

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

کاربرد یک روش عددی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی براساس فضای بازتولید هسته

استاد راهنما

دکتر سعید عباس بندی

استادان مشاور

دکتر داود رستمی و دکتر روبرت ون گورد

پژوهشگر

پرسنل محترم

بهمن ۹۶

نام خانوادگی دانشجو: بختیاری

نام: پریسا

عنوان: کاربرد یک روش عددی جدید برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی براساس فضای بازتولید هسته

استاد راهنما: دکتر سعید عباس بندی

استادان مشاور: دکتر داود رستمی و دکتر روبرت ون گورد

مقطع تحصیلی: دکتری

رشته: ریاضی کاربردی

گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره) قزوین

دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: بهمن ۹۶

تعداد صفحات: ۹۶

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، مساله مقدار مرزی، مساله مقدار اولیه، فضای بازتولید هسته، متعامد سازی گرام اشمیت، قضیه نمایش ریس، آنالیز همگرایی.

چکیده

بسیاری از پدیده‌ها، در علوم و مهندسی به صورت معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی یا اولیه مدلسازی می‌شوند؛ عموماً حل تحلیلی این معادلات امکان‌پذیر نمی‌باشد. از این جهت استفاده از روش‌های عددی کارا برای حل این معادلات از اهمیت بسزایی در علوم کاربردی برخوردار است. هدف ما در این رساله بررسی روش عددی مبتنی بر فضای هسته بازتولید برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است و خاصیت بازتولیدی هسته با توجه به فضای شامل آن نقش اصلی را داراست و در نتیجه جواب تقریبی مساله به فرم سری ارائه می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود که به جواب تحلیلی همگرا است. عمده‌ترین مشکل روش کلاسیک هسته‌های بازتولید کاربرد در بعدها‌های بالا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. بنابراین قصد داریم یک کاربرد جدید از روش هسته باتولیدی را ارائه دهیم، که از اجرای فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت که در روش کلاسیک مورد استفاده قرار می‌گیرد پرهیز کنیم و در نهایت این امر موجب کاهش زمان محاسبات خواهد شد.

تقدیم بہ

پدر عزیزم

گرچہ نیست ولی ہمیشہ با من است

سپاسگزاری

شکر و سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بماند و شازندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزارش ندهند و بزرگترین امید و یار در محطه محطه زندگیت.

با سپاس از همسر من که نشانه لطف الهی در زندگی من است و عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودش در این سردترین روزگار من بهترین پشتیبان است، او که اسوه صبر و تحمل بوده و مشکلات مسیر را برایم تسهیل نمود. با شکر فراوان از وجود مقدس مادر عزیزم، که ناتوان شد تا من به توانایی برسم و موهای سپید شد تا من رو سفید شوم و همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و گریانه از کنار غفلت هایم گذشته و در تمام عرصه های زندگی یار و یاری بی چشم داشت برای من بوده است.

از استاد کرامتدورم، جناب آقای پروفور سعید عباس بندی، که در کمال سه صدر، از بیج لکی در این عرصه بر من دریغ نمودند نهایت شکر را دارم. همچنین با تقدیر و شکر از استادان مشاور فریخته ام جناب آقای پروفور داوود رستی و دکتر روبرت ون کور که ظلمت اندیشه ام را نور بخشیدند. به علاوه بر خود لازم می دانم که از جناب آقای دکتر محمد جباری، دکتر الیاس شیوانیان و دکتر شهنام جوادی که داوری این پایان نامه را با دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، شکر نمایم.

به یاد خواهم داشت برادر من که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است. خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور، نشاط و همراه، همو با علم، دانش و پژوهش عنایت بفرما.

فهرست مطالب

ح	لیست تصاویر
د	لیست جداول
۵	۱ هسته‌های بازتولیدی
۵	۱.۱ تعاریف و قضایای اولیه
۹	۲.۱ فضای هسته بازتولید
۱۱	۱.۲.۱ برخی از ویژگی‌های اساسی هسته بازتولید
۱۲	۳.۱ فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $\omega_2^m[a, b]$
۱۶	۱.۳.۱ فضای هسته بازتولید در دامنه بیکران
۱۷	۴.۱ فضای هسته بازتولید $\omega_2^{(m,n)}(\Phi)$
۱۹	۲ روش هسته بازتولیدی برای ساخت جواب شعاعی معادله یامابه
۱۹	۱.۲ مقدمه
۲۰	۲.۲ روش هسته بازتولیدی برای معادله یامابه
۲۲	۳.۲ آنالیز همگرایی روش
۲۵	۴.۲ نتایج عددی و مثال‌ها
۲۵	۵.۲ نتیجه‌گیری
۳۰	۳ روش هسته بازتولیدی برای حل عددی معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر
۳۰	۱.۳ مقدمه
۳۱	۲.۳ روش هسته بازتولیدی
۳۳	۳.۳ راه حل عددی برای یافتن جواب معادله برینکمن-فورچ‌هیمر
۳۴	۱.۳.۳ روش حل معادله (۵.۳) بدون متعامد سازی
۳۵	۲.۳.۳ روش حل معادله (۵.۳) با متعامد سازی
۳۶	۴.۳ مثال‌های عددی و رفتار جواب با پارامترهای فیزیکی
۳۷	۵.۳ نتیجه‌گیری

۴۲	۴	روش هسته بازتولیدی برای حل عددی معادله ساین-گوردن با شرایط اولیه
۴۲	۱.۴	مقدمه
۴۳	۲.۴	روش هسته بازتولیدی
۴۵	۳.۴	حل معادله ساین-گوردن
۴۵	۱.۳.۴	روش حل معادله (۲.۴) بدون فرآیند گرام اشمیت
۴۶	۲.۳.۴	روش حل معادله (۲.۴) با استفاده از فرآیند گرام اشمیت
۴۷	۴.۴	نتایج عددی
۴۷	۵.۴	نتیجه گیری
۴۹	۵	حل مسئله مقدار اولیه دیم با استفاده از روش هسته بازتولیدی
۴۹	۱.۵	مقدمه
۵۰	۲.۵	روش هسته بازتولیدی
۵۲	۳.۵	حل عددی معادله دیم
۵۲	۱.۳.۵	حل عددی معادله (۸.۵) بدون متعامد سازی
۵۳	۲.۳.۵	حل عددی معادله (۸.۵) با متعامد سازی
۵۴	۴.۵	آنالیز همگرایی روش
۵۷	۵.۵	نتایج عددی
۵۸	۶.۵	نتیجه گیری
۶۳	۶	حل عددی معادله بنجامین-بنا-ماهونی با استفاده از روش هسته بازتولیدی
۶۳	۱.۶	مقدمه
۶۴	۲.۶	روش هسته بازتولیدی
۶۶	۳.۶	حل معادله بنجامین-بنا-ماهونی
۶۶	۱.۳.۶	حل عددی معادله بنجامین-بنا-ماهونی بدون متعامد سازی
۶۶	۲.۳.۶	حل عددی معادله بنجامین-بنا-ماهونی با متعامد سازی
۶۷	۴.۶	نتایج عددی
۶۸	۵.۶	نتیجه گیری
۷۰	۷	روش هسته بازتولیدی به منظور حل عددی معادله اسویفت-هوهنبرگ
۷۰	۱.۷	مقدمه
۷۱	۲.۷	روش هسته بازتولیدی
۷۴	۳.۷	روش حل عددی برای معادله اسویفت-هوهنبرگ
۷۴	۱.۳.۷	حل معادله (۹.۷) بدون متعامد سازی
۷۵	۲.۳.۷	حل عددی معادله (۹.۷) با متعامد سازی
۷۶	۴.۷	آنالیز همگرایی روش

۷۹	نتایج عددی	۵.۷
۷۹	نتیجه گیری	۶.۷
۸۶	نتیجه گیری و کارهای آتی	۸
۸۸	مراجع	
۹۳	واژه نامه انگلیسی به فارسی	

لیست تصاویر

۲۶	نتایج عددی به ازای $\mu = 3, 4, 6$ و $\lambda = 0.5$ (چپ) ، $\lambda = 0.1$ (راست)	۱.۲
۲۶	خطای مانده برای $n = 25$ (چپ) و $n = 50$ (راست) وقتی که $\lambda = 0.5, \mu = 3$.	۲.۲
۲۹	خطای مانده برای $n = 25$ (چپ) و $n = 50$ (راست) وقتی که $\lambda = 0.5, \mu = 4$.	۳.۲
۲۹	خطای مانده برای $n = 25$ (چپ) و $n = 50$ (راست) وقتی که $\lambda = 0.5, \mu = 6$.	۴.۲
۳۸	رسم جواب عددی u با $n = 20$ و مقادیر $a = b = c = 1$ را	۱.۳
	رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف ضریب ناپیوستگی $C_f \rho$ ، که $\theta = \tilde{\theta} = K$.	۲.۳
۳۸	 $y = 0.5$ و $G = 1$	
	رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف چسبندگی مایعات، θ ، که $C_f \rho = \tilde{\theta} = K$.	۳.۳
۴۰	 $y = 0.5$ و $G = 1$	
	رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف گرادیان فشار کاربردی، G ، که $C_f \rho = \theta = K$.	۴.۳
۴۰	 $y = 0.5$ و $\tilde{\theta} = K = 1$	
	رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف نفوذ پذیری، K ، که $C_f \rho = \theta = \tilde{\theta} = G = 1$.	۵.۳
۴۱	 $y = 0.5$ و	
	رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف چسبندگی تاثیرگذار، $\tilde{\theta}$ ، که $C_f \rho = \theta = K$.	۶.۳
۴۱	 $y = 0.5$ و $G = 1$	
۶۰	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = e^{-x}$	۱.۵
۶۱	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = e^{-2x}$	۲.۵
۶۱	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = x^3/3$	۳.۵
	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) =$	۴.۵
۶۲	 $(1/2) \sin \pi x$	
	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) =$	۵.۵
۶۲	 $\tanh x$	
	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $f(x) = \sin(\pi x)$ و	۱.۷
۸۲	 $\lambda = 0.3$	

۲.۷	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 1$	۸۳
۳.۷	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 8$	۸۳
۴.۷	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $f(x) = x^3(1-x)^3$ و	
۵.۷	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 0.3$	۸۴
۶.۷	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 1$	۸۴
	رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 8$	۸۵

لیست جداول

۲۶	نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 3, \lambda = 0.5$	۱.۲
۲۷	نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 4, \lambda = 0.5$	۲.۲
۲۷	نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 6, \lambda = 0.5$	۳.۲
۲۸	نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 3, \lambda = 0.1$	۴.۲
۲۸	نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 4, \lambda = 0.1$	۵.۲
۲۹	نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 6, \lambda = 0.1$	۶.۲
۳۸	نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف C_{fp} ، هنگامی که	۱.۳
۳۹	نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف G ، هنگامی که	۲.۳
۳۹	نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف $\tilde{\theta} = 0.1$	۳.۳
۴۰	نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف K ، هنگامی که	۴.۳
۴۸	نتایج عددی و گزارش خطای مانده	۱.۴
۵۹	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = e^{-x}$	۱.۵
۵۹	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = e^{-2x}$	۲.۵
۵۹	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3/3$	۳.۵
۶۰	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = (1/2) \sin \pi x$	۴.۵
۶۰	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \tanh x$	۵.۵
۶۹	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x$	۱.۶
۶۹	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = e^x$	۲.۶
۸۰	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 0.3$	۱.۷
۸۰	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 1$	۲.۷
۸۰	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 8$	۳.۷
۸۱	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = -0.7$	۴.۷
۸۱	نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 0.3$	۵.۷

- ۶.۷ نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 1$ ۸۱
- ۷.۷ نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 8$ ۸۲

پیشگفتار

بسیاری از مدل‌های ریاضی در علوم، فناوری و مهندسی را می‌توان با معادلات دیفرانسیل توصیف کرد؛ معادلات دیفرانسیل جزء مباحث اساسی در علوم طبیعی و مدرن می‌باشند و در سال‌های اخیر تعداد بسیار زیادی از معادلات دیفرانسیل به منظور بازتاب پدیده‌های مختلف، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. امروزه با توسعه رایانه‌ها و افزایش سرعت این سیستم‌ها، روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل شاهد توسعه‌ی بی‌سابقه‌ای بوده‌اند [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷]. با توجه به پیچیدگی حل انواع این معادلات باید به یافتن روش‌های ساده و در عین حال مبتنی بر نظریه‌ای قوی در آنالیز تابعی مبادرت ورزید. از میان این روش‌ها می‌توان به فضای هسته بازتولید برای بدست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل اشاره کرد.

ایده کلی هسته بازتولیدی^۱ برای اولین بار در سال ۱۹۰۸ توسط زارمبا^۲ در طی بررسی مسائل مقدار مرزی توابع هارمونیک معرفی شد [۸]. مباحث معرفی شده تا زمان برگمن^۳ به طور کلی مورد مطالعه قرار نگرفت، تا این که برگمن تلاش کرد چارچوب اساسی با استفاده از قضایای مورد نیاز بدست آورد [۹، ۱۰]. آرونشاین^۴ در سال ۱۹۵۰ بر پایه روش‌های ارائه شده توسط برگمن کارهای قبلی در این زمینه جمع‌آوری و روش هسته‌های بازتولیدی را به یک روش کارآمد توسعه دهد [۱۱، ۱۲]. اما کو^۵ و لین^۶ بیشترین مطالعات و پژوهش‌ها را برای توسعه و پیشرفت روش هسته‌های بازتولیدی برای حل انواع معادلات خطی و غیرخطی انجام داده‌اند [۱۳، ۱۴، ۱۵]. استفاده بهینه از داده‌های ارائه شده برای بازیابی اطلاعات و با توجه به این که از جواب تقریبی بدست آمده، همانند سایر تقریب‌های چندجمله‌ای، می‌توان به راحتی مشتق یا انتگرال گرفت، یکی از مزایای هسته‌های بازتولیدی است. همچنین هسته‌ها در تولید فضاهای وابسته به داده‌ها و پایه‌های آن‌ها نقش عمده‌ای دارند. قابل توجه است که هسته‌های بازتولیدی یک فضای هیلبرت^۷ در صورت وجود یکتاست و یک فضای هیلبرت توسط هسته مشخص می‌شود. وجود هسته‌های بازتولیدی را می‌توان با استفاده

^۱Reproducing kernel

^۲Zaremba

^۳Bergman

^۴Aronszajn

^۵Cui

^۶Lin

^۷Hilbert space

از قضیه مهم نمایش ریس^۸ بیان و اثبات نمود. کاربردهای فراوان هسته‌های بازتولیدی را می‌توان در بسیاری از علوم از جمله فرآیندهای تصادفی، آمار و احتمال، علوم کامپیوتر و پردازش سیگنال یافت. تحقیقات بیشماری به کاربرد هسته‌های بازتولیدی در زمینه‌های درونیایی، حل معادلات دیفرانسیل معمولی، حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، حل معادلات انتگرال تقریب داده‌های پراکنده اختصاص داده شده است [۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸].

یکی از قسمت‌های مهم در کاربرد روش کلاسیک هسته‌های بازتولیدی استفاده از متعادل سازی گرام اشمیت است، که به کارگیری آن مستلزم صرف هزینه‌های محاسباتی و زمان زیادی است. هدف ما در این رساله ارائه و بررسی یک کاربرد جدید از روش هسته‌های بازتولیدی است به طوری که از متعادل سازی گرام اشمیت پرهیز شود و برای حل انواع معادلات با مشتقات جزئی قابل استفاده باشد. این رساله شامل هفت فصل می باشد. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در مورد فضای هسته بازتولیدی آورده شده است. در فصل دوم به ساخت جواب شعاعی معادله یامابه^۹، در فصل سوم به حل و بررسی معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر^{۱۰}، در فصل چهارم به حل عددی معادله ساین-گوردن^{۱۱}، در فصل پنجم به حل مساله مقدار اولیه دیم^{۱۲}، در فصل ششم به حل عددی معادله بنجامین-بنا-ماهونی^{۱۳} و در نهایت در فصل هفتم حل عددی مساله مقدار مرزی اسویفت-هوهنبرگ^{۱۴} با استفاده از روش هسته بازتولیدی خواهیم پرداخت.

فهرست مقالات مستخرج از رساله به شرح زیر است:

1. S. Abbasbandy, R.A. Van Gorder, P. Bakhtiari, Reproducing kernel method for the numerical solution of the Brinkman–Forchheimer momentum equation, J. Comput. Appl. Math., 311 (2017) 262–271.
2. Bakhtiari, P; Abbasbandy, S; Van Gorder, R.A; Solving the Dym initial value problem in reproducing kernel space, Numer.Algor., (2017) DOI 10.1007/s11075-017-0381-2.
3. Bakhtiari, P; Abbasbandy, S; Reproducing kernel method for the numerical solution of the sine–Gordon equation with initial conditions, 13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, Department of Mathematical Sciences Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran, (2016).
4. Bakhtiari, P; Abbasbandy, S; The numerical solution of Benjamin–Bona–Mahony equation by using the reproducing kernel method, 48th Annual Iranian Mathematics

^۸Riesz representation

^۹Yamabe

^{۱۰}Brinkman-Forchheimer

^{۱۱}Sine-Gordon

^{۱۲}Dym

^{۱۳}Benjamin-Bona-Mahony

^{۱۴}Swift-Hohenberg

Conference, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran, (2017).

5. Abbasbandy, S; Van Gorder, R.A; Bakhtiari, P; Reproducing kernel method for constructing radial solutions to the Yamabe equation, Submission.
6. Bakhtiari, P; Abbasbandy, S; Van Gorder, R.A; Reproducing kernel method for the numerical solution of the 1D Swift-Hohenberg equation, Submission.

فصل ۱

هسته‌های بازتولیدی

۱.۱ تعاریف و قضایای اولیه

در این فصل به بیان و بررسی تعاریف، قضایا و مفاهیم اولیه‌ای خواهیم پرداخت، که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین در ادامه فضای هسته‌های بازتولید معرفی می‌شود و قضایای مربوط به آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

تعریف ۱.۱.۱. اگر فرض کنیم X یک فضای برداری با مجموعه‌ای از عناصر با دو عمل جمع و ضرب اسکالر باشد، در این صورت به ازای هر $x, y, z \in X$ و اسکالرهایی $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم $x + y \in X$ و $\alpha x \in X$. همچنین این فضا دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱. به ازای هر $x, y \in X$ ، $x + y = y + x$ ؛

۲. به ازای هر $x, y, z \in X$ ، $(x + y) + z = x + (y + z)$ ؛

۳. عضو یکتای $0 \in X$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x \in V$ ، $0 + x = x$ ؛

۴. به ازای هر $x \in X$ ، عضو یکتای $-x \in V$ موجود است به طوری که $x + (-x) = 0$ ؛

۵. به ازای هر $x \in X$ ، $1x = x$ ؛

۶. به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ؛

۷. به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ و $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. اگر تابع $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ چنان وجود داشته باشد که برای هر $x, y, z \in X$

۱. به ازای هر $x \in X$ ، $\langle x, x \rangle \geq 0$ و $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$ ؛

۲. به ازای هر $x, y \in X$ ، $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ؛

۳. به ازای هر $x, y, z \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ، $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$.

آنگاه X را یک فضای ضرب داخلی^۱ با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. در این صورت اگر تابع $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$1. \quad \|x\| \geq 0 \text{ برای هر } x \in X,$$

$$2. \quad \|x\| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0,$$

$$3. \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \text{ برای هر } x \in X \text{ و هر } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$4. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (نابرابری مثلثی) برای هر } x, y \in X,$$

آنگاه X را یک فضای برداری نرم‌دار با نرم $\|\cdot\|$ می‌نامیم.

از نابرابری مثلثی به دست آورده می‌شود

$$|||x| - |y|| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X,$$

که به نابرابری مثلثی معروف است.

تعریف ۴.۱.۱. دنباله $\{f_n\}$ در زیر فضای Y از فضای نرم دار X را یک دنباله کوشی^۲ نامیم، هرگاه

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f_m - f_n\| = 0,$$

یا برای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مثبت مانند N وجود داشته باشد به قسمی که

$$\|f_m - f_n\| < \varepsilon, \quad m, n > N,$$

همچنین مشخص است که هر دنباله همگرا کوشی است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ یک مجموعه از بردارها در فضای ضرب داخلی X

با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ باشد. B را یک مجموعه متعامد یکه می‌نامیم، هرگاه برای هر مقدار $i, j = 1, \dots, n$ داشته باشیم

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید B یک مجموعه متعامد یکه در فضای ضرب داخلی X باشد. مجموعه

B را کامل می‌نامیم هرگاه تنها عنصر عمود بر همه‌ی اعضای B ، عنصر صفر باشد.

تعریف ۷.۱.۱. یک فضای برداری نرم‌دار را کامل گویند، هرگاه هر دنباله کوشی در آن فضا به

عنصری از فضا همگرا باشد.

تعریف ۸.۱.۱. یک فضای نرم‌دار کامل را فضای باناخ^۳ می‌نامند.

^۱ Inner product space

^۲ Cauchy sequence

^۳ Banach space

تعریف ۹.۱.۱. یک فضای حاصل ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت^۴ می نامند. در یک فضای حاصل ضرب داخلی می توان نرمی به صورت

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

که در آن

$$\langle x, x \rangle = \int_a^b x(t)x^*(t)dt = \int_a^b |x(t)|^2 dt.$$

می باشد تعریف نمود. لذا هر فضای حاصل ضرب داخلی، یک فضای نرم دار است (هر فضای هیلبرت یک فضای باناخ است) اما عکس آن برقرار نمی باشد.

در فضای هیلبرت X نامساوی زیر به نام کشی-شوارتز^۵ برقرار است

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in X. \quad (1.1)$$

مجموعه S در فضای ضرب داخلی X را متعامد گوئیم، هرگاه صفر عضوی از S نباشد و هر دو عضو متمایز آن بر هم عمود باشند. همچنین مجموعه S را متعامد یکه گوئیم، هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $\|s\| = 1$. مجموعه متعامد S در فضای ضرب داخلی X را کامل می گوئیم، اگر برای x

$$\forall s \in S : \quad \langle x, s \rangle = 0 \Rightarrow x = 0.$$

یک مجموعه متعامد یکه کامل را یک پایه متعامد یکه می نامیم.

قضیه ۱۰.۱.۱. [۳۳] هر فضای ضرب داخلی دارای یک مجموعه کامل متعامد است.

قضیه ۱۱.۱.۱. [۳۳] (متعامد سازی گرام اشمیت^۶) فرض کنید $x_1, x_2, \dots$ یک دنباله مستقل خطی در فضای ضرب داخلی X باشد. اگر دنباله $y_1, y_2, \dots$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$y_1 = x_1, \quad y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \frac{\langle x_{n+1}, y_i \rangle}{\|y_i\|^2} y_i, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

آن گاه

۱. مجموعه $\{y_1, y_2, \dots\}$ متعامد است.

۲. برای $n = 1, 2, \dots$ $\text{Span}\{x_1, x_2, \dots\} = \text{Span}\{y_1, y_2, \dots\}$.

علاوه بر آن اگر $z_1, z_2, \dots$ یک دنباله متعامد دیگر باشد که برای هر n ، $\text{Span}\{x_1, x_2, \dots\} = \text{Span}\{z_1, z_2, \dots\}$ ،

آن گاه برای هر n یک عدد مانند $\lambda_n \neq 0$ وجود دارد به طوری که $z_n = \lambda_n y_n$.

