناصری به غیر از پایه‌ها در بسط جواب تقریبی، به ازای هر m در هر تکرار در معادله دگرذیسی مرتبه m ام به کار گرفته می‌شود. آخرین پارامتر، پارامتر کمکی $\hbar$ است که از آن برای کنترل ناحیه همگرایی سری هموتویی یا همان بسط جواب تقریبی استفاده می‌شود، نحوه تعیین بهترین مقدار پارامتر کمکی $\hbar$ از چندین روش مختلف امکان‌پذیر است که ما در این رساله تنها به یکی از آنها خواهیم پرداخت. همانطور که گفته شد، قدم اول در پیاده‌سازی روش تحلیل هموتویی انتخاب پایه‌های مناسب است. می‌دانیم که در این روش برای انتخاب پایه‌ها از آزادی عمل زیادی برخوردار هستیم و همچنین هر مقدار که پایه‌های انتخاب شده با مسئله‌ای که می‌خواهیم حل کنیم متناسب باشد، دقت جواب تقریبی یا بهتر بگوییم احتمال همگرایی سری هموتویی افزایش پیدا می‌کند. نحوه انتخاب پایه‌ها در این روش بر اساس اطلاعاتی از صورت مسئله و همچنین شرایط مرزی یا اولیه‌ی موجود در مسئله است. البته این تنها کافی نیست و با کمی آزمایش یا خطا می‌توان تقریباً بهترین پایه‌ها را برای نوشتن سری هموتویی انتخاب کرد. بعد از انتخاب پایه‌ها نوبت به انتخاب تابع حدس اولیه $U_0(t)$ می‌رسد که نحوه انتخاب این تابع در ادامه روند پیاده‌سازی روش تحلیل هموتویی و همگرا کردن سری هموتویی نقش مهمی دارد و همچنین قابل ذکر است که چون تابع حدس اولیه هم باید از جنس پایه‌های انتخابی برای نوشتن سری هموتویی باشند، در نتیجه تابع حدس اولیه باید به گونه‌ای باشد که هم در شرایط مرزی یا اولیه موجود در مسئله (۱۳.۲) صدق کند و هم از جنس پایه‌های انتخابی برای نوشتن سری هموتویی باشد. نکته بعدی در خصوص انتخاب مناسب عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ است که در همگرایی سری هموتویی نقش مهمی دارد، در مسئله (۱۳.۲) بهترین حالتی که توانستیم برای عملگر $\mathcal{L}$ در نظر بگیریم $\mathcal{L} = \varepsilon U''(t) + U'(t)$ است که هسته‌ی این عملگر $C_2 + C_1 \varepsilon e^{-\frac{t}{\varepsilon}}$ می‌باشد و بدیهی است که داریم

$$\mathcal{L}\left(C_2 - \varepsilon C_1 e^{-\frac{t}{\varepsilon}}\right) = 0.$$

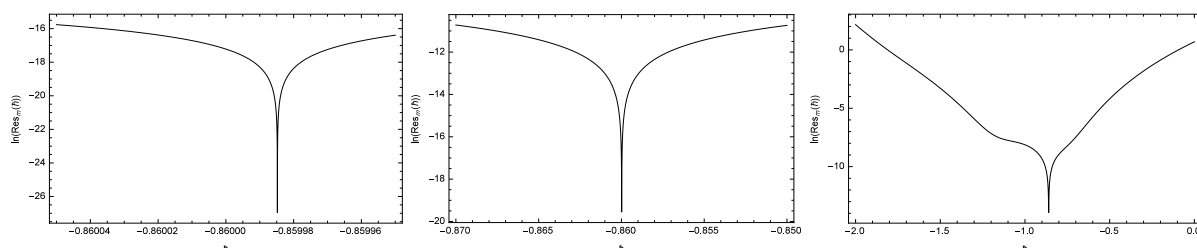
نکته مهم دیگری که در خصوص انتخاب عملگر $\mathcal{L}$ باید لحاظ شود این است که چون همه پارامترهای موجود در روش تحلیل هموتویی باید از جنس پایه‌های انتخابی برای نوشتن سری هموتویی باشند، در نتیجه هسته‌ی عملگر $\mathcal{L}$ هم باید از جنس پایه‌ها باشد و این نکته در تضمین همگرایی سری هموتویی بسیار اهمیت دارد. و آخرین مطلب مربوط به نحوه تعیین تابع کمکی $\mathcal{H}(t)$ است که به طور کلی باید همانند پارامترهای قبلی از جنس پایه باشد و نقش آن در حذف جملات مزاحم و غیرپایه‌ای است که به ازای هر m در هر تکرار در معادله دگرذیسی مرتبه m ام ظاهر می‌شود. ما برای معادله (۱۳.۲) تابع کمکی $\mathcal{H}(t)$ را برابر ۱ فرض می‌کنیم. اکنون پس از تعیین همه‌ی این پارامترها نوبت به تعیین پارامتر کمکی $\hbar$ است که با استفاده از نمودار $\hbar$ انجام می‌شود. اگر همه‌ی پارامترهای موجود در این روش درست انتخاب شده باشند برای نشان دادن همگرایی سری هموتویی از نمودار $\hbar$ است، به طوریکه با رسم این نمودار و مشاهده قسمت‌های صاف در آن که با کوچک کردن محور عمودی خللی در این قسمت‌های صاف ایجاد نشود می‌توان ادعا کرد که سری هموتویی به جواب دقیق مسئله همگرا است. البته این تنها کافی نیست و برای تعیین دقیق مقدار $\hbar$ از مینیمم کردن تابع مانده با استفاده از رابطه زیر

$$Res_m(\hbar) = \sqrt{\int_0^1 (U_m(t) - U(t))^2 dt} \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{(U_m(t_i) - U(t_i))^2}{M}},$$

که همان نرم دو خطا است و سپس اشتراک آن با قسمت صاف نمودار $\hbar$ استفاده می‌کنیم. اگر معادله دیفرانسیل دارای



شکل ۶.۲: نمودار h برای معادله (۱۳.۲) با مقادیر $m = 7$, $\varepsilon = 10^{-6}$



شکل ۷.۲: نمودار نرم دو خط برای معادله (۱۳.۲) با مقادیر $m = 7$, $\varepsilon = 10^{-6}$ برای پیدا کردن h بهینه

جواب دقیق باشد از رابطه فوق استفاده می کنیم در غیر این صورت از رابطه

$$Res_m(h) = \sqrt{\int_0^1 (N(U_m(t)) - F(t))^2 dt} \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{(N(U_m(t_i)) - F(t_i))^2}{M}}, \quad (38.2)$$

استفاده می کنیم که برای معادله (۱۳.۲) داریم،

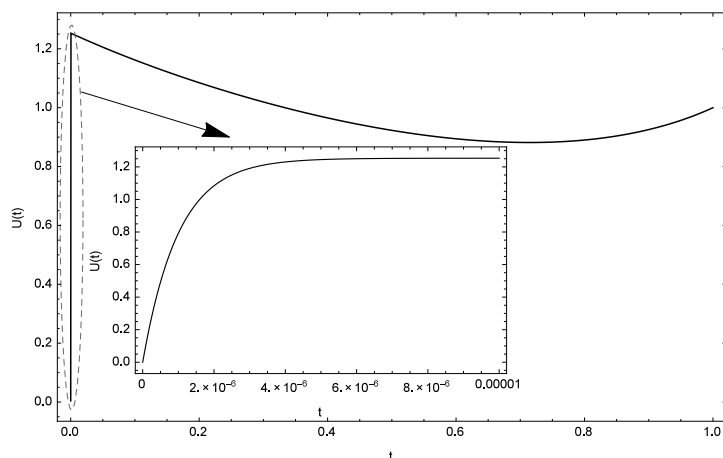
$$N(U_m(t)) = \varepsilon U_m''(t) + U_m'(t) - tU_m^*(t),$$

$$F(t) = t^2 - 1.$$

و مقدار $M = 1000, 2000, \dots$ فرض می شود که برای راحتی در محاسبه ی انتگرال موجود در نرم دو خطا است. چون معادله (۱۳.۲) باتوجه به شکل (۵.۲) دارای رفتار لایه مرزی است، نمودار h را برای محدوده هایی که رفتار لایه مرزی در آن وجود دارد رسم می کنیم تا همگرایی سری هموتوپی را در دشوارترین قسمت رفتار جواب معادله نشان دهیم، شکل (۶.۲). همچنین برای محاسبه بهترین مقدار h ، نرم دو خطا را از رابطه داده شده طوری محاسبه می کنیم که مینیمم شود، شکل (۷.۲)، که در آن به خوبی می توان دید برای $h = -0.859985$ مقدار نرم دو خطا مینیمم خود را با $m = 7$ تکرار اخذ می کند. در آخر هم با مقدار h بهینه نمودار جواب تقریبی را با استفاده از سری هموتوپی حاصل از رابطه (۳۷.۲) برای $\varepsilon = 10^{-6}$ با $m = 7$ تکرار رسم می کنیم، شکل (۸.۲).

۴.۲.۲ آنالیز همگرایی روش تحلیل هموتوپی

اکنون پس از معرفی روش تحلیل هموتوپی و نحوه حل یک معادله دیفرانسیل با آن نوبت به بررسی همگرایی این روش می رسد. برای بررسی و اثبات قضیه همگرایی روش تحلیل هموتوپی نیاز به یک سری تعریف و قضیه داریم که در ادامه آنها را می آوریم. تعریف می کنیم $V(\mathbb{R}^+)$ فضای همه توابع اندازه پذیر از T به $\mathbb{R}^+$ ، که T فضای متریک است.



شکل ۸.۲: نمودار جواب تقریبی معادله (۱۳.۲) با استفاده از روش تحلیل هموتویی برای $\varepsilon = 10^{-6}$

تعریف ۲.۲.۲. یک دنباله از توابع مقدار حقیقی U_m به طور یکنواخت همگراست به تابع U در T اگر $\forall \varepsilon > 0$ ، $\exists m_0$ به طوری که $\forall m > m_0$ ، داشته باشیم $|U_m(t) - U(t)| < \varepsilon$ که $t \in F$. برای ملاحظه اثبات مراجعه شود به [۵۸، ۵۷، ۵۳].

قضیه ۳.۲.۲. اگر پارامتر کمکی $\hbar$ مشخص شود و $0 < \lambda < 1$ باشد و نامساوی زیر برقرار باشد،

$$\exists m_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq m_0, \quad \|U_{m+1}(t)\| \leq \lambda \|U_m(t)\|$$

آنگاه سری $\sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)$ به طور یکنواخت در بازه $[0, 1]$ همگراست.

□

اثبات. رجوع شود به [۵۹].

قضیه ۴.۲.۲. (قضیه همگرایی) اگر سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m(t),$$

به طور یکنواخت همگرا باشد به $U(t)$ که $U_m(t) \in V(\mathbb{R}^+)$ است و از حل معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۳۱.۲) و (۳۲.۲) بدست آمده و همچنین سری های

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m''(t), \quad \sum_{m=0}^{\infty} U_m'(t),$$

به طور یکنواخت همگرا باشند، آنگاه سری $\sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)$ یک جواب دقیق برای معادله (۱۳.۲) است.

اثبات. از همگرایی یکنواخت سری های $\sum_{m=0}^{\infty} U_m(t)$ و $\sum_{m=0}^{\infty} U_m'(t)$ و $\sum_{m=0}^{\infty} U_m''(t)$ داریم،

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} U_k'(t) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} U_k''(t) &= 0, \end{aligned} \quad (39.2)$$

همچنین $\forall t \in [0, 1]$ تعریف می‌کنیم

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(t), \quad S'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} U'_m(t), \quad S''(t) = \sum_{m=0}^{\infty} U''_m(t),$$

و از آنجا که عملگر کمکی $\mathcal{L}$ خطی است داریم

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \mathcal{L}[U_m(t) - \chi_m U_{m-1}(t)] &= \sum_{m=1}^k [\mathcal{L}U_m(t) - \chi_m \mathcal{L}U_{m-1}(t)] \\ &= \mathcal{L}U_1(t) + (\mathcal{L}U_2(t) - \mathcal{L}U_1(t)) + \cdots + (\mathcal{L}U_k(t) - \mathcal{L}U_{k-1}(t)) \\ &= \mathcal{L}U_k(t), \end{aligned} \quad (40.2)$$

با استفاده از رابطه (39.2) و (40.2) و معادله دگرذیسی مرتبه بالا (31.2) داریم

$$\begin{aligned} \hbar \mathcal{H}(t) \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}[U_m(t) - \chi_m U_{m-1}(t)] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k \mathcal{L}[U_m(t) - \chi_m U_{m-1}(t)] \\ &= \mathcal{L} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k [U_m(t) - \chi_m U_{m-1}(t)] \right] \\ &= \mathcal{L} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

و از آنجا که $\hbar \neq 0$ و $\mathcal{H}(t) = 1$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

با جایگذاری (33.2) در سری فوق داریم،

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \left[\varepsilon U''_{m-1}(t) + U'_{m-1}(t) - t \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^j U_i(t) U_{i-j}(t) \right) U_{m-1-j}(t) - (1 - \chi_m)(t^{\mathfrak{x}} - 1) \right] \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon U''_{m-1}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} U'_{m-1}(t) - t \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^j U_i(t) U_{i-j}(t) \right) U_{m-1-j}(t) \right) \\
 &\quad - \sum_{m=1}^{\infty} (1 - \chi_m)(t^{\mathfrak{x}} - 1) \\
 &= \varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} U''_m(t) + \sum_{m=0}^{\infty} U'_m(t) - t \sum_{i=0}^{\infty} U_i(t) \sum_{j=i}^{\infty} U_{i-j}(t) \sum_{m=j+1}^{\infty} U_{m-1-j}(t) - (t^{\mathfrak{x}} - 1) \\
 &= \varepsilon S''(t) + S'(t) - t S^{\mathfrak{x}}(t) - (t^{\mathfrak{x}} - 1) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

و با استفاده از رابطه‌های (۳۲.۲) و (۱۸.۲) داریم

$$S(0) = 0, \quad S(1) = 1.$$

□

بنابراین $S(t)$ در معادله (۱۳.۲) صدق می‌کند و یک جواب دقیق برای این معادله می‌باشد.

فصل ۳

حل مسئله اختشاشی منفرد و مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی
منفرد دارای رفتار لایه مرزی با روش هسته بازتولیدی

۱.۳ مقدمه

در این فصل می‌خواهیم معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد و معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد که دارای رفتار لایه مرزی می‌باشند را با استفاده از روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامد سازی گرام اشمیت حل کنیم. در فصل دوم روش هسته بازتولیدی به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت و سه حالت برای پیاده سازی این روش مطرح شد که در این فصل از حالت دوم برای حل مسائل مذکور استفاده می‌کنیم. حل مسائل دارای رفتار لایه مرزی با روش هسته بازتولیدی برای مقادیر بسیار کوچک مشکل است، به همین دلیل بازه تعریف مسئله را به دو زیربازه تقسیم می‌کنیم به طوریکه در یکی از زیربازه‌ها رفتار لایه مرزی و در زیربازه دیگر رفتار معمولی مسئله وجود داشته باشد. تقسیم بازه تعریف مسئله به دوزیربازه به صورتی که گفته شد برای بدست آوردن یک تقریب خوب از جواب دقیق مسئله به تنهایی کافی نیست. پس از انجام تقسیم بازه، ابتدا روش هسته بازتولیدی را برای حل مسئله در بازه معمولی به کار می‌گیریم و سپس با اضافه کردن یک شرط به بازه لایه مرزی که این شرط حاصل از تقریب مسئله در بازه معمولی است، مسئله را در بازه لایه مرزی با استفاده از روش هسته بازتولیدی حل می‌کنیم.

نکته ۱.۱.۳. همانطور که اشاره کردیم معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد و معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد که در این فصل در نظر گرفته‌ایم همه دارای رفتار لایه مرزی می‌باشند، اما نکته مهم در اینجا تعیین محل دقیق وقوع رفتار لایه مرزی است که در کدام سمت از بازه تعریف معادله رخ می‌دهد، در ابتدا و یا انتهای بازه تعریف معادله.

نکته ۲.۱.۳. اگر رفتار لایه مرزی مسئله در ابتدا یا سمت چپ بازه تعریف مسئله باشد برای حل مسئله طبق توضیحی که در مقدمه بالا اشاره شد عمل می‌کنیم، ولی اگر رفتار لایه مرزی مسئله در انتها یا سمت راست بازه تعریف مسئله باشد علاوه بر توضیح که ارائه شد ما نیاز به یک تغییر متغیر مناسب برای انتقال زیربازه لایه مرزی به یک بازه بزرگتر داریم، چرا که در غیر اینصورت روش هسته بازتولیدی قادر به تقریب جواب مسئله در زیربازه لایه مرزی نیست. بدیهی است پس از تغییر متغیر و انتقال مسئله لایه مرزی به بازه بزرگتر ما روش هسته بازتولیدی را در بازه جدید برای تقریب جواب مسئله پیاده سازی می‌کنیم.

۲.۳ معرفی معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با رفتار لایه مرزی

مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را که دارای رفتار لایه مرزی است در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + p(t)u'(t - \delta) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(t) = \varphi(t), & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = \gamma, \end{cases} \quad (1.3)$$

که ε پارامتر اختشاش مسئله و δ پارامتر تأخیر مسئله است و $0 < \varepsilon \ll 1$ و $0 < \delta \ll 1$. تابع‌های $f(t)$ ، $q(t)$ ، $p(t)$ ، $\varphi(t)$ به قدر کافی هموار هستند و γ یک ثابت است و $0 < p(t) \leq M$ ، $-\theta < q(t) \leq 0$ که θ ، M ثابت‌های مثبت هستند. با استفاده از بسط سری تیلور برای جمله $u'(t - \delta)$ حول t داریم

$$u'(t - \delta) \approx u'(t) - \delta u''(t),$$

بنابراین مسئله (۱.۳) تبدیل می‌شود به،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) = \varphi(0), & u(1) = \gamma. \end{cases} \quad (2.3)$$

نکته ۱.۲.۳. برای تعیین محلی که رفتار لایه مرزی مسئله (۲.۳) در آن اتفاق می افتد از روابط زیر استفاده می کنیم. اگر $p(t) > 0$ و $(\varepsilon - \delta p(t)) > 0$ در این صورت رفتار لایه مرزی در سمت چپ و اگر $p(t) < 0$ و $p(t) > 0$ و $(\varepsilon - \delta p(t)) < 0$ در این صورت رفتار لایه مرزی در سمت راست بازه تعریف مسئله (۲.۳) قرار دارند، که $t \in [0, 1]$.

۳.۳ نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای مسئله (۲.۳)

یکی از نکات مهمی که قبل از پیاده سازی روش هسته بازتولیدی بر روی معادله (۲.۳) باید لحاظ شود، نحوه تعیین دقیق زیربازه ای است که رفتار لایه مرزی در آن قرار دارد. برای تعیین هرچه دقیقتر زیربازه ای دارای رفتار لایه مرزی ما از رابطه $d = |k(\varepsilon \pm \delta) \ln(kN)|$ استفاده می کنیم. که k یک عدد حقیقی مثبت است و N تعداد نقاط در سرتاسر بازه تعریف مسئله برای استفاده از روش هسته بازتولیدی است و d طول بازه لایه مرزی است.

با توجه به اینکه رفتار لایه مرزی مسئله در کدام سمت از بازه تعریف آن قرار دارد ما تقسیم بندی زیربازه ها را به صورت زیر انجام می دهیم. اگر رفتار لایه مرزی در سمت چپ قرار داشته باشد بازه تعریف مسئله $[0, 1]$ را به دو زیربازه $[0, d]$ و $[d, 1]$ تقسیم می کنیم، برای راحتی بازه $[0, d]$ را بازه لایه مرزی و بازه $[d, 1]$ را بازه معمولی می نامیم، و همچنین معادله (۲.۳) در بازه $[0, d]$ را معادله لایه مرزی، و در بازه $[d, 1]$ معادله معمولی می نامیم. ولی اگر رفتار لایه مرزی در سمت راست قرار داشته باشد بازه تعریف مسئله $[0, 1]$ را به دو زیربازه $[1-d, 1]$ و $[0, 1-d]$ تقسیم می کنیم، برای راحتی بازه $[1-d, 1]$ را بازه لایه مرزی و بازه $[0, 1-d]$ را بازه معمولی می نامیم، و همچنین معادله (۲.۳) در بازه $[1-d, 1]$ را معادله لایه مرزی، و در بازه $[0, 1-d]$ معادله معمولی می نامیم.

۱.۳.۳ معادله (۲.۳) با رفتار لایه مرزی در سمت چپ

این حالت که رفتار لایه مرزی در سمت چپ بازه تعریف مسئله (۲.۳) قرار دارد، زیر بازه های مسئله به صورت $[0, d]$ (بازه لایه مرزی) و $[d, 1]$ (بازه معمولی) هستند. ابتدا تقریب جواب معادله در بازه معمولی را محاسبه می کنیم و سپس تقریب جواب معادله در بازه لایه مرزی را بدست می آوریم. برای محاسبه جواب تقریبی معادله در بازه معمولی (معادله معمولی) آنرا به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), \\ u(1) = \gamma, \quad t \in [d, 1] \end{cases} \quad (3.3)$$

پس از همگن سازی معادله (۳.۳)، ابتدا فضای هسته بازتولیدی $W_1^*[d, 1]$ را به صورت زیر تعریف کرده و سپس هسته بازتولیدی آنرا می سازیم.

$$W_1^*[d, 1] = \left\{ u(t) \mid u''(t) \text{ تابع مطلقا پیوسته است}, u'''(t) \in L^2[d, 1], t \in [d, 1], u(1) = 0 \right\},$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $W_1^*[d, 1]$ به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{W_1^*[d, 1]} = \sum_{i=0}^2 u_1^{(i)}(d) u_2^{(i)}(d) + \int_d^1 u_1'''(t) u_2'''(t) dt,$$

$$\|u(t)\|_{W_1^*[d, 1]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^*[d, 1]}}, \quad \forall u_1(t), u_2(t) \in W_1^*[d, 1].$$

قضیه ۱.۳.۳. $W_1^*[d, 1]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۳۵]

$$R_y(t) = \begin{cases} R(t, y), & t \leq y, \\ R(y, t), & t > y, \end{cases}$$

که

$$\begin{aligned}
 R(t, y) = & -((t^5(156 - 270d + 210d^2 - 110d^3 + 15d^4 - 120y + 180dy - 150d^2y + 100d^3y - 15d^4y - 30y^2 + \\
 & 90dy^2 - 60d^2y^2 + 10d^3y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5)) / (72(-46 + 65d - 60d^2 + 30d^3 - 10d^4 + d^5))) - (t^3(-120 + \\
 & 120d - 150d^2 + 70d^3 - 45d^4 + 6d^5 - 120y + 180dy - 150d^2y + 100d^3y - 15d^4y + 246y^2 - 300dy^2 + 300d^2y^2 - \\
 & 170d^3y^2 + 60d^4y^2 - 6d^5y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5)) / (72(-46 + 65d - 60d^2 + 30d^3 - 10d^4 + d^5))) - (t^4(120 - \\
 & 120d + 150d^2 - 70d^3 + 45d^4 - 6d^5 - 156y + 210dy - 210d^2y + 180d^3y - 45d^4y + 6d^5y + 30y^2 - 90dy^2 + \\
 & 60d^2y^2 - 10d^3y^2 + 10y^3 - 5y^4 + y^5)) / (144(-46 + 65d - 60d^2 + 30d^3 - 10d^4 + d^5))) - (1/(72(-46 + 65d - \\
 & 60d^2 + 30d^3 - 10d^4 + d^5)))t^5(-360 + 1440d - 1442d^2 + 954d^3 - 315d^4 + 93d^5 - 34d^6 + 3d^7 - 360y - \\
 & 36dy + 378d^2y - 480d^3y + 135d^4y - 15d^5y + 26d^6y - 3d^7y + 738y^2 - 1458dy^2 + 1080d^2y^2 - 480d^3y^2 + \\
 & 180d^4y^2 - 78d^5y^2 + 8d^6y^2 - 30y^3 + 90dy^3 - 60d^2y^3 + 10d^3y^3 + 15y^4 - 45dy^4 + 30d^2y^4 - 5d^3y^4 - 3y^5 + \\
 & 9dy^5 - 6d^2y^5 + d^3y^5) - (1/(144(-46 + 65d - 60d^2 + 30d^3 - 10d^4 + d^5)))t(-2880 + 576d - 2160d^2 + \\
 & 1128d^3 - 1032d^4 + 294d^5 - 32d^6 + 30d^7 - 3d^8 + 3744y - 720dy + 1584d^2y - 288d^3y + 780d^4y - 264d^5y - \\
 & 20d^6y - 24d^7y + 3d^8y - 720y^2 - 72dy^2 + 756d^2y^2 - 960d^3y^2 + 270d^4y^2 - 30d^5y^2 + 52d^6y^2 - 6d^7y^2 - \\
 & 240y^3 + 360dy^3 - 300d^2y^3 + 200d^3y^3 - 30d^4y^3 + 120y^4 - 180dy^4 + 150d^2y^4 - 100d^3y^4 + 15d^4y^4 - 24y^5 + \\
 & 36dy^5 - 30d^2y^5 + 20d^3y^5 - 3d^4y^5) - (1/(720(-46 + 65d - 60d^2 + 30d^3 - 10d^4 + d^5))) (18720 - 18000d + \\
 & 25920d^2 - 15600d^3 + 8580d^4 - 2436d^5 + 500d^6 - 180d^7 + 15d^8 - 14400y + 2880dy - 10800d^2y + 5640d^3y - \\
 & 5160d^4y + 1470d^5y - 160d^6y + 150d^7y - 15d^8y - 3600y^2 + 14400dy^2 - 14220d^2y^2 + 9540d^3y^2 - 3150d^4y^2 + \\
 & 930d^5y^2 - 340d^6y^2 + 30d^7y^2 - 1200y^3 + 1200dy^3 - 1500d^2y^3 + 700d^3y^3 - 450d^4y^3 + 60d^5y^3 + 600y^4 - \\
 & 600dy^4 + 750d^2y^4 - 350d^3y^4 + 225d^4y^4 - 30d^5y^4 - 120y^5 + 120dy^5 - 150d^2y^5 + 70d^3y^5 - 45d^4y^5 + 6d^5y^5).
 \end{aligned}$$

همچنین فضای هسته بازتولیدی $W_1^1[d, 1]$ و نرم و ضرب داخلی آنرا را صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_1^1[d, 1] = \left\{ u(x) \mid u(x) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'(x) \in L^1[d, 1], x \in [d, 1] \right\},$$

$$\langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{W_1^1[d, 1]} = u_1(d)u_2(d) + \int_d^1 u_1'(t)u_2'(t)dt,$$

$$\|u(t)\|_{W_1^1[d, 1]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^1[d, 1]}}, \quad \forall u_1(t), u_2(t) \in W_1^1[d, 1].$$

قضیه ۲.۳.۳. $W_1^1[d, 1]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۳۵]

$$r_y(t) = \begin{cases} r(t, y), & t \leq y, \\ r(y, t), & t > y, \end{cases}$$

$$r(t, y) = 1 - d + t, \text{ که}$$

عملگر $\mathbb{L}$ برای معادله (۳.۳) را به صورت $\mathbb{L}(u(t)) = (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t)$ می‌کنیم که فضای بازتولیدی برای این عملگر به صورت $\mathbb{L} : W_1^1[d, 1] \rightarrow W_1^1[d, 1]$ است. فرض می‌کنیم $\mathbb{L}(u(t))$ یک عملگر دیفرانسیلی معکوس پذیر خطی کراندار باشد، یک زیرمجموعه نقاط چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ مانند $\{t_i\}_{i=1}^\infty$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$\phi_i(t) = R_y(t)|_{y=t_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $R_y(t)$ هسته بازتولیدی فضای $W_{\uparrow}^{\alpha}[d, 1]$ و $r_y(t)$ هسته بازتولیدی فضای $W_{\uparrow}^{\alpha}[d, 1]$ می‌باشند. همچنین به راحتی ثابت می‌شود که $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل برای فضای $W_{\uparrow}^{\alpha}[0, 1]$ است. $\Psi_i(t) = r_{t_i}(t)$ که $\Psi_i(t)$ پایه‌های فضای $W_{\uparrow}^{\alpha}[d, 1]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\phi_i(t) = \mathbb{L}^* \Psi_i(t).$$

که $\mathbb{L}^*$ عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ است.

