

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

بایاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه اهمیت جایگاه دانشگاه در اعلامی فرهنگ و تمدن بشری، ماد انشجویان و اعضاء حیات علمی واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

- ۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.
- ۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
- ۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
- ۴- اصل منفعت ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
- ۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانبداری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
- ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.
- ۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸- اصل ترویج: تمهید به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹- اصل برانست: التزام به برانست جوئی از هرگونه رفتار غیر حرفه‌ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه‌های غیر

علمی می‌آلایند.



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم تحقیقات

تعهد اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب مهسا انتظاری دانش آموخته مقطع دکتری ناپیوسته در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ از رساله خود تحت عنوان " حل عددی معادلات تابعی کسری با استفاده از پایه های متعامد با کسب نمره (بدون احتساب نمره مقاله) و درجه دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاورهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی ارایه نشده است.

۳) چنان چه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این رساله داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴) چنان چه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات (تهران)

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

گرایش: آنالیز عددی

موضوع:

حل عددی معادلات تابعی کسری با استفاده از پایه های متعامد

استادان راهنما:

دکتر اسمعیل بابلیان

دکتر سعید عباسبندی

استاد مشاور:

دکتر توفیق اللهویرنلو

نگارنده:

مهسا انتظاری

شهریور ۱۳۹۸

سپاسگزاری:

تشکر و سپاس بی پایان مخصوص خدایی است که بشر را آفریده و به او قدرت اندیشیدن داده و تواناییهای بالقوه را در وجود انسان قرار داده و او را امر به تلاش و کوشش نموده و راهنمایی را برای هدایت بشر فرستاده است.

پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند بی همتا لازم است از استاد ارجمند جناب آقای دکتر بابلیان و آقای دکتر عباسبندی به خاطر سعه صدر و رهنمودهای دلسوزانه که در تهیه ی این تحقیق مرا مورد لطف خود قرار دادند و راهنماییهای لازم را نمودند تشکر و قدردانی نموده، همچنین از زحمات بی دریغ و دلسوزانه استاد ارجمند جناب آقای دکتر الهویرانلو در طول دوران تحصیل سپاسگزاری می نمایم و از قادر بی همتا برای همگان آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون را خواستارم.

تقدیم بہ:

مقدس ترین واژه ما در لغت نامه دلم،

مادر مہربانم کہ زندگیم را میون مہر و عطاوت آن می دانم.

پدرم کہ استوارترین تکیہ گاہم است.

ہمسرو و پسر م کہ نشانہ لطف الہی در زندگی من ہستند.

باشد کہ حاصل تلاشم نیم کونہ غبار حقیقتان را بزداید.

بوسہ بردستان پر مہربان

چکیده ۱

فصل اول

کلیات

۱-۱ مقدمه ۳

۲-۱ بیان مسئله ۳

۳-۱ اهمیت موضوع ۳

۴-۱ تاریخچه ۴

۵-۱ نوع آوری رساله ۵

۶-۱ ساختار رساله ۶

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱-۲ مقدمه ۹

۲-۲ حسابان کسری ۹

۱-۲-۲ تابع گاما ۹

۲-۲-۲ تابع بتا ۱۰

۳-۲-۲ لم رابطه بین تابع گاما و بتا ۱۰

- ۴-۲-۲ تابع میتاگ-لفلر ۱۰
- ۵-۲-۲ انتگرال کسری ریمان-لیوویل ۱۱
- ۳-۲ مشتقات کسری ۱۱
- ۱-۳-۲ مشتق کسری ریمان-لیوویل ۱۱
- ۲-۳-۲ مشتق کسری کاپوتو ۱۲
- ۳-۳-۲ ویژگی های مشتق و انتگرال کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل ۱۲
- ۴-۳-۲ مشتق جزئی کسری کاپوتو ۱۳
- ۴-۲ چند جمله ای های متعامد ۱۴
- ۱-۴-۲ توابع متعامد ۱۴
- ۶-۴-۲ خواص چند جمله ای های متعامد ۱۵
- ۷-۴-۲ فرایند یکا متعامد سازی گرام-اشمیت ۱۵
- ۵-۲ روش های طیفی ۱۷
- ۱-۵-۲ تعریف بنیادی روش طیفی ۱۸
- ۲-۵-۲ ساختار روش طیفی ۱۹
- ۳-۵-۲ روش هم محلی ۲۰
- ۴-۵-۲ روش گلرکین ۲۰
- ۶-۵-۲ روش تاو ۲۰
- ۶-۲ چند جمله ای های برنشتاین ۲۱
- ۲-۶-۲ ویژگی های چند جمله ای های برنشتاین ۲۲
- ۳-۶-۲ روابط مشتق ۲۳

۲۳	۷-۶-۲ روابط انتگرالی
۲۴	۸-۶-۲ چند جمله ای های برنشتاین متعامد
۲۴	۹-۶-۲ تقریب توابع با استفاده از چند جمله ای های برنشتاین متعامد
۲۵	۱۰-۶-۲ پدیده گیپس

فصل سوم

موجک برنشتاین نرمال شده و ویژگی های آن

۲۸	۱-۳ مقدمه
۲۸	۲-۳ موجک ها
۲۸	۱-۲-۳ آنالیز چندریزه ساز
۲۹	۳-۲-۳ ساختن پایه موجکی
۳۲	۴-۲-۳ موجک پیوسته و گسسته
۳۳	۵-۲-۳ موجک برنشتاین متعامد
۳۴	۳-۳ تقریب تابع بر حسب موجک برنشتاین متعامد
۳۶	۴-۳ آنالیز خطا
۳۷	۳-۴-۳ کران خطا برای تقریب موجک برنشتاین متعامد

فصل چهارم

ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه صحیح و کسری

۴۱	۱-۴ مقدمه
۴۱	۲-۴ توابع متعامد تکه ای ثابت بلاک- پالس
۴۱	۱-۲-۴ توابع بلاک - پالس یک بعدی

۴-۲-۲	ویژگی های توابع بلاک - پالس یک بعدی	۴۲
۴-۲-۳	تقریب توابع با استفاده از توابع بلاک - پالس یک بعدی	۴۳
۴-۲-۴	توابع بلاک - پالس دو بعدی	۴۴
۴-۲-۵	ویژگی های توابع بلاک - پالس دو بعدی	۴۴
۴-۲-۶	تقریب توابع دوبعدی با استفاده از توابع بلاک - پالس دو بعدی	۴۵
۴-۲-۷	ماتریس عملیاتی انتگرال توابع بلاک - پالس	۴۵
۴-۳	ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه صحیح	۴۶
۴-۴	ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه کسری	۴۸

فصل پنجم

حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از موجک برنشتاین

۵-۱	مقدمه	۵۱
۵-۲	روش ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین برای حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری	۵۱
۵-۳	الگوریتم روش	۵۴
۵-۴	مثال های عددی	۵۵

فصل ششم

نتایج حاصل از رساله و پیشنهادات

۶-۱	مقدمه	۶۵
۶-۲	نتایج حاصل از رساله	۶۵
۶-۳	پیشنهادهات	۶۶
۶-۸	منابع	۶۸

۷۲	 واژه نامه انگلیسی به فارسی
۷۴	 نمادهای بکار رفته
۷۵	 مقالات مستخرج از رساله
۷۶	 چکیده انگلیسی

- جدول (۱-۵): مقایسه خطای L_2 و L_∞ به ازای مقادیر مختلف t برای مثال ۱-۴-۵، به ازای $m'=12$ ۵۶
- جدول (۲-۵): مقایسه خطای مطلق موجک لژاندر و موجک برنشتاین، مثال ۱-۴-۵ به ازای $m'=12$ ۵۶
- جدول (۳-۵): خطای مطلق مثال ۲-۴-۵ ۵۸
- جدول (۴-۵): مقایسه خطاهای مطلق برای مثال ۲-۴-۵ به ازای $t=0.5, \alpha=0.5$ ۵۹
- جدول (۵-۵): خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف m ، برای مثال ۳-۴-۵ ۶۱
- جدول (۶-۵): ماکسیمم خطای مطلق L_∞ ، برای مثال ۳-۴-۵ ۶۲

فهرست شکل ها

- شکل (۱-۲): نمایش هندسی دو بردار عمود بر هم ۱۶
- شکل (۲-۲): نمایش پدیده گیپس ۲۵
- شکل (۱-۵): جواب تقریبی در سمت چپ و خطای مطلق در سمت راست برای مثال ۱-۴-۵ ۵۷
- شکل (۲-۵): شکلی از خطای مطلق برای مثال ۲-۴-۵ ۶۰
- شکل (۳-۵): جواب تقریبی در سمت چپ و خطای مطلق در سمت راست برای مثال ۲-۴-۵ ۶۰
- شکل (۴-۵): تابع خطای رسم شده برای مثال ۳-۴-۵ ۶۲

چکیده

در رساله حاضر برای به دست آوردن جوابهای عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، روش موجک برنشتاین نرمال شده معرفی شده است. ماتریس های عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه صحیح و کسری معرفی شده و برای تبدیل نمودن معادله دیفرانسیل جزئی کسری با شرایط مرزی و دیریکله به دستگاه معادلات جبری به کار گرفته می شود. در روش پیشنهاد شده، شرایط مرزی به طور خودکار در نظر گرفته می شود و ارزیابی خطای تقریب تابع بر اساس موجک نرمال شده برنشتاین طی چند قضیه نشان داده شده است. در انتها برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده در رساله، مثال های عددی متعددی بیان شده و در هر مثال، نتایج مقایسه هائی که با سایر روش ها صورت گرفته گویای دقت بالاتر و برتر روش پیشنهادی رساله با سایر روش ها می باشد.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی کسری، موجک برنشتاین نرمال شده، ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه کسری، ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه صحیح، توابع بلاک - پالس.

فصل اول

کلیات

از آنجایی که معادلات تابعی کسری نقش بسیار مهمی در سایر علوم بخصوص علوم مهندسی ایفاء می کند، لذا شناخت هر چه بیشتر این نوع معادلات کمک شایانی به پیشرفت سایر علوم دارد. در رساله حاضر حل این نوع معادلات با استفاده از موجک برنشتاین متعامد بررسی می شود. این بخش از رساله برای آشنایی بیشتر خوانندگان با اهمیت موضوع انتخابی و ساختار رساله، به بیان و تشریح کامل مسئله، اختلاف نظر ها، مشکلات، خلاء های تحقیقاتی و همچنین مزیت های روش پیشنهادی نسبت به سایر روش ها تنظیم شده است.

۲-۱ بیان مسئله

در مباحث مربوط به حساب کسری، معادلات تابعی کسری یکی از با اهمیت ترین مباحث مطرح شده است. از آنجایی که در بسیاری از موارد حل تحلیلی این نوع معادلات به آسانی انجام نمی شود و یا با اعمال شرایط خاص به سختی جواب آنها به دست می آید، لذا حل عددی این نوع معادلات بسیار حائز اهمیت می باشد و مزیت روش های عددی بر یکدیگر در کمتر بودن میزان خطای روش می باشد. در رساله حاضر با معرفی پایه های متعامد بر مبنای دو روش ترکیب توابع و ساختن موجک و همچنین با بکار گیری تعاریف اساسی حسابان کسری به حل معادلات تابعی کسری (۱-۱) با شرایط اولیه و مرزی (۲-۱) به گونه ای پرداخته شده است که خطای روش به حداقل مقدار ممکن خود رسیده باشد.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = F(x, t, u, \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu}, \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}), \quad 0 < \beta, \gamma \leq 1, 1 < \alpha, \mu \leq 2, \quad (1-1)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_0(x), & u(0, t) &= g_0(t), \\ u(x, 1) &= f_1(x), & u(1, t) &= g_1(t), \end{aligned} \quad (2-1)$$

که در آن $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ مرتبه مشتق کسری f_i و g_i به ازای $i = 0, 1$ توابعی بطور پیوسته مشتق پذیر بر روی بازه $[0, 1]$ هستند. با توجه به مثال ها و مقایسه هایی که نسبت به سایر روش ها در فصل پنجم از رساله حاضر صورت گرفته است کارایی روش به وضوح روشن شده است.

۳-۱ اهمیت موضوع

از دیرباز علم ریاضیات در خدمت سایر علوم بوده است، بسیاری از مسائل و پدیده های واقعی در زمینه فیزیک، شیمی، زیست شناسی و ... با توجه به معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی از مرتبه صحیح به خوبی مدل بندی می شدند اما با پیشرفت علم و بررسی همه جانبه مسائل دانشمندان دریافتند که مدل بندی های

مذکور دارای نواقص و کاستی های زیادی می باشند، از طرفی برخی از پدیده ها با این نوع مدل بندی به خوبی به جواب درست و منطقی نمی رسند. لذا معادلات دیفرانسیل کسری به عنوان ابزار جدیدی در جهت تشریح و مدل بندی پدیده ها پا به عرصه ظهور گذاشت. در دهه های اخیر حسابان کسری و در نهایت مشتقات کسری به سرعت رشد نموده و کاربردهای زیادی از آنها به چشم می خورد، بهترین مزیت این مشتقات نسبت به مشتقات مرتبه صحیح، حافظه دار بودن آنها است، به گونه ای که به عنوان ابزاری عالی و موثر در جهت تشریح حافظه و ویژگی های موروثی مواد مختلف، نحوه پردازش آنها را فراهم می کند. به عبارت دیگر مشتقات از مرتبه صحیح تنها وابسته به رفتار موضعی تابع می باشد در حالیکه مشتقات از مرتبه کسری نه تنها به رفتار موضعی تابع بلکه به تمامی اطلاعات موجود در تابع نیز وابسته می باشند و تمامی اطلاعات تابع در یک فرم وزن دار متراکم می شود. با توجه به کارایی وسیع معادلات تابعی از مرتبه کسری در دهه های اخیر مقالات کاربردی زیادی در این زمینه ارائه شده است، اما به علت محدودیت های بسیار زیاد روش های تحلیلی در عمل بیشتر از روش های عددی برای به دست آوردن جواب تقریبی استفاده می شود. از جمله روشهای عددی در حل این نوع معادلات می توان به روش های تجزیه آدومیان، هموتپی، چند گامی، برونمایی، اسپلاین و غیره اشاره داشت. در این میان یکی از پرکاربرد ترین روش های عددی برای حل عددی معادلات تابعی کسری استفاده از روش های طیفی می باشد. ویژگی بارز و قابل اهمیت این روش ها دقت بالای آنها در تقریب جوابهای واقعی معادلات با جواب های هموار بوده است. در این روش ها ویژگی بارز دیگری که به چشم می خورد، اختیار کردن پایه های متعامد متنوع از توابع بی شمار مشتق پذیر بر روی کل بازه است. در واقع توابع پایه ای متفاوت منجر به تقریب های طیفی متفاوت می شوند. در رساله حاضر توابع پایه ای برنشتاین متعامد و همچنین توابع بلاک - پالس معرفی می شوند سپس توابع ترکیبی و موجک تعریف شده و تحت توابع پایه ای بررسی می شوند و در نهایت در حل معادلات تابعی کسری بکار برده می شوند.

۱-۴ تاریخچه

تاکنون مطالعات گسترده ای بر روی معادلات تابعی کسری در جهت به دست آوردن الگوریتم های مناسب برای یافتن جواب این نوع معادلات ارائه شده است [7,15,18,29]. برای این منظور ابتدا تلاش های دانشمندان برای ساخت توابع متعامد شکل گرفت، سپس این تلاش ها منجر به تولید توابع برنشتاین، لاگر،

لژاندر، چیشف، بلاک - پالس، کلاهی و مثلثی [28,2,3,17] گشت. از طرفی تقریب به وسیله توابع متعامد عامل بسیار موثری در جهت حل این نوع معادلات می باشد که در این روش ها ابتدا جواب مسئله به صورت بسطی از توابع متعامد در نظر گرفته می شود سپس با استفاده از ماتریس های عملیاتی معادله به یک دستگاه جبری تبدیل می شود [1,10] و در نهایت با تعیین جواب دستگاه به تقریبی از جواب مسئله مد نظر رسیده می شود. در سال های بعد در جهت ارتقاء هر چه بهتر کارایی روش های عددی روشهای مبتنی بر نظریه موجک ها مطرح گردید که اولین بار آلفرد هار^۱ استفاده از موجک ها را اعتبار بخشید، در سال ۱۹۸۲ استرومبرگ^۲ به توسعه موجک های متعامد یکپارچه پرداخت و در سال ۱۹۸۶ استفان مالات^۳ و میر^۴ برای اولین بار ایده آنالیز چند ریزه ساز را معرفی نمودند و به سرعت این علم رشد و توسعه یافت. زمینه ی اصلی و کاربردی نظریه موجک ها در پردازش سیگنال ها و فشرده سازی تصاویر و همچنین استفاده از موجک ها برای تجزیه و تحلیل مسائل محاسباتی پیچیده بخصوص حل انواع معادلات دیفرانسیل پاره ای از مرتبه ی کسری می باشد [2,3,4,9,14,16,17,19,20,32,33,34]. در دهه های اخیر در جهت پیشرفت روش های عددی در حل این نوع معادلات، روش های ترکیب توابع و همچنین ترکیب توابع و موجک ها [9,10] معرفی و استفاده شده است که با توجه به جواب های به دست آمده به وضوح روشن است که این روش ها کارایی بهتری نسبت به سایر روش ها دارند.