قضیه ۱۲.۱.۱. [۳۳] فرض کنید X یک فضای هیلبرت و B یک مجموعه متعامد یکه در X باشد آنگاه گزاره های زیر معادل هستند

^۴Hilbert space

^۵Cauchy-Schwarz inequality

^۶Gram-Schmidt Orthogonalization

الف) مجموعه B کامل است؛

ب) برای هر $x \in X$ داریم، $z = \sum_{z \in B} \langle x, z \rangle z$ ؛

ج) برای هر $x \in X$ داریم $\|x\|^2 = \sum_{z \in B} |\langle x, z \rangle|^2$.

قضیه ۱۳.۱.۱. [۳۳] فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در X باشد. اگر v یک عنصر از فضای X و مجموع جزئی s_n به صورت زیر تعریف شود

$$s_n = \sum_{k=1}^n v_k g_k,$$

به قسمی که $v_k = \langle v, g_k \rangle$ ، $-k$ ، امین ضریب فوریه از v باشد، آنگاه $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^2$ همگراست.

تعریف ۱۴.۱.۱. برای $a \geq 0$ تابع ضربه $\delta_\varepsilon(t-a)$ عبارت است از

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon}, & |t-a| < \varepsilon, \\ 0, & |t-a| > \varepsilon. \end{cases}$$

با توجه به تعریف تابع ضربه می توان بدست آورد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t-a) dt = 1.$$

حد تابع ضربه وقتی مقدار ε به سمت صفر میل می کند، تابع دلتای دیراک $\delta(t-a)$ حول نقطه a نامیده می شود، به عبارت دیگر

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t-a).$$

همچنین تابع ضربه را به صورت زیر می توان تعریف کرد.

تعریف ۱۵.۱.۱. برای $a \geq 0$ ، تابع ضربه $\delta_\varepsilon(t-a)$ ، در فاصله $[0, \infty)$ عبارت است از

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & a < t < a + \varepsilon, \\ 0, & o.w, \end{cases}$$

که بازنویسی آن بر حسب توابع پله ای به صورت زیر می باشد

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \frac{1}{\varepsilon} (u_a(t) - u_{a+\varepsilon}(t)).$$

با توجه به تعاریف فوق، اگر تابع $g(t)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، تابع دلتای دیراک دارای خاصیت زیر خواهد بود:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a) g(t) dt = g(a),$$

علی الخصوص، با انتخاب $a = 0$ داریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) g(t) dt = g(0).$$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای برداری باشند. یک تبدیل خطی از X در Y تابعی است که برای هر x و y در X و هر اسکالر c داشته باشیم

$$L(cx + y) = c(Lx) + Ly. \quad (3.1)$$

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر X و Y دو فضای برداری باشند و $x \in S_1 \subseteq X$ و $y \in S_2 \subseteq Y$ آنگاه L رابطه‌ای است که به هر عنصر S_1 فقط یک عنصر از S_2 را تخصیص می‌دهد. به این رابطه، تابع یا نگاشت در آنالیز، عملگر می‌گوییم، به عبارت دیگر داریم $Lx = y$.

تعریف ۱۸.۱.۱. عملگر $L : X \rightarrow Y$ را خطی گوییم، هرگاه برای اسکالرهایی دلخواه α و β بتوان نوشت

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y). \quad (4.1)$$

تعریف ۱۹.۱.۱. اگر X و Y فضاهای نرم‌دار باشند، عملگر خطی $L : X \rightarrow Y$ را کراندار می‌گوییم، اگر ثابت k وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\|L(x)\| \leq k \|x\|, \quad \forall x \in X. \quad (5.1)$$

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید $L : X \rightarrow Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد به طوری که X و Y فضای هیلبرت هستند، عملگر الحاقی هیلبرت L^* از L بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L^* : Y \rightarrow X,$$

به طوری که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ داشته باشیم

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^*y \rangle. \quad (6.1)$$

تعریف ۲۱.۱.۱. مجموعه A در فضای متری X چگال گوییم اگر برای هر نقطه x از X ، هر همسایگی از x شامل حداقل یک نقطه از A باشد.

به طور معادل A در X چگال است اگر و تنها اگر زیر مجموعه بسته X شامل A ، فقط X باشد. همچنین می‌توان این مطلب را اینگونه بیان کرد که X بستار A است یا اینکه دامنه مکمل A تهی است.

قضیه ۲۲.۱.۱. [۳۳] مجموعه A در فضای متری X چگال است اگر هر x در X حد دنباله‌ای از اعضای A باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱. [۳۳] (قضیه نمایش ریس^۷) فرض کنیم H یک فضای هیلبرت روی میدان $F = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. در این صورت، اگر $L : H \rightarrow F$ یک تابع خطی کراندار باشد، آنگاه بردار منحصر به فرد $h_0 \in H$ موجود است به طوری که برای هر $h \in H$ $L(h) = \langle h, h_0 \rangle$ و به علاوه $\|L\| = \|h_0\|$.

۲.۱ فضای هسته بازتولید

در این بخش ابتدا مفهوم هسته‌های بازتولید فضای هیلبرت^۸ را بیان خواهیم نمود و در ادامه به معرفی یک سری از خواص این فضا، ویژگی‌ها و مثال‌های مربوط به آن‌ها می‌پردازیم.

^۷Riesz Representation Theorem

^۸Reproducing Kernel Hilbert Spaces

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ای مجرد و

$$H = \{f \mid f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ یا } C\}$$

یک فضای هیلبرت با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ است. اگر تابع R_y وجود داشته باشد، به طوری که برای هر ثابت $y \in X$ ، داشته باشیم $R_y(x) \in H$ و همچنین $f(x) \in H$ در رابطه زیر صدق کند

$$\langle f, R_y \rangle_H = f(y),$$

آنگاه R_y هسته بازتولید H نامیده می‌شود، و فضای هیلبرت H فضای هسته بازتولید نامیده می‌شود.

مثال ۲.۲.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ فضای هسته بازتولید است.

$$\mathbb{R}^n = \{a \mid a = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{R}\},$$

$$e_m(i) = \begin{cases} 0, & i \neq m, \\ 1, & i = m, \end{cases} \quad (0 \leq i, m \leq n),$$

عبارت $e_m(i)$ فضای هسته بازتولید $\mathbb{R}^n$ است.

در حقیقت $e_m = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ و $\langle a, e_m \rangle = a_m$ و $\ell^2 = \{a \mid a = (a_1, a_2, \dots), a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\}$ به طور مشابه با ضرب داخلی فضای هسته بازتولید است.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید که H یک فضای $-n$ بعدی هیلبرت است و $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ پایه‌های متعامد نرمال آن هستند

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle_H = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

آنگاه $R_s(t) = \sum_{i=1}^n e_i(t) \overline{e_i(s)}$ هسته بازتولید H است. در حقیقت برای هر $f(t) \in H$ و a_i هایی که اعداد مختلط هستند داریم

$$f(t) = \sum_{i=1}^n a_i e_i(t),$$

$$\begin{aligned} \langle f(t), R_s(t) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i(t), \sum_{j=1}^n e_j(t) \overline{e_j(s)} \right\rangle_H = \sum_{i=1}^n a_i \left\langle e_i(t), \sum_{j=1}^n e_j(t) \overline{e_j(s)} \right\rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left\langle \sum_{j=1}^n \overline{e_j(t) e_j(s)}, e_i(t) \right\rangle_H = \sum_{i=1}^n a_i \left\langle \sum_{j=1}^n \overline{e_j(t)} e_j(s), \overline{e_i(t)} \right\rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n e_j(s) \left\langle \overline{e_j(t)}, \overline{e_i(t)} \right\rangle_H = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n e_j(s) \left\langle \overline{\overline{e_i(t)}}, \overline{\overline{e_j(t)}} \right\rangle_H \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n e_j(s) \left\langle e_i(t), e_j(t) \right\rangle_H, \end{aligned}$$

با توجه به اینکه می‌دانیم $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$ است لذا داریم

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n e_j(s) \delta_{ij}, \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(s) = f(s). \end{aligned}$$

۱.۲.۱ برخی از ویژگی‌های اساسی هسته بازتولید

گزاره ۴.۲.۱. [۱۳] اگر H یک فضای هسته بازتولید باشد و $x, y \in X$ ، آنگاه $R_y(x)$ هسته بازتولید در H متقارن مزدوج است یعنی $R_y(x) = \overline{R_x(y)}$.

گزاره ۵.۲.۱. [۱۳] اگر H یک فضای هسته بازتولید باشد، آنگاه $R_y(x)$ هسته بازتولید در H یکتا است.

گزاره ۶.۲.۱. [۱۳] اگر $R_y(x)$ هسته بازتولید فضای H باشد، آنگاه برای هر $x \in X$ داریم، $R_y(x) \geq 0$ و $R_y(x) = 0$ اگر و فقط اگر $H = \{0\}$.

گزاره ۷.۲.۱. [۱۳] هسته بازتولید $R_y(x)$ معین مثبت است، هرگاه برای هر $x_1, \dots, x_n \in X$ و $\xi_1, \dots, \xi_n \in C$ داشته باشیم:

$$\sum_{i,j=1}^n R_{x_i}(x_j) \bar{\xi}_i \xi_j \geq 0.$$

گزاره ۸.۲.۱. [۱۳] فضای تابعی هیلبرت H ، فضای هسته بازتولید است اگر و تنها اگر برای هر ثابت $x \in X$ ، عملگر خطی $I(f) = f(x)$ کراندار باشد.

قضیه ۹.۲.۱. [۱۲] فرض کنید H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی روی مجموعه X با نرم‌های به ترتیب $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ ، همچنین $k_1(x, y)$ و $k_2(x, y)$ به ترتیب هسته‌های بازتولیدی آن‌ها باشند. اگر $H_1 \cap H_2 = 0$ ، آنگاه $k(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y)$ هسته بازتولیدی فضای

$$H = \{f = f_1 + f_2 : f_1 \in H_1, f_2 \in H_2\},$$

است. نرم روی H به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|^2 = \|f_1 + f_2\|^2 = \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2,$$

و H_1 و H_2 زیر فضاهای متعامد H هستند.

قضیه ۱۰.۲.۱. [۱۲] فرض کنید H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی روی مجموعه‌های به ترتیب X_1 و X_2 ، با نرم‌های به ترتیب $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ باشند. همچنین $k_1(x, y)$ و $k_2(x, y)$ به ترتیب هسته‌های بازتولیدی آن‌ها باشند. آنگاه $H = H_1 \otimes H_2$ یک فضای هیلبرت و هسته بازتولیدی آن به شکل $k(x, s, y, t) = k_1(x, y) k_2(s, t)$ است.

۳.۱ فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $\omega_2^m[a, b]$

در این بخش به معرفی چندین فضای بازتولیدی هسته می‌پردازیم، به طوری که در ادامه زیرفضاها، هسته‌های آن‌ها و برخی ویژگی‌های آن‌ها را بیان خواهیم نمود.

تعریف ۱.۳.۱. تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ داده شده است. فرض کنیم $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ مجموعه‌ای از بازه‌های باز دو به دو مجزا باشد که $(a_k, b_k) \subset [a, b]$. اگر برای هر ε, δ مستقلاً از n وجود داشته باشد به طوری که برای $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon,$$

آنگاه تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته مطلق گفته می‌شود.

گزاره ۲.۳.۱. [۱۲] یک تابع پیوسته مطلق روی بازه $[a, b]$ ، تابعی پیوسته است.

گزاره ۳.۳.۱. [۱۳] تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ داده شده است. اگر به ازای هر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $|f'(x)| \leq M$ آنگاه $f(x)$ پیوسته مطلق است.

نتیجه ۴.۳.۱. فرض کنیم تابع $f'(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. آنگاه $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته مطلق است.

گزاره ۵.۳.۱. [۱۳] اگر تابع $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x f(t)dt$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته مطلق است.

در این بخش ابتدا تعریف فضای $\omega_2^m[a, b]$ و ضرب داخلی و نرم آن را ارائه می‌نماییم، سپس نشان می‌دهیم $\omega_2^m[a, b]$ فضای هیلبرت است.

تعریف ۶.۳.۱. فضای هسته بازتولید $\omega_2^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\omega_2^m[a, b] = \{f(x) | f^{(m-1)} \text{ مطلقاً پیوسته } f^{(m)} \in L^2[a, b], x \in [a, b]\} \quad (7.1)$$

برای توابع $f(x), g(x) \in \omega_2^m[a, b]$ ضرب داخلی و نرم در فضای $\omega_2^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\langle f, g \rangle_{\omega_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx,$$

$$\|f\|_{\omega_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{\omega_2^m}}. \quad (8.1)$$

قضیه ۷.۳.۱. [۱۳] فضای تابع $\omega_2^m[a, b]$ فضای هیلبرت است.

قضیه ۸.۳.۱. [۱۲] فضای تابع $\omega_2^m[a, b]$ ، فضای هسته بازتولید است. بنابراین هر دنباله کوشی در آن همگرا است.

اکنون می‌خواهیم تابع هسته بازتولید $R_y(x)$ در $\omega_2^m[a, b]$ را بیابیم. فرض می‌کنیم $R_y(x)$ تابع هسته بازتولید $\omega_2^m[a, b]$ است، آنگاه برای هر مقدار ثابت $y \in [a, b]$ و هر تابع $f(x) \in \omega_2^m[a, b]$ ، $R_y(x)$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{\omega_2^m} = f(y).$$

با استفاده از رابطه زیر

$$\langle f, g \rangle_{\omega_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx,$$

داریم

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{\omega_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx,$$

و برای حل رابطه فوق باید انتگرال $\int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx$ را از روش جزء به جزء حل کنیم که به صورت زیر می‌باشد

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_{x=a}^b \\ &\quad + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx. \end{aligned}$$

سپس به جای i می‌توانیم $m-i-1$ را جایگذاری کنیم که رابطه زیر بدست می‌آید

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{(m-i-1)} f^{(i)}(x) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}}.$$

حال با فاکتورگیری رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \langle f(x), R_y(x) \rangle &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} \right] \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} \\ &\quad + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx. \end{aligned}$$

در رابطه بالا برای اینکه رابطه زیر حاصل شود

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle = f(y),$$

صفر قرار می‌دهیم. باید $\frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}}$ و $(-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}}$ عدد ثابت هستند پس برابر

$$\begin{aligned} \langle f(x), R_y(x) \rangle &= (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx, \\ &= f(y), \end{aligned}$$

یعنی

$$(-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx = f(y),$$

همچنین رابطه زیر باید برقرار باشد

$$\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y),$$

به طوری که

$$\int_a^b (-1)^m f(x) \delta(x - y) dx = f(y),$$

اگر $x \neq y$ باشد تابع $\delta(x - y) = 0$ است پس باید $x = y$ باشد.

$$\int_a^b (-1)^m f(x) \delta(\cdot) dx = f(y),$$

که $\delta(\cdot) = 1$ است (با توجه به تعریف تابع دیراک) بنابراین

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0,$$

بنابراین $R_y(x)$ ، جواب معادله دیفرانسیل کلی زیر است

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y), \\ \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (9.1)$$

با توجه به تعریف تابع دیراک اگر $x \neq y$ ، می توان دریافت که $R_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن خطی ثابت زیر با $2m$ شرط است، یعنی

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0, \quad (10.1)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (11.1)$$

می دانیم معادله (۱۰.۱) دارای معادله مشخصه $\lambda^{2m} = 0$ است و دارای مقدار ویژه $\lambda = 0$ می باشد که ریشه چند جمله ای از مرتبه تکرار $2m$ است.

بنابراین جواب عمومی معادله (۹.۱) به صورت زیر خواهد بود.

$$R_y(x) = \begin{cases} l R_y(x) = \sum_{i=0}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x < y, \\ r R_y(x) = \sum_{i=0}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y. \end{cases} \quad (12.1)$$

حال ضرایب $c_i(y)$ و $d_i(y)$ ، $i = 1, 2, \dots, 2m$ را محاسبه می نماییم از آنجایی که

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y),$$

داریم

$$\frac{\partial^i l R_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i r R_y(y)}{\partial x^i}, i = 0, 1, \dots, 2m - 2, \quad (13.1)$$

و

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} l R_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} r R_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1. \quad (14.1)$$

رابطه (۱۳.۱) بیانگر $2m - 1$ معادله است و رابطه (۱۴.۱) نیز بیانگر یک معادله است که روی هم $2m$ معادله می‌شود. برای بدست آوردن ضرایب $c_i(y)$ و $d_i(y)$ که $i = 1, 2, \dots, 2m$ نیاز به $4m$ معادله داریم که معادلات (۱۱.۱) نیز دارای معادله است که روی هم $4m$ معادله می‌شود با حل این معادلات ضرایب بدست می‌آیند که با بدست آوردن این ضرایب و جایگذاری در فرمول (۱۲.۱) هسته بازتولید $R_y(x)$ بدست می‌آید.

گزاره ۹.۳.۱. [۱۳] فرض می‌کنیم که $R_y(x)$ هسته بازتولید فضای $\omega_2^m[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^2[a, b], \quad i + j = 2m - 1,$$

نسبت به x یا y .

نتیجه ۱۰.۳.۱.

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad 0 \leq i + j \leq 2m - 1,$$

تابع به طور مطلق پیوسته روی بازه بسته $[a, b]$ نسبت به x یا y است.

قضیه ۱۱.۳.۱. [۱۲] فرض کنیم $R_y(x)$ هسته بازتولید فضای $\omega_2^m[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in \omega_2^m[a, b], \quad i + j = m - 1,$$

نسبت به x یا y است.

قضیه ۱۲.۳.۱. [۱۲] فرض کنیم $\omega_2^m[a, b]$ فضای هسته بازتولید است و $f_1(x), f_n(x) \in \omega_2^m[a, b]$ ، اگر $(n \geq 1)$ همگرا به $f(x)$ نسبت به $\|\cdot\|_{\omega_2^m}$ باشد، آنگاه $f_n^{(k)}(x)$ بطور یکنواخت همگرا به $f^{(k)}(x)$ خواهد بود $0 \leq k \leq m - 1$.

زیر فضای بسته از فضای هسته بازتولید $\omega_2^m[a, b]$

در این بخش می‌توانیم زیر فضای بسته ${}^0\omega_2^m[a, b]$ از فضای هسته بازتولید $\omega_2^m[a, b]$ معرفی کنیم. هر گاه فضای $\omega_2^m[a, b]$ دارای شرایط مرزی و یا اولیه باشد، آن را با نماد ${}^0\omega_2^m[a, b]$ نشان خواهیم داد. به عنوان مثال فضای تابعی زیر را در نظر بگیریم

$${}^0\omega_2^m[a, b] = \{f(x) | f(x) \in \omega_2^m[a, b], f'(a) = 0, f(b) = 0\}.$$

می‌توان نشان داد فضای هسته بازتولید هیلبرت است. همچنین به طور مشابه می‌توان تابع هسته بازتولید $Q_y(x)$ از ${}^0\omega_2^m[a, b]$ را بدست آورد.

قضیه ۱۳.۳.۱. [۱۳] فضای هسته بازتولید ${}^0\omega_2^m[a, b]$ زیر فضای بسته‌ای از $\omega_2^m[a, b]$ است.

فضای هسته بازتولید ${}^0\omega_2^m[a, b]$ ممکن است شامل شرایط مرزی و اولیه مختلفی باشد. البته ممکن است فضای هسته بازتولید و توابع هسته بازتولید مربوط به آن را به شکل متفاوتی بدست آوریم. گاهی اوقات چندین شرط متعدد، همگن یا ناهمگن می‌تواند برای فضا هسته بازتولید ایجاد گردد.

۱.۳.۱ فضای هسته بازتولید در دامنه بیکران

فضای هسته بازتولید $\omega_2^1(\mathbb{R})$

برخی اوقات مسائل نیازمند متغیر $x \in (-\infty, +\infty)$ است، بنابراین لازم است که چنین فضای هسته بازتولید را ایجاد نماییم، به عنوان مثال فضای تابع زیر را تعریف می‌نماییم

$$\omega_2^1(\mathbb{R}) = \{u(x) | u(x) \text{ پیوسته به طور مطلقا پیوسته}, u'(x) \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (15.1)$$

ضرب داخلی و نرم در $\omega_2^1(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$\langle u, v \rangle_{\omega_2^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x)v(x) + u'(x)v'(x))dx, \quad (16.1)$$

$$\|u(x)\|_{\omega_\infty} = \sqrt{\langle u(x), v(x) \rangle_{\omega_2^1(\mathbb{R})}},$$

که می‌توانیم اثبات نماییم که فضای $\omega_2^1(\mathbb{R})$ فضای ضرب داخلی است. فرض کنید $R_y(x)$ تابع هسته بازتولید در $\omega_2^1(\mathbb{R})$ است، آنگاه برای هر مقدار ثابتی چون $y \in (-\infty, +\infty)$ و هر $u(x) \in \omega_2^1(\mathbb{R})$ تابع هسته بازتولید $R_y(x)$ باید در رابطه زیر صدق نماید

$$\langle u, R_y \rangle_{\omega_2^1(\mathbb{R})} = u(y).$$

بنابراین با اعمال تعریف ضرب داخلی و ویژگی اساسی هسته می‌توان تابع هسته بازتولیدی مربوط به این فضا را به راحتی محاسبه نمود، که داریم

$$R_y(x) = \frac{e^{-|x-y|}}{2}.$$

فضای هسته بازتولید $\omega_2^2[0, \infty)$

بسیاری از مسائلی که مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد ممکن است دارای دامنه تعریفی به صورت $[0, \infty)$ باشد، به عنوان مثال هر گاه مساله دارای پارامتر زمان باشد این کاربرد از اهمیت ویژه‌ای برخوردار خواهد بود. بنابراین نیاز داریم فضای هسته بازتولیدی مربوط به این دامنه و همچنین ضرب داخلی تعریف شده بر روی این فضا را تعریف کنیم. فضای هسته بازتولیدی $\omega_2^2[0, \infty)$ به

صورت زیر بیان می شود

$${}^0\omega_2^2([0, \infty)) = \{u(x) \mid u(x), u'(x) \text{ پیوسته به طور مطلقا پیوسته } u, u'(x), u''(x) \in L^2([0, \infty))\}. \quad (17.1)$$

لذا می توان ضرب داخلی و نرم فضای هسته بازتولیدی $\omega_2^2[0, \infty)$ به صورت زیر تعریف کنیم

$$\langle u(x), v(x) \rangle_{\omega_2^2[0, \infty)} = \int_0^\infty \{4u(x)v(x) + 5u'(x)v'(x) + u''(x)v''(x)\} dx, \quad (18.1)$$

$$\|u(x)\|_{\omega_2^2[0, \infty)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{\omega_2^2[0, \infty)}}.$$

بنابراین می توانیم اثبات کرد که فضای $\omega_2^2[0, \infty)$ فضای ضرب داخلی است. فرض کنید $R_y(x)$ تابع هسته بازتولید فضای $\omega_2^2[0, \infty)$ باشد، آنگاه برای هر مقدار ثابتی چون $y \in [0, \infty)$ و هر $u(x) \in \omega_2^2[0, \infty)$ تابع هسته بازتولید $R_y(x)$ باید در رابطه زیر صدق نماید

$$\langle u, R_y \rangle_{\omega_2^2[0, \infty)} = u(y).$$

۴.۱ فضای هسته بازتولید $\omega_2^{(m,n)}(\Phi)$

در این بخش به بیان و بررسی فضای بازتولیدی هسته با فرض $\Phi = [a, b] \times [c, d]$ می پردازیم. از این فضا می توان برای یافتن جواب های مورد نظر در معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بهره برد. البته با توجه به مساله مورد نظر می توان بازه ها را متناهی یا نامتناهی در نظر گرفت، که در هر حالت ضرب داخلی تعریف شده و هسته بازتولیدی که بدست می آید متفاوت خواهد بود.