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنید $\{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ باشد و $\mathbb{L}^{-1}$ وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (۳.۳) به صورت زیر است

$$u_{n_1}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(t), \quad (4.3)$$

که c_i ثابت‌های مجهول هستند که باید محاسبه شوند.

□

اثبات. رجوع شود به فصل دوم، روش هسته بازتولیدی، حالت دو.

اکنون نحوه محاسبه ثابت‌های c_i ، $i = 1, 2, \dots$ را بیان می‌کنیم. با استفاده از جواب تقریبی $u_{n_1}(t)$ و قرار دادن آن در معادله (۳.۳) تابع مانده $\mathbb{R}_{n_1}(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{R}_{n_1}(t) = \mathbb{L}(u_{n_1}(t)) - f(t), \quad (5.3)$$

اکنون ثابت‌های $c_{i,m}$ را طوری محاسبه می‌کنیم که ضرب داخلی زیر برابر صفر باشد، یعنی

$$\langle \mathbb{R}_{n_1}(t), \phi_j(t) \rangle_{W_{\uparrow}^{\alpha}} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \quad (6.3)$$

با استفاده از تعریف تابع مانده و تعریف جواب تقریبی $u_{n_1}(t)$ داریم

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{R}_{n_1}(t), \phi_j(t) \rangle &= \langle \mathbb{L}(u_{n_1}(t)) - f(t), \phi_j(t) \rangle \\ &= \langle \mathbb{L}(u_{n_1}(t)), \phi_j(t) \rangle - \langle f(t), \phi_j(t) \rangle \\ &= \langle \mathbb{L}(\sum_{i=1}^{n_1} c_i \phi_i(t)), \phi_j(t) \rangle - \langle f(t), \phi_j(t) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} c_i \langle \mathbb{L}(\phi_i(t)), \phi_j(t) \rangle - \langle f(t), \phi_j(t) \rangle = 0, \end{aligned}$$

در نهایت با استفاده از خاصیت بازتولیدی در ضرب داخلی به یک دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر می‌رسیم که با حل آن می‌توان ثابت‌های c_i را محاسبه کرد.

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_i \mathbb{L} \phi_i(t)|_{t=t_j} = f(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n_1. \quad (7.3)$$

برای اثبات همگرایی جواب تقریبی $u_{n_1}(t)$ به جواب دقیق مسئله $u(t)$ همانند فصل دوم در بخش روش هسته بازتولیدی برای حالت ۲، عمل می‌کنیم. اکنون نوبت به محاسبه جواب تقریبی برای مسئله لایه مرزی می‌رسد. برای محاسبه جواب تقریبی مسئله لایه مرزی، معادله (۲.۳) را در بازه لایه مرزی با اضافه کردن یک شرط از نقطه ابتدایی بازه $[d, 1]$ ، به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, d], \\ u(0) = \varphi(0), & u(d) = u_{n_1}(d). \end{cases} \quad (۸.۳)$$

پس از همگن سازی معادله (۸.۳)، برای حل آن با استفاده از روش هسته بازتولیدی، ابتدا همانند مسئله لایه معمولی فضای هسته بازتولیدی مربوط به این معادله را تعریف کرده و سپس هسته بازتولیدی آنرا می‌سازیم.

$$W_1^3[0, d] = \left\{ u(t) \mid u''(t) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'''(t) \in L^2[0, d], t \in [0, d], u(0) = u(d) = 0 \right\},$$

$$\langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{W_1^3[0, d]} = \sum_{i=0}^2 u_1^{(i)}(0)u_2^{(i)}(0) + \int_0^d u_1'''(t)u_2'''(t)dt,$$

$$\|u(t)\|_{W_1^3[0, d]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^3[0, d]}}, \quad \forall u_1(t), u_2(t) \in W_1^3[0, d].$$

قضیه ۴.۳.۳. $W_1^3[0, d]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۳۵]

$$K_y(t) = \begin{cases} K(t, y), & t \leq y, \\ K(y, t), & t > y, \end{cases}$$

که

$$K(t, y) = -((t^4(30d^3y + 6d^4y - 30d^2y^2 - 10d^2y^3 + 5dy^4 - y^5))/(144d(20 + 5d^2 + d^3))) - (t^5(-120d^3 - 30d^4 - 6d^5 + 120dy + 30d^2y^2 + 10d^2y^3 - 5dy^4 + y^5))/(720d^2(20 + 5d^2 + d^3)) - (t(-30d^3y - 6d^4y + 30d^2y^2 + 10d^2y^3 - 5dy^4 + y^5))/(6d(20 + 5d^2 + d^3)) - (t^2(120dy - 120y^2 - 6d^3y^2 + 10d^2y^3 - 5dy^4 + y^5))/(24(20 + 5d^2 + d^3)) - (t^3(120dy - 120y^2 - 6d^3y^2 + 10d^2y^3 - 5dy^4 + y^5))/(72(20 + 5d^2 + d^3)).$$

۲.۳.۳ معادله (۲.۳) با رفتار لایه مرزی در سمت راست

در این حالت که رفتار لایه مرزی در سمت راست بازه تعریف مسئله (۲.۳) قرار دارد، زیر بازه‌های مسئله به صورت $[1-d, 1]$ (بازه لایه مرزی) و $[0, 1-d]$ (بازه معمولی) هستند، که ابتدا تقریب جواب معادله در بازه معمولی را محاسبه می‌کنیم و سپس تقریب جواب معادله در بازه لایه مرزی را بدست می‌آوریم. برای محاسبه جواب تقریبی معادله در بازه معمولی (معادله معمولی) آنرا به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), \\ u(0) = \varphi(0), \end{cases} \quad t \in [0, 1-d] \quad (۹.۳)$$

پس از همگن سازی معادله (۳.۳)، ابتدا فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[0, 1-d]$ را به صورت زیر تعریف کرده و سپس هسته بازتولیدی آنرا می‌سازیم.

$$W_1^3[0, 1-d] = \left\{ u(t) \mid u''(t) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'''(t) \in L^2[0, 1-d], t \in [0, 1-d], u(0) = 0 \right\},$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $W_1^3[0, 1-d]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{W_1^3[0, 1-d]} = \sum_{i=0}^2 u_1^{(i)}(0) u_2^{(i)}(0) + \int_0^{1-d} u_1'''(t) u_2'''(t) dt,$$

$$\|u(t)\|_{W_1^3[0, 1-d]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^3[0, 1-d]}}, \quad \forall u_1(t), u_2(t) \in W_1^3[0, 1-d].$$

قضیه ۵.۳.۳. $W_1^3[0, 1-d]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۳۵]

$$R_y(t) = \begin{cases} R(t, y), & t \leq y, \\ R(y, t), & t > y, \end{cases}$$

$$R(t, y) = 1/120t(t^4 + 12y - 5t^3y + 3ty^2 + 10t^2y^2) \text{ که}$$

سپس معادله (۹.۳) را همانند مسئله معمولی برای حالتی که لایه مرزی در سمت چپ قرار دارد حل می‌کنیم. حال نوبت به محاسبه جواب تقریبی برای مسئله لایه مرزی می‌رسد. برای محاسبه جواب تقریبی مسئله لایه مرزی، معادله (۲.۳) را در بازه لایه مرزی با اضافه کردن یک شرط از نقطه انتهایی بازه $[0, 1-d]$ ، به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [1-d, 1], \\ u(1-d) = u_n(1-d), & u(1) = \gamma. \end{cases} \quad (10.3)$$

قبل از حل معادله (۱۰.۳) با روش هسته بازتولیدی ابتدا با استفاده از تغییر متغیر $u(t) = y(x)$ با $t = dx + 1$ بازه لایه مرزی معادله را از بازه $[1-d, 1]$ به بازه $[-1, 0]$ انتقال می‌دهیم.

(۱۱.۳)

$$\begin{cases} \frac{1}{d^2}(\varepsilon - \delta p(dx + 1))y''(x) + \frac{1}{d}p(dx + 1)y'(x) + q(dx + 1)y(x) = f(dx + 1), & x \in [-1, 0], \\ y(-1) = u_n(1-d), & y(0) = \gamma. \end{cases}$$

پس از همگن سازی معادله (۱۱.۳)، برای حل آن با استفاده از روش هسته بازتولیدی، ابتدا فضای هسته بازتولیدی مربوط به عملگر این معادله را تعریف کرده و سپس هسته بازتولیدی آنرا می‌سازیم.

$$W_1^3[-1, 0] = \left\{ y(x) \mid y'''(x) \in L^2[-1, 0], x \in [-1, 0], y(-1) = y(0) = 0 \right\},$$

$$\langle y_1(x), y_2(x) \rangle_{W_1^3[-1, 0]} = \sum_{i=0}^2 y_1^{(i)}(-1) y_2^{(i)}(-1) + \int_{-1}^0 y_1'''(x) y_2'''(x) dx,$$

$$\|y(x)\|_{W_1^3[-1, 0]} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{W_1^3[-1, 0]}}, \quad \forall y_1(x), y_2(x) \in W_1^3[-1, 0].$$

قضیه ۶.۳.۳. $W_1^3[-1, 0]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۳۵]

$$K_y(x) = \begin{cases} K(x, y), & x \leq y, \\ K(y, x), & x > y, \end{cases}$$

که

$$K(x, y) = -((y(780x^4 - 1560x^3y + 156y^4 + 40x^2(-156 - 194y + y^4) + 195x(-29 - 32y + y^4) + x^5(195 + 40y + y^4))))/18720).$$

بدیهی است که با اعمال عکس تغییر متغیر ذکر شده روی جواب تقریبی حاصل از حل معادله (۱۱.۳)، می‌توان جواب تقریبی معادله (۱۰.۳) را از رابطه $u(t) = y(\frac{t-1}{d})$ بدست آورد.

نکته ۷.۳.۳. نکته‌ی مهمی که در اینجا باید آورده شود برای حالتی است که مقادیر ε و δ در معادله (۲.۳) به گونه‌ای هستند که رفتار لایه وجود ندارد یا رفتار لایه مرزی از نوع شدید نمی‌باشد که در این صورت ما نیاز به تقسیم بازه مسئله به دو زیربازه لایه مرزی و معمولی نداریم و فقط کافی است روش هسته بازتولیدی را برای معادله (۲.۳) به صورتی که عنوان شد در سراسر بازه تعریف معادله پیاده سازی کنیم.

۴.۳ آنالیز خطا

برای بدست آوردن یک کران خطا برای روش هسته بازتولیدی که بر روی مسئله (۲.۳) به کار برده شده است، نیاز به یک سری مقدمات و قضیه‌ها و لم‌ها داریم که در ادامه می‌آوریم. توجه به این نکته ضروری است که همانطور که پیاده سازی روش هسته بازتولیدی بر روی مسئله (۲.۳) در دوبازه لایه مرزی و بازه معمولی انجام شد، تحلیل خطا هم به همین صورت ابتدا برای بازه معمولی و سپس بازه لایه مرزی انجام می‌شود، همچنین ما فقط تحلیل خطا مربوط به حالتی که مسئله دارای رفتار لایه در سمت چپ بازه تعریف خود است را مطرح می‌کنیم و برای زمانی که رفتار لایه مرزی در سمت راست است به همین ترتیب سمت چپ اثبات می‌شود.

لم ۱.۴.۳. اگر $u(t)$ جواب دقیق مسئله (۲.۳) باشد،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) = \varphi(0), & u(1) = \gamma. \end{cases}$$

آنگاه نامساوی زیر برقرار است،

$$\|u(t)\|_{\infty} \leq \frac{1}{\theta} \|\mathbb{L}u(t)\|_{\infty} + \max\{\varphi(0), \gamma\},$$

که $\mathbb{L}u(t) = f(t)$ ، $\|u(t)\|_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$

□

اثبات. [۶۰، ۶۱].

فرض کنید $u_{n_1}(t)$ جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی در بازه معمولی $[d, 1]$ و $u_{n_2}(t)$ جواب تقریبی در بازه لایه مرزی $[0, d]$ باشند در این صورت جواب تقریبی برای معادله (۲.۳) در سراسر بازه $[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$U(t) = \begin{cases} u_{n_1}(t) & t \in [d, 1], \\ u_{n_2}(t) & t \in [0, d]. \end{cases}$$

قضیه ۲.۴.۳. فرض کنید $u_{n_1}(t)$ جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی در فضای بازتولیدی $W_2^3[d, 1]$ باشد و $u(t)$ جواب دقیق برای مسئله (۳.۳) باشند و داشته باشیم $p(t), q(t), f(t), \varphi(t) \in C^2[0, 1]$ آنگاه

$$\|u(t) - u_{n_1}(t)\|_{\infty} \leq a_1 h_1^2$$

که $\|u(t)\|_{\infty} = \max_{t \in [d, 1]} |u(t)|$ و a_1 یک ثابت مثبت است و $h_1 = \max_{1 \leq i \leq n_1} |t_{i+1} - t_i|$ و n_1 تعداد نقاط استفاده شده برای روش هسته بازتولیدی در بازه $[d, 1]$ است.

اثبات. [۶۲، ۶۳]. $\square$

در قضیه بعدی کران خطا را برای جواب تقریبی $u_{n_r}(t)$ در بازه لایه مرزی و جواب دقیق $u(t)$ ارائه می‌کنیم، ولی برای رسیدن به این مقصود ابتدا یک سری مقدمات نیاز داریم که در ادامه می‌آوریم. مسئله (۸.۳) را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, d], \\ u(0) = \varphi(0), & u(d) = u_{n_r}(d). \end{cases} \quad (12.3)$$

پس از همگن سازی معادله (۱۲.۳) با استفاده از رابطه $u(t) = y(t) + A_1(t)$ که $A_1(t) = \varphi(0) + \frac{u_{n_r}(d) - \varphi(0)}{d}t$ معادله زیر را داریم،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = F(t), & t \in [0, d], \\ y(0) = 0, & y(d) = 0. \end{cases} \quad (13.3)$$

که $F(t) = \frac{p(t)(u_{n_r}(d) - \varphi(0)) + q(t)(tu_{n_r}(d) + (d-t)\varphi(0))}{d}$ فرض کنید که $\bar{y}(t)$ جواب تقریبی معادله (۱۳.۳) باشد که در فضای بازتولیدی $W_1^3[0, d]$ بدست آمده است، بنابراین داریم $u_{n_r}(t) = \bar{y}(t) + A_1(t)$ اکنون معادله زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t) = g(t), & t \in [0, d], \\ v(0) = \varphi(0), & v(d) = u(d). \end{cases} \quad (14.3)$$

بدیهی است که $u(t)$ جواب دقیق معادله (۱۴.۳) است. با همگن سازی معادله (۱۴.۳) با استفاده از رابطه $v(t) = w(t) + A_2(t)$ که $A_2(t) = \varphi(0) + \frac{u(d) - \varphi(0)}{d}t$ معادله زیر را داریم،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))w''(t) + p(t)w'(t) + q(t)w(t) = G(t), & t \in [0, d], \\ w(0) = 0, & w(d) = 0, \end{cases} \quad (15.3)$$

که $G(t) = \frac{p(t)(u(d) - \varphi(0)) + q(t)(tu(d) + (d-t)\varphi(0))}{d}$ فرض کنید که $\bar{w}(t)$ جواب تقریبی معادله (۱۵.۳) باشد که در فضای بازتولیدی $W_1^3[0, d]$ بدست آمده است.

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید $u_{n_r}(t)$ جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی در فضای بازتولیدی $W_1^3[0, d]$ باشد و $u(t)$ جواب دقیق برای مسئله (۸.۳) باشند و داشته باشیم $p(t), q(t), f(t), \varphi(t) \in C^1[0, 1]$ آنگاه

$$\|u(t) - u_{n_r}(t)\|_{\infty} \leq a_2 h_2^2$$

که $\|u(t)\|_{\infty} = \max_{t \in [d, 1]} |u(t)|$ و a_2 یک ثابت مثبت است و $h_2 = \max_{1 \leq i \leq n_r} |t_{i+1} - t_i|$ و n_r تعداد نقاط استفاده شده برای روش هسته بازتولیدی در بازه $[0, d]$ است.

اثبات. با استفاده از [۶۲-۶۴] داریم،

$$\|\bar{y}(t) - F(t)\|_{\infty} = \max_{t \in [0, d]} |\mathbb{L}\bar{y}(t) - F(t)| \leq a_2 h_2^2, \quad (16.3)$$

که $h_r = \max_{1 \leq i \leq n_r} |t_{i+1} - t_i|$ و با استفاده از قضیه ۲.۴.۳ داریم،

$$F(t) - G(t) = \frac{p(t)}{d}(u_{n_r}(d) - u(d)) + \frac{tq(t)}{d}(u_{n_r}(d) - u(d)),$$

بنابراین

$$\|F(t) - G(t)\|_\infty = \max_{t \in [0, d]} |F(t) - G(t)| \leq a_r h_r, \quad (17.3)$$

که $h_1 = \max_{1 \leq i \leq n_1} |t_{i+1} - t_i|$ و a_r یک ثابت مثبت است. با استفاده از رابطه‌های (۱۶.۳) و (۱۷.۳) داریم،

$$\begin{aligned} \|\mathbb{L}(\bar{y}(t) - w(t))\|_\infty &= \|\bar{y}(t) - G(t)\|_\infty \\ &= \|\bar{y}(t) - F(t) + F(t) - G(t)\|_\infty \\ &\leq \|\bar{y}(t) - F(t)\|_\infty + \|F(t) - G(t)\|_\infty \\ &\leq a_r h_r + a_r h_1, \end{aligned} \quad (18.3)$$

با استفاده از رابطه (۱۸.۳) و لم ۱.۴.۳ داریم،

$$\|\bar{y}(t) - w(t)\|_\infty = \max_{t \in [0, d]} |\bar{y}(t) - w(t)| \leq \frac{1}{\theta} (a_r h_r + a_r h_1). \quad (19.3)$$

همچنین با استفاده از قضیه ۲.۴.۳ و رابطه (۱۹.۳) داریم

$$\begin{aligned} \|u_{n_r}(t) - u(t)\|_\infty &= \|\bar{y}(t) + A_1(t) - w(t) - A_r(t)\|_\infty \\ &\leq \|\bar{y}(t) - w(t)\|_\infty + \|A_1(t) - A_r(t)\|_\infty \\ &\leq \frac{1}{\theta} (a_r h_r + a_r h_1) + \frac{1}{d} a_\delta h_1, \end{aligned} \quad (20.3)$$

در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که،

$$\begin{aligned} \|u(x) - u_{n_r}(x)\|_\infty &= \max_{t \in [0, d]} |u(t) - u_{n_r}(t)| \\ &\leq \frac{1}{\theta} (a_r h_r + a_r h_1) + \frac{1}{d} a_\delta h_1 \\ &\leq a_r h_r. \end{aligned} \quad (21.3)$$

□

قضیه ۴.۴.۳. فرض کنید $U(t)$ جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی در فضای بازتولیدی W_r و $u(t)$ جواب دقیق برای مسئله (۲.۳) باشند، آنگاه

$$\|U(t) - u(t)\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |U(t) - u(t)| \leq a_\epsilon h$$

که a_ϵ یک ثابت مثبت است و $h = \max_{1 \leq i \leq N} |t_{i+1} - t_i|$ و N تعداد نقاط استفاده شده برای روش هسته بازتولیدی در بازه $[0, 1]$ است.

اثبات. با استفاده از قضیه‌های ۳.۴.۳، ۲.۴.۳ داریم،

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_{n_1}(t)\|_\infty &\leq a_1 h_1^\gamma, \\ \|u(t) - u_{n_2}(t)\|_\infty &\leq a_2 h_2^\gamma, \end{aligned} \quad (22.3)$$

که $h = \max_{1 \leq i \leq N} |t_{i+1} - t_i|$ و a_1 و a_2 ثابت‌های مثبت هستند و

$$U(t) = \begin{cases} u_{n_1}(t) & t \in [d, 1], \\ u_{n_2}(t) & t \in [0, d]. \end{cases} \quad (23.3)$$

و در نتیجه با استفاده از رابطه‌های (۲۲.۳) و (۲۳.۳) داریم،

$$\|U(t) - u(t)\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |U(t) - u(t)| \leq a_6 h^\gamma.$$

□

در حالتی که رفتار لایه مرزی در سمت راست بازه تعریف مسئله (۲.۳) قرار دارد، فرض کنید $u_{n_1}(t)$ جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی در بازه معمولی $[0, 1-d]$ و $u_{n_2}(t)$ جواب تقریبی در بازه لایه مرزی $[1-d, 1]$ باشند در این صورت جواب تقریبی برای معادله (۲.۳) در سراسر بازه $[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$U(t) = \begin{cases} u_{n_1}(t) & t \in [0, 1-d], \\ u_{n_2}(t) & t \in [1-d, 1]. \end{cases}$$

و در نتیجه همانند زمانی که رفتار لایه مرزی در سمت چپ بازه تعریف مسئله قرار دارد، ما قضیه‌های ۲.۴.۳ و ۳.۴.۳ را نیز برای حالتی که رفتار لایه مرزی در سمت راست مسئله (۲.۳) قرار دارد، داریم.

۵.۳ مثالهای عددی

مثال ۱.۵.۳. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۶۵-۶۷، ۶۰]

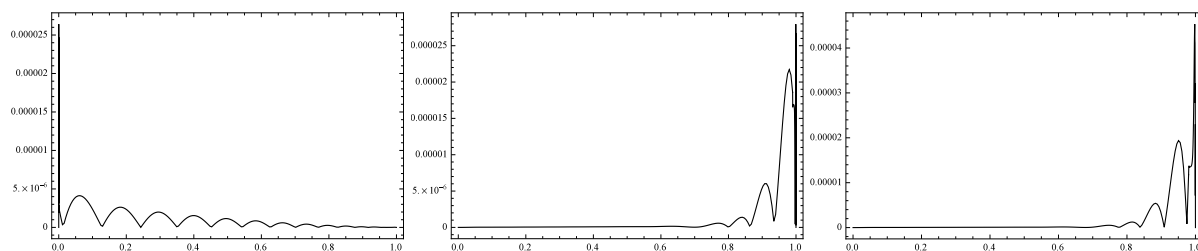
$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + u'(t - \delta) - u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

که جواب دقیق برای این معادله برابر است با $u(t) = \frac{(e^{m_1} - 1)e^{m_2 t} + (1 - e^{m_2})e^{m_1 t}}{e^{m_1} - e^{m_2}}$ که $m_1 = \frac{-\sqrt{4(\varepsilon - \delta) + 1} - 1}{2(\varepsilon - \delta)}$ و $m_2 = \frac{\sqrt{4(\varepsilon - \delta) + 1} - 1}{2(\varepsilon - \delta)}$ و $d = |k(\varepsilon - \delta) \ln(N)|$

مثال ۲.۵.۳. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۶۵-۶۷، ۶۰]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) - u'(t - \delta) - u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = -1, \end{cases}$$

که جواب دقیق برای این معادله برابر است با $u(t) = \frac{(e^{m_2} + 1)e^{m_1 t} + (1 + e^{m_1})e^{m_2 t}}{e^{m_2} - e^{m_1}}$ که $m_1 = \frac{1 - \sqrt{4(\varepsilon + \delta) + 1}}{2(\varepsilon + \delta)}$ و $m_2 = \frac{\sqrt{4(\varepsilon + \delta) + 1} + 1}{2(\varepsilon + \delta)}$ و $d = |k(\varepsilon + \delta) \ln(kN)|$



شکل ۱.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۵.۳) با $\varepsilon = 10^{-4}$ و $N = 41$ (راست: $\delta = 0.12$ وسط: $\delta = 0.06$ چپ: $\delta = 0.06$)

برای مثال ۱.۵.۳ و ۲.۵.۳ وقتی لایه مرزی در سمت چپ قرار دارد نقاط مورد استفاده برای پیاده سازی روش هسته بازتولیدی در بازه معمولی و لایه مرزی به ترتیب برابر $t_i = 1 - (1 - d + \alpha)(\frac{i}{n_1})^2$ و $t_j = d(\frac{j}{n_2+1})^2$ است و زمانی که لایه مرزی در سمت راست قرار دارد نقاط مورد استفاده برای پیاده سازی روش هسته بازتولیدی در بازه معمولی و لایه مرزی به ترتیب برابر $t_i = (\frac{i}{n_1})^2 + \frac{1}{n_1}$ و $t_j = -d(\frac{j}{n_2+1})^2$ است، که $0 < \alpha < 1$ و $i = 1, 2, \dots, n_1$ $j = 1, 2, \dots, n_2$ و $N = n_1 + n_2$.