۱-۵ نوع آوری رساله

تاکنون از توابع متعامدی که از ترکیب چندین تابع مختلف حاصل می شود در روش های طیفی در جهت حل معادلات دیفرانسیل انتگرال کسری استفاده بسیاری شده است. همچنین موجک ها نیز بر اساس توابع مختلف معرفی و بررسی شده اند. در رساله حاضر به بیان توابع ترکیبی و موجکی پرداخته می شود و ماتریس های عملگر آنها مورد نقد و بررسی قرار گرفته می شوند و با استفاده از آنها معادلات تابعی کسری به دستگاه معادلات جبری تبدیل می شود، که حل این دستگاه معادلات به مراتب بسیار ساده تر از حل معادله اصلی می باشد.

¹ Alfered Haar

² Stromberg

³ Stephan Mallat

⁴ Mir

رساله حاضر در شش فصل تنظیم شده است. در ادامه شرح مختصری از موضوعات مطرح شده در این شش فصل ارائه می شود.

فصل اول: در این فصل به موضوعاتی نظیر بیان مسئله، اهمیت موضوع، تاریخچه، نوآوری رساله و ساختار رساله پرداخته شده است.

فصل دوم: این فصل به بیان مفاهیم و تعاریف مقدماتی اختصاص داده شده است که شامل شش بخش مهم و پایه ای است که در آن موضوعات حسابان کسری، چندجمله ای های متعامد و ویژگی های آنها، روش های طیفی، چندجمله ای های برنشتاین و ویژگی های آنها و چند جمله ای های برنشتاین متعامد مطرح و بررسی شده است.

فصل سوم: فصل سوم به معرفی موجک برنشتاین نرمال شده و ویژگی های آن در سه بخش عمده اختصاص داده شده است. که شامل موارد زیر است.

- موجک: در این بخش مفاهیم آنالیز چندریزه ساز و چگونگی ساختن پایه موجکی و در نهایت موجک برنشتاین متعامد مورد مطالعه قرار گرفته شده است.
- تقریب تابع بوسیله موجک برنشتاین متعامد: در این بخش چگونگی تقریب تابع برحسب موجک برنشتاین متعامد شرح داده شده است.
- آنالیز خطا: در این بخش قضایا و لم هایی برای یافتن کران بالای خطا برای تقریب موجک برنشتاین متعامد ارائه شده است.

فصل چهارم: این فصل از رساله به سه بخش عمده تقسیم می شود و در آن ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه صحیح و کسری مورد مطالعه قرار گرفته شده است.

- در بخش نخست به معرفی توابع بلاک - پالس، خصوصیات آنها و همچنین ماتریس عملیاتی انتگرال آنها پرداخته می شود.
- در بخش دوم ماتریس عملیاتی انتگرال برنشتاین از مرتبه صحیح شرح داده می شود.

- در بخش سوم ماتریس عملیاتی انتگرال برنشتاین از مرتبه کسری مورد بررسی قرار می گیرد.
- فصل پنجم: این بخش به حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از موجک برنشتاین اختصاص دارد که در سه بخش تنظیم شده است.
- در بخش اول روش به صورت کامل شرح داده می شود.
 - بخش دوم الگوریتم روش ارائه می شود.
 - بخش سوم به ارائه مثال های عددی و مقایسه روش پیشنهادی رساله حاضر با سایر روش ها اختصاص دارد.
- فصل ششم: در این فصل به نتایج حاصل از این رساله اشاره شده و سپس پیشنهاداتی برای پژوهش های آتی در این زمینه ارائه می شود.

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

بررسی عددی جواب های معادلات تابعی کسری نیاز به شناخت روش های عددی مناسب و اطلاعات پایه ای در مورد توابع متعامد و حسابان کسری دارد، لذا در این فصل از رساله مفاهیم بنیادی که پایه و اساس بخش های آتی رساله می باشد و کمک شایانی به درک روش ارائه شده در رساله دارد مطرح شده است. شایان ذکر است که تعاریف و قضایای این بخش از مراجع [21, 26] و رفرنس [۱،۲،۳] گرفته شده است.

۲-۲ حسابان کسری

[۱] حسابان کسری در واقع تعمیمی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مرتبه صحیح به مرتبه دلخواه است. در این بخش مفاهیم مهمی که در بحث مشتق و انتگرال کسری نقش اساسی ایفاء می کند، بیان می شود.

۱-۲-۲ تابع گاما

تابع گاما^۵ یکی از مهم ترین و اساسی ترین توابع در معرفی حساب کسری می باشد که به صورت (۱-۲) معرفی می شود، اگر $\text{Re}(z) > 0$ ، انتگرال (۱-۲) به طور مطلق همگراست.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1-2)$$

یکی از مهمترین ویژگی تابع گاما عبارت است از $\Gamma(z+1) = z \Gamma(z)$ ، که اگر $n \in \mathbb{N}$ آنگاه $\Gamma(n+1) = n!$. تعاریف مختلف تابع گاما به شرح زیر است:

• تعریف حدی تابع گاما:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \text{Re}(z) > 0.$$

• تعریف اویلر (تعریف حاصلضربی) تابع گاما:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z+1)\dots(z+n)} = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z.$$

• تعریف وایراشتراس^۶ تابع گاما:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{(z+1)\dots(z+n)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}}.$$

⁵ Gamma function

⁶Weierstrass

که $\gamma \approx 0.5772$ ، ثابت اویلر-ماسکرونی^۷ می باشد.

۲-۲-۲ تابع بتا

تابع بتا^۸ یکی از توابع مهم در حسابان کسری می باشد که به صورت (۲-۲) تعریف می شود

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(w) > 0. \quad (2-2)$$

۳-۲-۲ لم رابطه بین تابع گاما و بتا

فرض کنید تابع گاما از معادله (۱-۲) و تابع بتا از معادله (۲-۲) حاصل شده باشد، آنگاه رابطه بین تابع گاما و بتا به فرم (۳-۲) می باشد.

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \quad (3-2)$$

۴-۲-۲ تابع میتاگ-لفلر

تابع میتاگ-لفلر^۹ یک توسیع از تابع نمایی e^x است و این تابع نقش اساسی در محاسبات کسری بازی می کند و نمایش آن با یک پارامتر و دو پارامتر به ترتیب به صورت (۲-۴) و (۵-۲) می باشد

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0, \quad (4-2)$$

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (5-2)$$

در سرتا سر این رساله فرض براین است که $\Omega = [\alpha, +\infty)$ یک بازه روی محور حقیقی $\mathbb{R}$ و تابع f روی بازه Ω تکه ای پیوسته و روی هر زیر بازه متناهی از آن، انتگرال پذیر باشد.

⁷Euler-Mascheroni

⁸Beta function

⁹Mittage-Leffler function

۵-۲-۲ انتگرال کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید تابع f روی بازه $J = [0, \infty)$ تکه ای پیوسته و بر هر زیر بازه ی متناهی از J انتگرال پذیر باشد. در این صورت انتگرال کسری ریمان-لیوویل^{۱۰} تابع f از مرتبه $\alpha \geq 0$ به صورت (۶-۲) با خاصیت (۷-۲) تعریف می شود (* نماد پیچشی است):

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x^{\alpha-1} * f(t)), \quad \alpha > 0, \quad (6-2)$$

$$J^0 f(x) = f(x), \quad \alpha = 0,$$

$$J^\alpha x^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} x^{\alpha+\gamma}, \quad \gamma > -1. \quad (7-2)$$

۳-۲ مشتقات کسری

تعاریف متعدد از مشتقات کسری منجر به کارایی بیشتر آنها در مسائل مختلف می شود. در این بخش ابتدا مشتق کسری ریمان-لیوویل معرفی شده است. اگر چه تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل نقش مهمی در توسعه نظریه مشتق و انتگرال کسری داشته است، ولی متأسفانه تکنولوژی مدرن در مسایل کاربردی به تعریف هایی از مشتق کسری نیاز دارد که اجازه ی استفاده از شرایط اولیه ی فیزیکی قابل تفسیر مثل $f(t_0)$ و $f'(t_0)$ و ... را بدهد و مشتق ریمان-لیوویل به دلیل ثابت گرفتن این شرایط اولیه و عدم انعطاف فیزیکی آن در این زمینه، ناکارآمد است. از این رو در ادامه به تعریف مشتق کسری کاپوتو پرداخته می شود تا بتوان بعضی از مسائل که نیاز به بیان و تفسیر شرایط اولیه دارند به راحتی بررسی شود.

۱-۳-۲ مشتق کسری ریمان-لیوویل

مشتق کسری ریمان-لیوویل تابع f از مرتبه $\alpha \geq 0$ به صورت (۸-۲) تعریف می شود

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} (J^{m-\alpha} f(t)), \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8-2)$$

با توجه به تعریف (۶-۲)، خصوصیات زیر را داریم

¹⁰Riemann-Liouville fractional integral

$$1. D^{\alpha} J^{\alpha} f(t) = f(t), \quad (9-2)$$

$$2. J^{\alpha} D^{\alpha} f(t) = f(t) - \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(0^+) \frac{t^i}{i!}. \quad (10-2)$$

مشتق و انتگرال ریمان نقش بسیار مهمی در پیشرفت مسائل نظری و محض حسابان کسری داشته است. اما چون حل معادلات با مشتقات کسری ریمان به شرایط اولیه با مشتقات کسری نیاز دارد، نتوانست در کاربرد به ویژه در حل معادلات کسری رشد چندانی داشته باشد. با توجه به پیشرفتهای جدید علوم و یافتن کاربردهایی از مشتقات کسری در مدل سازی پدیده ها و به یک تعریف از مشتق کسری نیاز بود که بتواند بهتر پدیده ها را مدل بندی کند و با شرایط اولیه مسئله ها نیز سازگار باشد. از این رو کاپوتو مشتق کسری جدیدی را به صورت زیر معرفی کرد.

۲-۳-۲ مشتق کسری کاپوتو

مشتق کسری کاپوتو^{۱۱} تابع f از مرتبه $\alpha > 0$ به صورت (۱۱-۲) تعریف می شود

$$D^{\alpha} f(x) = J^{m-\alpha} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt, \quad (11-2)$$

که در آن $m-1 < \alpha \leq m, m \in N$ و $x > 0$ می باشد. این مشتق دو خاصیت مهم (۱۲-۲) را دارا می باشد

$$D^{\alpha} J^{\alpha} f(x) = f(x),$$

$$J^{\alpha} D^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0^+) \frac{x^k}{k!}, \quad x > 0. \quad (12-2)$$

۲-۳-۳ ویژگی های مشتق و انتگرال کسری کاپوتو و ریمان-لیوول

• خاصیت خطی بودن:

فرض کنید ξ عملگر مشتق و یا انتگرال کسری باشد و همچنین μ, λ اعداد حقیقی باشند آنگاه داریم

$$\xi(\mu f(x) + \lambda g(x)) = \xi \mu f(x) + \xi \lambda g(x).$$

¹¹Caputo's definition of fractional derivative

- خاصیت عملگرهای معکوس

$$D^\alpha J^\alpha f(x) = f(x),$$

$$J^\alpha D^\alpha f(x) = J^{\alpha-\beta} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)}, \quad \alpha \geq \beta, m-1 < \alpha \leq m, m \in N.$$

- قانون نماها

فرض کنید f تابعی پیوسته و $\alpha, \beta > 0$ به طوری که $m-1 < \alpha \leq m$ و $n-1 < \beta \leq n$ و

$n, m \in N$ آنگاه به ازای هر x روابط زیر برقرار است

$$J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x) = J^\beta J^\alpha f(x).$$

$$D^\alpha (J^\beta) = \begin{cases} J^{\beta-\alpha} & \beta \geq \alpha \geq 0, \\ J^{\alpha-\beta} & \alpha \geq \beta \geq 0. \end{cases}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (D^\alpha f(x)) = D^{\alpha+n} f(x), \quad n \in N.$$

و اما چند ویژگی دیگر

- مشتق کسری کاپوتو تابع ثابت، عدد صفر است.

- مشتق کسری ریمان-لیوول تابع ثابت، عبارت $D^\alpha f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}$ است به طوری که $0 \leq \alpha < 1$ باشد.

- در برقراری خاصیت جابجایی در مشتقات، در مشتق کاپوتو باید به ازای $k = n, n+1, \dots, m$ شرط $f^{(k)}(a) = 0$ برقرار باشد.

- در برقراری خاصیت جابجایی در مشتقات، در مشتق ریمان-لیوول بایستی به ازای $k = 0, 1, \dots, m$ شرط $f^{(k)}(a) = 0$ برقرار باشد.

۲-۳-۴ مشتق جزئی کسری کاپوتو

مشتق جزئی کسری کاپوتو تابع $u(x, t)$ از مرتبه $\alpha > 0$ به صورت (۲-۱۳) و (۲-۱۴) تعریف می شود

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-s)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(s, t)}{\partial s^m} ds, \quad m-1 < \alpha \leq m, \quad (2-13)$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(x, s)}{\partial s^m} ds, \quad m-1 < \alpha \leq m. \quad (14-2)$$

۲-۴ چند جمله ای های متعامد

چند جمله ای های متعامد دارای کاربردهای بسیاری در علوم مختلف می باشند. این نوع چند جمله ای ها به دنباله های نامتناهی متشکل از چند جمله ای حقیقی عمود بر هم اطلاق می شود. در فضاهای برداری گوناگون، شکل گیری مفاهیم هندسی نظیر نرم، زاویه و تعامد از چگونگی تعریف ضرب داخلی بردارها در آن شروع می شود. چند جمله ای های متعامد نقش اساسی را در روشهای طیفی ایفاء می کنند، لذا در این زیر بخش به بررسی برخی ویژگی های و تعاریف آنها پرداخته می شود [۳].

۲-۴-۱ توابع متعامد

فرض کنید توابع f و g بر بازه $[a, b]$ تعریف شوند و تابع ω بر بازه (a, b) پیوسته و مثبت باشد. حاصلضرب عددی f و g نسبت به تابع وزن ω ، توسط انتگرال (۲-۱۵) و حاصلضرب داخلی آنها با نماد (f, g) نمایش داده می شود.

$$(f, g) = \int_a^b \omega(x) f(x) g(x) dx. \quad (15-2)$$

۲-۴-۲ تعریف: توابع f و g را نسبت به تابع وزن ω بر بازه (a, b) متعامد گویند هر گاه $(f, g) = 0$.

۲-۴-۳ تعریف: دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ با $\deg(\phi_n) = n$ را نسبت به تابع وزن ω یک دنباله متعامد گویند هر گاه

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \omega(x) \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \gamma_n \delta_{nm}, \quad (16-2)$$

که در آن $\|\phi_n\|_{L_\omega^2(a,b)}^2 = \int_a^b \omega(x) (\phi_n(x))^2 dx$ غیر صفر و δ_{nm} دلتای کرونکر می باشد.

۲-۴-۴ تعریف: دنباله توابع $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ که در آن ϕ_n یک چند جمله ای از درجه n است، یک مجموعه ساده از چند جمله ای ها نامیده می شود.

۲-۴-۵ قضیه: اگر $\{\phi_m(t)\}_{m=0}^n$ یک دنباله از چندجمله ای های متعامد و p_n از درجه ی n باشد، آنگاه p_n را می توان به طور منحصر به فردی به وسیله ی ترکیب خطی از چند جمله ای های متعامد $\{\phi_m\}_{m=0}^n$ نوشت.

