

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم
گروه ریاضی کاربردی

روش‌های شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پژوهشگر

مهدی امام جمعه

استادان راهنما

پروفسور سعید عباس‌بندی و پروفسور داود رستمی

استاد مشاور

دکتر الیاس شیوانیان

شهریور ماه ۱۳۹۷



تقدیم بہ ہمسر نہربان و عزیزم

خدایا...^۱

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

^۱مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزارى...

سپاس خداوندگار حكيم را كه با لطف بى كران خود، آدمى را زيور عقل آراست.

در آغاز وظيفه خود مى دانم از زحمات بى دريغ اساتيد راهنماى خود، جناب آقاىان پرفسور سعيد عباس بندى و پرفسور داوود رستمى، صميمانه تشكر و قدردانى كنم كه قطعاً بدون راهنمايى هاى ارزنده آنها اين مجموعه به انجام نمى رسيد.

از جناب آقاى دكتور الياس شيوانى مدير محترم گروه رياضى کاربردى كه زحمت مطالعه و مشاوره اين رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازى اين رساله، به نحو احسن اينجانب را مورد راهنمايى قرار دادند، كمال امتنان را دارم. از اساتيد فرزانه جناب آقاى دكتور انصارى و سركار خانم دكتور باريك بين و آقاى دكتور جوادى كه زحمت داورى رساله را متقبل شده اند كمال تشكر و قدردانى را دارم.

در پايان، بوسه مى زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانى، پدر و مادر عزيزم و بعد از خدا، وجود مقدس شان را ستايش مى كنم.

تشكر ويژه دارم از همسر عزيز و گراميم كه صبورانه با دلسوزى محيطى سر شار از آرامش را فراهم نمود تا بتوانم در كمال آرامش و آسايش به تهيه و تنظيم پايان نامه بپردازم.

از برادران عزيزم آقاىان دكتور بابك آذر نويد و دكتور احسان متقى نيز به پاس عاطفه سرشار و گرمى اميدبخش وجودشان، كه در اين سردترين روزگاران، بهترين دوستان و پشتيبان من هستند تشكر و قدردانى مى كنم.

مهدى امام جمعه
شهر يورماه ۱۳۹۷



دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

معاونت آموزشی - مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم تأییدیه هیأت داوران جلسه دفاع از رساله (فرم شماره ۵۰)

بدین وسیله گواهی می شود جلسه دفاعیه از رساله دکتری مهدی امام جمعه دانشجوی رشته : ریاضی کاربردی گرایش : آنالیز عددی تحت عنوان: بررسی روش های شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل در تاریخ ۱۳۹۷/۶/۱۹ در دانشگاه برگزار گردید و با نمره ۱۸,۷۵ و به حروف هجده و هفتاد و پنج با درجه ب مورد تایید هیأت داوران قرار گرفت.

ردیف	نام و نام خانوادگی	مرتبه ی دانشگاهی	دانشگاه	سمت	امضا
۱	آقای دکتر شهنام جوادی	استاد	دانشگاه خوارزمی	داور خارج	
۲	آقای دکتر سعید عباس بندی	استاد	امام خمینی (ره) قزوین	استاد راهنما	
۳	آقای داود رستمی	استاد	امام خمینی (ره) قزوین	استاد راهنما	
۴	آقای دکتر الیاس شیوانیان	استادیار	امام خمینی (ره) قزوین	استاد مشاور	
۵	آقای دکتر انصاری	استادیار	امام خمینی (ره) قزوین	داور داخل	
۶	خانم دکتر زهرا باریک بین	استادیار	امام خمینی (ره) قزوین	داور داخل	
۷	آقای دکتر نصر آبادی		امام خمینی (ره)	نماینده تحصیلات تکمیلی	

* در صورت وجود استاد راهنمای دوم برای پایان نامه/ رساله، یک ردیف با عنوان استاد راهنمای دوم، ذیل ردیف استاد راهنما اضافه شود.

تذکر: این برگه پس از تکمیل، در پایان نامه/ رساله درج می گردد.

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

معاونت آموزشی دانشگاه - مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهد نامه اصالت پایان نامه / رساله

دانشگاه بین المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

اینجانب مهدی امام جمعه دانشجوی رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی مقطع تحصیلی دکتری بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / رساله تحصیلی خود، با عنوان **روش های شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل** را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو

امضاء و تاریخ

شماره (نام) ثبت



سوگندنامه دانش آموختگان کارشناسی ارشد/ دکتری
دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)

به نام خدا

- سپاس ایزد منان را که مرا مشمول الطاف خویش نمود که با طی مراحل تحصیل موفق به اخذ درجه کارشناسی ارشد شوم. به شکرانه این نعمت بزرگ الهی که با امکانات این مرز و بوم، فراهم و نزد اینجانب به امانت گذاشته شده است، در پیشگاه ملت ایران به کتاب آسمانی خود، قرآن کریم، سوگند یاد می‌کنم که:
- در سراسر زندگی حرفه‌ای، در راه اعتلای کشور ایران و جامعه بشری به نحو احسن قدم برداشته و در این راه از هیچ تلاشی دریغ ننمایم.
 - در تمام فعالیت‌های تخصصی، رضای خدا را همراه با صداقت علمی و اجتماعی در نظر داشته و از موقعیت‌های به دست آمده در جهت رفع مشکلات جامعه استفاده کنم و در همه‌ی امور، منافع کشور را بر منافع فردی مقدم بدارم.
 - همواره علم و دانش خود را به روز نگاه داشته و در ایفای مسئولیت و تعهدات حرفه‌ای در حد توان سعی و تلاش خود را به کار گیرم.
- و اینک از خداوند علیم توفیق بندگی و پای بندی به مفاد این سوگندنامه را خواستارم و از او می‌خواهم که مرا در ایفای رسالت علمی و انسانی خویش موفق بدارد.

نام و نام خانوادگی دانشجو
امضاء
مهری انان



نام و نام خانوادگی دانشجو

عنوان پایان نامه / رساله

مجوز بهره برداری از پایان نامه / رساله

کلیه حقوق اعم از چاپ، تکثیر، نسخه برداری، ترجمه، اقتباس و ... از نتایج این پایان نامه برای دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره) قزوین محفوظ است. بهره برداری از این پایان نامه / رساله در چهارچوب مقررات کتابخانه و با توجه به محدودیتی که توسط استاد راهنما به شرح زیر تعیین می شود، بلامانع است:

- ☒ بهره برداری از این پایان نامه / رساله برای همگان بلامانع است.
- ☐ بهره برداری از این پایان نامه / رساله با اخذ مجوز از استاد راهنما، بلامانع است.
- ☐ بهره برداری از این پایان نامه / رساله تا تاریخ ممنوع است.

استاد راهنما می تواند یکی از گزینه های بالا را انتخاب کند و مسئولین کتابخانه موظف به رعایت موارد تعیین شده می باشد.

نام استاد و یا اساتید راهنما:

تاریخ:

امضاء:

Signature of the supervisor

چکیده

در این رساله، روش شبه طیفی-پایه شعاعی برای حل عددی معادلات تلگراف دو بعدی روی ناحیه‌های منظم و غیر منظم، معادلات غیرخطی کلین-گردن و ساین-گردن یک بعدی و دو بعدی پیاده‌سازی شده است. روش مورد نظر روشی بدون شبکه شامل سه مرحله: گسسته‌سازی زمانی، گسسته‌سازی مکانی و اعمال شرایط مرزی بر روی جواب عددی است. روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم برای فرآیند گسسته‌سازی زمانی استفاده شده است. به منظور تقریب مشتق‌های مکانی مسأله، نیز از ماتریس‌های عملیاتی به‌دست آمده از روش شبه طیفی-پایه‌شعاعی و روش شبه طیفی مبتنی بر شبه درون‌یاب چند ربعی استفاده شده است. برای انتخاب مقدار مناسب پارامتر شکل، از روش روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی استفاده شده است. در ادامه، الگوریتم پیشنهادی برای اعمال دقیق شرایط مرزی بر روی جواب عددی، روی هر دو ناحیه‌ی دو بعدی منظم و نامنظم، پیاده‌سازی شده است. در نهایت، روش بیان شده برای حل مثال‌های متعدد به کار رفته است.

کلمات کلیدی: روش بدون شبکه، توابع پایه شعاعی، پارامتر شکل، روش شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی، شبه درون‌یاب چندربعی، ناحیه نامنظم، معادله تلگراف، معادله غیرخطی کلین-گردن، معادله ساین-گردن.

فهرست مطالب

لیست تصاویر ذ

لیست جداول ز

پیشگفتار ۱

۱ توابع پایه شعاعی ۵

۱.۱ مقدمه ۶

۲.۱ تعریف تابع پایه شعاعی ۶

۳.۱ درون‌یاب پایه شعاعی ۷

۱.۳.۱ درون‌یاب پایه شعاعی سراسری و استاندارد ۸

۲.۳.۱ روش درون‌یابی توابع پایه شعاعی افزوده ۱۱

۳.۳.۱ درون‌یاب پایه شعاعی هرمیت ۱۶

۴.۱ شبه درون‌یاب چنددربعی ۱۷

۲ مروری بر روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه شعاعی ۲۰

۱.۲ مقدمه ۲۱

۲.۲ تولید نقاط ۲۲

۳.۲ تقریب جواب ۲۴

۴.۲ آزمودن جواب ۲۴

۵.۲ آزمودن به شکل قوی سراسری (روش هم‌محلی) ۲۵

۱.۵.۲ روش هم‌محلی کانسای نامتقارن ۲۵



۲۸	روش کانسا متقارن	۲.۵.۲
۲۹	روش شبه طیفی-پایه شعاعی و ماتریس‌های عملیاتی مشتق	۳.۵.۲
۳۲	۳ تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل در روش‌های توابع پایه شعاعی	
۳۳	مقدمه	۱.۳
۳۴	بررسی اثر پارامتر شکل بر روی درونیابی پایه شعاعی	۲.۳
۳۶	روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی	۳.۳
۳۷	روش تعمیم یافته ارزیابی متقابل	۴.۳
۳۷	روش برآورد حداکثر درست‌نمایی	۵.۳
۳۸	مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل در روش شبه طیفی-پایه شعاعی	۶.۳
	۴ روش بدون شبکه شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل معادله‌ی تلگراف	
۴۰	دو بعدی	
۴۱	مقدمه	۱.۴
۴۲	تکنیک‌های عددی	۲.۴
۴۳	گسسته‌سازی مکانی	۱.۲.۴
۴۴	گسسته‌سازی زمانی	۲.۲.۴
۴۵	اعمال شرایط مرزی	۳.۲.۴
۴۶	بررسی پایداری	۴.۲.۴
۴۷	نتایج عددی	۳.۴
۴۷	معادله‌ی تلگراف دو بعدی با ناحیه منظم	۱.۳.۴
۵۳	معادله‌ی تلگراف دوبعدی با ناحیه نامنظم	۲.۳.۴
۵۷	نتیجه‌گیری	۴.۴
	۵ روش شبه طیفی مبتنی بر شبه‌درون‌یاب چنددرجی برای حل عددی معادله‌ی کلین-	
۵۹	گردن و ساین-گردن غیرخطی	
۶۰	مقدمه	۱.۵
۶۱	تقریب مشتق با روش شبه طیفی-پایه شعاعی	۲.۵
۶۲	روش حل عددی	۳.۵

۶۳	گام اول. گسسته‌سازی - مکانی	۱.۳.۵
۶۵	گام دوم. گسسته‌سازی زمانی	۲.۳.۵
۶۵	گام سوم. اعمال شرایط مرزی	۳.۳.۵
۶۶	نتایج عددی	۴.۵
۶۶	معادله‌ی غیرخطی کلین-گردن	۱.۴.۵
۷۵	معادله‌ی غیرخطی ساین-گردن	۲.۴.۵
۷۹	نتیجه‌گیری	۵.۵
۸۵	مراجع	
۱۰۰	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۱۰۲	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

لیست تصاویر

۲۳	نقاط تولید شده به صورت یکنواخت در فضای آزمون دو بعدی (راست) و سه بعدی (چپ).	۱.۲
۲۳	مجموعه ۲۸۹ نقطه‌ای چبیشف در بازه $(0, 1)$ در فضای آزمون دو بعدی.	۲.۲
۲۴	نقاط <i>Lattice</i> (راست - ۲۸۹ نقطه) و نقاط <i>latin</i> (چپ - ۲۸۹ نقطه) در دامنه‌های آزمون دو بعدی.	۳.۲
۳۳	توابع پایه شعاعی گاوسی با مقادیر مختلف پارامتر شکل	۱.۳
۳۴	شکل تابع (۱.۳) و هشت نقطه روی آن	۲.۳
۳۴	درون‌یاب‌های پایه شعاعی با پارامترهای شکل متفاوت و نقاط ثابت - تابع درون‌یاب شونده با رنگ سبز مشخص شده است.	۳.۳
۳۵	شکل تغییرات خطای درون‌یاب پایه شعاعی بر حسب تغییرات پارامتر شکل (ε) برای تابع (۱.۳)	۴.۳
۴۹	جواب‌های عددی (راست) و دقیق (چپ) برای مثال ۱.۳.۴ با $N = 400$ ، $\delta t = 0.001$ در $t = 1, 3$	۱.۴
۵۱	جواب‌های عددی (سمت راست) و دقیق (سمت چپ) برای مثال ۲.۳.۴ با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 3$	۲.۴
۵۲	جواب‌های عددی (راست) و تقریبی (چپ) برای مثال ۳.۳.۴ با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 3$	۳.۴
۵۳	توزیع داده‌های پراکنده روی ناحیه نامنظم، $N = 410$	۴.۴
۵۴	توزیع خطای مطلق روی ناحیه Ω با $N = 410$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۴.۳.۴ در لحظات $t = 1$ (راست) و $t = 3$ (چپ).	۵.۴
	توزیع خطای مطلق روی ناحیه Ω با فرض $N = 410$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۵.۳.۴ در زمان‌های $t = 1$	۶.۴
۵۶	(راست)، $t = 3$ (چپ).	
	توزیع خطای مطلق روی ناحیه Ω با فرض $N = 410$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۶.۳.۴ در زمان‌های $t = 1$	۷.۴
۵۷	(راست)، $t = 3$ (چپ).	
۶۸	جواب عددی و دقیق مثال ۱.۴.۵ با فرض $N = 10, c = 0.121$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, t = 3, t = 5, t = 7$	۱.۵
	خطای مطلق روش مورد نظر برای مثال ۱.۴.۵ با فرض $N = 10, c = 0.121$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, t = 3, t = 5, t = 7$	۲.۵
۶۹		

- ۳.۵ جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۲.۴.۵ با $N = 20$ ، $c = 0.381$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های $t = 1, 2, \dots, 5$. . . ۷۰
- ۴.۵ خطای روش مورد نظر برای مثال ۲.۴.۵ با $N = 20$ ، $c = 0.381$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های $t = 1, 2, \dots, 5$. . . ۷۰
- ۵.۵ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۴.۵ (بالا) و خطای روش (پایین) با $N = 50$ ، $c = 0.181$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 2, \dots, 5$. . . ۷۱
- ۶.۵ جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۴.۵ (بالا) و خطای روش (پایین) با $N = 50$ ، $c = 0.181$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 2, \dots, 5$. . . ۷۱
- ۷.۵ جواب‌های دقیق و تقریبی روش $MQQI - PS$ برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.05$ با فرض $N = 20$ ، $c = 2.2$ و خطاهای مطلق روش $MQQI - PS$ با $N = 20$ ، $c = 2.2$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های مختلف $t = 1, 2, 3, 4$. . . ۷۲
- ۸.۵ خطاهای مطلق روش $MQQI - PS$ با $N = 20$ ، $c = 2.2$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های مختلف $t = 1, 2, 3, 4$ برای مثال ۴.۴.۵ با فرض $C = 0.05$. . . ۷۳
- ۹.۵ جواب‌های دقیق و تقریبی در زمان‌های مختلف برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.5$ که در روش، پارامتر شکل $c = 0.97$ ، برای مثال ۴.۴.۵ با فرض $C = 0.05$. . . ۷۳
- ۱۰.۵ خطای روش $MQQI - PS$ با $N = 50$ ، $c = 0.97$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های مختلف برای مثال ۴.۴.۵ با فرض $N = 50$ و $\delta t = 0.001$ فرض شده است. . . ۷۴
- ۱۱.۵ جواب‌های دقیق (چپ) و تقریبی (راست) مثال ۵.۴.۵ با $N = 10 \times 10$ داده پراکنده در دامنه، پارامتر شکل $c = 4.15$ و $C = 0.5$. . . ۷۵
- ۱۲.۵ توزیع خطای مطلق روش $MQQI - PS$ در مثال ۵.۴.۵ با $N = 10 \times 10$ داده پراکنده، پارامتر شکل $c = 4.15$ و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$. . . ۷۶
- ۱۳.۵ شکل رفتار خطای L_{∞} نسبت به تغییرات پارامتر شکل (۵) در روش $MQQI - PS$ با $N = 10 \times 10$ و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$ برای مثال ۵.۴.۵ . . . ۷۷
- ۱۴.۵ توزیع خطای مطلق روش MQ-PS با مقدار پارامتر شکل $c = 0.37$ (بالا) و توزیع خطای روش MQQI-PS با پارامتر شکل $c = 4.6$ (پایین) در مثال ۵.۴.۵ با $N = 25 \times 25$ و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$. . . ۸۱
- ۱۵.۵ جواب دقیق و تقریبی مثال ۶.۴.۵ با $C = 0.5$ ، $N = 121$ ، پارامتر شکل $c = 1.275$ و $\delta t = 0.001$. . . ۸۲
- ۱۶.۵ خطای مطلق روش مورد نظر در لحظات مختلف $t = 9$ ، $t = 36$ ، $t = 108$ برای مثال ۶.۴.۵ با $C = 0.5$ ، $N = 121$ ، پارامتر شکل $c = 1.275$ و $\delta t = 0.001$. . . ۸۲
- ۱۷.۵ شکل جواب‌های عددی (راست) و دقیق (چپ) مثال ۷.۴.۵ با $N = 25 \times 25$ ، $\delta t = 0.001$ و پارامتر شکل تابع چنددرجی $c = 0.31$ در لحظه $t = 5$. . . ۸۳
- ۱۸.۵ شکل توزیع خطای مطلق روش $MQ - PS$ در مثال ۷.۴.۵ با $N = 25 \times 25$ و $c = 0.31$ و $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 5$. . . ۸۳
- ۱۹.۵ شکل خطای L_{∞} نسبت به پارامتر شکل $\square$ با $N = 25 \times 25$ و $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 5$ برای مثال ۷.۴.۵ . . . ۸۴

لیست جداول

۷	فهرست برخی از توابع شعاعی	۱.۱
۱۶	فهرست برخی توابع شعاعی معین مثبت مشروط	۲.۱
۴۸	مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۱.۳.۴ در زمان‌های مختلف t	۱.۴
۵۰	مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۲.۳.۴ در زمان‌های مختلف t	۲.۴
۵۲	مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۳.۳.۴ در زمان‌های مختلف t	۳.۴
۵۴	مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۴.۳.۴ در زمان‌های متفاوت t	۴.۴
۵۵	مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۵.۳.۴ در زمان‌های مختلف t	۵.۴
۵۶	مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۶.۳.۴ در زمان‌های مختلف t	۶.۴
۶۸	مقادیر خطاها در مثال ۱.۴.۵ در زمان‌های مختلف t با استفاده از $N = 10$ داده پراکنده، $\delta t = 0.001$ و $c = 0.121$	۱.۵
۶۹	مقادیر خطاها برای مثال ۲.۴.۵ در زمان‌های مختلف t ، $N = 20$ ، $\delta t = 0.001$ با روش MQQI-PS و $c = 0.381$	۲.۵
۷۰	مقادیر خطاها برای مثال ۳.۴.۵ در زمان‌های مختلف t ، $N = 50$ ، $\delta t = 0.001$ با روش $MQQI - PS$ و $c = 0.181$	۳.۵
	مقادیر خطاها برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.05$ ، $\alpha = -2$ ، $\beta = 1$ ، $\gamma = 1.5$ در زمان‌های مختلف t با روش	۴.۵
۷۲	$MQQI - PS$ ، پارامتر شکل $c = 2.2$ و $N = 20$ و $\delta t = 0.001$	۵.۵
	مقادیر خطاها برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.5$ ، $\alpha = -2$ ، $\beta = 1$ ، $\gamma = 1.5$ در زمان‌های مختلف t ، با روش $MQQI - PS$	۵.۵
۷۳	پارامتر شکل $c = 0.97$ و $N = 50$ و $\delta t = 0.001$	۶.۵
	مقادیر خطاها برای مثال ۵.۴.۵ با $\alpha = -1$ ، $\beta = -2$ ، $\gamma = -1$ و $k = 2$ در زمان‌های مختلف t با روش	۶.۵
۷۴	$MQQI - PS$ ، پارامتر شکل $c = 4.15$ و $N = 10 \times 10$ و $\delta t = 0.01$	۷.۵
	مقادیر خطاها برای مثال ۵.۴.۵ با $\alpha = -1$ ، $\beta = -2$ ، $\gamma = 1$ و $k = 2$ در زمان‌های مختلف t برای دو روش	۷.۵
۷۵	$MQQI - PS$ و $MQ - PS$ با $N = 25 \times 25$ و $\delta t = 0.01$	۸.۵
۷۸	مقادیر خطاها برای مثال ۶.۴.۵ با $C = 0.5$ ، $N = 121$ ، $\delta t = 0.001$ و پارامتر شکل $c = 1.275$	۸.۵



۹.۵

خطای روش $MQ - PS$ برای مثال ۷.۴.۵ در زمان‌های مختلف با مقدار پارامتر شکل $c = 0.31$, $N = 25 \times 25$ و

۷۹ $\delta t = 0.001$

پیشگفتار

امروزه، بسیاری از معادله دیفرانسیل‌هایی که مهندسين، فیزیک‌دانان و ریاضی‌دانان با آن‌ها روبرو هستند به دلیل پیچیده بودن شکل آن‌ها از جمله غیرخطی بودن معادله یا وجود دامنه‌های نامنظم، به صورت تحلیلی و دقیق قابل حل نیستند و تعیین جواب دقیق برای آن‌ها ناممکن یا پرهزینه است. بنابراین، روش‌های عددی برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی، دارای اهمیت ویژه‌ای هستند. روش‌های عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی ارائه شده‌اند که به‌طور نمونه می‌توان به روش‌های تفاضلات متناهی^۲، عناصر متناهی^۳، حجم متناهی^۴ و عناصر مرزی^۵ اشاره نمود. این روش‌ها برای پیاده‌سازی نیاز به شبکه‌بندی دارند و از آن‌جا که شبکه‌بندی در مسایل با ابعاد بالا و ناحیه‌های نامنظم با پیچیدگی و هزینه‌های محاسباتی خاص خود همراه است. بنابراین، در مسایل با ابعاد بالاتر از سه، به‌کارگیری روش‌های مبتنی بر شبکه، مانند تفاضلات متناهی و عناصر متناهی امکان‌پذیر نیستند. از دسته روش‌های دیگر، که در سال‌های اخیر، برای حل معادلات دیفرانسیل مورد توجه واقع شده است می‌توان به روش‌های بدون شبکه^۶ اشاره نمود. همان‌طور که از نام آن‌ها مشخص است در این نوع روش‌ها نیاز به شبکه‌بندی خاصی از دامنه وجود ندارد و تنها بر اساس یک مجموعه از داده‌های پراکنده در دامنه و روی مرز آن مسأله، گسسته‌سازی انجام می‌شود و در روش حل، هیچ‌گونه ساختار و ارتباط خاصی بین نقاط گسسته‌سازی، مورد نیاز نیست. اخیراً روش‌های بدون شبکه‌ی متنوعی معرفی و توسعه داده شده‌اند که در مواجهه با مسایل عملی و کاربردی، نتایج مناسبی را به‌همراه داشته‌اند.

از جمله روش‌های مبتنی بر مفهوم بدون شبکه، می‌توان به موارد زیر اشاره نمود: روش ذرات

^۲Finite differences

^۳Finite elements

^۴Finite volume

^۵Boundary elements

^۶Meshless methods

هیدرودینامیکی هموار^۷ [۱]، روش عناصر پخش شده^۸ [۲]، روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین^۹ [۳]، روش هسته‌های بازتولیدی^{۱۰} [۴]، روش هم‌محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی^{۱۱} [۵، ۶] که به دلیل تنوع بسیار بالای آن‌ها از معرفی همه‌ی آن‌ها صرفه‌نظر می‌شود. برای مرور و مطالعه کلی این روش‌ها می‌توان به [۷] مراجعه نمود.

تعریف توابع پایه شعاعی بر اساس فاصله‌ی یک سری داده‌های پراکنده بیان می‌شود و بعد مکانی در آن حذف می‌شود. بنابراین در مسایل با ابعاد مختلف، تفاوتی در استفاده از آن‌ها وجود ندارد که این یک مزیت بسیار خوب برای توابع پایه شعاعی است. از طرفی، این نوع روش‌ها به یک شبکه‌بندی خاص برای گسسته‌سازی، نیاز ندارند. بنابراین برای مسایل با دامنه‌های پیچیده و نامنظم نیز به همان راحتی دامنه‌های ساده، قابل پیاده‌سازی هستند.

اولین بار در سال ۱۹۷۰ تابع چندربعی^{۱۲} که یک نوع از توابع پایه شعاعی است برای درون‌یابی داده‌های پراکنده توسط رولاند هاردی^{۱۳} معرفی شد. سپس کاربرد توابع پایه شعاعی در مسایل درون‌یابی گسترش پیدا نمود و تقریباً اولین بار کانس^{۱۴} در سال ۱۹۹۰ یک روش هم‌محلی بدون شبکه، مبتنی بر توابع پایه شعاعی را برای حل معادلات با مشتقات جزئی ارایه نمود و با توجه به مزیت‌های روش‌های بدون شبکه و پایه شعاعی، به‌کارگیری و توسعه روش کانس، در حل مسایل کاربردی مورد توجه محققان و مهندسان بسیاری قرار گرفته‌اند.

در حل عددی معادلات دیفرانسیل، نیاز است مشتقات تابع نیز گسسته‌سازی شوند. در حالت معمول، مشتقات نیز مانند خود تابع بر حسب توابع پایه، بسط داده می‌شوند. در این حالت تعداد مجهولات افزایش خواهد یافت که منجر به افزایش حجم عملیات محاسباتی می‌شود. از طرفی ماتریس‌های حاصل از گسسته‌سازی با توابع پایه شعاعی به‌طور معمول ماتریس‌های پر، با عدد وضعیت بزرگ هستند. روش دیگر این است که بتوان مشابه با روش‌های طیفی، مقادیر گسسته‌ی مشتقات را به‌صورت مستقیم (بدون نیاز به حل دستگاه معادلات) و بازگشتی از روی مقادیر تابع با ضرب یک ماتریس در بردار مقادیر گسسته‌ی تابع،

^۷Smoothed particle hydrodynamic (SPH)

^۸Diffuse element method (DEM)

^۹Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG)

^{۱۰}Reproducing kernels method (RKM)

^{۱۱}Radial basis functions (RBFs)

^{۱۲}Multiquadric function

^{۱۳}Rolland Hardy

^{۱۴}Kansa

روی مجموعه‌ای از داده‌های پراکنده‌ی موجود، محاسبه نمود. این نوع ماتریس‌ها، که در حالت گسسته، جایگزین عملگرهای دیفرانسیلی می‌شوند را ماتریس‌های عملیاتی مشتقات می‌نامند. این روش تقریب مشتقات تابع، روی یک سری داده‌های گسسته را روش شبه طیفی^{۱۵} گویند و اگر با درونیابی توابع پایه شعاعی ترکیب شوند به‌طور معمول آن‌را روش شبه طیفی-پایه شعاعی^{۱۶} می‌نامند. از مزایای روش‌های شبه طیفی، می‌توان به دقت و سرعت بالای آن‌ها اشاره نمود[۸].

نکته دیگر این که بسیاری از توابع پایه شعاعی مهم و پر کاربرد دارای یک پارامتر عددی به نام پارامتر شکل^{۱۷} هستند. به‌طور معمول افزایش مقدار این پارامتر، منجر به کاهش عدد وضعیت ماتریس درونیاب و پایداری روش می‌شود اما خطای روش را افزایش می‌دهد و در صورت کاهش مقدار آن، خطای روش کاهش می‌یابد اما عدد وضعیت ماتریس درونیاب و در نتیجه اثر خطاهای اولیه افزایش خواهد یافت. بنابراین، انتخاب مقدار مناسب و بهینه‌ی پارامتر شکل در استفاده از توابع پایه شعاعی، بسیار مهم است. در حالت کلی تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل، در روش توابع پایه شعاعی هنوز یک مسأله باز است اما با معرفی توابع هزینه‌ی مختلف و مینیمم سازی آن بر حسب تغییرات پارامتر شکل، روش‌هایی برای انتخاب مقدار مناسب پارامتر شکل، ارایه شده است که یکی از آن‌ها، روش ارزیابی متقابل- همه بجز یکی^{۱۸} است. این روش دارای کارایی و دقت مناسب است.

در این رساله برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مورد بحث از روش هم‌محلی پایه شعاعی استفاده شده است که در آن برای محاسبه‌ی تقریب مشتقات مکانی در حالت گسسته از روش شبه طیفی، مبتنی بر توابع پایه شعاعی و برای تعیین مقدار مناسب پارامتر شکل، از روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی استفاده شده است.

این رساله شامل پنج فصل است. در فصل اول، انواع توابع پایه شعاعی و درونیاب‌های پایه شعاعی معرفی و خواص آن‌ها بررسی خواهد شد. در فصل دوم، برخی روش‌های بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل، معرفی می‌شوند. در ادامه این فصل، با توجه به نیاز به گسسته‌سازی مشتقات، روش شبه طیفی-پایه شعاعی و ماتریس‌های عملیاتی دیفرانسیلی معرفی می‌شوند. در فصل سوم، نیز برخی روش‌های انتخاب مناسب پارامتر شکل، برای درونیابی ارایه شده است و در نهایت روش ارزیابی متقابل- همه بجز یکی (LOOCV) برای تعیین مقدار مناسب پارامتر شکل در روش شبه طیفی-پایه شعاعی ارایه شده است. در فصل چهارم، یک روش حل بدون شبکه، مبتنی بر روش هم‌محلی شبه طیفی-پایه شعاعی برای

^{۱۵}Pseudo-spectral method (PS method)

^{۱۶}Radial basis functions-pseudospectral method (RBFs-PS)

^{۱۷} Shape parameter

^{۱۸}Leave-one-out cross validation (LOOCV)

حل معادله‌ی تلگراف دو بعدی ارائه خواهد شد. با ارائه مثال‌های متنوع و مقایسه با روش‌هایی از جمله 19 MLPG، 20 MLWS، 21 MBS-DQM و 22 PDQM کارایی آن ثابت شده است. در ادامه روش مورد نظر را روی دامنه‌ی نامنظم پیاده‌سازی نموده و جواب‌های قابل قبولی نیز به دست آمده است. در فصل پنجم نیز روش هم‌محلی بدون شبکه‌ی شبه طیفی - پایه شعاعی مبتنی بر شبه درون‌یاب چنددرجی، برای حل عددی معادلات غیرخطی کلین-گردن²³ و ساین-گردن²⁴ یک بعدی و دو بعدی پیاده‌سازی شده است.

شایان ذکر است مقالات زیر [۹، ۱۰] برگرفته از نتایج به دست آمده در این رساله هستند:

1. D. Rostamy, M. Emamjome and S. Abbasbandy, A meshless technique based on the pseudospectral radial basis functions method for solving the two-dimensional hyperbolic telegraph equation, The European Physical Journal Plus 132 (2017), no. 6, 263.
2. M. Emamjome, S. Abbasbandy, D. Rostamy, Quasi interpolation of radial basis functions-pseudospectral method for solving nonlinear Klein-Gordon and sine-Gordon equations, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, accepted 2019 (submitted 2018).