مثال ۳.۵.۳. معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد زیر با شرط تفاضلی $u(0) - u'(0) = 1$ را در نظر بگیرید [۶۸]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) - u'(t) - u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) - u'(0) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

که جواب دقیق برای این معادله برابر است با $(2t + 3)$ و $m_1 = \frac{\sqrt{4\varepsilon+1}-1}{2\varepsilon}$ که $u(t) = \frac{\delta(m_1-1)e^{m_1 t} + \delta(1-m_1)e^{m_2 t}}{(1-m_1)e^{m_1} - (1-m_2)e^{m_2}} + (2t + 3)$ و $m_2 = \frac{-\sqrt{4\varepsilon+1}-1}{2\varepsilon}$ و $d = |k\varepsilon \ln(kN)|$.

مثال ۴.۵.۳. معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد زیر با شرط تفاضلی $u(0) - u'(0) = 0$ را در نظر بگیرید [۶۸، ۶۹]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + u'(t) - u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) - u'(0) = 0, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

که جواب دقیق برای این معادله برابر است با $\frac{(1-m_1)e^{m_1 t} - (1-m_2)e^{m_2 t}}{(1-m_1)e^{m_1} - (1-m_2)e^{m_2}}$ که $u(t) = \frac{\sqrt{4\varepsilon+1}-1}{2\varepsilon}$ و $m_1 = \frac{\sqrt{4\varepsilon+1}-1}{2\varepsilon}$ و $m_2 = \frac{-\sqrt{4\varepsilon+1}-1}{2\varepsilon}$ و $d = |k\varepsilon \ln(kN)|$.

برای مثال ۳.۵.۳ و ۴.۵.۳ نقاط مورد استفاده برای پیاده سازی روش هسته بازتولیدی در بازه معمولی و لایه مرزی به ترتیب برابر $t_i = 1 - (1 - d)(\frac{i}{n_1+1})^2$ و $t_j = d(\frac{j}{n_2+1})^2$ است و $i = 1, 2, \dots, n_1$ $j = 1, 2, \dots, n_2$ و $N = n_1 + n_2$.

جدول ۱.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳ با $\varepsilon = 10^{-1}$

δ	$N = 100$			
	روش هسته بازتولیدی	روش مرجع [۶۵]	روش مرجع [۶۷]	روش مرجع [۶۷]
L_∞				
10^{-1}	4.6×10^{-7}	4.6×10^{-6}	1.2×10^{-4}	9.0928×10^{-6}
10^{-3}	4.2×10^{-7}	4.6×10^{-6}	1.6×10^{-4}	1.08362×10^{-5}
10^{-6}	2.1×10^{-7}	4.6×10^{-6}	2.8×10^{-4}	1.28454×10^{-5}
10^{-8}	2.3×10^{-7}	4.6×10^{-6}	5.7×10^{-4}	1.01499×10^{-5}
10^{-10}	5.7×10^{-6}	1.4×10^{-5}	—	—
10^{-20}	1.7×10^{-6}	1.4×10^{-5}	—	—

جدول ۲.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۳ با $\delta = 10^{-12}$

ε	$N = 32$			
	روش هسته بازتولیدی	روش مرجع [۶۵]	روش مرجع [۶۰]	روش مرجع [۶۰]
L_∞				
10^{-2}	5.27×10^{-5}	4.50×10^{-5}	1.49×10^{-2}	6.58×10^{-2}
10^{-3}	4.83×10^{-5}	4.50×10^{-5}	3.88×10^{-2}	8.07×10^{-2}
10^{-4}	5.04×10^{-5}	2.50×10^{-4}	5.06×10^{-2}	8.46×10^{-2}
10^{-5}	5.07×10^{-5}	2.50×10^{-4}	5.21×10^{-2}	8.54×10^{-2}
10^{-6}	5.12×10^{-5}	2.50×10^{-4}	5.03×10^{-2}	8.58×10^{-2}
10^{-7}	8.01×10^{-5}	—	—	—

جدول ۳.۳: مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۱.۵.۳ با $\varepsilon = 10^{-1}$

δ	مثال (۱.۵.۳)		مرتبه همگرایی (CR)	مرتبه همگرایی (CR)	
	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $		$\max u_{\lambda_0}(t) - u(t) $	$\max u_{\lambda_0}(t) - u(t) $
10^{-1}	1.7×10^{-4}	6.0×10^{-6}	۵۵۵۸۸۹	4.6×10^{-7}	۳,۶۴۳۸۶
10^{-3}	1.2×10^{-4}	6.7×10^{-6}	۴۵۵۸۸۹	5.2×10^{-7}	۳,۶۴۳۸۶
10^{-6}	8.7×10^{-5}	6.7×10^{-6}	۳,۶۴۳۸۶۳	5.9×10^{-7}	۳,۶۷۳۹۳
10^{-8}	1.1×10^{-4}	9.0×10^{-6}	۳,۶۴۳۸۶	8.4×10^{-7}	۳,۶۷۳۹۳

جدول ۴.۳: مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۱.۵.۳ با $\delta = 10^{-12}$

ε	مثال (۱.۵.۳)		مرتبه همگرایی (CR)	مرتبه همگرایی (CR)	
	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $		$\max u_{\lambda_0}(t) - u(t) $	$\max u_{\lambda_0}(t) - u(t) $
10^{-2}	5.0×10^{-3}	1.1×10^{-4}	۵,۵۰۶۳۵	4.8×10^{-6}	۴,۵۳۹۵۲
10^{-3}	5.0×10^{-3}	1.1×10^{-4}	۵,۵۰۶۳۵	4.9×10^{-6}	۴,۵۰۶۳۵
10^{-4}	5.0×10^{-3}	1.1×10^{-4}	۵,۵۰۶۳۵	5.2×10^{-6}	۴,۴۱۱۲۰
10^{-5}	5.0×10^{-3}	1.1×10^{-4}	۵,۵۰۶۳۵	5.1×10^{-6}	۴,۴۴۲۲۲
10^{-6}	5.0×10^{-3}	1.1×10^{-4}	۵,۵۰۶۳۵	4.8×10^{-6}	۴,۵۳۹۵۲

جدول ۵.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۲.۵.۳ با $\varepsilon = 10^{-1}$

δ	روش هسته بازتولیدی			
	روش مرجع [۶۷] $N = 100$	روش مرجع [۶۷] $N = 10^5$	روش مرجع [۶۵] $N = 100$	روش مرجع [۶۵] $N = 10^6$
L_∞				
10^{-7}	۰,۱۱۷۶۳۱	1.4×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.7×10^{-6}
10^{-15}	۰,۸۳۵۱۵	9.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.3×10^{-6}
10^{-25}	۰,۶۱۴۷۵	6.8×10^{-5}	1.0×10^{-5}	2.1×10^{-5}

جدول ۶.۳: ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مثال ۲.۵.۳ با $\varepsilon = 10^{-1}$

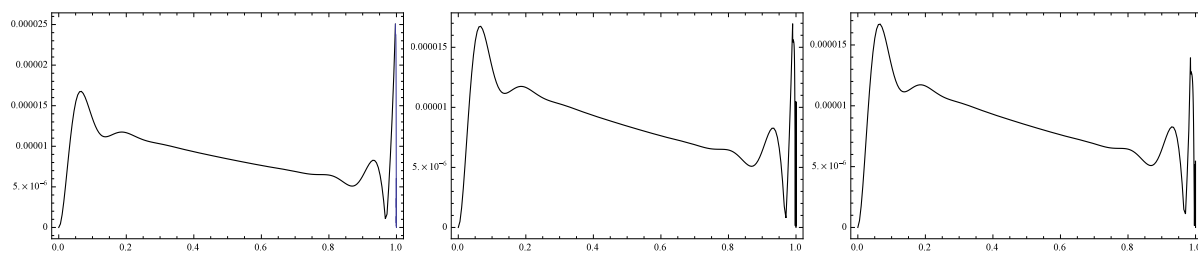
δ	روش مرجع [۶۷] $N = 100$	روش مرجع [۶۷] $N = 10^5$	روش مرجع [۶۵] $N = 100$	روش هسته بازتولیدی $N = 100$
L_∞				
10^{-7}	2.13391×10^{-4}	3×10^{-4}	1×10^{-5}	1×10^{-5}
10^{-15}	0.123119	1.4×10^{-4}	1×10^{-5}	8.5×10^{-7}
10^{-25}	0.80964	9.2×10^{-5}	1×10^{-5}	8.2×10^{-7}
10^{-100}	—	—	1×10^{-5}	1.4×10^{-6}
10^{-200}	—	—	1×10^{-5}	3.6×10^{-6}

جدول ۷.۳: مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۲.۵.۳ با $\varepsilon = 10^{-1}$

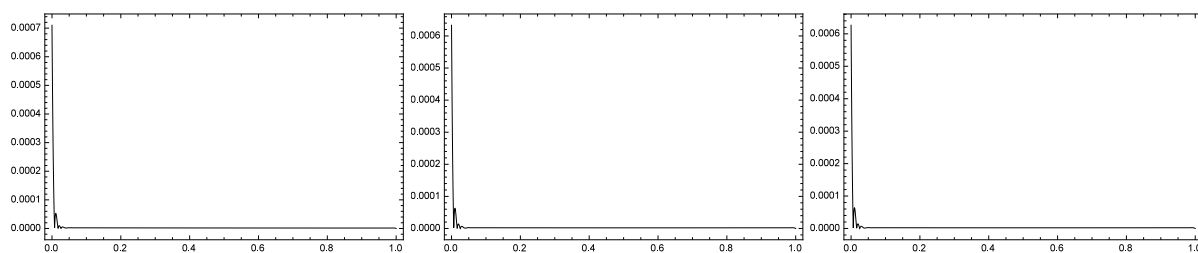
δ	مثال (۲.۵.۳)		مرتبه همگرایی (CR)	مرتبه همگرایی (CR)	
	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $		$\max u_{\lambda_0}(t) - u(t) $	
10^{-7}	1.2×10^{-3}	3.5×10^{-5}	۵.۵۸۸۹	2.3×10^{-6}	۳.۸۳۶۵
10^{-15}	9.3×10^{-4}	2.1×10^{-5}	۵.۶۴۳۸۶	7.2×10^{-6}	۱.۵۵۶۳۹
10^{-25}	7×10^{-4}	3.5×10^{-5}	۴.۳۲۱۹۳	2.1×10^{-5}	۰.۷۳۶۹۶۶

جدول ۸.۳: مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال ۲.۵.۳ با $\varepsilon = 10^{-1}$

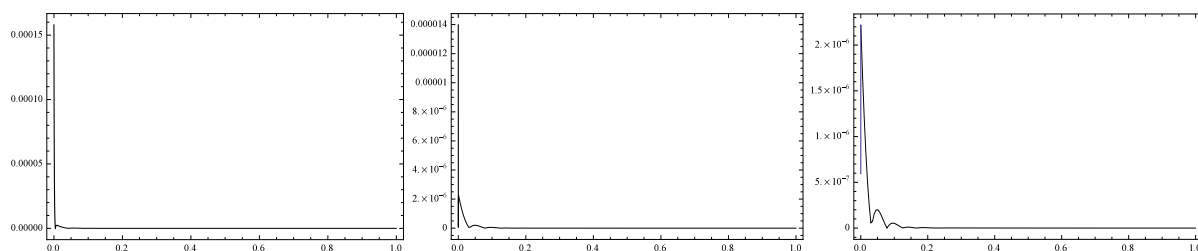
δ	مثال (۲.۵.۳)		مرتبه همگرایی (CR)	مرتبه همگرایی (CR)	
	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $	$\max u_{\tau_0}(t) - u(t) $		$\max u_{\lambda_0}(t) - u(t) $	
10^{-7}	2.1×10^{-4}	2.2×10^{-5}	۳.۳۲۱۹۳	1×10^{-5}	۱.۱۵۲
10^{-15}	5.3×10^{-4}	2.4×10^{-5}	۴.۶۴۳۸۶	2.8×10^{-6}	۳.۵۸۸۹
10^{-25}	6.8×10^{-4}	3.2×10^{-5}	۴.۳۲۱۹۳	2.3×10^{-6}	۳.۸۳۶۵۳
10^{-100}	8.3×10^{-4}	1.9×10^{-5}	۵.۶۴۳۸۶	1.3×10^{-6}	۳.۸۳۶۵
10^{-200}	4.7×10^{-3}	1.6×10^{-4}	۵.۵۸۸۹	3.8×10^{-6}	۵.۶۴۳۸۶



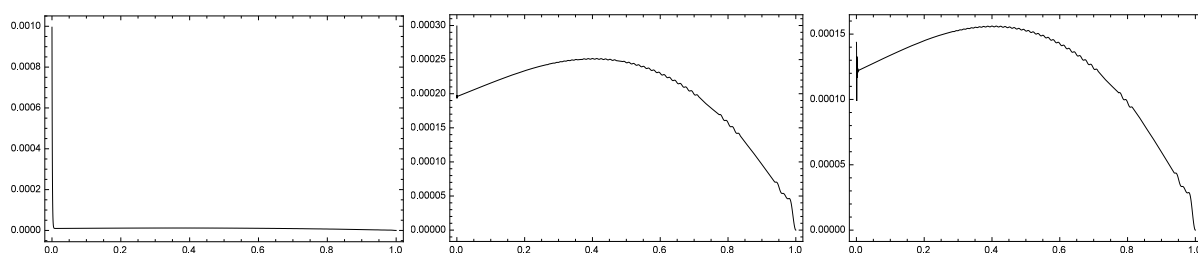
شکل ۲.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۱.۵.۳) با $\epsilon = 10^{-4}$ و $N = 41$ (راست: $\delta = 10\epsilon$ وسط: $\delta = 5\epsilon$ چپ: $\delta = \epsilon$)



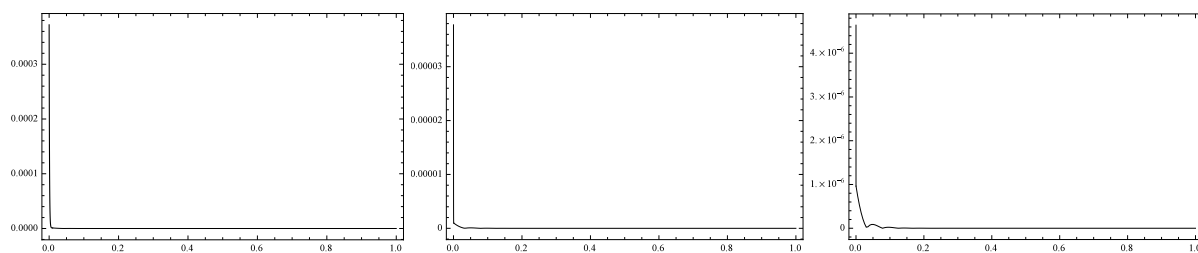
شکل ۳.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۳.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی بدون تقسیم بازه و $N = 100$ (راست: $\delta = 10\epsilon$ وسط: $\delta = 5\epsilon$ چپ: $\delta = \epsilon$)



شکل ۴.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۳.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی با تقسیم بازه و $N = 100$ (راست: $\delta = 10\epsilon$ وسط: $\delta = 5\epsilon$ چپ: $\delta = \epsilon$)



شکل ۵.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۴.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی بدون تقسیم بازه و $N = 100$ (راست: $\delta = 10\epsilon$ وسط: $\delta = 5\epsilon$ چپ: $\delta = \epsilon$)



شکل ۶.۳: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال (۴.۵.۳) با استفاده روش هسته بازتولیدی با تقسیم بازه و $N = 100$ (راست: $\delta = 10\epsilon$ وسط: $\delta = 5\epsilon$ چپ: $\delta = \epsilon$)

فصل ۴

حل مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد دارای تأخیر با
روش هسته بازتولیدی

۱.۴ مقدمه

در فصل قبل مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد که دارای رفتار لایه مرزی در سمت چپ یا راست بازه تعریف خود بود، مورد بحث و بررسی قرار گرفت و با تکنیک ارائه شده تقریب‌های مناسبی برای جواب آن بدست آورده شد و همچنین در فصل قبل در بخش مثالهای عددی، مسائلی که دارای رفتار لایه مرزی با شرایط تفاضلی بودند نیز با روش ارائه شده حل شده (مثالهای ۳.۵.۳ و ۴.۵.۳) و نتایج بدست آمده حاکی از کاربردی بودن روش ارائه شده در فصل قبل برای معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با رفتار لایه مرزی است. در این فصل مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد دارای تأخیر مورد بررسی قرار می‌گیرد که به ظاهر شبیه مسئله فصل چهارم است ولی نوع رفتار آن بسته به پارامترهای اختشاش (ε) و پارامتر تأخیر (δ) از نوع رفتار نوسانی و همچنین رفتار لایه مرزی و گاهی ترکیبی از این دو رفتار است. البته این مسئله در بعضی از مقادیر خاص برای پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر دارای رفتار لایه مرزی در سمت چپ یا راست بازه تعریف خود می‌باشد. مسئله‌ای که در این فصل در مورد آن صحبت می‌کنیم جواب تحلیلی ندارد و از این رو اهمیت تقریب جواب آن با توجه به پیچیدگی رفتار آن برای مقادیر مختلف پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر از اهمیت زیادی برخوردار است. با توجه به در دست نبودن جواب دقیق برای مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد دارای تأخیر و همچنین اهمیت مقادیر پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر در تعیین رفتار جواب مسئله هدف ما در این فصل ابتدا پیدا کردن راهی برای تمیز دادن رفتار نوسانی و همچنین رفتار لایه مرزی در مسئله با استفاده از پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر در روش هسته بازتولیدی است و سپس، بدست آوردن تقریب مناسب از جواب مسئله با استفاده از روش هسته بازتولیدی برای هر کدام از حالت‌هایی که مسئله دارای رفتار نوسانی و یا لایه مرزی می‌باشد.

۲.۴ معرفی معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با تأخیر

مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را که دارای یک تأخیر است در نظر می‌گیریم،

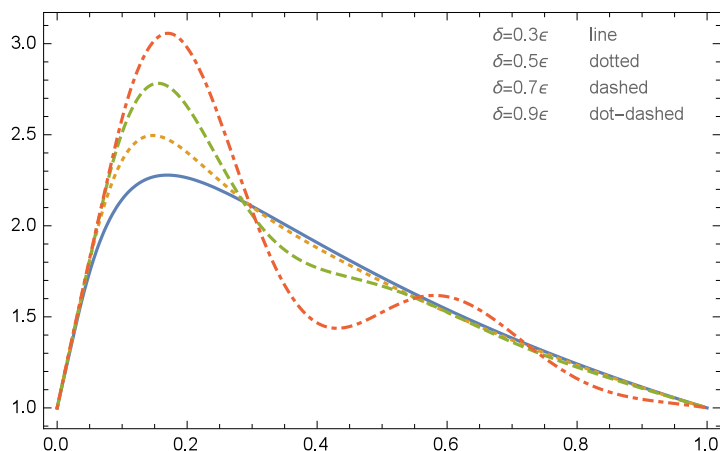
$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + p(t)u'(t - \delta) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(t) = \varphi(t), & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = \gamma, \end{cases} \quad (1.4)$$

که ε پارامتر اختشاش مسئله و δ پارامتر تأخیر مسئله است و $0 < \varepsilon \ll 1$. تابع‌های $\varphi(t)$ ، $f(t)$ ، $q(t)$ ، $p(t)$ به قدر کافی هموار هستند و γ یک ثابت است. اگر مقدار پارامتر δ برابر صفر باشد یا به قدر کافی کوچکی باشد (نسبت به پارامتر ε) در این صورت مسئله (۱.۴) دارای رفتار لایه مرزی در سمت چپ بازه تعریف خود است زمانی که $p(t) \leq 0$ و همچنین دارای رفتار لایه مرزی در سمت راست بازه تعریف خود است زمانی که $p(t) \geq 0$ (به طور مثال $\delta = o(\varepsilon)$). پس با توجه به شرایط ذکر شده رفتار لایه مرزی در مسئله (۱.۴) وجود دارد اما این رفتار لایه مرزی با افزایش مقدار پارامتر تأخیر (نسبت به پارامتر ε ، به طور مثال $\delta = O(\varepsilon)$) دچار تغییر شده و حتی ممکن است از بین برود و به رفتار نوسانی تبدیل شود.

نکته ۱.۲.۴. از آنجا که بر خلاف مسئله (۱.۳) که برای همه‌ی مقادیر پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر فقط دارای رفتار لایه مرزی است، مسئله (۱.۴) هم می‌تواند دارای رفتار نوسانی و هم می‌تواند دارای رفتار لایه مرزی باشد که نوع این رفتار با توجه به مقادیر پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر و نسبت این دو پارامتر به یکدیگر مشخص می‌شود. برای درک بهتر این موضوع مثال ۵.۵.۱ از فصل اول و مثال زیر را ملاحظه بفرمایید.

مثال ۲.۲.۴

$$\begin{cases} \varepsilon u''(x) + u'(x - \delta) + u(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(x) = 1, & x \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 1. \end{cases} \quad (2.4)$$


 شکل ۱.۴: رفتار لایه مرزی و رفتار نوسانی برای مثال (۲.۲.۴) $\varepsilon = 10^{-2}$

رفتار جواب این مثال در شکل ۱.۴ برای مقادیر مختلف ε و δ رسم شده است.

نکته ۳.۲.۴. بر خلاف مسئله (۱.۳) که برای تقریب جمله تاخیر مسئله $(u'(x - \delta))$ از بسط سری تیلور حول t استفاده می‌کردیم در مسئله (۱.۴) تنها زمانی که مسئله دارای رفتار لایه مرزی باشد استفاده از بسط سری تیلور برای تقریب جمله تاخیر مسئله منجر به حصول نتایج قابل اعتماد از تقریب جواب معادله دیفرانسیل می‌شود، و اگر مقادیر پارامتر اختشاش و پارامتر تاخیر مسئله به گونه‌ای باشد که مسئله (۱.۴) دارای رفتار نوسانی باشد در این صورت استفاده از بسط سری تیلور برای تقریب جمله تاخیر مسئله نامعتبر است و باعث می‌شود جواب تقریبی دقیقی حاصل نشود.

پس با فرض اینکه مقادیر پارامتر اختشاش و پارامتر تاخیر به گونه‌ای است که مسئله (۱.۴) دارای رفتار لایه مرزی می‌باشد، با استفاده از بسط سری تیلور برای جمله $u'(t - \delta)$ حول t داریم

$$u'(t - \delta) \approx u'(t) - \delta u''(t),$$

بنابراین مسئله (۱.۴) تبدیل می‌شود به،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) = \varphi(0), & u(1) = \gamma. \end{cases} \quad (3.4)$$

فرض می‌کنیم که $(\varepsilon - \delta p(t)) > 0$ و $p(t) \geq M > 0$ ، $q(t) \leq -\theta < 0$ ، θ ثابت‌های مثبت هستند، با این مفروضات مسئله (۳.۴) دارای جوابی منحصر به فرد با یک رفتار لایه مرزی است. زمانی که مقادیر ε ، δ به قدر کافی کوچک باشند از نتایج زیر برای تعیین محل رفتار لایه مرزی معتبر است.
اگر $p(t) > 0$ و $(\varepsilon - \delta p(t)) > 0$ در این صورت رفتار لایه مرزی در سمت چپ و اگر $p(t) < 0$ در این صورت رفتار لایه مرزی در سمت راست بازه تعریف مسئله (۳.۴) قرار دارد، که $t \in [0, 1]$.

۳.۴ نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای مسئله (۳.۴) با رفتار لایه مرزی

همانند فصل قبل با توجه به محل رفتار لایه مرزی، ابتدا بازه مسئله را به دو زیر بازه شامل رفتار لایه مرزی و زیر بازه رفتار معمولی تقسیم می‌کنیم. برای تعیین دقیق زیربازه‌ی دارای رفتار لایه مرزی ما از رابطه‌ی $d = |k(\varepsilon \pm \delta) \ln(kN)|$

استفاده می‌کنیم. که k یک عدد حقیقی مثبت است و N تعداد نقاط در سرتاسر بازه تعریف مسئله برای استفاده از روش هسته بازتولیدی است و d طول بازه لایه مرزی است.