۲-۴-۶ خواص چند جمله ای های متعامد

[۳] چند جمله ای های متعامد دارای خواص زیر می باشند

- تقارن
- صفرها
- تعامد گسسته
- خواص انتهایی
- روابط بازگشتی

۲-۴-۷ فرایند یکا متعامد سازی گرام-اشمیت

[۳] فرض کنید بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_n$ بردارهای پایه فضای برداری n بعدی V_1 هستند، اگر بردارهای پایه $v_1, v_2, \dots, v_n$ متعامد باشند، به آن مجموعه پایه های متعامد گویند و هر بردار مانند u متعلق به فضای برداری

بعدی V_1 را می توان به صورت ترکیب خطی نمایش داد،

$$u = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_n \rangle}{\|v_n\|^2} v_n$$

اگر بردارهای پایه $v_1, v_2, \dots, v_n$ یکا متعامد باشند به آن پایه های یکا متعامد گویند، در این صورت هر بردار مانند u متعلق به فضای برداری n بعدی V_1 را می توان بصورت ترکیب خطی زیر نمایش داد،

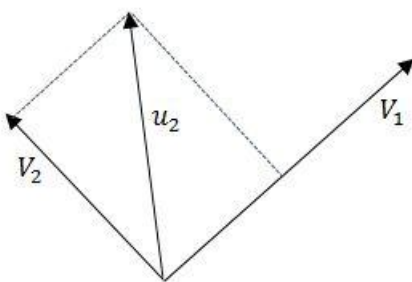
$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

بطور نمونه بردارهای پایه استاندارد $e_1, e_2, \dots, e_n$ در فضای برداری R^n تشکیل یک مجموعه پایه های یکا متعامد را می دهند. حال چگونه می توان بردارهای پایه موجود را بصورت پایه های متعامد و یکا متعامد تبدیل

کرد. یکی از روش هایی که برای تبدیل بردارهای پایه به بردارهای پایه متعامد و یکامتعامد استفاده می شود به فرایند گرام اشمیت معروف است در ادامه به شرح آن می پردازیم. ایده اساسی بکار گرفته شده در این فرآیند را می توان بصورت زیر خلاصه کرد، دو بردار مخلف صفر v_1 و u_2 را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید، که لزوماً متعامد نیستند. هدف این است که با زدودن برخی از بردارهایی به شکل $\alpha_1 v_1$ از بردار u_2 آن را به یک بردار v_2 به صورت $v_2 = u_2 - \alpha_1 v_1$ تبدیل کنیم، به نحوی که بردارهای v_1 و v_2 متعامد باشند. به عبارتی ما به دنبال یافتن اعداد حقیقی مناسبی مانند α_1 هستیم، بطوریکه شرط زیر برقرار گردد

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, u_2 - \alpha_1 v_1 \rangle = 0$$

تعبیر هندسی مسئله بصورت (۱-۲) مطرح می گردد



شکل (۱-۲): نمایش هندسی دو بردار عمود بر هم

از این رو می توان نوشت،

$$\langle v_1, v_2 \rangle - \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 0 \rightarrow \alpha_1 = \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} = \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2}$$

بنابراین انتخاب α_1 بصورت بالا مناسب خواهد بود و در نتیجه دو بردار v_1, v_2 متعامد خواهد بود،

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle v_1, u_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

در حالت کلی بردارهای غیر صفر $v_1, v_2, \dots, v_m$ و بردار غیر صفر u_{m+1} را در فضای برداری V_1 در نظر بگیرید. می خواهیم یک ترکیب خطی بصورت $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_m v_m$ بیابیم بطوریکه بردار v_{m+1} که بصورت زیر تعریف می گردد، بر هر یک از بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_m$ عمود باشد،

$$v_{m+1} = u_{m+1} - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_m v_m$$

به عبارتی در اینجا باید اسکالرهای حقیقی مناسب $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ را بیابیم، به طوریکه شرط زیر برقرار باشد،

$$\langle v_i, v_{m+1} \rangle = \langle v_i, u_{m+1} - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2 - \dots - \alpha_m v_m \rangle = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m$$

بدین ترتیب رابطه بالا به فرم

$$\langle v_i, v_{m+1} \rangle - \alpha_1 \langle v_i, v_1 \rangle - \alpha_2 \langle v_i, v_2 \rangle - \dots - \alpha_m \langle v_i, v_m \rangle = 0$$

بیان می شود بنابراین هر یک از α_i بصورت $\alpha_i = \frac{\langle v_i, u_{m+1} \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v_i, u_{m+1} \rangle}{\|v_i\|^2}$ تعریف می شوند، به این ترتیب بردار v_{m+1} با تعریف زیر بر هر یک از بردارهای $v_1, v_2, \dots, v_m$ عمود خواهد بود،

$$v_{m+1} = u_{m+1} - \frac{\langle v_1, u_{m+1} \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, u_{m+1} \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 - \dots - \frac{\langle v_m, u_{m+1} \rangle}{\|v_m\|^2} v_m$$

۲-۵ روش های طیفی

[۲] به طور کلی روش های تقریبی که برای حل معادلات دیفرانسیل استفاده می شوند به دو دسته روش های موضعی و روش های بسط تقسیم می شوند، که در روش های موضعی ابتدا دامنه تعریف به تعداد متناهی زیر دامنه تقسیم می شود سپس در هر زیر دامنه، جواب مسئله با استفاده از توابع پایه ای مناسب تقریب زده می شود، در روش دوم که به روش بسط معروف است، جواب مسئله با استفاده از توابع پایه ای مناسب در سرتاسر دامنه تعریف مسئله تقریب زده می شود. روش های طیفی یکی از معروفترین روش های بسط در حل معادلات دیفرانسیل می باشد. در این روش ها تابع جواب به صورت یک سری متناهی از توابع پایه در سرتاسر دامنه تعریف مسئله تقریب زده می شود. نکته حائز اهمیت در بالا بردن دقت در این روش های یافتن توابع پایه ای

مناسب می باشد و اگر توابع پایه ای طیفی به طور مناسب انتخاب شوند آنگاه این روش ها از دقت بسیار بالایی برخوردار می شوند به این صورت که خطای حاصل از تقریب سری می تواند سریع تر از هر توان منفی تعداد عناصر پایه به کار رفته در تقریب به صفر میل کند که این خصوصیت روش های طیفی به دقت طیفی یا دقت نمایی معروف است.. به علت این دقت بالا، روش های طیفی در دهه های اخیر بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. از معروف ترین این روش ها می توان به روش هم محلی^{۱۲}، روش گالرکین^{۱۳}، روش پترو-گالرکین^{۱۴} و روش تاو^{۱۵} اشاره داشت. در روش های طیفی انتخاب نوع روش به طور اساسی، به چگونگی کاربرد آنها بستگی دارد. کاربرد روش های هم محلی روی مسائل خطی و یا مسائلی که ضرایب پیچیده دارند بسیار دیده می شود و مزیت روش گالرکین در تحلیل مناسب و تخمین خطای مطلوب می باشد و روش تاو در معادلات غیر خطی زوج با شرایط مرزی غیر صفر کاربرد فراوان دارد.

۲-۵-۱ تعریف بنیادی روش طیفی

[۲] ایده اساسی روش های طیفی در آن است که، تابع u به عنوان جوابی از معادله دیفرانسیل به شکل بسط متناهی از توابع متعامد ϕ_k به صورت (۲-۱۷) تقریب زده شود.

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^N u_k \phi_k(x), \quad N, k \in \mathbb{N}, \quad (2-17)$$

که در آن ضرایب u_k مجهول و توابع پایه ای $\{\phi_k\}_{k=0}^N$ غالباً پایه های متعامد مانند چبیشف، لژاندر و... از فضای چند جمله ای های $\rho_N[a, b]$ در نظر گرفته می شوند.

قابل توجه است که در رساله حاضر $\rho_N[-1, 1]$ فضای همه ی چند جمله ای های از درجه ی کمتر یا مساوی N و زیر فضای $\rho_N^m[-1, 1]$ از فضای $\rho_N[-1, 1]$ است که در آن شرایط مرزی اعمال شده باشد.

¹²Collocation method

¹³Galerkin method

¹⁴Petrove-Galerkin method

¹⁵Tau meth

۲-۵-۲ ساختار روش طیفی

معادله دیفرانسیل یک بعدی (۱۸-۲) را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \eta, \\ Bu(x) = g, & x \in \partial\eta. \end{cases} \quad (18-2)$$

که در آن $\partial\eta$ نشان دهنده ی مرز بازه η ، $L(\bullet)$ عملگر دیفرانسیل و B عملگر کراندار است که شرایط مرزی مربوط به معادله (۲۰-۲) را در بر دارد. u جواب معادله است که تقریبی از آن در زیر فضایی با بعد متناهی ρ_N از فضای هیلبرت قرار می گیرد، بدون اینکه به کلیت مسئله هیچ خللی وارد شود فرض کنید $\eta = [-1, 1]$ است. اکنون پایه ای از $(\phi_0, \dots, \phi_N)$ را که تابع بسط (توابع کوششی) نامیده می شود در نظر گرفته و جواب u را با استفاده از این توابع بسط داده می شود، در واقع ρ_N فضای همه ی چند جمله ای های از درجه ی کمتر یا مساوی N و زیر فضای $\rho_N^m[-1, 1]$ از فضای $\rho_N[-1, 1]$ که در آن شرایط مرزی اعمال شده است، می باشند. از طرفی تابع آزمون خانواده ای از توابع بسط است که مقدار خطا را به صفر می رساند، این تابع برای به صفر رساندن تابع مانده (۱۹-۲) استفاده می شود.

$$R_N = Lu_N(x) - f(x), \quad (19-2)$$

در معادله (۱۹-۲)، R_N تابع مانده نامیده می شود. ایده روشهای طیفی در آن است که تابع مانده بایستی در شرط (۲۰-۲) صدق کند.

$$(R_N, \varphi_j) = \int_{-1}^1 \omega(x) R_N(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (20-2)$$

که در آن ω تابع وزن و φ_j توابع آزمون می باشند، روشن است که معادله (۲۰-۲) شامل $N+1$ معادله و $N+1$ مجهول است.

۲-۵-۳ روش هم محلی

در این روش نقاط گره ای $\{x_j\}_{j=0}^N$ معمولاً یکی از مجموعه نقاط انتگرال گیری گاوسی انتخاب می شود و $N+1$ نقطه ی گره ای جزء مجموعه نقاط $[-1,1]$ و دستگاه معادلات (۲-۲۱) به دست می آید، توجه شود که در این روش توابع آزمون، توابع انتقال یافته ی دیراک $\varphi_j(x) = \delta(x - x_j)$ و $\omega(x) = 1$ می باشد.

$$\begin{cases} Lu(x_j) = f(x_j), & M \leq j \leq N, \\ Bu(x_k) = g, & k = 0, 1, \dots, M-1. \end{cases} \quad (2-21)$$

۲-۵-۴ روش گلرکین

در این روش توابع پایه و توابع آزمون یکسان ($\phi = \varphi$) در نظر گرفته می شوند و بایستی توابع پایه ای $\{\phi_k(x)\}_{k=0}^N$ به گونه ای اختیار شود که در شرایط مرزی (۲-۲۲) صدق کند.

$$B\phi_j = g, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (2-22)$$

از طرفی بر طبق ایده روش های طیفی تابع مانده بایستی در شرایط (۲-۲۲) صدق کند و از طرفی در این روش $\phi = \varphi$ است، لذا معادله (۲-۲۳) حاصل می شود، که این بدان معناست که در روش گلرکین تابع مانده R_N بر فضای $\rho_N^m[-1,1]$ عمود است.

$$\int_{-1}^1 \omega(x) R_N(x) \phi_j(x) dx = 0, \quad \phi_j \in \rho_N^m[-1,1]. \quad (2-23)$$

۲-۵-۶ روش تاو

روش تاو در واقع بهبودی از روش گلرکین است که بیشتر برای مسائل مقدار مرزی غیر متناوب به کار می رود و مانند روش گلرکین تابع آزمون برابر با توابع پایه ای می باشد و تنها تفاوت آن با روش گلرکین در آن است که شرایط مرزی نیز به عنوان محدودیت اعمال می گردد. به عبارت دیگر نیازی به این نیست که توابع آزمون در شرایط مرزی صدق کنند.

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \omega(x) R_N(x) \phi_j(x) dx = 0, & 0 \leq j \leq N-M+1, \\ Bu(x_k) = g, & k = 0, 1, \dots, M-1. \end{cases} \quad (24-2)$$

۶-۲ چند جمله ای های برنشتاین

سرج ناتونویچ برنشتاین^{۱۶} اولین فردی بود که چند جمله ای های برنشتاین را در سال ۱۹۱۲ به جهانیان معرفی نمود. ایده ارائه آنها بر اساس یک برهان احتمالاتی به این صورت بیان شد که فرض کنید پیشامدی قابل تکرار با دو نتیجه احتمالی E و F و با احتمال وقوع $\frac{1}{2}$ موجود باشد. حال فرض کنید احتمال وقوع پیشامد E به صورت $t \in [0,1]$ باشد، لذا احتمال وقوع پیشامد F برابر با $1-t$ است. در نتیجه اگر در M تکرار مکرر m بار E رخ دهد پس $M-m$ بار رخ دادن F در هر بار تکرار برابر است با $t^m (1-t)^{M-m}$. لذا چند جمله ای های برنشتاین از درجه M روی بازه $[0,1]$ با رابطه (۲۵-۲) تعریف می شود

$$B_{m,M}(t) = \binom{M}{m} t^m (1-t)^{M-m}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (25-2)$$

در این رابطه به ازای $m < 0$ یا $m > M$ $B_{m,M}(t) = 0$ و همچنین $\binom{M}{m} = \frac{M!}{m!(M-m)!}$ در صورتی که بخواهیم تعریف را برای هر بازه دلخواه $[a,b]$ گسترش دهیم، معادله (۲۶-۲) را داریم.

$$B_{m,M}(t) = \binom{M}{m} \frac{(t-a)^m (b-t)^{M-m}}{(b-a)^M}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (26-2)$$

در معادله (۲۸-۲) نیز به ازای $m < 0$ یا $m > M$ $B_{m,M}(t) = 0$ می باشد.

۱-۶-۲ قضیه: [12] چند جمله ای های برنشتاین از درجه M ، پایه ای برای فضای چند جمله ای های با درجه کمتر یا مساوی M تشکیل می دهند.

¹⁶Natanovich Sergei Bernstein

۲-۶-۲ ویژگی های چند جمله ای های برنشتاین

[۳] برخی از ویژگی های مهم این چند جمله ای ها به صورت زیر است.

- رابطه بازگشتی: یکی از ویژگی های مهم چند جمله ای های برنشتاین آن است که می توان چند جمله ای های برنشتاین از درجه M را به صورت ترکیب دو چند جمله ای برنشتاین از درجه $M-1$ به رابطه (۲۷-۲) نوشت.

$$B_{m,M}(t) = (1-t)B_{m,M-1}(t) + t B_{m-1,M-1}(t). \quad (27-2)$$

- نامنفی بودن: هر چند جمله ای برنشتاین به ازای $0 \leq t \leq 1$ بر روی بازه $[0,1]$ نامنفی است و داریم

$$0 \leq B_{m,M}(t) \leq 1. \quad (28-2)$$

- یکی از ویژگی های مهم چند جمله ای های برنشتاین از درجه M ، آن است که پایه ای برای فضای چند جمله ای های با درجه کمتر یا مساوی M تشکیل می دهند.

- افراز واحد: به ازای $0 \leq t \leq 1$ ، $M+1$ ، چند جمله ای برنشتاین از درجه M ، تشکیل یک افراز واحد می دهد.

$$\sum_{m=0}^M B_{m,M}(t) = 1. \quad (29-2)$$

- تقارن: این چند جمله ای ها بر حسب t ، $1-t$ ، به صورت معادله (۳۰-۲) متقارن هستند.

$$B_{m,M}(t) = B_{M-m,M}(1-t). \quad (30-2)$$

- مقادیر ابتدا و انتها: در ابتدا و انتهای بازه مقادیر چند جمله ای های برنشتاین به صورت (۳۱-۲) است.

$$B_{m,M}(0) = \delta_{0,m}, B_{m,M}(1) = \delta_{M,m}. \quad (31-2)$$

- دقت خطی: برای چند جمله ای های برنشتاین ترکیب خطی به صورت (۳۲-۲) وجود دارد.

$$\sum_{m=0}^M \frac{m}{M} B_{m,M}(u) = u. \quad (32-2)$$

- چند جمله ای های برنشتاین از درجه m مستقل خطی هستند.
- حاصلضرب دو چند جمله ای از درجه m بر حسب درجات بالاتر به صورت $(33-2)$ است.

$$B_{i,m}(t)B_{j,m}(t) = \frac{\binom{m}{i}\binom{m}{j}}{\binom{2m}{i+j}} B_{i+j,2m}(t), \quad i, j = 0, 1, \dots, m. \quad (33-2)$$

۲-۶-۳ روابط مشتق

رابطه مشتق به صورت ترکیب خطی از چند جمله ای های برنشتاین درجه ی $n-1$ به صورت $(34-2)$ بیان می شود

$$\frac{d}{dt} B_{m,M}(t) = \frac{n}{b-a} [B_{m-1,M-1}(t) - B_{m,M-1}(t)], \quad (34-2)$$

مشتق برای نقاط انتهایی بازه ی $[a, b]$ به صورت $(35-2)$ حاصل می شود

$$\frac{d^k}{dt^k} B_{m,M}(a) = \frac{(-1)^{m+k} M!}{(b-a)^k (M-k)!} \binom{k}{m} \delta_{m,k}, \quad k = 0, 1, \dots, M, \quad (35-2)$$

که در آن دلتای کرونکر به صورت $(36-2)$ تعریف می شود.

$$\delta_{m,k} = \begin{cases} 1 & m = k, \\ 0 & m \neq k. \end{cases} \quad (36-2)$$

۲-۶-۷ روابط انتگرالی

رابطه انتگرالی برای چندجمله ای های برنشتاین به صورت $(37-2)$ و $(38-2)$ تعریف می شود

$$\int_a^b B_{m,M}(t) dt = \frac{b-a}{M+1}, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (37-2)$$

$$\int_a^b B_{k,M}(t) B_{m,j}(t) dt = \frac{\binom{M}{k} \binom{j}{m} (b-a)}{(j+M+1) \binom{j+M}{k+m}}, \quad (38-2)$$

و انتگرال معین به صورت (39-2) حاصل می شود.

$$\int B_{m,M}(t) dt = \frac{b-a}{M+1} \sum_{j+1}^{M+1} B_{j,M+1}(t). \quad (39-2)$$

۲-۶-۸ چند جمله ای های برنشتاین متعامد

با بکاربردن فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت بر روی پایه های برنشتاین $\{B_{m,M}\}_{m=0}^M$ (فرم صریح و واضحی برای چند جمله ای های برنشتاین متعامد یکه به فرم ساده (2-40) و با تغییر متغیر بر روی بازه $[a,b]$ به فرم (2-41) حاصل می شود.

$$\tilde{B}_{m,M}(t) = (\sqrt{2(M-m)+1}) \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\binom{2M+1-k}{m-k} \binom{m}{k}}{\binom{M-k}{m-k}} B_{m-k,M-k}(t), \quad (40-2)$$

$$\tilde{B}_{m,M}(t) = \sqrt{\frac{2(M-m)+1}{b-a}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\binom{2M+1-k}{m-k} \binom{m}{k}}{\binom{M-k}{m-k}} B_{m-k,M-k}\left(\frac{t-a}{b-a}\right). \quad (41-2)$$

۲-۶-۹ تقریب توابع با استفاده از چند جمله ای های برنشتاین متعامد

فرض کنید f تابعی مربع انتگرال پذیر باشد در این صورت این تابع می تواند بر حسب پایه نرمال شده برنشتاین (2-42) بسط داده شود و c^T ، $c_{m,M}$ و $E(t)$ در معادله (2-43) مشخص شده است.

$$f_M(t) = \sum_{i=m}^M c_{m,M} \tilde{B}_{m,M}(t) = c^T E(t), \quad (42-2)$$

$$c_{m,M} = (f, \tilde{B}_{m,M}) = \int_0^1 f(t) \tilde{B}_{m,M}(t) dt, \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

$$E(t) = [\tilde{B}_{0,M}(t), \tilde{B}_{1,M}(t), \dots, \tilde{B}_{M,M}(t)]^T, \quad (2-43)$$

$$c_{m,M}^T = [c_{0,M}, c_{1,M}, \dots, c_{M,M}].$$

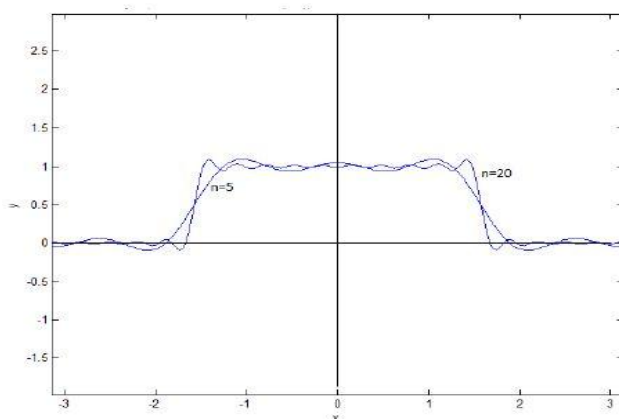
۲-۶-۱۰ پدیده گیپس

[۳] برای استفاده از سری فوریه در تخمین تابع اولیه نیاز است تعداد محدودی از جملات سری انتخاب شوند که این سری به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$S_N(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \frac{n\pi x}{L}, \quad -L < x < L$$

که S_N همان سری فوریه است با این تفاوت که در $\sum$ به جای ∞ ، N جایگذاری شده است و هر چه N بیشتر باشد مقدار به دست آمده تخمین صحیح تری از $f(x)$ در نقطه مزبور بوده و به تعبیری خطا کمتر

است. در شکل (۲-۲) تخمینی از تابع $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ به ازای N های مختلف می باشد.