¹⁹Meshless local Petrov-Galerkin

²⁰Meshless local weak and strong method

²¹Modified cubic B-spline basis functions based differential quadrature method

²²Polynomial differential quadrature method

²³Klein-Gordon

²⁴sine-Gordon

فصل ۱

توابع پایه شعاعی

۱.۱ مقدمه

روش‌های پایه شعاعی (RBFs) بخش مهم و فعالی از تحقیق‌های ریاضی هستند. شروع و ایده اولیه‌ی روش‌های RBFs از زمین شناسی، نقشه برداری و هواشناسی است. بعد از آن کاربردهای این روش در دیگر زمینه‌ها مانند حل عددی معادلات با مشتقات جزئی، آمار و یادگیری ماشین نیز گسترش یافت. در دهه ۱۹۷۰، رولاند هاردی به دلیل این که از نتایج درون‌یابی چندجمله‌ای برای مسایل کارتوگرافی راضی نبود، روشی را پیشنهاد داد که آن را روش چندربعی^۱ نامیده است. روش جدید او برای تطبیق داده‌ها از داده‌های پراکنده توانست با هماهنگی و دقت بیشتری نسبت به روش‌های قبلی، توزیع داده‌های پراکنده را برآورد نماید [۱۱، ۱۲]. در سال‌های بعد، این ایده‌ی درون‌یابی و تقریب توابع، به روش کلی‌تری تعمیم پیدا کرد که اساس آن، استفاده از توابع شعاعی^۲ $\phi(r)$ است در این توابع مقدار تابع، فقط به فاصله اقلیدسی از نقطه‌ای به نام مرکز بستگی دارد و به دلیل خاصیت تقارن شعاعی به عنوان توابع شعاعی شناخته می‌شوند و این روش درون‌یابی را روش پایه شعاعی گویند. روش چندربعی نیز یک مثال خاص از این روش کلی است. در این فصل، ابتدا به تعریف و بررسی خواص توابع پایه شعاعی پرداخته و در بخش بعدی موضوع درون‌یابی، با استفاده از توابع پایه شعاعی بیان می‌شود. مطالب این فصل از مرجع [۱۳] اقتباس شده است.

۲.۱ تعریف تابع پایه شعاعی

تعریف ۱.۲.۱. تابع $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پایه شعاعی^۳ نامیده می‌شود اگر و تنها اگر وجود داشته باشد تابع $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ به‌طوری‌که:

$$\varphi(x) = \phi(r), \quad r = \|x - x_c\|_2, \quad (۱.۱)$$

که در آن $\|\cdot\|_2$ نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^d$ است و $x_c \in \mathbb{R}^d$ را نقطه مرکزی گویند.

^۱Multiquadric method

^۲Radial function

^۳Radial basis function

جدول ۱.۱: فهرست برخی از توابع شعاعی

$\phi(r), r > 0$	توابع پایه شعاعی تکه-تکه هموار	$\phi(r), r > 0$	توابع پایه شعاعی کاملاً هموار
r	خطی	$e^{(-\varepsilon r)^2}$	گوسی
r^3	مکعبی	$\frac{1}{1+(\varepsilon r)^2}$	مربعی معکوس
$r^2 \log(r)$	اسپلاین صفحه نازک (TPS)	$\frac{1}{\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}}$	چندربعی معکوس
		$\sqrt{1+(\varepsilon r)^2}$	چندربعی

همانطور که مشاهده می‌شود مقدار یک تابع پایه شعاعی تنها به فاصله اقلیدسی از نقطه‌ای به نام مرکز بستگی دارد و می‌توان گفت به دلیل همین خاصیت تقارن شعاعی به آن‌ها توابع شعاعی گفته می‌شود. در جدول ۱.۱ فهرستی از توابع شعاعی ارایه شده است.

۳.۱ درون‌یاب پایه شعاعی

یکی از مسایل مشترک در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی، مسأله‌ی تقریب داده‌های پراکنده^۴ و در واقع تعیین تقریب برای توابع (اغلب نامعلوم) است. برای تعیین تابع تقریب، روش‌های متنوعی وجود دارد یکی از آن‌ها، روش درون‌یابی است. در حالت داده‌های یک بعدی، روش‌های زیادی برای درون‌یابی وجود دارد. بیشتر آن‌ها (مانند درون‌یاب چندجمله‌ای و فوریه‌ای) شامل یک ایده مشابه کلی هستند. بدین صورت که برای مجموعه‌ای از داده‌های پراکنده $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$ ($x_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, y_i \in \mathbb{R}$) یک مجموعه از توابع پایه $\psi_j(x), j = 1, 2, \dots, N$ نیز انتخاب می‌شوند طوری که ترکیب خطی آن‌ها

$$S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \psi_j(x) \quad (۲.۱)$$

در شرط درون‌یاب صدق کند:

$$S(x_i) = y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (۳.۱)$$

در این حالت پیدا کردن ضرایب بسط $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N$ برای تعیین درون‌یاب، منجر به حل یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر می‌شود:

$$A \vec{\lambda} = \mathbf{f}, \quad (۴.۱)$$

طوری که:

$$A_{i,j} = \psi_j(x_i), \mathbf{f}_i = y_i = f(x_i). \quad (۵.۱)$$

^۴Scattered data approximation

در حالت یک بعدی اگر نقاط x_i متمایز باشند برای بسیاری از مجموعه توابع $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^N$ ، دستگاه حاصل نامنفرد خواهد بود. اما درون‌یابی توابع چند متغیره در فضاهایی با بعد بیشتر از یک، مشکل‌تر است، حتی نشان داده شده است که درون‌یابی روی داده‌های دلخواه با چند جمله‌ای‌ها در فضاهایی با بعد بیشتر از یک، در حالت کلی امکان پذیر نیست [۱۴] (صفحه ۱۹). در صورتی که تحت شرایط خاص این کار امکان پذیر است [۱۴] (فصل دوم).

روش درون‌یابی با توابع پایه شعاعی یکی از روش‌های مفید برای درون‌یابی داده‌های پراکنده در فضاهای چند بعدی است. از مزایای آن می‌توان به شکل ساده و دقت بالای آن‌ها اشاره نمود. در این بخش، مروری بر شرایط توابع پایه شعاعی برای تضمین نامنفرد بودن ماتریس حاصل از روش درون‌یابی با توابع پایه شعاعی خواهد شد.

۱.۳.۱ درون‌یاب پایه شعاعی سراسری و استاندارد

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^N$ مجموعه‌ای از داده‌های متمایز باشند و $\{f_j\}_{j=1}^N$ مقادیر تابعی، متناظر با نقاط مربوط باشند، در این صورت درون‌یاب پایه شعاعی استاندارد و سراسری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(r = \|x - x_j\|_2), \quad (6.1)$$

طوری که $\phi(r), r \geq 0$ یک تابع شعاعی است.

ضرایب بسط λ_j از روی شرط درون‌یابی $S(x_i) = f_i, i = 1, \dots, N$ به دست می‌آیند که منجر به حل دستگاه خطی متقارن زیر می‌شود:

$$A \vec{\lambda} = \mathbf{f}, \quad (7.1)$$

که در آن $a_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|_2)$ است.

برای این که دستگاه (۷.۱) قابل حل و جواب یکتا داشته باشد باید ماتریس A نامنفرد باشد. یک راه برای اطمینان از این موضوع این است که ماتریس A معین مثبت باشد. در بخش بعد به بررسی توابع پایه شعاعی‌هایی خواهیم پرداخت که ماتریس درون‌یاب متناظر با آن‌ها معین مثبت باشند.

تعریف ۲.۳.۱. تابع پیوسته $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ را معین مثبت روی $\mathbb{R}^d$ گویند، هرگاه به ازای مجموعه از

$$\text{نقاط متمایز } x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d \text{ و هر بردار } \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T \text{ داشته باشیم:}$$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \varphi(x_j - x_k) \geq 0. \quad (۸.۱)$$

همچنین تابع φ را معین مثبت اکید گویند هرگاه نابرابری در رابطه بالا به صورت اکید باشد.

نکته ۳.۳.۱. اگر تابع پایه شعاعی $\varphi = \phi(r = \|\cdot\|^2)$ معین مثبت اکید باشد آنگاه ماتریس درون‌یاب

(۷.۱) معین مثبت و نامنفرد خواهد بود

در سال ۱۹۳۸ توسط شوینبرگ^۵ در [۱۵] اولین شرایط کافی روی $\phi(r)$ که معین مثبت اکید بودن تابع پایه شعاعی و در نتیجه نامنفرد بودن ماتریس درون‌یاب (۷.۱) را تضمین کند ارائه شد. کمی بعد، ثابت شد که می‌توان شرایط کافی راحت‌تری را در نظر گرفت تا کلاس بزرگ‌تری از توابع را شامل شود [۱۶]. برای درک این نتایج، ابتدا توابع کاملاً یکنوا تعریف می‌شود.

تعریف ۴.۳.۱. (توابع کاملاً یکنوا) تابع ψ کاملاً یکنوا^۶ روی $[0, \infty)$ گفته می‌شود اگر

(۱) تابع ψ متعلق به کلاس $C[0, \infty)$ باشد

(۲) تابع ψ متعلق به کلاس $C^\infty(0, \infty)$ باشد

(۳) برای $r > 0$ و به ازای هر $\ell = 0, 1, 2, \dots$ شرط $(-1)^\ell \psi^{(\ell)}(r) > 0$ برقرار باشد.

مثال ۵.۳.۱. سه تابع پایه شعاعی معرفی شده در ابتدای جدول ۱.۱ کاملاً یکنوا هستند چون به ازای

$r > 0$ و $\ell = 0, 1, 2, \dots$ داریم:

$$\psi(r) = \phi(\sqrt{r}) = e^{-\varepsilon^2 r} \implies (-1)^\ell \psi^{(\ell)}(r) = \varepsilon^{2\ell} e^{-\varepsilon^2 r} > 0,$$

$$\psi(r) = \phi(\sqrt{r}) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 r} \implies (-1)^\ell \psi^{(\ell)}(r) = \frac{\ell! \varepsilon^{2\ell}}{(1 + \varepsilon^2 r)^{\ell+1}} > 0,$$

$$\psi(r) = \phi(\sqrt{r}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 r}} \implies (-1)^\ell \psi^{(\ell)}(r) = \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2}) \varepsilon^{2\ell}}{\sqrt{\pi} (1 + \varepsilon^2 r)^{\ell + \frac{1}{2}}} > 0.$$

^۵Schoenberg

^۶Completely monotonic

حال در ادامه ارتباط توابع کاملاً یکنوا و توابع معین مثبت بیان خواهد شد.

قضیه ۶.۳.۱. [۱۴] تابع $\psi(r)$ کاملاً یکنوا است اگر و تنها اگر تابع پایه شعاعی $\varphi = \psi(r = \|\cdot\|^2)$ به ازای هر d بر $\mathbb{R}^d$ معین مثبت باشد.

قضیه ۷.۳.۱. [۱۴] تابع $\psi(r)$ کاملاً یکنوای غیر ثابت است اگر و تنها اگر به ازای هر d تابع پایه شعاعی $\varphi = \psi(r = \|\cdot\|^2)$ بر $\mathbb{R}^d$ معین مثبت اکید باشد.

بر همین اساس شوینبرگ، قضیه زیر را در مورد شرایط کافی نامنفرد بودن ماتریس درونیابی پایه شعاعی (۷.۱) ارایه نمود.

قضیه ۸.۳.۱. (شوینبرگ) [۱۵] اگر $\psi(r) = \phi(\sqrt{r})$ یک تابع غیرثابت کاملاً یکنوا روی $[0, \infty)$ باشد آنگاه برای هر مجموعه N نقطه‌ای متمایز $\{x_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}^d$ ماتریس درونیابی A با درایه‌های $a_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|_2)$ معین مثبت است و بنابراین نامنفرد خواهد بود.

از این‌رو بنابر قضایای بالا، سه تابع پایه شعاعی گفته شده در مثال ۵.۳.۱ معین مثبت اکید هستند و ماتریس‌های حاصل از درونیابی (۷.۱) برای آن‌ها معین مثبت و نامنفرد خواهند بود. از آن‌جا که برای توابع چنددرجی و پایه شعاعی خطی ذکر شده در جدول ۱.۱ با فرض $r > 0$ نتیجه می‌شود $\psi(r) > 0$ و $\psi'(r) > 0$ ، بنابر این از قضیه بالا نمی‌توان برای آن‌ها نتایج مشابهی به‌دست آورد. اما برای این نوع توابع پایه شعاعی می‌توان از قضیه زیر استفاده نمود.

قضیه ۹.۳.۱. [۱۶] فرض کنید که $\psi(r) = \phi(\sqrt{r}) \in C^\infty[0, \infty)$ و برای $r > 0$ داشته باشیم $\psi(r) > 0$ اگر $\psi'(r) > 0$ یک تابع غیرثابت و کاملاً یکنوا روی $(0, \infty)$ باشد آنگاه برای هر مجموعه‌ی N نقطه‌ای متمایز $\{x_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}^d$ ماتریس $A_{N \times N}$ با عنصرهای داخلی $a_{i,j} = \phi(\|x_i - x_j\|_2)$ نامنفرد است و همچنین برای $N \geq 1$ ماتریس A دارای $(N-1)$ مقدار ویژه‌ی منفی و فقط یک مقدار ویژه‌ی مثبت است.

مثال ۱۰.۳.۱. آشکار است که توابع پایه شعاعی چنددرجی و خطی که در جدول ۱.۱ معرفی شده‌اند در شرایط پیوستگی و مثبت بودن صدق می‌کنند. همچنین مشتق اول آن‌ها غیرثابت و کاملاً یکنوا است، چون به ازای $r > 0$ و $\ell = 0, 1, 2, \dots$ داریم:

$$\psi(r) = \phi(\sqrt{r}) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 r} \implies (-1)^{\ell-1} \psi^{(\ell)}(r) = \frac{\Gamma(\ell - \frac{1}{2}) \varepsilon^{2\ell}}{2\sqrt{\pi}(1 + \varepsilon^2 r)^{\ell - \frac{1}{2}}} > 0$$

$$\psi(r) = \phi(\sqrt{r}) = r^{\frac{1}{2}} \implies (-1)^{\ell-1} \psi^{(\ell)}(r) = \frac{\Gamma(\ell - \frac{1}{2})}{2\sqrt{\pi} r^{\ell - \frac{1}{2}}} > 0$$

از این رو بنابر قضیه ۹.۳.۱ ماتریس‌های حاصل از درون‌یاب (۶.۱) برای دو تابع بالا نامنفرد خواهند بود و روش درون‌یابی پایه شعاعی سراسری استاندارد برای توابع چنددرجی و پایه شعاعی خطی نیز خوش تعریف و جواب یکتا دارد.

براساس مطالب فوق مسأله‌ی درون‌یابی داده‌های پراکنده به روش (۶.۱) برای توابع پایه شعاعی معین مثبت اکید به دلیل این‌که ماتریس‌های درون‌یاب حاصل از آن‌ها نامنفرد است قابل اجرا و خوش تعریف است. متأسفانه قضایای فوق برای توابع پایه شعاعی چنددرجی توسعه یافته^۷، توابع چندهارمونیک^۸ و توابع اسپلاین‌های صفحه نازک^۹ که یک نمونه از آن‌ها در جدول ۱.۱ معرفی شده است، قابل استفاده نیستند اما می‌توان با اضافه کردن جملاتی به (۶.۱) و توسعه روش درون‌یابی سراسری استاندارد، مجدد شرایط نامنفرد بودن ماتریس درون‌یاب جدید را برای کلاس وسیع تری از توابع پایه شعاعی تضمین نمود. در ادامه به بیان روش پایه شعاعی افزوده^{۱۰} پرداخته می‌شود.

۲.۳.۱ روش درون‌یابی توابع پایه شعاعی افزوده

برای تعریف درون‌یاب پایه شعاعی افزوده نیاز به بیان چند تعریف است که ابتدا آن‌ها بیان می‌شوند.

تعریف ۱۱.۳.۱. (فضای چندجمله‌ای‌های کامل) فرض کنید $\Pi_m(\mathbb{R}^d)$ فضای چندجمله‌ای‌های کامل d -متغیره از درجه کوچکتر یا مساوی m در فضای $\mathbb{R}^d$ باشد. علاوه بر آن اگر M نمایانگر بعد این فضا باشد آنگاه

$$M = \binom{m+d}{d} \quad (9.1)$$

^۷Generalized multiquadrics (GMQ) radial basis functions

^۸Polyharmonic functions

^۹Thin plate splines functions

^{۱۰}Augmented radial basis functions method

تعریف ۱۲.۳.۱. (روش درونیابی توابع پایه شعاعی افزوده) برای مجموعه‌ای از داده‌های پراکنده‌ی متمایز $\{x_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}^d$ و مقادیر متناظر $\{f_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}$ تابع درونیاب پایه شعاعی افزوده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|_2) + \sum_{k=1}^M \gamma_k p_k(x) \quad (10.1)$$

مشروط به این که :

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j p_k(x_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (11.1)$$

که در آن $\phi(\|x - x_j\|_2)$ تابع پایه شعاعی و مجموعه‌ی $\{p_1(x), p_2(x), \dots, p_M(x)\}$ یک پایه برای فضای چند جمله‌ای‌های کامل $\Pi_m(\mathbb{R}^d)$ هستند.

به عنوان مثال برای فضای چند جمله‌ای‌های درجه اول ($m = 1$) در فضای دو بعدی ($d = 2$) این پایه‌ها عبارتند از $\{1, x, y\}$ و همچنین برای فضای چند جمله‌ای‌های درجه‌ی دو، پایه‌ها به صورت $\{1, x, y, x^2, y^2, xy\}$ هستند. اکنون با اعمال شرایط درونیاب روی (۱۰.۱) و اعمال شرایط (۱۱.۱) یک دستگاه معادلات خطی با $N + M$ معادله و $N + M$ مجهول نتیجه می‌شود. این دستگاه معادلات خطی را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{pmatrix} \Phi & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12.1)$$

که در آن $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^T$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_M)^T$

$$\Phi_{N \times N} = (\phi(\|x_i - x_j\|)), \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

یک ماتریس $(N + 1) \times (N + 1)$ و

$$\mathbf{P}_{N \times M} = (p_k(x_j)), \quad k = 1, 2, \dots, M, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

یک ماتریس $N \times M$ است.

ماتریس ضرایب دستگاه (۱۲.۱) را ماتریس درونیاب گویند که با حل دستگاه (۱۲.۱) ضرایب بسط تابع درونیاب تعیین می‌شود. اگر ماتریس درونیاب نامنفرد باشد آنگاه روش، خوش تعریف خواهد بود. در ادامه به بررسی شرایط نامنفرد بودن ماتریس درونیاب برای روش توابع پایه شعاعی افزوده پرداخته می‌شود.

تعریف ۱۳.۳.۱. تابع پیوسته $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ را معین مثبت مشروط از مرتبه m روی $\mathbb{R}^d$ گویند، هرگاه به ازای هر N داده پراکنده متمایز $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ و هر بردار $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$ که به

$$\sum_{j=1}^N c_j p(x_j) = 0, \quad (13.1)$$

ازای هر چندجمله‌ای p حداکثر از درجه $m - 1$ در رابطه

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \varphi(x_j - x_k) \geq 0. \quad (14.1)$$

صدق می‌کنند، داشته باشیم:

تابع φ را اکیداً معین مثبت مشروط گویند هرگاه رابطه بالا فقط به ازای $\mathbf{c} = 0$ دقیقاً برابر با صفر باشد. حال بر اساس تعریف توابع پایه شعاعی معین مثبت مشروط و به کارگیری آن‌ها به عنوان توابع پایه با بیان قضیه‌ی زیر، به حل پذیری و خوش تعریف بودن مسأله‌ی درون‌یابی داده‌های پراکنده به شکل ۱۰.۱ پرداخته می‌شود.

قضیه ۱۴.۳.۱. [۱۴] مسأله‌ی درون‌یابی (۱۰.۱) را در نظر بگیرید. اگر توابع φ توابع پایه شعاعی معین مثبت مشروط از مرتبه m بر فضای $\mathbb{R}^d$ باشند و همچنین اگر مجموعه نقاط $\{x_j\}_{j=1}^N \subset \mathbb{R}^d$ به‌طور یکتا، یک پایه برای فضای چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر $m - 1$ را مشخص کند آن‌گاه ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی (۱۲.۱) نامنفرد است و از این رو دستگاه معادلات خطی (۱۲.۱) جواب منحصر به فرد دارد و بنابراین، مسأله‌ی درون‌یابی (۱۰.۱) خوش تعریف است.

در ادامه با بیان چند قضیه به محک کاربردی برای تشخیص توابع پایه شعاعی معین مثبت و مشروط روی فضاهای $\mathbb{R}^d$ خواهیم رسید.

قضیه ۱۵.۳.۱. [۱۴] هر تابع معین مثبت مشروط (اکید) از مرتبه m بر فضای $\mathbb{R}^d$ یک تابع معین مثبت مشروط (اکید) از مراتب بالاتر نیز است. علاوه بر آن هر تابع معین مثبت (اکید) یک تابع معین مثبت مشروط از هر مرتبه است.

در قضیه‌ی بعدی شرایط تشخیص توابع پایه شعاعی معین مثبت مشروط از روی توابع پایه شعاعی یکنوا ارایه می‌شود.

قضیه ۱۶.۳.۱. [۱۴] فرض کنید $\phi \in C[0, \infty) \cup C^\infty(0, \infty)$ ، آن‌گاه تابع $\varphi = \phi(\|\cdot\|^2)$ یک تابع پایه شعاعی معین مثبت مشروط از مرتبه m بر $\mathbb{R}^d$ به ازای هر d است، اگر و تنها اگر $(-1)^m \phi^{(m)}$ بر $(0, \infty)$ کاملاً یکنوا باشد.

در زیر، صورت کلی‌تری از قضیه ۱۷.۳.۱ ارائه می‌شود که ارتباط بین توابع کاملاً یکنوا و توابع شعاعی اکیداً معین مثبت مشروط را بیان می‌کند.

قضیه ۱۷.۳.۱. [۱۴] اگر تابع $\varphi = \phi(\|\cdot\|^2)$ در شرایط قضیه ۱۶.۳.۱ صدق کند و علاوه بر آن φ چندجمله‌ای از درجه حداکثر m نباشد آن‌گاه تابع φ به ازای هر d بر $\mathbb{R}^d$ اکیداً معین مثبت مشروط از مرتبه m است.

در این بخش به ارائه چند مثال از توابع شعاعی معین مثبت مشروط پرداخته می‌شود.

مثال ۱۸.۳.۱. (توابع پایه شعاعی چندربعی توسعه یافته): توابع چندربعی توسعه یافته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varphi(x) = (-1)^{[\beta]} (\varepsilon + \|x\|_2)^\beta, \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}. \quad (15.1)$$

با در نظر گرفتن تابع ϕ به صورت زیر

$$\phi(r) = (-1)^{[\beta]} (\varepsilon + r)^\beta, \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}, \quad (16.1)$$

و ℓ بار مشتق گیری داریم:

$$\phi^{(\ell)}(r) = (-1)^{[\beta]} \beta(\beta-1) \cdots (\beta-\ell+1) (\varepsilon+r)^{\beta-\ell}, \quad (17.1)$$

و برای $\ell = [\beta]$ داریم:

$$(-1)^{[\beta]} \phi^{([\beta])}(r) = \beta(\beta-1) \cdots (\beta-\ell+1) (\varepsilon+r)^{\beta-\ell} \geq 0, \quad (18.1)$$

در نتیجه تابع شعاعی $\phi(r)$ کاملاً یکنوا است و علاوه بر آن $m = [\beta]$ کوچکترین مقدار m است که تابع $(-1)^m \phi^{(m)}(r)$ کاملاً یکنوا است. از طرفی چون $\beta \notin \mathbb{N}$ بنابراین ϕ یک تابع چندجمله‌ای نیست. در نتیجه بر اساس قضیه ۱۷.۳.۱ توابع چندربعی توسعه یافته بر $\mathbb{R}^d$ به ازای هر d اکیداً معین مثبت مشروط از مرتبه $m \leq [\beta]$ هستند.

در حالت خاص اگر $\beta = \frac{1}{2}$ باشد تابع چندربعی استاندارد ارایه شده در جدول ۱.۱، اکیداً معین مثبت مشروط از هر مرتبه $m > 0$ است، از این رو بنا بر قضیه ۱۷.۳.۱ نیاز به اضافه کردن چندجمله‌ای در (۱۰.۱) نیست.

مثال ۱۹.۳.۱. (توابع اسپلین صفحه نازک): توابع اسپلین صفحه نازک به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varphi(x) = (-1)^{\beta+1} \|x\|^{2\beta} \log(\|x\|), \beta \in \mathbb{N}. \quad (۱۹.۱)$$

به طور مشابه بنابر قضیه ۱۷.۳.۱ توابع اسپلین صفحه نازک نیز اکیداً معین مثبت مشروط از مرتبه $m \geq \beta + 1$ بوده و علاوه بر آن به ازای هر d بر $\mathbb{R}^d$ شعاعی هستند. برای بررسی این موضوع داریم:

$$2\varphi(x) = (-1)^{\beta+1} \|x\|^{2\beta} \log(\|x\|^2), \beta \in \mathbb{N}. \quad (۲۰.۱)$$

با فرض

$$\phi(r) = (-1)^{\beta+1} r^\beta \log(r), \beta \in \mathbb{N}. \quad (۲۱.۱)$$

به راحتی مشاهده می‌شود که $\phi(r)$ چندجمله‌ای نیست و در ضمن با مشتق‌گیری داریم:

$$\phi^{(\ell)}(r) = (-1)^{\beta+1} \beta(\beta-1) \cdots (\beta-\ell+1) r^{\beta-\ell} \log(r) + p_\ell(r), 1 \leq \ell \leq \beta, \quad (۲۲.۱)$$

به طوری که p_ℓ یک چندجمله‌ای از درجه $\beta - \ell$ است. با فرض $\ell = \beta$ داریم:

$$\phi^{(\beta)}(r) = (-1)^{\beta+1} \beta! \log(r) + C, \quad (۲۳.۱)$$

بنابراین

$$\phi^{(\beta+1)}(r) = (-1)^{\beta+1} \frac{\beta!}{r}, \quad (۲۴.۱)$$

در نتیجه

$$(-1)^{\beta+1} \phi^{(\beta+1)}(r) = \frac{\beta!}{r} \geq 0, \quad (۲۵.۱)$$

بنابراین تابع (۲۱.۱) کاملاً یکنوا است و در نتیجه توابع اسپلین‌های صفحه نازک، اکیداً معین مثبت مشروط از مرتبه $m \geq \beta + 1$ هستند.

در جدول ۲.۱ فهرستی از معروف‌ترین توابع شعاعی معین مثبت مشروط ارایه شده است. برای بررسی بیشتر ویژگی‌های توابع معین مثبت، ارتباط آن‌ها با توابع پایه شعاعی و اطلاع از کران‌های خطای درون‌یابی با توابع پایه شعاعی، می‌توان به [۱۷، ۱۳] مراجعه نمود.

جدول ۲.۱: فهرست برخی توابع شعاعی معین مثبت مشروط

شرایط	مرتبه	$\phi(r), r > 0$	نام تابع
$\beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}$	$\lceil \frac{\beta}{2} \rceil$	$(-1)^{\lceil \frac{\beta}{2} \rceil} (1 + (\varepsilon r)^2)^{\frac{\beta}{2}}$	چندربعی توسعه یافته
$\beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}$	$\lceil \frac{\beta}{2} \rceil$	$(-1)^{\lceil \frac{\beta}{2} \rceil} r^\beta$	چند هارمونی
$\beta > 0, \beta \in 2\mathbb{N}$	$1 + \frac{\beta}{2}$	$(-1)^{1 + \frac{\beta}{2}} r^\beta \log(r)$	چند هارمونی
	۲	$r^2 \log(r)$	اسپلاین صفحه نازک (□□□)

۳.۳.۱ درون‌یابی پایه شعاعی هرمیت

در درون‌یابی پایه شعاعی هرمیت^{۱۱}، به جای درون‌یابی تابع f ، اثر یک عملگر دیفرانسیلی خطی روی آن، $\mathcal{L}f$ را درون‌یابی می‌کند و به جای این که درون‌یاب به صورت ترکیب خطی توابع پایه شعاعی $\phi(\|x - \xi_j\|)$ در نظر گرفته شود به صورت ترکیب خطی $\mathcal{L}\phi(\|x - x_j\|)$ در نظر گرفته می‌شود بدین صورت که عملگر $\mathcal{L}$ ابتدا روی متغیر ξ در $\phi(\|x - \xi\|)$ اثر کرده سپس در نقطه $\xi = x_j$ محاسبه شده است.

در این بخش خلاصه‌ای از روش درون‌یابی هرمیت برگرفته از [۱۸] به شرح زیر ارائه شده است. فرض کنید $\{x_j\}_{j=1}^N$ نقاط دلخواه داده شده در داخل یا روی مرز ناحیه کراندار Ω باشند و تقریب تابع f و $\mathcal{L}$ به صورت ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$f(x) \simeq S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{L}_j^\xi \phi(\|x - \xi\|), \quad (26.1)$$

$$\mathcal{L}f(x) \simeq \mathcal{L}S(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{L} \mathcal{L}_j^\xi \phi(\|x - \xi\|), \quad (27.1)$$

که در آن از قرار دادهای زیر استفاده شده است:

$$\mathcal{L}_j g(x) := \mathcal{L}g(x) \big|_{x=x_j}, j = 1, 2, \dots, N,$$

$$\mathcal{L}_j^\xi \phi(\|x - \xi\|) := \mathcal{L}^\xi \phi(\|x - \xi\|) \big|_{\xi=x_j}, j = 1, 2, \dots, N.$$

منظور از $\mathcal{L}^\xi$ اعمال عملگر $\mathcal{L}$ روی $\phi(\|x - \xi\|)$ نسبت به متغیر ξ است. حال اگر شرط درون‌یاب در داده‌های پراکنده $x = \{x_i\}_{i=1}^N$ روی (۲۷.۱) اعمال شود، نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}_i S := \mathcal{L}_i f, i = 1, 2, \dots, N,$$

که نمایش ماتریسی آن به صورت زیر است:

^{۱۱}Hermite RBF interpolation

$$A\vec{\lambda} = \mathcal{L}f \quad (28.1)$$

که در آن:

$$A_{i,j} = \mathcal{L}_i^x \mathcal{L}_j^\xi \phi(\|x - \xi\|) \big|_{(x=x_i, \xi=x_j)}, i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (29.1)$$

$$\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)^T, \quad (30.1)$$

$$\mathcal{L}f = (\mathcal{L}f(x) \big|_{x=x_1}, \mathcal{L}f(x) \big|_{x=x_2}, \dots, \mathcal{L}f(x) \big|_{x=x_N})^T. \quad (31.1)$$

ماتریس A برای نقاط گره‌ای متمایز نامنفرد است [۱۹].

۴.۱ شبه درون‌یاب چندربعی

روش درون‌یابی پایه شعاعی به دلیل دقت مناسب، همگرایی طیفی، سادگی و سهولت اجرا، یک روش مفید برای برازش داده‌های پراکنده هست. توابع چندربعی یک دسته از توابع پایه شعاعی هستند که ابتدا توسط هاردی [۱۱] معرفی شده‌اند. سپس دیگران از آن‌ها در روش‌های عددی استفاده نموده‌اند. از بین توابع پایه شعاعی از لحاظ تئوری، عملی و دقت، تقریباً توابع چندربعی مناسب‌ترین شکل توابع پایه شعاعی هستند که در حال حاضر استفاده می‌شوند [۲۰]. با این وجود، برای به‌دست آوردن درون‌یابی پایه شعاعی چندربعی، باید یک دستگاه معادلات خطی حل شود که با افزایش تعداد داده‌ها، دستگاه سریعاً بد وضع می‌شود. علاوه بر این، عدد حالت ماتریس درون‌یابی به شدت به چگالی پراکندگی نقاط وابسته است، هر چقدر چگالی و تعداد نقاط زیاد شود عدد حالت ماتریس درون‌یابی افزایش خواهد یافت و منجر به جواب‌های ناپایدار یا باعث ایجاد هزینه‌های محاسباتی غیرقابل قبول می‌شود [۲۱، ۲۲]. روش‌های متنوعی برای برطرف کردن این مشکل وجود دارد، روش شبه درون‌یابی چندربعی یکی از آن‌ها است.

روش‌های شبه درون‌یاب چندربعی^{۱۲}، از ابزارهای مفید در آنالیز داده‌های پراکنده در شاخه‌های نظری و کاربردی علوم کامپیوتر، پزشکی، جغرافیا و اقتصاد هستند. شبه درون‌یاب‌های چندربعی متعددی توسط محققین معرفی شده است و شرایط همگرایی آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است [۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶]. شکل کلی آن‌ها به صورت ترکیب خطی از توابع چندربعی با مرکزهای متفاوت و اضافه شدن چند جمله‌ای‌ها است. یکی از انواع شبه درون‌یاب‌ها به شرح زیر توسط شابک^{۱۳} و وو^{۱۴} تعریف شده است [۲۳]:

^{۱۲}Multiquadric quasi-interpolation (MQQI) methods

^{۱۳}Schaback

^{۱۴}Wu

فرض کنید N داده متمایز در بازه کراندار $\Omega = [a, b]$ موجود باشند به طوری که:

$$a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

و $h = \max\{(x_j - x_{j-1}), j = 2, \dots, N\}$ عملگر شبه درون‌یاب $\mathcal{L}_D$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathcal{L}_D f)(x) = \sum_{j=1}^N f_j \phi_j(x), \quad (32.1)$$

که در آن

$$\begin{cases} \phi_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{\psi_2(x) - (x - x_1)}{2(x_2 - x_1)}, \\ \phi_2(x) = \frac{\psi_3(x) - \psi_2(x)}{2(x_3 - x_2)} - \frac{\psi_2(x) - (x - x_1)}{2(x_2 - x_1)}, \\ \phi_j(x) = \frac{\psi_{j+1}(x) - \psi_j(x)}{2(x_{j+1} - x_j)} - \frac{\psi_j(x) - \psi_{j-1}(x)}{2(x_j - x_{j-1})}, \quad j = 3, \dots, N-2, \\ \phi_{N-1}(x) = \frac{(x_N - x) - \psi_{N-1}(x)}{2(x_N - x_{N-1})} - \frac{\psi_{N-1}(x) - \psi_{N-2}(x)}{2(x_{N-1} - x_{N-2})}, \\ \phi_N(x) = \frac{1}{2} + \frac{\psi_{N-1}(x) - (x_N - x)}{2(x_N - x_{N-1})}, \end{cases} \quad (33.1)$$

و $\psi_j(x)$ تابع پایه شعاعی چنددرجی، مطابق زیر است:

$$\psi_j(x) = \sqrt{c^2 + (x - x_j)^2}, \quad j = 2, \dots, N-1. \quad (34.1)$$

برای رده توابع $f \in C^2$ قضیه همگرایی شبه درون‌یاب ۳۲.۱ توسط شابک و وو اثبات شده است [۲۳]. محققین در [۲۷] همگرایی عملگر شبه درون‌یاب $\mathcal{L}_D f$ را برای دسته‌ی وسیع‌تری از توابع (توابع با همواری کمتر) ثابت نموده‌اند.