با توجه به اینکه رفتار لایه مرزی مسئله در کدام سمت از بازه تعریف آن قرار دارد ما تقسیم بندی زیربازه‌ها را به صورت زیر انجام می‌دهیم. اگر رفتار لایه مرزی درست چپ قرار داشته باشد بازه تعریف مسئله $[0, 1]$ را به دو زیربازه $[0, d]$ و $[d, 1]$ تقسیم می‌کنیم و بازه $[0, d]$ را با یک تغییر متغیر به بازه $[0, 1]$ انتقال می‌دهیم و معادله (۳.۴) در بازه $[0, 1]$ را معادله لایه مرزی، و در بازه $[d, 1]$ معادله معمولی می‌نامیم. اگر رفتار لایه مرزی درست راست قرار داشته باشد بازه تعریف مسئله $[0, 1]$ را به دو زیربازه $[0, 1-d]$ و $[1-d, 1]$ تقسیم می‌کنیم و بازه $[1-d, 1]$ را با یک تغییر متغیر به بازه $[0, 1]$ انتقال می‌دهیم و معادله (۳.۴) در بازه $[0, 1]$ را معادله لایه مرزی، و در بازه $[0, 1-d]$ معادله معمولی می‌نامیم. تنها تفاوت روش حل ارائه شده در این فصل با فصل قبل در این است که در این فصل در هر دو حالتی که رفتار لایه مرزی در سمت چپ و یا راست بازه تعریف مسئله قرار دارد ما از تغییر متغیر در مسئله لایه مرزی برای انتقال بازه لایه مرزی به یک بازه بزرگتر استفاده می‌کنیم.

۱.۳.۴ معادله (۳.۴) با رفتار لایه مرزی در سمت چپ

ابتدا تقریب جواب معادله در بازه معمولی را محاسبه می‌کنیم و سپس تقریب جواب معادله در بازه لایه مرزی را بدست می‌آوریم.

تقریب جواب معادله در بازه معمولی $t \in [d, 1]$

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), \\ u(1) = \gamma, \quad t \in [d, 1] \end{cases} \quad (4.4)$$

سپس معادله (۴.۴) را با استفاده از روش هسته بازتولیدی در فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[d, 1]$ حل می‌کنیم و $u_{\ell_{n_1}}(t)$ جواب تقریبی حاصل از حل معادله (۴.۴) در فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[d, 1]$ است که n_1 تعداد نقاط برای پیاده‌سازی روش هسته بازتولیدی در بازه معمولی $[d, 1]$ است.

تقریب جواب معادله در بازه لایه مرزی $t \in [0, d]$

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), \quad t \in [0, d], \\ u(0) = \varphi(0), \quad u(d) = u_{\ell_{n_1}}(d). \end{cases} \quad (5.4)$$

سپس با استفاده از تغییر متغیر $t = dx$, $u(t) = y(x)$ بازه لایه مرزی معادله را از بازه $[0, d]$ به بازه $[0, 1]$ انتقال می‌دهیم.

$$\begin{cases} \frac{1}{d^2}(\varepsilon - \delta p(dx))y''(x) + \frac{1}{d}p(dx)y'(x) + q(dx)y(x) = f(dx), \quad x \in [0, 1], \\ y(0) = \varphi(0), \quad y(1) = u_{\ell_{n_1}}(d). \end{cases} \quad (6.4)$$

سپس معادله (۶.۴) را با استفاده از روش هسته بازتولیدی در فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[0, 1]$ حل می‌کنیم و در نتیجه جواب معادله (۵.۴) برابر است با $u(t) = y(\frac{t}{d})$.

۲.۳.۴ معادله (۳.۴) با رفتار لایه مرزی در سمت راست

ابتدا تقریب جواب معادله در بازه معمولی را محاسبه می‌کنیم و سپس تقریب جواب معادله در بازه لایه مرزی را بدست می‌آوریم.

تقریب جواب معادله در بازه معمولی $t \in [0, 1-d]$

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), \\ u(0) = \varphi(0), \quad t \in [0, 1-d] \end{cases} \quad (۷.۴)$$

سپس معادله (۷.۴) را با استفاده از روش هسته بازتولیدی در فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[0, 1-d]$ حل می‌کنیم و $u_{rn_1}(t)$ جواب تقریبی حاصل از حل معادله (۷.۴) در فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[0, 1-d]$ است که n_1 تعداد نقاط برای پیاده‌سازی روش هسته بازتولیدی در بازه معمولی $[0, 1-d]$ است.

تقریب جواب معادله در بازه لایه مرزی $t \in [1-d, 1]$

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), \quad t \in [1-d, 1], \\ u(1-d) = u_{rn_1}(1-d), \quad u(1) = \gamma. \end{cases} \quad (۸.۴)$$

سپس با استفاده از تغییر متغیر $t = dx + 1$, $u(t) = y(x)$ بازه لایه مرزی معادله را از بازه $[0, d]$ به بازه $[0, 1]$ انتقال می‌دهیم.

$$\begin{cases} \frac{1}{d^2}(\varepsilon - \delta p(dx + 1))y''(x) + \frac{1}{d}p(dx + 1)y'(x) + q(dx + 1)y(x) = f(dx + 1), \quad x \in [-1, 0], \\ y(0) = \gamma, \quad y(-1) = u_{rn_1}(1-d). \end{cases} \quad (۹.۴)$$

سپس معادله (۹.۴) را با استفاده از روش هسته بازتولیدی در فضای هسته بازتولیدی $W_1^3[0, 1]$ حل می‌کنیم و در نتیجه جواب معادله (۸.۴) برابر است با $u(t) = y(\frac{t-1}{d})$ (۹.۴) و (۷.۴)، (۴.۴)، (۶.۴) هسته بازتولیدی مربوط به آن را با استفاده از تعریف فضای هسته بازتولیدی W_1^3 و بازه مسئله و شرایط اولیه و مرزی آن می‌سازیم.

$$W_1^3[a, b] = \left\{ u(t) \mid u''(t) \text{ تابع مطلقاً پیوسته است}, u'''(t) \in L^2[a, b], t \in [a, b], u(a) = u(b) \right\},$$

همچنین نرم و ضرب داخلی را برای فضای $W_1^3[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{W_1^3[a, b]} = \sum_{i=0}^2 u_1^{(i)}(a) u_2^{(i)}(b) + \int_a^b u_1'''(t) u_2'''(t) dt,$$

$$\|u(t)\|_{W_1^3[a, b]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_1^3[a, b]}}, \quad \forall u_1(t), u_2(t) \in W_1^3[a, b].$$

قضیه ۱.۳.۴. $W_1^3[a, b]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۳۵]

$$R_y(t) = \begin{cases} R(t, y), & t \leq y, \\ R(y, t), & t > y, \end{cases}$$

که

$$\begin{aligned}
 R(t, y) = & ((a-t)(b-y)(-15a^y(b-t) + t^x y^x + 15a^x(b-t)(\lambda + 4b + t + 2y) + 6b^x(t^x + 12y - 5t^x y + \\
 & 3 \circ t y^x + 1 \circ t^x y^x) + 2b^x(-6 \circ t y^x - 2 \circ t^x y^x + 3t^x(5+y) + 3 \circ y(5+y) - 15t^x y(5+y)) - 5a^x(b-t)(16b^x - \\
 & 3t^x + 42y + 2t(9+5y) + 2b(42+7t+13y)) + 2b^x y(-24 \circ y^x + 1 \circ t^x y^x + 3t^x(5+y) + 15t(-12 \circ + y^x) + \\
 & 5t^x(-12 \circ + y^x)) + b(12 \circ y^x - 5t^x y^x - 4t^x(-3 \circ + y^x)) + a^x(36b^x - 192 \circ t + 15t^x - 1 \circ t^x(-9+y) - 27 \circ t^x y + \\
 & 6y^x + 2b^x(24 \circ + 35t + 93y) - 4b^x(35t^x - 5t(-6+y) - 3y(65+3y)) + b(25t^x - 51 \circ t y - 1 \circ t^x(45+22y) - \\
 & 24(-8 \circ + y^x))) + a(-12 \circ t^x - 12 \circ y^x + t^x y^x + 6b^x(t^x - 5t^x y - 2 \circ t y(3+y) - 3 \circ(4+y^x)) - b(6 \circ t^x y - 48 \circ y^x + \\
 & 5t^x y(-48 \circ + y^x) + 6 \circ t y(-12 \circ + y^x) + 4t^x(12 \circ + y^x)) - 2b^x(15t^x + 15t^x(-15+y)y - 2 \circ t y^x(-9+2y) - \\
 & 3t^x(5+2y) - 6 \circ(-3 \circ - 36y + y^x)) + b^x(-3 \circ t^x(4+y) + 6t^x y(55+y) + 2 \circ t^x(6 \circ + y^x) - 3 \circ y(24 \circ + 24y + \\
 & y^x) - 2 \circ t(-18 \circ - 12 \circ y - 12y^x + y^x))) - a^x(-48 \circ t^x - 3 \circ t^x y + 3 \circ y^x + 1 \circ t^x(6+y) + 3t(-12 \circ - 8 \circ y + 3y^x) + \\
 & 18b^x(3t + 5(2+y)) + b^x(-7 \circ t^x + 3 \circ y(31+3y) + 6t(45+34y)) - 2b^x(5t^x - 3ty(-5+9y) + 5t^x(63 + \\
 & 32y) + 3 \circ(-8 \circ - 3y^x + y^x)) + b(5 \circ t^x + t^x(15 \circ - 8 \circ y) - 99 \circ t^x y - 36t(12 \circ + y^x) + 15(24 \circ + 16 \circ y - 8y^x + \\
 & y^x))) + a^x(6b^x(t^x + 1 \circ y(6+y) + 5t(6+5y)) + t(48 \circ t^x + 3 \circ t^x y + ty(-12 \circ + y^x) + 3 \circ y(-12 \circ + y^x)) - \\
 & 2b^x(15t^x - 15ty(21+5y) + 9t^x(15+8y) + 2 \circ(-9 \circ - 9y^x + y^x)) + 2b^x(3 \circ t^x + t^x(15-9 \circ y) + 3t^x(-195+y)y - \\
 & 1 \circ t(12 \circ - 9y^x + 5y^x) + 5(72 \circ + 6 \circ y - 24y^x + y^x)) + b(-21 \circ t^x y + 3 \circ t^x(5+y) + 6 \circ y(6 \circ + y^x) - 4t^x(42 \circ + \\
 & y^x) + 5t(-144 \circ - 96 \circ y - 24y^x + 5y^x)))) / (72 \circ(a-b)^x(-2 \circ + a^x - 5b^x - b^x - a^x(5+3b) + ab(1 \circ + 3b))).
 \end{aligned}$$

همچنین فضای هسته بازتولیدی $W_{\uparrow}^{\lambda}[a, b]$ و نرم و ضرب داخلی آنرا را صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$W_{\uparrow}^{\lambda}[a, b] = \left\{ u(x) \mid u(x) \text{ تابع مطلقا پیوسته است}, u'(x) \in L^x[a, b], x \in [a, b] \right\},$$

$$\langle u_1(t), u_2(t) \rangle_{W_{\uparrow}^{\lambda}[a, b]} = u_1(a)u_2(a) + \int_a^b u_1'(t)u_2'(t)dt,$$

$$\|u(t)\|_{W_{\uparrow}^{\lambda}[a, b]} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_{\uparrow}^{\lambda}[a, b]}}, \quad \forall u_1(t), u_2(t) \in W_{\uparrow}^{\lambda}[a, b].$$

قضیه ۲.۳.۴. $W_{\uparrow}^{\lambda}[a, b]$ یک فضای هسته بازتولیدی است که هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۳۵]

$$r_y(t) = \begin{cases} r(t, y), & t \leq y, \\ r(y, t), & t > y, \end{cases}$$

که، $r(t, y) = 1 - a + t$

عملگر $\mathbb{L}$ برای معادله (۴.۴) را به صورت $\mathbb{L}(u(t)) = (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t)$ می‌کنیم که فضای بازتولیدی برای این عملگر به صورت $W_{\uparrow}^{\lambda}[d, 1] \rightarrow W_{\uparrow}^{\lambda}[d, 1]$ است. فرض می‌کنیم $\mathbb{L}(u(t))$ یک عملگر دیفرانسیلی معکوس پذیر خطی کراندار باشد، یک زیرمجموعه نقاط چگال و قابل شمارش از بازه $[d, 1]$ مانند $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$\phi_i(t) = R_y(t)|_{y=t_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

که $R_y(t)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^*[d, 1]$ و $r_y(t)$ هسته بازتولیدی فضای $W_p^*[d, 1]$ می‌باشند. همچنین به راحتی ثابت می‌شود که $\{\phi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل برای فضای $W_p^*[0, 1]$ است. $\Psi_i(t) = r_{t_i}(t)$ که $\Psi_i(t)$ پایه‌های فضای $W_p^*[d, 1]$ است و همچنین قرار می‌دهیم،

$$\phi_i(t) = \mathbb{L}^* \Psi_i(t).$$

که $\mathbb{L}^*$ عملگر خودالحاقی $\mathbb{L}$ است.

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ یک زیرمجموعه چگال و قابل شمارش از بازه $[0, 1]$ باشد و $\mathbb{L}^{-1}$ وجود داشته باشد، آنگاه جواب تحلیلی مسئله (۳.۳) به صورت زیر است

$$u_{n_1}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(t), \quad (10.4)$$

که c_i ثابت‌های مجهول هستند که باید محاسبه شوند.

□

اثبات. رجوع شود به فصل دوم، روش هسته بازتولیدی، حالت دو.

اکنون نحوه محاسبه ثابت‌های c_i ، $i = 1, 2, \dots$ را بیان می‌کنیم. برای جواب تقریبی مسئله (۴.۴) $(u_{\ell_{n_1}}(t))$ تابع مانده $\mathbb{R}_{n_1}(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathbb{R}_{n_1}(t) = \mathbb{L}(u_{\ell_{n_1}}(t)) - f(t), \quad (11.4)$$

اکنون ثابت‌های $c_{i,m}$ را طوری محاسبه می‌کنیم که ضرب داخلی زیر برابر صفر باشد، یعنی

$$\langle \mathbb{R}_{n_1}(t), \phi_j(t) \rangle_{W_p^*} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \quad (12.4)$$

در نهایت همانند فصل قبل با استفاده از خاصیت بازتولیدی ضرب داخلی عبارت (۱۲.۴) به یک دستگاه معادلات جبری خطی به فرم زیر می‌رسیم که با حل آن می‌توان ثابت‌های c_i را محاسبه کرد.

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_i \mathbb{L} \phi_i(t)|_{t=t_j} = f(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n_1. \quad (13.4)$$

همچنین در حالتی که مسئله (۳.۴) غیرخطی باشد یعنی دارای جمله غیر خطی $\mathbb{N}(u(t))$ باشد، آنگاه جواب تقریبی به صورت زیر است

$$u_{n_1,m}(t) = \sum_{i=1}^{n_1} c_{i,m} \phi_i(t), \quad m = 2, 3, \dots \quad (14.4)$$

ثابت‌های $c_{i,m}$ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد و روند اثبات آن شبیه حالت خطی مسئله (۳.۴) است.

$$(15.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{i,m} \mathbb{L} \phi_i(t)|_{t=t_j} = \mathbb{N}(u_{n_1,m-1}(t))|_{t=t_j} + f(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, n_1 \quad m = 2, 3, \dots, m_1$$

که برای $m = 1$ تابع حدس اولیه $u_{n_1,1}(t)$ را در نظر می‌گیریم به طوریکه در شرایط مرزی مسئله (۳.۴) صدق کند.

نکته ۴.۳.۴. قضیه‌های مربوط به همگرایی روش ارائه شده و قضیه‌های مربوط به تحلیل خطای روش ارائه شده و همچنین نحوه اثبات آنها همانند آنچه که در فصل دوم و سوم آورده شده است، می‌باشد و از این رو در ادامه دیگر به آنها اشاره نمی‌کنیم.

۴.۴ مثالهای عددی

تمام مثالهای عددی مربوط به این فصل بدون جواب دقیق هستند، از این رو ماکسیم مقدار خطا را از رابطه $E_N = \max_{t \in [0,1]} |U_N(t) - U_{\infty}(t)|$ محاسبه می‌کنیم که $U_N(t)$ جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی با N نقطه در سراسر بازه $[0, 1]$ می‌باشد. همچنین برای نشان دادن یک کاربرد از قضیه آنالیز خطا، مرتبه همگرایی روش ارائه شده را برای جواب تقریبی $U_N(t)$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آوریم.

$$Cr = \log_{\gamma} \frac{E_N}{E_{\infty}}$$

نقاط مورد استفاده برای پیاده سازی روش هسته بازتولیدی زمانی که رفتار لایه مرزی در سمت چپ بازه مسئله قرار دارد برای بازه معمولی و لایه مرزی به ترتیب برابر $t_i = 1 - (1-d)(\frac{i}{n_1})^{\gamma}$ و $t_j = (\frac{j}{n_2+1})^{\gamma}$ است و زمانی که رفتار لایه مرزی در سمت راست بازه مسئله قرار دارد برای بازه معمولی و لایه مرزی به ترتیب برابر $t_i = (1-d)(\frac{i}{n_1})^{\gamma}$ و $t_j = 1 - (\frac{j}{n_2+1})^{\gamma}$ است که $N = n_1 + n_2$ و $i = 1, 2, \dots, n_1$ $j = 1, 2, \dots, n_2$.

مثال ۱.۴.۴. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۷۰، ۶۰]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + e^{-t}u'(t - \delta) - tu(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

$$d = |k(\varepsilon - \delta)\ln(kN)| \quad \text{که}$$

مثال ۲.۴.۴. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۷۰، ۶۱]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) - (1+t)u'(t - \delta) - e^{-t}u(t) = 1, & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = -1, \end{cases}$$

$$d = |k(\varepsilon + \delta)\ln(kN)| \quad \text{که}$$

مثال ۳.۴.۴. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۷۰]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + \frac{1}{t}u'(t - \delta) - u(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = -1, \end{cases}$$

$$d = |k(\varepsilon - 0.25\delta)\ln(kN)| \quad \text{که}$$

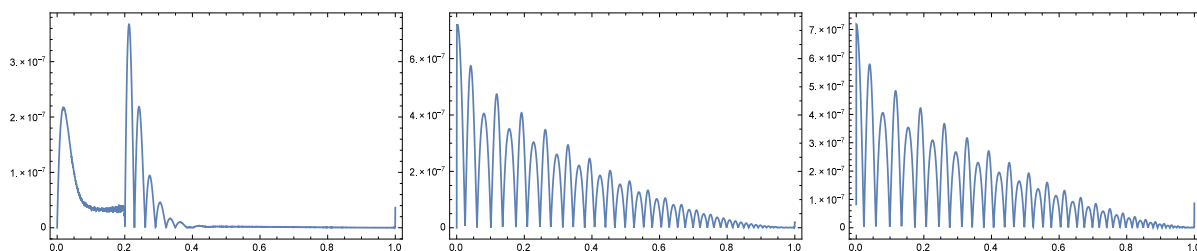
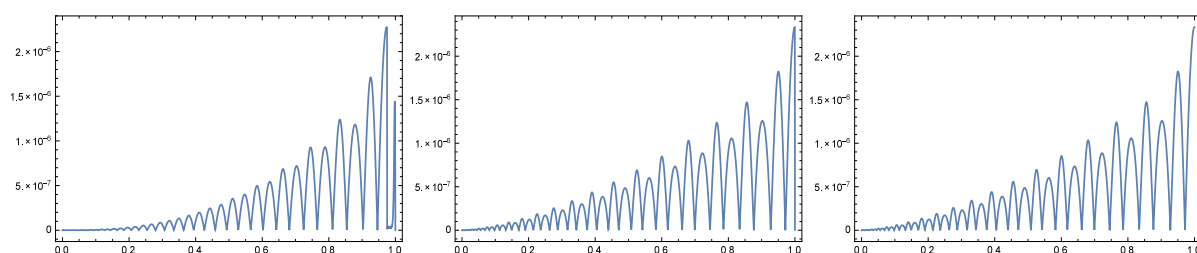
مثال ۴.۴.۴. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۶۱]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) - e^t u'(t - \delta) - u(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

$$d = |k(\varepsilon + \delta)\ln(kN)| \quad \text{که}$$

جدول ۱.۴: ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۱.۴.۴ با $\delta = 10^{-12}$ و مقادیر مختلف ε

ε	روش هسته بازتولیدی ($N = 128$)	روش مرجع [۶۰] ($N = 1024$)	روش مرجع [۶۰] ($N = 512$)	روش مرجع [۶۰] ($N = 256$)
۱	1.4×10^{-8}	8.59×10^{-6}	1.72×10^{-5}	3.44×10^{-5}
10^{-1}	1.8×10^{-7}	4.69×10^{-4}	9.33×10^{-4}	1.85×10^{-3}
10^{-2}	3.8×10^{-7}	1.65×10^{-3}	3.35×10^{-3}	6.5×10^{-3}
10^{-3}	7.4×10^{-7}	2.58×10^{-3}	4.89×10^{-3}	9.8×10^{-3}
10^{-4}	7.2×10^{-7}	3.2×10^{-3}	5.55×10^{-3}	9.93×10^{-3}
10^{-5}	7.2×10^{-7}	3.12×10^{-3}	5.67×10^{-3}	1.01×10^{-2}
10^{-6}	7.2×10^{-7}	3.14×10^{-3}	5.49×10^{-3}	1.01×10^{-2}
10^{-7}	7.2×10^{-7}	3.14×10^{-3}	5.64×10^{-3}	1.01×10^{-2}
10^{-8}	7.2×10^{-7}	3.14×10^{-3}	5.64×10^{-3}	1.01×10^{-2}


 شکل ۲.۴: ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۱.۴.۴ با $N = 128$ و $\delta = 10^{-12}$ (راست: $\varepsilon = 10^{-7}$ وسط: $\varepsilon = 10^{-4}$ چپ: $\varepsilon = 10^{-2}$)

 شکل ۳.۴: ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۲.۴.۴ با $N = 100$ و $\delta = 0.05$ (راست: $\varepsilon = 10^{-10}$ وسط: $\varepsilon = 10^{-5}$ چپ: $\varepsilon = 10^{-3}$)

جدول ۲.۴: ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۱.۴.۴، ۲.۴.۴، ۳.۴.۴ با $\delta = 0.5\varepsilon$ و مقادیر مختلف ε

ε	روش مرجع [۶۰] ($N = 300$)	روش مرجع [۶۰] ($N = 400$)	روش مرجع [۶۰] ($N = 500$)	روش هسته بازتولیدی ($N = 100$)
---------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	-------------------------------------

مثال ۱.۴.۴

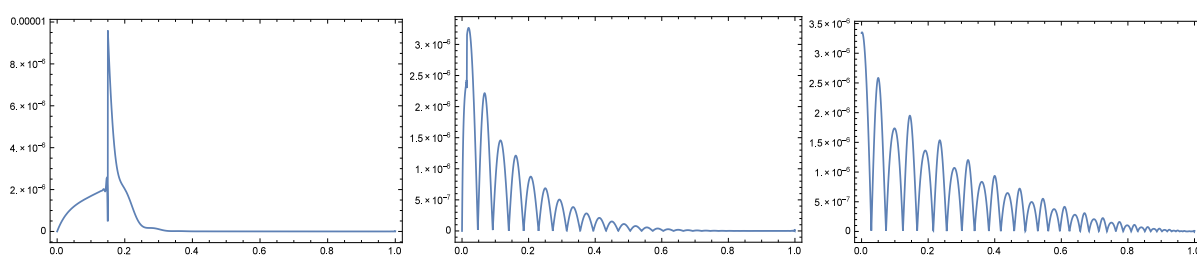
10^{-1}	2.69×10^{-5}	1.52×10^{-5}	9.70×10^{-6}	2.90×10^{-7}
10^{-2}	2.69×10^{-5}	1.52×10^{-5}	9.70×10^{-6}	1.40×10^{-6}
10^{-3}	6.74×10^{-4}	4.03×10^{-4}	2.66×10^{-4}	1.45×10^{-6}
10^{-4}	1.31×10^{-3}	9.85×10^{-4}	7.85×10^{-4}	1.45×10^{-6}
10^{-5}	1.31×10^{-3}	9.87×10^{-4}	7.90×10^{-4}	1.45×10^{-6}
10^{-10}	1.31×10^{-3}	9.87×10^{-4}	7.90×10^{-4}	1.43×10^{-6}
10^{-20}	1.31×10^{-3}	9.87×10^{-4}	7.90×10^{-4}	1.43×10^{-6}

مثال ۲.۴.۴

10^{-1}	3.26×10^{-6}	1.83×10^{-6}	1.17×10^{-6}	5.40×10^{-6}
10^{-2}	5.72×10^{-5}	3.22×10^{-5}	2.06×10^{-5}	1.45×10^{-6}
10^{-3}	5.28×10^{-4}	3.14×10^{-4}	2.07×10^{-4}	2.40×10^{-6}
10^{-4}	9.19×10^{-4}	6.90×10^{-4}	2.52×10^{-4}	2.40×10^{-6}
10^{-5}	9.19×10^{-4}	6.90×10^{-4}	2.53×10^{-4}	2.40×10^{-6}
10^{-10}	9.19×10^{-4}	6.90×10^{-4}	2.53×10^{-4}	2.40×10^{-6}
10^{-20}	9.19×10^{-4}	6.90×10^{-4}	2.53×10^{-4}	—

مثال ۳.۴.۴

10^{-1}	1.72×10^{-6}	9.65×10^{-7}	6.18×10^{-7}	5.40×10^{-8}
10^{-2}	2.69×10^{-5}	1.52×10^{-5}	9.70×10^{-6}	9.80×10^{-6}
10^{-3}	3.34×10^{-4}	1.74×10^{-4}	1.15×10^{-4}	3.30×10^{-6}
10^{-4}	1.28×10^{-3}	9.41×10^{-4}	7.27×10^{-4}	3.40×10^{-6}
10^{-5}	1.30×10^{-3}	9.73×10^{-4}	7.80×10^{-4}	3.40×10^{-6}
10^{-10}	1.30×10^{-3}	9.73×10^{-4}	7.80×10^{-4}	3.40×10^{-6}
10^{-20}	1.30×10^{-3}	9.73×10^{-4}	7.80×10^{-4}	3.40×10^{-6}


 شکل ۴.۴: ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۳.۴.۴ با $N = 100$ و $\delta = 0.5\varepsilon$ (راست: $\varepsilon = 10^{-20}$ وسط: $\varepsilon = 10^{-3}$ چپ: $\varepsilon = 10^{-2}$)