شکل (۲-۲): نمایش پدیده گیپس

همانطور که در شکل مشاهده می شود اگر N به جای ۵، ۲۰ باشد مقدار فراز و نشیب به نقطه ی ناپیوستگی نزدیک می شوند، اما خطایی که در نقطه ناپیوستگی وجود دارد تغییر نمی کند، که به این پدیده، پدیده گیپس^{۱۷}

^{۱۷} Gibbs phenomenon

گفته می شود. به عبارت دیگر در نزدیکی نقاط ناپیوستگی ها یک رشته حلقوی دیده می شود که پدیده ی گپس نامیده می شود.

در این فصل تمامی تعاریف و پیش نیاز های لازم به جهت معرفی موجک برنشتاین نرمال شده بیان شده است، لذا بستر لازم برای معرفی این موجک فراهم شده در نتیجه در فصل بعد به طور مفصل به معرفی این موجک و چگونگی ساختن آن اختصاص داده شده است.

فصل سوم

موجک برنشتاین نرمال شده

و ویژگی های آن

از آنجایی که تقریب توابع به وسیله چند جمله ای های برنشتاین در یک بازه مشخص انجام می شود لذا در این بخش سعی شده است که با استفاده از موجک برنشتاین نرمال شده به تقریب توابع پرداخته شود تا با توجه به خصوصیات موجک ها بتوان توابع را در بازه هایی ریز تر تقریب زد و در نتیجه تقریب های بهتری به دست آورد. این فصل از رساله حاضر در سه بخش تنظیم شده است. بخش اول به معرفی موجک ها اختصاص داده شده است، به این صورت که در ابتدا مفهوم آنالیز چندریزه ساز سپس چگونگی ساختن پایه موجکی و در نهایت معرفی و ساخت موجک برنشتاین متعامد مورد بحث قرار گرفته شده است. در بخش دوم چگونگی تقریب تابع بر حسب موجک برنشتاین متعامد به صورت مفصل مورد بررسی قرار گرفته شده است و در بخش سوم به آنالیز خطا پرداخته شده و کران خطا برای تقریب موجک برنشتاین متعامد به دست آمده است. در سرتاسر این بخش ضرب داخلی با نماد $(\cdot, \cdot)$ معرفی شده است. این بخش از رساله با توجه به [12] نوشته شده است.

۳-۲-۱ آنالیز چندریزه ساز

[۲] اولین بار توسط میر در سال ۱۹۸۶ مفهوم آنالیز چندریزه ساز مطرح گردید. آنالیز چند ریزه ساز (MRA) یک بستر طبیعی برای فهم و درک پایه ای موجک فراهم می کند. آنالیز چندریزه ساز شامل دنباله ای مانند $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ از زیر فضاهای بسته تو در تو روی $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ می باشد که در شرایط زیر صدق می کند.

- $V_{j-1} \subset V_j$ (تودرتو بودن) ،
- $\overline{\bigcup V_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ (چگال بودن) ،
- $\bigcap V_j = \{0\}$ (تفکیک پذیری) ،
- $\forall j \in \mathbb{Z} \quad f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$ ،
- $\forall j \in \mathbb{Z} \quad f(t) \in V_0 \Leftrightarrow f(t-k) \in V_0$ ،

- $\phi \in V_0$.

که ϕ تابع مقیاس نام دارد و یک تابع مقیاس مانند $\phi \in V_0$ وجود دارد به طوری که $\{\phi(t-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه ی متعامد یکه برای فضای V_0 می باشد.

۳-۲-۲ نتیجه:

- مجموعه $\left\{2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j t - k) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \{\phi_{j,k}(t) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ به ازای هر آنالیز چندریزه ساز با تابع مقیاس ϕ ، یک پایه متعامد یکه برای V_j است و داریم $V_j = \text{span}\{\phi_{j,k}(t) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- با استفاده مکرر از شرایط آنالیز چندریزه ساز (تعریف ۳-۲-۱)، به ازای هر $j, k \in \mathbb{Z}$ داریم $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^k t) \in V_{j+k}$ به عبارت دیگر به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$ داریم $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j} t) \in V_0$.

- از آنجایی که $V_0 \subset V_1$ است، تابع مقیاس ϕ پایه ای متعامد یکه برای V_0 و V_1 می سازد.
- از آنجایی که $V_0 \subset V_1$ ، $\phi \in V_0$ و $\phi_{1,k}$ پایه ای متعامد یکه برای V_1 است لذا دنباله ای از ضرایب $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ وجود دارد به قسمی که $\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k)$ ، به این معادله، معادله دو مقیاسی^{۱۸} یا معادله پالایشی گفته می شود و h_k ضرایب فیلتر تابع مقیاس نامیده می شود و

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|h_k|)^2 = 1 \text{ و } h_k = (\phi, \phi_{1,k}) \text{ همچنین است.}$$

۳-۲-۳ ساختن پایه موجکی

[۲] با استفاده از آنالیز چندریزه ساز قادر به ساختن پایه های متعامد یکه برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ می شوند، در واقع هدف یافتن تابعی مانند ψ به قسمی است که مجموعه (۳-۱) یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ باشد.

$$\{\psi_{j,k}(t), j, k \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (۱-۳)$$

^{۱۸} Tow-scale equation

فرض کنید $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ ، آنالیز چندریزه ساز برای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ باشد که بوسیله ϕ تولید شده است. از آنجایی که

$V_j \subset V_{j+1}$ ، در نتیجه مکمل متعامد W_j برای V_j در V_{j+1} وجود دارد به قسمی که به ازای هر $j \in \mathbb{Z}$ ، معادله

(۲-۳) را داریم که در آن " $\oplus$ " نشان دهنده جمع مستقیم در فضای هیلبرت می باشد.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (۲-۳)$$

فضای W_j شامل اطلاعاتی است که فضای V_j را به V_{j+1} تبدیل می کند. با توجه به رابطه (۲-۳) رابطه (۳-۳)

(۳) حاصل می شود

$$\begin{aligned} V_{j+1} &= V_j \oplus W_j \\ &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} \oplus W_j \\ &\vdots \\ &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_j \\ &= V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^j W_j \right). \end{aligned} \quad (۳-۳)$$

از تعریف آنالیز چندریزه ساز داریم $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j} = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ ، حال اگر $j \rightarrow \infty$ ، معادله (۳-۳) به دست می آید

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) &= V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \\ &= V_0 \oplus \left(\bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j \right), \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

و همچنین با توجه به رابطه (۲-۳)، V_0 را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} V_0 &= V_{-1} \oplus W_{-1} \\ &= V_{-2} \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} \\ &\vdots \\ &= V_{-j} \oplus W_{-j} \oplus \dots \oplus W_{-1}, \end{aligned}$$

بنابراین اگر $j \rightarrow \infty$ ، بر طبق تعریف $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ است و در نتیجه $V_{-j} = \{0\}$ می شود و $\bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j = \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

و معادله (۵-۳) به دست می آید. همچنین تابعی مانند $\psi \in W_0$ وجود دارد به قسمی که مجموع انتقال های

صحیح $\{\psi(t-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای W_0 تشکیل دهد.

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathbb{Z} \quad f(t) \in W_j &\Leftrightarrow f(2^{-j}t) \in W_0, \\ \forall j \in \mathbb{Z} \quad f(t) \in W_0 &\Leftrightarrow f(t-k) \in W_0, \\ \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j &= \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \\ W_j &\perp W_i, \quad j \neq i. \end{aligned} \quad (5-3)$$

با توجه به معادله (۵-۳) می توان نتیجه گرفت که $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ یک پایه ی متعامد

یکه برای فضای W_j تشکیل می دهد. در نتیجه $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ مجموعه ای از پایه های متعامد یکه در

فضای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ می سازد و تابع ψ ، تابع موجک نامیده می شود.

از طرفی می دانیم که هر تابع $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ را می توان به صورت ترکیب خطی (۶-۳) نوشت، که این سری،

سری موجک و c_{jk} ها، ضرایب موجک نامیده می شوند. که ضرایب c_{jk} از مقادیر $(f, \psi_{j,k})$ حاصل می شوند.

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi_{j,k}(x). \quad (6-3)$$

۱-۳-۲-۳ نتیجه: از آنجایی که $\psi_{j,k} \in W_j$ و $\phi_{j,k} \in V_j$ و $(W_j \perp V_j)$ لذا می توان نتیجه گرفت که $\psi_{j,k}(t)$ بر

$\phi_{j,k}$ عمود است بنابراین به ازای هر $i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ روابط (۷-۳) حاکم است، که در آن $\delta_{j,k}$ ، دلتای

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad \text{کرونکر}^{19} \text{ است و به صورت}$$

¹⁹ Kronecker delta

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{i,k}(x) \psi_{j,\ell}(x) dx &= \delta_{i,j} \delta_{k,\ell}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(x) \phi_{j,\ell}(x) dx &= \delta_{k,\ell}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{i,k}(x) \psi_{j,\ell}(x) dx &= 0.\end{aligned}\tag{۷-۳}$$

۴-۲-۳ موجک پیوسته و گسسته

[۲] از اتساع و انتقال تابع مقیاس ϕ ، خانواده موجک‌ها به وجود می‌آیند. زمانی که پارامتر انبساط a و پارامتر انتقال b به صورت پیوسته تغییر کنند، خانواده موجک‌های پیوسته (۸-۳) حاصل می‌شود

$$\psi_{a,b}(t) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \tag{۸-۳}$$

اگر پارامترهای a و b به مقادیر گسسته محدود شود و معادله (۹-۳) اعمال شود آنگاه خانواده موجک‌های

گسسته (۱۰-۳) حاصل می‌شود که در آن، $a_0 > 1$ ، $b_0 > 0$ و k, n اعداد صحیح مثبت می‌باشند

$$a = a_0^{-k}, \quad b = nb_0 a_0^{-k}, \tag{۹-۳}$$

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{\frac{k}{2}} \psi(a_0^k t - nb_0), \tag{۱۰-۳}$$

$\psi_{k,n}$ ها در واقع یک پایه متعامد برای فضای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ می‌باشد. در حالت خاص اگر $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ باشد

آنگاه معادله (۱۱-۳) را داریم

$$\psi_{k,n}(t) = 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k t - n). \tag{۱۱-۳}$$

اکنون که موجک‌ها و چگونگی ساخت آنها شرح داده شد بستر لازم برای ساختن موجک برنشتاین متعامد

فراهم شده است لذا در (۵-۲-۳) این موجک و اجزاء آن معرفی می‌شود.

۵-۲-۳ موجک برنشتاین متعامد

یکی از موجک های بسیار مهم موجک برنشتاین متعامد است. این موجک از روی چند جمله ای های برنشتاین متعامد (رجوع شود به بخش (۸-۶-۲)) ساخته می شود و پایه ای برای فضای $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ روی $[0,1]$ تشکیل می دهد. موجک برنشتاین متعامد $\psi_{n,m}(t) = \psi(k,n,m,t)$ با متغیرهای n, m, t و k روی $[0,1]$ به صورت معادله (۱۲-۳) تعریف می شود.

$$\psi_{n,m}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \tilde{B}_{m,M}(2^k t - n), & \text{if } \frac{n}{2^k} \leq t < \frac{n+1}{2^k}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (12-3)$$

که در آن k عددی صحیح مثبت، $n = 0, \dots, 2^k - 1$ ، $m = 0, \dots, M$ درجه چندجمله ای برنشتاین متعامد M ، عددی صحیح مثبت، t زمان نرمال شده و $\tilde{B}_{m,M}$ به صورت (۱۳-۳) و یا (۱۴-۳) تعریف می شود.

$$\tilde{B}_{m,M}(t) = (\sqrt{2(M-m)+1})(1-t)^{M-m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{2M+1-k}{m-k} \binom{m}{k} t^{m-k}. \quad (13-3)$$

$$(14-3)$$

$$\tilde{B}_{m,M}(t) = (\sqrt{2(M-m)+1}) \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{\binom{2M+1-k}{m-k} \binom{m}{k}}{\binom{M-k}{m-k}} B_{m-k, M-k}(t),$$

و $B_{m,M}$ به فرم معادلات (۱۵-۳) و (۱۶-۳) بیان می شود.

$$B_{m,M}(t) = \binom{M}{m} t^m (1-t)^{M-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (15-3)$$

$$B_{m,M}(t) = \sum_{j=m}^M (-1)^{j-m} \binom{M}{m} \binom{M-m}{j-m} t^j, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (16-3)$$

$$\binom{M}{m} = \frac{M!}{m!(M-m)!} \quad \text{که در آن}$$

حال که موجک برنشتاین متعامد معرفی شد به تقریب توابع توسط این تابع پرداخته می شود و نشان داده می شود که چگونه می توان یک تابع را بر حسب موجک برنشتاین متعامد تقریب زد.

۳-۳ تقریب تابع بر حسب موجک برنشتاین متعامد

هر تابع $f(t)$ روی $[0,1]$ را می توان بر حسب موجک برنشتاین متعامد به صورت (۳-۱۷) تقریب زد

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} \psi_{n,m}(t), \quad (3-17)$$

که در آن ضرایب $c_{n,m}$ ها به صورت (۳-۱۸) محاسبه می شوند (ضرب داخلی با نماد $(\cdot)$ بر روی $L^2[0,1]$ معرفی می شود)

$$c_{n,m} = (f \cdot \psi_{n,m}) = \int_0^1 \psi_{n,m}(t) f(t) dt, \quad (3-18)$$

اگر سری نامتناهی (۳-۱۷) برش زده شود آن را به صورت (۳-۱۹) می توان نوشت (مقدار تقریبی خطای برشی $f - \Pi_M^{2^k-1} f$ در قضیه (۳-۱۶) محاسبه شده است)

$$f(t) \approx (\Pi_M^{2^k-1} f)(t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{n,m} \psi_{n,m}(t) = C^T \Psi(t) = \tilde{f}(t), \quad (3-19)$$

در معادله (۳-۱۹)، T ترانهاده، $\psi(t)$ و C ماتریس های $m' = 2^k(M+1)$ بعدی به فرم (۳-۲۰) می باشند.