به سادگی می‌توان شبه درون‌یاب چنددرجی یک متغیره را به ابعاد بالاتر تعمیم داد. در این رساله از روش $^{15}\text{DS-MQ}$ [۲۸] برای تعریف شبه درون‌یاب چنددرجی در فضای $\mathbb{R}^2$ استفاده شده است. برای این کار، کافیست تعریف (۳۳.۱) را برای هر متغیر مختصات به‌طور مستقل استفاده نمود و توابع شبه درون‌یاب حاصل برای هر متغیر را در هم ضرب کرد تا شبه درون‌یاب چنددرجی تعمیم یافته، برای ابعاد بالاتر به‌دست آید.

به‌طور مثال برای تقریب $f(x, y)$ ، عملگر شبه درون‌یاب $\mathcal{L}_D$ در دامنه دو بعدی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x, y) \simeq (\mathcal{L}_D f)(x, y) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} f_{ij} \phi_i(x) \phi_j(y) = \sum_{k=1}^N f_k \Phi_k(x, y), \quad (35.1)$$

که در آن $N = N_1 \times N_2$ تعداد داده‌ها، f_{ij} مقدار تابع f در نقطه (x_i, y_j) ، همان رابطه (۳۳.۱) و برای تعریف $\phi_j(y)$ کافی است در رابطه (۳۳.۱) موارد $x, x_i, i = 1, \dots, N_1$ را با $y, y_j, j = 1, \dots, N_2$ جایگزین نمود. همچنین $\Phi_k(x, y)$ ها از ضرب $\phi_i(x)$ در $\phi_j(y)$ حاصل می‌شوند.

^{۱۵}Dimension-splitting multiquadric

همان‌طور که می‌دانیم در دسته توابع پایه شعاعی کاملاً هموار، یک پارامتر آزاد (ε) وجود دارد که به آن پارامتر شکل گویند. تغییرات این پارامتر می‌تواند تاثیر به‌سزایی در بهبود خطا و پایداری داشته باشد. اما تکنیک کلی و ثابتی برای تعیین مقدار بهینه این پارامتر شکل وجود ندارد و بر اساس مفاهیم مختلف محققان تلاش نموده‌اند، مقدار مناسب این پارامتر را برای توابع پایه شعاعی مختلف، معرفی کنند. در فصل سوم به معرفی چند نمونه از این تکنیک‌ها پرداخته شده است که در فصل‌های آتی از آن در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی استفاده خواهد شد.

فصل ۲

مروری بر روش‌های بدون شبکه مبتنی بر
توابع پایه شعاعی

۱.۲ مقدمه

مدل‌های ریاضی، ابزار مناسبی برای توضیح رفتار یک پدیده طبیعی هستند. با توجه به این که بسیاری از مدل‌های ریاضی به صورت دقیق قابل حل نیستند، روش‌های عددی، تقریبی از جواب آن مدل را برای بررسی رفتار پدیده طبیعی مورد نظر فراهم می‌کنند. بسیاری از این مدل‌سازی‌ها به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی یا به خصوص معادلات دیفرانسیل جزئی هستند و هدف، پیدا کردن مقدار تابع جواب روی دامنه داده شده و یا پارامترهای موثر در مدل است. بجز حالت‌های بسیار ساده، معمولاً معادلات مربوط یا دامنه‌های آن‌ها اغلب پیچیده هستند، به طوری که پیدا کردن جواب دقیق آن‌ها ناممکن و یا پرهزینه است. از این رو در عمل، تقریب عددی مناسب از پدیده مدل‌سازی شده مدنظر و مطلوب است. پیشرفت رایانه‌ها و الگوریتم‌های محاسباتی در نیم قرن اخیر باعث شده است، روش‌های عددی به عنوان یک ابزار قابل اعتماد معرفی شوند که محدوده‌ی کاربردهای آن‌ها به سرعت در حال افزایش هستند.

به طور نمونه در روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل، ابتدا معادلات دیفرانسیل تعریف شده روی دامنه پیوسته را به مجموعه‌ی متناهی از معادلات ساده روی مجموعه‌ای متناهی از نقاط تبدیل می‌شوند که این عمل را گسسته‌سازی گویند سپس در گام بعدی روش‌های عددی، این معادلات حاصل، حل خواهند شد (به صورت دقیق یا تقریبی). در حل عددی معادلات دیفرانسیل، می‌توان به روش‌های عددی معروف مانند تفاضلات متناهی، روش عنصرهای محدود و حجم متناهی اشاره نمود که در آن‌ها، دامنه پیوسته‌ی معادله دیفرانسیل مورد بحث به یک سری نقاط گره‌ای شبکه‌بندی شده گسسته‌سازی می‌شود.

از معایب عمده این روش‌ها می‌توان به هزینه‌های بالای محاسباتی شبکه‌بندی اشاره نمود. از طرفی در صورت نیاز به شبکه‌بندی‌های ظریف‌تر نمی‌توان از اطلاعات شبکه‌های قبلی استفاده نمود و باید تمام محاسبات از ابتدا مجدد انجام شوند. نکته دیگر این که در ناحیه‌های نامنظم، ایجاد شبکه‌بندی با یک نوع ارتباط ثابت و مشخص بین نقاط، با پیچیدگی‌های زیادی همراه است. از این رو برای محاسبه‌ی سریع و آسان جواب‌های تقریبی در مسایل پیچیده مهندسی و علوم، ابزارهای دیگری معرفی شدند که گسسته‌سازی مکانی ناحیه‌ی مورد نظر بر اساس یک سری داده‌های پراکنده (بدون ارتباط خاصی بین نقاط) انجام می‌شود که به آن‌ها روش‌های بدون شبکه گفته می‌شود. هر چند روش‌های بدون شبکه متعددی ارایه شده‌اند اما می‌توان مراحل اجرای آن‌ها را به سه گام اساسی و معمول زیر تقسیم نمود:

۱- تولید نقاط:

برای اجرای روش‌های بدون شبکه و گسسته‌سازی مکان، باید مجموعه‌ای از نقاط در داخل یا روی مرز ناحیه‌ی مربوط وجود داشته باشد. از این رو باید مجموعه‌ای از نقاط، به عنوان داده‌های پراکنده، (بدون نیاز به وجود ارتباط خاص بین نقاط) دامنه و مرز مسأله را پوشش دهند که در ساختن و محاسبه‌ی جواب‌های

تقریبی به کار می‌روند.

۲- تقریب جواب:

مانند بسیاری از روش‌های عددی، تابع مجهول به صورت ترکیب خطی از تعداد متناهی توابع پایه‌ای از فضای جواب تقریبی نوشته می‌شود که برای تعیین جواب تقریبی، کافیست ضرایب بسط را تعیین نمود. در واقع تابع جواب با یک بسط متناهی از توابع پایه‌ای در فضای جواب، تقریب زده می‌شود.

۳- آزمودن:

در گام نهایی برای محاسبه‌ی ضرایب مجهول در جواب تقریبی پیشنهادی، باید آن جواب در معادلات حاکم صدق کند. که این معادلات به‌طور مستقیم از روی شکل اصلی (شکل قوی^۱) مسأله نوشته می‌شوند یا از روی شکل و معادلات به‌دست آمده از معادلات اصلی (شکل ضعیف^۲) به‌دست می‌آیند. این گام را آزمودن جواب می‌نامند. این آزمودن روی شکل ضعیف یا قوی می‌تواند روی کل دامنه (سراسری) یا افزاز دامنه به چند زیر دامنه (موضعی) باشد.

انتخاب روش‌های متفاوت برای اجرا نمودن سه گام فوق، منجر به ایجاد روش‌های متنوع بدون شبکه شده است. در این رساله هدف، بررسی و پیاده سازی روش‌های بدون شبکه سراسری روی شکل قوی مسأله، مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی است که در فصل‌های آتی ارایه می‌شود. در ادامه ابتدا به‌طور خلاصه، چند روش از شیوه‌های مختلف اجرای سه گام گفته شده با تمرکز بر معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی خطی مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲.۲ تولید نقاط

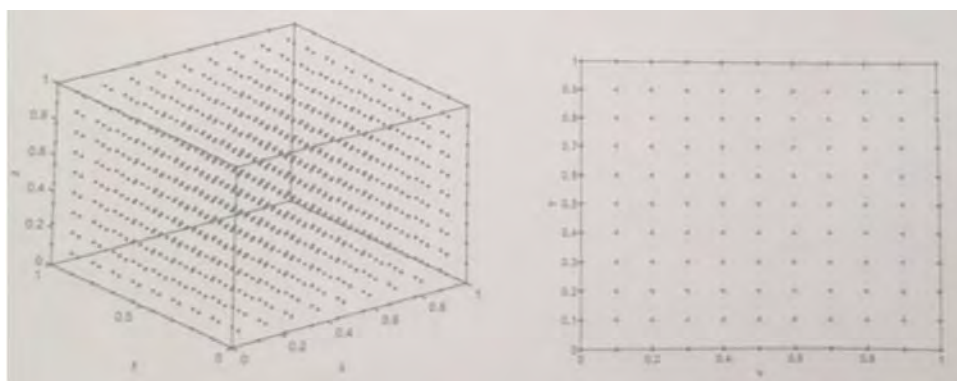
همان گونه که اشاره شد، در گام اول اجرای روش‌های بدون شبکه، نیاز به تولید نقاط میدانی در ناحیه‌ی مسأله مورد نظر است. یکی از مزیت‌های اصلی روش‌های بدون شبکه، آزادی عمل در انتخاب داده‌های پراکنده در داخل دامنه و روی مرزها است. در ادامه برخی از شکل‌های متداول در انتخاب داده‌های پراکنده در دامنه‌های آزمون $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ و همچنین $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ارایه می‌شوند:

نقاط یکنواخت:

یکی از متداول‌ترین نوع انتخاب نقاط در روش‌های بدون شبکه، انتخاب نقاط با پراکندگی یکنواخت در دامنه است. برای تولید نقاط یکنواخت کافی است ناحیه مورد نظر، با طول گام ثابت تقسیم بندی شود. در شکل ۱.۲ نقاط یکنواخت در فضای آزمون دو بعدی (راست) و سه بعدی (چپ) رسم شده‌اند.

^۱Strong form

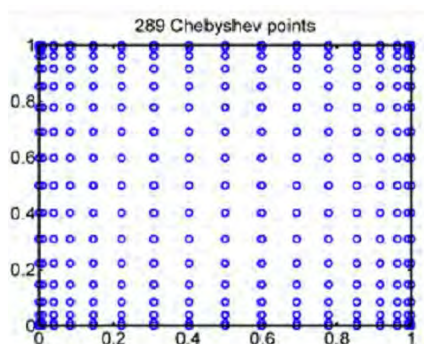
^۲Weak form



شکل ۱.۲: نقاط تولید شده به صورت یکنواخت در فضای آزمون دو بعدی (راست) و سه بعدی (چپ).

نقاط چبیشف^۳:

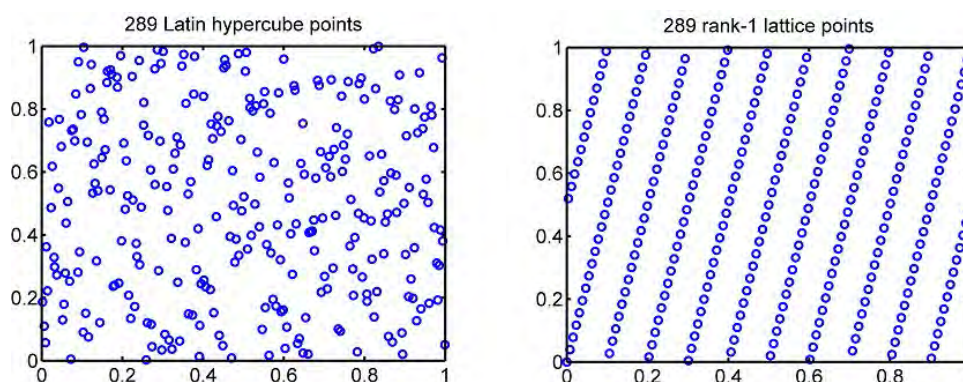
مجموعه نقاط چبیشف، رده معمول دیگری از نقاط انتخابی در روش‌های بدون شبکه است. این مجموعه از نقاط، اغلب برای حل مسایلی که حساسیت جواب در نقاط نزدیک به مرز بیشتر است، استفاده می‌شوند. در حقیقت این نقاط ریشه‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته در دامنه مورد نظر هستند. در شکل ۲.۲ این مجموعه از نقاط در دامنه آزمون دو بعدی رسم شده‌اند. رده‌های متفاوت دیگری از توزیع داده‌های پراکنده در دامنه موجود هستند که به عنوان نقاط میدانی در



شکل ۲.۲: مجموعه ۲۸۹ نقطه‌ای چبیشف در بازه (0, 1) در فضای آزمون دو بعدی.

روش‌های بدون شبکه استفاده می‌شوند. دو نمونه از آن را در شکل ۳.۲ می‌توان دید.

^۳Chebyshev points



شکل ۳.۲: نقاط *Lattice* (راست - ۲۸۹ نقطه) و نقاط *latin* (چپ - ۲۸۹ نقطه) در دامنه‌های آزمون دو بعدی.

۳.۲ تقریب جواب

همان‌گونه که پیش از این اشاره شد، دومین گام اساسی و مشترک در روش‌های بدون شبکه، تقریب جواب است. در این گام جواب مسئله به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi_j(x),$$

طوری که در رابطه بالا $\Phi_j(\cdot)$ توابع پایه‌ای مشخص و λ_j ضرایب مجهولی هستند که در گام سوم روش‌های بدون شبکه محاسبه می‌شوند.

۴.۲ آزمون جواب

در مرحله‌ی آخر اجرایی نمودن روش‌های بدون شبکه پس از تعیین توابع پایه و ساختن تابع تقریب، با اعمال نمودن معادلات حاکم بر مسئله (در یکی از حالت‌های شکل قوی یا ضعیف مسئله)، روی یکی از شکل‌های تقریب پیشنهادی که در گام قبل توضیح داده شد، ضرایب مجهول، در جواب تقریبی به دست می‌آیند و از آن‌جا تقریبی برای جواب به ازای هر x در داخل ناحیه با مرز داده شده، به دست می‌آید یا این‌که به‌طور مستقیم از معادلات حاکم و شکل تقریبی جواب، مقادیر تابع جواب در تعداد نقاطی از دامنه، تقریب زده می‌شود (روش‌های شبه طیفی). روش‌های متنوع و بسیار زیادی برای آزمون، تاکنون ارایه شده است که می‌توان آن‌ها را در گروه‌های زیر دسته‌بندی نمود:

الف) آزمون به شکل قوی

الف - (۱) شکل قوی سراسری

الف - (۲) شکل قوی موضعی

ب) آزمودن به شکل ضعیف

ب - (۱) شکل ضعیف سراسری

ب - (۲) شکل ضعیف موضعی.

در روش‌های سراسری آزمودن، جواب‌های تقریبی با اعمال روش هم‌محلی، روی مجموعه‌ای از داده‌های پراکنده واقع در دامنه اصلی، محاسبه می‌شوند اما در روش‌های موضعی ابتدا دامنه‌ی اصلی به چند زیر دامنه تقسیم بندی شده و سپس جواب تقریبی با کمک داده‌های پراکنده در هر یک از نواحی موضعی محاسبه می‌شود.

در این رساله به بررسی روش‌های آزمودن قوی سراسری پرداخته می‌شود. در بخش‌های بعدی این فصل ابتدا چند نمونه از این روش‌ها معرفی می‌شوند و سپس کاربرد روش شبه طیفی-پایه شعاعی برای حل تقریبی چند نمونه از معادلات دیفرانسیل جزئی خطی و غیرخطی روی دامنه‌های منظم و نامنظم مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۵.۲ آزمودن به شکل قوی سراسری (روش هم‌محلی)

این روش به‌طور گسترده‌ای در روش‌های تقریبی توابع پایه شعاعی و ذرات هیدرو دینامیکی هموار به‌کار می‌رود. در این روش بعد از جایگذاری تابع تقریب در شکل اصلی و قوی، معادلات حاکم باید در مجموعه‌ای از نقاط که به آن‌ها نقاط هم‌محلی گفته می‌شود صدق کنند. نتیجه حاصل، یک دستگاه معادلات معمولی است که ضرایب تابع تقریب در آن مجهول هستند. باید دقت کرد که تعداد این نقاط نباید کمتر از تعداد ضرایب مجهول در تابع تقریب باشد. به وضوح این روش، یک روش ساده و سریع است اما عمده‌تاً ناپایداری دستگاه حاصل، مشکل اساسی این روش است.

۱.۵.۲ روش هم‌محلی کانسا نامتقارن

در سال ۱۹۹۰، کانسا [۵، ۶] برای اولین بار روش هم‌محلی پایه شعاعی را برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی، سهموی و هذلولوی، به ویژه با استفاده از توابع پایه شعاعی چنددرجی توسعه داد. از این رو، روش اغلب به روش کانسا نیز معروف است. روش کانسا یک روش بدون شبکه است که از توابع پایه شعاعی برای تقریب استفاده می‌کند. این روش بر اساس روش هم‌محلی با اعمال شرایط حاکم بر مسأله، در نقاط هم‌محلی بر روی تابع تقریب که ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی است حاصل می‌شود. از مزایای متمایز

آن در مقایسه با روش‌های کلاسیک می‌توان به همگرایی مناسب، عدم نیاز به انتگرال‌گیری و اجرای آسان آن اشاره نمود. بنابراین، این روش به سرعت مورد توجه دانشمندان و مهندسان واقع شد و به‌طور کاربردی در حل مسایل علوم پایه و مهندسی استفاده شد. در سال‌های اخیر نیز گسترش‌های متنوعی برای افزایش کارایی و دقت این روش ارایه شده است. به دلیل این‌که روش کانسا نیز یک روش بدون شبکه است و فقط به فاصله بین داده‌های پراکنده وابسته است از این رو روش کانسا نیز مزایای روش‌های بدون شبکه را داراست. از جمله‌ی این مزایا، می‌توان به سادگی استفاده از آن در مسایل با بعد بالا و انعطاف پذیری آن در مواجهه با مسایل با دامنه‌های نامنظم اشاره نمود.

برای توضیح روش کانسا، مسأله‌ی مقدار مرزی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), x \in \Omega, \quad (1.2)$$

که شرایط مرزی آن به‌صورت زیر است:

$$\mathcal{B}u(x) = g(x), x \in \Gamma, \quad (2.2)$$

که در روابط فوق $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیلی خطی، $\mathcal{B}$ عملگر خطی دیفرانسیلی مرزی، f, g توابع معلوم و به اندازه‌ی کافی هموار، $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ناحیه‌ی داخلی مسأله و $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ مرز ناحیه Ω هستند.

ایده اساسی روش کانسا، تقریب تابع جواب u به‌صورت ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی به‌صورت زیر است:

$$u(x) \simeq u_N(x) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|), \quad (3.2)$$

که در آن $\{x_j\}_{j=1}^N$ نقاط دلخواه داده شده در داخل یا روی مرز ناحیه Ω در مسأله (۲.۲) - (۱.۲) و λ_j ضرایب مجهول هستند. با جای‌گذاری رابطه (۳.۲) در مسأله (۲.۲) - (۱.۲) و استفاده از خاصیت خطی بودن عملگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{B}$ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{L}\phi(\|x - x_j\|) = f(x), x \in \Omega, \quad (4.2)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{B}\phi(\|x - x_j\|) = g(x), x \in \Gamma. \quad (5.2)$$

حال فرض کنید $\{\xi_i\}_{i=1}^{N_I}$ نقاط متمایز در داخل دامنه Ω و $\{\xi_j\}_{j=N_I+1}^N$ نقاط متمایز روی مرز دامنه Γ هستند. بر اساس روش هم‌محلی، با انتخاب نقاط هم‌محلی $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ روابط (۵.۲) - (۴.۲) به دستگاه معادلات خطی زیر تبدیل می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{L}\phi(\|\xi_i - x_j\|) = f(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_I, \quad (6.2)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{B}\phi(\|\xi_i - x_j\|) = g(\xi_i), \quad i = N_I + 1, \dots, N. \quad (7.2)$$

یادآوری می‌شود که نقاط هم‌محلی و نقاط مرکزی توابع پایه شعاعی، می‌توانند دلخواه و متفاوت در دامنه باشند. اما در روش کانسا به‌طور معمول، نقاط هم‌محلی و نقاط مرکزی در توابع پایه شعاعی، یکسان فرض می‌شوند. از این رو با فرض $\xi_j = x_j$ ، $j = 1, 2, \dots, N$ ، و نوشتن دستگاه معادلات (7.2) - (6.2) به شکل ماتریسی خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{L}} \\ A_{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

که در آن:

$$f = [f(x_1), \dots, f(x_N)]^T, g = [g(x_1), \dots, g(x_N)]^T, \quad (9.2)$$

$$(A_{\mathcal{L}})_{ij} = \mathcal{L}\phi(\|x_i - x_j\|), \quad i = 1, 2, \dots, N_I, \quad (10.2)$$

و

$$(A_{\mathcal{B}})_{ij} = \mathcal{B}\phi(\|x_i - x_j\|), \quad i = N_I + 1, \dots, N. \quad (11.2)$$

در ادامه با فرض نامنفرد بودن ماتریس ضرایب کانسا

$$K = \begin{pmatrix} A_{\mathcal{L}} \\ A_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}, \quad (12.2)$$

بردار λ به دست می‌آید. بنابراین یک جواب تقریبی، برای مسأله (2.2) - (1.2) محاسبه خواهد شد. کارآیی و اعتبار روش کانسا در مقالات مختلف بررسی شده است. در تحقیق [6] کانسا، مجموعه‌ای از روش‌ها مبتنی بر روش هم‌محلی پایه شعاعی را برای حل معادلات با مشتقات جزئی شرح داده و اثربخشی و کارآیی آن‌را با استفاده از توابع پایه شعاعی چندربعی، از لحاظ پیچیدگی محاسباتی و دقت روش، مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و نتایج حاصل را با روش تفاضلات متناهی مقایسه نموده است. همچنین ایشان در مقاله [29، 30] نشان داده است که این روش برای انواع دیگر مسایل معادلات دیفرانسیل جزئی از قبیل معادلات غیرخطی بیضوی، دستگاه معادلات بیضوی، معادلات هذلولوی و معادلات سهموی که در بسیاری از مسایل مهندسی و فیزیک کاربرد دارند نیز قابل به کارگیری است.

اما متأسفانه مشکل اساسی روش کانسا نامتقارن، این است که وارون پذیری ماتریس حاصل از گسسته‌سازی مکانی، در حالت کلی، تاکنون ثابت نشده است. حتی ثابت شده است ماتریس ضرایب دستگاه حاصل برای آرایش خاصی از نقاط می‌تواند منفرد باشد. در تحقیق [31] نویسندگان به بررسی این موضوع پرداخته‌اند. راه کارهای متنوعی برای حل پذیری دستگاه حاصل از ایده کانسا، توسط محققین ارایه شده است. یکی

از این راه کارها توسط فاشور^۴ ارایه شده است [۱۸]. در این روش از ایده درون‌یاب‌های هرمیتی و ایجاد ماتریس هم‌محلی متقارن استفاده شده است که در بخش بعد به آن پرداخته می‌شود.

۲.۵.۲ روش کانسا متقارن

براساس ایده درون‌یاب پایه شعاعی هرمیت که در فصل اول معرفی شد، فاشور روشی برای به‌دست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی ارایه نمود که منجر به حل دستگاه معادلات متقارن و نامنفرد خطی می‌شود [۱۸].

برای توضیح روش کانسا متقارن، مسأله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (13.2)$$

که شرایط مرزی آن به‌صورت زیر فرض شده است:

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \quad (14.2)$$

که در روابط فوق $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیلی خطی، f, g توابع معلوم و به اندازه‌ی کافی هموار، $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ناحیه‌ی داخلی مسأله و $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ مرز ناحیه Ω هستند.

ایده اساسی روش کانسا متقارن، تقریب تابع جواب u به روش درون‌یابی هرمیت پایه شعاعی به‌صورت زیر است:

$$u(x) \simeq u_N(x) = \sum_{j=1}^{N_I} \lambda_j \mathcal{L}_j^\xi \phi(\|x - \xi\|) + \sum_{j=N_I+1}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|), \quad (15.2)$$

که در آن $\{x_j\}_{j=1}^{N_I}$ نقاط دلخواه داده شده در داخل ناحیه Ω ، $\{x_j\}_{j=N_I+1}^N$ نقاط روی مرز ناحیه Γ ، λ_j ضرایب مجهول، $\mathcal{L}^\xi$ مانند روش درون‌یاب هرمیت در فصل اول همان اعمال عملگر $\mathcal{L}$ روی $\phi(\|x - \xi\|)$ نسبت به متغیر ξ ، $\mathcal{L}_i^\xi \phi(\|x - \xi\|) := \mathcal{L}^\xi \phi(\|x - \xi\|)|_{\xi=x_i}$ است و به‌طور مشابه $\mathcal{L}_i^x$ تعریف می‌شود. با جای‌گذاری رابطه (۱۵.۲) در مسأله (۱۴.۲) - (۱۳.۲)، استفاده از خاصیت خطی بودن عملگر $\mathcal{L}$ و

اعمال روش هم‌محلی روی نقاط $\{x_i\}_{i=1}^N$ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^{N_I} \lambda_j \mathcal{L}_i^x \mathcal{L}_j^\xi \phi(\|x - \xi\|) + \sum_{j=N_I+1}^N \lambda_j \mathcal{L}_i^x \phi(\|x - x_j\|) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N_I, \quad (16.2)$$

$$\sum_{j=1}^{N_I} \lambda_j \mathcal{L}_j^\xi \phi(\|x_i - \xi\|) + \sum_{j=N_I+1}^N \lambda_j \phi(\|x_i - x_j\|) = g(x_i), \quad i = N_I + 1, \dots, N. \quad (17.2)$$

^۴Fasshauer

نمایش ماتریسی دستگاه معادلات خطی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} A_{\mathcal{L}^x \mathcal{L}^\xi}^I & A_{\mathcal{L}^x}^B \\ A_{\mathcal{L}^\xi}^I & A^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_\Omega \\ \lambda_\Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (18.2)$$

که در آن ماتریس‌های $A_{\mathcal{L}^x \mathcal{L}^\xi, ij}^I$ و A^B مربعی هستند به طوری که:

$$(A_{\mathcal{L}^x \mathcal{L}^\xi}^I)_{ij} = (\mathcal{L}^x(\mathcal{L}^\xi \phi(\|x - \xi\|)) |_{\xi=x_j}) |_{x=x_i} \quad i = j = 1, \dots, N_I,$$

$$(A^B)_{ij} = \phi(\|x_i - \xi_j\|) \quad i = j = N_I + 1, \dots, N.$$

اما دو ماتریس دیگر شکل مستطیلی دارند با درایه‌های زیر:

$$(A_{\mathcal{L}^x}^B)_{ij} = [\mathcal{L}^x \phi(\|x - \xi_j\|)] |_{x=x_i} \quad i = 1, \dots, N_I, \quad j = N_I + 1, \dots, N,$$

$$(A_{\mathcal{L}^\xi}^I)_{ij} = [\mathcal{L}^\xi \phi(\|x_i - \xi\|)] |_{\xi=x_j}, \quad i = N_I + 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N_I.$$

ماتریس ضرایب دستگاه (۱۸.۲) برای هر نوع داده پراکنده و برای توابع پایه معین مثبت یک ماتریس متقارن و نامنفرد است [۱۸]. این روش همچنین توسط دیگران نیز مورد توجه واقع شده است [۳۲، ۳۳، ۳۴].

۳.۵.۲ روش شبه طیفی-پایه شعاعی و ماتریس‌های عملیاتی مشتق

فرض کنید $u(x)$ جواب یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی باشد در اکثر روش‌های تقریبی،

جواب با یک ترکیب خطی از تعدادی توابع پایه با ضرایب مجهول تقریب زده می‌شود:

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j(x), \quad (19.2)$$

سپس تلاش می‌شود با استفاده از معادلات حاکم بر مسأله، ضرایب مجهول را به دست آورد. یکی از

این روش‌ها، اعمال روش هم‌محلی بر روی شکل قوی است در این حالت با جای‌گذاری جواب تقریبی در

معادله دیفرانسیل، نیاز می‌شود مشتقات جواب تقریبی در نقاط هم‌محلی، نیز محاسبه شود. در روش‌های

طیفی با ایجاد یک ماتریس عملیاتی، مقادیر مشتقات جواب تقریبی در نقاط گره‌ای از روی مقادیر جواب

تقریبی به دست می‌آیند. برای این منظور اگر (۱۹.۲) در نقاط $\{x_j\}_{j=1}^N$ محاسبه شود نتیجه خواهد شد:

$$u_N(x_i) = \sum_{j=1}^N \xi_j \phi_j(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (20.2)$$

که شکل ماتریسی آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{u} = A \boldsymbol{\xi}, \quad (21.2)$$

که در آن $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_N]^T$ بردار ضرایب تقریب، عناصر ماتریس A به شکل $A_{i,j} = \phi_j(x_i)$ و بردار تقریب تابع جواب در نقاط هم‌محلی $u = [u_N(x_1), \dots, u_N(x_N)]^T$ حال با مشتق‌گیری (اعمال عملگر دیفرانسیلی خطی $\mathcal{L}$) نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}u_N(x) = \sum_{j=1}^N \xi_j \mathcal{L}\phi_j(x). \quad (22.2)$$

با محاسبه‌ی (۲۲.۲) در نقاط هم‌محلی $\{x_i\}$ ، $i = 1, \dots, N$ ، و نوشتن معادلات حاصل به شکل ماتریسی، نتیجه خواهد شد:

$$\mathcal{L}u = A_{\mathcal{L}}\xi, \quad (23.2)$$

که ξ در بالا تعریف شده است،

$$\mathcal{L}u = [\mathcal{L}u_N(x_1), \dots, \mathcal{L}u_N(x_N)]^T, \quad (24.2)$$

و

$$(A_{\mathcal{L}})_{i,j} = \mathcal{L}\phi_j(x_i). \quad (25.2)$$

در روش‌های طیفی (حل معادلات دیفرانسیل معمولی در فضای یک بعدی $(x \in \mathbb{R})$) تلاش می‌شود با ایجاد یک ماتریس عملیاتی، بردار $\mathcal{L}u$ یا همان بردار مشتق جواب برحسب بردار جواب، در نقاط گره‌ای محاسبه شود:

$$\mathcal{L}u = D_{\mathcal{L}}u, \quad (26.2)$$

در روش شبه طیفی-پایه شعاعی نیز تلاش می‌شود از هر دو مزیت روش‌های پایه شعاعی و روش‌های طیفی در فضاهای چند بعدی استفاده شود.

فرض کنید در (۲۰.۲) پایه‌ها مجموعه‌ای از توابع پایه شعاعی هستند. با فرض نامنفرد بودن ماتریس درون‌یاب A نتیجه می‌شود:

$$\xi = A^{-1}u \quad (27.2)$$

با جایگزینی ξ در رابطه (۲۳.۲) نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{L}u = A_{\mathcal{L}}A^{-1}u, \quad (28.2)$$

بنابراین ماتریس عملیاتی $D_{\mathcal{L}}$ متناظر با عملگر دیفرانسیلی خطی $\mathcal{L}$ برای محاسبه‌ی تقریب $\mathcal{L}u(x)$ در نقاط هم‌محلی x_i ، $i = 1, \dots, N$ ، را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$D_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}}A^{-1}. \quad (29.2)$$

در نتیجه تقریب عددی $\mathcal{L}u(x)$ به روش شبه طیفی-پایه شعاعی در نقاط هم‌محلی x_i ، $i = 1, \dots, N$ ، را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mathcal{L}u = D_{\mathcal{L}}u, \quad (30.2)$$

به منظور به دست آوردن ماتریس عملیاتی مشتق $D_{\mathcal{L}}$ ، نیاز به نامفرد بودن ماتریس درون‌یاب A است. حالت‌هایی که ماتریس درون‌یاب معکوس‌پذیر است در فصل قبل اشاره شده است.