جدول ۳.۴: مرتبه همگرایی روش هسته بازتولیدی برای مثال (۱.۴.۴)، (۲.۴.۴)، (۳.۴.۴) و مقادیر مختلف ε و $\delta = 0.5\varepsilon$

ε	E_{τ_0}	E_{τ_1}	مرتبه همگرایی (CR)	E_{λ_0}	مرتبه همگرایی (CR)
---------------	--------------	--------------	--------------------	-----------------	--------------------

مثال ۱.۴.۴

10^{-2}	8.50×10^{-4}	1.50×10^{-4}	۲.۵۰	1.25×10^{-5}	۳.۵۸
10^{-3}	1.20×10^{-3}	9.60×10^{-5}	۳.۶۴	1.20×10^{-5}	۳.۰۰
10^{-5}	1.35×10^{-3}	9.20×10^{-5}	۳.۸۷	1.15×10^{-5}	۳.۰۰
10^{-10}	1.35×10^{-3}	9.20×10^{-5}	۳.۸۷	1.15×10^{-5}	۳.۰۰

مثال ۲.۴.۴

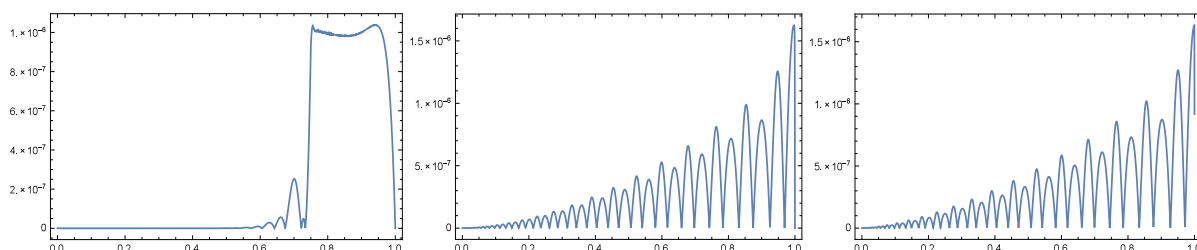
10^{-2}	9.50×10^{-4}	1.20×10^{-4}	۲.۹۸	1.35×10^{-5}	۳.۱۵
10^{-3}	1.05×10^{-3}	1.50×10^{-4}	۲.۸۱	1.90×10^{-5}	۲.۹۸
10^{-5}	1.05×10^{-3}	1.60×10^{-4}	۲.۷۱	1.90×10^{-5}	۳.۰۷
10^{-10}	1.05×10^{-3}	1.60×10^{-4}	۲.۷۱	1.90×10^{-5}	۳.۰۷

مثال ۳.۴.۴

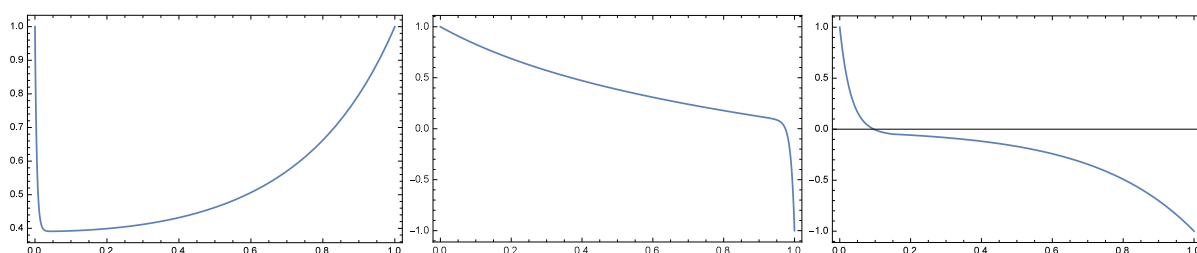
10^{-2}	1.50×10^{-3}	2.00×10^{-4}	۲.۹۱	1.40×10^{-5}	۳.۸۴
10^{-3}	1.45×10^{-3}	2.25×10^{-4}	۲.۶۹	2.75×10^{-5}	۳.۰۳
10^{-5}	1.40×10^{-3}	2.50×10^{-4}	۲.۴۸	2.80×10^{-5}	۳.۱۶
10^{-10}	1.40×10^{-3}	2.20×10^{-4}	۲.۶۷	2.80×10^{-5}	۳.۱۶

مثال ۴.۴.۴

10^{-2}	6.80×10^{-4}	8.50×10^{-5}	۳.۰۰	1.00×10^{-5}	۳.۰۹
10^{-3}	8.00×10^{-4}	1.50×10^{-4}	۲.۴۱	1.35×10^{-5}	۳.۴۷
10^{-5}	8.00×10^{-4}	1.50×10^{-4}	۲.۴۱	1.35×10^{-5}	۳.۴۷
10^{-10}	8.00×10^{-4}	1.50×10^{-4}	۲.۴۱	1.35×10^{-5}	۳.۴۷



شکل ۵.۴: ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۴.۴.۴ با $N = 100$ و $\delta = 0.5\varepsilon$ (راست: $\varepsilon = 10^{-8}$ وسط: $\varepsilon = 10^{-4}$ چپ: $\varepsilon = 10^{-2}$)



شکل ۶.۴: جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی با $N = 100$ و $\delta = 0.5\varepsilon$ و $\varepsilon = 10^{-2}$ (راست: مثال ۳.۴.۴ وسط: مثال ۲.۴.۴ چپ: مثال ۱.۴.۴)

جدول ۴.۴: ماکسیم مقدار خطای روش هسته بازتولیدی برای مثال (۴.۴.۴)، (۲.۴.۴)، با مقادیر مختلف ε, δ

δ	روش مرجع [۶۱] ($N = ۱۲۸$)	روش مرجع [۶۱] ($N = ۲۵۶$)	روش مرجع [۶۱] ($N = ۵۱۲$)	روش هسته بازتولیدی ($N = ۱۰۰$)
----------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	-------------------------------------

مثال ۲.۴.۴

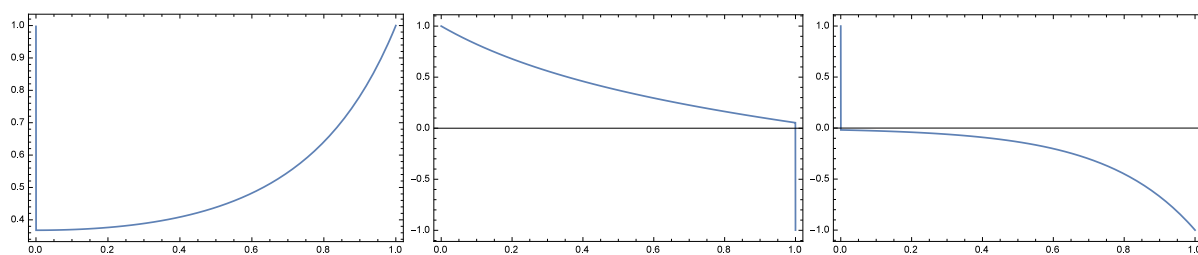
۰.۵ε	۳.۶۸×۱۰^{-۳}	۱.۴۶×۱۰^{-۳}	۶.۸×۱۰^{-۴}	۷.۰۰×۱۰^{-۶}
۱.۰ε	۳.۲۱×۱۰^{-۳}	۱.۳۲×۱۰^{-۳}	۵.۹۷×۱۰^{-۴}	۶.۰۰×۱۰^{-۶}
۱.۵ε	۳.۰۱×۱۰^{-۳}	۱.۲۶×۱۰^{-۳}	۵.۹۶×۱۰^{-۴}	۵.۶۰×۱۰^{-۶}

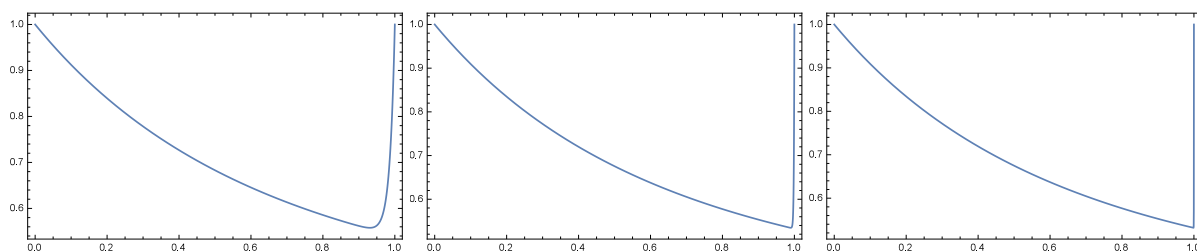
مثال ۴.۴.۴

۰.۵ε	۹.۰۰×۱۰^{-۳}	۴.۴۵×۱۰^{-۴}	۲.۲۴×۱۰^{-۴}	۴.۰۰×۱۰^{-۶}
۱.۰ε	۸.۹۹×۱۰^{-۳}	۴.۴۶×۱۰^{-۴}	۲.۲۲×۱۰^{-۴}	۱.۸۰×۱۰^{-۶}
۱.۵ε	۸.۹۵×۱۰^{-۳}	۴.۴۷×۱۰^{-۴}	۲.۲۱×۱۰^{-۴}	۱.۷۰×۱۰^{-۶}

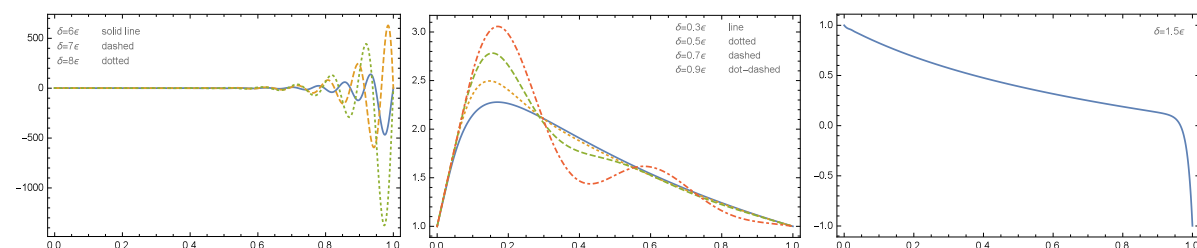
 جدول ۵.۴: ماکسیم مقدار خطا برای مثال ۲.۴.۴ با $\varepsilon = ۱$ و مقادیر مختلف δ

δ	روش مرجع [۷۰] ($N = ۳۰۰$)	روش مرجع [۷۰] ($N = ۴۰۰$)	روش مرجع [۷۰] ($N = ۵۰۰$)	روش هسته بازتولیدی ($N = ۱۰۰$)
۰.۳	۳.۱۳×۱۰^{-۵}	۱.۷۶×۱۰^{-۵}	۱.۱۳×۱۰^{-۵}	۲.۵۰×۱۰^{-۷}
۰.۵	۲.۴×۱۰^{-۵}	۱.۱۵×۱۰^{-۵}	۷.۳۵×۱۰^{-۶}	۱.۵۰×۱۰^{-۷}
۰.۷	۱.۴۸×۱۰^{-۵}	۸.۳۱×۱۰^{-۶}	۵.۳۲×۱۰^{-۶}	۹.۵۰×۱۰^{-۸}
۰.۹	۱.۱۴×۱۰^{-۵}	۶.۴۰×۱۰^{-۶}	۴.۰۹×۱۰^{-۶}	۶.۴۰×۱۰^{-۸}


 شکل ۷.۴: جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی با $N = ۱۰۰$ و $\delta = ۰.۵\varepsilon$ و $\varepsilon = ۱۰^{-۵}$ (راست: مثال (۳.۴.۴) وسط: مثال (۲.۴.۴) چپ: مثال (۱.۴.۴))



شکل ۸.۴: جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی برای مثال ۴.۴.۴ با $N = 100$ و $\delta = 10\epsilon$ (راست): $\epsilon = 10^{-4}$ وسط: $\epsilon = 10^{-3}$ چپ: $\epsilon = 10^{-2}$



شکل ۹.۴: جواب تقریبی حاصل از روش هسته بازتولیدی با $N = 100$ (راست): $\epsilon = 10^{-2}$ مثال (۲.۴.۴) وسط: $\epsilon = 10^{-1}$ مثال (۲.۲.۴) چپ: $\epsilon = 10^{-4}$ مثال (۲.۴.۴)

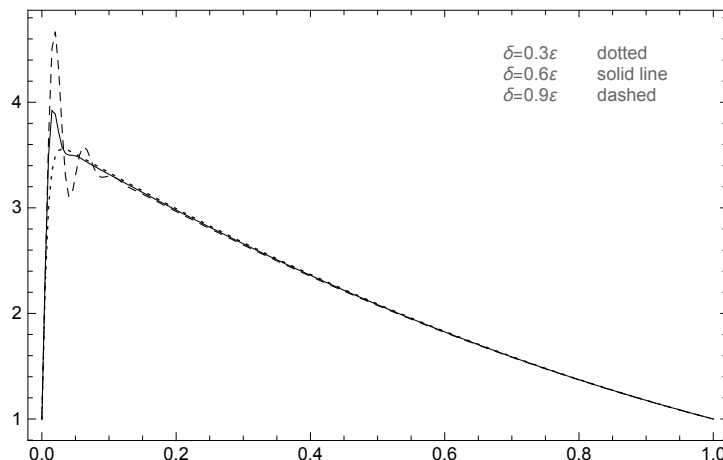
۵.۴ نحوه پیاده سازی روش هسته بازتولیدی برای مسئله (۱.۴) با رفتار نوسانی

همانطور که در مقدمه این فصل اشاره شد، مسئله (۱.۴) برای برخی مقادیر پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر دارای رفتار نوسانی است. اگر بخواهیم به طور دقیقتر بگوییم زمانی که مقادیر پارامتر اختشاش و پارامتر تأخیر به قدر کافی کوچک باشند مسئله دارای رفتار لایه مرزی است و اگر مقدار پارامتر تأخیر افزایش پیدا کند در حالی که پارامتر اختشاش ثابت است در این صورت به طور تدریجی رفتار لایه مرزی مسئله از بین می رود و تبدیل به رفتار نوسانی می شود و اگر مقدار پارامتر تأخیر نسبت به پارامتر اختشاش بسیار بزرگ باشد در این صورت رفتار نوسانی شدیدی در مسئله ایجاد می شود (شکل های ۳.۱، ۱.۴) و حتی در برخی مواقع رفتار نوسانی به همراه رفتار لایه مرزی به طور همزمان در جواب مسئله ظاهر می شود که این موضوع تقریب جواب مسئله را بسیار سخت می کند، که رفتار جواب مثال عددی زیر در شکل ۱۰.۴ این موضوع را به خوبی نشان می دهد.

مثال ۱.۵.۴. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۷۰]

$$\begin{cases} \epsilon u''(t) + e^{-\delta t} u'(t - \delta) + u(t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

روند حل مسائل دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد دارای رفتار لایه مرزی به چند بخش کلی تقسیم می شود که جهت یادآوری مجدداً در اینجا به اختصار می آوریم، ابتدا از آنجایی که اطمینان داریم مسئله دارای رفتار لایه مرزی است برای سهولت در روند محاسبات به جای جمله تأخیر مسئله از تقریب بسط سری تیلور آن استفاده می کنیم و سپس بازه مسئله را به دو زیر بازه دارای رفتار لایه مرزی و زیر بازه دارای رفتار معمولی تقسیم می کنیم و در ادامه مسئله بازه معمولی را حل کرده و با استفاده از تقریب بدست آمده برای مسئله بازه معمولی، یک شرط مرزی در نقطه شروع رفتار لایه مرزی به مسئله بازه لایه مرزی اضافه می کنیم و در نهایت با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب مسئله بازه لایه مرزی را به یک


 شکل ۱۰.۴: رفتار لایه مرزی و رفتار نوسانی برای مثال (۱۵.۴) $\varepsilon = 10^{-2}$

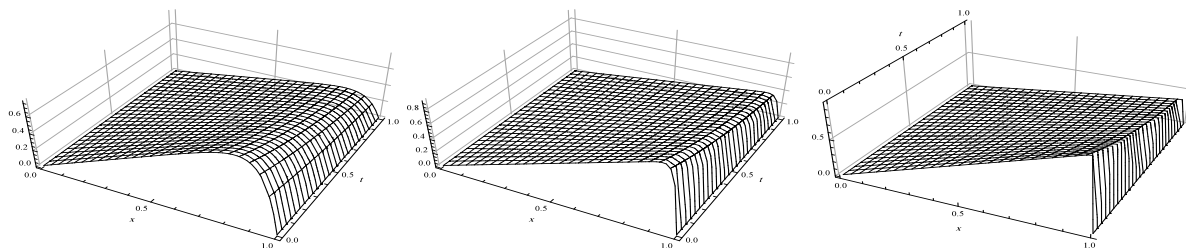
بازه مناسب انتقال داده و روش هسته بازتولیدی ارائه شده در این پایان نامه را در آن بازه جدید بر روی مسئله پیاده سازی می‌کنیم. اما به طور کلی زمانی که نمی‌دانیم مسئله دارای رفتار نوسانی یا رفتار لایه مرزی است به این صورت عمل می‌کنیم، ابتدا مسئله (۱۰.۴) را یک مسئله تأخیری در نظر گرفته و در زمان تأخیر و بعد از آن، تابع تأخیر مسئله را در بازه تعریف خود به جای جمله تأخیر مسئله استفاده می‌کنیم و مسئله را به فرم زیر تبدیل می‌کنیم

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + q(t)u(t) = f(t) - p(t)\varphi'(t), & t \in [0, \delta], \\ \varepsilon u''(t) + p(t)u'(t - \delta) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [\delta, 1], \\ u(0) = \varphi(0), & u(1) = \gamma, \end{cases} \quad (16.4)$$

و بعد از همگن سازی معادله (۱۶.۴) و ساختن هسته بازتولیدی آن، ما روش هسته بازتولیدی را با استفاده از برخی مقادیر حدودی و نه خیلی بزرگ و نه خیلی کوچک برای پارامترهای اختشاش و تأخیر، بر روی معادله فوق پیاده سازی می‌کنیم، و با رسم شکل جواب می‌توان به نوسانی یا لایه مرزی بودن جواب مسئله پی برد. نکته حائز اهمیت این است که ما در اینجا از هیچکدام از تغییراتی که در حالت لایه مرزی در مسئله ایجاد می‌کردیم، بهره نبرده و بدون استفاده از بسط تیلور و تقسیم بازه و تغییر متغیر، معادله (۱۶.۴) را با روش هسته بازتولیدی در سراسر بازه تعریف خود حل می‌کنیم.

فصل ۵

حل مسائل اختشاشی منفرد و مسائل دیفرانسیل-تفاضلی
اختشاشی منفرد با روش تحلیل هموتوپی


 شکل ۱.۵: رفتار جواب معادله (۱.۵) برای مقادیر مختلف $\varepsilon = 2^{-4}, 2^{-6}, 2^{-8}$

۱.۵ مقدمه

همانطور که در فصل دوم نشان داده شد، یکی از مزیت‌های اصلی روش تحلیل هموتویی در حل مسائل دارای رفتار لایه مرزی است که با استفاده از آن می‌توان تقریب‌هایی با دقت‌های بالا برای این مسائل پیدا کرد که در روش‌های عددی رسیدن به این دقت‌ها بسیار سخت و یا معمولاً نشدنی است. در این فصل مسائل نسبتاً سخت‌تری از نوع معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد و معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد معمولی و جزئی را با استفاده از روش تحلیل هموتویی حل می‌کنیم و علاوه بر این قضیه‌های مربوط به آنالیز همگرایی و آنالیز خطا را بیان کرده و اثبات می‌کنیم.

۲.۵ حل معادله دیفرانسیل اختشاشی منفرد جزئی خطی با رفتار لایه مرزی

مسئله اختشاشی منفرد جزئی زیر را که دارای رفتار لایه مرزی است در نظر می‌گیریم،

$$\begin{aligned} -\varepsilon \partial_x^2 u(x, t) + \partial_x u(x, t) + \partial_t u(x, t) &= f(x, t), \\ (x, t) &\in [0, 1] \times [0, 1], \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, \quad t \in [0, 1], \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

که جواب دقیق برای این معادله $u(x, t) = e^{-t}(x(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}) - e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}})$ است. رفتار جواب این معادله برای مقادیر مختلف ε در شکل ۱.۵ آورده شده است. اکنون از روش تحلیل هموتویی برای حل معادله (۱.۵) استفاده می‌کنیم.

۱.۲.۵ معادله دگرذیسی مرتبه صفر

تابع $u_0(x, t)$ را به عنوان یک حدس اولیه از جواب دقیق مسئله یعنی تابع $u(x, t)$ در نظر می‌گیریم به طوری که در شرایط مرزی معادله (۱.۵) صدق کند،

$$u_0(x, t) = (1 - t)(x(1 - e^{-1/\varepsilon}) - e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + e^{-1/\varepsilon}). \quad (2.5)$$

قرار می‌دهیم $q \in [0, 1]$ و پارامتر کمکی خطی $\mathcal{L}$ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم،

$$\mathcal{L}[\Phi(x, t; q)] = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi(x, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi(x, t; q)}{\partial x}, \quad (3.5)$$

و عملگر غیرخطی $\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{N}[\Phi(x, t; q)] = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi(x, t; q)}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi(x, t; q)}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(x, t; q)}{\partial t} - f(x, t). \quad (4.5)$$

به ترتیب قرار می‌دهیم $\hbar \neq 0$ و $\mathcal{H}(x, t) \neq 0$ ، با استفاده از پارامتر نشانده $q \in [0, 1]$ یک مجموعه از معادلات را به صورت زیر

$$(1 - q) \mathcal{L}[\Phi(x, t; q) - u_0(x, t)] = \hbar q \mathcal{H}(x, t) \mathcal{N}[\Phi(x, t; q)], \quad (5.5)$$

با شرایط مرزی زیر می‌سازیم،

$$\Phi(0, t; q) = (1, t; q) = 0, \quad \Phi(x, 0; q) = u_0(x). \quad (6.5)$$

رابطه (5.5) و (6.5) را معادله دگرذیسی مرتبه صفر برای معادله (1.5) می‌نامیم.

۲.۲.۵ معادله دگرذیسی مرتبه بالا

با m بار مشتق‌گیری از معادله دگرذیسی مرتبه صفر (5.5) و (6.5) نسبت به پارامتر q و سپس قرار دادن $q = 0$ و در نهایت تقسیم کل عبارت حاصل به $m!$ معادله‌ی دگرذیسی مرتبه m ام به صورت

$$\mathcal{L}[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar \mathcal{H}(x, t) \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}), \quad (7.5)$$

با شرایط مرزی زیر،

$$u_m(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u_m(x, 0) = 0, \quad (8.5)$$

بدست می‌آید که

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(x, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \\ &= -\varepsilon \partial_x^* u_{m-1}(x, t) + \partial_x u_{m-1}(x, t) + \partial_t u_{m-1}(x, t) - (1 - \chi_m) f(x, t). \end{aligned} \quad (9.5)$$

و

$$\vec{u}_m = \{u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t)\}, \quad \chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$

و در نهایت با محاسبه وارون عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}^{-1}$ و با فرض $\mathcal{H}(x, t) = 1$ معادله (7.5) و (8.5) تبدیل می‌شود به،

$$\begin{aligned} u_m(x, t) &= \chi_m u_{m-1}(x, t) + \hbar \mathcal{H}(x, t) \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})], \\ u_m(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad u_m(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (10.5)$$

که

$$\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}(x, t))] \equiv \int_0^x \left(e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}} \int_0^\gamma -\frac{e^{-\frac{\eta}{\varepsilon}} \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}(\eta, t))}{\varepsilon} d\eta + e^{\frac{\gamma}{\varepsilon}} C_1(t) \right) d\gamma + C_2(t)$$

توجه کنید که $\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})$ در رابطه (9.5) تنها به تابع‌های

$$u_0(x, t), u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_{m-1}(x, t)$$

وابسته است که این تابع‌ها با حل کردن معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۷.۵) و (۸.۵) به ازای هر m در هر تکرار محاسبه می‌شوند و همچنین ثابت‌های C_1, C_2 با استفاده از شرایط مرزی $u_m(0, t) = 0, u_m(1, t) = 0$ در هر تکرار بدست می‌آیند. با قرار دادن $u_0(x, t) = (1-t)(x(1-e^{-1/\varepsilon}) - e^{\frac{x-1}{\varepsilon}} + e^{-1/\varepsilon})$ و $\mathcal{H}(x, t) = 1$ و $m = 1$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(\vec{u}_0(x, t)) &= -\varepsilon \partial_x^2 u_0(x, t) + \partial_x u_0(x, t) + \partial_t u_0(x, t) - f(x, t), \\ u_1(x, t) &= \hbar \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_1(\vec{u}_0(x, t))], \\ u_1(0, t) &= 0, \quad u_1(1, t) = 0.\end{aligned}\quad (11.5)$$

و با حل آن $u_1(x, t)$ که جواب حاصل از تکرار اول در معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۷.۵) و (۸.۵) است به صورت زیر بدست می‌آید،

$$\begin{aligned}& \frac{e^{-1/\varepsilon} \varepsilon \hbar}{e^{1/\varepsilon} - 1} - \frac{\varepsilon \hbar}{e^{1/\varepsilon} - 1} - \frac{3e^{-1/\varepsilon} \hbar}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} - \frac{\hbar}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} + \frac{e^{-1/\varepsilon} t \hbar}{e^{1/\varepsilon} - 1} + \frac{\varepsilon e^{-t} \hbar}{e^{1/\varepsilon} - 1} + \frac{e^{-t} \hbar}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} + \\& \frac{3\hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t}}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} - \frac{t \hbar}{e^{1/\varepsilon} - 1} - \frac{\varepsilon \hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t}}{e^{1/\varepsilon} - 1} - \frac{1}{2} x \hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t} + \frac{1}{2} e^{-t} x \hbar + x \hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t + \frac{x}{\varepsilon}} + 2x \hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t} + \\& e^{-1/\varepsilon} t x \hbar + \varepsilon e^{-t} x \hbar - \varepsilon x \hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t} + \frac{t \hbar e^{x/\varepsilon}}{e^{1/\varepsilon} - 1} - \varepsilon \hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t + \frac{x}{\varepsilon}} - \frac{t \hbar e^{\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}}}{e^{1/\varepsilon} - 1} - \frac{\hbar e^{\frac{x}{\varepsilon} - t}}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} - \\& \frac{3\hbar e^{-\frac{1}{\varepsilon} - t + \frac{x}{\varepsilon}}}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} - e^{-t} x \hbar - t x \hbar + \frac{1}{2} e^{-1/\varepsilon} x \hbar - \frac{x \hbar}{2} - x \hbar e^{\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}} - 2e^{-1/\varepsilon} x \hbar + e^{-1/\varepsilon} \varepsilon x \hbar - \\& \varepsilon x \hbar + \varepsilon \hbar e^{\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}} + \frac{3\hbar e^{\frac{x}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}}}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} + \frac{\hbar e^{x/\varepsilon}}{2(e^{1/\varepsilon} - 1)} + x \hbar\end{aligned}$$

با قرار دادن $m = 2$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2(\vec{u}_1(x, t)) &= -\varepsilon \partial_x^2 u_1(x, t) + \partial_x u_1(x, t) + \partial_t u_1(x, t), \\ u_2(x, t) &= \hbar \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_2(\vec{u}_1(x, t))], \\ u_2(0, t) &= 0, \quad u_2(1, t) = 0.\end{aligned}\quad (12.5)$$

و با حل آن $u_2(x, t)$ ، جواب حاصل از تکرار دوم در معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۷.۵) و (۸.۵) بدست می‌آید و به همین ترتیب تا تکرار m ام ادامه می‌دهیم. بنابراین جواب تقریبی مرتبه m ام مسئله (۱.۵) برابر است با،

$$u_m(x, t) \approx u_0(x, t) + \sum_{i=1}^m u_i(x, t). \quad (13.5)$$

نمودار $\hbar$ را برای محدوده‌هایی که رفتار لایه مرزی در آن وجود دارد مثل $u_m(0.999999, t)$ ، $u_m(0.999999, t)$ که $t \in [0, 1]$ رسم می‌کنیم تا همگرایی سری هموتویی را در دشوارترین قسمت رفتار جواب معادله نشان دهیم، شکل (۲.۵). همچنین برای محاسبه بهترین مقدار $\hbar$ ، نرم دو خط را از رابطه (۳۸.۲) طوری محاسبه می‌کنیم که مینیمم شود، شکل (۳.۵)، که در آن به خوبی می‌توان دید برای $\hbar = -1/0.4$ مقدار نرم دو خط مینیمم خود را با $m = 8$ تکرار اخذ می‌کند. در آخر هم با مقدار $\hbar$ بهینه نمودار جواب تقریبی را با استفاده از سری هموتویی حاصل از رابطه (۱۳.۵) برای $\varepsilon = 10^{-6}$

با $m = 8$ تکرار رسم می‌کنیم، شکل (۵.۵). در شکل (۴.۵) سه مورد ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مقادیر مختلف $\hbar$ رسم شده، در حقیقت با توجه به شکل (۳.۵) برخی مقادیر مربوط به $\hbar$ را برای نشان دادن اهمیت موضوع تعیین دقیق این پارامتر انتخاب کردیم. همانطور که ملاحظه می‌شود تعیین دقیق مقدار پارامتر کمکی $\hbar$ با روشی که در اینجا معرفی شده متأثر از تعداد تکرارها در روش هموتویی است به طوریکه اگر ما تعداد تکرارها را افزایش دهیم قطعاً می‌توانیم مقدار دقیقتری برای $\hbar$ بیابیم و به دنبال آن ماکسیمم مقدار خطا را کاهش دهیم.