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,M}, \psi_{1,0}, \dots, \psi_{1,M}, \psi_{(2^k-1),0}, \dots, \psi_{(2^k-1),M}]^T, \\ C &= [c_{0,0}, c_{0,1}, \dots, c_{0,M}, c_{1,0}, \dots, c_{1,M}, c_{(2^k-1),0}, \dots, c_{(2^k-1),M}]^T. \end{aligned} \quad (3-20)$$

در واقع موجک برنشتاین نرمال شده بر روی بازه $[0,1]$ متعامد یکه است و روشن است که

$\{\psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) : n, n' = 1, 2, \dots, 2^k - 1, m, m' = 0, 1, 2, \dots, M\}$ یک مجموعه متعامد یکه روی بازه ی

$[0,1] \times [0,1]$ تشکیل می دهد و همچنین ضرب داخلی $L^2([0,1] \times [0,1])$ $(\psi_{n,m} \psi_{n',m'}, \psi_{i,j} \psi_{i',j'})$ به صورت

$$\begin{aligned}
(\psi_{n,m} \psi_{n',m'}, \psi_{i,j} \psi_{i',j'})_{L^2([0,1] \times [0,1])} &= \int_0^1 \int_0^1 \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) \psi_{i,j}(x) \psi_{i',j'}(t) dx dt \\
&= \int_0^1 \psi_{n,m}(x) \psi_{i,j}(x) dx \times \int_0^1 \psi_{n',m'}(t) \psi_{i',j'}(t) dt \\
&= \delta_{n,i} \delta_{m,j} \delta_{n',i'} \delta_{m',j'}.
\end{aligned}$$

می باشد. اکنون می توان تابع $u \in L^2(R^2)$ که بر روی بازه $[0,1] \times [0,1]$ تعریف می شود را به صورت (۳-۲۱) بسط داد که در آن $d_{m,n,n',m'} = (u, \psi_{n,m} \psi_{n',m'})_{L^2([0,1] \times [0,1])}$ است.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{2^k-1} \sum_{m'=0}^{\infty} d_{n,m,n',m'} \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t), \quad (21-3)$$

حال تقریب قطع شده ای از سری (۳-۲۱) به صورت (۳-۲۲) در نظر گرفته می شود

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n'=0}^{2^k-1} \sum_{m'=0}^M d_{n,m,n',m'} \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) \left(\sum_{n'=0}^{2^k-1} \sum_{m'=0}^M d_{n,m,n',m'} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \psi_{n,m}(x) D_{n,m}^T \psi_{n,m}(t),
\end{aligned} \quad (22-3)$$

$D_{n,m}$ و $\psi(t)$ ماتریس های $(2^k-1)M \times 1$ ، به شرح (۳-۲۳) می باشند

$$\begin{aligned}
D_{n,m} &= (d_{n,m,1,0} \ d_{n,m,1,1} \ \dots \ d_{n,m,1,M} \ \dots \ d_{n,m,2^k-1,0} \ d_{n,m,2^k-1,1} \ \dots \ d_{n,m,2^k-1,M})^T, \\
\Psi(t) &= (\psi_{1,0}(t) \ \psi_{1,1}(t) \ \dots \ \psi_{1,M}(t) \ \dots \ \psi_{2^k-1,0}(t) \ \psi_{2^k-1,1}(t) \ \dots \ \psi_{2^k-1,M}(t))^T.
\end{aligned} \quad (23-3)$$

فرض کنید به ازای هر n که $n=0,1,2,3,\dots,2^k-1$ و Ψ_n و D_n به فرم $D_n = (D_{n,0} \ D_{n,1} \ \dots \ D_{n,M})^T$ و

$$\Psi_n(x) = (\psi_{n,0}(x) \ \psi_{n,1}(x) \ \dots \ \psi_{n,M}(x))$$

باشند، آنگاه داریم

$$u(x, t) \simeq \sum_{n=1}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \psi_{n,m}(x) D_{n,m}^T \Psi(t) = \sum_{n=1}^{2^k-1} \Psi_n(x) D_n^T \Psi(t), \quad (24-3)$$

اگر $\Psi^T(x)$ و D به صورت (۳-۲۴) تعریف شوند، آنگاه فرم ماتریسی معادله (۳-۲۴) به صورت (۳-۲۵) به دست می آید

$$\Psi^T(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_{2^k-1}(x)), \quad D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_{2^k-1} \end{pmatrix}, \quad (24-3)$$

$$u(x, t) \simeq \Psi^T(x) D \Psi(t). \quad (25-3)$$

در این معادله، D ماتریسی $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$ بعدی است و ضرایب ماتریس به صورت (26-3) حاصل می شوند.

$$c_{n,m,n',m'} = \int_0^1 \int_0^1 \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) u(x, t) dx dt, \quad n, n' = 1, 2, \dots, 2^k - 1, \quad m, m' = 0, 1, \dots, M. \quad (26-3)$$

۳-۴ آنالیز خطا

در روشهای عددی هدف از تحلیل خطا مقایسه جواب عددی با جواب دقیق است، در این بخش با توجه به استفاده از توابع متعامد هدف مقایسه جواب عددی $\Pi_M f$ با جواب دقیق f است. با توجه به [12] در این بخش فرض می کنیم که $\Pi_M f$ بهترین تقریب برای تابع f است.

$$\Pi_M f = \sum_{k=0}^M c_k \tilde{B}_{k,M} \quad \text{و} \quad f \in C^{M+1}[0,1) \quad \text{که} \quad f: [0,1) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{فرض کنید} \quad (27-3)$$

بهترین تقریب برای تابع f بر روی $S = \text{Span}\{\tilde{B}_{0,M}, \tilde{B}_{1,M}, \dots, \tilde{B}_{M,M}\}$ باشد، آنگاه کران بالای خطا به صورت (27-3) حاصل می شود که در آن $\kappa = \text{Max}_{t \in [0,1)} |f^{(M+1)}(t)|$ است.

$$\|f - \Pi_M f\|_{L^2[0,1)} \leq \kappa \frac{1}{(M+1)! 2^{2M+1}}. \quad (27-3)$$

برهان: با توجه به مرجع [12]، $\Pi_M f$ بهترین تقریب برای تابع f روی S است. از آنجایی که تابع f بر طبق فرضیات قضیه تابعی است که $M+1$ بار بطور پیوسته مشتق پذیر است، فرض کنید که $I_p f$ چند جمله ای درونیاب تابع f در نقاط $t_i, i=0,1,\dots,M$ که صفرهای $-(M+1)$ -ام چند جمله ای های برنشتاین متعامد

بر روی $t \in [0,1]$ هستند، باشد. اکنون با استفاده از خطای چند جمله ای درونیاب و ماکسیم خطای مطلق

چند جمله ای برنشتاین متعامد داریم

$$\|f - I_p f\|_{L^2[0,1]} \leq \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{d^{M+1}}{dt^{M+1}} f(t) \right| \frac{1}{(M+1)! 2^{2M+1}}.$$

لذا با توجه به معادله فوق رابطه زیر حاصل می شود

$$\|f - \Pi_M f\|_{L^2[0,1]} \leq \|f - I_p f\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{1}{(M+1)! 2^{2M+1}}.$$

۳-۴-۲ لم: به ازای هر $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ، فرض کنید $f_n : [\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}] \rightarrow \mathbb{R}$. اگر $F_n f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

باشد، به قسمی که به ازای هر $t \in [0,1]$ داشته باشیم $(F_n f_n)(t) = f_n(\frac{t+n}{2^k})$ ، آنگاه

$$\|F_n f_n\|_{L^2[0,1]}^2 = 2^k \|f_n\|_{L^2[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]}^2. \quad (۲۸-۳)$$

برهان: با استفاده از تعریف ضرب داخلی روی $\mathcal{L}^2[0,1]$ و با تغییر متغیر $x = \frac{t+n}{2^k}$ داریم

$$\begin{aligned} \|F_n f_n\|_{L^2[0,1]}^2 &= \int_0^1 |(F_n f_n)(t)|^2 dt \\ &= \int_0^1 \left| f_n\left(\frac{t+n}{2^k}\right) \right|^2 dt \\ &= 2^k \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} |f_n(x)|^2 dx \\ &= 2^k \|f_n\|_{L^2[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]}^2. \quad \square \end{aligned}$$

۳-۴-۳ کران خطا برای تقریب موجک برنشتاین متعامد

با توجه به قضیه زیر کران خطا را برای تقریب بوسیله ی موجک برنشتاین متعامد به دست آورده می شود.

۳-۴-۴ قضیه: اگر به ازای $f: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}, i=0, \dots, M$ باشد و $|f^{(i)}| \leq \kappa$ آنگاه کران بالای خطا به صورت زیر حاصل می شود.

$$\|f - \Pi_M^{2^k-1} f\|_{L^2[0,1]} \leq \frac{\kappa}{(M+1)! 2^{2M+1}}.$$

برهان: فرض کنید به ازای هر $n=0, 1, \dots, 2^k-1$ تابع $f_n: [\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}) \rightarrow \mathbb{R}$ باشد به طوری که به ازای $t \in [\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k})$ $f_n(t) = f(t)$ و در بقیه جاها برابر با صفر باشد لذا داریم $f = \sum_{n=0}^{2^k-1} f_n$. فرض کنید که تقریب تابع به صورت $\Pi_M f = \sum_{m=0}^M c_m \tilde{B}_{m,M}$ و $\Pi_M^{2^k-1} f = \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M c_{nm} \psi_{nm}$ باشد که در آن ضرایب به صورت $c_k = \int_0^1 f(t) \tilde{B}_{k,M}(t) dt$ و $c_{n,m} = \int_0^1 f(t) \psi_{n,m}(t) dt$ است، بنابراین رابطه (۳-۲۹) را داریم که در آن از تغییر متغیر $x = 2^k t - n$ استفاده شده است.

$$\begin{aligned} c_{nm} &= \int_0^1 f_n(t) \psi_{n,m}(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} f_n(t) \psi_{n,m}(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} f_n(t) 2^{\frac{k}{2}} \tilde{B}_{m,M}(2^k t - n) dt \\ &= \int_0^1 (F_n f_n)(x) 2^{\frac{k}{2}} \tilde{B}_{m,M}(x) 2^{-k} dx \\ &= 2^{-\frac{k}{2}} \int_0^1 (F_n f_n)(x) \tilde{B}_{m,M}(x) dx, \end{aligned} \quad (۳-۲۹)$$

همچنین به ازای $t \in (\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k})$ معادله (۳-۳۰) به دست می آید که در آن $x \in [0,1]$ است.

$$F_n(\psi_{n,m}(t)) = \psi_{n,m}\left(\frac{x+n}{2^k}\right) = 2^{\frac{k}{2}} \tilde{B}_{m,M}(x), \quad (۳-۳۰)$$

اکنون با استفاده از معادله (۳-۲۹) و (۳-۳۰)، معادله (۳-۳۱) به دست می آید

$$\begin{aligned}
F_n\left(\sum_{m=0}^M c_{n,m} \psi_{n,m}(t)\right) &= \sum_{m=0}^M c_{n,m} F_n(\psi_{n,m}(t)) \\
&= \sum_{m=0}^M c_{n,m} (F_n \psi_{n,m})(x) \\
&= \sum_{m=0}^M \left(\int_0^1 (F_n f_n)(x) \tilde{B}_{m,M}(x) dx \right) \tilde{B}_{m,M}(x) \\
&= \Pi_M F_n f_n.
\end{aligned} \tag{۳۱-۳}$$

با استفاده از لم (۳-۴-۲) و معادلات (۳-۲۷) و (۳-۳۱) به رابطه (۳-۳۲) می‌رسیم

$$\begin{aligned}
\| f - \Pi_M^{2^k-1} f \|_{L^2[0,1]}^2 &\leq \sum_{n=0}^{2^k-1} \| f_n - \sum_{m=0}^{2^k-1} c_{n,m} \psi_{n,m} \|_{L^2[0,1]}^2 \\
&\leq \sum_{n=0}^{2^k-1} \| f_n - \sum_{m=0}^M c_{n,m} \psi_{n,m} \|_{L^2[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]}^2 \\
&= 2^{-k} \sum_{n=0}^{2^k-1} \| F_n f_n - \Pi_M (F_n f_n) \|_{L^2[0,1]}^2 \\
&= 2^{-k} \sum_{n=0}^{2^k-1} \left(\frac{\kappa_n}{(M+1)! 2^{2M+1}} \right)^2 \leq \left(\frac{\kappa}{(M+1)! 2^{2M+1}} \right)^2,
\end{aligned} \tag{۳۲-۳}$$

که در آن $\kappa_n = \max_{t \in [\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}]} |F_n f_n^{(M+1)}(t)|$ است، بنابراین واضح است که $\kappa_n \leq \kappa$ است و اثبات کامل می‌شود. □

فصل چهارم

ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه

صحیح و کسری

در این بخش از رساله ماتریس های عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه صحیح و کسری با توجه به توابع بلاک - پالس مطرح شده است. برای این منظور بخش اول از این فصل به معرفی توابع بلاک - پالس، خصوصیات آنها، چگونگی تقریب توابع با استفاده از آنها و همچنین ماتریس عملیاتی انتگرال توابع بلاک - پالس اختصاص داده شده است و در نهایت با توجه به توضیحات ارائه شده در بخش اول، در بخش دوم و سوم ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه صحیح و کسری معرفی و به طور مفصل شرح داده شده است. این بخش از رساله با توجه به مرجع [13] نوشته شده است.

۴-۲ توابع متعامد تکه ای ثابت بلاک-پالس

توابع متعامد تکه ای ثابت مجموعه ای از توابع هستند که به عنوان ابزار مفیدی در آنالیز عددی و بخصوص در مهندسی برق و کنترل بسیار مورد استفاده قرار گرفته می شوند. این مجموعه از توابع برای اولین بار در سال ۱۹۶۹ توسط هارموس^{۲۰} به مهندسان برق و الکترونیک معرفی شد. سپس در سال ۱۹۷۶ توسط دانشمندان بزرگی همچون گپلا سامی^{۲۱} و دیک شاتول^{۲۲} مورد مطالعه قرار گرفته شدند و در سال ۱۹۷۷، چن^{۲۳} و تسای^{۲۴} ماتریس های عملیاتی انتگرال این توابع را با هدف کاهش پیچیدگی عملیات در حل مسائل کنترل به دست آوردند. از جمله توابع مهم توابع تکه ای ثابت می توان به توابع بلاک - پالس، هار، رادماچر و والش اشاره داشت. از آنجایی که در رساله حاضر تمرکز اصلی بر روی توابع بلاک - پالس است لذا برای آشنایی بیشتر به معرفی این تابع در حالت یک بعدی و دو بعدی پرداخته شده است و سپس ویژگی های آنها مورد بررسی قرار گرفته شده است.

۴-۲-۱ توابع بلاک - پالس یک بعدی

یک مجموعه m' تایی از توابع بلاک - پالس ($BPFs$)، به ازای $j = 0, 1, \dots, m' - 1$ ، بر روی بازه $[0, T]$ به صورت (۴-۱)، تعریف می شوند.

^{۲۰} Harmos
^{۲۱} Geplasami
^{۲۲} Decshatolo
^{۲۳} Chen
^{۲۴} Tsai

$$b_j(t) = \begin{cases} 1, & \frac{jT}{m'} \leq t < \frac{(j+1)T}{m'}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (۱-۴)$$

که در آن m' ، عددی صحیح و مثبت است، حال اگر $T = 1$ باشد آنگاه BPFs بر روی $[0,1)$ تعریف می شود.

۴-۲-۲ ویژگی های توابع بلاک - پالس یک بعدی

توابع بلاک - پالس یک بعدی ویژگی های زیر را شامل می شوند.

• مجزا بودن :

$$b_j(t)b_i(t) = \begin{cases} b_i^2(t) = b_i(t), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (۲-۴)$$

• متعامد بودن:

$$\int_0^T b_i(t)b_j(t)dt = \begin{cases} h & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (۳-۴)$$

• کامل بودن:

[9] مجموعه توابع متعامد بلاک - پالس هنگامی که m' به سمت ∞ میل کند کامل است به این

معنی که برای هر تابع حقیقی کراندار $f(x)$ که روی بازه $[0,T)$ به طور مربع انتگرال پذیر باشد داریم

$$\|f\|_2^2 = \int_0^T f^2(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_2^2 \quad \text{و نرم تابع } \phi_i(x) \text{ به صورت } \|\phi_i(x)\|_2 = \left(\int_0^T \phi_i^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{ است.}$$

• متعامد یکه بودن:

با وجود اینکه مجموعه توابع (۴-۱) مجموعه ی متعامد یکه نیستند ولی می توان آنها را به یک مجموعه متعامد یکه از توابع بلاک - پالس $\hat{b}_j(t)$ تبدیل نمود، با فرض $h = \frac{T}{m'}$ ، معادله متعامد یکه (۴-۴) حاصل می شود

$$\hat{b}_j(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{h}}, & jh \leq t < (j+1)h, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4-4)$$

۴-۲-۳ تقریب توابع با استفاده از توابع بلاک - پالس یک بعدی

دنباله متعامد $\{b_j\}_{j=0}^{m'-1}$ را به عنوان پایه ای برای فضای $L^2([0, T])$ در نظر بگیرید طوری که تابع $f \in L^2([0, T])$ باشد. تقریب تابع f با توجه به پایه های در نظر گرفته شده بر روی بازه ی $[0, T]$ به صورت (۴-۵) حاصل می شود

$$f(t) = \sum_{j=0}^{m'-1} f_j b_j(t), \quad (4-5)$$

که در آن f_j ها ضرایب توابع بلاک - پالس می باشند که به صورت (۴-۶) به دست می آیند

$$f_j = \frac{(f, b_j)}{(b_j, b_j)} = \frac{(f, b_j)}{\|b_j\|^2} \quad j = 0, 1, \dots, m'-1, \quad (4-6)$$

از طرفی (۴-۷) را داریم.

$$\|b_j\|^2 = \int_0^T b_j^2(t) dt = \int_{(j-1)h}^{jh} dt = h, \quad (4-7)$$

بنابراین f_j به صورت (۴-۸) حاصل می شود.

$$f_j = \int_0^T f(t) b_j(t) dt = \frac{1}{h} \int_{(j-1)h}^{jh} f(t) dt. \quad (4-8)$$

۴-۲-۴ توابع بلاک - پالس دو بعدی

در بخش قبل توابع بلاک - پالس یک بعدی معرفی شد، این توابع قابلیت گسترش به توابع دو متغیره را دارا می باشند. اصطلاحاً توابع بلاک - پالس تک متغیره را یک بعدی و دو متغیره را دو بعدی می نامند.

مجموعه توابع بلاک - پالس دو بعدی روی مستطیل $[0, T_1) \times [0, T_1)$ به قسمی که $t_1 \in [0, T_1)$ و $t_2 \in [0, T_2)$ مجموعه توابع بلاک - پالس دو بعدی روی مستطیل $[0, T_1) \times [0, T_1)$ به قسمی که $t_1 \in [0, T_1)$ و $t_2 \in [0, T_2)$ به صورت (۹-۴) تعریف می شوند.

$$b_{j_1, j_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & (j_1 - 1)h_1 \leq t_1 < j_1 h_1, \quad (j_2 - 1)h_2 \leq t_2 < j_2 h_2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9-4)$$

بیان دیگری از معادله (۹-۴)، معادله (۱۰-۴) می باشد

$$b_{j_1, j_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} 1, & t_{1, j_1-1} \leq t_1 < t_{1, j_1}, \quad t_{2, j_2-1} \leq t_2 < t_{2, j_2}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10-4)$$

۴-۲-۵ ویژگی های توابع بلاک - پالس دو بعدی

توابع بلاک - پالس دو بعدی ویژگی های زیر را دارا می باشد.