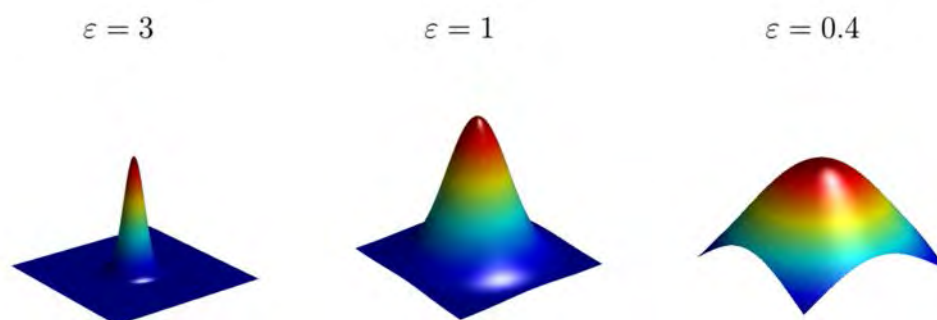
از آنجا که روش‌های شبه طیفی از جمله روش‌هایی، با دقت بالا برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی شناخته می‌شوند. از این رو، روش‌های شبه طیفی-پایه شعاعی نیز یک روش کارا و با دقت بالا، برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی است. کاربردهایی از این روش در [۳۵، ۳۶] ارایه شده است. در فصل‌های چهار و پنج از این روش برای گسسته‌سازی و تقریب عملگر خطی دیفرانسیلی $\mathcal{L}u = \Delta u$ استفاده شده است.

فصل ۳

تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل در
روش‌های توابع پایه شعاعی

۱.۳ مقدمه

همان‌طور که گفته شد توابع پایه شعاعی کاملاً هموار به همراه یک ثابت عددی، تعریف می‌شوند که به آن پارامتر شکل گویند. برای توابع کاملاً هموار تعریف شده در جدول ۱.۱، مقادیر کوچکتر برای پارامتر شکل باعث می‌شود تابع پایه، مسطح تر و بازتر شود. در شکل ۱.۳ سه تابع پایه شعاعی گاوسی با مقادیر مختلف پارامتر شکل، در فضای دو بعدی با دامنه‌های یکسان رسم شده‌اند. در حالت کلی آشکار است اگر $\varepsilon \rightarrow 0$ آنگاه تابع پایه به یک عدد ثابت تبدیل می‌شود. تغییرات این پارامتر شکل در افزایش یا کاهش خطای روش‌های پایه شعاعی و پایداری آن‌ها تاثیر به‌سزایی دارد. بررسی این اثرات را می‌توان در کارهای محققین مختلف مانند [۳۷] مشاهده نمود. تعیین مقدار بهینه پارامتر شکل در حالت کلی برای روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی، هنوز یک مسأله باز است. اما روش‌های متعددی برای تعیین مقدار بهینه پارامتر شکل ارائه شده است. در این فصل، به بررسی و معرفی چند نمونه از روش‌های تعیین مقدار بهینه پارامتر شکل در توابع پایه شعاعی از جمله روش ارزیابی متقابل - همه بجز یکی پرداخته می‌شود. این روش در [۳۸] برای تعیین مقدار بهینه پارامتر شکل در درون‌یابی داده‌های پراکنده با توابع پایه شعاعی توسط ریپا^۱ ارائه شده است. فاشور در [۳۶] توسیع آن را برای روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی، از جمله روش‌های شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی ارائه نموده است. در فصل‌های بعد این رساله نیز از تکنیک ارزیابی متقابل - همه بجز یکی برای محاسبه مقدار بهینه پارامتر شکل، در روش شبه طیفی-پایه شعاعی استفاده شده است.

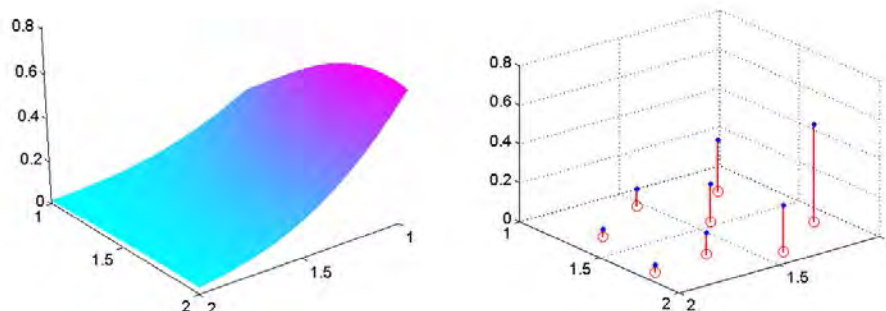


شکل ۱.۳: توابع پایه شعاعی گاوسی با مقادیر مختلف پارامتر شکل

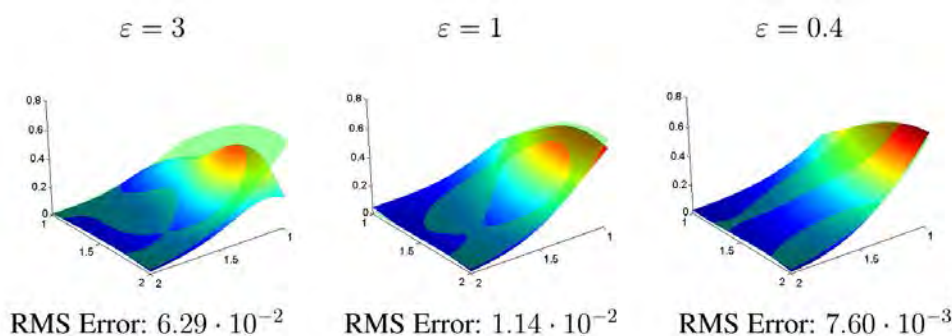
^۱Rippa

۲.۳ بررسی اثر پارامتر شکل بر روی درونیابی پایه شعاعی

در این بخش با ارایه یک مثال به بررسی اثر تغییرات پارامتر شکل بر روی خطای درونیابی پرداخته می‌شود. تابع دو متغیره (۱.۳)



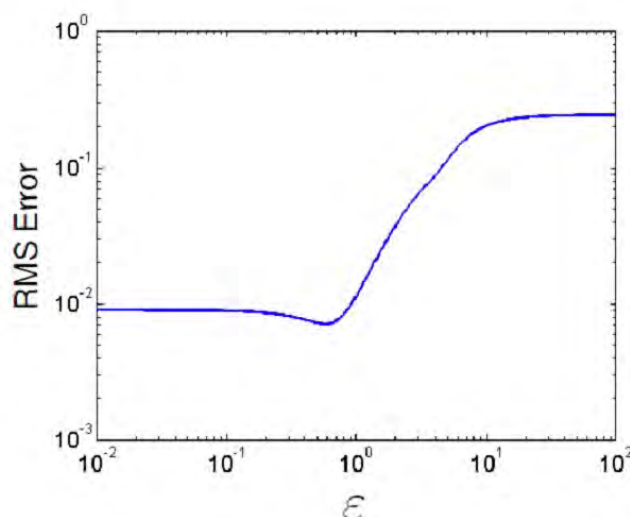
شکل ۲.۳: شکل تابع (۱.۳) و هشت نقطه روی آن



شکل ۳.۳: درونیابی‌های پایه شعاعی با پارامترهای شکل متفاوت و نقاط ثابت - تابع درونیاب شونده با رنگ سبز مشخص شده است.

$$f(x, y) = x \sin^2(x) e^{-y^2} \quad (۱.۳)$$

که در شکل ۲.۳ نمایش داده شده است را در نظر بگیرید. شکل ۳.۳ شامل شکل تابع (۱.۳) و سه درونیاب آن، با توابع پایه شعاعی گاوسی و مقادیر متفاوت پارامتر شکل می‌باشد که درونیاب‌های پایه شعاعی، براساس فرم سراسری (۶.۱) نوشته شده و ضرایب مجهول با حل دستگاه معادلات خطی (۷.۱)



شکل ۴.۳: شکل تغییرات خطای درون‌یاب پایه شعاعی بر حسب تغییرات پارامتر شکل (ε) برای تابع (۱.۳)

به‌دست آمده است. در شکل ۳.۳ خطای بیان شده مربوط به جذر میانگین مربعات خطا^۲ می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$RMS \text{ Error} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (f(x_j, y_j) - S(x_j, y_j))^2}{N}}$$

در این حالت خطا برای ۶۴ نقطه متمایز با توزیع یکنواخت در بازه $[1, 2] \times [1, 2]$ محاسبه شده است. از شکل ۳.۳ مشاهده می‌شود که با تغییر پارامتر شکل، خطای درون‌یابی نیز تغییر می‌کند. شکل ۴.۳ نحوه‌ی تغییر خطای درون‌یابی را نسبت به تغییرات پارامتر شکل توابع پایه شعاعی گاوسی را دقیق‌تر نشان می‌دهد. شکل ۴.۳ نشان می‌دهد اگر پارامتر شکل بین ۰.۴ و ۰.۵ باشد، کمترین خطای RMS به‌دست می‌آید. همچنین مشاهده می‌شود با کاهش بیشتر پارامتر شکل، دقت جواب تقریبی بهبود می‌یابد اما اگر ε از یک حد مشخص، کمتر شود و $\varepsilon \rightarrow 0$ آنگاه خطا از بین نخواهد رفت. همان‌طور که در این مثال مشاهده می‌شود، اغلب، حداقل خطا در برخی از مقادیر کوچک ε مشاهده می‌شود. از طرفی نحوه تغییر خطای درون‌یابی پایه شعاعی با تغییر تابع f ، توابع پایه، دامنه‌ی مربوط و تعداد نقاط به‌کار رفته تغییر خواهد کرد و از آنجا که مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل به تمام موارد فوق وابسته می‌باشد تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل یک مسأله پیچیده و حتی یک مسأله باز می‌باشد. یک استراتژی برای محاسبه‌ی مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل، ساختن یک تابع به نام تابع هزینه، برحسب پارامتر شکل و مینیم کردن آن

^۲Root mean square error (RMS Error)

تابع با فرض ثابت ماندن مابقی داده‌ها است. توابع هزینه‌ی مختلفی که بیان‌گر اثر خطای درون‌یاب هستند معرفی شده‌اند، که به‌طور نمونه در ادامه به بیان روش‌های زیر پرداخته شده است:

۱- روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی

۲- روش تعمیم یافته ارزیابی متقابل^۳

۳- روش برآورد حداکثر درست‌نمایی^۴

۳.۳ روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی

در مسایل آماری روش ارزیابی متقابل، ابزاری برای آزمایش دقت تقریب است. داده‌های موجود به دو یا چند بخش مختلف تقسیم می‌شوند سپس هر بخش، برای ساخت تقریب استفاده می‌شود. در نهایت خطای کل براساس خطای هر بخش (به‌طور معمول انحراف معیار آن‌ها) محاسبه می‌شود. با استفاده از همین ایده، رپا در [۳۸] روشی برای تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر در درون‌یابی با توابع پایه شعاعی، ارائه نموده است که آن را روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی گویند. در این روش، ابتدا هر بار یکی از داده‌های پراکنده‌ی موجود، حذف می‌شود و به کمک مابقی داده‌ها، با روش درون‌یابی پایه شعاعی، تقریبی برای تابع محاسبه می‌شود سپس خطای این درون‌یابی در نقطه حذف شده در نظر گرفته می‌شود. در ادامه یک تابع هزینه برحسب پارامتر شکل با محاسبه‌ی نرم بردار خطاهای مربوطه، حاصل می‌شود که در نهایت با مینیمم کردن این تابع هزینه، مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل به دست می‌آید. در ادامه نحوه‌ی ساختن تابع هزینه ارائه می‌شود:

فرض کنید $P_k = \{(x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_{k-1}, f_{k-1}), (x_{k+1}, f_{k+1}), \dots, (x_N, f_N)\}$ که در آن (x_k, f_k) حذف شده است. هماهنگ با آن درون‌یاب روی مجموعه نقاط P_k را S_k می‌نامیم:

$$S_k(x) = \sum_{j=1, j \neq k}^N \lambda_j \phi(\|x - x_j\|), \quad (۲.۳)$$

حال e_k به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$e_k = f(x_k) - S_k(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

و در نهایت با محاسبه‌ی نرم (به‌طور معمول $\|\cdot\|_2$) بردار $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N)^t$ یک تابع هزینه

^۳Generalized cross validation (GCV)

^۴Maximum likelihood estimator (MLE)

برحسب ε تعریف می‌شود و با مینیمم نمودن آن، مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل به دست می‌آید:

$$\text{LOOCV}(\varepsilon) = \| \mathbf{e} \|_2^2 = \sum_{k=1}^N e_k^2.$$

در همان تحقیق [۳۸] رپا فرمول مستقیمی به صورت زیر برای e_k ارایه نمود:

$$e_k = \frac{\lambda_k}{A_{kk}^{-1}}, \quad (3.3)$$

که در آن λ_k و A به ترتیب همان ضرایب درون‌یاب و ماتریس ضرایب درون‌یاب پایه شعاعی روی تمام نقاط هستند.

۴.۳ روش تعمیم یافته ارزیابی متقابل

روش تعمیم یافته ارزیابی متقابل، در واقع همان روش ارزیابی متقابل است که عنصرهای روی قطر ماتریس A با میانگین آن‌ها جایگزین می‌شود. در [۳۷] تابع هزینه به صورت زیر تعریف شده است:

$$\text{GCV}(\varepsilon) = \frac{\sum_{k=1}^N \lambda_k^2}{\left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N A_{kk}^{-1} \right)^2}. \quad (4.3)$$

اطلاعات بیشتر در مورد این روش را می‌توان در [۳۷، ۳۹] مطالعه نمود.

۵.۳ روش برآورد حداکثر درست‌نمایی

در علم آمار برآورد حداکثر درست‌نمایی روشی برای برآورد کردن پارامترهای یک مدل آماری است. روش برآورد حداکثر درست‌نمایی به بسیاری از روش‌های شناخته شده‌ی تخمین آماری، شباهت دارد. به طور مثال، فرض کنید که اطلاعات مربوط به قد زرافه‌های ماده بالغ موجود در یک جمعیت، برای فردی مهم باشد اما به دلیل محدودیت در هزینه یا زمان، نتواند قد تک تک این زرافه‌ها را اندازه بگیرد، اما می‌داند که این طول قدها، از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. ولی میانگین و واریانس توزیع را نمی‌داند. حال با استفاده از روش برآورد حداکثر درست‌نمایی و با در دست داشتن اطلاعات مربوط، به نمونه‌ای محدود از جمعیت، می‌تواند تخمینی از میانگین و واریانس این توزیع را بدست آورد. نحوه‌ی انجام کار به این صورت است که واریانس و میانگین را مجهول در نظر می‌گیرد آنگاه مقادیری را به آن‌ها نسبت می‌دهد که با توجه به اطلاعات موجود محتمل‌ترین حالت باشد. در حالت کلی روش برآورد حداکثر درست‌نمایی در مورد یک مجموعه‌ی مشخص از داده‌ها عبارتست از نسبت دادن مقادیری به پارامترهای مدل که در نتیجه‌ی آن توزیعی تولید شود که بیشترین احتمال را به داده‌های مشاهده شده نسبت دهد (یعنی مقادیری از پارامتر

که تابع درست‌نمایی را حداکثر کند). روش برآورد حداکثر درست‌نمایی، یک ساز و کار مشخص را برای تخمین ارایه می‌دهد که برای توزیع نرمال و بسیاری از توزیع‌های دیگر، به‌طور خوش‌تعریف عمل می‌کند. روش دیگر برای تعیین مقداری از پارامتر شکل ε در درون‌یابی پایه شعاعی، طوری که خطای درون‌یاب کمترین شود، استفاده از روش برآورد حداکثر درست‌نمایی است. برای اطلاعات بیشتر در مورد این روش می‌توان به [۴۰] مراجعه نمود. در این روش تابع هزینه که با کمینه کردن آن حداکثر درست‌نمایی برای تابع حاصل خواهد شد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [۳۷]:

$$\text{MLE}(\varepsilon) = \log(\mathbf{f}^T \boldsymbol{\lambda}) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \log(\alpha_k(A)). \quad (5.3)$$

که در آن $\alpha_k(A)$ ، $k = 1, \dots, N$ ، مقادیر ویژه ماتریس A هستند. مقایسه‌ی سه روش ذکر شده در بالا را می‌توان در [۳۷] ملاحظه نمود. در بخش بعد کاربرد و توسعه روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی که یک روش فراگیر و پر کاربرد است برای تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل در روش شبه طیفی-پایه شعاعی ارایه می‌شود.

۶.۳ مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل در روش شبه طیفی-پایه شعاعی

فاشور در [۴۱] با توجه به شباهت زیاد روش شبه طیفی-پایه شعاعی با روش استاندارد درون‌یابی با توابع پایه شعاعی، همان الگوریتم ارزیابی متقابل-همه منهای یکی ارایه شده توسط ریپا در درون‌یابی، را برای محاسبه‌ی مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل در تقریب بردار مشتقات با روش شبه طیفی-پایه شعاعی به صورت زیر توسعه داده است.

روش ریپا برای محاسبه‌ی مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل، در اصل جواب حاصل از دستگاه خطی $A\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f}$ را تحت تاثیر قرار می‌دهد. از طرفی براساس (۲۸.۲) برای تقریب اثر یک عملگر خطی دیفرانسیلی در نقاط میدانی با روش شبه طیفی-پایه شعاعی نتیجه زیر به‌دست آمد:

$$\mathcal{L}u = A_{\mathcal{L}} A^{-1} u, \quad (6.3)$$

که $\mathcal{L}u$ و $A_{\mathcal{L}}$ به ترتیب در (۲۴.۲) و (۲۵.۲) تعریف شده‌اند و از روی آن‌ها ماتریس عملیاتی $D_{\mathcal{L}}$ متناظر با عملگر خطی دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ برای محاسبه‌ی تقریب عملگر دیفرانسیلی خطی $\mathcal{L}u(x)$ در نقاط هم‌محلی $x_i, i = 1, \dots, N$ ، به صورت به‌دست آمد:

$$D_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}} A^{-1}. \quad (7.3)$$

از آن‌جا که ماتریس درون‌یاب A متقارن است می‌توان نوشت:

$$A D_{\mathcal{L}}^T = A_{\mathcal{L}}. \quad (8.3)$$

حال، اگر (۸.۳) به عنوان مبنایی برای الگوریتم ارزیابی متقابل-همه منهای یکی استفاده شود، ساختار فرمول تابع هزینه، مشابه همان نتایج مسأله درونیابی استاندارد RBF ارائه شده در [۳۸] خواهد بود. با لحاظ نمودن این نکته که در این حالت ما با چندین دستگاه به فرم $A\lambda = f$ مواجه هستیم. در واقع برای هر کدام ستون‌های از ماتریس‌های $D_{\mathcal{E}}^T$ و $A_{\mathcal{E}}$ یک دستگاه به شکل $A\lambda = f$ ایجاد می‌شود که در همگی آن‌ها، ماتریس ضرایب A مشترک است. از این رو مولفه‌های ماتریس هزینه را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\mathbf{E}_{k,l} = \frac{(D_{\mathcal{E}}^T)_{k,l}}{A_{k,k}^{-1}}, \quad (9.3)$$

و در نهایت، تابع هزینه به صورت نرم ماتریس (۹.۳) تعریف شده است.

$$\text{LOOCV}(\varepsilon) = \|\mathbf{E}\|_2. \quad (10.3)$$

که با مینیمم کردن تابع هزینه‌ی (۱۰.۳) می‌توان یک مقدار مناسب برای پارامتر شکل به دست آورد. این روش در فصل‌های بعد برای تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل تابع پایه شعاعی چندربعی در تقریب گسسته مشتقات مکانی به روش شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی استفاده شده است.

فصل ۴

روش بدون شبکه شبه طیفی مبتنی بر توابع
پایه شعاعی برای حل معادله‌ی تلگراف دو
بعدی

۱.۴ مقدمه

پدیده‌های فیزیکی و طبیعی زیادی با معادلات دیفرانسیل جزئی هذلولوی، مدل‌سازی می‌شوند. یکی از این نوع معادلات هذلولوی، معادله‌ی تلگراف است. معادلات تلگراف به‌طور معمول در مطالعه انتشار موج سیگنال‌های الکتریکی در خطوط انتقال استفاده می‌شود. در این فصل، حل عددی معادله تلگراف دو بعدی به شکل زیر بررسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, y, t) + 2\alpha u_t(x, y, t) + \beta^2 u(x, y, t) \\ = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) + f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \Omega \times (0, T], \end{aligned} \quad (1.4)$$

با شرایط آغازین شامل:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$u_t(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (3.4)$$

و شرایط مرزی دیریکله به‌صورت زیر:

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \quad (4.4)$$

به‌طوری‌که $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ نشان دهنده دامنه با مرز $\partial\Omega$ ، بازه زمانی و α, β ثابت‌های عددی هستند. اگر $\alpha > 0, \beta = 0$ معادله (۱.۴) موج میرا را نمایش می‌دهد و برای $\alpha, \beta > 0$ معادله‌ی تلگراف نامیده می‌شود.

درسال‌های اخیر توجه زیادی به توسعه روش‌های عددی برای حل معادلات تلگراف یک بعدی و دو بعدی شده است [۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰]. روش بدون قید و شرط پایدار ADI^۱ توسط موهانتی^۲ و همکاران برای حل معادله هذلولوی دو بعدی و سه بعدی خطی استفاده شده است [۵۱، ۵۲]. دهقان و همکاران نیز دو روش بدون شبکه با نام‌های MLWS و MLPG را برای حل معادله‌ی تلگراف دو بعدی ارائه نموده‌اند [۴۴].

مسائل مقدار اولیه و مرزی با ناحیه‌های نامنظم در بسیاری از مسائل کاربردی به‌وجود می‌آیند. این نوع مسائل چالش‌های محاسباتی بیشتری را نسبت به معادلات با دامنه‌های منظم ایجاد می‌کنند. مواردی از آن را می‌توان در [۵۳، ۵۴] مشاهده نمود. در این فصل جواب تقریبی معادله‌ی تلگراف دو بعدی روی هر دو ناحیه منظم و نامنظم بررسی خواهد شد. در مسائل با ناحیه‌ی نامنظم، روش‌های استاندارد، به‌طور

^۱ Alternating direction implicit method

^۲ Mohanty

معمول قابل اجرا نیستند و اعمال شرایط مرزی می‌تواند چالش برانگیز باشد. از این‌رو، روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه شعاعی که تکنیک‌های محاسباتی بسیار قدرتمند و انعطاف پذیر در حل مدل‌های پیچیده ریاضی با دامنه نامنظم و مسایل با ابعاد بالا هستند، می‌توانند برای این نوع مسایل مفید واقع شوند. اخیراً روش‌های متنوع که مبتنی بر توابع پایه شعاعی هستند برای حل عددی انواع معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی، مورد توجه واقع شده است [۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶].

روش شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی اخیراً توسط نویسندگان مختلف برای حل معادلات دیفرانسیل به کار رفته است [۳۵، ۳۶، ۴۱، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱]. در این فصل، روش شبه طیفی-پایه شعاعی، در حل معادله‌ی تلگراف دو بعدی (۱.۴)-(۴.۴)، روی ناحیه‌های نامنظم نیز به همان سادگی ناحیه‌های ساده، پیاده‌سازی شده است. همان‌طور که در فصل قبل گفته شد، توابع پایه شعاعی دارای یک پارامتر آزاد به نام پارامتر شکل هستند که ایده‌های متفاوتی برای تعیین مقدار مناسب و بهینه‌ی این پارامتر شکل وجود دارد. در این فصل، روش LOOCV برای انتخاب مقدار مناسب پارامتر شکل در توابع پایه شعاعی به کار گرفته شده است.

۲.۴ تکنیک‌های عددی

در این بخش، یک روش شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل عددی مسأله (۱.۴) با شرایط آغازین و مرزی داده شده (۲.۴)-(۴.۴) ارائه خواهد شد. برای این منظور، ابتدا با تغییر متغیر معادله (۱.۴) به یک دستگاه دوتایی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول نسبت به زمان تبدیل خواهد شد:

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = v(x, y, t) \\ v_t(x, y, t) = -2\alpha v(x, y, t) - \beta^2 u(x, y, t) + u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t) + f(x, y, t) \end{cases} \quad (۵.۴)$$

و همچنین شرایط اولیه و مرزی (۲.۴)-(۴.۴) به صورت زیر بازنویسی خواهند شد:

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (۶.۴)$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (۷.۴)$$

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y, t) \in \partial\Omega \times (0, T] \quad (۸.۴)$$

در ادامه مسأله (۵.۴) با شرایط آغازین و مرزی داده شده (۶.۴)-(۸.۴) مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱.۲.۴ گسسته‌سازی مکانی

در این بخش، برای گسسته‌سازی عددی مسأله (۵.۴) در بعد مکان، یک روش بدون شبکه براساس روش هم‌محلی کانسا نامتقارن و سراسری مبتنی بر توابع پایه شعاعی چنددرجی معرفی می‌شود که در آن گسسته‌سازی مشتقات مکانی با ایجاد ماتریس‌های عملیاتی از روش شبه طیفی-پایه شعاعی آرایه شده در فصل سوم انجام شده است.

برای این منظور، توابع مجهول $u(x, y, t), v(x, y, t)$ در دستگاه (۵.۴) در یک زمان ثابت t توسط یک ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی به صورت زیر تقریب زده شده است:

$$u_N(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \Phi_j(x, y), \quad (9.4)$$

$$v_N(x, y, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \Phi_j(x, y). \quad (10.4)$$

که در آن:

$$\Phi_j(x, y) = \phi(r = \|(x, y) - (x_j, y_j)\|_2). \quad (11.4)$$

همچنین نقاط گره‌ای $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ در ناحیه Ω برای تعریف توابع پایه شعاعی و نقاط هم‌محلی استفاده شده است. بنابراین اگر تابع مجهول $u_N(x, y, t)$ در زمان ثابت t و نقاط گره‌ای $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$u_N(x_i, y_i, t) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \Phi_j(x_i, y_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (12.4)$$

که شکل ماتریسی آن به صورت زیر است:

$$\mathbf{u} = A \boldsymbol{\xi}(t). \quad (13.4)$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\xi}(t) = [\xi_1(t), \dots, \xi_N(t)]^T, A_{i,j} = \Phi_j(x_i, y_i), \mathbf{u} = [u_N(x_1, y_1, t), \dots, u_N(x_N, y_N, t)]^T. \quad (14.4)$$

فرض کنید $\mathcal{L}$ یک عملگر دیفرانسیلی خطی باشد، می‌توان با اعمال عملگر $\mathcal{L}$ روی (۹.۴) و استفاده از روش شبه طیفی-پایه شعاعی، تقریبی به شکل (۳۰.۲) در نقاط گره‌ای $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N \subset \Omega$ برای $\mathcal{L}u(x, y, t)$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\mathcal{L}u = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}u, \quad (15.4)$$

که در آن بر اساس (۲۹.۲):

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}} A^{-1}, \quad (16.4)$$

$$(A_{\mathcal{L}})_{ij} = \mathcal{L}\Phi_j(x_i, y_i), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (17.4)$$

همچنین بردار $\mathcal{L}u$ به صورت زیر فرض شده است:

$$\mathcal{L}u = [\mathcal{L}u_N(x_1, y_1, t), \dots, \mathcal{L}u_N(x_N, y_N, t)]^T. \quad (18.4)$$

همان طور که در فصل دوم بیان شد شرایطی که ماتریس ضرایب درون یاب A ، معکوس پذیر هست در فصل اول اشاره شده است. در ادامه از رابطه (۱۵.۴) در حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی برای گسسته سازی عملگر خطی دیفرانسیلی مکانی استفاده شده است.

در این فصل، از تعمیم روش ارزیابی متقابل-همه بجز یکی، که در فصل سوم ارایه شد، برای انتخاب مقدار بهینه ی پارامتر شکل استفاده شده است. در این روش ماتریس E بر اساس خطای تقریب مقدار عملگر دیفرانسیلی مکانی معادله در زمان ثابت t و در نقاط هم محلی $(x_i, y_i) \in \Omega$ ، $i = 1, \dots, N$ به روش شبه طیفی-پایه شعاعی ساخته می شود. مولفه های این ماتریس هزینه از رابطه (۹.۳) به صورت زیر می باشد:

$$E_{k,l} = \frac{(\mathcal{D}_{\mathcal{L}}^T)_{k,l}}{A_{k,l}^{-1}}, \quad (19.4)$$

که در آن A ماتریس ضرایب هم محلی (۱۴.۴) و $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ ماتریس عملیاتی ارایه شده در (۱۶.۴) هستند. مقدار بهینه ی پارامتر شکل با مینیمم کردن نرم این ماتریس هزینه به دست آمده است:

$$\varepsilon_{opt} = \text{Min}(\text{LOOCV}(\varepsilon)) = \text{Min}(\|E\|_2). \quad (20.4)$$

۲.۲.۴ گسسته سازی زمانی

در این بخش، ابتدا یک روش تفاضلات متناهی پیشرو برای گسسته سازی مشتقات مرتبه اول وابسته به زمان، سپس روش شبه طیفی-پایه شعاعی گفته شده در بخش قبل برای گسسته سازی مکانی روی

دستگاه معادلات (۵.۴) اعمال شده است که نتایج به صورت زیر ارایه می شود:

$$\begin{cases} \frac{u^{m+1} - u^m}{\delta t} = v^m \\ \frac{v^{m+1} - v^m}{\delta t} = -2\alpha v^m - \beta^2 u^m + \mathcal{D}_{\mathcal{L}} u^m + f^m \end{cases} \quad (21.4)$$

که در آن δt اندازه ی طول گام زمانی و $t^m = m\delta t$ زمان در گام m فرض شده اند. همچنین:

$$f^m = (f(x_1, y_1, t^m), f(x_2, y_2, t^m), \dots, f(x_N, y_N, t^m))^T,$$

$$u^m = (u_N(x_1, y_1, t^m), u_N(x_2, y_2, t^m), \dots, u_N(x_N, y_N, t^m))^T.$$

در ضمن $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}}$ نیز ماتریس عملیاتی مربوط به عملگر دیفرانسیلی خطی $\mathfrak{L} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ است که از رابطه (۱۶.۴) به صورت زیر به دست آمده است:

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}} A^{-1}, \quad (22.4)$$

$$(A_{\mathcal{L}})_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi_j(x_i, y_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_j(x_i, y_i)}{\partial y^2}. \quad (23.4)$$

با ساده سازی، می توان معادله (۲۱.۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{u}^m + \delta t \mathbf{v}^m \\ \mathbf{v}^{m+1} = \mathbf{v}^m + \delta t (-2\alpha \mathbf{v}^m - \beta^2 \mathbf{u}^m + \mathfrak{D}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}^m + \mathbf{f}^m) \end{cases} \quad (24.4)$$

در اینجا به این نکته مهم می توان اشاره نمود که ماتریس عملیاتی متناظر با عملگر دیفرانسیلی، براساس رابطه (۲۲.۴) مستقل از زمان است از این رو این ماتریس در تمام تکرارهای گام زمانی ثابت است. بنابراین در حل مسأله کافیست فقط یک بار، ماتریس عملیاتی $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}}$ را خارج از حلقه تکرار گام زمانی محاسبه نمود و از آن در تمام گام های زمانی استفاده کرد. با باز نویسی رابطه (۲۴.۴) به شکل ماتریسی نتیجه می شود:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}^{m+1} \\ \mathbf{v}^{m+1} \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{u}^m \\ \mathbf{v}^m \end{pmatrix} + \mathbf{F}^m, \quad (25.4)$$

طوری که

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} I_{N \times N} & \delta t I_{N \times N} \\ \delta t (-\beta^2 I_{N \times N} + \mathfrak{D}_{\mathcal{L}}) & (1 - 2\alpha \delta t) I_{N \times N} \end{pmatrix}, \quad (26.4)$$

و

$$\mathbf{F}^m = \begin{pmatrix} 0_{N \times 1} \\ \mathbf{f}^m \end{pmatrix} \quad (27.4)$$

۳.۲.۴ اعمال شرایط مرزی

نکته مهم دیگر در این روش، اعمال شرایط مرزی بخصوص در حالت دامنه نامنظم است. به طور عمده، در حالت کلی برای اعمال شرایط مرزی روی جواب های تقریبی، دو روش کلاسیک وجود دارد:

- ۱- استفاده از توابع پایه ای است که به طور دقیق در شرایط مرزی صدق کنند. اما این روش فقط زمانی امکان پذیر است که دامنه ی منظم و شرایط مرزی آن ساده، از قبیل شرایط مرزی همگن یا متناوب باشند.