نکته ۱.۲.۵. یکی از نکات مهم در تقریب جواب مسائل دارای لایه مرزی با روش تحلیل هموتویی این است که آیا میتوان تقریب مناسبی از مشتق جواب معادله نیز ارائه کرد یا خیر؟، البته این نکته باید لحاظ شود که پیوستگی جواب تقریبی شرطی لازم برای تحقق این مهم است. یکی دیگر از مسائلی که در اینجا اهمیت دارد وجود خطی یا غیرخطی بودن معادله است که در تعیین دقت تقریب مشتق جواب اهمیت دارد. قطعاً تقریب مشتق جواب مسائل اختشاشی منفرد خطی دارای لایه مرزی هم از جهت سهولت در محاسبات و هم از جهت زمان اجرای برنامه کامپیوتری و هم دقت تقریب نتایج بهتری فراهم می‌کنند.

با توجه به نکته فوق از آنجایی که مشتق جواب معادله (۱.۵) نیز دارای رفتار لایه مرزی شدیدتری نسبت به خود جواب معادله است پس تقریب آن اهمیت زیادی دارد، شکل (۶.۵). چون سری هموتویی به ازای $\hbar$ بهینه یک تقریب پیوسته از جواب معادله ارائه می‌کند پس با رسم نمودار $\hbar$ برای مشتق سری هموتویی نسبت به x به ازای t هایی که ثابت هستند و $t \in [0, 1]$ و x هایی که در ناحیه لایه مرزی قرار دارند مثلاً $(x, t) = (0.999995, t)$ که $\frac{\partial u_m(x, t)}{\partial x}|_{(x, t) = (0.999995, t)}$ که $t = 0, 0.5, 1$ و با مشاهده قسمت‌های صاف در این نمودارها می‌توان به این نتیجه رسید که مشتق سری هموتویی (۱۳.۵) به ازای $\hbar$ بهینه به مشتق جواب همگراست، شکل (۷.۵). در شکل (۸.۵) نرم دو خطا را از رابطه (۳۸.۲) را برای مشتق سری هموتویی (۱۳.۵) نسبت به x رسم کرده‌ایم، همینطور که مشخص است $\hbar$ بهینه برای جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی $(\frac{\partial u_m(x, t)}{\partial x})$ تقریباً یکسان است.

نکته ۲.۲.۵. توجه داشته باشید که ما تمام نتایج حاصل برای حل معادله (۱.۵) را با $m = 8$ تکرار محاسبه کرده‌ایم. قطعاً با توجه به پایه‌های در نظر گرفته شده و همچنین مقادیر انتخاب شده برای پارامترهای $\mathcal{L}$ و $\mathcal{H}$ ، با افزایش تعداد تکرارها، هم می‌توان $\hbar$ بهینه‌ای نسبت به $\hbar$ کنونی پیدا کرد و هم به طبع آن می‌توان ماکسیمم مقادیر خطای مطلق برای جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی کاهش داد. به طور کلی در روش هموتویی برای هر تعداد تکراری که می‌زنیم باید $\hbar$ بهینه‌ی مربوط به آن تعداد تکرار را پیدا کنیم.

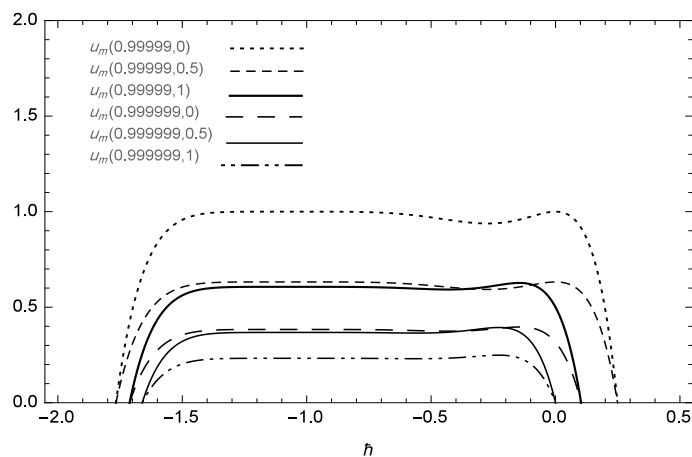
۳.۵ حل معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد با رفتار لایه مرزی

مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را که دارای رفتار لایه مرزی است در نظر می‌گیریم،

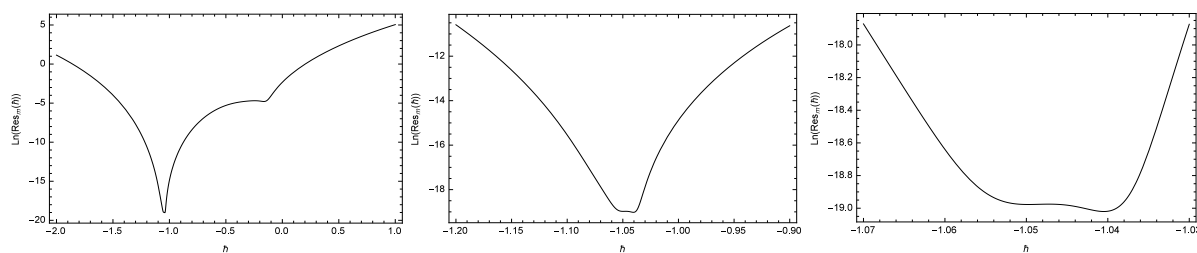
$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + p(t)u'(t - \delta) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(t) = \varphi(t), & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = \gamma, \end{cases} \quad (14.5)$$

که ε پارامتر اختشاش مسئله و δ پارامتر تأخیر مسئله است و $0 < \varepsilon \ll 1$ و $0 < \delta \ll 1$. تابع‌های $f(t)$ ، $q(t)$ ، $p(t)$ ، $\varphi(t)$ به قدر کافی هموار هستند و γ یک ثابت است و $0 < p(t) \leq M$ ، $-\theta < q(t) \leq 0$ که θ ، M ثابت‌های مثبت هستند. با استفاده از بسط سری تیلور برای جمله $u'(t - \delta)$ حول t داریم

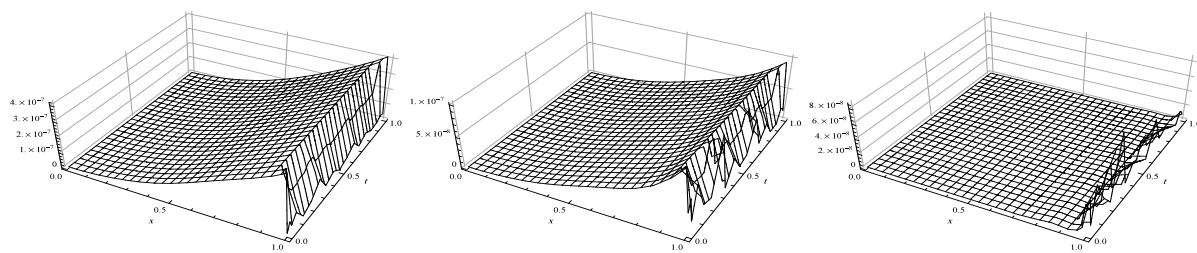
$$u'(t - \delta) \approx u'(t) - \delta u''(t),$$



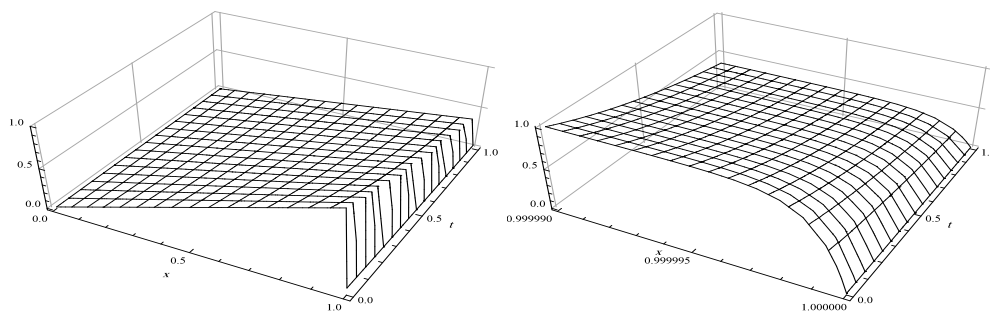
شکل ۲.۵: نمودار $\tilde{h}$ برای مسئله (۱.۵) در $u_m(0.99999, t)$, $u_m(0.999999, t)$ که $t = 0, 0.5, 1$ و $m = 8$ ، $\varepsilon = 10^{-6}$



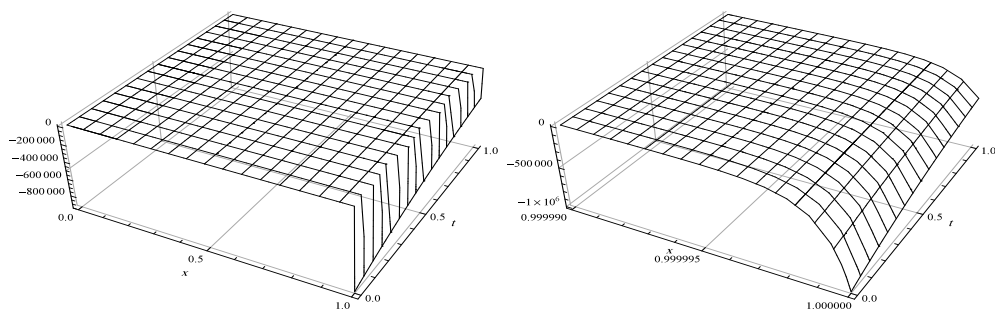
شکل ۳.۵: نرم دو خطای جواب تقریبی معادله (۱.۵) با مقادیر $m = 8$ ، $\varepsilon = 10^{-6}$ برای پیدا کردن $\tilde{h}$ بهینه



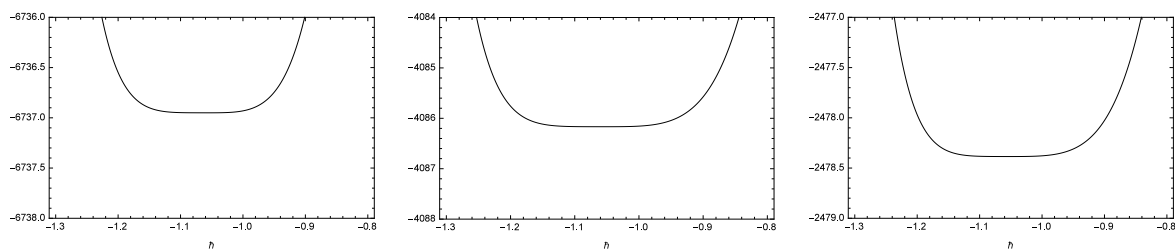
شکل ۴.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای جواب تقریبی معادله (۱.۵) با $\varepsilon = 10^{-6}$ و تکرار $m = 8$ (راست: $\tilde{h} = -1.04$ ، وسط: $\tilde{h} = -1.08$ ، چپ: $\tilde{h} = -1.03$)



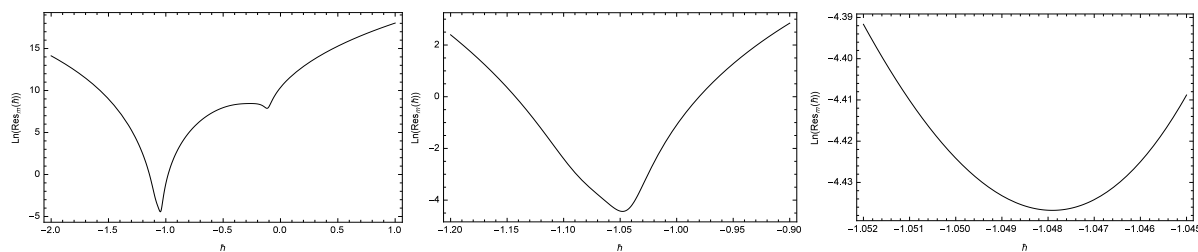
شکل ۵.۵: جواب تقریبی معادله (۱.۵) با استفاده از روش تحلیل هموتپی برای $m = 8$ ، $\varepsilon = 10^{-6}$



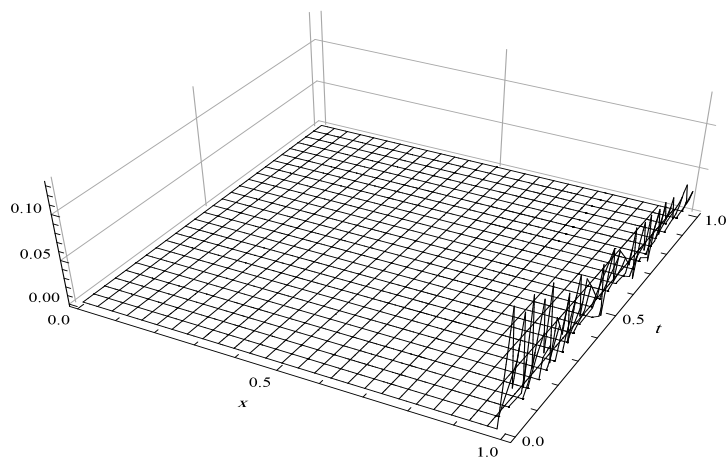
شکل ۶.۵: مشتق جواب معادله (۱.۵) برای $\varepsilon = 10^{-6}$



شکل ۷.۵: نمودار $\tilde{h}$ برای مشتق جواب تقریبی با $m = 8$ تکرار و $\varepsilon = 10^{-6}$ در $x = 0.999995$ (راست: $t = 1$ وسط: $t = 0.5$ چپ: $t = 0$)



شکل ۸.۵: نرم دو خطا برای مشتق جواب تقریبی معادله (۱.۵) با مقادیر $m = 8$, $\varepsilon = 10^{-6}$ برای پیدا کردن $\tilde{h}$ بهینه



شکل ۹.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق برای مشتق جواب تقریبی معادله (۱.۵) با $m = 8$ تکرار و $\varepsilon = 10^{-6}$ و $\tilde{h} = -1.48$

، بنابراین مسئله (۱۴.۵) تبدیل می شود به،

$$\begin{cases} (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(0) = \varphi(0), & u(1) = \gamma. \end{cases} \quad (15.5)$$

اکنون مفاهیم پایه‌ای روش تحلیل هموتوپي برای حل معادله (۱۵.۵) آورده و همچنین قضیه همگرایی و قضیه آنالیز خطا را ارائه می کنیم.

۱.۳.۵ معادله دگرديسی مرتبه صفر

تابع $u_0(t)$ را به عنوان یک حدس اولیه از جواب دقیق مسئله یعنی تابع $u(t)$ در نظر می گیریم به طوری که در شرایط مرزی معادله (۱۵.۵) صدق کند،

$$\begin{aligned} u_0(0) &= \varphi(0), \\ u_0(1) &= \gamma. \end{aligned} \quad (16.5)$$

عملگر کمکی خطی $\mathcal{L}$ را به صورت زیر انتخاب می کنیم،

$$\mathcal{L}[\Phi(t; q)] = (\varepsilon - \delta p(t)) \frac{\partial^2 \Phi(t; q)}{\partial t^2} + p(t) \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t}, \quad (17.5)$$

و عملگر غیرخطی $\mathcal{N}[\Phi(t; q)]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$\mathcal{N}[\Phi(t; q)] = (\varepsilon - \delta p(t)) \frac{\partial^2 \Phi(t; q)}{\partial t^2} + p(t) \frac{\partial \Phi(t; q)}{\partial t} + q(x)\Phi(t; q) - f(x). \quad (18.5)$$

به ترتیب پارامتر کمکی و تابع کمکی $h \neq 0$ و $\mathcal{H}(t) \neq 0$ قرار می دهیم و با استفاده از پارامتر نشانده $q \in [0, 1]$ یک مجموعه از معادلات را به صورت زیر

$$(1 - q) \mathcal{L}[\Phi(t; q) - u_0(t)] = h q \mathcal{H}(t) \mathcal{N}[\Phi(t; q)], \quad (19.5)$$

با شرایط مرزی زیر می سازیم،

$$\Phi(0; q) = \varphi(0), \quad \Phi(1; q) = \gamma. \quad (20.5)$$

براساس مفاهیم روش تحلیل هموتوپي که قبلا در فصل دوم به تفصیل اشاره شد، زمانی که پارامتر نشانده q از ۰ به ۱ افزایش پیدا می یابد آنگاه تابع $\Phi(t; q)$ از حدس اولیه $u_0(t)$ به جواب دقیق مسئله $u(t)$ تغییر پیدا می کند. معادله‌های (۱۹.۵) و (۲۰.۵) را معادلات دگرديسی مرتبه صفر برای مسئله (۱۴.۵) می نامیم. با آزادی در انتخاب پارامتر کمکی h و حدس اولیه $U_0(t)$ از جواب تقریبی مسئله و عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و قرار دادن تابع کمکی $\mathcal{H}(t) = 1$ می توانیم فرض کنیم جواب $\Phi(t; q)$ برای معادله دگرديسی مرتبه صفر (۲۰.۵) و (۱۹.۵) به طوری که $0 \leq q \leq 1$ وجود داشته باشد، همچنین مشتق مرتبه m آن نسبت به پارامتر نشانده q به صورت زیر وجود داشته باشد

$$u_0^{(m)}(t) = \left. \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (21.5)$$

$u_*^{(m)}(t)$ را مشتق دگرذیسی مرتبه m می‌نامیم. تعریف می‌کنیم

$$u_m(t) = \frac{u_*^{(m)}(t)}{m!} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}. \quad (22.5)$$

با استفاده از قضیه تیلور، $\Phi(t; q)$ را به صورت یک سری توانی بر حسب پارامتر نشانده q به صورت زیر بسط می‌دهیم،

$$\Phi(t; q) = \Phi(t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m, \quad (23.5)$$

با استفاده از معادله $\Phi(t; 0) = u_*(t)$ و (22.5) سری (23.5) تبدیل می‌شود به،

$$\Phi(t; q) = u_*(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) q^m. \quad (24.5)$$

فرض کنید که پارامتر کمکی $\hbar$ و حدس اولیه $U_*(t)$ به طور مناسبی انتخاب شده باشند که سری (24.5) با عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ و تابع کمکی $\mathcal{H}(t) = 1$ در $q = 1$ همگرا باشد. با فرض $q = 1$ ، سری (24.5) تبدیل می‌شود به

$$\Phi(t; 1) = U_*(t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t). \quad (25.5)$$

بنابراین با استفاده از معادله $\Phi(t; 1) = u(t)$ داریم،

$$u(t) = u_*(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t). \quad (26.5)$$

سری (26.5) یک رابطه بین تابع حدس اولیه $u_*(t)$ و جواب دقیق مسئله $u(t)$ با استفاده از تابع‌های مجهول $u_m(t)$ ، $m = 1, 2, 3, \dots$ ایجاد می‌کند، که تابع $u_m(t)$ در هر تکرار در روش تحلیل هموتویی محاسبه می‌شود.

۲.۳.۵ معادله دگرذیسی مرتبه بالا

با m بار مشتق‌گیری از معادله دگرذیسی مرتبه صفر (۱۹.۵) و (۲۰.۵) نسبت به پارامتر q و سپس قرار دادن $q = 0$ و در نهایت تقسیم کل عبارت حاصل به $m!$ معادله‌ی دگرذیسی مرتبه m به صورت

$$\mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] = \hbar \mathcal{H}(t) \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}), \quad (27.5)$$

با شرایط مرزی زیر،

$$u_m(0) = 0, \quad u_m(1) = 0, \quad (28.5)$$

بدست می‌آید که

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_m(\vec{U}_{m-1}) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(t; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \\ &= (\varepsilon - \delta p(t)) u_{m-1}''(t) + p(t) u_{m-1}'(t) + q(t) u_{m-1}(t) - (1 - \chi_m) f(t). \end{aligned} \quad (29.5)$$

و

$$\vec{u}_m = \{u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}, \quad \chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$

و در نهایت با محاسبه وارون عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}^{-1}$ یعنی $\mathcal{L}^{-1}$ و با فرض $\mathcal{H}(t) = 1$ معادله (۲۷.۵) و (۲۸.۵) تبدیل می شود به،

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \chi_m u_{m-1}(t) + \hbar \mathcal{H}(t) \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})], \\ u_m(0) &= 0, \quad u_m(1) = 0. \end{aligned} \quad (30.5)$$

که

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}(t))] &\equiv \int_0^t \left(C_1 e^{\int_0^\tau -\frac{p(\eta)}{\varepsilon - \delta p(\eta)} d\eta} \right. \\ &\quad \left. + e^{\int_0^\tau -\frac{p(\eta)}{\varepsilon - \delta p(\eta)} d\eta} \left(\int_0^\tau \frac{\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}(\xi)) e^{-\int_0^\xi -\frac{p(\eta)}{\varepsilon - \delta p(\eta)} d\eta}}{\varepsilon - \delta p(\xi)} d\xi \right) d\tau + C_2 \right. \end{aligned}$$

توجه کنید که $\mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1})$ در رابطه (۲۹.۵) تنها به تابع های

$$u_0(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_{m-1}(t)$$

وابسته است که این تابع ها با حل کردن معادله دگرذیسی مرتبه m ام (۲۷.۵) و (۲۸.۵) به ازای هر m در هر تکرار محاسبه می شوند و همچنین ثابت های C_1, C_2 با استفاده از شرایط مرزی $u_m(0) = 0, u_m(1) = 0$ در هر تکرار بدست می آیند. عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ را $\mathcal{L} = (\varepsilon - \delta p(t))u''(t) + p(t)u'(t)$ در نظر می گیریم که هسته ی این عملگر $\int_0^\zeta \left(e^{\int_0^\zeta -\frac{p(\eta)}{\varepsilon - \delta p(\eta)} d\eta} \right) C_1 d\zeta + C_2$ می باشد و بدیهی است که داریم

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t \left(e^{\int_0^\zeta -\frac{p(\eta)}{\varepsilon - \delta p(\eta)} d\eta} \right) C_1 d\zeta + C_2 \right) = 0.$$

۳.۳.۵ آنالیز همگرایی روش تحلیل هموتوبی

برای اثبات قضیه همگرایی روش تحلیل هموتوبی نیاز به یک سری تعریف و قضیه داریم که در ادامه آنها را می آوریم. تعریف می کنیم $V(\mathbb{R}^+)$ فضای همه توابع اندازه پذیر از T به $\mathbb{R}^+$ که T فضای متریک است.