گزاره ۱.۴.۱. [۱۳] اگر تابع $f(x, y)$ روی Φ به طور کامل پیوسته باشد، آنگاه به ازای هر y دلخواه (ثابت از این به بعد) تابع $f(x, y)$ نسبت به x روی $[a, b]$ پیوسته مطلق است. به طور مشابه به ازای هر x دلخواه، تابع $f(x, y)$ نسبت به y روی $[c, d]$ پیوسته مطلق است.

گزاره ۲.۴.۱. [۱۳] اگر تابع $f(x, y)$ روی Φ به طور کامل پیوسته باشد، آنگاه $f(x, y)$ روی Φ پیوسته است.

گزاره ۳.۴.۱. [۱۳] اگر تابع $f(x, y)$ روی Φ انتگرال پذیر باشد، آنگاه تابع

$$\int_a^x \int_c^y f(t, s) dt ds,$$

نسبت به x و y روی Φ پیوسته کامل است.

گزاره ۴.۴.۱. [۱۳] اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ پیوسته مطلق باشد، آنگاه $f(x)$ روی Φ پیوسته کامل است.

گزاره ۵.۴.۱. [۱۲] اگر تابع $f(x)$ و $g(y)$ روی $[a, b]$ و $[c, d]$ به ترتیب نسبت به x و y پیوسته مطلق باشند، آنگاه $f(x)g(y)$ روی Φ پیوسته کامل است.

تعریف ۶.۴.۱. فضای توابع دوتایی به صورت زیر تعریف می شود

$$\omega_2^{(m,n)}(\Phi) = \left\{ f(x, y) \mid \frac{\partial^{m+n-2} f(x, y)}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \text{ در } \Phi \text{ کامل است}, \frac{\partial^{m+n} f(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \in L^2(\Phi) \right\}, \quad (19.1)$$

و همچنین ضرب داخلی بر روی این فضا به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \langle f(x, y), g(x, y) \rangle_{\omega_2^{(m,n)}(\Phi)} &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_c^d \left[\frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(a, y) \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial^i}{\partial x^i} g(a, y) \right] dy \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, c), \frac{\partial^j}{\partial y^j} g(x, c) \right\rangle_{0\omega_2^m} \\ &+ \int_c^d \int_a^b \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\partial^n}{\partial y^n} g(x, y) dx dy. \quad (20.1) \end{aligned}$$

قضیه ۷.۴.۱. [۱۳] فضای توابع $\omega_2^{(m,n)}(\Phi)$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۸.۴.۱. [۱۳] فرض کنید $f(x, y), g_1(x)g_2(y) \in \omega_2^{(m,n)}(\Phi)$

$$\langle f(x, y), g_1(x)g_2(y) \rangle_{\omega_2^{(m,n)}} = \langle \langle f(x, y), g_1(x) \rangle_{\omega_2^m}, g_2(y) \rangle_{\omega_2^n}.$$

قضیه ۹.۴.۱. [۱۲] فرض کنید $\omega_2^{(m,n)}(\Phi)$ یک فضای بازتولید هسته باشد، آن گاه دارای تابع هسته

باتولیدی

$$\Psi_{(\zeta, \eta)}(x, y) = R_\zeta(x)K_\eta(y), \quad (21.1)$$

به طوری که $R_\zeta(x)$ و $K_\eta(y)$ بترتیب هسته بازتولیدی فضاهای $\omega_2^m[a, b]$ و $\omega_2^n[c, d]$ هستند.

فصل ۲

روش هسته بازتولیدی برای ساخت جواب شعاعی معادله یامابه

۱.۲ مقدمه

معادله دیفرانسیل غیرخطی یامابه در بسیاری از مسائل هندسی و همچنین مطالب مرتبط با بحث‌های فیزیکی مشاهده می‌شود [۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸]. مسئله مقدار مرزی یامابه را به صورت زیر در نظر بگیرید [۳۸]

$$u''(r) + \frac{\mu-1}{r}u'(r) - u(r) + \lambda u(r)^\alpha = 0, \quad (1.2)$$

$$u'(0) = 0 \quad \text{و} \quad u(1) = 1, \quad (2.2)$$

که λ یک مقدار ثابت و به ازای هر $\alpha, \mu \geq 3$ را به فرم زیر اختیار می‌کنیم

$$\alpha = 1 + \frac{4}{\mu-2}.$$

قابل توجه است که معادله (۱.۲) به فرم معادله لن-امدن^۱ نوع اول شباهت دارد. با توجه به این که معادله (۱.۲) یک جمله اضافه دارد که عامل تفاوت این دو معادله می‌باشد و همچنین معادله لن-امدن یک مسئله مقدار اولیه می‌باشد، در حالی که معادله مورد بحث مسئله مقدار مرزی است. λ و α پارامتر هستند، می‌توان λ را یک عدد حقیقی در نظر گرفت در حالی که α به μ وابسته است. در نتیجه اگر $\mu = 3$ ، آن گاه $\alpha = 5$ ؛ اگر $\mu = 4$ ، آن گاه $\alpha = 3$ ؛ اگر $\mu = 5$ ، آن گاه $\alpha = 7/3$ ؛ خواهد بود و به همین صورت ادامه دارد. همچنین اگر μ به بینهایت میل کند، α به یک میل خواهد کرد. این نوع از مسئله قبلاً توسط روش هم‌محلی مورد مطالعه قرار گرفته شده و نتایج عددی آن گزارش شده است [۳۹].

روش هسته بازتولیدی در بسیاری از علوم و مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد و به هر حال، حل تحلیلی این معادله سخت می‌باشد. بنابراین به دنبال روش عددی برای تقریب زدن جواب مسئله مقدار مرزی مورد نظر هستیم [۴۰، ۴۱، ۴۲].

^۱ Lane-Emden

۲.۲ روش هسته بازتولیدی برای معادله یامابه

در این بخش به حل عددی معادله (۱.۲) تحت شرایط مرزی (۲.۲) خواهیم پرداخت. به منظور استفاده از روش هسته بازتولیدی برای حل معادله (۱.۲) - (۲.۲) نیاز به همگن کردن شرایط مرزی داریم. بنابراین تغییر متغیر $v(r) = u(r) - 1$ را تعریف می‌کنیم و در نتیجه مسئله (۱.۲) - (۲.۲) به فرم زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{cases} rv''(r) + (\mu - 1)v'(r) - rv(r) - r + r\lambda(v(r) + 1)^\alpha = 0, \\ v'(0) = 0, \quad \text{و} \quad v(1) = 0. \end{cases} \quad (۳.۲)$$

فضای هیلبرت هسته بازتولیدی توسط تعریف ضرب داخلی و تابع هسته بازتولید آن مشخص می‌شود. پس باید فضای هسته بازتولید ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ را با توجه به تعریف شده در ۷.۱ به صورت زیر تعریف کرد

$${}^0\omega_2^3[0, 1] = \{v(r) \mid v^{(2)}(r) \text{ مطلقاً پیوسته}, v^{(3)}(r) \in L^2[0, 1], \\ v(0) = 0, v(1) = 0\}.$$

همچنین ضرب داخلی و نرم این فضا را طبق تعریف ۸.۱ داریم

$$\begin{aligned} \langle g_1, g_2 \rangle_{{}^0\omega_2^3[0, 1]} &= \sum_{i=0}^2 g_1^{(i)}(0)g_2^{(i)}(0) + \int_0^1 g_1^{(3)}(x)g_2^{(3)}(x)dx, \\ \|g\|_{{}^0\omega_2^3} &= \sqrt{\langle g, g \rangle_{{}^0\omega_2^3}}. \end{aligned} \quad (۴.۲)$$

بعلاوه، عملگر خطی $\mathcal{L} : {}^0\omega_2^3[0, 1] \rightarrow {}^0\omega_2^1[0, 1]$ کراندار است [۱۳] و به فرم زیر تعریف می‌شود

$$(\mathcal{L}v)(r) \equiv rv''(r) + (\mu - 1)v'(r) - rv(r), \quad (۵.۲)$$

$$\mathcal{F}(r, v(r)) \equiv -r\lambda(v(r) + 1)^\alpha + r. \quad (۶.۲)$$

لذا معادله (۳.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \mathcal{F}(r, v(r)), \\ v'(0) = 0, \quad \text{و} \quad v(1) = 0. \end{cases} \quad (۷.۲)$$

باید توجه داشت که هسته بازتولید دارای ویژگی اساسی زیر است

$$\langle g, R_y \rangle_{{}^0\omega_2^3[0, 1]} = g(y). \quad (۸.۲)$$

حال با اعمال (۴.۲) و با استفاده از روشی مشابه به روش ارائه شده در فصل اول می‌توان هسته بازتولیدی $R_\zeta(r)$ را به فرم زیر بدست آورد

$$R_y(r) = \begin{cases} \frac{1}{18720} \left(-r^5 y^5 + 5r^5 y^4 - 10r^5 y^3 - 30r^5 y^2 + 36r^5 + 5r^4 y^5 \right. \\ \left. - 25r^4 y^4 + 50r^4 y^3 + 150r^4 y^2 - 780r^4 y + 600r^4 - 10r^3 y^5 + 50r^3 y^4 \right. \\ \left. - 100r^3 y^3 + 1260r^3 y^2 - 1200r^3 - 30r^2 y^5 + 150r^2 y^4 - 300r^2 y^3 \right. \\ \left. + 3780r^2 y^2 - 3600r^2 - 120y^5 + 600y^4 - 1200y^3 - 3600y^2 + 4320 \right), & r \leq y, \\ \frac{1}{18720} \left(-r^5 y^5 + 5r^5 y^4 - 10r^5 y^3 - 30r^5 y^2 - 120r^5 + 5r^4 y^5 - 25r^4 y^4 \right. \\ \left. + 50r^4 y^3 + 150r^4 y^2 + 600r^4 - 10r^3 y^5 + 50r^3 y^4 - 100r^3 y^3 \right. \\ \left. - 300r^3 y^2 - 1200r^3 - 30r^2 y^5 + 150r^2 y^4 + 1260r^2 y^3 + 3780r^2 y^2 \right. \\ \left. - 3600r^2 - 780r y^4 + 36y^5 + 600y^4 - 1200y^3 - 3600y^2 + 4320 \right), & r > y, \end{cases}$$

حال، $\varphi_i(r) = R_{r_i}(r)$ قرار می‌دهیم که $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال است و فرض کنیم که

$$\Psi_i(r) = \mathcal{L}^* \varphi_i(r), \quad (9.2)$$

که $\mathcal{L}^*$ عملگر الحاقی $\mathcal{L}$ است. در نتیجه می‌توان قضیه زیر را نوشت

قضیه ۱.۲.۲. [۱۳] اگر $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ یک مجموعه چگال باشد، آن‌گاه $\{\Psi_i(r)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل در ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ است.

کار کردن با پایه‌های متعامد مزایای همچون پایداری و پیچیدگی محاسبات کمتری خواهد داشت، پس سیستم پایه متعامد $\{\bar{\Psi}_i(r)\}_{i=1}^\infty$ از ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ را با اعمال فرآیند گرام اشمیت بر روی $\{\Psi_i(r)\}_{i=1}^\infty$ به فرم زیر خواهیم داشت

$$\bar{\Psi}_i(r) = \sum_{k=1}^i \delta_{ik} \Psi_k(r), \quad (10.2)$$

که δ_{ik} ضرایب متعامد سازی هستند. به منظور یافتن جواب مسئله (۳.۲) قضیه زیر را داریم

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ در بازه $[0, 1]$ چگال باشد. اگر معادله (۳.۲) دارای جواب یکتا باشد، آن‌گاه جواب مسئله به صورت زیر است

$$v(r) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \delta_{ik} \mathcal{F}(r_k, v(r_k)) \bar{\Psi}_i(r). \quad (11.2)$$

برهان. فرض کنید $v(r)$ جواب معادله (۳.۲) باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲.۲، $v(r)$ می‌تواند توسط

سری فوریه به فرم زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned}
 v(r) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle v(r), \bar{\Psi}_i(r) \rangle_{0\omega_2^3} \bar{\Psi}_i(r) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \delta_{ik} \langle v(r), \Psi_k(r) \rangle_{0\omega_2^3} \bar{\Psi}_i(r) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \delta_{ik} \langle v(r), \mathcal{L}^* \varphi_k(r) \rangle_{0\omega_2^3} \bar{\Psi}_i(r) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \delta_{ik} \langle \mathcal{L}v(r), \varphi_k(r) \rangle_{0\omega_2^3} \bar{\Psi}_i(r) \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \delta_{ik} \mathcal{F}(r_k, v(r_k)) \bar{\Psi}_i(r),
 \end{aligned}$$

□

اثبات کامل است.

با برش سری (۱۱.۲)، تقریبی از جواب $v(r)$ را برای m جمله به فرم زیر می توان نمایش داد

$$v_{m+1}(r) = \sum_{i=1}^m \mathbb{B}_i \bar{\Psi}_i(r), \quad (12.2)$$

که

$$\mathbb{B}_i = \sum_{k=1}^i \delta_{ik} \mathcal{F}(r_k, v_i(r_k)). \quad (13.2)$$

۳.۲ آنالیز همگرایی روش

در این بخش همگرایی الگوریتم ارائه شده را بررسی خواهیم کرد. همگرایی دنباله $v_m(r)$ در قضایای زیر ارائه شده است

قضیه ۱.۳.۲. اگر $v(r) \in {}^0\omega_2^3$ ، آنگاه ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که داریم

$$|v(r)| \leq C \|v\|_{0\omega_2^3}, \quad |v'(r)| \leq C \|v\|_{0\omega_2^3}.$$

برهان. به ازای هر $r \in [0, 1]$ می توان نوشت

$$|v(r)| = |\langle v(\xi), R_r(\xi) \rangle_{0\omega_2^3}| \leq \|v(\xi)\|_{0\omega_2^3} \|R_r(\xi)\|_{0\omega_2^3},$$

بنابراین ثابت $C_1 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|v(r)| \leq C_1 \|v(\xi)\|_{0\omega_2^3}.$$

همچنین داریم

$$|v'(r)| = \left| \left\langle v(\xi), \frac{\partial}{\partial r} R_r(\xi) \right\rangle_{0\omega_2^3} \right| \leq \|v(\xi)\|_{0\omega_2^3} \left\| \frac{\partial}{\partial r} R_r(\xi) \right\|_{0\omega_2^3},$$

در این صورت ثابت $C_2 > 0$ وجود دارد که

$$|v'(r)| \leq C_2 \|v(\xi)\|_{0\omega_2^3}, \quad \forall r \in [0, 1].$$

□

حال بگیرد $C = \max\{C_1, C_2\}$ باشد، آنگاه اثبات قضیه کامل است.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیه بالا، می‌توان قضیه زیر را نوشت

قضیه ۲.۳.۲. اگر $\omega_2^3 \in {}^0(v_m(r))$ داشته باشیم و $v_m(r) \xrightarrow{\|\cdot\|_{\omega_2^3}} \bar{v}(r)$ و $r_k \rightarrow r$ وقتی که $m, k \rightarrow \infty$ ، همچنین $\|v_m(r)\|_{\omega_2^3}$ کراندار و $\mathcal{F}(r, v(r))$ پیوسته باشد، در این صورت $\mathcal{F}(r_k, v_m(r_k)) \rightarrow \mathcal{F}(r, \bar{v}(r))$ ، $(k, m \rightarrow \infty)$.

برهان. از آنجایی که

$$|v_m(r_k) - \bar{v}(r)| = |v_m(r_k) - v_m(r) + v_m(r) - \bar{v}(r)| \\ \leq |v'_m| |r_k - r| + |v_m(r) - \bar{v}(r)|,$$

با توجه به قضیه ۱.۳.۳ و فرض‌های قضیه داریم

$$|v_m(r_k) - \bar{v}(r)| \rightarrow 0, \quad \text{که } k, m \rightarrow \infty.$$

□

که اثبات کامل است.

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنید $\|v_m(r)\|$ در (۱۲.۲) کراندار باشد. اگر $\{r_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال باشد، آن گاه دنباله جواب تقریبی $v_m(r)$ که از روش ارائه شده بدست می‌آید به جواب دقیق $v(r)$ معادله (۷.۲) همگرا است و

$$v(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i \bar{\Psi}_i(r), \quad (14.2)$$

که $\mathbb{B}_i$ توسط رابطه (۱۳.۲) داده شده است.

برهان. اثبات را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم. در ابتدا ثابت خواهیم کرد دنباله v_m همگراست. از معادله (۱۲.۲)، داریم

$$v_{m+1}(r) = v_m(r) + \mathbb{B}_m \bar{\Psi}_m(r). \quad (15.2)$$

از تعامد $\{\bar{\Psi}_i(r)\}_{i=1}^\infty$ ، نتیجه می‌گیریم

$$\|v_{m+1}\|_{\omega_2^3}^2 = \|v_m\|_{\omega_2^3}^2 + \mathbb{B}_m^2. \quad (16.2)$$

بنابراین می‌توان نوشت $\|v_{m+1}\|_{\omega_2^3} \geq \|v_m\|_{\omega_2^3}$. از کراندار بودن $\|v_m\|_{\omega_2^3}$ نتیجه می‌شود $\|v_m\|_{\omega_2^3}$ همگراست. همچنین ثابت c موجود است به طوری که

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i^2 = c.$$

که نتیجه می‌دهد

$$\mathbb{B}_i \in l^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

اگر $n > m$ و از تعامد $v_{m+1}(r) - v_m(r)$ استفاده کنیم، آن گاه داریم

$$\|v_n(r) - v_m(r)\|_{\omega_2^3}^2 = \|v_n(r) - v_{n-1}(r) + v_{n-2}(r) + \dots + v_{m+1}(r) - v_m(r)\|_{\omega_2^3}^2 \\ = \|v_n(r) - v_{n-1}(r)\|_{\omega_2^3}^2 + \dots + \|v_{m+1}(r) - v_m(r)\|_{\omega_2^3}^2 \\ = \sum_{i=n}^m \mathbb{B}_i^2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty).$$

از کامل بودن فضای هیلبرت ${}^0\omega_2^3$ می توان نوشت که

$$v_m \xrightarrow{\|\cdot\|_{{}^0\omega_2^3}} \bar{v}, \quad \text{وقتی } m \rightarrow \infty.$$

در مرحله دوم، اثبات خواهیم کرد که $\bar{v}$ جواب معادله (۷.۲) است. بدین منظور، از معادله (۱۲.۲) نتیجه می گیریم

$$\bar{v}(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i \bar{\Psi}_i(r).$$

با توجه به این که

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\bar{v})(r_k) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i \langle \mathcal{L}\bar{\Psi}_i, \varphi_k \rangle_{{}^0\omega_2^3} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i \langle \bar{\Psi}_i, \Psi_k \rangle_{{}^0\omega_2^3}, \end{aligned} \quad (۱۷.۲)$$

با ضرب (۱۷.۲) در δ_{mk} و جمع بستن روی k از ۱ تا m ، نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \delta_{mk} (\mathcal{L}\bar{v})(r_k) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i \left\langle \bar{\Psi}_i, \sum_{k=1}^m \delta_{mk} \Psi_k \right\rangle_{{}^0\omega_2^3} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i \langle \bar{\Psi}_i, \bar{\Psi}_m \rangle_{{}^0\omega_2^3} = \mathbb{B}_m \end{aligned} \quad (۱۸.۲)$$

از (۱۸.۲) و (۱۳.۲)، به ازای $m = 1$ ، داریم

$$(\mathcal{L}\bar{v})(r_1) = \mathcal{F}(r_1, v_1(r_1)).$$

همچنین برای $m = 2$ ، می توان نوشت

$$\delta_{21}(\mathcal{L}\bar{v})(r_1) + \delta_{22}(\mathcal{L}\bar{v})(r_2) = \delta_{21}\mathcal{F}(r_1, v_1(r_1)) + \delta_{22}\mathcal{F}(r_2, v_2(r_2)).$$

لذا

$$(\mathcal{L}\bar{v})(r_2) = \mathcal{F}(r_2, v_2(r_2)).$$

. به طور کلی با استفاده از استقرا داریم

$$(\mathcal{L}\bar{v})(r_k) = \mathcal{F}(r_k, v_k(r_k)). \quad (۱۹.۲)$$

برای هر $z \in [0, 1]$ ، یک زیر دنباله $\{r_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ وجود دارد که به z همگراست، از آن جایی که $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ چگال است. بنابراین با در نظر گرفتن دنباله v_m و قضیه ۱.۲.۲ نتیجه می گیریم که

$$(\mathcal{L}\bar{v})(z) = \mathcal{F}(z, \bar{v}(z)). \quad (۲۰.۲)$$

که $\bar{v}(r)$ جواب معادله (۷.۲) و

$$v(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{B}_i \bar{\Psi}_i(r).$$

□

۴.۲ نتایج عددی و مثال‌ها

به منظور بررسی روش ارائه شد، مثال‌هایی را برای آزمایش روش پیشنهادی به کار می‌بریم. بدین منظور تعداد نقاط انتخابی برای محاسبه جواب تقریبی مسئله $n = 25, 50$ به ازای پارامترهای خاص μ و λ خواهد بود. همچنین $E(r)$ بیانگر خطای مانده در نقطه $r \in [0, 1]$ می‌باشد. در جدول‌های ۱.۲، ۲.۲ و ۳.۲، مقدار $E(r)$ و همچنین جواب تقریبی $u_n(r)$ به ازای $\lambda = 0.5$ و $\mu = 3, 4, 6$ گزارش شده است. در ضمن همین محاسبات را به ازای $\lambda = 0.1$ در جدول‌های ۴.۲، ۵.۲ و ۶.۲ انجام داده‌ایم. بعلاوه، مقدار $\lambda = 0.5$ و $\lambda = 0.1$ در شکل ۱.۲ برای رسم جواب تقریبی مسئله یامابه وقتی $\mu = 3, 4, 6$ با در اختیار گرفتن $n = 25$ در نظر گرفته شده است. همچنین میزان خطای مانده به ازای مقادیر خاص μ و λ برای $n = 25, 50$ در شکل‌های ۲.۲، ۳.۲ و ۴.۲ رسم شده است.