• مجزا بودن:

$$b_{i_1, i_2}(t_1, t_2) b_{j_1, j_2}(t_1, t_2) = \begin{cases} b_{i_1, i_2}^2(t_1, t_2) = b_{i_1, i_2}(t_1, t_2), & i_1 = j_1, \quad i_2 = j_2, \\ 0, & i_1 \neq j_1, \quad i_2 \neq j_2. \end{cases} \quad (11-4)$$

• متعامد بودن:

$$(12-4)$$

$$\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} b_{i_1, i_2}(t_1, t_2) b_{j_1, j_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \begin{cases} h_1 h_2, & i_1 = j_1, \quad i_2 = j_2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

• کامل بودن:

مجموعه توابع بلاک - پالس دو بعدی نیز همانند توابع بلاک-پالس یک بعدی هر گاه $m' \rightarrow \infty$ ، کامل است.

۶-۲-۴ تقریب توابع دوبعدی با استفاده از توابع بلاک - پالس دو بعدی

دنباله متعامد $\{b_{j_1, j_2}\}_{j_1, j_2=0}^{m'_1-1, m'_2-1}$ را به عنوان پایه ای برای فضای $L^2([0, T_1]) \times L^2([0, T_2])$ در نظر بگیرید به طوری که تابع $f \in L^2([0, T_1]) \times L^2([0, T_2])$ باشد. تقریب تابع f با توجه به پایه های در نظر گرفته شده به صورت (۱۳-۴) می باشد

$$f(t_1, t_2) \cong \sum_{j_1=1}^{m'_1} \sum_{j_2=1}^{m'_2} f_{j_1, j_2} b_{j_1, j_2}(t_1, t_2), \quad (13-4)$$

که در آن ضرایب توابع بلاک - پالس می باشد که به صورت (۱۴-۴) به دست می آیند

$$f_{j_1, j_2} = \frac{(f, b_{j_1, j_2})}{(b_{j_1, j_2}, b_{j_1, j_2})} = \frac{(f, b_{j_1, j_2})}{\|b_{j_1, j_2}\|^2} \quad j_1 = 0, 1, \dots, m'_1 - 1, \quad j_2 = 0, 1, \dots, m'_2 - 1 \quad (14-4)$$

و از طرفی (۱۵-۴) را داریم

$$\|b_{j_1, j_2}(t_1, t_2)\|^2 = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} b_{j_1, j_2}^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \int_{(j_1-1)h}^{j_1 h} \int_{(j_2-1)h}^{j_2 h} dt_1 dt_2 = h^2. \quad (15-4)$$

بنابراین f_{j_1, j_2} به صورت (۱۶-۴) حاصل می شود.

$$f_{j_1, j_2}(t_1, t_2) = \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} f(t_1, t_2) b_{j_1, j_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \frac{1}{h^2} \int_{(j_1-1)h}^{j_1 h} \int_{(j_2-1)h}^{j_2 h} f(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \quad (16-4)$$

اکنون که توابع بلاک - پالس معرفی شدند به تعریف ماتریس عملیاتی انتگرال این توابع پرداخته می شود.

۷-۲-۴ ماتریس عملیاتی انتگرال توابع بلاک - پالس

تابع بلاک - پالس به صورت برداری به فرم (۱۷-۴) معرفی می شود.

$$B_{m'} = (b_0(t), b_1(t), \dots, b_{m'-1}(t))^T. \quad (17-4)$$

$F_{m'}$ ، ماتریس عملیاتی انتگرال توابع بلاک - پالس نامیده می شود که یک ماتریس $(2^k - 1)M \times (2^k - 1)M$ بعدی به صورت (۱۸-۴) می باشد.

$$\int_0^t B_{m'}(x) dx \simeq F_{m'} B_{m'}(t), \quad (18-4)$$

که ماتریس $F_{m'}$ در رابطه (۱۹-۴) تعریف شده است.

$$F_{m'} = \begin{bmatrix} \frac{h_1}{2} & h_1 & h_1 & \cdots & h_1 \\ 0 & \frac{h_2}{2} & h_2 & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{h_{m'}}{2} \end{bmatrix}. \quad (19-4)$$

۳-۴ ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه صحیح

اگر تابع f ، تابعی مربع انتگرال پذیر بر روی بازه ی $[0,1]$ باشد، آنگاه با استفاده از BPFs های متعامد، می توان تابع f را به فرم (۲۰-۴) تقریب زد

$$f(t) \simeq \sum_{i=0}^{m'-1} f_i b_i(t) = \mathbf{f}^T \mathbf{B}_{m'}(t), \quad (20-4)$$

که در آن به ازای $i = 0, 1, \dots, m'-1$ ، $f_i = m' \int_0^1 f(s) b_i(s) ds$ است و $\mathbf{f}$ ، $\mathbf{B}_{m'}$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$\mathbf{f} = [f_0, f_1, \dots, f_{m'-1}]^T, \quad \mathbf{B}_{m'} = [b_0(t), b_1(t), \dots, b_{m'-1}(t)]^T. \quad (21-4)$$

فرض کنید به ازای هر $i = 1, 2, \dots, m'$ ، نقاط هم محلی به صورت $t_i = \frac{2i-1}{2m'}$ باشد. اکنون می توان برنشتاین متعامد را بر حسب مجموعه $(2^k - 1)M$ تایی از توابع بلاک - پالس به صورت (۲۲-۴) تقریب زد

$$\Psi(t) = \Psi_{m' \times m'} B_{m'}(t), \quad (22-4)$$

که در آن $\Psi_{m' \times m'} = (\Psi(t_1) \Psi(t_2) \dots \Psi(t_{m'}))$ ماتریس ضرایب می باشد. ماتریس عملیاتی انتگرال بلاک - پالس^{۲۵} $F_{m'}$ از مرتبه صحیح^{۲۶} بر روی بازه $[0,1]$ به فرم (۲۳-۴) تعریف می شود.

$$\int_0^t B_{m'}(x) dx \simeq F_{m'} B_{m'}(t), \quad (23-4)$$

که در آن با فرض $h = \frac{1}{m'}$ یک ماتریس $(2^k - 1)M \times (2^k - 1)M$ بعدی به صورت (۲۴-۴) می باشد.

$$F_{m'} := h \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad (24-4)$$

در واقع ماتریس $F_{m'}$ به عنوان انتگرال در دامنه توابع بلاک - پالس عمل می کند و در تجزیه و تحلیل و آنالیز دامنه هر تابع بلک پالس بسیار موثر است. اکنون برای به دست آوردن ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین^{۲۷} از مرتبه صحیح $(P_{m'})$ ، فرض کنید معادله (۲۵-۴) را داریم

$$(25-4)$$

$$\int_0^t \Psi(x) dx \simeq (P_{m'}, \Psi)(t) = P_{(2^k - 1)M \times (2^k - 1)M} \Psi(t).$$

با استفاده از معادلات (۲۲-۴) و (۲۳-۴)، معادله (۲۶-۴) را داریم

$$\begin{aligned} (P_{m'}, \Psi)(t) &\simeq (P_{m'}, \Psi_{(2^k - 1)M \times (2^k - 1)M} B_{(2^k - 1)M})(t) \\ &\simeq \Psi_{(2^k - 1)M \times (2^k - 1)M} F_{(2^k - 1)M} B_{(2^k - 1)M}(t), \end{aligned} \quad (26-4)$$

با توجه به رابطه (۲۵-۴) و (۲۶-۴)، معادله (۲۷-۴) حاصل می شود.

^{۲۵} Block - pulse operational matrix of integration

^{۲۶} Integer order

^{۲۷} Bernstein wavelets operational matrix of integration

(۲۷-۴)

$$P_{(2^k-1)M \times (2^k-1)M} \Psi(t) = \Psi_{(2^k-1)M \times (2^k-1)M} F_{(2^k-1)M} B_{(2^k-1)M}(t).$$

و در نهایت با توجه به معادله (۲۲-۴) معادله (۲۸-۴) به دست می آید.

$$P_{(2^k-1)m \times (2^k-1)M} = \Psi_{(2^k-1)M \times (2^k-1)M} F_{m'}^{-1} \Psi_{(2^k-1)M \times (2^k-1)M}^{-1}. \quad (۲۸-۴)$$

۴-۴ ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه کسری

در [13] کلیکمن^{۲۸} به تعریف ماتریس عملیاتی انتگرال توابع بلاک - پالس از مرتبه کسری به صورت (۳۴-۴) پرداخته است. این بخش از رساله با توجه به تعاریف موجود در این مرجع به معرفی ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه کسری پرداخته می شود.

فرض کنید ماتریس عملیاتی انتگرال بلاک - پالس از مرتبه کسری به صورت (۲۹-۴) باشد

$$(I^\alpha B_{m'})(t) = F^\alpha B_{m'}(t), \quad (۲۹-۴)$$

که در آن F^α یک ماتریس $m' \times m'$ است که با توجه به معادله (۳۰-۴) به دست می آید

$$F^\alpha = \frac{1}{m'^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_{m'-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_{m'-2} \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \cdots & \xi_{m'-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (۳۰-۴)$$

که در آن به ازای هر $k=1,2,\dots,m'-1$ ، $\xi_k = (k+1)^{\alpha+1} - k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}$ ، است. اکنون با توجه به تعاریف قبلی به معرفی ماتریس عملگری انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه کسری P^α پرداخته می شود.

فرض کنید رابطه (۳۱-۴) را داریم

$$(I^\alpha \Psi)(t) = P^\alpha \Psi(t). \quad (۳۱-۴)$$

^{۲۸} Kilicman

با استفاده از معادلات (۲۲-۴) و (۳۰-۴) معادله (۳۲-۴) حاصل می شود

$$\begin{aligned}(I^\alpha \Psi)(t) &\simeq (I^\alpha \Psi B(t)) \\ &= \Psi (I^\alpha B(t)) \\ &\approx \Psi F^\alpha B(t).\end{aligned}\tag{۳۲-۴}$$

از معادلات (۳۱-۴) و (۳۲-۴) نتیجه (۳۳-۴) به دست می آید

$$P^\alpha \Psi(t) \simeq \Psi F^\alpha B(t).\tag{۳۳-۴}$$

و نهایتاً با توجه به معادله (۲۲-۴)، ماتریس عملگری انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه کسری (۳۴-۴) حاصل می شود.

$$P^\alpha = \Psi F^\alpha \Psi^{-1}.\tag{۳۴-۴}$$

از آنجایی که ماتریس های عملیاتی نقش بسیار موثری در پیچیدگی محاسبات دارند و کار کردن با آنها بسیار ساده می باشد، لذا با توجه به معرفی ماتریس عملیاتی انتگرال بلاک - پالس از مرتبه صحیح و کسری در این بخش از رساله تمامی شرایط لازم به جهت حل یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از موجک برنشتاین فراهم شده است لذا در بخش بعدی از رساله حاضر به حل این نوع معادلات با روش مذکور پرداخته می شود.

فصل پنجم

حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از

موجک برنشتاین

بسیاری از پدیده ها و مسائل واقعی به خوبی با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی کسری مدل بندی می شوند و این معادلات نقش بسیار مهمی در علوم مهندسی ایفاء می کنند. یافتن راه حل مناسب برای این معادلات مشکل است لذا در این فصل با استفاده از یک روش عددی به حل تقریبی این نوع معادلات می پردازیم. این فصل شامل سه بخش می باشد که در بخش اول روش ارائه شده در رساله حاضر با نام ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری بکار برده و تمامی مراحل به طور کامل شرح داده می شود، در بخش دوم به جهت سهولت خوانندگان و روشن شدن بیشتر مراحل روش پیشنهادی، الگوریتم روش مد نظر در حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری ارائه می شود و در نهایت در بخش آخر با بررسی مثال های عددی کارایی روش به خوبی روشن می شود.

۲-۵ روش ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین برای حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری در این بخش ابتدا معادله دیفرانسیل جزئی کسری مد نظر را معرفی نمود سپس تک تک پارامتر های مسئله را محاسبه نموده و در آخر جواب مسئله را به دست می آوریم

۱-۲-۵ شرح معادله

معادله دیفرانسیل جزئی کسری (۱-۵) با شرایط مرزی دیریکله (۲-۵) را در نظر بگیرید

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = F(x, t, u, \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu}, \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}), \quad 0 < \beta, \gamma \leq 1, 1 < \alpha, \mu \leq 2, \quad (1-5)$$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_0(x), & u(0, t) &= g_0(t), \\ u(x, 1) &= f_1(x), & u(1, t) &= g_1(t), \end{aligned} \quad (2-5)$$

که در آن $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ مرتبه مشتق کسری، f_i و g_i به ازای $i = 0, 1$ توابعی بطور پیوسته مشتق پذیر بر روی بازه $[0, 1]$ می باشند. برای حل این معادله، فرض می کنیم

$$\frac{\partial^{\alpha+\mu} u}{\partial x^\alpha \partial t^\mu} \approx \Psi(x)^T U \Psi(t), \quad (3-5)$$

که در آن $U = [u_{i,j}]_{m' \times m'}$ ماتریس مجهولات، $\Psi(\cdot)$ بردار موجک برنشتاین تعریف شده در معادله (۳-۲۰) می باشد و در واقع هدف اصلی یافتن ماتریس مجهولات است.

۲-۲-۵ یافتن ماتریس مجهولات

اکنون بایستی با استفاده از تقریب (۳-۵) و اعمال شرایط (۲-۵)، تمامی پارامترهای معادله (۱-۵)، یعنی $u, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu}, \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}, \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}$ را تقریب زده و در معادله (۱-۵) جایگذاری شود و در نهایت دستگاه به دست آمده با یکی از روش های تکراری حل شود تا جواب معادله حاصل شود.

• $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$: برای محاسبه $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ با توجه به توضیحات ارائه شده از انتگرال ریمان - لیوویل در بخش دوم از رساله حاضر (۲-۲-۵)، با انتگرال گیری ریمان - لیوویل از مرتبه کسری μ ، از طرفین رابطه (۳-۵) نسبت به t ، معادله (۴-۵) به دست می آید

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \Psi(x)^T U P^\mu \Psi(t) + \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \Big|_{t=0} + t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{t=0}. \quad (۴-۵)$$

برای یافتن $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{t=0}$ ، با توجه به شرایط مرزی (۲-۵) و شرط $u(x, 1) = f_1(x)$ لذا کافیت که در معادله (۴-۵)، مقدار t را یک قرار داده و جواب معادله را به صورت (۵-۵) به دست آورد

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} \right) \Big|_{t=0} \simeq \frac{\partial^\alpha f_1}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial^\alpha f_0}{\partial x^\alpha} - \Psi(x)^T U P^\mu \Psi(1). \quad (۵-۵)$$

با جایگذاری معادله (۵-۵) در معادله (۴-۵)، معادله (۶-۵) به دست می آید

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \Psi(x)^T U P^\mu \Psi(t) - t \Psi(x)^T U P^\mu \Psi(1) + (1-t) \frac{\partial^\alpha f_0}{\partial x^\alpha} + t \frac{\partial^\alpha f_1}{\partial x^\alpha}. \quad (۶-۵)$$

• $\frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu}$: اکنون برای ارزیابی $\frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu}$ ، با انتگرال گیری ریمان - لیوویل از مرتبه کسری α ، از طرفین

معادله (۳-۵) نسبت به x ، معادله (۷-۵) ظاهر می شود

$$\frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu} \approx (P^\alpha \Psi(x))^T U \Psi(t) + \frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu} \Big|_{x=0} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu} \right) \Big|_{x=0}. \quad (۷-۵)$$

همانند قبل با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۲-۵) و شرط $u(1,t) = g_1(t)$ کافیت x را یک قرار دهیم در نتیجه معادله به صورت (۸-۵) بازنویسی می شود

$$\frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu} \approx (P^\alpha \Psi(x))^T U \Psi(t) - x (P^\alpha \Psi(1))^T U \Psi(t) + (1-x) \frac{\partial^\mu g_0}{\partial t^\mu} + x \frac{\partial^\mu g_1}{\partial t^\mu}. \quad (۸-۵)$$

• برای یافتن u از معادله (۶-۵) نسبت به x انتگرال کسری از مرتبه α گرفته می شود و با توجه به شرایط (۲-۵)، معادله (۹-۵) به دست می آید

$$u(x,t) = (P^\alpha \Psi(x))^T U \Psi(t) - t (P^\alpha \Psi(x))^T U P^\mu \Psi(1) - x (P^\alpha \Psi(1))^T U P^\mu \Psi(t) + xt (P^\alpha \Psi(1))^T U P^\mu \Psi(1) + H(x,t) \quad (۹-۵)$$

در معادله (۹-۵)، تابع $H(x,t)$ به صورت (۱۰-۵) می باشد

$$H(x,t) \approx g_0(t) + (1-t)(f_0(x) - f_0(0) - x f_0'(0)) + t(f_1(x) - f_1(0) - x f_1'(0)) + x(g_1(t) - g_0(t)) - x(1-t)(f_0(1) - f_0(0) - f_0'(0)) - xt(f_1(1) - f_1(0) - f_1'(0)). \quad (۱۰-۵)$$

• $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}, \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}$: برای به دست آوردن $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ و $\frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}$ کافیت از معادله (۹-۵) به ترتیب نسبت به x و t ،

مشتق کسری از مرتبه های β و γ گرفته شود (برای این نوع مشتق گیری رجوع شود به فصل دوم از رساله حاضر و بخش (۲-۳)).