تعریف ۱.۳.۵. یک دنباله از توابع با مقدار حقیقی U_m به طور یکنواخت همگراست به تابع U در T اگر $\forall \epsilon > 0$ $\exists m_0$ به طوری که $\forall m > m_0$ داشته باشیم $|U_m(t) - U(t)| < \epsilon$ که $t \in F$. برای ملاحظه اثبات مراجعه شود به [۵۸، ۵۷، ۵۳]. با فرض قضیه ۳.۲.۲ که در فصل دوم آورده شده، قضیه همگرایی را برای مسئله (۱۴.۵) به صورت زیر داریم.

قضیه ۲.۳.۵. (قضیه همگرایی) اگر سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t),$$

به طور یکنواخت همگرا باشد به $u(t)$ که $u_m(t) \in V(\mathbb{R}^+)$ است و از حل معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۲۷.۵) و (۲۸.۵) بدست آمده و همچنین سری $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}(u_m(t))$ به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ یک جواب دقیق برای معادله ی (۱۵.۵) است.

اثبات. از همگرایی یکنواخت سری‌های $\sum_{m=0}^{\infty} u_m(t)$ و $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{L}(u_m(t))$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u'_k(t) &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u''_k(t) &= 0, \end{aligned} \quad (31.5)$$

و همچنین $\forall t \in [0, 1]$ تعریف می‌کنیم

$$S(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(t), \quad S'(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u'_m(t), \quad S''(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u''_m(t),$$

و از آنجا که عملگر کمکی $\mathcal{L}$ خطی است داریم

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k \mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] &= \sum_{m=1}^k [\mathcal{L}u_m(t) - \chi_m \mathcal{L}u_{m-1}(t)] \\ &= \mathcal{L}u_1(t) + (\mathcal{L}u_2(t) - \mathcal{L}u_1(t)) + \dots + (\mathcal{L}u_k(t) - \mathcal{L}u_{k-1}(t)) \\ &= \mathcal{L}u_k(t), \end{aligned} \quad (32.5)$$

با استفاده از رابطه (31.5) و (32.5) و معادله دگرذیسی مرتبه بالا (27.5) داریم

$$\begin{aligned} \hbar \mathcal{H}(t) \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k \mathcal{L}[u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] \\ &= \mathcal{L} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^k [u_m(t) - \chi_m u_{m-1}(t)] \right] \\ &= \mathcal{L} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(t) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

و از آنجا که $\hbar \neq 0$ و $\mathcal{H}(t) = 1$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) = 0, \quad \forall t \in [0, 1]$$

با جایگذاری (29.5) در سری فوق داریم،

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m(\vec{u}_{m-1}) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} [(\varepsilon - \delta p(t))u''_{m-1}(t) + p(t)u'_{m-1}(t) + q(t)u_{m-1}(t) - (1 - \chi_m)f(t)] \\
 &= (\varepsilon - \delta p(t)) \sum_{m=1}^{\infty} u''_{m-1}(t) + p(t) \sum_{m=1}^{\infty} u'_{m-1}(t) + q(t) \sum_{m=1}^{\infty} u_{m-1}(t) - \sum_{m=1}^{\infty} (1 - \chi_m)f(t) \\
 &= (\varepsilon - \delta p(t))S''(t) + p(t)S'(t) + q(t)S(t) - f(t) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

و با استفاده از رابطه‌های (۲۸.۵) و (۲۰.۵) داریم

$$S(0) = \varphi(0), \quad S(1) = \gamma.$$

□

بنابراین $S(t)$ در معادله (۱۵.۵) صدق می‌کند و یک جواب دقیق برای این معادله می‌باشد.

۴.۳.۵ آنالیز خطای روش تحلیل هموتوبی

اکنون قصد داریم در قضیه‌ای که در ادامه می‌آوریم یک کران خطا برای روش تحلیل هموتوبی ارائه کنیم. برای ملاحظه اثبات رجوع کنید به [۵۹].

قضیه ۳.۳.۵. فرض کنید که سری (۲۶.۵) به جواب دقیق $u(t)$ همگرا باشد و سری $u_m(t) = \sum_{n=0}^m u_n(t)$ یک جواب تقریبی حاصل از حل معادله دگرذیسی مرتبه m ام باشد، آنگاه کران بالای خطا به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\|u(t) - u_m(t)\| \leq \lambda^{m-m_0+1} \frac{1}{1-\lambda} \|u_{m_0}(t)\|,$$

که $0 < \lambda < 1$.

۵.۳.۵ مثال‌های عددی

مثال ۴.۳.۵. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۶۵-۶۷، ۶۰]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) + u'(t - \delta) - u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

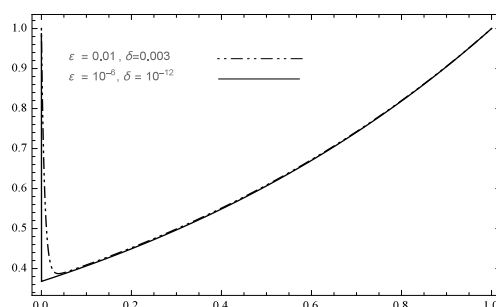
که جواب دقیق برای این معادله برابر است با $u(x) = \frac{(e^{m_1-1})e^{m_2x} + (1-e^{m_2})e^{m_1x}}{e^{m_1}-e^{m_2}}$ که $m_1 = \frac{-\sqrt{4(\varepsilon-\delta)+1}-1}{2(\varepsilon-\delta)}$ و $m_2 = \frac{\sqrt{4(\varepsilon-\delta)+1}-1}{2(\varepsilon-\delta)}$.

مثال ۵.۳.۵. معادله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد زیر را در نظر بگیرید [۶۵-۶۷، ۶۰]

$$\begin{cases} \varepsilon u''(t) - u'(t - \delta) - u(t) = f(t), & t \in [0, 1], \\ u(t) = 1, & t \in [-\delta, 0], \quad u(1) = -1, \end{cases}$$

جدول ۱۰.۵: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۴.۳.۵ برای $\varepsilon = 10^{-6}$ و $m = 10$ تکرار

δ	مثال (۴.۳.۵)				
	مرجع [۶۷]	مرجع [۶۷]	مرجع [۶۵]	مرجع [۶۶]	روش تحلیل هموتویی
L_∞					
10^{-1}	9.928×10^{-6}	1.2×10^{-4}	4.6×10^{-6}	4.6×10^{-7}	2.6×10^{-12} $\bar{h} = -0.94$
10^{-3}	1.08362×10^{-5}	1.6×10^{-4}	4.6×10^{-6}	4.2×10^{-7}	3.2×10^{-12} $\bar{h} = -0.942$
10^{-6}	1.28454×10^{-5}	2.8×10^{-4}	4.6×10^{-6}	2.1×10^{-7}	4.6×10^{-12} $\bar{h} = -0.945$
10^{-8}	1.01499×10^{-5}	5.7×10^{-4}	4.6×10^{-6}	2.3×10^{-7}	9.5×10^{-12} $\bar{h} = -0.93$
10^{-10}	—	—	1.4×10^{-5}	5.7×10^{-6}	1.4×10^{-9} $\bar{h} = -1.22$
10^{-100}	—	—	1.4×10^{-5}	1.7×10^{-6}	6.6×10^{-9} $\bar{h} = -1.24$

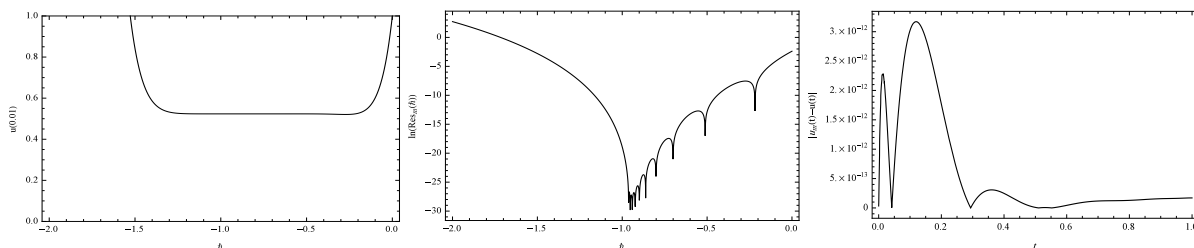
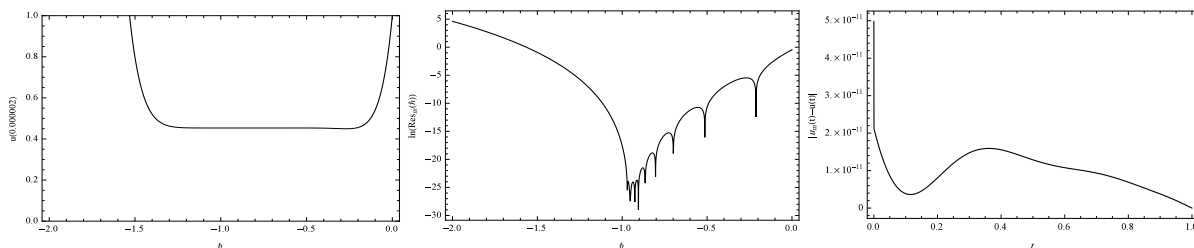

 شکل ۱۰.۵: رفتار جواب مثال (۴.۳.۵) برای مقادیر مختلف ε و δ

که جواب دقیق برای این معادله برابر است با $u(x) = \frac{(e^{m_2} + 1)e^{m_1 x} + (1 + e^{m_1})e^{m_2 x}}{e^{m_2} - e^{m_1}}$ که $m_1 = \frac{1 - \sqrt{4(\varepsilon + \delta) + 1}}{2(\varepsilon + \delta)}$ و $m_2 = \frac{\sqrt{4(\varepsilon + \delta) + 1} + 1}{2(\varepsilon + \delta)}$

با توجه به نکته‌ای که در خصوص تقریب مشتق جواب معادلات دیفرانسیل اختشاشی منفرد در بخش قبل گفتیم و از آنجایی که مشتق جواب مثال (۴.۳.۵) نیز دارای رفتار لایه مرزی شدیدتری نسبت به خود جواب معادله است پس تقریب آن اهمیت زیادی دارد، شکل (۱۶.۵). چون سری هموتویی به ازای $\bar{h}$ بهینه یک تقریب پیوسته از جواب معادله ارائه می‌کند پس با رسم نمودار $\bar{h}$ برای مشتق سری هموتویی نسبت به t ‌هایی که در ناحیه لایه مرزی قرار دارند مثلاً $u'(2 \times 10^{-6})$ و $u'(0.1)$ ، و با مشاهده قسمت‌های صاف در این نمودارها می‌توان به این نتیجه رسید که مشتق سری هموتویی به ازای $\bar{h}$ بهینه به مشتق جواب همگراست، شکل (۱۷.۵) و (۱۸.۵) که همچنین نرم دو خطا را از رابطه (۳۸.۲) را برای مشتق سری هموتویی نسبت به t رسم کرده‌ایم، همینطور که مشخص است $\bar{h}$ بهینه برای جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی $u'_m(t)$ تقریباً یکسان است.

جدول ۲.۵: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۴.۳.۵ برای $\delta = 10^{-12}$ و $m = 10$ تکرار

ε	مثال (۴.۳.۵)				روش تحلیل هموتوبی
	مرجع [۶۰]	مرجع [۶۰]	مرجع [۶۵]	مرجع [۶۶]	
L_∞					
10^{-2}	6.58×10^{-2}	1.49×10^{-2}	4.50×10^{-5}	5.27×10^{-5}	3.10×10^{-12} $\tilde{h} = -0.949$
10^{-3}	8.07×10^{-2}	3.88×10^{-2}	4.50×10^{-5}	4.83×10^{-5}	4.10×10^{-12} $\tilde{h} = -0.959$
10^{-4}	8.46×10^{-2}	5.06×10^{-2}	2.50×10^{-4}	5.04×10^{-5}	4.50×10^{-12} $\tilde{h} = -0.96$
10^{-5}	8.54×10^{-2}	5.21×10^{-2}	2.50×10^{-4}	5.07×10^{-5}	6.40×10^{-12} $\tilde{h} = -0.948$
10^{-6}	8.58×10^{-2}	5.03×10^{-2}	2.50×10^{-4}	5.12×10^{-5}	5.00×10^{-11} $\tilde{h} = -0.93$
10^{-7}	—	—	—	8.01×10^{-5}	4.00×10^{-9} $\tilde{h} = -0.84$

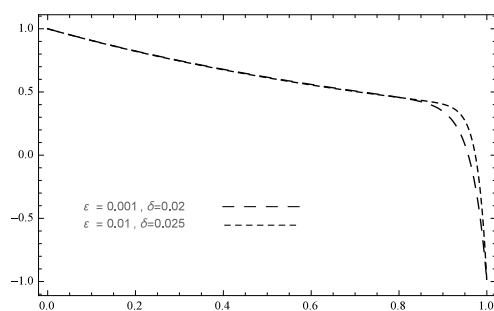

 شکل ۱۱.۵: ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای جواب تقریبی مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 10^{-3}$ و $\varepsilon = 10^{-1}$ و $m = 10$ تکرار

 شکل ۱۲.۵: ماکسیم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای جواب تقریبی مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 10^{-12}$ و $\varepsilon = 10^{-6}$ و $m = 10$ تکرار

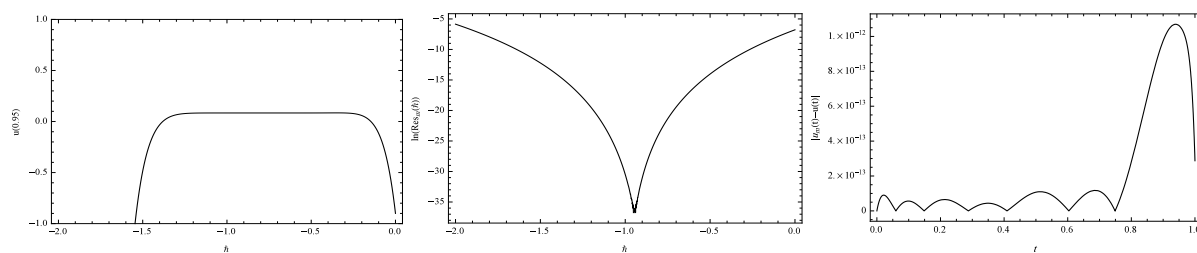
جدول ۳.۵: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۵.۳.۵ برای $\varepsilon = 10^{-1}$ و $m = 10$ تکرار

δ	مثال (۵.۳.۵)				روش تحلیل هموتوبی
	مرجع [۶۷]	مرجع [۶۷]	مرجع [۶۵]	مرجع [۶۶]	
L_∞					
10^{-7}	۰.۱۱۷۶۳۱	1.4×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.7×10^{-6}	1.9×10^{-12} $\bar{h} = -0.94$
10^{-15}	۰.۸۳۵۱۵	9.6×10^{-5}	1.0×10^{-5}	6.3×10^{-6}	1.1×10^{-12} $\bar{h} = -0.92$
10^{-25}	۰.۶۱۴۷۵	6.8×10^{-5}	1.0×10^{-5}	2.1×10^{-5}	1.1×10^{-12} $\bar{h} = -0.91$

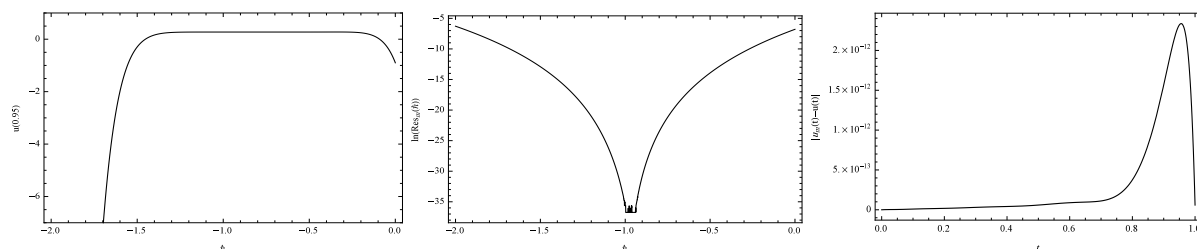
 جدول ۴.۵: ماکسیم مقدار خطای مطلق برای مثال ۵.۳.۵ برای $\varepsilon = 10^{-1}$ و $m = 10$ تکرار

ε	مثال (۵.۳.۵)				روش تحلیل هموتوبی
	مرجع [۶۰]	مرجع [۶۰]	مرجع [۶۵]	مرجع [۶۶]	
L_∞					
10^{-7}	۰.۲۱۳۳۹۱	3.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-5}	9.5×10^{-12} $\bar{h} = -0.96$
10^{-15}	۰.۱۲۳۱۱۹	1.4×10^{-4}	1.0×10^{-5}	8.5×10^{-7}	9.5×10^{-12} $\bar{h} = -0.93$
10^{-25}	۰.۸۰۹۶۴	9.2×10^{-5}	1.0×10^{-5}	8.2×10^{-7}	9.5×10^{-12} $\bar{h} = -0.93$
10^{-100}	—	—	1.0×10^{-5}	1.4×10^{-6}	2.2×10^{-12} $\bar{h} = -0.95$
10^{-200}	—	—	1.0×10^{-5}	3.6×10^{-6}	2.4×10^{-12} $\bar{h} = -0.94$

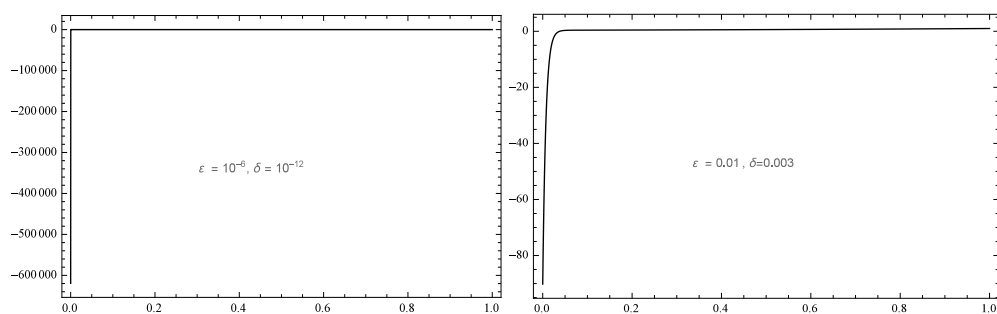

 شکل ۱۳.۵: رفتار جواب مثال (۵.۳.۵) برای مقادیر مختلف ε و δ



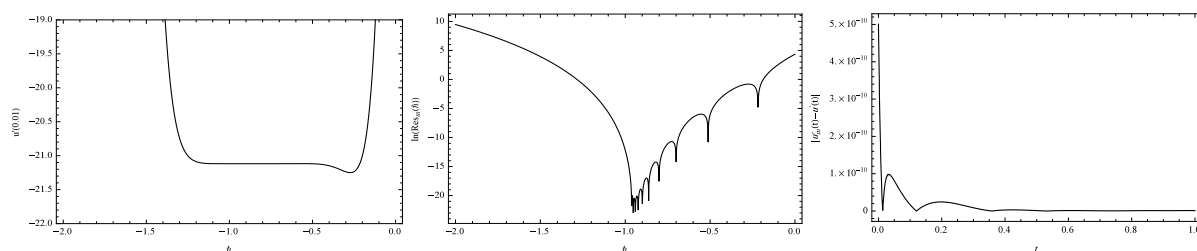
شکل ۱۴.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای جواب تقریبی مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 0.025$ و $\varepsilon = 0.01$ و $m = 10$ تکرار



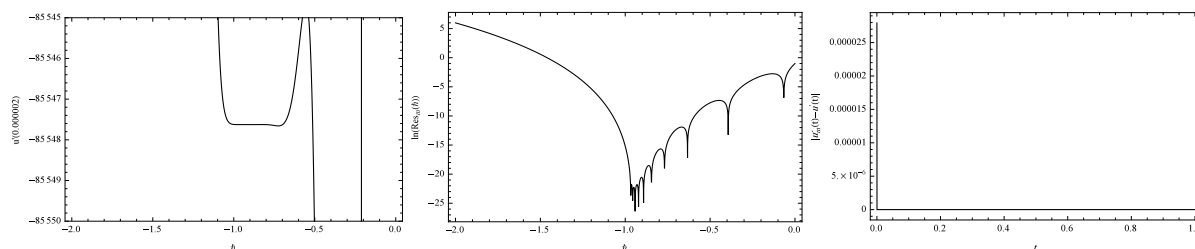
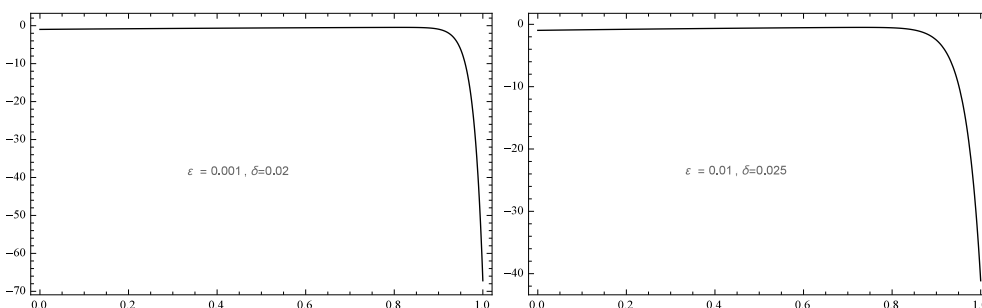
شکل ۱۵.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای جواب تقریبی مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 0.02$ و $\varepsilon = 0.001$ و $m = 10$ تکرار



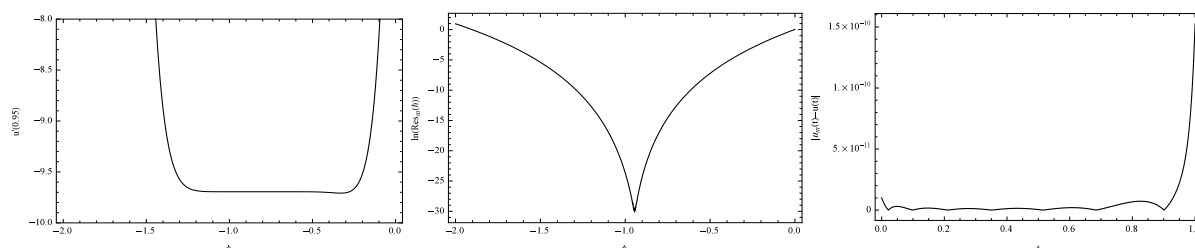
شکل ۱۶.۵: رفتار مشتق جواب مثال (۴.۳.۵) برای مقادیر مختلف δ و ε

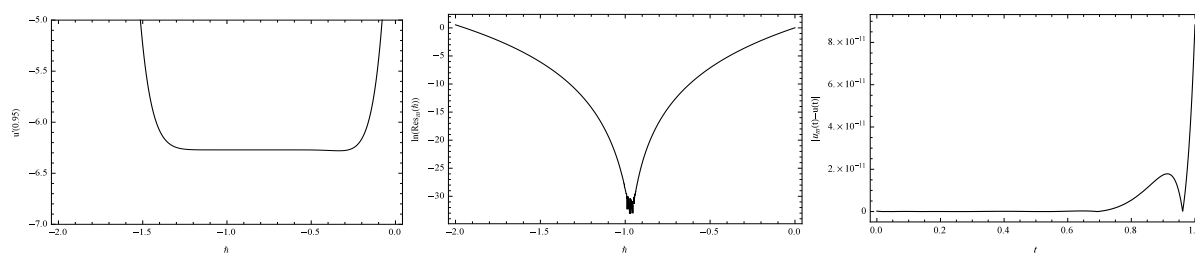


شکل ۱۷.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای مشتق جواب تقریبی مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 0.003$ و $\varepsilon = 0.01$ و $m = 10$ تکرار


 شکل ۱۸.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای مشتق جواب تقریبی مثال (۴.۳.۵) با $\delta = 10^{-12}$ و $\varepsilon = 10^{-6}$ و $m = 10$ تکرار

 شکل ۱۹.۵: رفتار مشتق جواب مثال (۵.۳.۵) برای مقادیر مختلف δ و ε

همانند مثال (۴.۳.۵) مشتق جواب مثال (۵.۳.۵) نیز دارای رفتار لایه مرزی است پس تقریب آن اهمیت زیادی دارد، شکل (۱۹.۵). چون سری هموتوپی به ازای $\tilde{h}$ بهینه یک تقریب پیوسته از جواب معادله ارائه می‌کند پس با رسم نمودار $\tilde{h}$ برای مشتق سری هموتوپی نسبت به t هایی که در ناحیه لایه مرزی قرار دارند مثلاً $u'(0.95)$ ، و با مشاهده قسمت‌های صاف در این نمودارها می‌توان به این نتیجه رسید که مشتق سری هموتوپی به ازای $\tilde{h}$ بهینه به مشتق جواب همگراست، شکل (۲۰.۵) و (۲۱.۵) که همچنین نرم دو خطا را از رابطه (۳۸.۲) را برای مشتق سری هموتوپی نسبت به t رسم کرده‌ایم، همینطور که مشخص است $\tilde{h}$ بهینه برای جواب تقریبی و مشتق جواب تقریبی $u'_m(t)$ تقریباً یکسان است.