۲- در حالت دیگر، تعدادی شرایط اضافی برای اعمال شرایط مرزی به مسأله اضافه می شود. که منجر به افزایش حجم عملیات محاسباتی می شود.

در این قسمت الگوریتم ارایه شده در [۷۲، ۳۵] برای اعمال شرایط مرزی در مسایل دو بعدی و بخصوص با دامنه های نامنظم توسعه داده شده است. برای این کار، پس از محاسبه ی بردار $\mathbf{u}^{m+1}$ توسط

(۲۵.۴)، مولفه‌هایی از آن که مربوط به نقاط مرزی می‌باشند باید با مقدار دقیق داده شده از روی شرایط مرزی (۸.۴) جایگزین شود تا بردار جواب حاصل، مقادیر آن در نقاط مرزی دقیق باشد. شرایط مرزی با اصلاح ماتریس B و بردار F^m در (۲۵.۴) اعمال می‌شود و برخلاف روش‌های کلاسیک، شرایط و معادلات اضافی به دستگاه معادلات موجود اضافه نخواهد شد. برای این کار کافیست سطرهایی از ماتریس B که متناظر با نقاط گره‌ای در روی مرز هستند را با بردار صفر جایگزین نمود و همچنین مولفه‌هایی از بردار F^m که متناظر با نقاط گره‌ای روی مرز هستند را با مقدار دقیق شرط مرزی در سطح زمانی $(m+1)\delta t$ جابه‌جا نمود. لذا رابطه (۲۵.۴) به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\begin{pmatrix} u^{m+1} \\ v^{m+1} \end{pmatrix} = B_{\partial} \begin{pmatrix} u^m \\ v^m \end{pmatrix} + F_{\partial}^m. \quad (28.4)$$

به‌طوری‌که B_{∂} و F_{∂}^m ماتریس و بردارهای اصلاح شده مطابق توضیحات بالا محاسبه شده‌اند.

۴.۲.۴ بررسی پایداری

در این بخش، به بررسی پایداری فرآیند صریح به‌دست آمده از رابطه (۲۸.۴) برای تقریب جواب‌ها در هر سطح زمانی دلخواه پرداخته می‌شود. برای این منظور قضیه زیر برای تحلیل پایداری براساس مقادیر ویژه ماتریس ضرایب حاصل از روش بدون شبکه (۲۸.۴) ارائه می‌شود.

قضیه ۱.۲.۴. طرح بازگشتی (۲۸.۴) برای معادله‌ی تلگراف (۱.۴) نسبت به خطای داده‌های اولیه پایدار است اگر شعاع طیفی ماتریس B_{∂} کمتر از یک باشد.

اثبات: فرض کنید U^n و $\hat{U}^n$ به ترتیب جواب دقیق و تقریبی در سطح زمانی n ام و $\xi^n = U^n - \hat{U}^n$ بردار خطا در سطح زمانی n ام باشد. از رابطه بازگشتی (۲۸.۴) نتیجه می‌شود: $\xi^{n+1} = B_{\partial} \xi^n$ بنابراین:

$$\xi^{n+1} = B_{\partial} \xi^n = B_{\partial}^2 \xi^{n-1} = \dots = B_{\partial}^{n+1} \xi^0.$$

از این رو برای پایداری روش کافیست $\rho(B_{\partial}) < 1$ که $\rho(B_{\partial})$ نشان‌دهنده شعاع طیفی ماتریس B_{∂} است.



۳.۴ نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی بدست آمده برای مسأله (۴.۴) - (۱.۴) توسط روش بدون شبکه توابع پایه شعاعی شبه طیفی روی هر دو ناحیه‌ی منظم و نامنظم به ازای مقادیر مختلف شرایط مرزی و پارامترهای مدل ارایه شده است. به منظور بررسی کارآیی روش ارایه شده و دقت جواب‌های تقریبی، خطاهای نسبی، جذر میانگین مربعات خطا و حداکثر خطای مطلق مطابق تعاریف زیر گزارش شده است:

$$Relative\ error = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (u(x_j, y_j, t_m) - u_N(x_j, y_j, t_m))^2}{\sum_{j=1}^N (u(x_j, y_j, t_m))^2}}, \quad (29.4)$$

$$RMS\ error = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (u(x_j, y_j, t_m) - u_N(x_j, y_j, t_m))^2}{N}}, \quad (30.4)$$

$$L_{\infty}\ error = \max_{1 \leq j \leq N} |u(x_j, y_j, t_m) - u_N(x_j, y_j, t_m)|. \quad (31.4)$$

به طوری که $0 \leq t_m \leq T$ و u و u_N به ترتیب نماد جواب‌های دقیق و عددی هستند. در تمام مثال‌ها از رایانه‌ای با پردازنده Core i7، میزان حافظه RAM معادل ۱۲ گیگا بایت و تابع پایه شعاعی چندربعی (MQ) زیر استفاده شده است:

$$\phi(r) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}.$$

۱.۳.۴ معادله‌ی تلگراف دو بعدی با ناحیه منظم

نتایج عددی مثال‌های ۱.۳.۴-۳.۳.۴ با $N = 400$ نقطه گره‌ای با توزیع یکنواخت در داخل و روی مرز ناحیه داده شده، $\delta t = 0.001$ و $c = 0.632398$ پارامتر شکل تابع شعاعی چندربعی به‌دست آمده از (۲۰.۴) محاسبه شده است.

مثال ۱.۳.۴. معادله هذلولوی تلگراف دو بعدی (۱.۴) با ناحیه منظم

در $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ نظر گرفته شده است طوری که شرایط آغازین و مرزی آن به‌صورت زیر

است:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \sinh x \sinh y \\ u_t(x, y, 0) = -\sinh x \sinh y, \end{cases}$$



جدول ۱.۴: مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۱.۳.۴ در زمان‌های مختلف t

CPU Time(s)	L_{∞} [۴۳]	REL.error [۴۳]	RMS [۴۲]	REL.error [۴۲]	REL.error	RMS	L_{∞}	t
$\alpha = 10, \beta = 5$								
5.7	2.473×10^{-4}	1.108×10^{-4}	3.303×10^{-5}	1.118×10^{-4}	1.135×10^{-4}	3.005×10^{-5}	7.130×10^{-5}	0.5
10	3.308×10^{-4}	1.326×10^{-4}	3.233×10^{-5}	1.805×10^{-4}	1.618×10^{-4}	2.511×10^{-5}	5.489×10^{-5}	1
22	1.138×10^{-5}	3.195×10^{-4}	3.116×10^{-5}	4.728×10^{-4}	1.925×10^{-4}	1.098×10^{-5}	2.514×10^{-5}	2
36	4.357×10^{-5}	1.302×10^{-4}	3.068×10^{-5}	1.265×10^{-4}	2.009×10^{-4}	4.218×10^{-6}	1.134×10^{-5}	3
62	5.414×10^{-6}	1.443×10^{-4}	3.044×10^{-5}	9.277×10^{-4}	2.061×10^{-4}	5.858×10^{-7}	1.867×10^{-6}	5
$\alpha = 10, \beta = 0$								
6	4.234×10^{-4}	3.467×10^{-4}	3.307×10^{-5}	1.119×10^{-4}	1.534×10^{-4}	3.925×10^{-5}	9.522×10^{-5}	0.5
12	2.583×10^{-4}	3.914×10^{-4}	3.338×10^{-5}	1.863×10^{-4}	2.804×10^{-4}	4.350×10^{-5}	9.737×10^{-5}	1
20	9.584×10^{-5}	4.273×10^{-4}	3.413×10^{-5}	5.179×10^{-4}	5.381×10^{-4}	3.071×10^{-5}	8.447×10^{-5}	2
33	3.534×10^{-5}	4.514×10^{-4}	3.494×10^{-5}	1.441×10^{-4}	8.712×10^{-4}	1.829×10^{-5}	8.535×10^{-5}	3
59	4.804×10^{-6}	5.075×10^{-4}	3.571×10^{-5}	1.088×10^{-4}	3.483×10^{-3}	9.898×10^{-6}	8.253×10^{-5}	5

9

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq 1, x = 0 \\ u(1, y, t) = e^{-t} \sinh 1 \sinh y, & 0 \leq y \leq 1, x = 1 \\ u(x, 0, t) = 0, & 0 \leq x \leq 1, y = 0 \\ u(x, 1, t) = e^{-t} \sinh x \sinh 1, & 0 \leq x \leq 1, y = 1. \end{cases}$$

که جواب دقیق آن به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = e^{-t} \sinh x \sinh y. \quad (۳۲.۴)$$

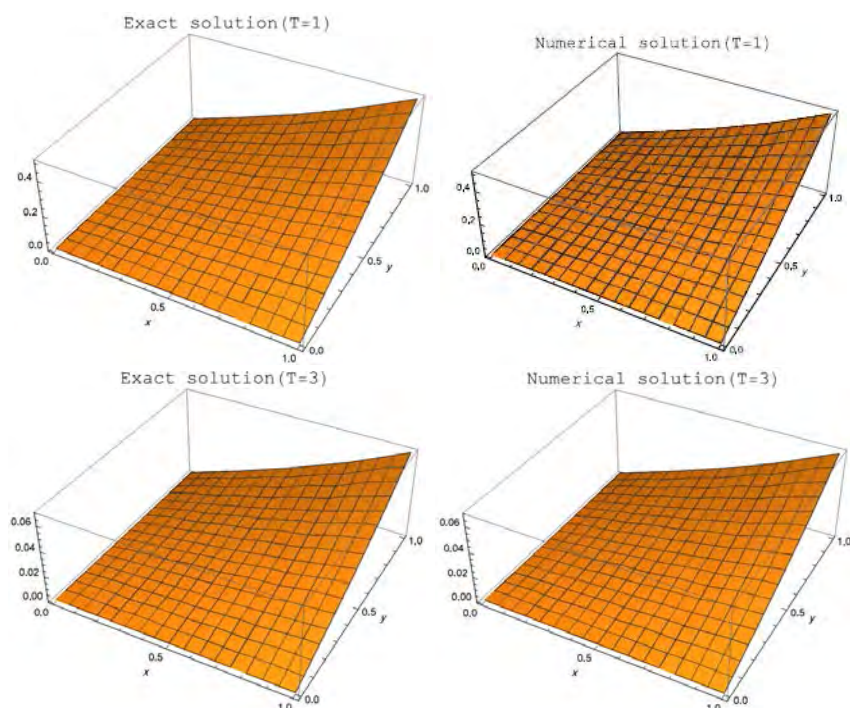
همچنین $f(x, y, t)$ به راحتی از روی جواب دقیق به دست می‌آید.

مقادیر خطاهای نسبی، RMS، L_{∞} و زمان CPU برحسب ثانیه برای مثال ۱.۳.۴ با

$\alpha = 10, \beta = 0$ و $\alpha = 10, \beta = 5$ در جدول ۱.۴ ارایه و نتایج روش حاضر با نتایج روش‌های PDQM [۴۲]^۳ و MBS-DQM [۴۳]^۴ مقایسه شده است. مشاهده می‌شود نتایج با جواب دقیق و نتایج روش‌های گفته شده، مطابقت خوبی دارد. جدول ۱.۴ کارایی و پایداری روش حاضر، برای مقادیر مختلف α, β و مقادیر مختلف زمان نهایی t را نمایش می‌دهد. همچنین مشاهده می‌شود این نتایج در مدت زمان

^۳Polynomial differential quadrature method

^۴Modified cubic B-spline basis functions based differential quadrature method



شکل ۱.۴: جواب‌های عددی (راست) و دقیق (چپ) برای مثال ۱.۳.۴ با $N = 400$ ، $\delta t = 0.001$ در $t = 1, 3$.

معقول کامپیوتری، قابل محاسبه هستند. نکته‌ی دیگر، که می‌توان به آن اشاره نمود این است که، حتی برای $t = 5$ حداکثر خطای مطلق در محدوده 10^{-5} پایدار است. شکل ۱.۴ مقایسه‌ی بین شکل سطح جواب تقریبی و دقیق را برای مثال ۱.۳.۴ با $N = 400$ تعداد نقاط گره‌ای و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های $t = 1, 3$ نمایش می‌دهد بنابراین از روی شکل‌ها، نیز تطابق مناسب جواب تقریبی با جواب دقیق قابل مشاهده است.

مثال ۲.۳.۴. معادله‌ی تلگراف دو - بعدی (۱.۴) با $\alpha = \beta = 1$ در ناحیه منظم $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

با شرایط اولیه و مرزی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = x^2 + y^2 \\ u_t(x, y, 0) = 1, \end{cases}$$

جدول ۲.۴: مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۲.۳.۴ در زمان‌های مختلف t .

CPU	MLPG-MLS	MLWS-MLS	PDQM	PDQM	روش پیشنهادی	روش پیشنهادی	روش پیشنهادی	t
Time(s)	REL. error[۴۴]	REL.error[۴۴]	RMS[۴۲]	REL.error[۴۲]	REL.error	RMS	L_∞	
1.7	9.800×10^{-6}	3.202×10^{-5}	9.261×10^{-5}	6.770×10^{-5}	3.533×10^{-6}	4.468×10^{-6}	2.310×10^{-5}	0.5
3.4	7.014×10^{-5}	9.405×10^{-5}	8.036×10^{-5}	5.632×10^{-5}	7.799×10^{-6}	1.358×10^{-5}	6.939×10^{-5}	1
6.7	4.071×10^{-5}	7.120×10^{-5}	9.050×10^{-5}	3.218×10^{-5}	1.240×10^{-5}	3.375×10^{-5}	1.489×10^{-4}	2
9.9	9.001×10^{-5}	2.012×10^{-4}	8.892×10^{-5}	2.340×10^{-5}	1.429×10^{-5}	5.305×10^{-5}	1.903×10^{-4}	3
15.5	...	...	9.006×10^{-5}	1.556×10^{-5}	1.634×10^{-5}	9.318×10^{-5}	2.783×10^{-4}	5

9

$$\begin{cases} u(0, y, t) = y^2 + t, & 0 \leq y \leq 1, x = 0 \\ u(1, y, t) = 1 + y^2 + t, & 0 \leq y \leq 1, x = 1 \\ u(x, 0, t) = x^2 + t, & 0 \leq x \leq 1, y = 0 \\ u(x, 1, t) = 1 + x^2 + t, & 0 \leq x \leq 1, y = 1. \end{cases}$$

جواب دقیق به صورت زیر است :

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + t. \quad (۳۳.۴)$$

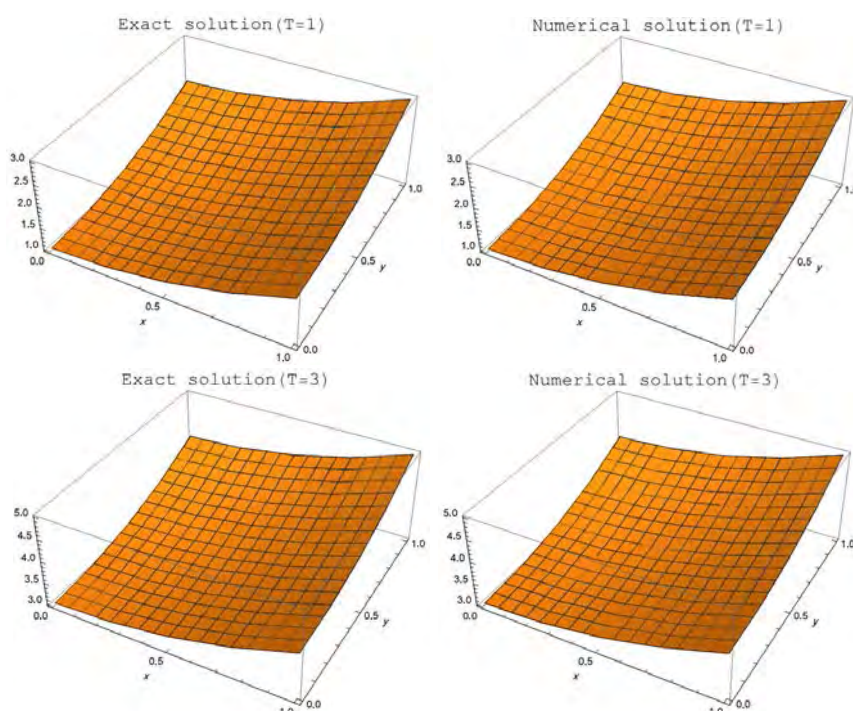
 به راحتی از روی جواب دقیق می‌توان $f(x, y, t)$ را استخراج نمود.

مقادیر خطاهای نسبی، RMS، L_∞ و زمان CPU برحسب ثانیه برای مثال ۲.۳.۴ با $\alpha = \beta = 1$ در جدول ۲.۴ ارائه و نتایج روش حاضر با نتایج روش PDQM^۵ [۴۲] و نتایج روش‌های MLWS^۶ و MLPG^۷ گزارش شده در [۴۴] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود نتایج عددی حاصل، تطابق مناسب با جواب دقیق و نتایج عددی گزارش شده در مراجع بیان شده را دارد. شایان ذکر است، که روش پیشنهادی با $N = 400$ نقاط گره‌ای و $m = 5000$ گام زمانی فقط در مدت زمان 15.5 ثانیه اجرا شده است. از روی نتایج عددی مشاهده می‌شود، روش حاضر با جواب دقیق سازگار است و حداکثر خطای مطلق حتی برای $t = 5$ نیز در حدود 10^{-4} پایدار می‌ماند. مقایسه‌ی شکل سطح جواب تقریبی با جواب دقیق برای مثال ۲.۳.۴ با $N = 400$ نقاط پراکنده در ناحیه منظم داده شده و $\delta t = 0.001$ برای $t = 1, 3$ در

^۵Polynomial differential quadrature method

^۶Meshless local weak and strong method

^۷Meshless local Petrov-Galerkin method



شکل ۲.۴: جواب‌های عددی (سمت راست) و دقیق (سمت چپ) برای مثال ۲.۳.۴ با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 3$.

شکل ۲.۴ ارایه شده است و مناسب بودن جواب تقریبی را می‌توان مشاهده نمود.

مثال ۳.۳.۴. معادله‌ی تلگراف دو - بعدی (۱.۴) با $\alpha = \beta = 1$ در ناحیه منظم $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

با شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \sin x \sin y \\ u_t(x, y, 0) = 0, \end{cases}$$

9

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq 1, x = 0 \\ u(1, y, t) = \cos t \sin 1 \sin y, & 0 \leq y \leq 1, x = 1 \\ u(x, 0, t) = 0, & 0 \leq x \leq 1, y = 0 \\ u(x, 1, t) = \cos t \sin x \sin 1, & 0 \leq x \leq 1, y = 1. \end{cases}$$

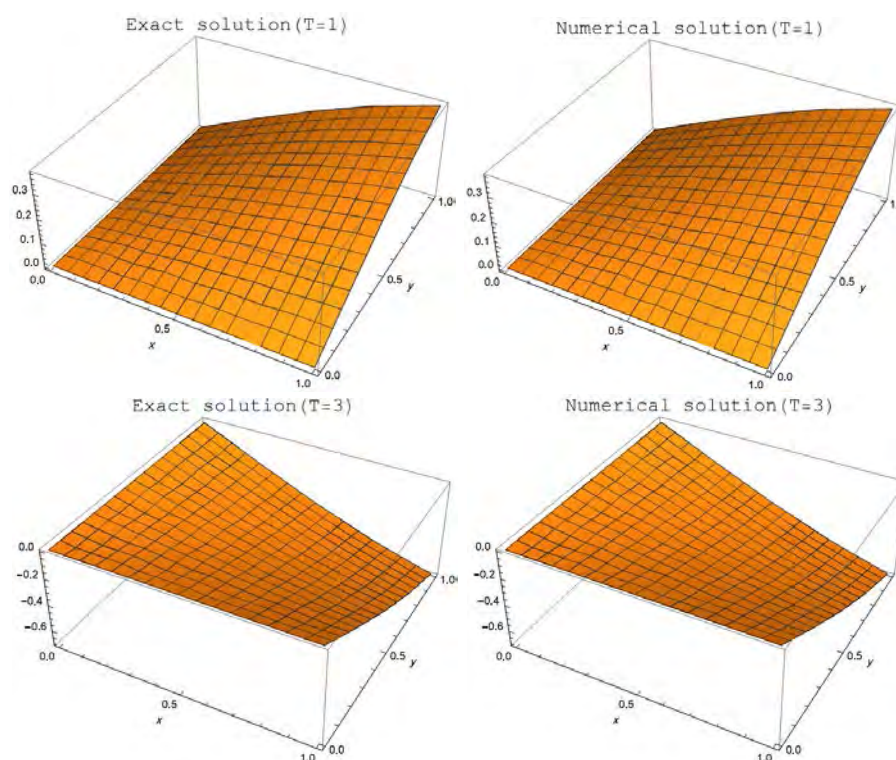
جواب دقیق این معادله به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = \cos t \sin x \sin y. \quad (34.4)$$

جدول ۳.۴: مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۳.۳.۴ در زمان‌های مختلف t .

t	روش پیشنهادی	روش پیشنهادی	روش پیشنهادی	PDQM	PDQM	MBS-DQM	MLPG-MLS	CPU
	L_∞	RMS	REL.error	REL.error[۴۲]	RMS[۴۲]	REL.error [۴۳]	REL.error[۴۴]	Time(s)
0.5	4.591×10^{-5}	1.736×10^{-5}	7.145×10^{-5}	1.244×10^{-5}	3.235×10^{-6}	...	1.190×10^{-5}	7.8
1	2.513×10^{-5}	8.149×10^{-6}	5.446×10^{-5}	2.669×10^{-5}	4.271×10^{-6}	6.297×10^{-4}	2.249×10^{-5}	16
2	2.407×10^{-5}	9.364×10^{-6}	8.125×10^{-5}	3.199×10^{-5}	3.943×10^{-6}	1.002×10^{-3}	5.009×10^{-5}	32
3	2.064×10^{-5}	1.042×10^{-5}	3.804×10^{-5}	2.609×10^{-6}	7.651×10^{-7}	1.307×10^{-4}	8.001×10^{-5}	50
5	4.432×10^{-5}	1.176×10^{-5}	1.498×10^{-4}	4.985×10^{-5}	4.188×10^{-6}	1.541×10^{-3}	...	80.8

به راحتی از روی جواب دقیق می‌توان $f(x, y, t)$ را به دست آورد. مشابه با مثال‌های قبل در جدول ۳.۴


 شکل ۳.۴: جواب‌های عددی (راست) و تقریبی (چپ) برای مثال ۳.۳.۴ با $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 3$.

خطاهای L_∞ , RMS، خطای نسبی و زمان CPU برحسب ثانیه برای مثال ۳.۳.۴ با $\alpha = \beta = 1$ ارایه شده است. در این مثال، نتایج حاصل با نتایج ارایه شده در [۴۲، ۴۳، ۴۴] مقایسه شده است. جواب‌های به دست آمده از روش گفته شده به طور کامل با جواب دقیق سازگار و حداکثر خطای مطلق برای $t = 5$ با طول گام زمانی $\delta t = 0.001$ نیز، در حدود 10^{-5} باقی مانده است. مقایسه شکل سطح جواب تقریبی

با جواب دقیق برای مثال ۳.۳.۴ با $N = 400$ نقاط پراکنده در ناحیه‌ی منظم داده شده و $\delta t = 0.001$ برای $t = 1, 3$ در شکل ۳.۴ ارایه شده است و مناسب بودن جواب تقریبی را می‌توان مشاهده نمود.

۲.۳.۴ معادله‌ی تلگراف دوبعدی با ناحیه نامنظم

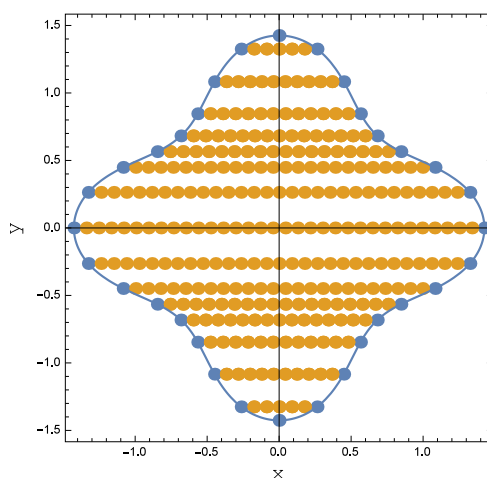
در این بخش، حل معادله‌ی تلگراف دو بعدی با یک ناحیه نامنظم مورد بررسی قرار خواهد گرفت و تکنیک عددی ارایه شده در این فصل، برای تعیین جواب تقریبی معادله، به کار گرفته می‌شود. ناحیه‌ی محاسباتی مورد بحث Ω و مرز آن $\partial\Omega$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۵۳]:

$$\partial\Omega = \{(x, y) | x = R_C \cos\theta, y = R_C \sin\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}, \quad (۳۵.۴)$$

طوری که R_C به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_C = \left(\cos(4\theta) + \sqrt{\frac{18}{5} - \sin^2(4\theta)} \right)^{1/3}$$

ناحیه نامنظم بالا و توزیع نقاط انتخابی در شکل ۴.۴ نمایش داده شده است.



شکل ۴.۴: توزیع داده‌های پراکنده روی ناحیه نامنظم، $N = 410$.

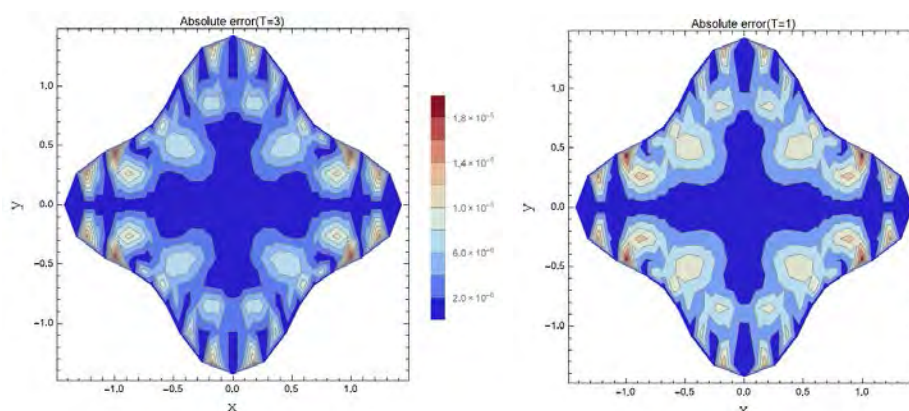
مثال ۴.۳.۴. در این مثال، معادله‌ی تلگراف دو بعدی (۱.۴) با فرض $\alpha = 10$ و $\beta = 5$ روی ناحیه‌ی نامنظم Ω در نظر گرفته می‌شود که مرز آن با (۳۵.۴) مشخص شده است. جواب دقیق این مسأله به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = e^{-t} \sinh x \sinh y. \quad (۳۶.۴)$$

جدول ۴.۴: مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۴.۳.۴ در زمان‌های متفاوت t .

CPU Time(s)	Relative error	RMS	L_∞	t
13	1.387×10^{-4}	2.497×10^{-5}	6.681×10^{-5}	0.5
27.5	2.084×10^{-4}	2.274×10^{-5}	6.891×10^{-5}	1
55.5	2.956×10^{-4}	1.187×10^{-5}	4.130×10^{-5}	2
94.5	3.539×10^{-4}	5.229×10^{-6}	1.935×10^{-5}	3
163	4.254×10^{-4}	8.505×10^{-7}	3.303×10^{-6}	5

شرایط اولیه، شرایط مرزی دیریکله (۲.۴)-(۴.۴) و تابع $f(x, y, t)$ از روی جواب تحلیلی محاسبه و در نظر گرفته شده‌اند. همانند مثال‌های قبل، برای حل عددی این مثال نیز از روش بدون شبکه شبه طیفی-پایه شعاعی ارایه شده در بخش قبل، استفاده شده است. مقدار بهینه پارامتر شکل، در تابع پایه شعاعی چندربعی با الگوریتم LOOCV ارایه شده در (۲۰.۴) محاسبه شده است.


 شکل ۵.۴: توزیع خطای مطلق روی ناحیه Ω با $N = 410$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۴.۳.۴ در لحظات $t = 1$ (راست) و $t = 3$ (چپ).

در این بخش، نتایج عددی مثال‌های ۴.۳.۴-۶.۳.۴ با استفاده از روش شبه طیفی-پایه شعاعی مورد نظر با $N = 410$ نقطه‌ی گره‌ای با توزیع مطابق شکل ۴.۴، طول گام $\delta t = 0.001$ و تابع پایه شعاعی MQ با مقدار بهینه پارامتر شکل $c = 0.443079$ به دست آمده از روش LOOCV محاسبه شده‌اند. اندازه‌های مختلف خطای جواب عددی مثال ۴.۳.۴ در جدول ۴.۴ ارایه شده‌اند. مشابه با حالت ناحیه منظم کارایی و پایداری روش ارایه شده در زمان‌های مختلف را می‌توان از جدول ۴.۴ مشاهده نمود.

جدول ۵.۴: مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۵.۳.۴ در زمان‌های مختلف t .

t	L_{∞}	RMS	Relative error	CPU Time(s)
0.5	6.725×10^{-5}	1.340×10^{-5}	9.728×10^{-6}	15
1	1.741×10^{-4}	3.800×10^{-5}	2.047×10^{-5}	29
2	3.070×10^{-4}	7.756×10^{-5}	2.735×10^{-5}	62
3	3.710×10^{-4}	9.926×10^{-5}	2.595×10^{-5}	99
5	3.944×10^{-4}	1.111×10^{-4}	1.911×10^{-5}	175

علاوه بر آن مدت زمان اجرا نیز در این جدول نشان دهنده این است که جواب‌های مناسب را می‌توان در مدت زمان معقولی به دست آورد و این قابلیت و کارایی روش پیشنهادی را برای مسائلی با دامنه‌های نامنظم نشان می‌دهد. شکل ۵.۴ برای مثال ۴.۳.۴ توزیع خطای مطلق، روی ناحیه $(x, y) \in \Omega$ در زمان‌های $T = 1, 3$ با استفاده از $N = 410$ نقطه گره‌ای و $\delta t = 0.001$ را نشان می‌دهد.

مثال ۵.۳.۴. در این مثال نیز معادله‌ی تلگراف دو بعدی (۱.۴) روی ناحیه‌ی نامنظم Ω که توسط مرز (۳۵.۴) نمایش داده شده است با پارامترهای $\alpha = \beta = 1$ در نظر گرفته شده است. جواب تحلیلی این مسأله نیز به شکل زیر است:

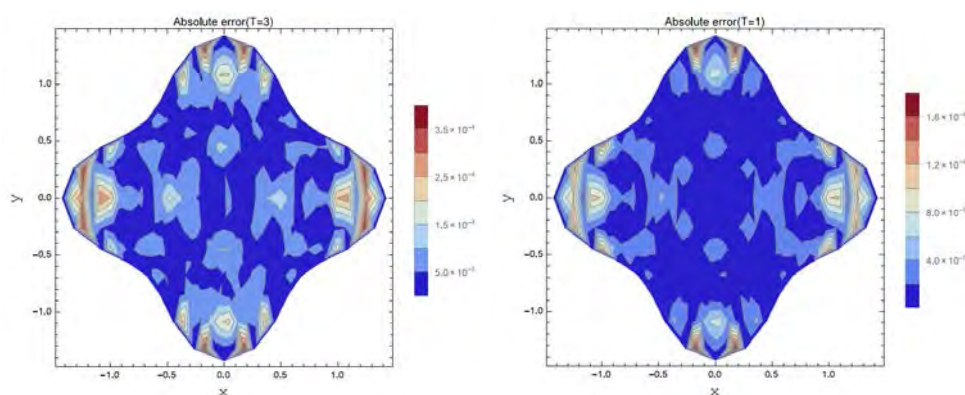
$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + t. \quad (37.4)$$

در این مثال نیز $f(x, y, t)$ ، شرایط اولیه و مرزی دیریکله (۲.۴)–(۴.۴) از روی جواب تحلیلی در نظر گرفته شده است. نتایج محاسبه شده برای مقادیر خطاهای مختلف در جدول ۵.۴ گزارش شده‌اند. علاوه بر آن، زمان CPU نیز در این جدول گزارش شده است. جدول ۵.۴ مناسب بودن جواب‌های تقریبی روش مورد نظر را در مقایسه با جواب دقیق تایید می‌کند.

نحوه‌ی توزیع خطای مطلق روی ناحیه‌ی $(x, y) \in \Omega$ با استفاده از $N = 410$ نقطه‌ی گره‌ای و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۵.۳.۴ در لحظات $t = 1, 3$ در شکل ۶.۴ نمایش داده شده است.

مثال ۶.۳.۴. در این مثال، معادله‌ی تلگراف دو-بعدی (۱.۴) روی ناحیه نامنظم Ω مشخص شده با مرز (۳۵.۴) با $\alpha = \beta = 1$ در نظر گرفته شده است. جواب دقیق این مسأله نیز به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = \cos(t) \sin(x) \sin(y). \quad (38.4)$$



شکل ۶.۴: توزیع خطای مطلق روی ناحیه Ω با فرض $N = 410$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۵.۳.۴ در زمان‌های $t = 1$ (راست)، $t = 3$ (چپ).