۵.۲ نتیجه‌گیری

در این فصل از رساله الگوریتم به منظور محاسبه جواب تقریبی معادله یامابه با تقارن شعاعی روی یک گوی با بعدی بزرگتر از دو پرداختیم. روش هسته بازتولیدی چارچوب تئوری برای بدست آوردن جواب عددی تقریبی با بالاترین دقت فراهم می‌آورد. نتایج عددی نشان می‌دهد که روش ارائه شده دارای دقت قابل قبولی برای محاسبه جواب مسئله مقدار مرزی است. نتایج بدست آمده از مسئله مقدار مرزی یامابه نتیجه می‌دهد که این روش را می‌توان برای سایر مسائل مقدار مرزی و یا اولیه نیز به کار برد. در حال خاص می‌توان به مسئله لن-امدن که به فرم زیر اشاره کرد

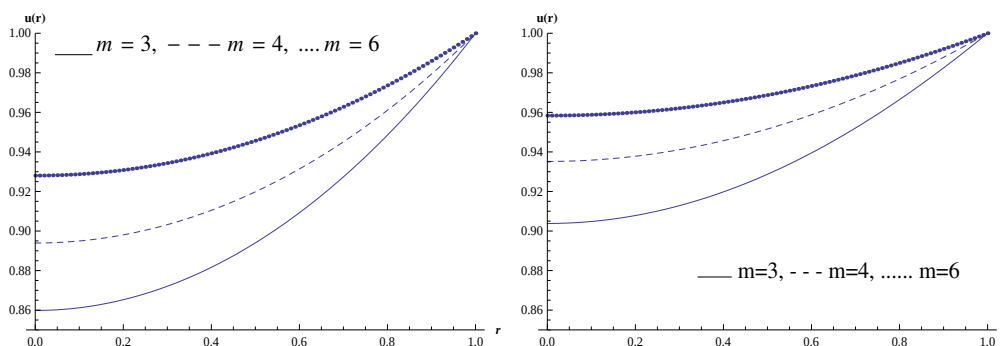
$$u''(r) + \frac{k}{r}u'(r) + f(u(r)) = g(r), \quad (21.2)$$

$$u(a) = A, \quad \text{و} \quad u(b) = B. \quad (22.2)$$

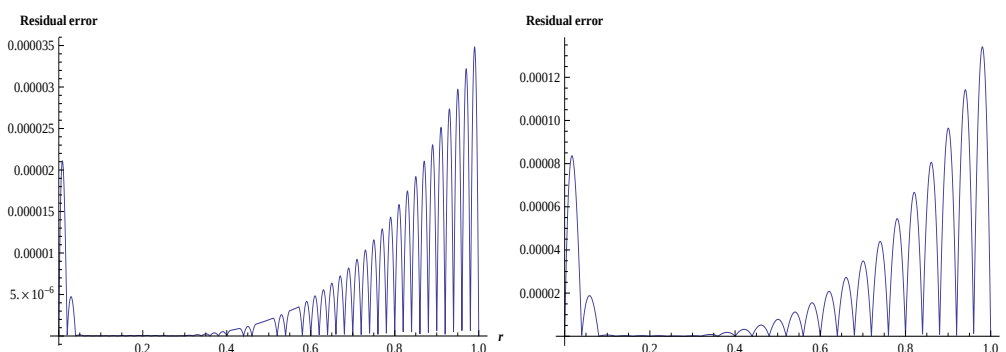
مسئله ارائه شده در این فصل بیانگر روش هسته بازتولیدی کلاسیک با استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت بود. همان طور که مشاهده می‌شود این روش با این که در فضای یک بعدی مورد بحث قرار گرفت ولی فرآیند محاسبه و زمان اجرای روش طولانی است و همچنین برای دست یافتن به یک دقت بالاتر مجبور هستیم تعداد نقاط مورد استفاده را خیلی بالا ببریم، که البته مقرون به صرفه نیست. همچنین اگر بخواهیم این روش کلاسیک را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار ببریم مشکلات آن چندین برابر خواهد شد، چرا که با توجه به افزایش بعد خود به خود میزان محاسبات خیلی بیشتر و در نتیجه زمان اجرای الگوریتم افزایش چشم‌گیری خواهد داشت. بنابراین در فصل‌های بعدی که موضوع اصلی رساله یعنی یافتن جواب برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستیم، قصد داریم روشی را پیشنهاد کنیم که علاوه بر بهره بردن از مزیت‌های روش هسته بازتولیدی بتوان فرآیند گرام اشمیت را حذف و در نتیجه بهبود قابل توجهی در روند اجرای الگوریتم جدید داشته باشیم.

جدول ۱.۲: نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 3, \lambda = 0.5$.

Nodes	n=25		n=50	
	$u(r)$	$E(r)$	$u(r)$	$E(r)$
0	0.903822	0	0.903818	0
0.1	0.904824	5.70980×10^{-7}	0.904822	2.31633×10^{-16}
0.2	0.90783	1.24375×10^{-16}	0.907828	5.28004×10^{-16}
0.3	0.912827	2.07637×10^{-7}	0.912824	8.57993×10^{-16}
0.4	0.919792	1.05560×10^{-16}	0.919789	9.50598×10^{-16}
0.5	0.928692	7.80597×10^{-6}	0.92869	1.39690×10^{-15}
0.6	0.939482	6.24601×10^{-16}	0.93948	1.79718×10^{-15}
0.7	0.952101	0.00003	0.952099	2.19524×10^{-15}
0.8	0.966467	1.30869×10^{-15}	0.966465	1.47637×10^{-15}
0.9	0.982477	0.00009	0.982476	4.13602×10^{-15}
1	1	3.04796×10^{-16}	1	2.33833×10^{-16}



شکل ۱.۲: نتایج عددی به ازای $\mu = 3, 4, 6$ و $\lambda = 0.5$ (چپ) ، $\lambda = 0.1$ (راست)



شکل ۲.۲: خطای مانده برای $n = 25$ (چپ) و $n = 50$ (راست) وقتی که $\lambda = 0.5, \mu = 3$

جدول ۲.۲: نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 4, \lambda = 0.5$

Nodes	n=25		n=50	
	$u(r)$	$E(r)$	$u(r)$	$E(r)$
0	0.935196	0	0.935195	0
0.1	0.935853	8.90590×10^{-7}	0.935853	1.14608×10^{-16}
0.2	0.937825	8.96130×10^{-17}	0.937825	2.35174×10^{-17}
0.3	0.941109	1.89829×10^{-7}	0.941108	2.51984×10^{-16}
0.4	0.945698	1.99546×10^{-16}	0.945697	2.11041×10^{-16}
0.5	0.951585	1.48812×10^{-6}	0.951585	2.29974×10^{-16}
0.6	0.95876	6.31758×10^{-17}	0.958759	3.17541×10^{-17}
0.7	0.967208	6.70257×10^{-6}	0.967208	2.99646×10^{-17}
0.8	0.976913	1.02823×10^{-15}	0.976912	8.21113×10^{-16}
0.9	0.987852	0.00002	0.987852	1.00115×10^{-16}
1	1	2.25428×10^{-16}	1	5.33735×10^{-16}

جدول ۳.۲: نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 6, \lambda = 0.5$

Nodes	n=25		n=50	
	$u(r)$	$E(r)$	$u(r)$	$E(r)$
0	0.958366	0	0.958366	0
0.1	0.958782	2.00422×10^{-6}	0.958782	1.30760×10^{-17}
0.2	0.96003	1.08947×10^{-17}	0.96003	1.20920×10^{-17}
0.3	0.96211	1.06892×10^{-7}	0.96211	3.87817×10^{-16}
0.4	0.965022	1.13138×10^{-16}	0.965022	3.33876×10^{-16}
0.5	0.968768	2.59403×10^{-7}	0.968768	4.76714×10^{-16}
0.6	0.973346	7.34828×10^{-16}	0.973346	1.11563×10^{-16}
0.7	0.978758	4.76425×10^{-7}	0.978758	3.37246×10^{-16}
0.8	0.985005	9.96888×10^{-16}	0.985005	4.35979×10^{-16}
0.9	0.992085	8.69308×10^{-7}	0.992085	7.33720×10^{-16}
1	1	9.28041×10^{-16}	1	1.47735×10^{-16}

جدول ۴.۲: نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 3, \lambda = 0.1$

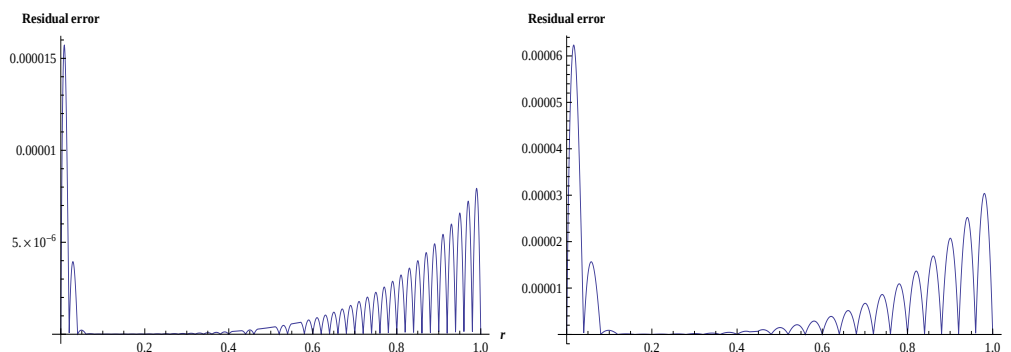
Nodes	n=25		n=50	
	$u(r)$	$E(r)$	$u(r)$	$E(r)$
0	0.85984	0	0.859839	0
0.1	0.861193	6.70366×10^{-7}	0.861194	1.22194×10^{-16}
0.2	0.865265	2.94261×10^{-16}	0.865266	2.23470×10^{-16}
0.3	0.87207	1.52526×10^{-6}	0.872071	3.08454×10^{-16}
0.4	0.881639	1.22362×10^{-16}	0.88164	6.35585×10^{-16}
0.5	0.894011	6.58259×10^{-6}	0.894012	5.10816×10^{-16}
0.6	0.909237	7.50399×10^{-16}	0.909238	1.02800×10^{-16}
0.7	0.927377	0.00001	0.927378	1.30034×10^{-16}
0.8	0.9485	8.09655×10^{-16}	0.948501	1.14839×10^{-16}
0.9	0.972682	0.00002	0.972682	6.92655×10^{-16}
1	1	1.095123×10^{-15}	1	3.36255×10^{-16}

جدول ۵.۲: نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 4, \lambda = 0.1$

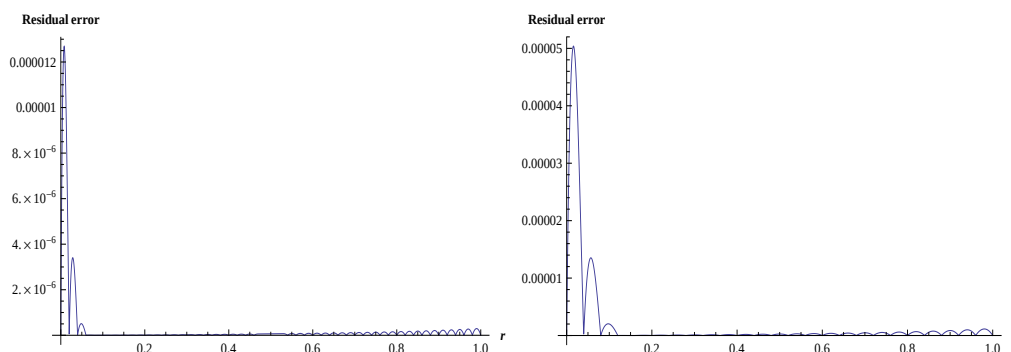
Nodes	n=25		n=50	
	$u(r)$	$E(r)$	$u(r)$	$E(r)$
0	0.893941	0	0.893941	0
0.1	0.894969	1.41238×10^{-6}	0.89497	2.34740×10^{-16}
0.2	0.898058	2.15495×10^{-16}	0.898059	5.07649×10^{-16}
0.3	0.90322	3.80681×10^{-8}	0.903221	9.16549×10^{-16}
0.4	0.910474	4.08370×10^{-15}	0.910475	1.36058×10^{-15}
0.5	0.919847	2.64816×10^{-6}	0.919848	2.00519×10^{-15}
0.6	0.931375	1.11619×10^{-15}	0.931376	2.27545×10^{-15}
0.7	0.9451	0.00001	0.9451	2.88365×10^{-15}
0.8	0.961072	9.34441×10^{-16}	0.961073	2.81715×10^{-15}
0.9	0.979351	0.00003	0.979351	3.67377×10^{-15}
1	1	1.66889×10^{-15}	1	5.21371×10^{-15}

جدول ۶.۲: نتایج عددی و مقدار خطای مانده $\mu = 6, \lambda = 0.1$.

Nodes	n=25		n=50	
	$u(r)$	$E(r)$	$u(r)$	$E(r)$
0	0.928039	0	0.928039	0
0.1	0.928741	3.38437×10^{-6}	0.928741	4.20842×10^{-16}
0.2	0.930848	2.35363×10^{-16}	0.930848	6.50971×10^{-16}
0.3	0.934368	2.01080×10^{-7}	0.934368	8.08515×10^{-16}
0.4	0.93931	4.72900×10^{-16}	0.93931	1.73022×10^{-15}
0.5	0.94569	1.67382×10^{-7}	0.945691	1.69860×10^{-15}
0.6	0.953528	1.57223×10^{-15}	0.953529	3.11362×10^{-15}
0.7	0.962847	5.15065×10^{-6}	0.962848	3.71870×10^{-15}
0.8	0.973676	2.28393×10^{-15}	0.973677	4.59929×10^{-15}
0.9	0.986048	0.00002	0.986048	5.37835×10^{-15}
1	1	5.59242×10^{-15}	1	7.38852×10^{-15}



شکل ۳.۲: خطای مانده برای $n = 25$ (چپ) و $n = 50$ (راست) وقتی که $\lambda = 0.5, \mu = 4$



شکل ۴.۲: خطای مانده برای $n = 25$ (چپ) و $n = 50$ (راست) وقتی که $\lambda = 0.5, \mu = 6$

فصل ۳

روش هسته بازتولیدی برای حل عددی معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر

۱.۳ مقدمه

مسئله توسعه اجباری انتقال گرما در یک صفحه متخلخل اشباع شده‌ی موازی، شامل شرایط اولیه و مرزی، توسط هومان^۱ به صورت تحلیلی و عددی مورد توجه قرار گرفت [۴۳]. به طور خاص، هومان معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر را بر روی یک متغیر در نظر گرفته و محاسبه نمود. چنین نتیجه‌ای اطلاعات کیفی در مورد توسعه کامل اجباری انتقال گرما از طریق یک محیط متخلخل که توسط دو صفحه موازی ایجاد می‌شود را به کمک مدل برینکمن-فورچ‌هیمر ارائه می‌کند. ویدمن^۲ و مدینا^۳ معادله برینکمن-فورچ‌هیمر خطی را در یک بعد مورد بررسی قرار دادند [۴۴]. همچنین با توجه به فرمول‌بندی چند متغیره، هومان و مریخ^۴ یک فرم خطی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را در یک فضای دومتغیره مطالعه کردند [۴۵]. اخیراً، معادله برینکمن-فورچ‌هیمر برای یک فضای دو بعدی به ویژه در یک مجرا با مقطع مستطیلی، توسط روش‌های مختلف تقریب زدن جواب مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته شده است [۴۶]. اما در این رساله معادله غیرخطی که هومان ارائه نمود مورد مطالعه قرار می‌گیرد و برخی نتایج کمی برای جریان دو بعدی مربوط به آن داده خواهد شد [۴۳]، بنابراین مشاهده می‌شود که مدل مورد بررسی به عنوان تعمیمی از مدل هومان است [۴۶]. معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر برای جریان یک طرفه در جهت z مربع داده شده به صورت زیر است، که دامنه مورد بحث را $\Phi = [0, 1] \times [0, 1]$ در نظر خواهیم گرفت

$$\tilde{\theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) \right) - \frac{C_f \rho}{\sqrt{K}} u^2(x, y) - \frac{\theta}{K} u(x, y) + G = 0, \quad (1.3)$$

^۱ Hooman

^۲ Weidman

^۳ Medina

^۴ Merrikh

به طوری که $u(x, y)$ بیانگر سرعت در جهت z ، ضریب ناپیوستگی، ρ تراکم، θ ضریب چسبندگی مایعات، $\bar{\theta}$ چسبندگی تاثیرگذار، K نفوذ پذیری و G گرادیان فشار کاربرد نامطلوب است [۳۸، ۴۶]. شرایط مرزی مناسب به صورت زیر است

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (2.3)$$

که به سادگی بدان معنا است که سطح مجرای مستطیلی هیچ لغزشی وجود ندارد. از این رو، سرعت در مرز باید صفر در نظر گرفته شود، که مبانی و مفاهیم فیزیکی آن کامل شود. ثابت‌های a ، b و c را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$a \equiv \frac{C_f \rho}{\bar{\theta} \sqrt{K}}, \quad b \equiv \frac{\theta}{\bar{\theta} K}, \quad c \equiv \frac{G}{\bar{\theta}}, \quad (3.3)$$

و عملگر لاپلاسین دو بعدی زیر را داریم

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (4.3)$$

می‌توان معادله دیفرانسیل (۱.۳) را با شرایط مرزی (۲.۳) به صورت فشرده زیر بازنویسی نمود

$$\Delta u = au^2(x, y) + bu(x, y) - c, \quad (5.3)$$

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \quad (6.3)$$

در این فصل از رساله حل عددی مسئله مقدار مرزی بیضوی (۵.۳)–(۶.۳) را با استفاده از روش هسته‌های بازتولیدی مورد بررسی و مطالعه قرار خواهیم داد.

۲.۳ روش هسته بازتولیدی

در این بخش به بررسی معادله (۵.۳) با شرایط مرزی (۶.۳) قرار می‌دهیم، در نتیجه برای حل آن فضای هسته بازتولیدی مورد استفاده را با بهره‌گیری از تعریف ۷.۱ ارائه شده در فصل یک معرفی می‌کنیم. بنابراین فضای ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$${}^0\omega_2^3[0, 1] = \{g(x) \mid g^{(2)}(x) \text{ مطلق است}, g^{(3)}(x) \in L^2[0, 1], g(0) = 0, g(1) = 0\}.$$

ضرب داخلی و نرم مخصوص به فضای ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ با توجه به تعریف ۸.۱ به فرم زیر است

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{{}^0\omega_2^3[0, 1]} = \sum_{i=0}^2 g_1^{(i)}(0) g_2^{(i)}(0) + \int_0^1 g_1^{(3)}(x) g_2^{(3)}(x) dx, \quad (7.3)$$

$$\|g\|_{{}^0\omega_2^3} = \sqrt{\langle g, g \rangle_{{}^0\omega_2^3}}.$$

وجود هسته بازتولید فضای هیلبرت همان طور که در فصل یک اشاره شد، با استفاده از قضیه نمایش ریس اثبات می‌شود. بنابراین مشخص است که این تابع هسته بازتولید یکتاست. در ابتدای بحث نیاز داریم تابع هسته بازتولیدی فضای ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ را بدست آوریم. فرض کنید $R_\zeta(x)$ تابع هسته بازتولیدی

فضای مورد بحث باشد، در این صورت به ازای هر $\zeta \in [0, 1]$ ζ دلخواه ولی از این به بعد ثابت و هر $g(x) \in {}^0\omega_2^3[0, 1]$ طبق تعریف هسته بازتولیدی $R_\zeta(x)$ باید در شرط زیر صدق کند

$$\langle g(x), R_\zeta(x) \rangle_{{}^0\omega_2^3[0, 1]} = g(\zeta). \quad (۸.۳)$$

حال با اعمال (۷.۳) و با استفاده از روشی مشابه به روش ارائه شده در فصل اول می‌توان هسته بازتولیدی $R_\zeta(x)$ را به فرم زیر بدست آورد

$$R_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{18720} \left((-1+x)\zeta(-30\zeta x((x-4)x+6)-120)-120x(x+2) \right. \\ \quad \times ((x-6)x+18)+5x(x+2)-10\zeta^2 x((x-4)x+6)-120) & x > \zeta, \\ \quad \times \zeta^3((x-6)x+18)-\zeta^4(x(x+2)((x-6)x+18)+156) \Big), \\ \frac{1}{18720} \left((\zeta-1)x(-120\zeta(\zeta+2)((\zeta-6)\zeta+18)-(\zeta(\zeta+2) \right. \\ \quad \times ((\zeta-6)\zeta+18)+156)x^4+5\zeta(\zeta+2)((\zeta-6)\zeta+18)x^3-10\zeta & x \leq \zeta. \\ \quad \times (\zeta((\zeta-4)\zeta+6)-120)x^2-30\zeta(\zeta((\zeta-4)\zeta+6)-120)x \Big), \end{cases}$$

با توجه به مسئله مطرح شده که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در یک فضای دو متغیره است، نیاز به تعریف فضای توابع دوتایی مناسب برای حل این معادله داریم. در نتیجه با بهره‌گیری از تعریف ۱۹.۱ داریم

$$\begin{aligned} {}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi) &= {}^0\omega_2^3[0, 1] \times {}^0\omega_2^3[0, 1] \\ &= \left\{ u(x, y) \mid \frac{\partial^4 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \text{ در } \Phi \text{ کاملاً پیوسته است}, \frac{\partial^6 u(x, y)}{\partial x^3 \partial y^3} \in L^2(\Phi), \right. \\ &\quad \left. u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0 \right\}, \end{aligned}$$

و ضرب داخلی تعریف شده در فضای ${}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi)$ را با استفاده از ۲۰.۱ به فرم زیر است

$$\begin{aligned} \langle u(x, y), v(x, y) \rangle_{{}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi)} &= \sum_{i=0}^2 \int_0^1 \left[\frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} u(0, y) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} v(0, y) \right] dy \\ &\quad + \sum_{j=0}^2 \left\langle \frac{\partial^j}{\partial y^j} u(x, 0), \frac{\partial^j}{\partial y^j} v(x, 0) \right\rangle_{{}^0\omega_2^3} \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial y^3} u(x, y) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial y^3} v(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۹.۴.۱ می‌توان هسته بازتولیدی فضای ${}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi) = {}^0\omega_2^3[0, 1] \times {}^0\omega_2^3[0, 1]$ را به فرم زیر تعریف کرد

$$\Psi_{(\zeta, \eta)}(x, y) = R_\zeta(x) \kappa_\eta(y), \quad (۹.۳)$$

که $R_\zeta(x)$ و $\kappa_\eta(y)$ هسته بازتولیدی فضای ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ هستند. همچنین می‌توان فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ همانند $\omega_2^{(3,3)}(\Phi)$ تعریف کرد. فرض کنیم $\Upsilon_{(\zeta, \eta)}(x, y)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ باشد، بنابراین طبق (۵.۳) عملگر خطی

$$\mathcal{L} : {}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi) \longrightarrow \omega_2^{(1,1)}(\Phi),$$

به صورت زیر تعریف می شود

$$(\mathcal{L}u)(x, y) \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) - bu(x, y), \quad (10.3)$$

$$\mathcal{F}(x, y, u(x, y)) \equiv au^2(x, y) - c. \quad (11.3)$$

با توجه به تعریف بالا، مشخص است که $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی است [۱۳]. از این رو، (۵.۳) را می توان به فرم زیر بانویسی کرد

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x, y) = \mathcal{F}(x, y, u(x, y)), \\ u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0. \end{cases} \quad (12.3)$$

قرار دهیم $\varphi_i(x, y) = \Upsilon_{(x_i, y_i)}(x, y)$ که $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است. فرض کنید $\mathcal{L}^*$ عملگر الحاقی $\mathcal{L}$ باشد و تعریف کنیم

$$\Omega_i(x, y) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, y). \quad (13.3)$$

یکی از فواید استفاده از روش هسته های بازتولیدی این است که می توان آن را برای خیلی از مسائل مورد استفاده قرار داد. قابل توجه است که با استفاده از تعاریف و مفروضات مطرح شده می توان قضیه زیر را بیان و اثبات نمود.

قضیه ۱.۲.۳. اگر $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد، آن گاه $\{\Omega_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل در فضای ${}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi)$ است.

برهان. برای هر $u(x, y) \in {}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi)$ ثابت، فرض کنید $(u(x, t), \Psi_i(x, y)) = 0$ و $(i = 1, 2, \dots)$ باشد، بدین معنی که

$$(u(x, y), \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t)) = (\mathcal{L}u(x, y), \varphi_i(x, t)) = (\mathcal{L}u)(x_i, y_i) = 0.$$

توجه شود که $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است، بنابراین $(\mathcal{L}u)(x, t) = 0$. از وجود $\mathcal{L}^{-1}$ داریم $u \equiv 0$ □
در نتیجه اثبات کامل می شود.