۳-۲-۵ یافتن جواب مسئله

اکنون با جایگذاری تمامی تقریب های به دست آمده در معادله (۱-۵) و با جایگذاری نقاط هم محلی

$$x_i, y_i = \frac{2i-1}{2m'}, \quad i=1, 2, \dots, m', \quad (=) \text{ بجای تقریب } (\approx),$$

دستگاه معادلات جبری غیر خطی (۱۱-۵) حاصل می شود

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} - F(x, y, u, \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu}, \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, m'. \quad (11-5)$$

برای حل این دستگاه غیر خطی می توان از یکی از روش های تکراری مانند روش تکراری نیوتن استفاده نمود تا ضرایب مجهولات U حاصل شود و در نهایت جواب تقریبی با جایگذاری ضرایب مجهولات در مسئله (۵-۹) به دست آورده می شود. از آنجایی که کارایی روش های عددی بستگی به خطای آنها دارد لذا برای برآورد خطای روش از معادلات (۵-۱۲) و (۵-۱۳) استفاده می شود.

$$L_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, T) - U(x, T)| = \max_{1 \leq j \leq m'} |u(x_j, t_j) - U(x_j, t_j)|, \quad (12-5)$$

$$L_2 := \left(\frac{1}{m'} \sum_{j=1}^{m'} |u(x_j, t_j) - U(x_j, t_j)|^2 \right)^{1/2}. \quad (13-5)$$

۳-۵ الگوریتم روش

در این بخش الگوریتم روش ارائه شده در رساله حاضر برای آشنایی بیشتر و روشن تر شدن مراحل روش پیشنهادی به شرح زیر ارائه می شود.

۱. معادله دیفرانسیل جزئی کسری با شرایط مرزی دیریکله در نظر بگیرید.
۲. مفروضات مسئله مانند، $\alpha, \beta, \gamma, \mu$ مرتبه مشتق کسری، توابع f_0, f_1 و g_0, g_1 و مقادیر M, k که با توجه به آن مسئله بایستی محاسبه شود، را وارد کنید.
۳. چند جمله ای های برنشتاین متعامد نرمال شده مطابق با معادلات (۳-۱۳) و (۳-۱۴) بسازید و بردار موجک $\Psi(t)$ با استفاده از معادله (۳-۲۰) به دست آورید.
۴. با توجه به بردار موجک، ماتریس $2^k (M + 1)$ بعدی برای مجهولات C در نظر بگیرید.
۵. تابع $H(x, t)$ با توجه به رابطه (۵-۱۰) و ضرایب با استفاده از معادله (۳-۲۶) محاسبه می شوند.
۶. ضرایب ماتریس عملیاتی موجک برنشتاین از مرتبه کسری Ψ با استفاده از (۴-۲۷)، تشکیل می دهید.
۷. با توجه به ماتریس ضرایب موجک و ماتریس عملیاتی انتگرال کسری بلاک - پالس P^α ماتریس عملیاتی انتگرال کسری را محاسبه کنید.

۸. تمامی تقریب های حاصل شده را در معادله (۵-۱) جایگذاری کنید.

۹. با جایگذاری نقاط هم محلی، دستگاه معادلات جبری (۵-۱۱) به دست آورید.

۱۰. دستگاه معادلات جبری را حل کنید.

۱۱. جواب دستگاه را به فرم $(u(x,t) \approx \Psi^T(x) D \Psi(t))$ (۳-۲۵) حل کنید.

۱۲. خطا با توجه به معادلات (۵-۱۲) و (۵-۱۳) محاسبه کنید.

۵-۴ مثال های عددی

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده در رساله حاضر به بیان سه مثال عددی پرداخته می شود، در طی هر مثال با جداول و مقایسه هایی که نسبت به سایر روش ها وجود دارد، موثر بودن روش به وضوح نشان داده می شود. برنامه های نوشته شده در این بخش با استفاده از نرم افزار ممتیکا بوده است.

۵-۴-۱ مثال

معادله دیفرانسیل کسری جزئی (۵-۱۴) را با شرایط اولیه و مرزی (۵-۱۵) در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial^{3/2} u(x,t)}{\partial x^{3/2}} + \frac{\partial^{3/4} u(x,t)}{\partial x^{3/4}} + \frac{\partial^{4/3} u(x,t)}{\partial t^{4/3}} + u(x,t) = f(x,t), \quad (5-14)$$

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x^2, & u(0,t) &= t, \\ u(x,1) &= x^2 + 1, & u(1,t) &= 1+t. \end{aligned} \quad (5-15)$$

که در آن $f(x,t) = x^2 + t + 4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{16\sqrt{2}\Gamma(3/4)}{5\pi}$ تابع معلوم و $u(x,t) = x^2 + t$ جواب دقیق مسئله می باشد. مقادیر خطای جذر میانگین مربعات^{۲۹} L_2 و ماکسیم خطای مطلق^{۳۰} L_∞ ، در بعضی از نقاط گره ای $(x,t) \in [0,1]$ به ازای $m'=12$ ، در جدول (۵-۱)، نشان داده شده است.

^{۲۹} Root-mean-square error

^{۳۰} Absolute error

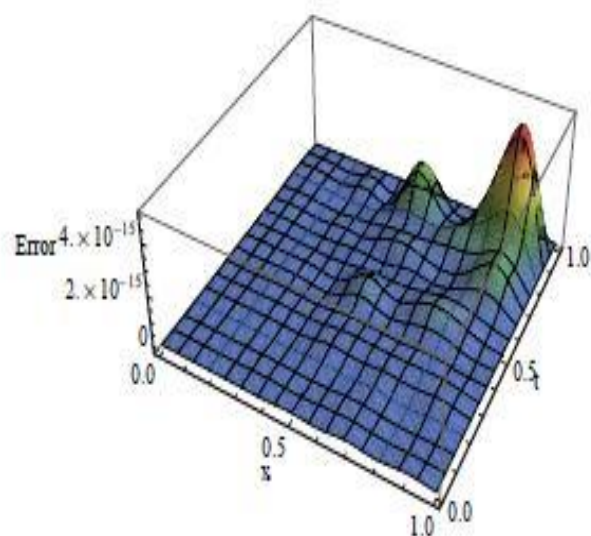
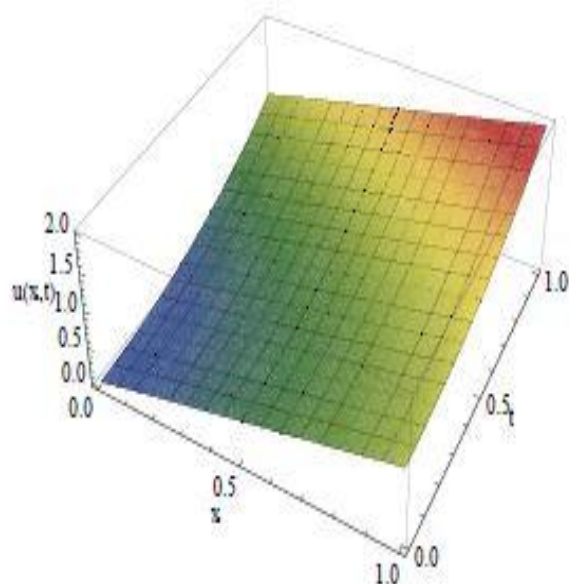
برای نشان دادن کارایی و برتری روش ارائه شده در رساله، بین خطای مطلق به دست آمده از روش پیشنهادی با خطای مطلق روش موجک لژاندر (ارائه شده در مرجع [9]) در جدول (۲-۵) مقایسه صورت گرفته شده است و در شکل (۱-۵)، جواب تقریبی و خطای مطلق رسم شده است. از نتایج جدول (۲-۵) و شکل (۱-۵) به خوبی مشخص است که روش پیشنهادی ما برای حل این نوع مسئله بسیار دقیق بوده است و جوابهای تقریبی به دست آمده به جواب واقعی بسیار نزدیک می باشد.

جدول (۱-۵): مقایسه خطای L_2 و L_∞ به ازای مقادیر مختلف t برای مثال ۵-۴-۱، به ازای $m'=12$.

t	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 0.9$	$t = 1$
L_∞	1.11E-16	2.22E-16	1.99E-15	2.88E-15	5.55E-15	2.22E-16
L_2	3.78E-17	1.02E-16	6.43E-16	9.07E-16	1.73E-15	6.41E-17

جدول (۲-۵): مقایسه خطای مطلق موجک لژاندر و موجک برنشتاین، مثال ۵-۴-۱ به ازای $m'=12$.

t	$t = 0.1$	$t = 0.3$	$t = 0.5$	$t = 0.7$	$t = 0.9$	$t = 1$
روش موجک لژاندر	4.90E-5	1.47E-6	2.28E-6	1.17E-6	6.45E-6	0.00
روش موجک برنشتاین	1.11E-16	2.22E-16	1.99E-15	5.55E-15	2.22E-16	2.22E-16



شکل (۱-۵): جواب تقریبی در سمت چپ و خطای مطلق در سمت راست برای مثال ۱-۴-۵

۲-۴-۵ مثال

معادله دیفرانسیل جزئی زمان-کسری انتقال حرارت از مرتبه کسری α

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (۱۶-۵)$$

به طوری که $0 < \alpha < 1$ است با شرایط اولیه و مرزی (۱۷-۵) را در نظر بگیرید.

$$u(x, 0) = x^2, 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}, \quad (17-5)$$

$$u(1, t) = 1 + \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}, 0 \leq t \leq 1.$$

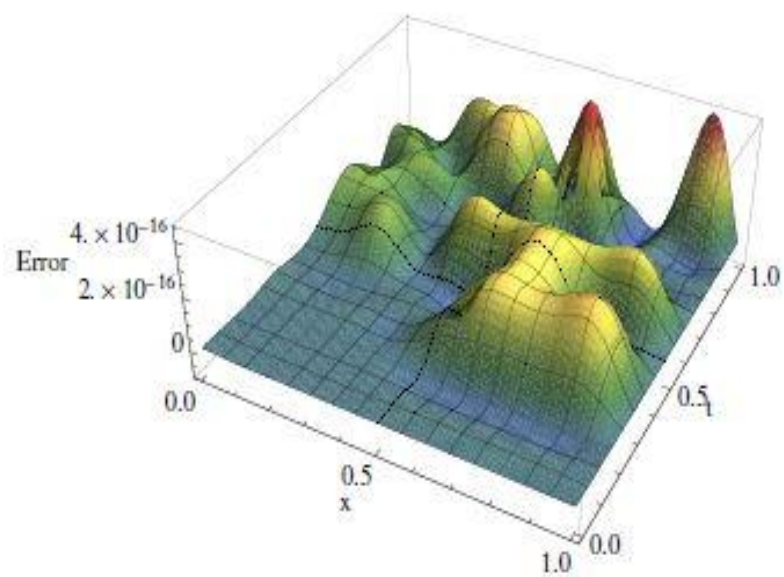
که در آن $f(x, t) = 2x^2 + 2t^\alpha + 2$ تابع معلوم و جواب دقیق مسئله، $u(x, t) = x^2 + \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}$ است. معادله (۱۶-۵) به ازای $m' = 12$ ، برای مقادیر مختلف α در برخی از نقاط گره ای با روش پیشنهادی رساله حاضر حل شده است و مقدار خطای مطلق در جدول (۳-۵)، نشان داده شده است. سپس برای بیان موثر بودن روش پیشنهادی، مقادیر خطای به دست آمده از روش ارائه شده با خطای مطلق روش های موجک لژاندر-سینک، موجک هار و موجک چبیشف نوع سوم (رجوع شود به [4,28,34]) در جدول (۴-۴) به ازای $\alpha = 0.5$ مقایسه و ارائه شده است. در نهایت برای مشاهدات بهتر نتایج خطای مطلق به ازای $\alpha = 0.5$ و $m' = 6$ در شکل (۲-۵) و خطای مطلق و جواب تقریبی در شکل (۳-۵) رسم شده است. با توجه به نتایج جداول (۳-۵)، (۴-۵) و شکل (۲-۵) به خوبی روشن است که روش پیشنهادی رساله حاضر برای حل این نوع معادلات بسیار دقیق بوده است و جوابهای تقریبی به دست آمده به جواب واقعی نزدیک می باشد.

جدول (۳-۵): خطای مطلق مثال ۲-۴-۵

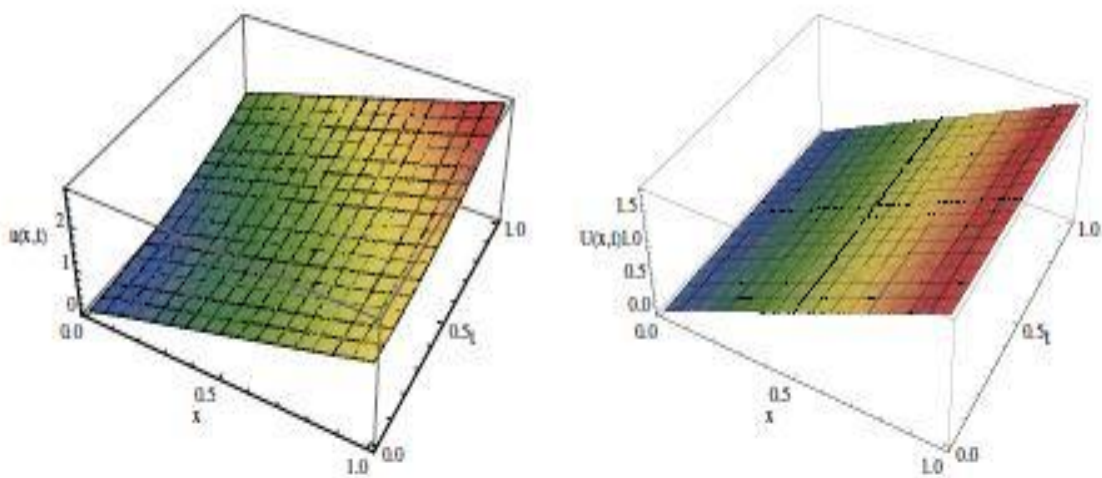
(x, t)	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$
(0.1,0.1)	0	0	0	0	3.469E-18
(0.2,0.2)	0	1.110E-16	0	0	2.776E-17
(0.3,0.3)	0	0	0	0	1.110E-16
(0.4,0.4)	0	0	0	0	2.775E-16
(0.5,0.5)	8.881E-16	6.661E-16	0	8.881E-16	4.041E-14
(0.6,0.6)	0	4.441E-16	0	0	5.995E-15
(0.7,0.7)	0	4.441E-16	2.220E-16	2.220E-16	1.332E-15
(0.8,0.8)	0	8.882E-16	4.441E-16	0	6.661E-16
(0.9,0.9)	0	4.441E-16	4.441E-16	4.440E-16	1.220E-14

جدول (۴-۵): مقایسه خطاهای مطلق برای مثال ۵-۴-۲ به ازای $\alpha = 0.5, t = 0.5$.

x	موجک چیشف [۳۳]	موجک هار [۴]	موجک لژاندرسینک [۲۷]	روش پیشنهادی
0.1	1.110E-16	1.210E-3	6.462E-6	0
0.2	1.110E-16	1.259E-3	1.578E-5	0
0.3	2.220E-16	1.865E-3	2.272E-5	1.110E-16
0.4	2.220E-16	7.412E-3	2.674E-5	0
0.5	0	1.000E-6	2.759E-5	0
0.6	0	7.460E-3	2.534E-5	2.220E-16
0.7	2.220E-16	1.724E-3	2.035E-5	0
0.8	0	4.990E-3	1.320E-5	2.220E-16
0.9	0	1.678E-2	4.653E-6	0



شکل (۲-۵): شکلی از خطای مطلق برای مثال ۲-۴-۵.



شکل (۳-۵): جواب تقریبی در سمت چپ و خطای مطلق در سمت راست برای مثال ۲-۴-۵.

معادله دیفرانسیل کسری جزئی ناهمگن (۱۴-۵) را در نظر بگیرید. [30]

$$\frac{\partial^{1.5} u(x, t)}{\partial x^{1.5}} + \frac{\partial^{1.2} u(x, t)}{\partial t^{1.2}} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{5t^{\frac{4}{5}}}{2\Gamma\frac{4}{5}} \quad (14-5)$$

با شرایط اولیه و مرزی (۱۵-۵) و جواب دقیق $u(x, t) = x^2 + t^2$

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= t^2, & u(0, t) &= x^2, \\ u(x, 1) &= x^2 + 1, & u(1, t) &= 1 + t^2. \end{aligned} \quad (15-5)$$

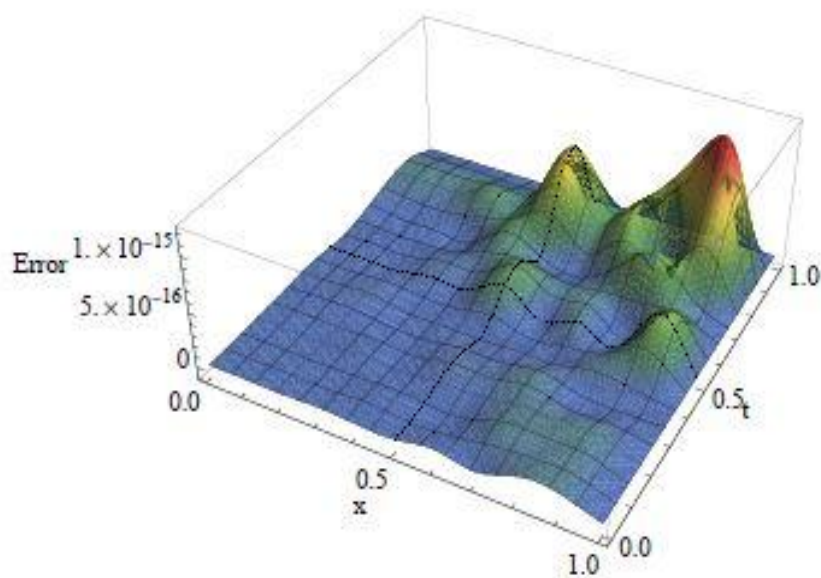
در جدول (۵-۵) نتایج محاسبات به ازای m های مختلف و در شکل (۴-۵) به ازای $m = 12$ تابع خطای ارائه شده است. در انتها نتایج حاصل از ماکسیمم خطای مطلق روش ارائه شده در رساله حاضر با ماکسیمم خطای مطلق روش موجود در [30]، در جدول (۶-۵) مقایسه شده است که نتایج موجود در این جدول گویای دقت بهتر روش پیشنهادی رساله حاضر می باشد.