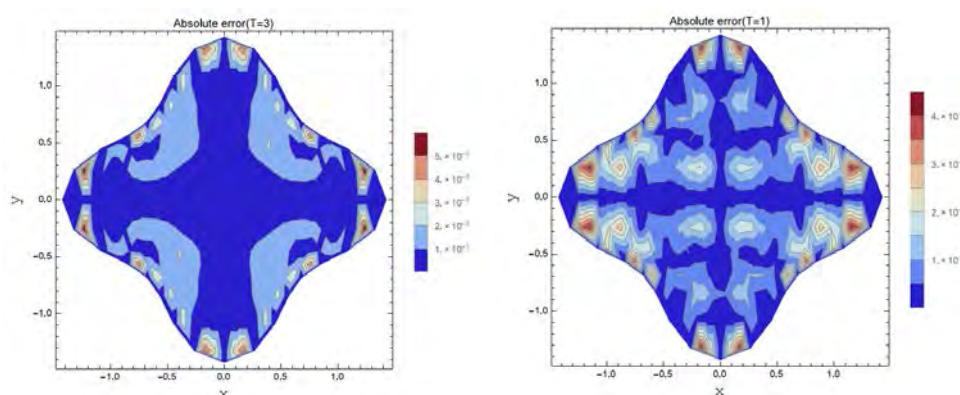
جدول ۶.۴: مقادیر خطاها و زمان CPU برای مثال ۶.۳.۴ در زمان‌های مختلف t .

CPU Time(s)	Relative error	RMS	L_∞	t
26	6.978×10^{-5}	1.314×10^{-5}	2.960×10^{-5}	0.5
45	1.155×10^{-4}	1.339×10^{-5}	4.271×10^{-5}	1
97	2.058×10^{-4}	1.838×10^{-5}	8.818×10^{-5}	2
153	7.864×10^{-5}	1.670×10^{-5}	5.930×10^{-5}	3
262	6.667×10^{-4}	4.058×10^{-5}	2.388×10^{-4}	5

تابع $f(x, y, t)$ در (۱.۴)، شرایط آغازین و شرایط مرزی مسأله (۲.۴)–(۴.۴) به طور مستقیم، از روی جواب تحلیلی نوشته می‌شود.

نتایج محاسبه شده برای خطای نسبی، خطای جذر میانگین مربعات، ماکزیمم خطای مطلق نقطه‌ای برای لحظات $t = 0.5, 1, 2, 3, 4, 5$ در جدول ۶.۴ گزارش شده است. علاوه بر آن مدت زمان CPU نیز در این جدول ارائه شده است. خطاهای گزارش شده کارایی و تطبیق پذیری روش ارائه شده برای حل مسایلی با دامنه‌ی نامنظم را نشان می‌دهد. تطابق جواب تقریبی با جواب تحلیلی از روی شکل ۷.۴ که توزیع خطای مطلق نقطه‌ای را روی ناحیه Ω با فرض $N = 410$ برای لحظات $t = 1, 3$ و $\delta t = 0.001$ نمایش می‌دهد قابل مشاهده است.

در این فصل، تمرکز اصلی، روی بررسی قابلیت اجرای روش مورد نظر، در حل مسایل با دامنه‌های نامنظم است. از نتایج حاصل مشاهده می‌شود روش حاضر برای حل عددی معادله‌ی تلگراف دو بعدی



شکل ۷.۴: توزیع خطای مطلق روی ناحیه Ω با فرض $N = 410$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۶.۳.۴ در زمان‌های $t = 1$ (راست)، $t = 3$ (چپ).

با دامنه‌های منظم مناسب است و این روش به دلیل این‌که بدون شبکه است به راحتی قابل تعمیم به مسایل با ناحیه‌های نامنظم است و جواب‌های تقریبی این روش برای معادله‌ی تلگراف دو بعدی، روی دامنه نامنظم به همان خوبی دامنه‌های منظم است.

۴.۴ نتیجه‌گیری

در این فصل، ابتدا روش شبه طیفی-پایه شعاعی، برای حل معادلات تلگراف دو بعدی مرتبه دوم، روی دامنه‌های منظم پیاده سازی شد. این روش عددی، یک روش بدون شبکه، مبتنی بر توابع پایه شعاعی است. روش تفاضلات متناهی پیشرو نیز برای گسسته‌سازی مشتقات زمانی استفاده شده است. برای گسسته‌سازی مکانی و عملگر دیفرانسیلی آن از ماتریس عملیاتی مبتنی بر توابع پایه شعاعی به روش شبه طیفی-پایه شعاعی استفاده شده است. با توجه به اینکه ماتریس عملیاتی، خارج از حلقه‌ی تکرار گام زمانی، فقط یکبار محاسبه می‌شود در نتیجه سرعت پردازش و اجرایی روش مناسب خواهد بود. در نهایت روش مورد نظر برای حل معادله‌ی تلگراف دو بعدی، روی ناحیه نامنظم نیز به‌طور کامل، مشابه با ناحیه‌های منظم پیاده سازی شده است که این نکته نیز از مزایای روش مورد نظر می‌باشد. در این فصل، برای تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر شکل در توابع پایه شعاعی از روش $LOOCV$ استفاده شده است. برای نمایش کارایی و دقت روش، از اندازه‌های مختلف خطاها در چندین مثال متعدد، استفاده شده است. نتایج عددی روش پیشنهادی با تحقیقات و نتایج دیگر روش‌ها نیز مقایسه شد. نتایج عددی کارایی روش را برای حل معادله‌ی تلگراف دو بعدی، روی دامنه‌های نامنظم را به همان خوبی دامنه‌های منظم نشان می‌دهد. در نهایت می‌توان گفت روش توابع شبه طیفی-پایه شعاعی، روشی کارا و دقیق برای حل معادله دیفرانسیل



تلگراف با دامنه‌های منظم و نامنظم است.

فصل ۵

روش شبه طیفی مبتنی بر شبه‌درون‌یاب
چندربعی برای حل عددی معادله‌ی
کلین-گردن و ساین-گردن غیرخطی

۱.۵ مقدمه

معادله‌ی کلین-گردن، یکی از معادلات مهم و پر کاربرد در فیزیک ریاضی مانند فیزیک پلاسما، فیزیک حالت جامد، دینامیک سیالات و سنتیک شیمیایی است [۷۳، ۷۴، ۷۵]. در این فصل معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی وابسته به زمان به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$u_{tt} + \alpha \Delta u + \mathcal{N}(u) = f(x, t) \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (۱.۵)$$

با شرایط آغازین :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \partial_t u(x, 0) = v_0(x) \quad (۲.۵)$$

و شرایط مرزی دیریکله:

$$u(x, t) = g(t), \quad t \in (0, t], \quad x \in \partial\Omega, \quad (۳.۵)$$

که در آن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ یک ناحیه کران دار یک بعدی یا دو بعدی ($d = 1, 2$) است. $\alpha < 0$ یک ثابت عددی معلوم است و منظور از $\Delta = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2$ عملگر لاپلاس استاندارد و $\mathcal{N}$ یک تابع غیرخطی است. اگر $\mathcal{N}(u) = \beta u + \gamma u^k, k = 2, 3$ باشد آن را به ترتیب کلین-گردن غیرخطی مربعی و مکعبی گویند. همچنین اگر $\mathcal{N}(u) = \sin u$ باشد معادله را ساین-گردن گویند. در این فصل، روش شبه طیفی مبتنی بر شبه درون‌یاب چنددرجی برای تقریب جواب هر دو دسته معادلات ساین-گردن و کلین-گردن غیرخطی مربعی، مکعبی (یک بعدی و دو بعدی) ارائه شده است. در سال‌های اخیر روش‌های تحلیلی متعدد برای این نوع معادلات در هر دو حالت یک بعدی و دو بعدی [۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰] و همچنین روش‌های عددی متعدد مانند تفاضلات متناهی، عناصر متناهی، روش طیفی و شبه طیفی [۸۱، ۸۲، ۸۳] ارائه شده است.

روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه شعاعی نیز از روش‌های کارا در حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی هستند. روش‌های بدون شبکه پایه شعاعی متعارف اغلب نیاز به حل یک دستگاه معادلات خطی بد وضع با عدد وضعیت بزرگ دارند [۲۲]. استفاده از شبه درون‌یاب چنددرجی (MQQI) که در فصل اول (۳۲.۱) معرفی شده است این مشکل را کاهش می‌دهد. در این حالت، عدد وضعیت ماتریس‌های درون‌یاب در مقایسه با درون‌یاب‌های پایه شعاعی استاندارد کوچکتر خواهند بود.

ساختار این فصل به این شکل است، که ابتدا بر اساس روش ارائه شده در فصل دوم، روش شبه طیفی-پایه شعاعی، برای تقریب مشتقات مکانی در محاسبه‌ی ماتریس‌های عملیاتی و گسسته‌سازی مکانی، روی شبه درون‌یاب چنددرجی نیز پیاده سازی شده است. سپس، روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم برای گسسته‌سازی زمانی بر روی معادلات کلین-گردن و ساین-گردن غیرخطی پیاده‌سازی شده است. در بخش

نتایج عددی، کارایی و اثر بخشی روش مورد نظر با مثال‌های متعدد تبیین و در نهایت نتیجه گیری ارایه شده است.

۲.۵ تقریب مشتق با روش شبه طیفی-پایه شعاعی

در این بخش، آنچه در مورد محاسبه‌ی ماتریس‌های عملیاتی با روش شبه طیفی-پایه شعاعی گفته شد به شبه درون‌یاب‌های چندربعی تعمیم داده شده است و از آن در حل عددی معادله‌ی کلین-گردن یک بعدی و دو بعدی به روش هم‌محلی پایه شعاعی، برای تقریب عملگر دیفرانسیلی مکانی این مسایل استفاده خواهد شد.

فرض کنید $u(x, t)$ جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۱.۵) و $u_N(x, t)$ تقریب شبه‌درون‌یاب چندربعی جواب $u(x, t)$ روی مجموعه نقاط داده شده $\{x_j\}_{j=1}^N$ باشند یعنی:

$$u_N(x, t) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \phi_j(x), \quad (۴.۵)$$

که در آن ϕ_j از (۳۳.۱) برای حالت یک بعدی و از رابطه (۳۵.۱) به صورت ترکیبی از توابع پایه شعاعی چندربعی در حالت دو بعدی $x \in \mathbb{R}^2$ استفاده شده است. حال اگر این تقریب در نقاط هم‌محلی x_i و $i = 1, \dots, N$ یک زمان ثابت و مشخص t در نظر گرفته شود خواهیم داشت:

$$u_N(x_i, t) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \phi_j(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (۵.۵)$$

فرض کنید $\mathcal{L} = \Delta$ عملگر دیفرانسیلی خطی لاپلاس نسبت به متغیر مکانی x باشد. براساس (۲۸.۲) تقریب این عملگر دیفرانسیلی در نقاط هم‌محلی با روش شبه طیفی-پایه شعاعی مبتنی بر شبه‌درون‌یاب چندربعی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}u = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}u, \quad (۶.۵)$$

که در آن

$$\mathcal{L}u = [\mathcal{L}u_N(x_1, t), \dots, \mathcal{L}u_N(x_N, t)]^T,$$

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = A_{\mathcal{L}}A^{-1}, \quad (۷.۵)$$

برای حالت یک بعدی $\mathcal{L}\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$

$$(A_{\mathcal{L}})_{ij} = \frac{\partial^2 \phi_j(x_i)}{\partial x^2} \quad i = j = 1, 2, \dots, N, \quad (۸.۵)$$

و همچنین در فضای دو بعدی که $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ماتریس عملیاتی متناظر با این عملگر به صورت زیر است:

$$(A_{\mathcal{E}})_{ij} = \frac{\partial^2 \phi_j(x_i, y_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_j(x_i, y_i)}{\partial y^2}, \quad i = j = 1, 2, \dots, N. \quad (9.5)$$

۳.۵ روش حل عددی

در این بخش، حل معادله‌ی کلین-گردن (۱۰.۵)-(۱۳.۵) با استفاده از عملگر شبه‌درون‌یاب چندربعی $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$ ارایه و نتایج آن با دیگر تحقیقات مقایسه خواهد شد. در این طرح، ابتدا بسط (۴.۵) در معادله (۱۰.۵) جایگزین و سپس روش هم‌محلی در نقاط $x_i, i = 1, \dots, N$ اعمال می‌شود که در ادامه مشتقات جواب در نقاط هم‌محلی مورد نیاز است که با استفاده از روش شبه طیفی-پایه شعاعی ارایه شده در بخش قبل، با ایجاد ماتریس عملیاتی در نقاط هم‌محلی تقریب زده می‌شوند. در نهایت بعد از گسسته‌سازی مکانی، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی اول حاصل می‌شود که تقریب جواب دستگاه با روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم استاندارد به‌دست آمده است.

ابتدا این روش برای معادله‌ی کلین-گردن غیرخطی مربعی و مکعبی در حالت یک بعدی و دو بعدی پیاده‌سازی و در نهایت برای معادله‌ی ساین-گردن یک بعدی و دو بعدی نیز پیاده‌سازی شده است. با حل چند مثال و مقایسه‌ی جواب‌های به‌دست آمده با جواب دقیق و تقریبی دیگر تحقیقات، کارایی روش مورد نظر در عمل نیز بررسی شده است.

معادله‌ی کلین-گردن زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{tt}(x, t) + \alpha \Delta u(x, t) + \beta u(x, t) + \gamma (u(x, t))^k = f(x, t), \quad (10.5)$$

که $\alpha < 0$ ، با شرایط آغازین:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \quad d = 1, 2, \quad (11.5)$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x), \quad (12.5)$$

و شرایط مرزی دیریکله:

$$u(x, t) = g(t), \quad t \in (0, t], \quad x \in \partial\Omega, \quad (13.5)$$

طوری که Ω یک ناحیه کران‌دار در فضای $\mathbb{R}^d$ با مرز $\partial\Omega$ است.

برای حل ابتدا با تغییر متغیر

$$u_t(x, t) = v(x, t), \quad (14.5)$$

مسأله (۱۰.۵)-(۱۳.۵) به یک دستگاه دوتایی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول نسبت به زمان (متغیر t) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = v(x, t), \\ v_t(x, t) = -\alpha \Delta u(x, t) - \beta u - \gamma u^k + f(x, t), \end{cases} \quad (15.5)$$

با شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (16.5)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (17.5)$$

و شرایط مرزی:

$$u(x, t) = g(t), \quad t \in (0, t], \quad x \in \partial\Omega \subseteq \mathbb{R}^d, d = 1, 2. \quad (18.5)$$

در ادامه، روش هم‌محلی پایه شعاعی مبتنی بر شبه‌درون‌یاب پایه شعاعی برای گسسته‌سازی مکانی استفاده شده است. در این مرحله، برای گسسته‌سازی عملگر دیفرانسیلی از روش شبه طیفی مبتنی بر بسط شبه‌درون‌یاب جواب و با ایجاد یک ماتریس عملیاتی، مشتقات مکانی مورد نیاز تقریب می‌شود. در مرحله‌ی نهایی، برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول وابسته به زمان حاصل، روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم به کار رفته است و در هر گام زمانی، برای اعمال شرایط مرزی از روش ارایه شده در [۷۲] و توسعه‌ی آن به مسایل با بعد بالاتر از یک، استفاده شده است. در این روش بر خلاف روش‌های کانسای، برای اعمال شرایط مرزی نیاز به اضافه نمودن شرایط جدید و افزایش بعد محاسبات نیست. ساختار روش مورد بحث را می‌توان به صورت گام‌های زیر بیان نمود:

- گام اول: گسسته‌سازی مکانی

- گام دوم: گسسته‌سازی زمانی

- گام سوم: اعمال شرایط مرزی

در ادامه به بیان گام‌های بالا پرداخته می‌شود و روابط مربوط برای معادله‌ی کلین-گردن به دست خواهد آمد که به راحتی قابل تعمیم به معادله دیفرانسیل ساین-گردن نیز است.

۱.۳.۵ گام اول. گسسته‌سازی - مکانی

با محاسبه‌ی تقریب $u(x, t)$ و $v(x, t)$ به صورت شبه‌درون‌یاب چندربعی در نقاط هم‌محلی $i = 1, \dots, N, x_i$ ، و زمان ثابت و معلوم t نتیجه می‌شود:

$$u_N(x_i, t) = \sum_{j=1}^N \xi_j(t) \phi_j(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (19.5)$$

$$v_N(x_i, t) = \sum_{j=1}^N \lambda_j(t) \phi_j(x_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (20.5)$$

حال اگر براساس روش هم‌محلی، بسط‌های (۱۹.۵)–(۲۰.۵) را در معادله‌ی (۱۵.۵) جایگزین شود و برای محاسبه‌ی $\{\Delta u(x_i, t)\}_{i=1}^N$ در نقاط هم‌محلی از روش شبه طیفی-پایه شعاعی ارایه شده در (۶.۵) استفاده شود به معادلات تقریبی زیر خواهیم رسید:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = V(t), \\ \frac{dV}{dt} = -\alpha \mathcal{D}_{\mathcal{L}}.U(t) - \beta U(t) - \gamma U^k(t) + f(t), \end{cases} \quad (21.5)$$

که در آن

$$U(t) = [u_N(x_1, t), \dots, u_N(x_N, t)]^T,$$

$$V(t) = [v_N(x_1, t), \dots, v_N(x_N, t)]^T,$$

$$f(t) = [f(x_1, t), \dots, f(x_N, t)]^T,$$

و $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ ماتریس عملیاتی متناظر با عملگر دیفرانسیلی Δ تعریف شده در (۷.۵) است.

اگر روابط (۲۱.۵) به شکل فشرده‌تر، باز نویسی شود، دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول زیر:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = F_1(t, U, V), \\ \frac{dV}{dt} = F_2(t, U, V), \end{cases} \quad (22.5)$$

با شرایط آغازین:

$$\begin{cases} U(0) = [u_N(x_1, 0), \dots, u_N(x_N, 0)]^T, \\ V(0) = [v_N(x_1, 0), \dots, v_N(x_N, 0)]^T, \end{cases} \quad (23.5)$$

حاصل می‌شود که در آن

$$\begin{cases} F_1(t, U, V) = V(t), \\ F_2(t, U, V) = -\alpha \mathcal{D}_{\mathcal{L}}.U(t) - \beta U(t) - \gamma U^k(t) + f(t). \end{cases} \quad (24.5)$$

در رابطه (۲۴.۵) بردار $U^k = U \otimes U \otimes \dots \otimes U$ و نماد ضرب مولفه به مولفه است. برای معادله‌ی ساین-گردن غیرخطی نیز می‌توان به طور مشابه و به سادگی گام بالا را اجرا نمود و دستگاهی مشابه با (۲۲.۵)–(۲۳.۵) به دست آورد. فقط کافی‌ست بردار U^k با بردار $\sin(U)$ جایگزین شود.

۲.۳.۵ گام دوم. گسسته‌سازی زمانی

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۲.۵) از روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم استاندارد به صورت زیر استفاده می‌شود.

فرض کنید

$$U^{(m)} = U_N^{(m)} = (u_N(x_i, t_m))_{i=1}^N = \left(\sum_{j=1}^N \xi_j^{(m)} \phi_j(x_i) \right)_{i=1}^N$$

۹

$$V^{(m)} = V_N^{(m)} = (v_N(x_i, t_m))_{i=1}^N = \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^{(m)} \phi_j(x_i) \right)_{i=1}^N$$

که $\xi_j^{(m)} = \xi_j(t_m)$ ، $\lambda_j^{(m)} = \lambda_j(t_m)$ و $t_m = m\delta t$

با اعمال روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم روی دستگاه (۲۲.۵) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} U^{(m+1)} = U^{(m)} + \frac{1}{6}(K_{1,1} + 2K_{2,1} + 2K_{3,1} + K_{4,1}), \\ V^{(m+1)} = V^{(m)} + \frac{1}{6}(K_{1,2} + 2K_{2,2} + 2K_{3,2} + K_{4,2}), \end{cases} \quad (25.5)$$

به‌طوری‌که

$$\begin{cases} K_{1,1} = \delta t F_1(t^{(m)}, U^{(m)}, V^{(m)}), \\ K_{2,1} = \delta t F_1(t^{(m)} + \frac{\delta t}{2}, U^{(m)} + \frac{1}{2}K_{1,1}, V^{(m)} + \frac{1}{2}K_{1,2}), \\ K_{3,1} = \delta t F_1(t^{(m)} + \frac{\delta t}{2}, U^{(m)} + \frac{1}{2}K_{2,1}, V^{(m)} + \frac{1}{2}K_{2,2}), \\ K_{4,1} = \delta t F_1(t^{(m)} + \delta t, U^{(m)} + K_{3,1}, V^{(m)} + K_{3,2}) \end{cases} \quad (26.5)$$

و با جایگزینی F_2 به جای F_1 به‌طور مشابه $K_{i,2}$ برای $i = 1, \dots, 4$ تعریف می‌شوند.

در اینجا به این نکته مهم می‌توان اشاره نمود که ماتریس عملیاتی، $\mathcal{D}_g$ ، متناظر با عملگر دیفرانسیلی بر اساس رابطه (۷.۵) تابعی از زمان نیست. از این رو در هر گام زمانی نیاز به محاسبه مجدد نمی‌باشد و در تمام گام‌های زمانی ثابت است بنابراین در حل مسأله، کافیست فقط یک بار، ماتریس عملیاتی را خارج از حلقه تکرار گام زمانی، محاسبه نمود و از آن در تمام گام‌های زمانی استفاده کرد. که باعث کاهش مدت زمان اجرا الگوریتم می‌شود.

۳.۳.۵ گام سوم. اعمال شرایط مرزی

بخش مهم دیگر این روش، اعمال شرایط مرزی بر روی جواب تقریبی است. در این فصل نیز از توسعه الگوریتم ارایه شده در [۷۲] برای مسایل دو بعدی استفاده شده است. در این روش، در هر گام زمانی،

شرایط مرزی با اصلاح بردار $U^{(m+1)}$ حاصل از رابطه (۲۵.۵) بر جواب تقریبی اعمال می‌شود. برای این منظور، پس از محاسبه‌ی بردار $U^{(m+1)}$ در (۲۵.۵)، مولفه‌های متناظر با نقاط هم‌محلی واقع در مرز، با مقدار دقیق جواب از روی شرایط مرزی در لحظه $(m+1)\delta t$ جایگزین می‌شود. می‌توان این محاسبات را به شکل ماتریسی زیر نمایش داد:

$$U^{(m+1)} = I_{\partial} \cdot U^{(m+1)} + U_{\partial}^{(m+1)}, \quad (27.5)$$

به‌طوری‌که I_{∂} همان ماتریس همانی I است که در آن سطرهاى مربوط به نقاط مرزی با بردار صفر جایگزین شده‌اند. همچنین $U_{\partial}^{(m+1)}$ نیز بردار ستونی صفر از مرتبه $N \times 1$ است که در آن مولفه‌های متناظر با نقاط هم‌محلی واقع در مرز با مقدار دقیق جواب از روی شرایط مرزی در لحظه $(m+1)\delta t$ جایگزین شده‌اند.

۴.۵ نتایج عددی

در این بخش، ابتدا حل عددی چند مثال از مسأله کلین-گردن غیرخطی با شرایط مرزی و آغازین متفاوت به شکل (۱۳.۵)–(۱۰.۵) به روش شبه طیفی-پایه شعاعی و مقایسه آن‌ها با جواب‌های دیگر تحقیق‌ها انجام می‌شود. در بخش نهایی، روش مذکور برای حل معادله غیرخطی ساین-گردن نیز پیاده‌سازی می‌شود. در این روش از شبه‌درون‌یاب چندربعی یک بعدی و دو بعدی، $(\mathcal{L}_D)$ ، تعریف شده در (۳۳.۱) و (۳۵.۱) برای تقریب $u^{(m)}$ و Δu^m در هر گام زمانی استفاده خواهد شد. در تمام محاسبات این فصل، جواب‌ها به ازای مقدار ثابتی از پارامتر شکل، در توابع چندربعی پایه شعاعی گزارش شده‌اند و نمودار تغییرات خطای L_{∞} نسبت به تغییرات پارامتر شکل بررسی شده است. برای سنجش کارایی و دقت روش از خطاهای L_{∞} و RMS تعریف شده در (۲۹.۴)–(۳۱.۴) و L_2 مطابق تعریف زیر استفاده شده است.

$$L_2 \text{ error} = \sqrt{h \sum_{j=1}^N (u(x_j, t_m) - u_N(x_j, t_m))^2}.$$

۱.۴.۵ معادله‌ی غیرخطی کلین-گردن

در این بخش، ابتدا حل عددی معادله‌ی کلین-گردن یک بعدی غیرخطی با روش شبه طیفی-پایه شعاعی مبتنی بر شبه درون‌یاب چند ربعی^۱ بررسی و نتایج حاصل با جواب‌های تحلیلی و تقریبی گزارش

^۱Pseudospectral method based on the multiquadric quasi-interpolation (MQQI-Ps)

شده در [۸۴] و [۸۵] مقایسه شده است. در [۸۴] نویسندگان از روش هم‌محلی پایه شعاعی با توابع اسپلاین صفحات نازک (TPS) استفاده کرده‌اند. در [۸۵] محققین، برای تقریب تابع جواب و عملگر دیفرانسیلی مرتبه دوم آن، از ترکیب خطی شکل انتگرالی شبه‌درون‌یاب‌های چندربعی^۲ استفاده نموده و نشان داده‌اند که روش مذکور نسبت به روش اسپلاین‌های صفحات نازک (TPS) ارایه شده در [۸۴] با دقت مشابه، از تعداد داده‌های پراکنده کمتری استفاده می‌کند. از این رو حجم عملیات محاسباتی کاهش می‌یابد.

در این فصل برای تقریب تابع جواب از شبه‌درون‌یاب چندربعی و برای تقریب مشتقات جواب، نیز از روش شبه طیفی-پایه شعاعی مبتنی بر شبه‌درون‌یاب چندربعی با داده‌های متساوی الفاصله استفاده شده است. از روی نتایج عددی مشاهده خواهد شد خطاها کمتر از نتایج گزارش شده در [۸۵] است. در معادله‌ی کلین-گردن دو بعدی، جواب‌های روش مورد بحث با جواب‌های دقیق و نتایج عددی گزارش شده در [۸۶] مقایسه شده است. در این حالت نیز مشاهده می‌شود نتایج عددی حاصل، تطابق خوبی با جواب دقیق دارد و در مقایسه با روش $MK - MLPG$ ^۳ ارایه شده در [۸۶] تعداد داده‌های پراکنده کمتری نیاز است.

مثال ۱.۴.۵. مسأله (۱۰.۵)-(۱۳.۵) روی بازه $x \in [-1, 1]$ ، $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 1$ و $k = 2$ با شرایط آغازین زیر فرض شده است:

$$\begin{cases} u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

در این مثال $f(x, t) = -x \cos t + x^2 \cos t$ روی بازه $-1 \leq x \leq 1$ و جواب دقیق این مسأله به صورت زیر در [۸۷] ارایه شده است:

$$u(x, t) = x \cos t. \quad (۲۸.۵)$$

شرایط مرزی نیز به راحتی از روی جواب دقیق تعیین می‌شود.

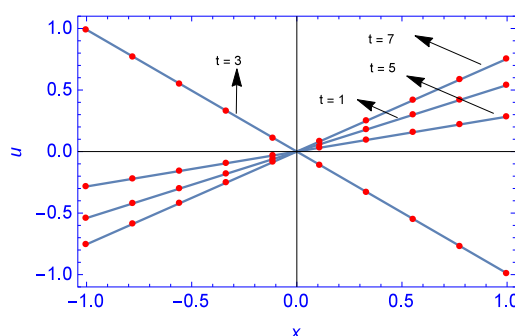
در جدول ۱.۵ خطاهای L_2, L_∞ و خطای RMS برای مثال ۱.۴.۵ ارایه شده است. نتایج با $N = 10$ داده پراکنده، $\delta t = 0.001$ و مقدار پارامتر شکل، $c = 0.121$ ، به دست آمده‌اند. نتایج روش مذکور با نتایج [۸۵] مقایسه شده است. از روی جدول می‌توان مشاهده نمود که در این مثال، نتایج عددی

^۲Integrated multiquadric quasi-interpolation (IMQQI)

^۳Moving kriging based meshless local Petrov-Galerkin method (MK-MLPG)

جدول ۱.۵: مقادیر خطاها در مثال ۱.۴.۵ در زمان‌های مختلف t با استفاده از $N = 10$ داده پراکنده، $\delta t = 0.001$ و $c = 0.121$

t	L_∞	L_2	RMS	L_∞ [۸۵]	L_2 [۸۵]	RMS [۸۵]
1	2.19755×10^{-14}	2.1570×10^{-14}	1.44696×10^{-14}	1.2590×10^{-5}	2.0694×10^{-5}	6.2397×10^{-6}
3	1.30590×10^{-14}	1.23829×10^{-14}	8.30668×10^{-15}	1.5428×10^{-5}	3.7065×10^{-5}	1.1175×10^{-6}
5	2.72352×10^{-14}	2.57676×10^{-14}	1.72854×10^{-14}	3.3625×10^{-5}	6.9684×10^{-5}	2.1010×10^{-5}
7	2.08028×10^{-14}	2.03321×10^{-14}	1.36392×10^{-14}	3.7412×10^{-5}	8.1943×10^{-5}	2.4706×10^{-5}


 شکل ۱.۵: جواب عددی و دقیق مثال ۱.۴.۵ با فرض $c = 0.121$ و $N = 10$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, t = 3, t = 5, t = 7$

تطابق خوبی با جواب دقیق دارد. شکل جواب تقریبی و دقیق در شکل ۱.۵ و خطاهای مطلق در شکل ۲.۵ برای زمان‌های مختلف با $\delta t = 0.001$ ، $dx = 0.2$ در بازه $-1 \leq x \leq 1$ با استفاده از روش $MQQI - PS$ با پارامتر شکل $c = 0.121$ نمایش داده شده‌اند.

مثال ۲.۴.۵. در این مثال، مسأله‌ی کلین-گردن غیرخطی و یک بعدی (۱۰.۵) در بازه $0 \leq x \leq 1$

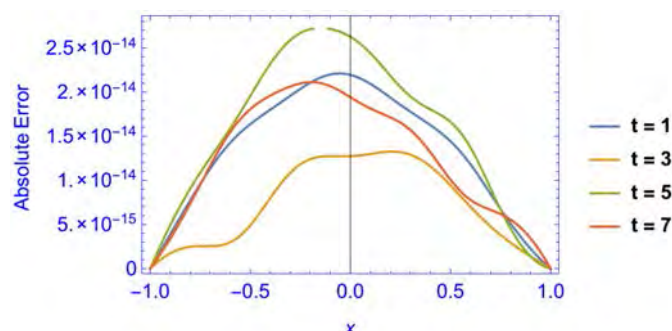
با شرایط آغازین زیر فرض شده است:

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases}$$

و $f(x, t) = 6xt(x^2 - t^2) + x^6t^6$ در بازه $0 \leq x \leq 1$ فرض شده است. جواب دقیق به صورت زیر ارایه شده است [۸۷]:

$$u(x, t) = x^3t^3. \quad (۲۹.۵)$$

شرایط مرزی دیریکله نیز از روی جواب دقیق به آسانی محاسبه می‌شود. در جدول ۲.۵ خطاهای L_∞ و L_2 و خطای RMS برای مثال ۲.۴.۵ ارایه شده است. نتایج با $N = 20$ داده پراکنده، $\delta t = 0.001$ و پارامتر شکل $c = 0.381$ به دست آمده‌اند. نتایج روش مورد نظر با نتایج گزارش شده در [۸۵] مقایسه



شکل ۲.۵: خطای مطلق روش مورد نظر برای مثال ۱.۴.۵ با فرض $N = 10, c = 0.121$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, t = 3, t = 5, t = 7$

جدول ۲.۵: مقادیر خطاها برای مثال ۲.۴.۵ در زمان‌های مختلف $t, N = 20, \delta t = 0.001$ با روش MQQI-PS و $c = 0.381$

IMQOI			MQQI-PS			t
$RMS[\lambda\delta]$	$L_2[\lambda\delta]$	$L_\infty[\lambda\delta]$	RMS	L_2	L_∞	
4.8581×10^{-6}	3.4694×10^{-5}	7.7958×10^{-6}	1.69559×10^{-6}	1.73964×10^{-6}	4.03996×10^{-6}	1
7.7680×10^{-5}	5.5475×10^{-4}	1.2307×10^{-4}	7.60237×10^{-6}	7.79986×10^{-6}	1.76028×10^{-5}	2
2.4473×10^{-4}	2.4618×10^{-3}	5.3019×10^{-4}	7.25472×10^{-5}	7.44319×10^{-5}	1.89709×10^{-4}	3
9.7029×10^{-4}	2.4618×10^{-3}	1.8601×10^{-3}	2.12514×10^{-4}	2.18034×10^{-4}	5.75087×10^{-4}	4
1.9022×10^{-3}	1.3585×10^{-2}	3.5192×10^{-3}	6.31239×10^{-4}	6.47638×10^{-4}	1.5485×10^{-3}	5

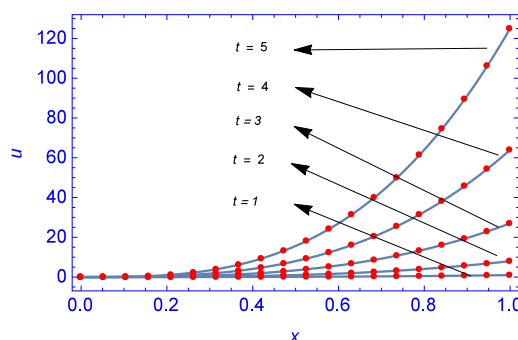
شده است. از روی جدول می‌توان مشاهده نمود در این مثال، نتایج عددی تطابق خوبی با جواب دقیق دارد. شکل جواب تقریبی با روش $MQQI - PS$ با $c = 0.381$ و جواب دقیق برای زمان‌های مختلف با $N = 20, \delta t = 0.001$ در بازه $0 \leq x \leq 1$ در شکل ۳.۵ با یکدیگر مقایسه شده‌اند و خطای مطلق آن‌ها در شکل ۴.۵ نمایش داده شده‌اند.