۳.۳ راه حل عددی برای یافتن جواب معادله برینکمن-فورچ هیمر

در این بخش دو روش عددی برای حل معادله حرکت برینکمن-فورچ هیمر مورد بحث (۵.۳) ارائه خواهیم نمود. در روش اول از متعامد سازی استفاده نخواهیم کرد، در حالی که در روش دوم از آن بهره خواهیم برد. بنابراین در روش اول شاهد کاهش محاسبات مورد استفاده خواهیم بود که نتیجه آن سریع تر شدن زمان محاسبه خواهد بود، در مقابل روش دوم بسیار کارآمدتر در زمینه آنالیز همگرایی است. هر دو روش در این بخش مورد بررسی قرار خواهد گرفت، درست است که دو روش در متعامد سازی و توابع پایه ای با یکدیگر متفاوت هستند اما هر دو قابلیت حل معادله مورد مطالعه را دارند و جواب تقریبی مسئله با دقت قابل قبولی محاسبه خواهد شد.

۱.۳.۳ روش حل معادله (۵.۳) بدون متعامد سازی

در این قسمت یک الگوریتم تکراری برای حل معادله (۵.۳) بر پایه فضای هسته بازتولید ارائه می‌کنیم، بدین منظور از کاربرد فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت پرهیز خواهیم کرد. حل معادله مورد بحث در قضیه زیر بیان خواهد شد.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ یک مجموعه چگال باشد. اگر معادله (۵.۳) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب تقریبی مسئله به صورت زیر بیان می‌شود

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Omega_i(x, y), \quad (14.3)$$

که α_i ها ضرایبی هستند، که با استفاده از حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی زیر تعیین می‌شود

$$B\alpha = F. \quad (15.3)$$

که

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^T, \quad B = [\mathcal{L}\Omega_i(x_j, y_j)] \quad i, j = 1, 2, \dots$$

و

$$F = [\mathcal{F}(x_1, y_1, u(x_1, y_1)), \mathcal{F}(x_2, y_2, u(x_2, y_2)), \dots]^T.$$

برهان. با توجه به قضیه ۱.۲.۳ جواب مسئله می‌تواند به صورت (۱۴.۳) نمایش داده شود، به طوری که

$$\begin{aligned} \langle \Omega_j(x, y), \Omega_i(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} &= \langle \mathcal{L}^* \varphi_j(x, y), \Omega_i(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \\ &= \langle \varphi_j(x, y), \mathcal{L}\Omega_i(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \\ &= \mathcal{L}\Omega_i(x_j, y_j), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \langle u(x, y), \Omega_j(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} &= \langle u(x, y), \mathcal{L}^* \varphi_j(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \\ &= \langle \mathcal{L}u(x, y), \varphi_j(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \\ &= \mathcal{F}(x_j, y_j, u(x_j, y_j)). \end{aligned}$$

لذا طبق بهترین تقریب در فضای هیلبرت [۴۷]، ضرایب α_i با حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی (۱۵.۳) تعیین می‌شود و اثبات کامل است. $\square$

بنابراین فقط لازم است یک مجموع متناهی از معادلات (۱۴.۳) برای تقریب جواب مورد نظر $u(x, y)$ مورد استفاده قرار گیرد. در نتیجه جواب تقریبی معادله با حل یک سیستم $n \times n$ از معادلات خطی محاسبه خواهد شد. برای یافتن جواب (۱۵.۳) می‌توان از یک روش مستقیم یا تکراری به انتخاب دلخواه بهره برد.

برای خلاصه سازی روش پیشنهاد شده، الگوریتم محاسباتی زیر برای یافتن تقریبی از جواب مسئله (۵.۳) ارائه شده است

الگوریتم

ورودی تعداد نقاط مورد نظر در دامنه n ؛

تعداد تکرار مورد نظر m ؛

پارامترهای a, b و c ؛

هسته بازتولیدی در فضای $\omega_2^{(3,3)}$.

قرار دهید $\Omega_i(x, y) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, y)$

قرار دهید $i, j = 1, 2, \dots, n$ $\mathcal{B} = [\mathcal{L}\Omega_i(x_j, y_j)]$

قرار دهید تابع برداری اولیه $u_{0,n}(x, y) = [0, 0, \dots, 0]^T$

برای $i = 1 : m$ انجام بده

قرار دهید $i, j = 1, 2, \dots, n$ $\mathcal{F} = [\mathcal{F}(x_j, y_j, u_{i-1,n}(x_j, y_j))]^T$

محاسبه می کند $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^T$ از $\mathcal{B}\alpha = \mathcal{F}$

قرار دهید $u_{i,n}(x, y) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Omega_j(x, y)$

پایان

خروجی $(u_{m,n}(x, y))$.

۲.۳.۳ روش حل معادله (۵.۳) با متعامد سازی

کار کردن با پایه های متعامد مزیت های عددی را فراهم می کند، به عنوان مثال، پایداری بیشتر و پیچیدگی محاسباتی کمتر را خواهد داشت. بنابراین پایه های متعامد سیستم $\{\bar{\Omega}_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$ از $\omega_2^{(3,3)}$ که از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت بر روی $\{\Omega_i(x, y)\}_{i=1}^{\infty}$ نتیجه می شود به فرم زیر داریم

$$\bar{\Omega}_i(x, y) = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \Omega_k(x, y), \quad (16.3)$$

که ضرایب متعامد سازی هستند. به منظور یافتن جواب معادله (۵.۳) قضیه زیر را داریم

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد. اگر معادله (۵.۳) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, y_k, u(x_k, y_k)) \bar{\Omega}_i(x, y). \quad (17.3)$$

برهان. فرض کنید $u(x, y)$ جواب معادله (۵.۳) باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲.۳، $u(x, y)$ می‌تواند توسط سری فوریه به فرم زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x, y), \bar{\Omega}_i(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \bar{\Omega}_i(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle u(x, y), \Omega_k(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \bar{\Omega}_i(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle u(x, y), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \bar{\Omega}_i(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \mathcal{L}u(x, y), \varphi_k(x, y) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \bar{\Omega}_i(x, y) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, y_k, u(x_k, y_k)) \bar{\Omega}_i(x, y). \end{aligned}$$

□

با استفاده از برش سری (۱۷.۳)، تقریبی از جواب $u(x, y)$ را برای m جمله به فرم زیر می‌توان نمایش داد

$$u_m(x, y) = \sum_{i=1}^m \sigma_i \bar{\Omega}_i(x, y), \quad (18.3)$$

که

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, y_k, u(x_k, y_k)). \quad (19.3)$$

۴.۳ مثال‌های عددی و رفتار جواب با پارامترهای فیزیکی

به جهت مشخص کردن دقت و کارایی روش عددی پیشنهاد شده، روش را برای مجموعه‌ای از چندین پارامتر خاص مورد بررسی و اجرا قرار خواهیم داد. جواب تقریبی را به ازای $n = 20$ از این بعد ثابت بدست می‌آوریم و مقادیر مختلفی از پارامترهای فیزیکی $C_f \rho$ ، θ ، $K\tilde{\theta}$ و G را در نظر می‌گیریم. یادآور می‌شویم که جواب مسئله مورد بحث به صورت کلی هموار خواهد بود، در نتیجه برای پایین نگه داشتن هزینه محاسباتی انتخاب و استفاده تعداد کمتری n تا آنجایی که امکان دارد مقرون به صرفه است. در واقع استفاده از تعداد بالاتری n هیچ مزیتی نخواهد داشت. در ابتدا مقادیر $a = b = c = 1$ را برای شکل ۱.۳ ثابت نگه می‌داریم و جواب معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر برای نشان دادن جواب به نمایش می‌گذاریم. همان طور که در شکل ۱.۳ مشاهده می‌شود، جواب‌ها با در نظر گرفتن نقطه $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ متقارن هستند، که منطبق با آن چیزی است که در قضایای اصلی در مرجع [۴۸، ۴۹] مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجایی که جواب‌های عددی این تقارن را به نمایش می‌گذارند، قابل توجه است که جواب‌های بدست آمده قابل قبول هستند. در شکل ۲.۳ متوجه می‌شویم که با افزایش مقدار ضریب ناپیوستگی C_f و تراکم ρ ، کاهشی در میزان حرکت نتیجه

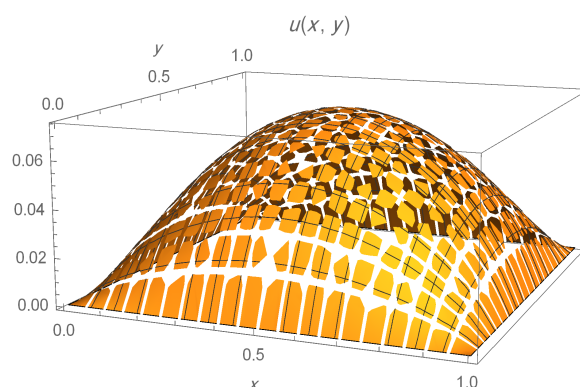
می‌شود. همچنین در شکل ۳.۳ افزایش چسبندگی مایعات θ ، کاهش حرکت را حاصل می‌کند. شکل ۴.۳ نشان می‌دهد که با افزایش گرادیان فشار کاربردی G ، افزایشی در حرکت رخ خواهد داد. از شکل ۵.۳ نتیجه می‌شود افزایش نفوذ پذیری K ، افزایش حرکت را خواهیم داشت. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش چسبندگی تاثیرگذار $\bar{\theta}$ ، کاهش حرکت را در شکل ۶.۳ دیده می‌شود. فرض کنید $E(x, y)$ بیانگر خطای مانده در نقطه‌ای باشد، به طوری که با استفاده از جواب بدست آمده برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بدست می‌آید. در جداول یک تا چهار خطای مانده را برای مقادیر مختلف پارامترهای فیزیکی ارائه می‌کند، مقادیر خیلی پایین خطای گزارش شده در نتایج عددی، دقت روش را بیان می‌کند و قابل توجه است که فقط با بکارگیری $n = 20$ نقطه می‌توان به این خطای قابل قبول دست یافت.

۵.۳ نتیجه‌گیری

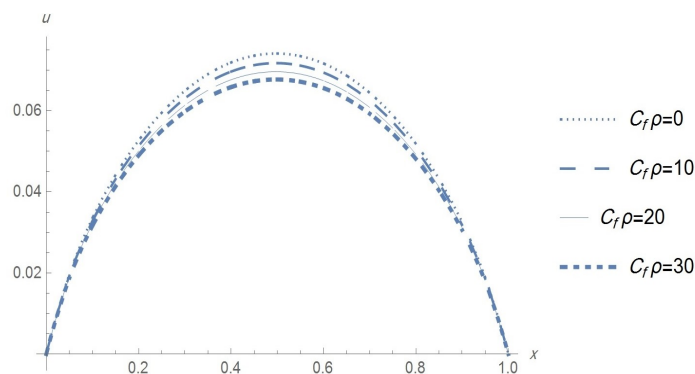
در این فصل یک روش عددی بر پایه‌ی روش هسته بازتولیدی برای یافتن جواب معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر پیشنهاد شده است. با توجه به اثبات صورت گرفته، جواب عددی مقارنی محاسبه شد که دارای دقت قابل قبولی با استفاده از حداقل میزان محاسبات بود. پایین بودن میزان خطای مانده نشانگر دقت و کارایی روش ارائه شده است. با در نظر گرفتن نتایج فیزیکی بدست آمده از حل عددی معادله حرکت برینکمن-فورچ‌هیمر می‌توان مشاهده کرد که افزایش ضریب ناپیوستگی C_f ، و تراکم ρ ، منجر به کاهش جریان می‌شود. به طور مشابه، افزایش چسبندگی مایعات θ ، و یا چسبندگی تاثیرگذار $\bar{\theta}$ ، باعث کاهش جریان خواهد شد. همچنین، افزایش گرادیان فشار کاربردی G ، و یا نفوذ پذیری K ، جریان را نیز افزایش می‌دهد. روش عددی بر اساس روش هسته بازتولیدی، روشی کارا به جهت کاربرد، دقت، کارایی و اجرا حتی برای معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی است. بنابراین می‌توان انتظار داشت از این روش پیشنهادی برای سایر مسائل فیزیکی و علوم مهندسی نیز بهره برد.

جدول ۱.۳: نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف $C_f \rho$ ، هنگامی که $\theta = \tilde{\theta} = K = G = 1$.

	$C_f \rho = 0$		$C_f \rho = 20$	
	$u_{20}(x, y)$	$E(x, y)$	$u_{20}(x, y)$	$E(x, y)$
(0.1, 0.1)	0.01447	9.75321×10^{-13}	0.014285	4.72259×10^{-12}
(0.2, 0.2)	0.0366901	1.20511×10^{-12}	0.0359942	8.92969×10^{-12}
(0.3, 0.3)	0.0556543	1.95564×10^{-12}	0.0542968	1.34999×10^{-11}
(0.4, 0.4)	0.0677733	5.27087×10^{-14}	0.0658669	1.46839×10^{-11}
(0.5, 0.5)	0.0705882	1.22457×10^{-12}	0.0696372	1.50619×10^{-11}
(0.6, 0.6)	0.0673469	2.66004×10^{-12}	0.0654405	1.45846×10^{-11}
(0.7, 0.7)	0.0550001	2.69445×10^{-12}	0.0536418	1.28785×10^{-11}
(0.8, 0.8)	0.0361245	2.07409×10^{-13}	0.035427	9.98051×10^{-12}
(0.9, 0.9)	0.0142445	4.65672×10^{-13}	0.0140587	6.30578×10^{-12}



شکل ۱.۳: رسم جواب عددی u با $n = 20$ و مقادیر $a = b = c = 1$ را



شکل ۲.۳: رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف ضریب ناپیوستگی $C_f \rho$ ، که $\theta = \tilde{\theta} = K = G = 1$ و $y = 0.5$.

جدول ۲.۳: نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف G ، هنگامی که $C_f \rho = \theta = \tilde{\theta} = K = 1$.

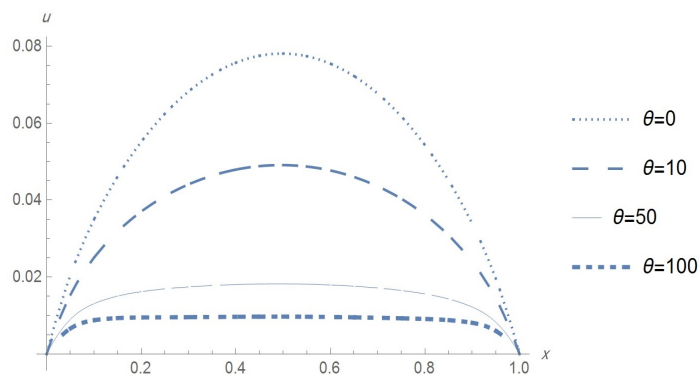
	$G = 1$		$G = 3$	
	$u_{20}(x, y)$	$E(x, y)$	$u_{20}(x, y)$	$E(x, y)$
(0.1, 0.1)	0.0146535	8.68177×10^{-12}	0.0583614	3.26487×10^{-11}
(0.2, 0.2)	0.0373818	1.69949×10^{-11}	0.148574	6.3851×10^{-11}
(0.3, 0.3)	0.057008	2.54815×10^{-11}	0.226165	9.59807×10^{-11}
(0.4, 0.4)	0.0696802	2.98771×10^{-11}	0.276089	1.11975×10^{-11}
(0.5, 0.5)	0.0738767	3.17812×10^{-11}	0.292577	1.18316×10^{-10}
(0.6, 0.6)	0.0692547	3.11562×10^{-11}	0.274385	1.1518×10^{-10}
(0.7, 0.7)	0.0563558	2.74081×10^{-11}	0.223553	1.00745×10^{-11}
(0.8, 0.8)	0.0368184	2.0859×10^{-11}	0.146317	7.63482×10^{-11}
(0.9, 0.9)	0.014429	1.22543×10^{-11}	0.057462	4.49387×10^{-12}

جدول ۳.۳: نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف $\tilde{\theta} = 0.1$ ، $C_f \rho = \theta = K = G = 1$.

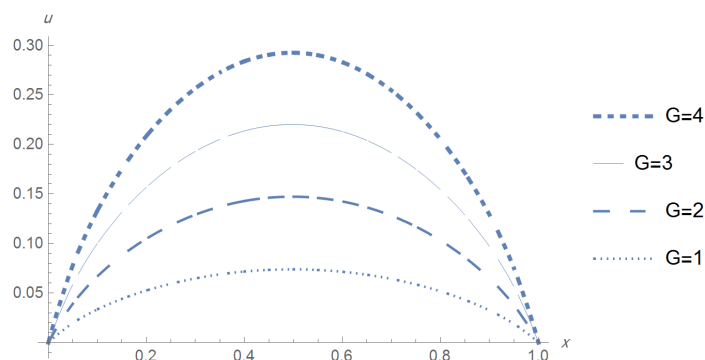
	$u_{20}(x, y)$	$E(x, y)$
(0.1, 0.1)	0.111769	1.11769×10^{-13}
(0.2, 0.2)	0.255228	2.55228×10^{-12}
(0.3, 0.3)	0.356909	1.05846×10^{-11}
(0.4, 0.4)	0.412521	3.36746×10^{-11}
(0.5, 0.5)	0.428655	2.39377×10^{-11}
(0.6, 0.6)	0.409029	1.30158×10^{-11}
(0.7, 0.7)	0.351419	1.93544×10^{-12}
(0.8, 0.8)	0.250309	1.687×10^{-11}
(0.9, 0.9)	0.109735	5.80316×10^{-12}

جدول ۴.۳: نتایج عددی و مقدار خطای مانده به ازای مقادیر مختلف K ، هنگامی که $C_f \rho = \theta = \tilde{\theta} = G = 1$.

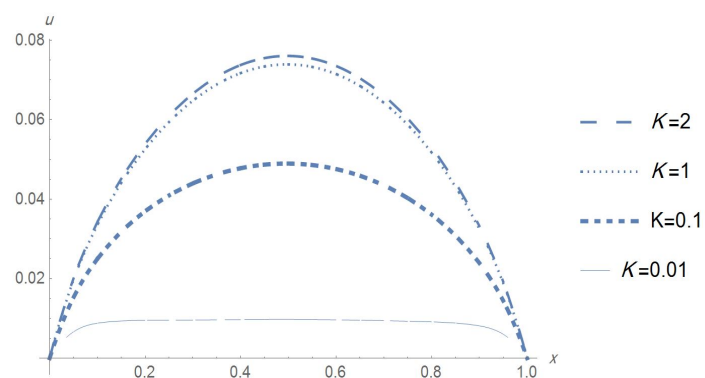
	$K = 0.1$		$K = 0.01$	
	$u_{20}(x, y)$	$E(x, y)$	$u_{20}(x, y)$	$E(x, y)$
(0.1, 0.1)	0.0117385	1.20708×10^{-12}	0.00522177	3.13433×10^{-11}
(0.2, 0.2)	0.0276174	3.152×10^{-12}	0.00861144	9.78217×10^{-11}
(0.3, 0.3)	0.0396899	2.70801×10^{-12}	0.0096053	1.63962×10^{-11}
(0.4, 0.4)	0.0467575	3.7003×10^{-12}	0.0097472	2.1366×10^{-10}
(0.5, 0.5)	0.0489266	3.84935×10^{-12}	0.00971388	2.45407×10^{-10}
(0.6, 0.6)	0.046384	2.7731×10^{-12}	0.00967073	2.31175×10^{-10}
(0.7, 0.7)	0.0391102	2.33819×10^{-12}	0.0094649	1.84931×10^{-10}
(0.8, 0.8)	0.027107	2.89662×10^{-12}	0.00845328	1.16587×10^{-10}
(0.9, 0.9)	0.0115308	5.10973×10^{-13}	0.00513787	4.10582×10^{-11}



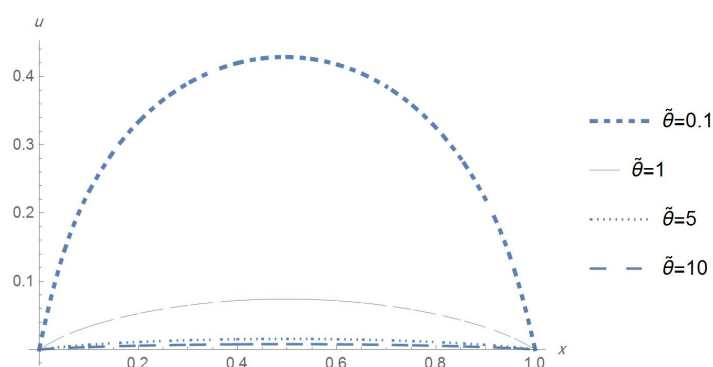
شکل ۳.۳: رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف چسبندگی مایعات، θ ، که $C_f \rho = \tilde{\theta} = K = G = 1$ و $y = 0.5$.



شکل ۴.۳: رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف گرادیان فشار کاربردی، G ، که $C_f \rho = \theta = \tilde{\theta} = K = 1$ و $y = 0.5$.



شکل ۵.۳: رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف نفوذ پذیری، K ، که $C_f \rho = \theta = \tilde{\theta} = G = 1$ و $y = 0.5$.



شکل ۶.۳: رسم جواب عددی u برای مقادیر مختلف چسبندگی تاثیرگذار، $\tilde{\theta}$ ، که $C_f \rho = \theta = K = G = 1$ و $y = 0.5$.

فصل ۴

روش هسته بازتولیدی برای حل عددی معادله ساین-گوردن با شرایط اولیه

۱.۴ مقدمه

معادله ساین-گوردن اولین بار توسط ادموند بور^۱ در سال ۱۸۶۲ برای بررسی سطوح منحنی منفی ثابت همانند هیپربولوئید^۲ معرفی شد. بعد از آن برای مدتی استفاده‌ای از این معادله نشد، اما بعد آن دو دانشمند به منظور مطالعه جابه‌جایی کریستال‌ها از این معادله استفاده کردند. در واقع در سال ۱۹۳۹ به عنوان یک نوع از معادله کلین-گوردن^۳ در نظر گرفته شد، که در معادله مورد بحث به جای عبارت خطی در کلین-گوردن از $\sin$ بهره برده شده است. معادله ساین-گوردن در بسیاری از زمینه‌های علمی هم چون انتشار فلکسون در اتصالات جوزفسون بین دو ابر رسانا، حرکت پاندول سفت و سخت متصل به یک سیم کشی، حالت جامد فیزیکی، اپتیکی غیرخطی و نشتی در فلزات مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵۰]. اخیراً معادله ساین-گوردن با استفاده از روش‌های تقریبی مختلفی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است [۵۰].

در این فصل از رساله قصد داریم یک الگوریتم قابل اعتماد بر اساس فضای هسته بازتولیدی هیلبرت برای یافتن راه حل تحلیلی تقریبی معادله ساین-گوردن ارائه کنیم. این معادله به فرم زیر بیان می‌شود

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + k \sin(u) = 0, \quad (1.4)$$

که c و k مقادیر ثابت هستند. به منظور حل این معادله قصد داریم شرایط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ و $u_t(x, 0) = g(x)$ را به ازای $f(x)$ و $g(x)$ دلخواه در نظر بگیریم و اقدام به حل این معادله بر پایه‌ی هسته بازتولیدی می‌کنیم. از دیدگاه آنالیز عددی این روش قابلیت‌ها و فوایدی خواهد شد، اولاً، به ازای فضاهای به اندازه کافی بزرگ می‌توان یک جواب تقریبی برای معادله داده شده محاسبه

^۱Edmond Bour

^۲hyperboloid

^۳Klein-Gordon

نمود. همچنین، تقریب بدست آمده از جواب مسئله بسیار کارا می باشد و به جهت نوع ارائه آن قابلیت مشتق گیری و انتگرال گیری از آن وجود خواهد داشت. در نهایت، فرآیند محاسباتی آن کاملاً مشخص است، به طوری که کارایی و دقت قابل قبولی از خود نشان می دهد.