جدول (۵-۵): خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف m ، برای مثال ۳-۴-۵

(x, y)	روش پیشنهادی به ازای $m = 12$	روش پیشنهادی به ازای $m = 16$
(0.2, 0.2)	0	0
(0.4, 0.4)	0	0
(0.6, 0.6)	1.11×10^{-16}	0
(0.8, 0.8)	0	0

جدول (۶-۵): ماکسیمم خطای مطلق L_∞ ، برای مثال ۳-۴-۵

روش پیشنهادی		روش استفاده شده در [30]	
$m = 16$	$m = 12$	$N = 20$	$N = 10$
0	1.11×10^{-16}	7.1002×10^{-3}	7.1002×10^{-3}



شکل (۴-۵): تابع خطای رسم شده برای مثال ۳-۴-۵.

معادله دیفرانسیل کسری جزئی با شرایط اولیه و مرزی (۵-۴) را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ u(x,0) &= x^2 + 2x + 1, \\ u(0,t) &= \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1, \\ u(l,t) &= l^2 + 2l + 1 + \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.\end{aligned}\tag{۵-۴}$$

جواب دقیق مسئله به صورت $u(x,t) = x^2 + 2x + \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 1$ می باشد در [5] با استفاده از یک روش تکراری جدید همین جواب را به دست آورده است. با استفاده از روش پیشنهادی رساله حاضر نیز به ازای $m=16$ و $\ell=1$ همان جواب دقیق حاصل می شود، لذا در این مثال نتایج عددی ارائه نمی شود.

فصل ششم

نتایج حاصل از رساله

و پیشنهادات

بخش ششم از رساله حاضر به بیان نتایج حاصل از این تحقیق و پیشنهاداتی که در راستای آن می تواند برای تحقیقات و پژوهش های آتی مفید باشد، اختصاص داده شده است.

۶-۲ نتایج حاصل از رساله

بسیاری از پدیده ها و مدل بندی های طبیعی بر پایه مطالعات و بررسی معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه کسری حاصل می شوند. و برای یافتن جواب این نوع معادلات روش های عددی بسیاری مطرح شده است که بسته به میزان دقت آنها مورد استفاده قرار گرفته می شوند. در این رساله مبحث معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه صحیح و کسری مد نظر قرار گرفته می شود، سپس با معرفی یک روش عددی، به یافتن جواب این نوع معادلات پرداخته می شود.

در این راستا روش موجک ها که یکی از روش های مؤثر در تقریب معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه صحیح و کسری هستند، مورد مطالعه قرار گرفته شده است، تا زمینه مناسبی برای یافتن جواب این نوع معادلات فراهم آید. با مطالعات انجام شده، موجک توابع ترکیبی همچون موجک توابع بلاک - پالس معرفی شد و سپس با استفاده از آنها موجک برنشتاین متعامد از مرتبه صحیح و کسری برای اولین بار معرفی گردید.

از آنجایی که برای استفاده از روش موجک برنشتاین متعامد از مرتبه صحیح و کسری نیاز به تعریف ماتریس عملگری انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه صحیح و کسری بوده است، لذا در این رساله برای اولین بار به تعریف این ماتریس عملگری انتگرال پرداخته می شود و مراحل ساخت آن معرفی می گردد.

از طرفی می دانیم که خطا در محاسبات عددی امری اجتناب ناپذیر است، لذا در ادامه مباحث قبلی قضایای در مورد خطای روش و کران بالای آن بیان و اثبات می گردد. در نتیجه با توجه به تعاریف و قضایای مطرح شده، ابزار لازم جهت تقریب معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از روش پیشنهادی رساله مهیا می گردد در ادامه به شرح کاملی از چگونگی تقریب این نوع معادلات به وسیله روش موجک برنشتاین نرمال شده پرداخته می شود و الگوریتم مراحل تقریب به صورت کامل مطرح و تشریح می شود.

در انتها برای بیان موثر و کارا بودن روش چندین مثال عددی مطرح گردیده و مقایسه هائی با نتایج حاصل از سایر روش های عددی انجام شده است، بر طبق مشاهدات واضح است که روش معرفی شده از دقت بالایی برخوردار است و نسبت به سایر روش های عددی کارا تر بوده است.

نتایج حاصل از رساله به صورت خلاصه شامل موارد زیر می باشد.

- روش موجک برنشتاین نرمال شده قابلیت یافتن جواب معادلات دیفرانسیل جزئی کسری را با خطای کمتر از سایر روش های عددی دارا است. از این رو جواب هایی که با استفاده از این روش حاصل می شوند از دقت بالایی برخوردار می باشند. و روش حاصل، روشی کارآمد در حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری است.
- در روش پیشنهادی رساله، شرایط مرزی به طور خودکار در نظر گرفته می شود.
- در این روش با توجه به استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال محاسبات سریعتر و پیچیدگی محاسبات کمتر می شود.
- در این روش با جایگذاری نقاط هم محلی و تمامی تقریب ها در معادله دیفرانسیل جزئی کسری، دستگاه معادلات جبری غیر خطی حاصل می شود که این دستگاه با استفاده از یکی از روشهای تکراری به آسانی حل می شود.

۶-۳ پیشنهادات

در راستای این رساله در زمینه های زیر می توان به تحقیق و پژوهش پرداخته شود. این تحقیقات گام بزرگی در جهت استفاده از ترکیب توابع متعامد و موجک در حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری می باشد.

- از آنجایی روش پیشنهادی کارایی بالایی دارد لذا استفاده از ابعاد بالاتر موجک برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با ابعاد بالاتر پیشنهاد می شود.
- همچنین ترکیب دو تابع متعامد با موجک ها یکی از پیشنهاداتی است که نیاز به تحقیقات زیادی دارد.

- مسائل می توان مسائل خاص کاربردی در علوم مختلف با روش ارایه شده در رساله حاضر حل نمود.

[۱] آناتولی آکساندروویچ کیلباس، ا.چ.ام. سریواستاوا، نظریه و کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری، انتشارات لوح محفوظ، ۱۳۹۵.

[۲] خدیجه کریستیانسن نظریه تقریب از چند جمله ای های تیلور تا موجک ها، مترجم اصغر رحیمی، غلامرضا حجتی، انتشارات دانشگاه مراغه، ۱۳۸۹.

[۳] **دانهام جکسون**، سری های فوریه و چندجمله ای های متعامد، مترجم محمد هادی فراهی، حامد هاشمی مهنه، انتشارات اقلیدس، ۱۳۸۶.

[1] Biazar J, Ebrahimi H, Chebyshev wavelets approach for nonlinear systems of Volterra integral equations, Comput. Math. Appl, 63, 2012, 608-616.

[2] Bhrawy A.H, Zaky M.A, A Shifted Fractional-Order Jacobi Orthogonal Functions: An Application for System of Fractional Differential Equations, Appl. Math. Modelling, 40, 2, 2016, 832-845.

[3] Bhrawy A. H, Alhamed Y. A, New spectral techniques for systems of fractional differential equations using fractional-order generalized Laguerre orthogonal functions, Fractional Calculus and Applied Analysis, 17, 2014, 1138-1157.

[4] Chen Y, Wu Y, Cui Y, Wang Z, Jin D, Wavelet method for a class of fractional convection - diffusion equation with variable coefficients, J. Comput. Sci, 1, 2010, 146-149.

[5] Daftardar-Gejji V, Bhalekar S, Solving fractional boundary value problems with Dirichlet boundary conditions using a new iterative method, Computers and Mathematics with Applications, 59, 2010, 1801 - 1809

[6] Deb A, Sarkar G, Sen S, Block pulse functions, the most fundamental of all piecewise constant basis functions, Int. J. Syst. Sci, 25, 1994, 351-363.

[7] Gomez-Aguilar J. F, Miranda-Hernandez M, G. Lopez-Lopez M, Alvarado-Martinez V. M, Baleanu D, Modeling and simulation of the fractional space-time

diffusion equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 30, 1-3, 2016, 115-127.

[8] Tolstov G. P, *Fourier Series*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1962).

[9] Heydari M. H, Hooshmandasl M.R, Mohammadi F, Legendre wavelets method for solving fractional partial differential equations with Dirichlet boundary conditions, *Appl. Math. Comput*, 234, 2014, 267-276.

[10] Heydari M. H, Hooshmandasl M.R, Mohammadi F, Cattani C, Wavelets method for solving systems of nonlinear singular fractional Volterra integro-differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*, 19, 1, 2014, 37-48.

[11] Izadkhah M. M, Saberi-Nadjafi J, Gegenbauer spectral method for time-fractional convection-diffusion equations with variable coefficients, *Math. Method Appl. Sci*, 38, 2015, 3183-3194.

[12] Javadi S, Babolian E, Taheri Z, Solving generalized pantograph equations by shifted orthonormal Bernstein polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 303, 2016, 1-14.

[13] Kilicman A, Zhou Z.A, Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications, *Appl. Math. Comput*, 187, 1, 2007, 250-265.

[14] Keshavarz E, Ordokhani Y, Razzaghi M, Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations, *Appl. Math. Model*, 38, 2014, 6038-6051.

[15] Kumar D, Singh J, Kumar S, A fractional model of Navier–Stokes equation arising in unsteady flow of a viscous fluid, *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*, 17, 1, 2015, 14-19.

[16] Kumar K. H, Vijesh V. A, Chebyshev Wavelet Quasilinearization Scheme for Coupled Nonlinear Sine-Gordon Equations, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 12, 1, 2017, 011018.

[17] Y. Li, N. Sun, Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix, *Computers and Mathematics with Applications*, 62, 2011, 1046-1054.

[18] Martynyuk V, Ortigueira M, Fractional model of an electrochemical capacitor, *Signal Processing*, 107, 2015, 355-360.

- [19] Mohammadi F, Cattani C, A generalized fractional-order Legendre wavelet Tau method for solving fractional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 339, 2018, 306-316.
- [20] Mokhtary P, Ghoreishi F, Srivastava H.M, The Muntz-Legendre Tau Method for Fractional Differential Equations, *Appl. Math. Modelling*, 40, 2, 2016, 671-684.
- [21] Nemati A, Yousefi S. A, A numerical scheme for solving two-dimensional fractional optimal control problems by the Ritz method combined with fractional operational matrix, *IMA J. Math. Control Inf*, 34, 2017, 1079-1097.
- [22] Parand K, Mazaheri P, Yousefi H, Delkhosh M, Fractional order of rational Jacobi functions for solving the non-linear singular Thomas-Fermi equation, *The European Physical Journal Plus*, 132, 2, 2017, 77.
- [23] Parand K, Mazaheri P, Delkhosh M, A. Ghaderi, New numerical solutions for solving Kidder equation by using the rational Jacobi functions, *SeMA Journal*, 74(4) (2017), 569-583.
- [24] Parand K, Moayeri M. M, Latifi S, Delkhosh M, A numerical investigation of the boundary layer flow of an Eyring-Powell fluid over a stretching sheet via rational Chebyshev functions, *The European Physical Journal Plus*, 132, 7, 2017, 325.
- [25] Parand K, Latifi S, Delkhosh M, Moayeri M. M, Generalized Lagrangian Jacobi Gauss collocation method for solving unsteady isothermal gas through a micro-nano porous medium, *The European Physical Journal Plus*, 133,1, 2018, 28.
- [26] Podlubny I, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of their Solution and Some of Their Applications*, vol. 198, Academic Press, 1998.
- [27] Rahimkhani P, Ordokhani Y, Babolian E, Fractional-order Bernoulli wavelets and their applications, *Appl. Math. Modell.* 40, 2016, 8087-8107.
- [28] Saadatmandi A, Dehghan M, Azizi M. R, The Sinc-Legendre collocation method for a class of fractional convection-diffusion equations with variable coefficients, *Commun. Nonlinear Sci*, 17, 2012, 4125-4136.
- [29] Sin C. S, Zheng L, Unsteady flow of viscoelastic fluid with the fractional K-BKZ model between two parallel plates, *Applied Mathematical Modelling*, 47, 2017, 114-127.

- [30] Singh H, Singh C.S, Stable numerical solutions of fractional partial differential equations using Legendre scaling functions operational matrix, Ain Shams Engineering Journal , 2016. 03. 013.
- [31] Uddin M, Haq S, RBFs approximation method for time fractional partial differential equations, Commun. Nonlinear Sci, 16, 2011, 4208-4214.
- [32] Xu X, Da X, Legendre wavelets method for approximate solution of fractional-order differential equations under multi-point boundary conditions, International Journal of Computer Mathematics, 95, 5, 2018, 998-1014.
- [33] Xu X, Da X, Legendre Wavelets Direct Method for the Numerical Solution of Time-Fractional Order Telegraph Equations, Mediterranean Journal of Mathematics, 15, 1, 2018, 27.
- [34] Zhou F, Xu X, The third kind Chebyshev wavelets collocation method for solving the time-fractional convection diffusion equations with variable coefficients, Appl. Math.Comput, 280, 2016, 11-29.

Analytical solutions	جواب های تحلیلی
Calculate operations	عملگرهای حسابی
Caputo's fractional derivative	مشتق کسری کاپوتو
Block Pulse Functions	توابع بلاک - پالس
Block pulse operational matrix of integration	ماتریس عملیاتی تابع بلاک - پالس
Bernstein wavelets operational matrix	ماتریس عملیاتی موجک برنشتاین
Collocation points	نقاط هم محلی
Collocation method	روش هم محلی
Direct summation	جمع مستقیم
Dilation	اتساع
Disjointness	مجزا بودن
Integer order	مرتبه صحیح
Expansion	بسط
Fractional calculus	حساب کسری
Fractional order	مرتبه کسری
Gamma function	تابع گاما
Galerkin method	روش گالرکین
Interval	بازه
Infinte series	سری نامتناهی
Iterative method	روش های تکراری
Kronecker delta	دلتای کرونکر

Multiplication	ضرب
Multiresolution analysis	آنالیز چندریزه ساز
Mittage-Leffler function	تابع میتاگ-لفلر
Normalized Bernstein wavelets	موجک برنشتاین نرمال شده
Nonlinear system of algebraic equations	دستگاه معادلات جبری غیر خطی
Operational matrix of integration	ماتریس عملیاتی انتگرال
Root-mean-square error	خطای جذر میانگین مربعات
Riemann-Liouville fractional integral	انتگرال کسری ریمان - لیوویل
Spectral method	روش های طیفی
Square integrable	مربع انتگرال پذیر
Tau method	روش تاو
Translation	انتقال
Tow-scale equation	معادله دو مقیاسی
Unknown coefficients	ضرایب مجهولات
Variable	متغیر

Γ	تابع گاما
b_j	توابع بلاک - پالس
f	توابع دو بعدی
f	توابع یک بعدی
$b_{j_1, j_2}(t_1, t_2)$	توابع دو بعدی بلاک - پالس
$\tilde{B}_{m, M}$	چندجمله ای برنشتاین متعامد
δ_{nm}	دلتای کرونکر
D^α	عملگر مشتق کسری کاپوتو
J^α	عملگر انتگرال کسری ریمان لیوویل
R	فضای اعداد حقیقی
F_m	ماتریس عملیاتی انتگرال بلاک - پالس از مرتبه صحیح
P_m	ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه صحیح
P^α	ماتریس عملیاتی انتگرال موجک برنشتاین از مرتبه کسری
$f \in C^n[a, b]$	مجموعه توابع پیوسته و مشتق پذیر تا مرتبه n
$\psi_{n, m}(t)$	موجک برنشتاین متعامد

Mahsa Entezari, Saeid Abbasbandy , Esmail Babolian

Numerical solution of fractional partial differential equations with normalized Bernstein wavelet method. Application and Applied Mathematics (ISI) .

Abstract:

In the present thesis, the normalized Bernstein wavelet method is introduced to obtain numerical solutions of partial differential equations. The Bernstein wavelets operational matrices of integration including integer and fractional order are introduced and applied to convert the partial differential equation with a Dirichlet boundary conditions to a nonlinear system of algebraic equations. In the proposed method, boundary conditions are automatically considered and the estimation of the approximate error of the function based on the Bernstein normalized wavelet is shown in several theorems. Finally a number of numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of the method presented in the dissertation, and in each example, the results of comparisons carried out with other methods indicate the higher accuracy of the proposed method of the thesis with other methods.

Keywords: Fractional partial differential equations, Normalized Bernstein wavelet, Operational matrix of the integer order integration, Operational matrix of the fractional order integration, Block pulse function.

Mahsa Entezari



Department of Mathematics, Science and Research Branch,
Islamic Azad University, Tehran, Iran

Numerical solution of fractional functional equations
using orthogonal basis

Supervisors:

Dr. Esmail Babolian

Dr. Saeid Abbasbandy

Advisor:

Dr. Tofigh Allahviranloo

By:

Mahsa Entezari

Autumn 2019