مثال ۳.۴.۵: در این مثال، مسأله کلین-گردن غیرخطی یک بعدی (۱۰.۵) در بازه $x \in [-1, 1]$ با $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 1, k = 3$ در نظر گرفته شده است. شرایط آغازین نیز به صورت زیر داده شده است:

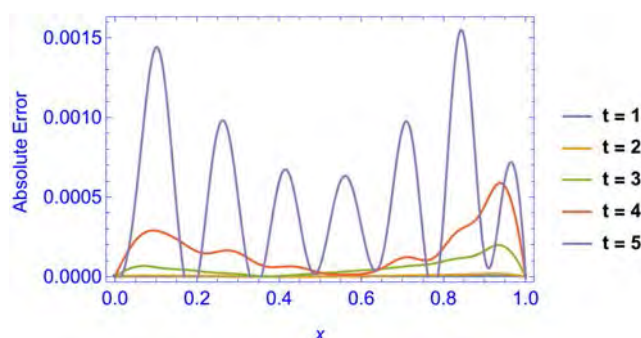
$$\begin{cases} u(x, 0) = x^2 \cosh x, -1 \leq x \leq 1, \\ u_t(x, 0) = x^2 \sinh x, -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

تابع سمت راست معادله $f(x, t) = (x^2 - 2) \cosh(x + t) - 4x \sinh(x + t) + x^6 \cosh^3(x + t)$ جواب دقیق این معادله عبارت است از:

$$u(x, t) = x^2 \cosh(x + t). \quad (۳۰.۵)$$



شکل ۳.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۲.۴.۵ با $N = 20$ ، $c = 0.381$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های $t = 1, 2, \dots, 5$.



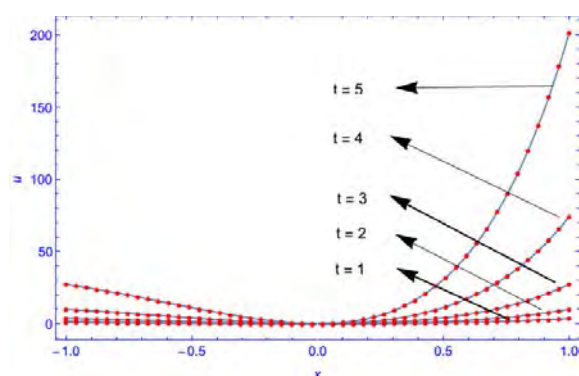
شکل ۴.۵: خطای روش مورد نظر برای مثال ۲.۴.۵ با $N = 20$ ، $c = 0.381$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های $t = 1, 2, \dots, 5$.

شرایط مرزی نیز از نوع دیریکله فرض شده است که به راحتی می‌توان آن‌را از روی جواب دقیق به‌دست آورد.

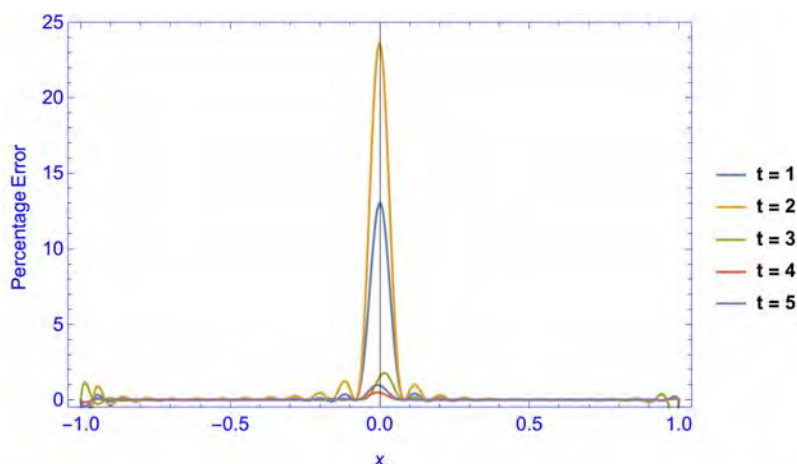
در جدول ۳.۵ خطاهای L_2 ، L_∞ و خطای RMS برای مثال ۳.۴.۵ ارائه شده است. نتایج با $N = 50$ داده پراکنده، $\delta t = 0.001$ و $c = 0.181$ به‌دست آمده‌اند. نتایج روش مورد نظر با نتایج گزارش شده در [۸۵] مقایسه شده است. از روی این جدول نیز می‌توان مشاهده نمود در این مثال هم، نتایج عددی

جدول ۳.۵: مقادیر خطاها برای مثال ۳.۴.۵ در زمان‌های مختلف t ، $N = 50$ ، $\delta t = 0.001$ ، با روش $MQQI - PS$ و $c = 0.181$.

t	L_∞	L_2	RMS	L_∞ [۸۵]	L_2 [۸۵]	RMS [۸۵]
1	2.83572×10^{-4}	1.59049×10^{-4}	1.11334×10^{-4}	4.2672×10^{-5}	2.8456×10^{-4}	2.0242×10^{-5}
2	7.81595×10^{-4}	3.84643×10^{-4}	2.6925×10^{-4}	4.9397×10^{-4}	2.6266×10^{-3}	1.8577×10^{-4}
3	6.78361×10^{-4}	1.61686×10^{-4}	1.1318×10^{-4}	2.0380×10^{-3}	9.5859×10^{-3}	6.7016×10^{-4}
4	1.09944×10^{-4}	7.14267×10^{-5}	4.99987×10^{-5}	6.4162×10^{-3}	2.3457×10^{-2}	1.8844×10^{-3}
5	3.22279×10^{-4}	1.60303×10^{-4}	1.12212×10^{-4}	1.7941×10^{-2}	7.4214×10^{-2}	5.2391×10^{-3}



شکل ۵.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۴.۵ (بالا) و خطای روش (پایین) با $N = 50$ ، $c = 0.181$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 2, \dots, 5$



شکل ۶.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی برای مثال ۳.۴.۵ (بالا) و خطای روش (پایین) با $N = 50$ ، $c = 0.181$ و $\delta t = 0.001$ در لحظات $t = 1, 2, \dots, 5$

تطابق خوبی با جواب دقیق دارد. برای مثال ۳.۴.۵ در شکل ۵.۵ جواب دقیق با جواب تقریبی از روش $MQQI - PS$ و در شکل ۶.۵ خطاهای روش با $N = 50$ ، $c = 0.181$ و $\delta t = 0.001$ در چند زمان مختلف نمایش داده شده‌اند.

مثال ۴.۴.۵. در این مثال، مسأله کلین-گردن غیرخطی یک بعدی (۱۰.۵) در بازه $x \in [0, 1]$ با $\alpha = -2.5$ ، $\beta = 1$ ، $\gamma = 1.5$ و $k = 3$ در نظر گرفته شده است که جواب دقیق این مسأله به صورت زیر است:

$$u(x, t) = B \tan(K(x + Ct)), \quad (31.5)$$

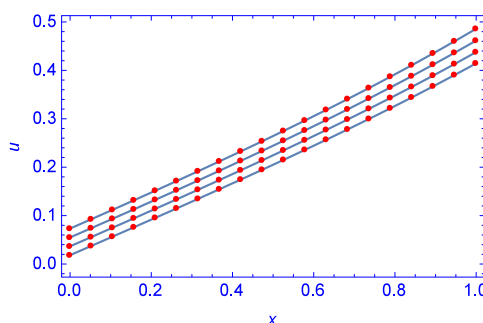
جدول ۴.۵: مقادیر خطاها برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.05$, $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1.5$ در زمان‌های مختلف t با روش $MQQI - PS$ ، پارامتر

شکل ۲.۲، $c = 2.2$ و $N = 20$ و $\delta t = 0.001$

$RMS[\lambda\delta]$	$L_2[\lambda\delta]$	$L_\infty[\lambda\delta]$	RMS	L_2	L_∞	t
1.2787×10^{-7}	1.2850×10^{-6}	2.1781×10^{-7}	3.96904×10^{-7}	4.07215×10^{-7}	8.10099×10^{-7}	1
1.3980×10^{-7}	1.4099×10^{-6}	3.0648×10^{-7}	1.18068×10^{-6}	1.21136×10^{-6}	2.34139×10^{-6}	2
1.7004×10^{-7}	1.3144×10^{-6}	3.7008×10^{-7}	1.51767×10^{-6}	1.5571×10^{-6}	2.77812×10^{-6}	3
1.2002×10^{-7}	2.0012×10^{-6}	3.4230×10^{-7}	1.18712×10^{-6}	1.21796×10^{-6}	2.63626×10^{-6}	4

$$K = \sqrt{\frac{-\beta}{2(\alpha+C^2)}} \text{ و } B = \sqrt{\frac{\beta}{\gamma}}$$

شرایط آغازین و مرزی را می‌توان به سادگی از روی جواب دقیق نوشت.

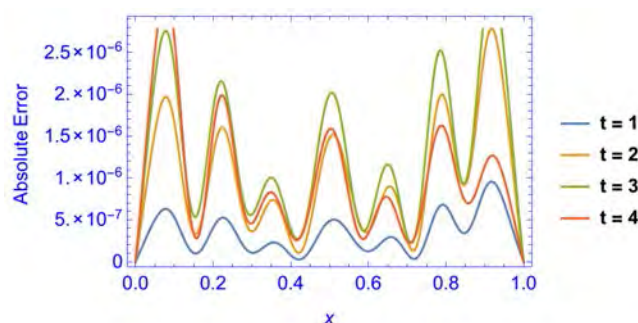


شکل ۷.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی روش $MQQI - PS$ برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.05$ فرض $N = 20$ ، $c = 2.2$ و $\delta t = 0.001$ در

زمان‌های مختلف $t = 1, 2, 3, 4$.

در جدول ۴.۵ خطاهای L_2 ، L_∞ و خطای RMS برای مثال ۴.۴.۵ با $N = 20$ داده پراکنده، $\delta t = 0.001$ و مقدار پارامتر شکل، $c = 2.2$ ، محاسبه شده‌اند که در آن ثابت $C = 0.05$ فرض شده است. نتایج روش مورد نظر با نتایج گزارش شده در [۸۵] مقایسه شده است. از جدول مذکور مشاهده می‌شود نتایج عددی نسبت به جواب دقیق دارای دقت مناسب و قابل قبولی است. در شکل ۷.۵ جواب‌های دقیق و تقریبی و در شکل ۸.۵ خطاهای مطلق حاصل از روش $MQQI - PS$ با پارامتر شکل $c = 2.2$ ، $N = 20$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۴.۴.۵ روی دامنه مسأله برای لحظات $t = 1, t = 2, t = 3, t = 4$ نمایش داده شده‌اند.

در جدول ۵.۵ خطاهای L_2 ، L_∞ و خطای RMS برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.5$ آرایه شده است. نتایج با $N = 50$ داده پراکنده، $\delta t = 0.001$ و $c = 0.97$ به‌دست آمده‌اند. نتایج روش مورد نظر با نتایج گزارش شده در [۸۵] مقایسه شده است. از روی جدول می‌توان مشاهده نمود در این مثال هم، نتایج



شکل ۴.۵: خطاهای مطلق روش $MQQI - PS$ با $N = 20$, $c = 2.2$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های مختلف $t = 1, 2, 3, 4$ برای مثال ۴.۴.۵ با فرض $C = 0.05$

جدول ۵.۵: مقادیر خطاها برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.5$, $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1.5$ در زمان‌های مختلف t ، با روش $MQQI - PS$ ، پارامتر $\delta t = 0.001$ و $N = 50$, $c = 0.97$ شکل

t	L_{∞}	L_2	RMS	L_{∞} [۸۵]	L_2 [۸۵]	RMS [۸۵]
1	1.34058×10^{-6}	3.6230×10^{-7}	7.95305×10^{-7}	5.2134×10^{-6}	4.0608×10^{-5}	4.0392×10^{-6}
2	5.28169×10^{-6}	1.462×10^{-6}	1.92792×10^{-6}	2.1805×10^{-5}	1.5588×10^{-4}	1.5505×10^{-5}
3	2.54257×10^{-5}	5.6233×10^{-6}	4.46219×10^{-6}	9.0113×10^{-5}	6.3231×10^{-4}	6.5903×10^{-5}
4	1.32595×10^{-3}	2.53105×10^{-4}	9.82629×10^{-5}	8.2372×10^{-4}	5.3386×10^{-3}	5.3219×10^{-4}

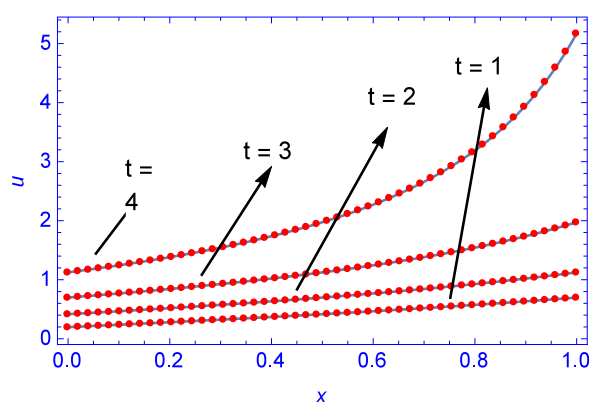
عددی تطابق خوبی با جواب دقیق دارد. در شکل ۹.۵ برای مثال ۴.۴.۵ جواب دقیق با جواب تقریبی و در شکل ۱۰.۵ خطاهای مطلق روش $MQQI - PS$ با $N = 50$, $c = 0.97$ و $\delta t = 0.001$ در چند زمان مختلف نمایش داده شده‌اند.

مثال ۵.۴.۵. در این مثال، حل عددی معادله دیفرانسیل غیرخطی کلین-گردن دو بعدی (۱۰.۵) روی دامنه $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$ با پارامترهای $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$ و $k = 2$ با روش $MQQI - PS$ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. جواب دقیق این مسأله به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = \sin(x) \sin(y) \cosh(t). \quad (۳۲.۵)$$

شرایط آغازین و شرایط مرزی دیریکله از روی جواب دقیق در نظر گرفته شده‌اند.

در جدول ۶.۵ خطاهای L_2 , L_{∞} و خطای RMS روش $MQQI - PS$ برای مثال ۵.۴.۵ ارایه شده است. نتایج با $N = 10 \times 10$ داده پراکنده با توزیع یکنواخت، $\delta t = 0.01$ و پارامتر شکل $c = 4.15$ به دست آمده‌اند. نتایج این روش با نتایج گزارش شده در [۸۶] مقایسه شده است. از روی جدول مذکور می‌توان مشاهده نمود در این مثال، نتایج عددی تطابق خوبی با جواب دقیق دارد. شکل ۱۱.۵ شکل



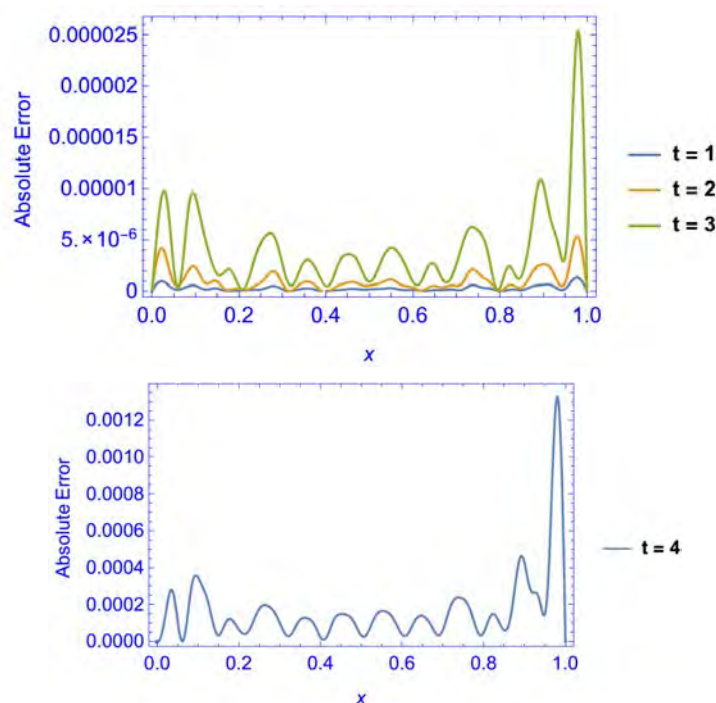
شکل ۹.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی در زمان‌های مختلف برای مثال ۴.۴.۵ با $C = 0.5$ که در روش، پارامتر شکل $c = 0.97$ و $N = 50$ و $\delta t = 0.001$ فرض شده است.

جدول ۶.۵: مقادیر خطاها برای مثال ۵.۴.۵ با $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = -1$ و $k = 2$ در زمان‌های مختلف t ، با روش $MQQI - PS$ ، پارامتر

شکل $c = 4.15$ و $N = 10 \times 10$ و $\delta t = 0.01$

MK-MLPG ($N = 33 \times 33$)			MQQI-PS ($N = 10 \times 10$)			
$RMS[\lambda\epsilon]$	$L_2[\lambda\epsilon]$	$L_\infty[\lambda\epsilon]$	RMS	L_2	L_∞	t
3.87×10^{-4}	1.28×10^{-2}	1.04×10^{-3}	8.40697×10^{-7}	1.4976×10^{-6}	2.32242×10^{-6}	1
5.64×10^{-3}	1.86×10^{-1}	1.23×10^{-2}	1.48771×10^{-6}	2.65018×10^{-6}	3.88411×10^{-6}	2
2.28×10^{-2}	7.52×10^{-1}	4.35×10^{-2}	1.83014×10^{-6}	3.26018×10^{-6}	4.19091×10^{-6}	3
6.27×10^{-2}	2.07×10^0	1.20×10^{-1}	2.61945×10^{-6}	4.66624×10^{-6}	6.10456×10^{-6}	4
1.75×10^{-1}	5.77×10^0	3.25×10^{-1}	3.88811×10^{-6}	6.92622×10^{-6}	9.83839×10^{-6}	5

جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۵.۴.۵ در لحظه $t = 5$ را نمایش می‌دهد. توزیع خطای مطلق روش $MQQI - PS$ روی دامنه $[0, \pi] \times [0, \pi]$ مربوط به مثال ۵.۴.۵ با $N = 10 \times 10$ داده پراکنده متساوی الفاصله و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$ با شکل ۱۲.۵ نمایش داده شده است. تغییرات خطای نرم بینهایت نسبت به تغییرات پارامتر شکل تابع پایه شعاعی چندربعی برای مثال ۵.۴.۵ در لحظه $t = 5$ با حل عددی به روش $MQQI - PS$ ، $N = 10 \times 10$ و $\delta t = 0.01$ در شکل ۱۳.۵ آرایه شده است. در جدول ۷.۵ نیز خطاهای L_2 ، L_∞ و خطای RMS برای مثال ۵.۴.۵ با دو روش $MQQI - PS$ با پارامتر شکل $c = 0.37$ و $MQ - PS$ با پارامتر شکل $c = 4.6$ مقایسه شده است. نتایج با $N = 25 \times 25$ داده پراکنده و $\delta t = 0.01$ به دست آمده‌اند. از روی جدول می‌توان مشاهده نمود که در این مثال نیز، نتایج عددی تطابق خوبی با جواب دقیق دارند. توزیع خطای مطلق روش‌های مورد نظر، روی دامنه $[0, \pi] \times [0, \pi]$ مربوط به مثال ۵.۴.۵ را می‌توان در شکل ۱۴.۵ مشاهده کرد.



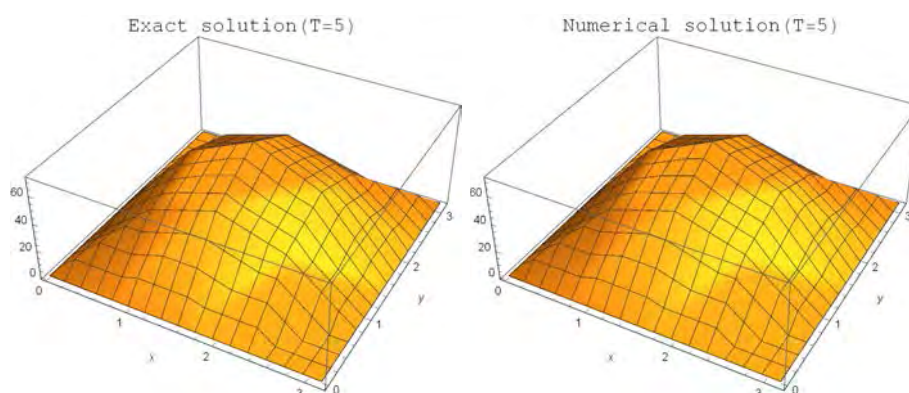
شکل ۱۰.۵: خطای روش $MQQI - PS$ با $N = 50$, $c = 0.97$ و $\delta t = 0.001$ در زمان‌های مختلف برای مثال ۴.۴.۵ با فرض $C = 0.5$.

۲.۴.۵ معادله‌ی غیرخطی ساین-گردن

در این بخش، حل عددی معادله دیفرانسیل هذلولوی (۱.۵) با جمله غیرخطی $\mathcal{N}(u) = \sin u$ که به نام معادله‌ی ساین-گردن معروف است با روش‌های بدون شبکه $MQQI - PS$ و $MQ - PS$ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. معادله‌ی غیرخطی ساین-گردن در مدل سازی بسیاری از مسایل کاربردی، بخصوص موج‌های سالیتون در حالت‌های مختلف فیزیکی ظاهر می‌شود [۷۴].

جدول ۷.۵: مقادیر خطاها برای مثال ۵.۴.۵ با $\alpha = -1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$ و $k = 2$ در زمان‌های مختلف t ، برای دو روش $MQQI - PS$ و

$MQQI-PS$ ($c=4.6$)			$MQ-PS$ ($c=0.37$)			t
RMS	L_2	L_∞	RMS	L_2	L_∞	
2.93791×10^{-6}	5.21147×10^{-6}	1.15822×10^{-5}	2.52576×10^{-6}	4.48038×10^{-6}	9.99276×10^{-6}	1
1.80278×10^{-5}	3.1979×10^{-5}	7.47466×10^{-5}	1.42615×10^{-5}	2.52980×10^{-5}	6.77584×10^{-5}	2
5.78057×10^{-5}	1.0254×10^{-4}	2.54482×10^{-4}	4.37942×10^{-5}	7.76853×10^{-5}	2.78783×10^{-4}	3
8.28710×10^{-5}	1.47003×10^{-4}	5.74854×10^{-4}	8.50817×10^{-5}	1.50924×10^{-4}	5.77975×10^{-4}	4
9.29055×10^{-5}	1.64803×10^{-4}	7.96027×10^{-4}	7.01665×10^{-5}	1.24466×10^{-4}	5.72217×10^{-4}	5



شکل ۱۱.۵: جواب‌های دقیق (چپ) و تقریبی (راست) مثال ۵.۴.۵ با $N = 10 \times 10$ داده پراکنده در دامنه، پارامتر شکل $c = 4.15$ و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$

جواب تقریبی معادله‌ی ساین-گردن به روش‌های مختلف از جمله تبدیل باکلوند^۴ [۸۸]، روش پین-لیو^۵ [۸۹]، گروه‌های لی^۶ [۹۰]، روش تانژانت هایپربولیک^۷ [۹۱] و روش پراکندگی معکوس^۸ [۹۲، ۹۳]. همچنین این معادله با روش‌های مختلف از قبیل تفاضلات متناهی، عناصر متناهی، تجزیه آدومیان و روش شبه طیفی حل شده است [۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲].

در این بخش، حل عددی معادله‌ی غیرخطی ساین-گردن با روش شبه طیفی-پایه شعاعی با استفاده از شبه‌درون‌یاب چندربعی که یک روش بدون شبکه است، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی ساین-گردن زیر را در نظر بگیرید:

$$u_{tt}(x, t) + \alpha \Delta u = -\sin(u). \quad (۳۳.۵)$$

با شرایط آغازین:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad (۳۴.۵)$$

$$u_t(x, 0) = v_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (۳۵.۵)$$

و شرایط مرزی دیریکله به شکل:

$$u(x, t) = g(t), \quad t \in (0, T], \quad x \in \partial\Omega. \quad (۳۶.۵)$$

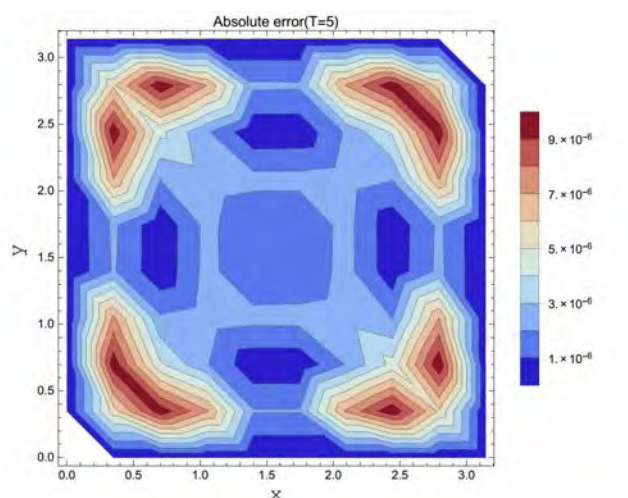
^۴Backlund transformation

^۵Painleve method

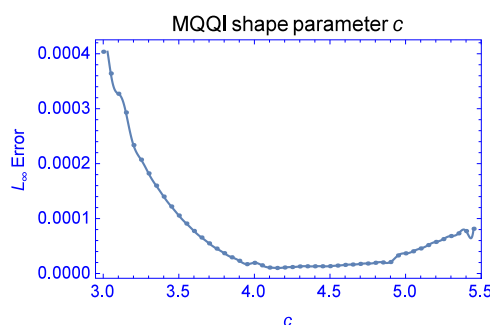
^۶Lie group method

^۷Tangent hyperbolic method

^۸Inverse scattering method



شکل ۱۲.۵: توزیع خطای مطلق روش $MQQI - PS$ در مثال ۵.۴.۵ با $N = 10 \times 10$ داده پراکنده، پارامتر شکل $c = 4.15$ و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$



شکل ۱۳.۵: شکل رفتار خطای L_∞ نسبت به تغییرات پارامتر شکل (□) در روش $MQQI - PS$ با $N = 10 \times 10$ و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$ برای مثال ۵.۴.۵

برای حل ابتدا با تغییر متغیر

$$u_t(x, t) = v(x, t) \quad (37.5)$$

مسأله (۳۶.۵)–(۳۳.۵) به یک دستگاه دوتایی از معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول نسبت به زمان (متغیر

t) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = v(x, t), \\ v_t(x, t) = -\alpha \Delta u - \sin(u). \end{cases} \quad (38.5)$$

با شرایط آغازین:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, \quad (39.5)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad x \in \Omega, \quad (40.5)$$

جدول ۸.۵: مقادیر خطاها برای مثال ۶.۴.۵ با $C = 0.5$, $N = 121$, $\delta t = 0.001$ و پارامتر شکل $c = 1.275$

t	L_∞	L_2	RMS	$L_\infty [10^2]$	$L_\infty [10^2]$
9	3.50847×10^{-4}	5.1875×10^{-4}	6.66931×10^{-5}	6.296×10^{-4}	4.518×10^{-1}
36	2.4275×10^{-4}	8.69372×10^{-4}	1.11771×10^{-4}	8.109×10^{-4}	2.293×10^0
108	3.60803×10^{-4}	1.5558×10^{-3}	2.00022×10^{-4}	2.568×10^{-3}	5.120×10^0

و شرایط مرزی:

$$u(x, t) = g(t), \quad t \in (0, T], \quad x \in \partial\Omega. \quad (41.5)$$

همان‌طور که در ابتدای فصل توضیح داده شد، حل عددی معادله‌ی غیرخطی ساین-گردن به روش شبه طیفی مبتنی بر شبه‌درون‌یاب چنددرجی مشابه با حل معادله‌ی کلین-گردن است. فقط کافی‌ست در دستگاه (۲۴.۵)-(۲۲.۵) بردار U^k با بردار $\sin(U)$ جایگزین شود. در ادامه حل عددی دو مثال از معادله‌ی ساین-گردن با روش شبه طیفی-پایه شعاعی ارایه شده در این فصل بررسی می‌شود.

مثال ۶.۴.۵. مسأله (۳۶.۵)-(۳۳.۵) روی بازه $x \in [-2, 58]$ با پارامتر $\alpha = -1$ را در نظر بگیرید. جواب دقیق آن به شکل زیر است:

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1}(\exp(\gamma(x - Ct) + \beta)), \quad (42.5)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-C^2}}$$

شرایط اولیه و مرزی دیریکله را می‌توان از روی جواب دقیق به‌دست آورد.

در جدول ۸.۵ مقادیر خطاهای L_∞ , L_2 و RMS برای مثال ۶.۴.۵ با $C = 0.5$ ارایه شده است. نتایج برای $N = 121$ داده پراکنده با توزیع یکنواخت در دامنه، $\delta t = 0.001$ و مقدار پارامتر شکل $c = 1.275$ به دست آمده‌اند و نتایج حاصل با نتایج روش تفاضلان متناهی ارایه شده در [۱۰۲] و روش متد آفلاین گزارش شده در [۱۰۳] مقایسه شده است. از نتایج حاصل، می‌توان مناسب بودن روش عددی مورد بحث برای این مثال را نتیجه گرفت. در شکل ۱۵.۵ جواب دقیق، جواب تقریبی و در شکل ۱۶.۵ خطای روش در زمان‌های مختلف با فرض $N = 121$ و $\delta t = 0.001$ را می‌توان مشاهده نمود.

مثال ۷.۴.۵. در این مثال، نتایج عددی روش شبه طیفی-پایه شعاعی چنددرجی، برای معادله‌ی ساین-گردن دو بعدی ارایه شده است. مسأله (۳۶.۵) - (۳۳.۵) با دامنه $(x, y) \in [-7, 7] \times [-7, 7]$ و

$\alpha = -1$ فرض شده است. جواب دقیق این معادله به‌صورت زیر است [۱۰۴]:

$$u(x, y, t) = 4 \tan^{-1}(\exp((x + y - t))). \quad (43.5)$$

جدول ۹.۵: خطای روش $PQ - PS$ برای مثال ۷.۴.۵ در زمان‌های مختلف با مقدار پارامتر شکل $c = 0.31$ ، $N = 25 \times 25$ و $\delta t = 0.001$.

t	L_∞	L_2	RMS
1	1.86749×10^{-3}	8.23484×10^{-4}	2.19909×10^{-4}
2	5.07197×10^{-3}	1.92593×10^{-3}	5.14315×10^{-4}
3	5.48379×10^{-3}	2.67973×10^{-3}	7.15615×10^{-4}
4	4.88027×10^{-3}	2.97766×10^{-3}	7.95177×10^{-4}
5	5.78486×10^{-3}	3.21738×10^{-3}	8.59192×10^{-4}

خطاهای L_∞ ، L_2 و RMS در روش $PQ - PS$ با مقدار پارامتر شکل $c = 0.31$ ، $N = 25 \times 25$ و $\delta t = 0.001$ برای مثال ۷.۴.۵ در جدول ۹.۵ ارایه شده است. از این جدول مشاهده می‌شود که جواب تقریبی، تطابق مناسب با جواب دقیق دارد.

شکل جواب تقریبی و تحلیلی برای لحظه $t = 5$ در شکل ۱۷.۵ نشان داده شده است. توزیع خطای مطلق روش $PQ - PS$ برای مثال ۷.۴.۵ را می‌توان در شکل ۱۸.۵ مشاهده کرد.