۲.۴ روش هسته بازتولیدی

در این بخش به حل و بررسی معادله (۱.۴)، با در نظر گرفتن شرایط اولیه ای ذکر شده خواهیم پرداخت. بدین منظور به جهت به کار گیری روش هسته بازتولیدی در ابتدا نیاز به همگن سازی شرایط اولیه داریم. بنابراین تابع زیر را به عنوان یک تغییر متغیر مناسب معرفی می کنیم

$$u(x, t) = u(x, t) + f(x) + g(x)t,$$

در ادامه می توان با استفاده از آن معادله (۱.۴) را با شرایط اولیه همگن به فرم زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \vartheta_{tt} - c^2(\vartheta_{xx} + f_{xx} + g_{xx}t) + k \sin(\vartheta(x, t) + f(x) + g(x)) &= 0, \\ \vartheta(x, 0) &= 0, \quad \vartheta_t(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

همچنین قابل توجه است که دامنه مورد بحث برای حل معادله به صورت $\Phi = [0, X] \times [0, T]$ است، اما بدون آن که به کلیت مسئله خللی وارد شود می توان با تغییر متغیر مناسب دامنه مورد بحث را $\Phi = [0, 1] \times [0, 1]$ در نظر گرفت و اقدام به حل مسئله کرد.

با در نظر گرفتن دامنه x و t و همچنین مرتبه مشتق مورد استفاده شده، نیاز داریم با استفاده از تعاریف بیان شده در فصل یک ۷.۱، فضای $\omega_2^3[0, 1]$ و ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ را معرفی کنیم

$$\omega_2^3[0, 1] = \{\nu(x) \mid \nu^{(2)}(x) \text{ مطلق است}, \nu^{(3)}(x) \in L^2[0, 1]\},$$

و

$${}^0\omega_2^3[0, 1] = \{\nu(t) \mid \nu^{(2)}(t) \text{ مطلق است}, \nu^{(3)}(t) \in L^2[0, 1], \nu(0) = \nu_t(0) = 0\}.$$

حال می توان با استفاده از تعریف ۸.۱، ضرب داخلی و نرم مخصوص به فضاهای مورد بحث را به فرم زیر تعریف کرد

$$\langle \nu_1, \nu_2 \rangle_{\omega_2^3[0, 1]} = \sum_{i=0}^2 \nu_1^{(i)}(0) \nu_2^{(i)}(0) + \int_0^1 \nu_1^{(3)}(x) \nu_2^{(3)}(x) dx, \quad \|\nu\|_{\omega_2^3} = \sqrt{\langle \nu, \nu \rangle_{\omega_2^3}}. \quad (3.4)$$

با فرض این که $R_\zeta(x)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^3[0, 1]$ باشد، در این صورت به ازای هر $\zeta \in [0, 1]$ دلخواه ولی از این به بعد ثابت و هر $g(x) \in \omega_2^3[0, 1]$ طبق تعریف هسته بازتولیدی $R_\zeta(x)$ باید در شرط زیر صدق کند

$$\langle g(x), R_\zeta(x) \rangle_{\omega_2^3[0, 1]} = g(\zeta). \quad (4.4)$$

و همچنین این ویژگی و تعریف در فضای هسته بازتولیدی در فضای ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ نیز برقرار است (۸.۳)، با فرض این که $\kappa_\eta(t)$ را تابع هسته بازتولید این فضا در نظر بگیریم. حال با اعمال (۳.۴) و (۸.۳)

و نیز با استفاده از روشی مشابه به روش ارائه شده در فصل اول می‌توان هسته بازتولیدی $R_\zeta(x)$ و $\kappa_\eta(t)$ را به فرم زیر بدست آورد

$$R_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{120} \left(120 + \zeta^5 + 10x^2\zeta^2(3 + \zeta) - 5x\zeta(-24 + \zeta^3) \right), & x > \zeta, \\ \frac{1}{120} \left(120 + x^5 - 5x(-24 + x^3)\zeta + 10x^2(3 + x)\zeta^2 \right), & x \leq \zeta, \end{cases}$$

و

$$\kappa_\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{120} \eta^2 \left(-5t\eta^2 + \eta^3 + 10t^2(3 + \eta) \right), & t > \eta, \\ \frac{1}{120} t^2 \left(t^3 - 5t^2\eta + 10(3 + t)\eta^2 \right), & t \leq \eta. \end{cases}$$

حال با در نظر گرفتن معادله (۲.۴) احتیاج به تعریف فضای ${}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi)$ با استفاده از تعریف ۱۹.۱ داریم، که به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\begin{aligned} {}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi) &= \omega_2^3[0, 1] \times {}^0\omega_2^3[0, 1] \\ &= \left\{ \vartheta(x, t) \mid \frac{\partial^4 \vartheta(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} \Phi \text{ در پیوسته کامل است}, \frac{\partial^6 \vartheta(x, t)}{\partial x^3 \partial t^3} \in L^2(\Phi), \right. \\ &\quad \left. \vartheta(x, 0) = \vartheta_t(x, 0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

با توجه به ضرب داخلی مورد نیاز برای فضای ${}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi)$ از تعریف ۲۰.۱ استفاده کرده و ضرب داخلی تعریف شده روی این فضا را به فرم زیر بیان می‌کنیم

$$\begin{aligned} \langle \vartheta(x, t), v(x, y) \rangle_{{}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi)} &= \sum_{i=0}^2 \int_0^1 \left[\frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \vartheta(0, t) \frac{\partial^3}{\partial t^3} \frac{\partial^i}{\partial x^i} v(0, t) \right] dt \\ &\quad + \sum_{j=0}^2 \left\langle \frac{\partial^j}{\partial t^j} \vartheta(x, 0), \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x, 0) \right\rangle_{{}^0\omega_2^3} \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \vartheta(x, t) \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} v(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه ۹.۴.۱ می‌توان هسته بازتولیدی فضای ${}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi) = \omega_2^3[0, 1] \times {}^0\omega_2^3[0, 1]$ را به فرم زیر تعریف کرد

$$\Psi_{(\zeta, \eta)}(x, t) = R_\zeta(x) \kappa_\eta(t), \quad (5.4)$$

که $R_\zeta(x)$ و $\kappa_\eta(t)$ به ترتیب هسته بازتولیدی فضاهای $\omega_2^3[0, 1]$ و ${}^0\omega_2^3[0, 1]$ هستند. همچنین می‌توان فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ همانند $\omega_2^{(3,3)}(\Phi)$ تعریف کرد. فرض کنیم $\Upsilon_{(\zeta, \eta)}(x, t)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ باشد، بنابراین طبق (۱.۴) عملگر خطی

$$\mathcal{L} : {}^0\omega_2^{(3,3)}(\Phi) \longrightarrow {}^0\omega_2^{(1,1)}(\Phi),$$

به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\mathcal{L}\vartheta)(x, t) \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vartheta(x, t) - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vartheta(x, t), \quad (6.4)$$

$$\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t)) \equiv c^2 f_{xx} + c^2 g_{xx} t + k \sin(\vartheta(x, t) + f(x) + g(x)). \quad (7.4)$$

حال می‌توان (۱.۴) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد

$$\mathcal{L}\vartheta(x, t) = \mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t)), \quad \vartheta(x, 0) = \vartheta_t(x, 0) = 0. \quad (۸.۴)$$

در ادامه قرار دهیم $\varphi_i(x, t) = \Upsilon_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ، که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است. فرض کنید $\mathcal{L}^*$ عملگر الحاقی $\mathcal{L}$ باشد و تعریف کنیم

$$\Omega_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t). \quad (۹.۴)$$

با توجه به مفروضات در نظر گرفته شده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد، که اثباتی همانند قضیه ۱.۲.۳ خواهد داشت.

قضیه ۱.۲.۴. اگر $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد، آن‌گاه $\{\Omega_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل در فضای ${}^0\omega_2^{(3,3)}\Phi$ است.

۳.۴ حل معادله ساین-گوردن

در این بخش به بررسی معادله ساین-گوردن خواهیم پرداخت، به طوری که بتوان روش‌هایی برای حل معادله (۲.۴) پیشنهاد نمود. قصد داریم دو روش را بیان کنیم، هر دو روش بر اساس روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت خواهد بود و تفاوت آن‌ها در کاربرد فرآیند گرام اشمیت است. بدین منظور ابتدا روش حل را بدون استفاده از فرآیند متعامد سازی بررسی خواهیم کرد و در نهایت معادله (۲.۴) را به روش کلاسیک هسته بازتولیدی حل می‌کنیم.

۱.۳.۴ روش حل معادله (۲.۴) بدون فرآیند گرام اشمیت

در این قسمت یک الگوریتم کارآمد برای حل معادله (۱.۴) بر پایه فضای هسته بازتولید ارائه می‌کنیم، بدین منظور از کاربرد فرآیند گرام اشمیت استفاده نخواهیم کرد. به منظور یافتن جواب معادله (۱.۴) از قضیه زیر بهره می‌بریم.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ یک مجموعه چگال باشد. اگر معادله (۱.۴) دارای جواب یکتا باشد، آن‌گاه جواب تقریبی مسئله به فرم زیر بیان می‌شود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Omega_i(x, t), \quad (۱۰.۴)$$

که α_i ها ضرایبی هستند، که با استفاده از حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی $B\alpha = \mathcal{F}$ تعیین می‌شوند، که

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^T, \quad B = [\mathcal{L}\Omega_i(x_j, t_j)] \quad i, j = 1, 2, \dots$$

و

$$\mathcal{F} = [\mathcal{F}(x_1, t_1, \vartheta(x_1, t_1)), \mathcal{F}(x_2, t_2, \vartheta(x_2, t_2)), \dots]^T.$$

برهان. با توجه به قضیه ۱.۲.۴ جواب مسئله می‌تواند به صورت (۱.۰.۴) نمایش داده شود، به طوری که

$$\begin{aligned}\langle \Omega_j(x, t), \Omega_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} &= \langle \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t), \Omega_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} = \langle \varphi_j(x, t), \mathcal{L} \Omega_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \\ &= \mathcal{L} \Omega_i(x_j, t_j),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\langle \vartheta(x, t), \Omega_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} &= \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} = \langle \mathcal{L} \vartheta(x, t), \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \\ &= \mathcal{F}(x_j, t_j, \vartheta(x_j, t_j)).\end{aligned}$$

در نتیجه طبق بهترین تقریب در فضای هیلبرت [۴۷]، ضرایب α_i با حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی $B\alpha = \mathcal{F}$ تعیین می‌شود و اثبات کامل است. $\square$

۲.۳.۴ روش حل معادله (۲.۴) با استفاده از فرآیند گرام اشمیت

در این بخش به بررسی حل معادله ساین-گوردن به روش کلاسیک هسته بازتولیدی فضای هیلبرت می‌پردازیم. این روش بر پایه فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت استوار است، هر چند که این پایه‌های متعامد مزیت‌هایی خواهند داشت اما فرآیند متعامد سازی بسیار زمان‌بر است. به جهت مطالعه روش حل معادله (۲.۴) با استفاده از این روش ابتدا باید پایه‌های متعامد سیستم $\{\bar{\Omega}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ از $0\omega_2^{(3,3)}$ که از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت بر روی $\{\Omega_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ بدست آمده است را به صورت زیر خواهیم داشت

$$\bar{\Omega}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \Omega_k(x, t), \quad (11.4)$$

به طوری که ضرایب متعامدسازی هستند. از قضیه زیر به منظور یافتن جواب معادله (۱.۴) استفاده می‌کنیم

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد. اگر معادله (۱.۴) دارای جواب یکتا باشد، آن‌گاه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k)) \bar{\Omega}_i(x, t). \quad (12.4)$$

برهان. با فرض آن که $\vartheta(x, t)$ جواب معادله (۱.۴) باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲.۴، $\vartheta(x, t)$ می‌تواند

توسط سری فوریه به فرم زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned}\vartheta(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vartheta(x, t), \bar{\Omega}_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \bar{\Omega}_i(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \Omega_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \bar{\Omega}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \bar{\Omega}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \mathcal{L} \vartheta(x, t), \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,3)}} \bar{\Omega}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k)) \bar{\Omega}_i(x, t),\end{aligned}$$

اثبات کامل است. $\square$

با استفاده از برش سری (۱۲.۴)، تقریبی از جواب $\vartheta(x, t)$ را برای m جمله می توان محاسبه نمود.

۴.۴ نتایج عددی

به منظور بررسی و مشخص کردن کارایی و دقت روش عددی پیشنهادی، روش ارائه شده را با استفاده از پارامترها و توابع اولیه خاصی که به طور دلخواه انتخاب شده اند را اجرا خواهیم کرد. البته قابل توجه است که با توجه به نوآوری در زمینه به کارگیری روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت بدون استفاده از روش متعامد سازی گرام اشمیت، روش پیشنهادی اول برای تقریب زدن جواب مسئله ساین-گوردن به کار خواهیم گرفت. در جدول داده شده $E(x, t)$ بیانگر میزان خطای مانده در نقطه $(x, t) \in \Phi$ است. بنابراین برای حل معادله (۲.۴) مقادیر ثابت c, k و همچنین توابع اولیه $f(x)$ و $g(x)$ را نظر خواهیم گرفت. با در نظر گرفتن نتایج بدست آمده که در جدول گزارش شده است، قابلیت، کارایی و دقت روش پیشنهادی نشان داده می شود چرا که تنها با بکارگیری $n = 20$ به نتایج و دقت قابل قبولی دست یافته ایم و اگر همین معادله را با روش کلاسیک حل کنیم احتیاج به استفاده از تعداد نقاط خیلی بیشتری و محاسبات طولانی تری برای دست یافتن به همین میزان دقت داریم.

۵.۴ نتیجه گیری

در این فصل از رساله دو روش بر اساس روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادله ساین-گوردن با شرایط اولیه پیشنهاد شد. هر دو روش ارائه شده قابلیت محاسبه جواب تقریبی مسئله را دارند، اما روش اول به دلیل پرهیز از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت حجم محاسبات و در نتیجه زمان اجرای آن به شدت کاهش پیدا می کند. در نتیجه برای حل معادلات با مشتقات جزئی کاربرد روش اول بسیار مقرون به صرفه تر می باشد.

جدول ۱.۴: نتایج عددی و گزارش خطای مانده

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.392335	1.44671×10^{-10}
(0.2, 0.2)	0.772983	2.05276×10^{-9}
(0.3, 0.3)	1.12962	1.83768×10^{-9}
(0.4, 0.4)	1.44976	2.60293×10^{-9}
(0.5, 0.5)	1.72225	2.28228×10^{-9}
(0.6, 0.6)	1.93768	3.07368×10^{-9}
(0.7, 0.7)	2.08814	2.50576×10^{-9}
(0.8, 0.8)	2.1665	2.63768×10^{-9}
(0.9, 0.9)	2.16542	2.32481×10^{-9}

فصل ۵

حل مسئله مقدار اولیه دیم با استفاده از روش هسته بازتولیدی

۱.۵ مقدمه

معادله دیم یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مهم است که کاربردهای فراوانی در سیستم‌های فیزیکی دارد. این معادله اولین بار در سال ۱۹۷۳-۱۹۷۴ توسط هری دیم^۱ کشف شد و اولین کاربردهای آن در مقاله کروسکال^۲ در سال ۱۹۷۵ به چاپ رسید [۵۱]. این معادله یک نمونه از یکپارچگی سیستم است که به معادله KdV نسبت داده می‌شود و توسط عملگر تبدیل استرم-لیوویل^۳ مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵۲، ۵۳]. نشان داده می‌شود کاربرد این مدل برای مطالعه دینامیک سیالات در امواج آب استفاده فراوانی دارد. بعلاوه، این معادله در مطالعه مسئله سافمن-تیلور^۴ که به بررسی مشکل مربوط به تنش سطحی است ایجاد می‌شود [۵۴]. همچنین معادله دیم در فضای دو بعدی به مطالعه معادله انتگرالی KP مرتبط است [۵۵]. این موارد از کاربرد معادله دیم و نیز سایر استفاده‌های آن در مقالات [۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱] مورد بحث کامل قرار گرفته شده است.

معادله دیم روی دامنه $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ ، به فرم زیر بیان می‌شود

$$u_t = u^3 u_{xxx}. \quad (۱.۵)$$

در این فصل از رساله به دنبال یک روش برای حل مسئله مقدار اولیه دیم هستیم، به طوری که در شرط اولیه می‌توان از تابع دلخواه $f(x)$ با در نظر گرفتن شرط لازم مشتق‌پذیری به صورت زیر استفاده کرد

$$u(x, 0) = f(x). \quad (۲.۵)$$

به ازای تابع خاصی از $f(x)$ به عنوان شرط اولیه می‌توان جواب دقیق معادله دیم به صورت $u(x, t) = (-3c[x + c^2t])^{2/3}$ بدست آورد [۶۲].

^۱Harry Dym

^۲Kruskal

^۳Sturm-Liouville

^۴Saffman-Taylor

در این فصل یک تکنیک عددی بر پایه روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت به منظور حل تقریبی معادله دیم معرفی خواهیم نمود. این روش عددی برای بسیاری از سیستم‌های غیرخطی با شرایط مرزی و اولیه کاربرد فراوانی دارد [۲۷، ۲۸، ۲۹].

۲.۵ روش هسته بازتولیدی

قصد داریم از یک فضای هسته بازتولیدی مناسب برای حل معادله (۱.۵) با در نظر گرفتن شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ استفاده کنیم. بدین منظور برای بهره بردن از این روش عددی ابتدا باید شرط اولیه را همگن نماییم. در نتیجه تغییر متغیر $u(x, t) = \vartheta(x, t) + f(x)$ را تعریف می‌کنیم و آن را بر روی معادله (۱.۵) و شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ اعمال می‌کنیم و در نهایت معادله به فرم زیر بازنویسی می‌شود

$$\vartheta_t = [\vartheta(x, t) + f(x)]^3 \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \vartheta(x, t) + f'''(x) \right], \quad (3.5)$$

$$\vartheta(x, 0) = 0.$$

همان طور که بیان شد دامنه مورد بحث برای مسئله به صورت $\Phi = [0, X] \times [0, \infty)$ تعریف شده است، که بدون آن که به کلیت مبحث خللی ایجاد شود می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب مسئله را در دامنه $\Phi = [0, 1] \times [0, \infty)$ مورد بحث و بررسی قرار داد. در ابتدا احتیاج به تعریف فضای هسته بازتولیدی داریم، که طبق تعریف ارائه شده در فصل اول ۱۷.۱ با توجه به داشتن شرط اولیه فضای مورد نیاز به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}^0\omega_2^2([0, \infty)) = \{v(t) \mid v(t), v'(t) \text{ مطلق است}\},$$

$$v, v'(t), v''(t) \in L^2([0, \infty)), v(0) = 0\}.$$

همچنین ضرب داخلی مربوط به این فضا با توجه به تعریف ارائه شده در فصل اول ۱۸.۱ به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{0\omega_2^2[0, \infty)} = \int_0^\infty \{4v_1(t)v_2(t) + 5v_1'(t)v_2'(t) + v_1''(t)v_2''(t)\} dt,$$

$$\text{لذا دارای نرم } \|v\|_{\omega_2^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\omega_2^2}} \text{ هستیم.}$$

با استفاده از چگونگی تعریف فضای هسته بازتولید با دامنه کراندار ۷.۱ و مرتبه مشتق‌پذیری تابع می‌توان فضای $\omega_2^4([0, 1])$ را به فرم زیر تعریف کرد

$$\omega_2^4([0, 1]) = \{v(x) \mid v^{(3)}(x) \text{ مطلق است}, v^{(4)}(x) \in L^2([0, 1])\}.$$

ضرب داخلی و نرم مخصوص به فضای ${}^0\omega_2^4[0, 1]$ با توجه به تعریف ۸.۱ به فرم زیر است

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\omega_2^4} = \sum_{i=0}^3 v_1^{(i)}(0)v_2^{(i)}(0) + \int_0^1 v_1^{(4)}(x)v_2^{(4)}(x)dx, \quad \|v\|_{\omega_2^4} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\omega_2^4}}.$$

با بهره بردن از این ویژگی اساسی هسته بازتولیدی

$$u(\cdot) = \langle u(x), R(x, \cdot) \rangle_\omega. \quad (4.5)$$

و نیز با توجه به تعریف ضرب داخلی مخصوص هر فضای می‌توان تابع هسته بازتولید را برای فضاهای $\omega_2^4([0, 1])$ و $\omega_2^2([0, \infty))$ بدست آورد، در نتیجه $R_\zeta(x)$ تابع هسته بازتولید فضای $\omega_2^4([0, 1])$ به صورت

$$R_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{5040} \left(-\zeta^7 + 35(\zeta + 4)\zeta^3 x^3 - 21(\zeta^3 - 60)\zeta^2 x^2 + 7(\zeta^5 + 720)\zeta x + 5040 \right), & x \leq \zeta, \\ \frac{1}{5040} \left(-x^7 + 7\zeta(x^5 + 720)x + 35\zeta^3(x + 4)x^3 - 21\zeta^2(x^3 - 60)x^2 + 5040 \right), & x > \zeta, \end{cases}$$

است و $K_\eta(t)$ تابع هسته بازتولید فضای $\omega_2^2([0, \infty))$ را به فرم زیر داریم

$$K_\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{12} \left(e^{-2\eta-2t} - \frac{1}{12} e^{2t-2\eta} - \frac{e^{-\eta-t}}{6} + \frac{e^{t-\eta}}{6} \right), & t \leq \eta, \\ \frac{1}{6} \left((e^\eta - e^{-\eta}) e^{-t} - \frac{1}{12} (e^{4\eta} - 1) e^{-2\eta-2t} \right), & t > \eta. \end{cases}$$

با توجه به این نکته که مسئله مقدار اولیه مورد بحث در یک فضای دو متغیره مطرح شده است، باید فضای توابع دوتایی مربوط به فضای $\omega_2^{(4,2)}(\Phi)$ را با استفاده از تعریف ۱۹.۱ به فرم زیر تعریف کرد

$$\begin{aligned} \omega_2^{(4,2)}(\Phi) &= \omega_2^4([0, 1]) \times \omega_2^2([0, \infty)) \\ &= \left\{ u(x, t) \mid \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^3 \partial t} \text{ در } \Phi, \frac{\partial^6 u(x, t)}{\partial x^4 \partial t^2} \in L^2(\Phi), \right. \\ &\quad \left. u(x, 0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

با توجه به تعریف فضای مورد استفاده $\omega_2^{(4,2)}(\Phi) = \omega_2^4([0, 1]) \times \omega_2^2([0, \infty))$ و همچنین قضیه ۹.۴.۱ هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^{(4,2)}(\Phi)$ به صورت زیر بیان خواهد شد

$$\Omega_{(\zeta, \eta)}(x, t) = R_\zeta(x) \kappa_\eta(t), \quad (5.5)$$

می‌توان فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ همانند $\omega_2^{(4,2)}(\Phi)$ تعریف کرد و لذا فرض کنیم $\Upsilon_{(\zeta, \eta)}(x, t)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ باشد، بنابراین عملگر خطی

$$\mathcal{L} : \omega_2^{(4,2)}(\Phi) \longrightarrow \omega_2^{(1,1)}(\Phi),$$

به فرم زیر بیان می‌شود

$$(\mathcal{L}\vartheta)(x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \vartheta(x, t), \quad (6.5)$$

که

$$\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t), \partial_{xxx} \vartheta(x, t)) \equiv [\vartheta(x, t) + f(x)]^3 \left[\frac{\partial^3}{\partial x^3} \vartheta(x, t) + f'''(x) \right]. \quad (7.5)$$

حال می‌توان معادله (۳.۵) را بازنویسی کرد، که داریم

$$\mathcal{L}\vartheta(x, t) = \mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t), \partial_{xxx} \vartheta(x, t)), \quad (8.5)$$

$$\vartheta(x, 0) = 0.$$

در این صورت قرار دهیم $\varphi_i(x, t) = \Upsilon_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ، که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است. بعلاوه فرض می‌کنیم

$$\Psi_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t), \quad (9.5)$$

که $\mathcal{L}^*$ عملگر الحاقی $\mathcal{L}$ می‌باشد. حال با توجه به مفروضات ارائه شده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد
قضیه ۱.۲.۳. ۱.۲.۵. اگر $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد، آن گاه $\{\Psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل در فضای $\omega_2^{(4,2)}(\Phi)$ است.