 شکل ۲۰.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای مشتق جواب تقریبی مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 10^{-25}$ و $\varepsilon = 10^{-1}$ و $m = 10$ تکرار



شکل ۲۱.۵: ماکسیمم مقدار خطای مطلق و نرم دو خطا و نمودار $\tilde{h}$ برای مشتق جواب تقریبی مثال (۵.۳.۵) با $\delta = 10^{-2}$ و $\varepsilon = 10^{-1}$ و $m = 10$ تکرار

فصل ۶

نتیجه گیری و پیشنهادات

در فصل اول تعاریف کلی از برخی انواع مسائل اختشاشی منفرد آورده شده است و همچنین مفاهیم اولیه مربوط به فضای هسته بازتولیدی و نحوه ساخت هسته بازتولیدی آورده شده است. همانطور که در فصل اول اشاره شده مسائل اختشاشی منفرد دارای تنوع و گستردگی زیادی هستند و ما در این پایان نامه تنها برخی از آنها را که دارای رفتار لایه مرزی می‌باشند با استفاده از روش هسته بازتولیدی و روش تحلیل هموتوپی حل می‌کنیم و نتایج را با سایر روش‌های دیگر مقایسه کرده و نشان می‌دهیم که روش هسته بازتولیدی و روش تحلیل هموتوپی به سایر روش‌های ارائه شده برای حل این مسائل برتری ملموسی دارند. روش ارائه شده در این پایان نامه روش هسته بازتولیدی بدون استفاده از فرایند متعامدسازی گرام اشمیت می‌باشد که مهمترین ویژگی آن کاهش چشمگیری زمان اجرای برنامه‌های کامپیوتری برای حل مسائل مختلف است و همچنین باعث بهبود جوابهای تقریبی بدست آمده می‌شود. این موضوع به صورت مفصل در فصل دوم آورده شده است. با توجه به ویژگی مهم روش مذکور در پایین بودن زمان اجرا، ما به راحتی می‌توانیم نتایج حاصل از حل مسائل مختلف را در کمترین زمان مشاهده کرده و نتیجه گیری‌های لازم را انجام دهیم. روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی گرام اشمیت به تنهایی قادر به تقریب جواب مسائل اختشاشی منفرد دارای رفتار لایه مرزی نیست. برای بدست آوردن تقریبی مناسب از جواب مسائل دارای لایه مرزی با استفاده از روش هسته بازتولیدی، نیاز به یک سری تغییرات در مسئله داریم. اولین و مهمترین این تغییرات تقسیم بازه مسئله به دو زیر بازه است به طوریکه یکی از این زیربازه‌ها دارای رفتار لایه مرزی باشد. سپس مسئله اختشاشی منفرد را در زیربازه‌ای که رفتار لایه مرزی ندارد با روش هسته بازتولیدی حل کرده و با استفاده از تقریب حاصل از آن یک شرط به مسئله‌ی بازه لایه مرزی اضافه کرده و سپس با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب و انتقال بازه دارای رفتار لایه مرزی به یک بازه بزرگتر، آنگاه روش هسته بازتولیدی را برای حل مسئله در این بازه جدید بکار می‌گیریم. در نهایت هم با ترکیب هر دو جواب حاصل در هر زیربازه می‌توانیم یک تقریب مناسب برای جواب مسئله‌ی اختشاشی منفرد در سراسر بازه تعریفش بدست بیاوریم. اما تنها ایراد این روش این است که نمی‌تواند مشتق جواب مسئله اختشاشی منفرد را در بازه لایه مرزی تقریب بزند. از این رو این موضوع یک نقطه ضعف برای تکنیک ما محسوب می‌شود و یکی از پیشنهادات در اینجا می‌تواند این موضوع باشد که چگونه می‌توانیم یک تقریب برای مشتق جواب در بازه لایه مرزی با استفاده از روش هسته بازتولیدی ارائه کنیم. یک از نقاط قوت روش هسته بازتولیدی بدون فرایند متعامدسازی این است که، با انجام موارد ذکر شده هنگام پیاده سازی روش، می‌توانیم در مواردی که رفتار لایه مرزی بسیار شدیدی در مسئله اختشاشی منفرد وجود دارد، یک تقریب مناسب از جواب مسئله بدست بیاوریم.

روش تحلیل هموتوپی که برای حل مسائل اختشاشی منفرد دارای رفتار لایه مرزی ارائه شده دارای نقاط قوت و ضعفی می‌باشد که در اینجا به برخی از آنها اشاره می‌کنیم. روش تحلیل هموتوپی اساساً از لحاظ اجرای برنامه کامپیوتری روش زمانبری است، مخصوصاً اگر مسئله اختشاشی منفردی که می‌خواهیم حل کنیم دارای تابع سمت راست بسیار پیچیده‌ای باشد که ترکیبی از پایه‌های مختلف مورد استفاده در روش هموتوپی باشد، در این صورت عملاً نمی‌توان روش را بر روی این دست مسائل اجرا کرد علاوه بر این با توجه به نوع عملگر مسائل اختشاشی منفرد ما نمی‌توانیم تعداد تکرارها را در روش هموتوپی خیلی بالا ببریم چرا که باعث بزرگ شدن تساعدی جملات سری هموتوپی و در پی آن افزایش نمایی زمان اجرای برنامه کامپیوتری می‌شود. از مزایای روش تحلیل هموتوپی این است که نتایج خوبی، روی برخی مسائل اختشاشی منفرد می‌دهد که این نتایج حتی با دستورهای حل عددی در نرم‌افزارهای ریاضی، قابل حصول نیستند. از این رو ما در فصل دوم و فصل پنجم به برخی از مسائل اختشاشی منفردی اشاره کرده‌ایم که با استفاده از روش تحلیل هموتوپی با تعداد تکرارهای تقریباً کم، نتایج خوبی فراهم می‌کنند. به طور کلی اگر در جواب به فرم سری حاصل از روش تحلیل هموتوپی بتوان مقدار پارامتر $\hbar$ را هرچه دقیقتر مشخص کرد، همگرایی سری هموتوپی سریعتر و در نتیجه ماکسیمم مقدار خطا کمتر می‌شود. یکی دیگر از مزیت‌های اصلی روش تحلیل هموتوپی در مقایسه با روش هسته بازتولیدی این است که سری جواب حاصل از اجرای روش تحلیل هموتوپی روی مسائل اختشاشی منفرد قادر به تقریب مشتق جواب مسئله با



دقت مناسبی است. به طور قطع نتایج حاصل از روش تحلیل هموتوپی در مقایسه با نتایج حاصل از روش هسته بازتولیدی برای حل مسئله اختشاشی منفرد، بسیار بهتر و دقیقتر است. البته هدف ما در این پایان نامه مقایسه روش هسته بازتولیدی با روش تحلیل هموتوپی نیست و نتایج حاصل از هر کدام از این روش‌ها در جای خود از اهمیت زیادی برخوردار هستند.

- [1] R.B. Stein. Some models of neuronal variability. *Biophys. J.*, 7:37–68, 1967.
- [2] R.B. Stein. A theoretical analysis of neuronal variability. *Biophys. J.*, 5:173–194, 1965.
- [3] H.C. Tuckwell. On the first-exit time problem for temporally homogeneous Markov processes. *J. Appl. Probab.*, 13:39–48, 1976.
- [4] H.C. Tuckwell. *Introduction to Theoretical Neurobiology*, volume 2. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1988.
- [5] W.J. Wilbur and J. Rinzel. An analysis of Stein’s model for stochastic neuronal excitation. *Biol. Cybern.*, 45:107–114, 1982.
- [6] A.J. Chorin and J.E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [7] H. G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Convection-Diffusion-Reaction and Flow Problems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2 edition, 2008.
- [8] T. Linß. *Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems, Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1985.
- [9] E.C. Gartland. Graded-mesh difference schemes for singularly perturbed two-point boundary value problems. *Math. Comput.*, 51:631–657, 1988.
- [10] V.Y. Glizer. Asymptotic solution of a boundary-value problem for linear singularly-perturbed functional differential equations arising in optimal control theory. *J. Optim. Theory Appl.*, 106:49–85, 2000.
- [11] M. Wazewska-Czyzewska and A. Lasota. Mathematical models of the red cell system. *Mat. Stosow.*, 6:25–40, 1976.
- [12] M.C. Mackey and L. Glass. Oscillations and chaos in physiological control systems. *Science.*, 197:287–289, 1977.

- [13] D.D. Joseph and L. Preziosi. Heat waves. *Rev. Mod. Phys.*, 61:41–73, 1989.
- [14] M.I. Othman M.A. Ezzat and A.M.S. El-Karamany. State space approach to two-dimensional generalized thermo-viscoelasticity with two relaxation times. *Int. J. Eng. Sci.*, 40:1251–1274, 2002.
- [15] X. Wang Q. Liu and D. De Kee. Mass transport through swelling membranes. *Int. J. Eng. Sci.*, 43:1464–1470, 2005.
- [16] M. Bestehorn and E.V. Grigorieva. Formation and propagation of localized states in extended systems. *Ann. Phys. (Leipzig)*, 13:423–431, 2004.
- [17] T.A. Burton. Fixed points, stability and exact linearization. *Nonlinear Anal.*, 61:857–870, 2005.
- [18] X. Liao. Hopf and resonant codimension two bifurcation in van der pol equation with two time delays. *Chaos, Soliton. Fract.*, 23:857–870, 2005.
- [19] D.Y. Tzou. *Micro-to-macroscale Heat Transfer*. Taylor and Francis, Washington, DC, 1997.
- [20] P. Arora M.K. Kadalbajoo and V. Gupta. Collocation method using artificial viscosity for solving stiff singularly perturbed turning point problem having twin boundary layers. *Comput. Math. Appl.*, 61:1595–1607, 2011.
- [21] P.A. Farrell. Sufficient condition for the uniform convergence of a difference scheme for a singularly perturbed turning point problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 25:618–643, 1988.
- [22] M.K. Kadalbajoo and K.C. Patidar. Variable mesh spline approximation method for solving singularly perturbed turning point problems having boundary layer(s). *Comput. Math. Appl.*, 42:1439–1453, 2001.
- [23] W. Wasow. *Linear Turning Point Theory*. Springer, New York, 1985.
- [24] R. O'Malley. *Introduction to Singular Perturbations*. Academic Press, New York, 1974.
- [25] P. Rai and K.K. Sharma. Numerical analysis of singularly perturbed delay differential turning point problem. *Appl. Math. Comput.*, 218:3483–3498, 2011.
- [26] P. Rai and K.K. Sharma. Numerical study of singularly perturbed differential–difference equation arising in the modeling of neuronal variability. *Comput. Math. Appl.*, 63:118–132, 2012.
- [27] A. Longtin and J. Milton. Complex oscillations in the human pupil light reflex with mixed and delayed feedback. *Math. Biosci.*, 90:183–199, 1988.
- [28] J.D. Murray. *Mathematical Biology I: An Introduction*. Springer-Verlag, Berlin, 3 edition, 2001.

- [29] L. Glass M.C. Mackey. Oscillations and chaos in physiological control systems. *Science.*, 197:287–289, 1977.
- [30] E. O’Riordan and M.L. Pickett. Numerical approximations to the scaled first derivatives of the solution to a two parameter singularly perturbed problem. *J. Comput. Appl. Math.*, 347:128–149, 2019.
- [31] M. Brdar and H. Zarinb. A singularly perturbed problem with two parameters on a bakhvalov-type mesh. *J. Comput. Appl. Math.*, 292:307–319, 2016.
- [32] H. Zarin. Exponentially graded mesh for a singularly perturbed problem with two small parameters. *Appl. Num. Math.*, 120:233–242, 2017.
- [33] L.B. Liu and Y. Chen. An adaptive moving grid method for a system of singularly perturbed initial value problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 274:11–22, 2015.
- [34] P. Das and S. Natesan. Optimal error estimate using mesh equidistribution technique for singularly perturbed system of reaction–diffusion boundary-value problems. *Appl. Math. Comput.*, 249:265–277, 2014.
- [35] M.G. Cui and Y. Lin. *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space*. Nova Science, Hauppauge, New York, United States, 2009.
- [36] N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68:337–404, 1950.
- [37] M.A. Ibiejugba, F.M. Aderibigbe, and O.S. Adegboye. Parameter selection for a delay equation. *J. Nigerian Math. Soc.*, 9:77–93, 1990.
- [38] I.G.E. Kordonis and Ch.G. Philos. The behavior of solutions of linear integro-differential equations with unbounded delay. *Comput. Math. Appl.*, 38:45–50, 1999.
- [39] W. Jiang and Y. Lin. Approximate solution of the fractional advection–dispersion equation. *Comput. Phys. Commun.*, 181:557–561, 2010.
- [40] F. Geng and M. Cui. A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. *Appl. Math. Lett.*, 25:818–823, 2012.
- [41] M. Cui and F. Geng. A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient burgers equation. *Appl. Math. Comput.*, 188:1389–1401, 2007.
- [42] C.L. Temuer M.J. Du, Y.L. Wang and D. Tian. A modified reproducing kernel method for solving burgers’ equation arising from diffusive waves in fluid dynamics. *Appl. Math. Comput.*, 315:500–506, 2017.

- [43] L. Mei and Y. Lin. Simplified reproducing kernel method and convergence order for linear volterra integral equations with variable coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 346:390–398, 2019.
- [44] J.H. Shen L.H. Yang and Y. Wang. The reproducing kernel method for solving the system of the linear volterra integral equations with variable coefficients. *J. Comput. Appl. Math.*, 236:2398–2405, 2012.
- [45] M.Q. Xu and Y.Z. Lin. Simplified reproducing kernel method for fractional differential equations with delay. *Appl. Math. Lett.*, 52:156–161, 2016.
- [46] X.Y. Li and B.Y. Wu. A numerical method for solving distributed order diffusion equations. *Appl. Math. Lett.*, 53:92–99, 2016.
- [47] Y. Wang, T. Chaolu, and P. Jing. New algorithm for second-order boundary value problems of integro-differential equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 229:1–6, 2009.
- [48] Y. Wang, L. Su, X. Cao, and X. Li. Using reproducing kernel for solving a class of singularly perturbed problems. *Comput. Math. Appl.*, 61:421–430, 2011.
- [49] Y. Wang, T. Chaolu, and Z. Chen. Using reproducing kernel for solving a class of singular weakly nonlinear boundary value problems. *Int. J. Comput. Math.*, 87:367–380, 2010.
- [50] F.G.Tan X.H. Wan H. Yu Z.Y. Li, Y.L. Wang and J.S. Duan. Solving a class of linear nonlocal boundary value problems using the reproducing kernel. *Appl. Math. Comput.*, 265:1098–1105, 2015.
- [51] Y.Z.Lin M.Q. Xu and Y.H.Wang. A new algorithm for nonlinear fourth order multi-point boundary value problems. *Appl. Math. Comput.*, 274:163–168, 2016.
- [52] X. Cao Y. Wang and X. Li. A new method for solving singular fourth-order boundary value problems with mixed boundary conditions. *Appl. Math. Comput.*, 217:7385–7390, 2011.
- [53] K. Atkinson and W. Han. *Theoretical Numerical Analysis A Functional Analysis Framework*. Springer Science, New York, USA, 3 edition, 2009.
- [54] S.J. Liao. *Proposed homotopy analysis techniques for the solution of nonlinear problem, Ph.D. Thesis*. Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [55] S.J. Liao. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. CRC Press, Chapman and Hall, Boca Raton, 2003.
- [56] S.J. Liao. *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 2012.

- [57] G.B. Folland. *Real analysis: Modern techniques and their applications*. Wiley, New York, 2 edition, 1999.
- [58] L. Debnath and P. Mikusinski. *Introduction to Hilbert Spaces with Applications*. Elsevier Inc, Burlingtone, California, London, 3 edition, 2005.
- [59] S.J. Liao. *Advances in the homotopy analysis method*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, USA, UK, 2014.
- [60] L.B. Liu and Y.P. Chen. Maximum norm a posteriori error estimates for a singularly perturbed differential difference equation with small delay. *Appl. Math. Comput.*, 227:801–810, 2014.
- [61] M.K. Kadalbajoo and D. Kumar. Fitted mesh b-spline collocation method for singularly perturbed differential-difference equations with small delay. *Appl. Math. Comput.*, 204:90–98, 2008.
- [62] X.Y. Li and B.Y. Wu. A continuous method for nonlocal functional differential equations with delayed or advanced arguments. *J. Math. Anal. Appl.*, 409:485–493, 2014.
- [63] X.Y. Li and B.Y. Wu. Error estimation for the reproducing kernel method to solve linear boundary value problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 243:10–15, 2013.
- [64] F.Z. Geng and S.P. Qian. Piecewise reproducing kernel method for singularly perturbed delay initial value problems. *Appl. Math. Lett.*, 37:67–71, 2014.
- [65] F.Z. Geng, S.P. Qian, and M.G. Cui. Improved reproducing kernel method for singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior. *Appl. Math. Comput.*, 252:58–63, 2015.
- [66] H. Sahihi, S. Abbasbandy, and T. Allahviranloo. Reproducing kernel method for solving singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior in hilbert space. *J. Comput. Appl. Math.*, 328:30–43, 2018.
- [67] M.K. Kadalbajoo and K.K. Sharma. Numerical analysis of singularly perturbed delay differential equations with layer behavior. *Appl. Math. Comput.*, 157:11–28, 2004.
- [68] J. Vigo-Aguiar and S. Natesan. An efficient numerical method for singular perturbation problems. *J. Comput. Appl. Math.*, 192:132–141, 2006.
- [69] J. Vigo-Aguiar S. Natesan and N. Ramanujam. A numerical algorithm for singular perturbation problems exhibiting weak boundary layers. *Comput. Math. Appl.*, 45:469–479, 2003.

- [70] R.N. Rao and P.P. Chakravarthy. A finite difference method for singularly perturbed differential-difference equations with layer and oscillatory behavior. *Appl. Math. Model.*, 37:5743–5755, 2013.

واژه نامه

الف

Perturbed	اختشاشی
Economic	اقتصاد
Error analysis	آنالیز خطا
Integral	انتگرال
Heat Transfer	انتقال گرما
Diffusion in Polymers	انتشار در پلیمر
Integration by parts	انتگرال جزء به جزء
Adjoint	الحاقی

ب

Sufficiently Smooth	به قدر کافی هموار
Biomechanic	بیومکانیک
Biophysical	بیوفیزیک
Biology	بیولوژی
Boundary layer interval	بازه لایه مرزی
Optimal	بهینه
Expansion	بسط
Closed	بسته
Closure	بستار
Uniformly	به طور یکنواخت

پ

Basis	پایه
Continuous	پیوسته
Perturbation parameter	پارامتر اختشاش



Delay parameter	پارامتر تأخیر
Auxiliary parameter	پارامتر کمکی
Embedding parameter	پارامتر نشانده

ت

Analysis	تحلیل
Definition	تعریف
Basis functions	توابع پایه‌ای
Residual function	تابع مانده
Unknown function	تابع مجهول
Divide	تقسیم کردن
Change rapidly	تغییرات سریع
Thermo-Elasticity	ترموالاستیسیته

ث

Prove	ثابت کردن
Constant	ثابت

ج

Approximate solution	جواب تقریبی
Exact solution	جواب دقیق
Numerical solution	جواب عددی
General solution	جواب عمومی
Delay term	جمله تأخیر

چ

Characteristic equation	چند جمله‌ای مشخصه
Dense	چگال

ح



حل عددی Numerical solution
حد Limit
حدس اولیه Initial guess

خ

خطای مطلق Absolute error
خطی Linear
خواص Properties
خودالحاقی Adjoint

د

دینامیک سیالات Fluid dynamics
دامنه Domain
دنباله Sequence
زیر دنباله Subsequence
دستگاه معادلات دیفرانسیل System of differential equations
دستگاه معادلات جبری System of algebraic equations
دلتای دیراک Dirac delta

ر

روش هسته بازتولیدی Differential quadrature method
روش تحلیل هموتوپی Homotopy analysis method
روش عددی Numerical method
رفتار لایه‌ای Layer behavior
رفتار منظم Regular behavior
رفتار نوسانی Oscillatory behavior

ز

زیست‌شناسی ریاضی Mathematical biology

ژ



ژئوفیزیک Geophysic

س

سری Series

سری تیلور Taylor series

سری هموتوپی Homotopy series

سیستم هرج و مرج Chaotic systems

سیستم تابعی کامل Complete function system

ش

شبه نرم Seminorm

شرایط اولیه Initial conditions

شرایط مرزی Boundary conditions

شدید Severe

شکل Figure

ص

صدق کردن Satisfy

ض

ضرب داخلی Inner product

ضریب ثابت Constant coefficient

ضریب Coefficient

ط

طول بازه لایه مرزی Length of the boundary layer interval

ع

عملگر Operator

عملگر تابعی Functional operator

عملگر پیوسته Continuous operator

عدد رینولد Reynolds number



غ

Nonlinear غیر خطی

ف

Physiology فیزیولوژی
Physio-chemical فیزیو-شیمی
Normed space فضای نرم‌دار
Hilbert space فضای هیلبرت
Metric space فضای متریک
Physiological processes and diseases فرایندهای فیزیولوژیکی و بیماری‌ها
Orthogonalization process فرایند متعامدسازی
Compact فشرده

ق

Piecewise continuous قطعه به قطعه پیوسته
Countable قابل شمارش

ک

Optimal Control کنترل بهین
Completely continuous کاملاً پیوسته
Bounded کراندار

گ

Discrete گسسته

ل

Boundary layer لایه مرزی
Interior layer لایه درونی

م



Maximum	ماکسیمم
Minimum	مینیمم
Singularly perturbed problem	مسئله اختشاشی منفرد
Singularly perturbed differential-difference problem	مسئله دیفرانسیل-تفاضلی اختشاشی منفرد
Singular	منفرد
Fundamental concepts	مفاهیم اساسی
Proper	مناسب
Positive	مثبت
Equation	معادله
Zero-order deformation equation	معادله دگرذیسی مرتبه صفر
High-order deformation equation	معادله دگرذیسی مرتبه بالا
Singular differential equation	معادله دیفرانسیل منفرد
Set	مجموعه
Derivative order	مرتبه مشتق
Ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Order	مرتبه
Boundary value problem	مسئله مقدار مرزی
Conjugate	مزدوج
Linearly independent	مستقل خطی
Differential	مشتق
Partial derivative	مشتق جزئی
Valid	معتبر
Complex	مختلط
Partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی
Ordinary differential equation	معادله دیفرانسیل معمولی
Value	مقدار
Reaction-diffusion equations	معادلات واکنش-انتشار
Modeling of neuronal variability	مدلسازی تغییرات نورونی
Singularly perturbed problems with two parameters	مسئله اختشاشی منفرد دو پارامتری
Invertible	معکوس پذیر
Absolutely continuous	مطلقاً پیوسته
Sense of norm	مفهوم نرم
Inverse	معکوس

ن

Infinite	نامتناهی
Norm	نرم



Control Theory نظریه کنترل
Semi-analytical نیمه تحلیلی
Infinity-norm نرم بی نهایت
Error of norm two نرم دو خطا
Curve نمودار

Exponential نمایی
Near نزدیک
Turning point نقطه بازگشت
Delay turning point نقطه بازگشت تأخیری
Precompact نسبتاً فشرده
Continuous mapping نگاشت پیوسته

و

Chemical reactions واکنش‌های شیمیایی
Existence وجود

ه

Convergence همگرایی
Collocation هم‌محلی
Reproducing kernel هسته بازتولیدی
Positive definite kernel هسته معین مثبت
Homotopy هموتوپی
Hydrodynamics of liquid Helium هیدرودینامیک هلیوم مایع
Homogenization همگن‌سازی
Equicontinuous هم‌پیوسته

ی

Unique یکتا

مقاله های مستخرج از پایان نامه

- [1] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Reproducing kernel method for solving singularly perturbed differential-difference equations with boundary layer behavior in Hilbert space, J. Comput. Appl. Math. 328 (2018) 30-43.
- [2] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Computational method based on reproducing kernel for solving singularly perturbed differential-difference equations with a delay, Appl. Math. Comput. 361 (2019) 583-598.
- [3] H. Sahihi, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, Solving system of second-order BVPs using a new algorithm based on reproducing kernel hilbert space, Appl. Num. Math. 151 (2020) 27–39.
- [4] S. Abbasbandy, H. Sahihi, T. Allahviranloo, Implementing reproducing kernel method to solve singularly perturbed convection-diffusion parabolic problems, Math. Model. Anal. 26 (2021) 116-134.
- [5] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Homotopy Analysis Method and its Application for Solving Singularly Perturbed Differential-Difference Equation with Boundary Layer Behavior and Delay, J. New. Researches. Mathematics. available Online from 23 June 2019.
- [6] H. Sahihi, S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, Reproducing kernel method for solving singularly perturbed turning point problem with two boundary layers, 14th Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, Zanjan, Iran. (2018) 145-148.



Abstract

In this thesis consider singularly perturbed problems (SPP) and singularly perturbed differential-difference problems (SPDDP) that have boundary-layer behavior and some of the problems that are largely similar to these kinds of SPP and SPDDP. We solve them by using Reproducing Kernel Hilbert Space Method (RKHSM) and Homotopy Analysis Method. We consider RKM without Gram–Schmidt orthogonalization process. First, we introduce mentioned RKM and for implementing it, we decompose the problem domain into two subintervals such that one of them has not the boundary layer and the other one has. The subinterval in which the boundary layer exists is important. If the boundary layer exists on the left subinterval, the present RKM will provide a proper approximation of solution, otherwise we need to change the variable of the SPP and SPDDP to shift the boundary layer region. Results of the present scheme indicate that new algorithm has the following advantages: small computational work, fast convergence, and high precision. In SPP and SPDDP, when the delay parameter is large or the perturbation parameter is small, obtaining a proper approximate solution with present RKM is difficult and therefore we use HAM to compare the results with other numerical methods and the present RKM. We find that the use of the homotopy analysis method, in addition to easy implementation, also provides better results. Moreover we introduce convergence and error analysis theorems and prove them for each method and problem.

Keywords: *Singularly perturbed problem; Singularly perturbed differential-difference problem; Boundary-layer behavior; Reproducing kernel Hilbert space method; Homotopy analysis method; Convergence analysis; Error analysis.*



Islamic Azad University

Science and Research Branch

Department of Mathematics

Ph.D Thesis for degree of Applied Mathematics and Numerical Analysis

Subject:

RKM and HAM for solving singularly perturbed problems and
singularly perturbed differential-difference problems

Supervisor:

S. Abbasbandy Ph.D.

T. Allahviranloo Ph.D.

Advisor:

E. Babolian Ph.D.

By:

Hussein Sahihi

Summer 2019