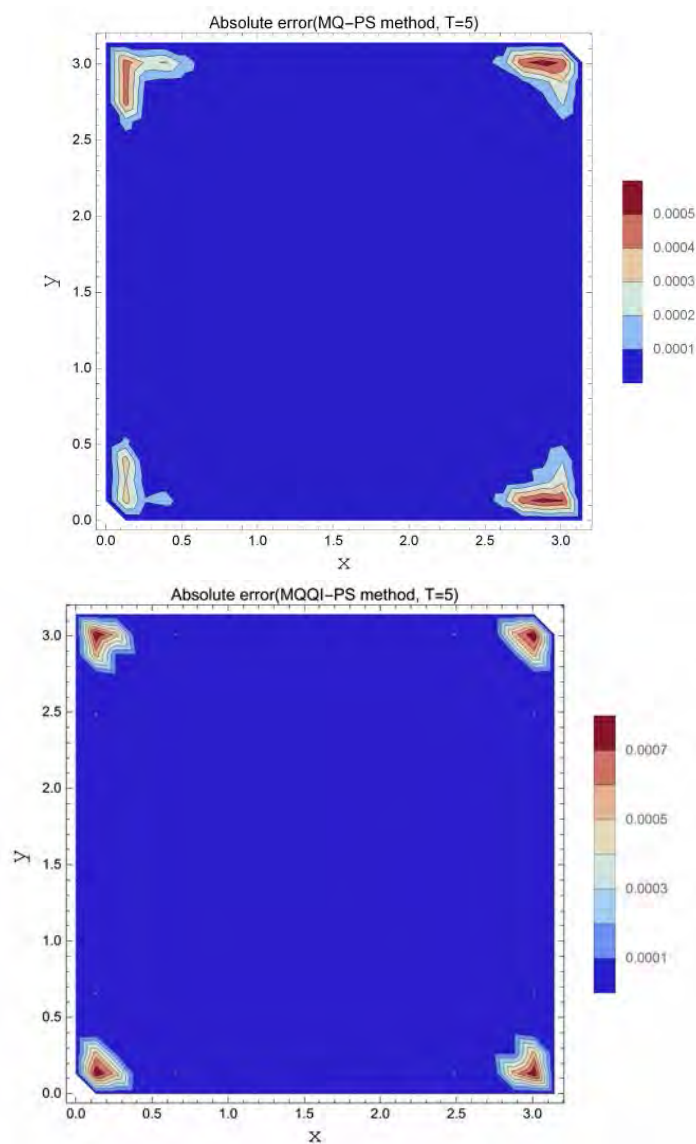
تغییرات خطای L_∞ نسبت به پارامتر شکل (c) در روش $PQ - PS$ با فرض $N = 25 \times 25$ ، $dt = 0.001$ برای مثال ۷.۴.۵ در لحظه $t = 5$ در نمودار ۱۹.۵ نمایش داده شده است.

۵.۵ نتیجه‌گیری

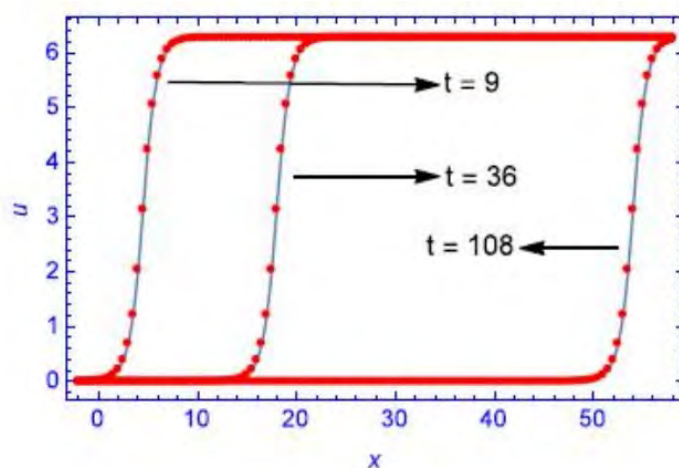
در این فصل، کاربردی از روش شبه طیفی-پایه شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل کلین-گردن غیرخطی مربعی، مکعبی و ساین-گردن ارایه شده است. این روش عددی یک روش بدون شبکه مبتنی بر تابع پایه شعاعی چنددرجی است. برای گسسته‌سازی عملگرهای دیفرانسیلی موجود در معادله، از روش شبه طیفی مبتنی بر شبه‌درون‌یاب چنددرجی در ساختن ماتریس عملیاتی استفاده شده است. یکی از مزیت‌های این روش این است که ماتریس عملیاتی حاصل، مستقل از زمان هست. از این رو در تمام گام‌های زمانی، ثابت است و نیاز به محاسبه‌ی مجدد آن در هر گام نیست. در انتها، از روش رانگ-کوتای مرتبه‌ی چهارم استاندارد برای گسسته‌سازی زمانی که یک روش پایدار است استفاده شده است. در این فصل نیز برای اعمال شرایط مرزی مسأله، الگوریتم ارایه شده در [۳۵، ۷۲] برای مسایل دو بعدی نیز توسعه داده شده است. برای این منظور در هر گام زمانی، بردار $U^{(m)}$ به‌دست آمده از رابطه (۲۵.۵) بر اساس روش بیان شده به صورت (۲۷.۵) اصلاح شده است. در این روش، برخلاف روش‌های کلاسیک، شرایط و معادلات جدیدی به دستگاه معادلات موجود، اضافه نخواهد شد.

در نهایت کارایی و دقت روش، نیز با ارایه چند مثال متنوع یک بعدی و دو بعدی، بررسی شده است.

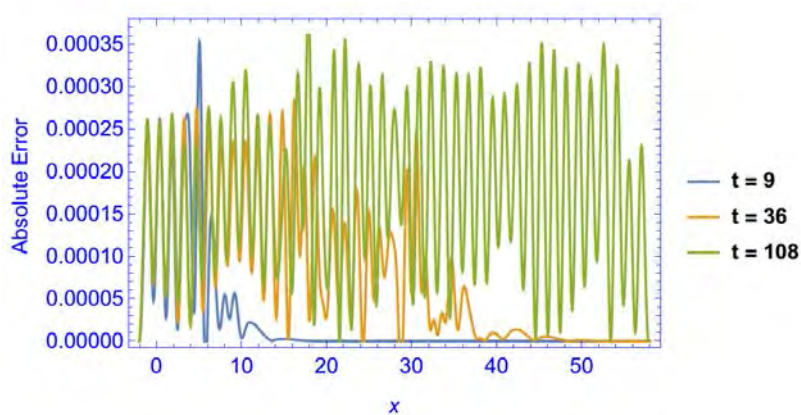
بنابراین می‌توان گفت روش شبه طیفی مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی وابسته به زمان روشی کارا می‌باشد. در ضمن تغییر جمله غیرخطی معادله (۱.۵) در روش حل تاثیر چندانی ندارد و روش مذکور برای جملات غیرخطی متنوع قابل استفاده است. بر اساس مثال‌های متنوع ارایه شده پایداری جواب در طول زمان نیز مشاهده می‌شود.



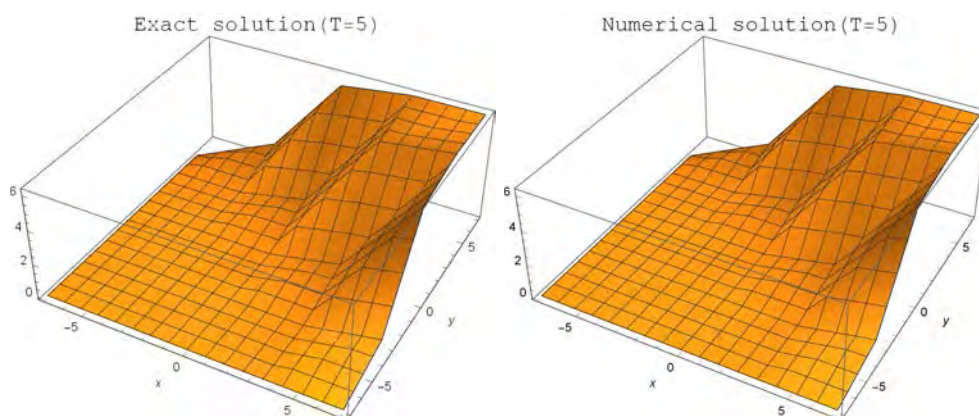
شکل ۱۴.۵: توزیع خطای مطلق روش MQ-PS با مقدار پارامتر شکل $c = 0.37$ (بالا) و توزیع خطای روش MQQI-PS با پارامتر شکل $c = 4.6$ (پایین) در مثال ۵.۴.۵ با $N = 25 \times 25$ و $\delta t = 0.01$ در لحظه $t = 5$.



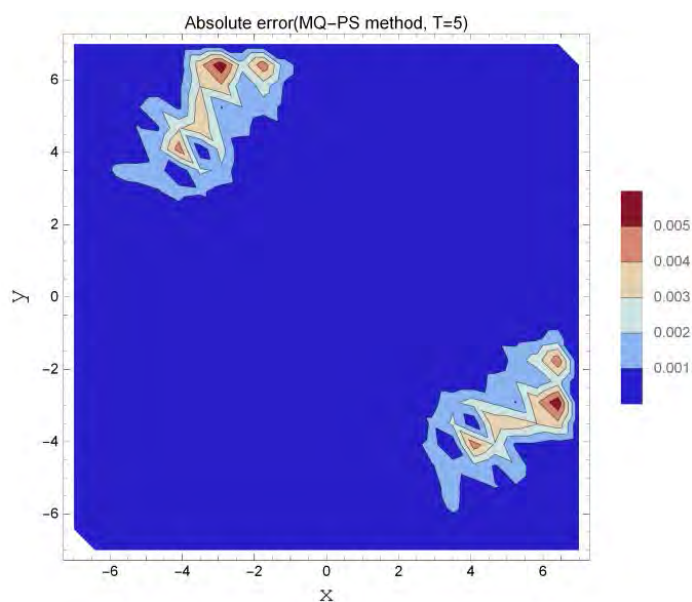
شکل ۱۵.۵: جواب دقیق و تقریبی مثال ۶.۴.۵ با $C = 0.5$ ، $N = 121$ ، پارامتر شکل $c = 1.275$ و $\delta t = 0.001$.



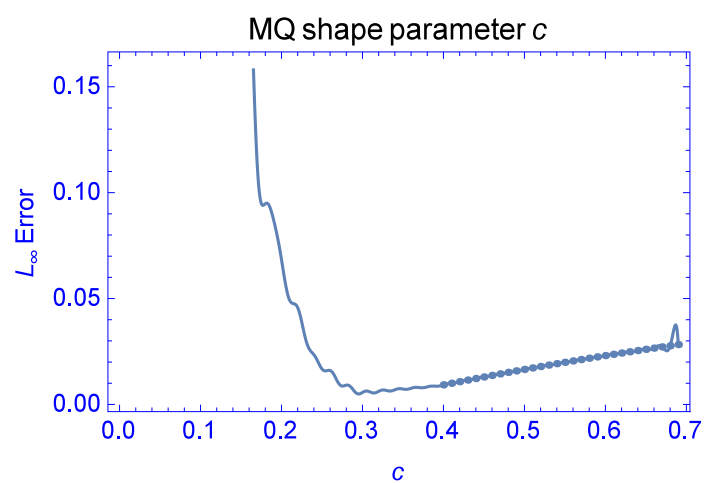
شکل ۱۶.۵: خطای مطلق روش مورد نظر در لحظات مختلف $t = 9, t = 36, t = 108$ برای مثال ۶.۴.۵ با $C = 0.5$ ، $N = 121$ ، پارامتر شکل $c = 1.275$ و $\delta t = 0.001$.



شکل ۱۷.۵: شکل جواب‌های عددی (راست) و دقیق (چپ) مثال ۷.۴.۵ با $N = 25 \times 25$, $\delta t = 0.001$ و پارامتر شکل تابع چنددرجی $c = 0.31$ در لحظه $t = 5$.



شکل ۱۸.۵: شکل توزیع خطای مطلق روش $MQ - PS$ در مثال ۷.۴.۵ با $N = 25 \times 25$, $c = 0.31$ و $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 5$.



شکل ۱۹.۵: شکل خطای L_{∞} نسبت به پارامتر شکل c با $N = 25 \times 25$ و $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 5$ برای مثال ۷.۴.۵.

مراجع

- [1] L. B. Lucy, A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, The astronomical journal 82 (1977), 1013-1024.
- [2] B. Nayroles, G. Touzot and P. Villon, Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements, Computational mechanics 10 (1992), no. 5, 307-318.
- [3] S. N. Atluri, The meshless method (mlpg) for domain & bie discretizations, vol. 677, Tech Science Press Forsyth, 2004.
- [4] W. K. Liu, S. Jun and Y. F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, International journal for numerical methods in fluids 20 (1995), no. 8-9, 1081-1106.
- [5] E. J. Kansa, Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—i surface approximations and partial derivative estimates, Computers & Mathematics with applications 19 (1990), no. 8-9, 127-145.
- [6] E. J. Kansa, Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—ii solutions to parabolic,



- hyperbolic and elliptic partial differential equations, *Computers & mathematics with applications* 19 (1990), no. 8-9, 147-161.
- [7] V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas and M. Duflot, Meshless methods: A review and computer implementation aspects, *Mathematics and computers in simulation* 79 (2008), no. 3, 763-813.
- [8] G. Fasshauer, Rbf collocation methods as pseudospectral methods, *WIT transactions on modelling and simulation* 39 (2005).
- [9] D. Rostamy, M. Emamjome and S. Abbasbandy, A meshless technique based on the pseudospectral radial basis functions method for solving the two-dimensional hyperbolic telegraph equation, *The European Physical Journal Plus* 132 (2017), no. 6, 263.
- [10] M. Emamjome, S. Abbasbandy, D. Rostamy, Quasi interpolation of radial basis functions-pseudospectral method for solving nonlinear Klein-Gordon and sine-Gordon equations, *Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization*, accepted 2019 (submitted 2018).
- [11] R. L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, *Journal of geophysical research* 76 (1971), no. 8, 1905-1915.
- [12] R. L. Hardy, Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988, *Computers & Mathematics with Applications* 19 (1990), no. 8-9, 163-208.



- [13] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, A meshless method based on the radial basis function for solving time dependent problems, phd thesis, Imam Khomeini international university (2013).
- [14] H. Wendland, Scattered data approximation, vol. 17, Cambridge university press, 2004.
- [15] I. J. Schoenberg, Metric spaces and completely monotone functions, *Annals of Mathematics* (1938), 811-841.
- [16] C. A. Micchelli, Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions, *Approximation theory and spline functions*, Springer, (1984), 143-145.
- [17] G. E. Fasshauer, *Meshfree approximation methods with matlab*, vol. 6, World Scientific, 2007.
- [18] G. E. Fasshauer, Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions, *Proceedings of Chamonix*, Vanderbilt University Press Nashville, TN, 1996, 1-8.
- [19] A. La Rocca, A. H. Rosales and H. Power, Radial basis function hermite collocation approach for the solution of time dependent convection-diffusion problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 29 (2005), no. 4, 359-370.
- [20] R. Franke, Scattered data interpolation: Tests of some methods, *Mathematics of computation* 38 (1982), no. 157, 181-200.



- [21] R. Schaback, Creating surfaces from scattered data using radial basis functions, *Mathematical methods for curves and surfaces* 477 (1995).
- [22] J. P. Boyd and K. W. Gildersleeve, Numerical experiments on the condition number of the interpolation matrices for radial basis functions, *Applied Numerical Mathematics* 61 (2011), no. 4, 443-459.
- [23] Z. Wu and R. Schaback, Shape preserving properties and convergence of univariate multiquadric quasi-interpolation, *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 10 (1994), no. 4, 441-446.
- [24] M. J. D. Powell, Univariate multiquadric approximation: reproduction of linear polynomials, *Multivariate approximation and interpolation*, Springer, (1990), 227-240.
- [25] R. Beatson and M. Powell, Univariate multiquadric approximation: Quasi-interpolation to scattered data, *Constructive Approximation* 8 (1992), no. 3, 275-288.
- [26] R. K. Beatson and N. Dyn, Multiquadric b-splines, *journal of approximation theory* 87 (1996), no. 1, 1-24.
- [27] W. Zhang and Z. Wu, Some shape-preserving quasi-interpolants to non-uniformly distributed data by mq-b-splines, *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities* 19 (2004), no. 2, 191-202.
- [28] L. Ling, Multivariate quasi-interpolation schemes for dimension-splitting multiquadric, *Applied Mathematics and Computation* 161 (2005), no. 1, 195-209.



- [29] A. I. Fedoseyev, M. J. Friedman and E. J. Kansa, Continuation for non-linear elliptic partial differential equations discretized by the multiquadric method, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 10 (2000), no. 02, 481-492.
- [30] G. Moridis, The laplace transform multiquadrics method: A highly accurate scheme for the numerical solution of linear partial differential equations, *Journal of Applied Science and Computation* 1 (1994), no. 2, 375-407.
- [31] Y. Hon and R. Schaback, On unsymmetric collocation by radial basis functions, *Applied Mathematics and Computation* 119 (2001), no. 2-3, 177-186.
- [32] W. Zongmin, Hermite-birkhoff interpolation of scattered data by radial basis functions, *Approximation Theory and its Applications* 8 (1992), no. 2, 1-10.
- [33] C. Franke and R. Schaback, Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis functions, *Advances in computational mathematics* 8 (1998), no. 4, 381-399.
- [34] B. Jumarhon, S. Amini and K. Chen, The hermite collocation method using radial basis functions, *Engineering analysis with boundary elements* 24 (2000), no. 7-8, 607-611.
- [35] Fasshauer, Rbf collocation methods as pseudospectral methods, *WIT transactions on modelling and simulation* 39 (2005).



- [36] A. Ferreira and G. Fasshauer, An rbf-pseudospectral approach for the static and vibration analysis of composite plates using a higher-order theory, *International journal for computational methods in engineering science and mechanics* 8 (2007), no. 5, 323-339.
- [37] M. Mongillo, Choosing basis functions and shape parameters for radial basis function methods, *SIAM undergraduate research online* 4 (2011), no. 190-209, 2.6.
- [38] S. Rippa, An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation, *Advances in Computational Mathematics* 11 (1999), no. 2-3, 193-210.
- [39] G. Wahba, *Spline models for observational data*, vol. 59, Siam, 1990.
- [40] M. L. Stein, *Interpolation of spatial data: Some theory for kriging*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [41] G. E. Fasshauer and J. G. Zhang, On choosing “optimal” shape parameters for rbf approximation, *Numerical Algorithms* 45 (2007), no. 1-4, 345-368.
- [42] R. Jiware, S. Pandit and R. Mittal, A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with dirichlet and neumann boundary conditions, *Applied Mathematics and Computation* 218 (2012), no. 13, 7279-7294.
- [43] R. Mittal and R. Bhatia, A numerical study of two dimensional hyperbolic telegraph equation by modified b-spline differential quadrature method, *Applied Mathematics and Computation* 244 (2014), 976-997.



- [44] M. Dehghan and A. Ghesmati, Combination of meshless local weak and strong (mlws) forms to solve the two dimensional hyperbolic telegraph equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34 (2010), no. 4, 324-336.
- [45] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, I. Hashim and A. Alsaedi, A comparison study of meshfree techniques for solving the two-dimensional linear hyperbolic telegraph equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 47 (2014), 10-20.
- [46] M. Dehghan and A. Shokri, A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal* 24 (2008), no. 4, 1080-1093.
- [47] A. Saadatmandi and M. Dehghan, Numerical solution of hyperbolic telegraph equation using the chebyshev tau method, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal* 26 (2010), no. 1, 239-252.
- [48] M. Dehghan and A. Ghesmati, Solution of the second-order one-dimensional hyperbolic telegraph equation by using the dual reciprocity boundary integral equation (drbie) method, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 34 (2010), no. 1, 51-59.
- [49] V. R. Hosseini, E. Shivanian and W. Chen, Local integration of 2-d fractional telegraph equation via local radial point interpolant approximation, *The European Physical Journal Plus* 130 (2015), no. 2, 33.



- [50] J. Lin, W. Chen and C. Chen, A new scheme for the solution of reaction diffusion and wave propagation problems, *Applied Mathematical Modelling* 38 (2014), no. 23, 5651-5664.
- [51] R. Mohanty, M. Jain and U. Arora, An unconditionally stable adi method for the linear hyperbolic equation in three space dimensions, *International Journal of Computer Mathematics* 79 (2002), no. 1, 133-142.
- [52] R. Mohanty and M. Jain, An unconditionally stable alternating direction implicit scheme for the two space dimensional linear hyperbolic equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal* 17 (2001), no. 6, 684-688.
- [53] D. Young, M. Gu and C. Fan, The time-marching method of fundamental solutions for wave equations, *Engineering analysis with boundary elements* 33 (2009), no. 12, 1411-1425.
- [54] M. G. Reuter, J. C. Hill and R. J. Harrison, Solving pdes in irregular geometries with multiresolution methods i: Embedded dirichlet boundary conditions, *Computer Physics Communications* 183 (2012), no. 1, 1-7.
- [55] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh and I. Hashim, Numerical analysis of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis using a meshfree method based on the radial basis function, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 36 (2012), no. 12, 1811-1818.



- [56] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh and I. Hashim, A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear schrödinger equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 37 (2013), no. 6, 885-898.
- [57] K. Parand, S. Abbasbandy, S. Kazem and A. Rezaei, Comparison between two common collocation approaches based on radial basis functions for the case of heat transfer equations arising in porous medium, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 16 (2011), no. 3, 1396-1407.
- [58] E. J. Kansa, R. C. Aldredge and L. Ling, Numerical simulation of two-dimensional combustion using mesh-free methods, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 33 (2009), no. 7, 940-950.
- [59] Y. Dereli, Solitary wave solutions of the mrlw equation using radial basis functions, *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 28 (2012), no. 1, 235-247.
- [60] E. Shivanian, A new spectral meshless radial point interpolation (smrpi) method: A well-behaved alternative to the meshless weak forms, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 54 (2015), 1-12.
- [61] E. Shivanian, Analysis of meshless local and spectral meshless radial point interpolation (mlrpi and smrpi) on 3-d nonlinear wave equations, *Ocean Engineering* 89 (2014), 173-188.
- [62] H. R. Ghehsareh, S. H. Bateni and A. Zaghian, A meshfree method based on the radial basis functions for solution of two-dimensional fractional evo-



- lution equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 61 (2015), 52-60.
- [63] B. Azarnavid and K. Parand, Imposing various boundary conditions on radial basis functions, arxiv preprint arxiv:1611.07292 (2016).
- [64] E. Larsson, E. Lehto, A. Heryudono and B. Fornberg, Stable computation of differentiation matrices and scattered node stencils based on gaussian radial basis functions, *SIAM Journal on Scientific Computing* 35 (2013), no. 4, A2096-A2119.
- [65] E. Larsson and B. Fornberg, A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic pdes, *Computers & Mathematics with Applications* 46 (2003), no. 5-6, 891-902.
- [66] W. Chen, Z.-J. Fu and C.-S. Chen, Recent advances in radial basis function collocation methods, Springer, 2014.
- [67] S. A. Sarra, Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations, *Applied Numerical Mathematics* 54 (2005), no. 1, 79-94.
- [68] M. Uddin, Rbf-ps scheme for solving the equal width equation, *Applied Mathematics and Computation* 222 (2013), 619-631.
- [69] A. Ferreira and G. Fasshauer, Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an rbf-pseudospectral method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2006), no. 1-3, 134-146.



- [70] M. Uddin and S. Ali, Rbf-ps method and fourier pseudospectral method for solving stiff nonlinear partial differential equations, *Math. Sci. Lett* 2 (2012), no. 1, 55-61.
- [71] M. Uddin and R. Jan, Rbf-ps scheme for the numerical solution of the complex modified korteweg–de vries equation, *Appl Math Inf Sci Lett* 1 (2013), no. 1, 9-17.
- [72] L. N. Trefethen, *Spectral methods in matlab*, vol. 10, Siam, 2000.
- [73] L. Debnath, "Nonlinear klein-gordon and sine-gordon equations," *Nonlinear partial differential equations for scientists and engineers*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1997, pp. 453-499.
- [74] P. G. Drazin and R. S. Johnson, *Solitons: An introduction*, vol. 2, Cambridge university press, 1989.
- [75] M. J. Ablowitz, M. Ablowitz, P. Clarkson and P. A. Clarkson, *Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering*, vol. 149, Cambridge university press, 1991.
- [76] S. Abbasbandy, Numerical solution of non-linear klein–gordon equations by variational iteration method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70 (2007), no. 7, 876-881.
- [77] A. R. Kanth and K. Aruna, Differential transform method for solving the linear and nonlinear klein–gordon equation, *Computer Physics Communications* 180 (2009), no. 5, 708-711.



- [78] A. M. Wazwaz, Partial Differential Equations: Methods and Applications, Balkema Publishers, The Netherlands, 2002.
- [79] K. C. Basak, P. C. Ray and R. K. Bera, Solution of non-linear klein–gordon equation with a quadratic non-linear term by adomian decomposition method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 14 (2009), no. 3, 718-723.
- [80] Q. Sun, Solving the klein–gordon equation by means of the homotopy analysis method, Applied mathematics and computation 169 (2005), no. 1, 355-365.
- [81] A. H. Encinasa, J. Martín-Vaqueroa, A. Queiruga-Diosa and V. Gayoso-Martínezb, Efficient high-order finite difference methods for nonlinear klein–gordon equations. I: Variants of the phi-four model and the form-i of the nonlinear klein–gordon equation, Nonlinear Analysis 20 (2015), no. 2, 274-290.
- [82] Q. Wang and D. Cheng, Numerical solution of damped nonlinear klein–gordon equations using variational method and finite element approach, Applied mathematics and computation 162 (2005), no. 1, 381-401.
- [83] F. Yin, T. Tian, J. Song and M. Zhu, Spectral methods using legendre wavelets for nonlinear klein sine-gordon equations, Journal of computational and applied mathematics 275 (2015), 321-334.



- [84] M. Dehghan and A. Shokri, Numerical solution of the nonlinear klein-gordon equation using radial basis functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 230 (2009), no. 2, 400-410.
- [85] M. Sarboland and A. Aminataei, Numerical solution of the nonlinear klein-gordon equation using multiquadric quasi-interpolation scheme, *Universal Journal of Applied Mathematics* 3 (2015), no. 3, 40-49.
- [86] A. Shokri and A. Habibirad, A moving kriging-based mlpg method for nonlinear klein-gordon equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 39 (2016), no. 18, 5381-5394.
- [87] A.-M. Wazwaz, The modified decomposition method for analytic treatment of differential equations, *Applied Mathematics and Computation* 173 (2006), no. 1, 165-176.
- [88] H. D. Wahlquist and F. B. Estabrook, Bäcklund transformation for solutions of the korteweg-de vries equation, *Physical review letters* 31 (1973), no. 23, 1386.
- [89] M. J. Ablowitz, B. Herbst and C. M. Schober, Numerical simulation of quasi-periodic solutions of the sine-gordon equation, *Physica D: Nonlinear Phenomena* 87 (1995), no. 1-4, 37-47.
- [90] P. J. Olver, *Applications of lie groups to differential equations*, vol. 107, Springer Science & Business Media, 2000.
- [91] W. Malfliet, Solitary wave solutions of nonlinear wave equations, *American Journal of Physics* 60 (1992), no. 7, 650-654.



- [92] M. Ablowitz and P. Clarkson, Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, vol. 149, Cambridge university press, 1991.
- [93] C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Method for solving the korteweg-devries equation, Physical review letters 19 (1967), no. 19, 1095.
- [94] J. Eilbeck, Numerical studies of solitons, in solitons and condensed matter physics (ar bishop and t. Schneider, eds.), Springer-Verlag Series in Solid-State Science, 1978.
- [95] W. Strauss and L. Vazquez, Numerical solution of a nonlinear klein-gordon equation, Journal of Computational Physics 28 (1978), no. 2, 271-278.
- [96] G. Ben-Yu, P. J. Pascual, M. J. Rodriguez and L. Vázquez, Numerical solution of the sine-gordon equation, Applied Mathematics and Computation 18 (1986), no. 1, 1-14.
- [97] A. Khaliq, B. Abukhodair, Q. Sheng and M. Ismail, A predictor-corrector scheme for the sine-gordon equation, Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal 16 (2000), no. 2, 133-146.
- [98] J. I. Ramos, The sine-gordon equation in the finite line, Applied mathematics and computation 124 (2001), no. 1, 45-93.
- [99] A. Bratsos, The solution of the two-dimensional sine-gordon equation using the method of lines, Journal of Computational and Applied Mathematics 206 (2007), no. 1, 251-277.



- [100] M. Dehghan and A. Ghesmati, Numerical simulation of two-dimensional sine-gordon solitons via a local weak meshless technique based on the radial point interpolation method (rpim), *Computer Physics Communications* 181 (2010), no. 4, 772-786.
- [101] M. Dehghan and A. Shokri, A numerical method for solution of the two-dimensional sine-gordon equation using the radial basis functions, *Mathematics and Computers in Simulation* 79 (2008), no. 3, 700-715.
- [102] A. G. Bratsos, A fourth order numerical scheme for the one-dimensional sine-gordon equation, *International Journal of Computer Mathematics* 85 (2008), no. 7, 1083-1095.
- [103] M. Uddin, A. Hussain, H. Sirajul and A. Amjad, Rbf meshless method of lines for the numerical solution of nonlinear sine-gordon equation, *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)* 11 (2014), no. 4, 349-360.
- [104] G. Grella and M. Marinaro, Special solutions of the sine-gordon equation in $2+1$ dimensions, *Lettere al Nuovo Cimento* 23 (1978), no. 12, 459-464.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Thin plate spline	اسپلاین صفحه نازک
Shape parameter	پارامتر شکل
Stability	پایداری
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Trial approximation	تقریب جواب
Radial basis function	تابع پایه شعاعی
Nodes generation	تولید نقاط
Multiquadrics	چندربعی‌ها
Generalized multiquadrics	چندربعی‌های تعمیم یافته
Inverse Multiquadric	چندربعی معکوس
Interpolant	درون‌یابی
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Augmented radial basis functions method	روش پایه شعاعی افزوده
Radial point interpolation method	روش درون‌یابی نقطه شعاعی
Collocation method	روش هم محلی
Condition number	عدد حالت
Operator	عملگر
Gaussians	گاوسی‌ها
Discretization	گسسته‌سازی
Node	گره
Positive definite	معین مثبت

Strictly positive definite	معین مثبت اکید
Conditionally positive definite	معین مثبت مشروط
Governing equations	معادلات حاکم
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Field nodes	نقاط میدانی
Monotone	یکنوا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Augmented radial basis funtions	روش پایه شعاعی افزوده
Collocation method	روش هم محلی
Condition number	عدد حالت
Conditionally positive definite	معین مثبت مشروط
Discretization	گسسته‌سازی
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Field nodes	نقاط میدانی
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Gaussians	گاوسی‌ها
Generalized multiquadrics	چندربعی‌های تعمیم یافته
Governing equations	معادلات حاکم
Interpolant	درون‌یابی
Inverse Multiquadric	چندربعی معکوس
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Monotone	یکنوا
Multiquadrics	چندربعی‌ها
Node	گره
Nodes generation	تولید نقاط
Operator	عملگر
Positive definite	معین مثبت
Radial basis function	تابع پایه شعاعی



Radial point interpolation method.....	روش درونیابی نقطه شعاعی.....
Shape parameter	پارامتر شکل
Stability	پایداری
Strictly positive definite	معین مثبت اکید
Thin plate spline.....	اسپلاین صفحه نازک.....
Trial approximation	تقریب جواب

Abstract

In this thesis, the pseudospectral radial basis functions (RBF-PS) method has been proposed for numerical solving of the two-dimensional Telegraph equations on regular and irregular domains, nonlinear Kélin-Gordon and sine-Gordon equations. The proposed numerical method, which is truly meshless, is characterized by three steps: temporal, spatial discretization and force the numerical solutions to satisfy the boundary conditions exactly. Runge-Kutta method is used for temporal discretization. In order to approximate the spatial derivatives of the problem, we use the operational matrices obtained by radial basis function-pseudospectral (RBF-PS) method and Multiquadric quasi-interpolation-pseudospectral (MQQI-PS) method. A cross-validation technique is used to optimize the shape parameter for the basis functions. In addition, the technique is introduced in to force the numerical solutions to satisfy the boundary conditions exactly, extended to the regular and irregular domains. Finally, the introduced scheme is tested for some problems.

Keywords: Meshless method, Radial basis functions, Shape parameter, Radial basis function-Pseudospectral (RBF-PS) method, Multiquadrics quasi-interpolation (MQ-QI), Irregular domain, Telegraph equation, Nonlinear Klein-Gordon equation, sine-Gordon equation

Ministry of Science, Research and Technology

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

Imam Khomeini International University

Faculty of Sciences

Department of Applied Mathematics

Pseudospectral methods based on the radial basis functions for approximate solution of differential equations

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the
Requirements for the Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

by

Mahdi Emamjomeh

Supervisors

Prof. Saeid Abbasbandy

Prof. Davood Rostamy

Advisor

Dr. Elias Shivanian

september 2018