۳.۵ حل عددی معادله دیم

برای حل معادله دیم بر اساس هسته بازتولیدی فضای هیلبرت دو راه پیش رو خواهیم داشت. روش کلاسیک آن استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت است، که در نتیجه آن مجبور به پرداخت هزینه محاسباتی زیادی و در ادامه صرف زمان زیادی به منظور یافتن جواب تقریبی معادله (۸.۵) هستیم. اما از جهت دیگر اثبات همگرایی بسیار مناسبی در ارتباط با آن می‌توان بدست آورد، که از لحاظ تئوری قوی خواهد بود. راه دوم حذف این فرآیند متعامد سازی و در نتیجه کاهش هزینه محاسباتی می‌باشد، که این امکان را ایجاد می‌کند با استفاده از حداقل تعداد نقاط مورد استفاده به بهترین پاسخ ممکن دست بیابیم.

۱.۳.۵ حل عددی معادله (۸.۵) بدون متعامد سازی

در این بخش روش تکراری بر پایه فضای بازتولیدی هسته ارائه می‌کنیم، که در آن از فرآیند گرام اشمیت استفاده نشود و در نتیجه هزینه محاسباتی روش کلاسیک به وسیله آن بهبود داده شود. بدین منظور برای یافتن جواب معادله (۸.۵) قضیه زیر را بیان می‌کنیم، که به وسیله آن می‌توان جواب مسئله مورد مطالعه را به خوبی و با دقت قابل قبولی تقریب زد.

قضیه ۱.۳.۵. با فرض این که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ یک مجموعه چگال باشد. اگر معادله (۸.۵) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب تقریبی مسئله مقدار اولیه دیم به فرم زیر بیان می‌شود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Psi_i(x, t), \quad (10.5)$$

به طوری که α_i ها ضرایبی هستند، که با استفاده از حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی $B\alpha = \mathcal{F}$ تعیین می‌شود، که

$$B = [\mathcal{L}\Psi_i(x_j, t_j)], \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^T,$$

و

$$\mathcal{F} = [\mathcal{F}(x_1, t_1, \vartheta(x_1, t_1), \partial_{xxx}\vartheta(x_1, t_1)), \mathcal{F}(x_2, t_2, \vartheta(x_2, t_2), \partial_{xxx}\vartheta(x_2, t_2)), \dots]^T.$$

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۲.۵ و روند اثباتی که در ادامه بیان می شود می توان جواب تقریبی معادله را به فرم (۱۰.۵) نمایش داد، در نتیجه داریم

$$\begin{aligned}\langle \Psi_j(x, t), \Psi_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} &= \langle \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t), \Psi_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} \\ &= \langle \varphi_j(x, t), \mathcal{L} \Psi_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \\ &= \mathcal{L} \Psi_i(x_j, t_j)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\langle \vartheta(x, t), \Psi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} &= \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} \\ &= \langle \mathcal{L} \vartheta(x, t), \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \\ &= \mathcal{F}(x_j, t_j, \vartheta(x_j, t_j), \partial_{xxx} \vartheta(x_j, t_j)).\end{aligned}$$

لذا طبق بهترین تقریب در فضای هیلبرت [۴۷]، ضرایب α_i با حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی $B\alpha = \mathcal{F}$ تعیین می شود و اثبات کامل است. $\square$

۲.۳.۵ حل عددی معادله (۸.۵) با متعامد سازی

در مقابل روش ارائه شده در قسمت قبل قصد داریم روش کلاسیک را برای حل این مسئله مقدار اولیه به کار ببریم. بنابراین چون نیاز به پایه های متعامد داریم باید فرآیند گرام اشمیت را به کار ببریم. در نتیجه $\{\bar{\Psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای $0\omega_2^{(4,2)}$ ، با اعمال فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت روی $\{\Psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ بدست آمده است. بنابراین می توان نوشت

$$\bar{\Psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \Psi_k(x, t), \quad (11.5)$$

که ضرایب متعامد سازی هستند. به منظور یافتن جواب معادله (۸.۵) قضیه زیر را داریم

قضیه ۲.۳.۵. فرض کنید $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد. اگر معادله (۸.۵) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k), \partial_{xxx} \vartheta(x_k, t_k)) \bar{\Psi}_i(x, t). \quad (12.5)$$

برهان. فرض کنید $\vartheta(x, t)$ جواب معادله (۸.۵) باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲.۵، $\vartheta(x, t)$ می تواند

توسط سری فوریه به فرم زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned}\vartheta(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vartheta(x, t), \bar{\Psi}_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \Psi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \mathcal{L} \vartheta(x, t), \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k), \partial_{xxx} \vartheta(x_k, t_k)) \bar{\Psi}_i(x, t),\end{aligned}$$

اثبات کامل است. $\square$

با استفاده از برش سری (۱۲.۵)، تقریبی از جواب $\vartheta(x, t)$ را برای m جمله به فرم زیر می‌توان نمایش داد

$$\vartheta_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t), \quad (13.5)$$

که

$$\kappa_i = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k), \partial_{xxx} \vartheta(x_k, t_k)). \quad (14.5)$$

۴.۵ آنالیز همگرایی روش

در این بخش ویژگی‌های همگرایی الگوریتم دوم مورد بحث قرار خواهد گرفت. به هر حال قابل توجه است که هر تابع پایه‌ای استفاده شده در تقریب جواب با به کارگیری روش اول نیز می‌تواند متعامد شود و در نتیجه نتایج همگرایی که بدست می‌آید می‌تواند برای روش اول نیز مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین همگرایی دنباله $\vartheta_m(x, t)$ که تقریبی از جواب مسئله دیم است در قضایای زیر مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

قضیه ۱.۴.۵. اگر $\vartheta(x, t) \in \Phi$ باشد، آنگاه ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\begin{aligned}|\vartheta(x, t)| &\leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}, & |\vartheta_t(x, t)| &\leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}, \\ |\vartheta_x(x, t)| &\leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}, & |\vartheta_{xxx}(x, t)| &\leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}, \\ |\vartheta_{xxxt}(x, t)| &\leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}.\end{aligned}$$

برهان. به ازای هر $(x, t) \in \Phi$ ، می‌توان نوشت

$$|\vartheta(x, t)| = |\langle \vartheta(\zeta, \eta), \Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta) \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}}| \leq \|\vartheta(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(4,2)}} \|\Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(4,2)}},$$

بنابراین ثابت $C_1 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|\vartheta(x, t)| \leq C_1 \|\vartheta(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}.$$

همچنین داریم

$$|\vartheta_x(x, t)| = \left| \left\langle \vartheta(\zeta, \eta), \frac{\partial}{\partial x} \Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta) \right\rangle \right|_{0\omega_2^{(4,2)}} \leq \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta) \right\|_{0\omega_2^{(4,2)}},$$

در این صورت ثابت $C_2 > 0$ وجود دارد که

$$|\vartheta_x(x, t)| \leq C_2 \|\vartheta(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}.$$

به طور مشابه می توان ثابت های $C_3, C_4, C_5 > 0$ را به نحوی تعریف کرد که در روابط زیر صدق کنند

$$|\vartheta_t(x, t)| \leq C_3 \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}, \quad |\vartheta_{xxx}(x, t)| \leq C_4 \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}},$$

و

$$|\vartheta_{xxxx}(x, t)| \leq C_5 \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}.$$

□ حال فرض کنید $C = \max\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$ باشد، آن گاه اثبات قضیه کامل است.

به عنوان نتیجه ای از قضیه بالا، می توان قضیه زیر را نوشت

قضیه ۲.۴.۵. اگر داشته باشیم $\vartheta_m(x, t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{0\omega_2^{(4,2)}}} \bar{\vartheta}(x, t)$ و $(x_m, t_m) \rightarrow (x, t)$ به طوری که $m \rightarrow \infty$ و همچنین $\|\vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}$ کراندار و $\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t), \partial_{xxx}\vartheta(x, t))$ پیوسته باشد، در این صورت

$$\mathcal{F}(x_m, t_m, \vartheta_{m-1}(x_m, t_m), \partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x_m, t_m)) \rightarrow \mathcal{F}(x, t, \bar{\vartheta}(x, t), \partial_{xxx}\bar{\vartheta}(x, t)),$$

وقتی که $m \rightarrow \infty$.

برهان. از آن جایی که

$$\begin{aligned} |\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \bar{\vartheta}(x, t)| &= |\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \vartheta_{m-1}(x, t) + \vartheta_{m-1}(x, t) - \bar{\vartheta}(x, t)| \\ &\leq |\partial_x \vartheta_{m-1}| |x_m - x| + |\partial_t \vartheta_{m-1}| |t_m - t| + |\vartheta_{m-1}(x, t) - \bar{\vartheta}(x, t)|, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} &|\partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \partial_{xxx}\bar{\vartheta}(x, t)| \\ &= |\partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x, t) + \partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x, t) - \partial_{xxx}\bar{\vartheta}(x, t)| \\ &\leq |\partial_{x^4}\vartheta_{m-1}| |x_m - x| + |\partial_{x^3t}\vartheta_{m-1}| |t_m - t| + |\partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x, t) - \partial_{xxx}\bar{\vartheta}(x, t)|, \end{aligned}$$

از شرط داده شده $\vartheta_m \xrightarrow{\|\cdot\|_{0\omega_2^{(4,2)}}} \bar{\vartheta}$ که $m \rightarrow \infty$ و با در نظر داشتن کراندار بودن $\|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(4,2)}}$ و قضیه ۱.۴.۵ به ازای هر $(x, t) \in \Phi$ ، داریم

$$|\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \bar{\vartheta}(x, t)| \rightarrow 0, \quad \text{و} \quad |\partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \partial_{xxx}\bar{\vartheta}(x, t)| \rightarrow 0,$$

که $m \rightarrow \infty$. پیوستگی $\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t), \partial_{xxx}\vartheta(x, t))$ نتیجه می دهد

$$\mathcal{F}(x_m, t_m, \vartheta_{m-1}(x_m, t_m), \partial_{xxx}\vartheta_{m-1}(x_m, t_m)) \rightarrow \mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t), \partial_{xxx}\vartheta(x, t)),$$

□ که $m \rightarrow \infty$ ، بنابراین اثبات قضیه کامل می شود.

قضیه ۳.۴.۵. فرض کنید $\|\vartheta_m(x, t)\|$ در (۱۳.۵) کراندار باشد. اگر $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد، آن گاه m مین جواب تقریبی $\vartheta_m(x, t)$ که از روش ارائه شده بدست می آید به جواب دقیق $\vartheta(x, t)$ معادله (۸.۵) همگرا است و

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t), \quad (15.5)$$

که κ_i توسط رابطه (۱۴.۵) داده شده است.

برهان. در ابتدا ثابت خواهیم کرد دنباله ϑ_m همگراست. با در نظر گرفتن معادله (۱۳.۵)، می توان استنتاج کرد که

$$\vartheta_{m+1}(x, t) = \vartheta_m(x, t) + \kappa_{m+1} \bar{\Psi}_{m+1}(x, t). \quad (16.5)$$

از تعامد $\{\bar{\Psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ نتیجه می گیریم

$$\|\vartheta_{m+1}\|_{0\omega_2^{(4,2)}} = \|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(4,2)}} + \kappa_{m+1}^2. \quad (17.5)$$

بنابراین برقرار است که

$$\|\vartheta_{m+1}\|_{0\omega_2^{(4,2)}} \geq \|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(4,2)}}.$$

با توجه به کرانداری $\|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(4,2)}}$ ، $\|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(4,2)}}$ همگراست و ثابت c وجود دارد به طوری که

$$\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i^2 = c.$$

لذا نتیجه می دهد که $\kappa_i \in l^2$ ، $i = 1, 2, \dots$ اگر $n > m$ و از تعامد $\vartheta_{m+1}(x, t) - \vartheta_m(x, t)$ استفاده کنیم، آن گاه داریم

$$\begin{aligned} & \|\vartheta_n(x, t) - \vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}^2 \\ &= \|\vartheta_n(x, t) - \vartheta_{n-1}(x, t) + \vartheta_{n-2}(x, t) + \dots + \vartheta_{m+1}(x, t) - \vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}^2 \\ &= \|\vartheta_n(x, t) - \vartheta_{n-1}(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}^2 + \dots + \|\vartheta_{m+1}(x, t) - \vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(4,2)}}^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^n \kappa_i^2 \rightarrow 0 \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

با توجه به کامل بودن فضای هیلبرت $0\omega_2^{(4,2)}$ نشان می دهد که $\bar{\vartheta} \xrightarrow{\|\cdot\|_{0\omega_2^{(4,2)}}} \vartheta_m$ وقتی $m \rightarrow \infty$. ثانياً، اثبات خواهیم کرد که $\bar{\vartheta}$ جواب معادله (۸.۵) است. بدین منظور، از معادله (۱۳.۵) نتیجه می گیریم

$$\bar{\vartheta}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t).$$

نظر به این که

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_m, t_m) &= \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \langle \mathcal{L}\bar{\Psi}_i, \varphi_m \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \langle \bar{\Psi}_i, \Psi_m \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}}, \end{aligned} \quad (18.5)$$

داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \rho_{mj}(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_m, t_m) &= \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \left\langle \bar{\Psi}_i, \sum_{j=1}^m \rho_{mj} \Psi_j \right\rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \langle \bar{\Psi}_i, \bar{\Psi}_m \rangle_{0\omega_2^{(4,2)}} = \kappa_m. \end{aligned} \quad (19.5)$$

اگر $m = 1$ باشد، در این صورت

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_1, t_1) = \mathcal{F}(x_1, t_1, \vartheta_0(x_1, t_1), \partial_{xxx}\vartheta_0(x_1, t_1)).$$

همچنین برای $m = 2$ ، داریم

$$\begin{aligned} \rho_{21}(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_1, t_1) + \rho_{22}(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_2, t_2) &= \rho_{21}\mathcal{F}(x_1, t_1, \vartheta_0(x_1, t_1), \partial_{xxx}\vartheta_0(x_1, t_1)) \\ &+ \rho_{22}\mathcal{F}(x_2, t_2, \vartheta_0(x_2, t_2), \partial_{xxx}\vartheta_0(x_2, t_2)). \end{aligned}$$

واضح است که $(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_2, t_2) = \mathcal{F}(x_2, t_2, \vartheta_0(x_2, t_2), \partial_{xxx}\vartheta_0(x_2, t_2))$. به طور کلی با استفاده از استقرا می توان نوشت

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_j, t_j) = \mathcal{F}(x_j, t_j, \vartheta_{j-1}(x_j, t_j), \partial_{xxx}\vartheta_{j-1}(x_j, t_j)). \quad (20.5)$$

برای هر $(\mu, \varrho) \in \Phi$ ، یک زیر دنباله $\{(x_{m_j}, t_{m_j})\}_{j=1}^{\infty}$ وجود دارد که به (μ, ϱ) همگراست، از آن جایی که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است. بنابراین با در نظر گرفتن دنباله ϑ_m و قضیه ۲.۴.۵ نتیجه می گیریم که

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(\mu, \varrho) = \mathcal{F}(\mu, \varrho, \bar{\vartheta}(\mu, \varrho), \partial_{xxx}\bar{\vartheta}(\mu, \varrho)). \quad (21.5)$$

که $\bar{\vartheta}(x, t)$ جواب معادله (۸.۵) است و

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t).$$

□

لذا اثبات کامل است.

قضیه ۴.۴.۵. فرض کنید $\vartheta(x, t)$ جواب معادله (۸.۵) و $\tau_m(x, t)$ خطای تقریبی بین $\vartheta_m(x, t)$ و $\vartheta(x, t)$ است. آن گاه خطای $\tau_m(x, t)$ یکنوا نزولی با نرم $\|\cdot\|_{0\omega_2^{(4,2)}}$ است.

برهان. از (۱۵.۵) و طبق اثبات قضیه ۳.۴.۵، داریم

$$\|\tau_m\|_{0\omega_2^{(4,2)}}^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t) \right\|_{0\omega_2^{(4,2)}}^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \kappa_i^2. \quad (22.5)$$

معادله (۲۲.۵) نشان می دهد که خطای τ_m یکنوا نزولی با تعریف نرم $\|\cdot\|_{0\omega_2^{(4,2)}}$ است. □

۵.۵ نتایج عددی

روش عددی پیشنهادی که در این فصل برای حل مسئله مقدار اولیه دیم ارائه شد باید از لحاظ عددی نیز مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور شرط اولیه خاصی را انتخاب می کنیم و نتایج عددی حاصل را گزارش خواهیم کرد. قابل توجه است که هر دو روش عددی ارائه شده قابلیت یافتن جواب تقریبی

مسئله را دارند و به جواب نهایی همگرا است، اما به دلیل صرفه جویی در زمان و اجرای محاسبات روش اول که از متعامد سازی گرام اشمیت استفاده نمی‌کند را به کار خواهیم گرفت. با به اختیار گرفتن فقط $n = 20$ می‌توان به دقت مناسبی دست یافت. در حالت کلی جواب دقیقی برای معادله دیم که به ازای هر تابع دلخواهی که در شرط اولیه صدق کند وجود ندارد. اما به منظور محقق ساختن میزان دقت جواب عددی پیشنهادی خطای مانده جواب تقریبی که از این روش بدست می‌آید را محاسبه می‌کنیم و از شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ متفاوتی برای مشخص کردن میزان کارایی روش بهره می‌بریم.

بنابراین $E(x, t)$ بیانگر خطای مانده در نقطه $(x, t) \in \Phi$ است، که در جدول‌های ۱.۵، ۲.۵، ۳.۵، ۴.۵ و ۵.۵ به همراه جواب تقریبی $u_n(x, t)$ مسئله برای شرط اولیه دلخواه $u(x, 0) = f(x)$ گزارش شده است. برای اطلاعات اولیه به کار رفته در جدول‌های ۱.۵-۵.۵، شکل مربوط به جواب‌ها نیز در اشکال ۱.۵-۵.۵ رسم شده است. قابل توجه است که در زمان محاسبه جواب تقریبی مسئله حداقل زمان به کار رفته است.

۶.۵ نتیجه‌گیری

در این فصل دو روش عددی برای حل مسئله مقدار اولیه دیم با به کارگیری روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت مورد بحث و بررسی قرار گرفته شد. جواب تقریبی که از هر دو روش حاصل می‌شود توسط یک سری به نمایش گذاشته می‌شود و با منقطع سازی آن می‌توان جواب مسئله را تقریب زد. دو روش ارائه شده در کاربرد فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت با یکدیگر متفاوت هستند، به طوری که در روش اول به دلیل کاهش شدید حجم محاسبات و زمان اجرای روش از فرآیند متعامد سازی استفاده نشد. در حالی که روش دوم از لحاظ تئوری قابل توجه است، به عنوان مثال دارای آنالیز همگرایی بسیار مستقیمی دارد. در نتیجه هر دو روش پیشنهاد شده دارای مزیت‌های مخصوص به خود هستند. استفاده از خطای مانده مزیت‌های خود را داراست، به طوری که به ازای هر تابع $f(x)$ دلخواه که در شرط اولیه به کار گرفته می‌شود می‌توان با به کارگیری روش هسته بازتولیدی جواب تقریبی با دقت مناسب بدست آورد. بعلاوه، به طور نظری نیز همگرایی روش نشان داده شد که کارایی روش عددی را تایید می‌کند.

جدول ۱.۵: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = e^{-x}$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.834516	9.27603×10^{-15}
(0.2, 0.2)	0.71014	7.76033×10^{-15}
(0.3, 0.3)	0.611929	5.999×10^{-14}
(0.4, 0.4)	0.531073	3.31688×10^{-15}
(0.5, 0.5)	0.462576	3.04898×10^{-15}
(0.6, 0.6)	0.403326	1.75607×10^{-15}
(0.7, 0.7)	0.351246	1.36487×10^{-16}
(0.8, 0.8)	0.304875	3.13726×10^{-16}
(0.9, 0.9)	0.243682	1.77508×10^{-15}

جدول ۲.۵: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = e^{-2x}$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.554901	3.16854×10^{-5}
(0.2, 0.2)	0.368654	2.45444×10^{-5}
(0.3, 0.3)	0.262911	1.39747×10^{-5}
(0.4, 0.4)	0.174328	5.57413×10^{-6}
(0.5, 0.5)	0.156784	4.24041×10^{-6}
(0.6, 0.6)	0.134567	2.72376×10^{-6}
(0.7, 0.7)	0.125504	2.04479×10^{-6}
(0.8, 0.8)	0.126081	1.7752×10^{-6}
(0.9, 0.9)	0.133688	1.71678×10^{-6}

جدول ۳.۵: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3/3$

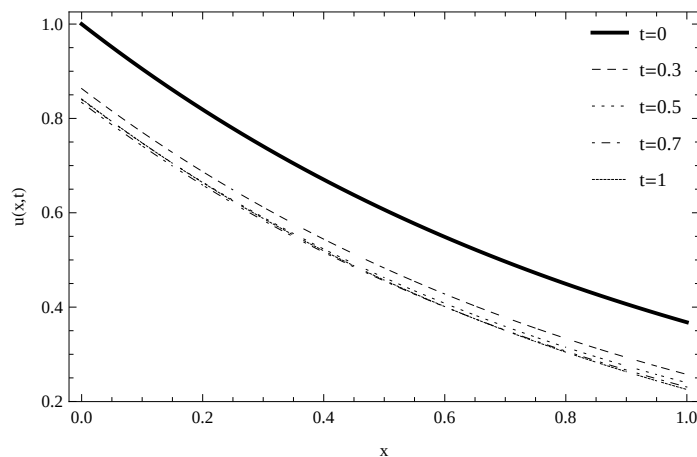
Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.000400629	4.74069×10^{-16}
(0.2, 0.2)	0.00280876	1.69381×10^{-16}
(0.3, 0.3)	0.00913327	1.57419×10^{-17}
(0.4, 0.4)	0.0215015	3.3875×10^{-15}
(0.5, 0.5)	0.0419451	2.3992×10^{-15}
(0.6, 0.6)	0.072518	1.19903×10^{-15}
(0.7, 0.7)	0.115352	7.87004×10^{-16}
(0.8, 0.8)	0.172798	5.28943×10^{-16}
(0.9, 0.9)	0.247768	3.42105×10^{-15}

جدول ۴.۵: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = (1/2) \sin \pi x$

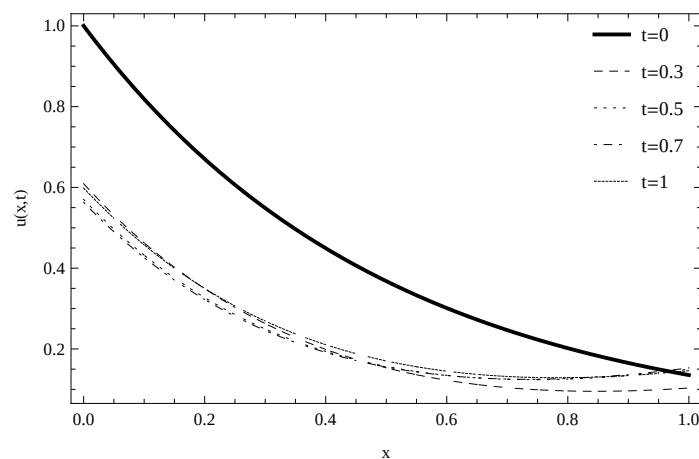
Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.152488	8.61517×10^{-13}
(0.2, 0.2)	0.274706	1.08093×10^{-12}
(0.3, 0.3)	0.347502	2.86921×10^{-11}
(0.4, 0.4)	0.379517	3.13859×10^{-11}
(0.5, 0.5)	0.385233	3.96971×10^{-12}
(0.6, 0.6)	0.36965	1.42502×10^{-10}
(0.7, 0.7)	0.326568	5.47162×10^{-10}
(0.8, 0.8)	0.242359	1.00653×10^{-11}
(0.9, 0.9)	0.113282	4.20568×10^{-11}

جدول ۵.۵: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \tanh x$

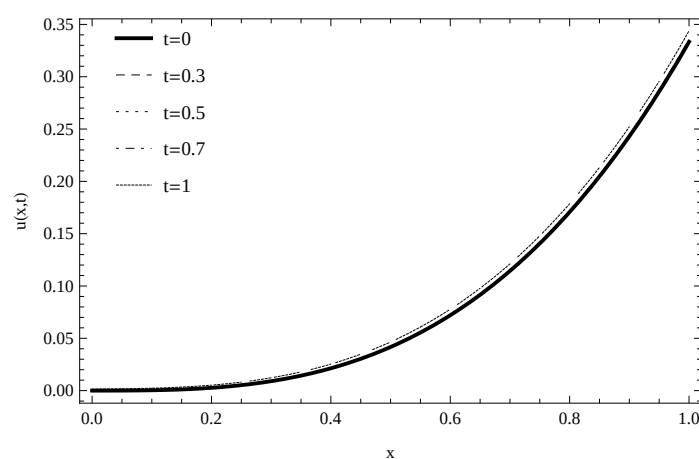
Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.100069	6.19097×10^{-15}
(0.2, 0.2)	0.196824	7.42826×10^{-15}
(0.3, 0.3)	0.288134	9.48858×10^{-15}
(0.4, 0.4)	0.372189	2.52549×10^{-14}
(0.5, 0.5)	0.44892	2.64826×10^{-14}
(0.6, 0.6)	0.519948	1.94272×10^{-14}
(0.7, 0.7)	0.587967	1.34886×10^{-14}
(0.8, 0.8)	0.656152	3.81416×10^{-15}
(0.9, 0.9)	0.727865	9.28292×10^{-15}



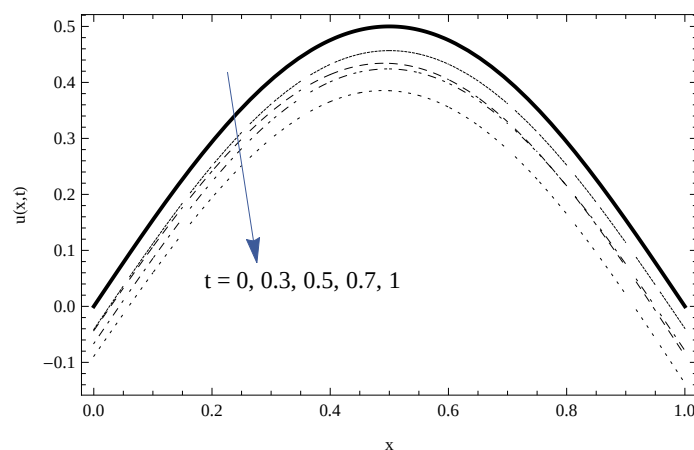
شکل ۱.۵: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = e^{-x}$



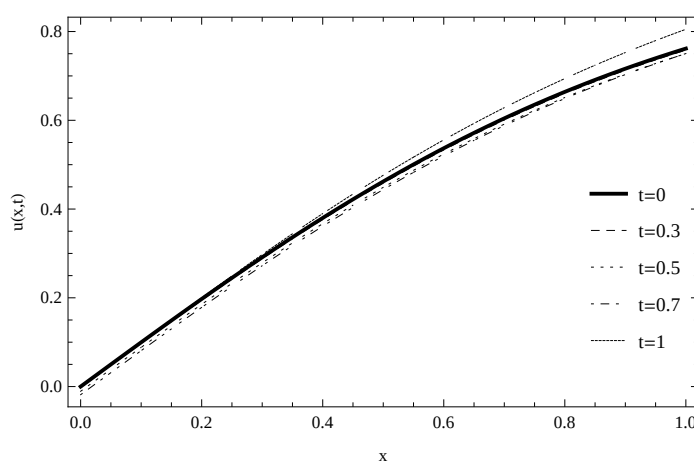
شکل ۲.۵: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = e^{-2x}$



شکل ۳.۵: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = x^3/3$



شکل ۴.۵: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = (1/2) \sin \pi x$



شکل ۵.۵: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ و $u(x, 0) = f(x) = \tanh x$

فصل ۶

حل عددی معادله بنجامین-بنا-ماهونی با استفاده از روش هسته بازتولیدی

۱.۶ مقدمه

معادله موج بلند منظم یا معادله بنجامین-بنا-ماهونی که به صورت زیر بیان می‌شود

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0, \quad (۱.۶)$$

برای اولین بار توسط پرگریم^۱ به منظور مدلسازی کوچک و انتشار موج بلند در یک بعد مورد استفاده قرار گرفت. در این فصل از رساله به دنبال روشی به منظور حل مسئله مقدار اولیه بنجامین-بنا-ماهونی با شرط اولیه

$$u(x, 0) = f(x). \quad (۲.۶)$$

هستیم، به طوری که انتخاب تابع $f(x)$ دلخواه در نظر گرفته می‌شود. این معادله کاربرد فراوانی در مسائل فیزیکی دارد و در مقالات بسیاری اقدام به حل آن شده است، از جمله می‌توان به حل با استفاده از روش انتگرال اولیه [۶۳]، توسط یک روش تعمیم یافته از روش معروف تانژانت-کوتانژانت هایپربولیک [۶۴]، با استفاده از روش تابع نمایی [۶۵]، یک روش بر پایه روش گالرکین استاندارد و فرمول کرانک-نیکلسون [۶۶] و همچنین نرخ های واپاشی بهینه از جواب ها را برای معادله تعمیم یافته بنجامین-بنا-ماهونی در فضای چند بعدی [۶۷] نام برد. این معادله به منظور آنالیز سطح موج‌هایی با طول موج بلند در مایعات، موج‌های مغناطیسی در پلاسمای سرد، موج‌های ثقل صوتی در فشرده سازی مایعات و موج‌های صوتی در کریستال هارمونیک نام برد [۶۴، ۶۸].

^۱Peregrine

۲.۶ روش هسته بازتولیدی

در این بخش به بیان اطلاعاتی در مورد روش هسته بازتولیدی و فضای مورد بحث می‌پردازیم و همچنین معادله (۱.۶) برای یافتن جواب تقریبی مسئله مقدار اولیه بررسی می‌کنیم. در نتیجه احتیاج داریم در ابتدا شرط اولیه داده شده را همگن کنیم تا بتوان به راحتی از ویژگی‌های تابع هسته بازتولید استفاده کرد. بدین منظور تغییر متغیر $u(x, t) = v(x, t) + f(x)$ را تعریف می‌کنیم و در نهایت معادله (۱.۶) را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم

$$v_t + v_x - v_{xxt} + (v + f)(v_x + f_x) + f_x = 0, \quad v(x, 0) = 0. \quad (۳.۶)$$

دامنه مورد بحث برای مسئله بنجامین-بنا-ماهونی به صورت $\Phi = [0, X] \times [0, \infty)$ تعریف می‌شود، که بدون آن که به کلیت می‌بحث خللی ایجاد شود می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب مسئله را در دامنه $\Phi = [0, 1] \times [0, \infty)$ حل کرد.

از تعریف ارائه شده ۷.۱ می‌توان فضای هسته بازتولید به ازای دامنه کراندار را برای فضای $\omega_2^3([0, 1])$ که با توجه به مرتبه مشتق می‌باشد را به صورت زیر بیان کرد

$$\omega_2^3[0, 1] = \{v(x) \mid v^{(2)}(x) \text{ مطلقاً پیوسته است}, v^{(3)}(x) \in L^2[0, 1]\}.$$

همچنین می‌توان با استفاده از ۸.۱ ضرب داخلی و نرم مخصوص به فضای $\omega_2^3[0, 1]$ به صورت زیر تعریف کرد

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\omega_2^3[0, 1]} = \sum_{i=0}^2 v_1^{(i)}(0) v_2^{(i)}(0) + \int_0^1 v_1^{(3)}(x) v_2^{(3)}(x) dx, \quad \|v\|_{\omega_2^3} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\omega_2^3}}.$$

حال به منظور فضای مورد نیاز برای متغیر t را با استفاده از تعریف ۱۷.۱ ارائه نمود، در نتیجه به دلیل داشتن شرط اولیه فضای هسته بازتولید $\omega_2^2([0, \infty))$ را تعریف می‌کنیم

$$\omega_2^2([0, \infty)) = \{v(t) \mid v(t), v'(t) \text{ مطلقاً پیوسته است}, v, v'(t), v''(t) \in L^2([0, \infty)), v(0) = 0\}.$$

همچنین ضرب داخلی و نرم مربوط به این فضا با توجه به تعریف ارائه شده در فصل اول ۱۸.۱ به صورت زیر بیان می‌کنیم

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\omega_2^2[0, \infty)} = \int_0^\infty \{4v_1(t)v_2(t) + 5v_1'(t)v_2'(t) + v_1''(t)v_2''(t)\} dt, \\ \|v\|_{\omega_2^2[0, \infty)} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\omega_2^2[0, \infty)}}.$$

یکی از ویژگی‌های اساسی هسته بازتولیدی

$$u(\cdot) = \langle u(x), R(x, \cdot) \rangle_\omega, \quad \forall u \in \omega. \quad (۴.۶)$$

با بهره‌گیری از تعریف ضرب داخلی و ویژگی هسته می‌توان تابع هسته بازتولیدی مربوط به فضاهای مورد بحث را پیدا کرد. در نتیجه تابع هسته بازتولیدی برای فضای $\omega_2^3([0, 1])$ به فرم زیر است

$$R_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{120} (120 + \zeta^5 + 10x^2\zeta^2(3 + \zeta) - 5x\zeta(-24 + \zeta^3)), & x > \zeta, \\ \frac{1}{120} (120 + x^5 - 5x(-24 + x^3)\zeta + 10x^2(3 + x)\zeta^2), & x \leq \zeta, \end{cases}$$

و $K_\eta(t)$ تابع هسته بازتولید فضای $\omega_2^2([0, \infty))$ را به فرم زیر داریم

$$K_\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{12} \left(e^{-2\eta-2t} - \frac{1}{12} e^{2t-2\eta} - \frac{e^{-\eta-t}}{6} + \frac{e^{t-\eta}}{6} \right), & t \leq \eta, \\ \frac{1}{6} \left((e^\eta - e^{-\eta}) e^{-t} - \frac{1}{12} (e^{4\eta} - 1) e^{-2\eta-2t} \right), & t > \eta. \end{cases}$$

با توجه به این نکته که مسئله مقدار اولیه Benjamin – Bona – Mahony مورد بحث در یک فضای دو متغیره مطرح شده است، بنابراین باید بتوان فضای مورد نیاز را تعریف کرد. در نتیجه می‌توان نوشت $\omega_2^{(4,2)}(\Phi) = \omega_2^4([0, 1]) \times \omega_2^2([0, \infty))$ که با استفاده از تعریف ۱۹.۱ این فضا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\omega_2^{(3,2)}(\Phi) = \left\{ u(x, t) \mid \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \text{ در } \Phi, \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^3 \partial t^2} \in L^2(\Phi), \right. \\ \left. u(x, 0) = 0 \right\}.$$

و لذا با در نظر گرفتن قضیه ۹.۴.۱ هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^{(3,2)}(\Phi)$ به صورت زیر بیان خواهد شد

$$\Omega_{(\zeta, \eta)}(x, t) = R_\zeta(x) \kappa_\eta(t), \quad (5.6)$$

با توجه به فرضیات داده شده می‌توان فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ همانند $\omega_2^{(3,2)}(\Phi)$ تعریف کرد، بنابراین عملگر خطی $\omega_2^{(3,2)}(\Phi) \rightarrow \omega_2^{(1,1)}(\Phi) : \mathcal{L}$ به فرم زیر بیان می‌شود

$$(\mathcal{L}\vartheta)(x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \vartheta(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \vartheta(x, t), \quad (6.6)$$

$$\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t), \vartheta_x(x, t), \vartheta_{xxt}(x, t)) \equiv \vartheta_{xxt}(x, t) - (\vartheta(x, t) + f(x))(\vartheta_x(x, t) + f_x(x)) - f_x(x). \quad (7.6)$$

حال می‌توان معادله (۶.۶) را بازنویسی کرد، که داریم

$$\mathcal{L}\vartheta(x, t) = \mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t), \vartheta_x(x, t), \vartheta_{xxt}(x, t)), \quad \vartheta(x, 0) = 0. \quad (8.6)$$

لذا فرض کنیم $\Upsilon_{(\zeta, \eta)}(x, t)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ باشد، در این صورت قرار دهیم $\varphi_i(x, t) = \Upsilon_{(x_i, t_i)}(x, t)$ که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ در Φ چگال است. بعلاوه فرض می‌کنیم

$$\Omega_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t). \quad (9.6)$$

که $\mathcal{L}^*$ عملگر الحاقی $\mathcal{L}$ می‌باشد. حال با توجه به مفروضات ارائه شده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد **قضیه ۱.۲.۶.** اگر $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ در Φ چگال باشد، آن‌گاه $\{\Psi_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل در فضای $\omega_2^{(3,2)}(\Phi)$ است.

□

برهان. مراجعه شود به ۱.۲.۳.

۳.۶ حل معادله بنجامین-بنا-ماهونی

در این بخش دو روش عددی برای حل مسئله مقدار اولیه مورد بحث بر پایه روش هسته‌های بازتولیدی ارائه می‌کنیم. فرق این دو روش پیشنهادی استفاده از متعامد سازی می‌باشد. قابل مشاهده خواهد بود هر دو روش قابلیت محاسبه جواب تقریبی معادله (۳.۶) را خواهند داشت، اما به دلیل مقرون به صرفه بودن انجام محاسبات و همچنین زمان مصرفی برای یافتن جواب روشی که در آن از متعامد سازی استفاده نمی‌شود نسبت به روش کلاسیک روش هسته بازتولیدی برتری دارد.

۱.۳.۶ حل عددی معادله بنجامین-بنا-ماهونی بدون متعامد سازی

قصد داریم یک الگوریتم تکراری بر اساس روش هسته بازتولیدی بدون کاربرد فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت ارائه دهیم. که البته روش پیشنهادی دارای دقت و کارایی لازم در محاسبه جواب تقریبی مسئله را دارد. در قضیه زیر به بیان چگونگی یافتن جواب مورد نظر می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳.۶. با فرض این که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ یک مجموعه چگال باشد. اگر معادله (۳.۶) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب تقریبی مسئله به فرم زیر بیان می‌شود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Omega_i(x, t), \quad (10.6)$$

به طوری که α_i ها ضرایبی هستند، که با استفاده از حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی $B\alpha = F$ تعیین می‌شود، که

$$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^T, \quad B = [\mathcal{L}\Omega_i(x_j, t_j)] \quad i, j = 1, 2, \dots$$

و

$$F = [\mathcal{F}(x_1, t_1, \vartheta(x_1, t_1), \vartheta_x(x_1, t_1), \vartheta_{xxt}(x_1, t_1)), \mathcal{F}(x_2, t_2, \vartheta(x_2, t_2), \vartheta_x(x_2, t_2), \vartheta_{xxt}(x_2, t_2)), \dots]^T.$$

برهان. با در نظر گرفتن قضیه ۱.۲.۶ و روند اثباتی که در ادامه بیان می‌شود می‌توان جواب تقریبی معادله را به فرم (۱۰.۶) نمایش داد، در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \langle \Omega_j(x, t), \Omega_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,2)}} &= \langle \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t), \Omega_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,2)}} \\ &= \langle \varphi_j(x, t), \mathcal{L}\Omega_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} = \mathcal{L}\Omega_i(x_j, t_j), \end{aligned}$$

و

$$\langle \vartheta(x, t), \Omega_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,2)}} = \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,2)}} = \langle \mathcal{L}\vartheta(x, t), \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}}$$

۲.۳.۶ حل عددی معادله بنجامین-بنا-ماهونی با متعامد سازی

در این بخش به حل عددی مسئله مورد نظر بر اساس روش کلاسیک هسته بازتولیدی می‌پردازیم. در نتیجه به منظور محاسبه پایه‌های متعامد باید فرآیند گرام اشمیت را به کار ببریم. در نتیجه

$\{\bar{\Psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای ${}^0\omega_2^{(3,2)}$ ، با اعمال فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت روی $\{\Psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ بدست آمده است. بنابراین می توان نوشت

$$\bar{\Omega}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \Omega_k(x, t), \quad (11.6)$$

که ρ_{ik} ضرایب متعامدسازی هستند. حال برای بدست آوردن جواب معادله (۸.۶) قضیه زیر را داریم

قضیه ۲.۳.۶. فرض کنید $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد. اگر معادله (۸.۶) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k), \vartheta_x(x_k, t_k), \vartheta_{xt}(x_k, t_k)) \bar{\Omega}_i(x, t). \quad (12.6)$$

برهان. فرض کنید $\vartheta(x, t)$ جواب معادله (۸.۶) باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲.۵، $\vartheta(x, t)$ می تواند توسط سری فوریه به فرم زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned} \vartheta(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vartheta(x, t), \bar{\Omega}_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,2)}} \bar{\Omega}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \Omega_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,2)}} \bar{\Omega}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(3,2)}} \bar{\Omega}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \mathcal{L} \vartheta(x, t), \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \bar{\Omega}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k), \vartheta_x(x_k, t_k), \vartheta_{xt}(x_k, t_k)) \bar{\Omega}_i(x, t), \end{aligned}$$

□

اثبات کامل است.

۴.۶ نتایج عددی

به منظور بررسی الگوریتم پیشنهادی چند مثال عددی را در این بخش ارائه خواهیم داد، تا بتوان دقت و کارایی روش بیان شده را تست کرد. بنابراین از خطای مانده $E(x, t)$ بهره می بریم و مقدار آن را به ازای نقاط دلخواه $(x, t) \in \Phi$ برای جواب تقریبی بدست آمده، محاسبه می کنیم. از این جهت به بررسی دو مثال به ازای دو تابع دلخواه $f(x)$ که در شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ صدق می کنند می پردازیم. در جدول های ۱.۶ و ۲.۶ نتایج بدست آمده از حل مسئله مقدار اولیه بنجامین-بنا-ماهونی به ازای توابع $f(x) = e^x$ و $f(x) = x$ گزارش شده است. همه محاسبات انجام شده توسط روش پیشنهادی اول بدون استفاده از فرآیند متعامد سازی صورت گرفته است و قابل توجه است با استفاده از روش دوم ارائه شده نیز جواب تقریبی مسئله با صرف محاسبات و زمان خیلی بیشتری بدست می آید. در نتیجه با به کارگیری $n = 20$ به نتایج قابل قبولی دست می یابیم.

۵.۶ نتیجه گیری

در این فصل از رساله به ارائه دو روش عددی برای مسئله مقدار اولیه بنجامین-بنا-ماهونی پرداختیم. نتایج نظری و عددی حاکی از این مطلب بود که روش پیشنهادی از دقت و کارایی قابل قبولی برای یافتن جواب تقریبی مسئله برخوردار است. بنابراین می توان از روش هسته بازتولیدی به عنوان یک روش عددی کارآمد به منظور یافتن جواب انواع معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی نام برد.

جدول ۱.۶: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	-0.0268077	1.10936×10^{-12}
(0.2, 0.2)	-0.0533167	1.4727×10^{-11}
(0.3, 0.3)	-0.0788656	1.68277×10^{-11}
(0.4, 0.4)	-0.103086	1.74012×10^{-12}
(0.5, 0.5)	-0.125648	1.66666×10^{-11}
(0.6, 0.6)	-0.146241	1.49236×10^{-11}
(0.7, 0.7)	-0.164556	1.25459×10^{-11}
(0.8, 0.8)	-0.180283	9.84961×10^{-12}
(0.9, 0.9)	-0.19311	7.23732×10^{-12}

جدول ۲.۶: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = e^x$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.840966	1.83582×10^{-9}
(0.2, 0.2)	0.694545	9.8091×10^{-9}
(0.3, 0.3)	0.560672	1.69877×10^{-8}
(0.4, 0.4)	0.438897	2.32216×10^{-8}
(0.5, 0.5)	0.328865	2.8559×10^{-8}
(0.6, 0.6)	0.230409	3.32242×10^{-8}
(0.7, 0.7)	0.143611	3.75673×10^{-8}
(0.8, 0.8)	0.068831	4.19979×10^{-8}
(0.9, 0.9)	0.00667659	4.689×10^{-8}

فصل ۷

روش هسته بازتولیدی به منظور حل عددی معادله اسویفت-هوهنبرگ

۱.۷ مقدمه

معادله اسویفت-هوهنبرگ یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه چهارم است، که کاربرد گسترده‌ای به عنوان یک مدل در مطالعه شکل‌گیری الگوهای فیزیکی دارد. این معادله اولین بار توسط اسویفت^۱ و هوهنبرگ^۲ به منظور یک مدل ساده برای ناپایداری موج رول رایلج-برنارد^۳ مورد استفاده گرفت [۶۹]. به هر حال از آن زمان به بعد اثبات شده است که این معادله یک مدل تاثیرگذار برای انواع مختلف سیستم‌های فیزیکی و ماشینی است و همچنین جزئیات کاربردهای فیزیکی معادله اسویفت-هوهنبرگ را می‌توان در مقالات بسیاری یافت [۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳]. معادله اسویفت-هوهنبرگ به فرم زیر تعریف می‌شود

$$u_t = \lambda u - \left(1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2 u - u^3, \quad (1.7)$$

که $\lambda \in \mathbb{R}$ یک پارامتر است [۷۴]. معادله اسویفت-هوهنبرگ برای کلاس بزرگی از معادلات مدل سهموی مراتب بالاتر، یک مدل معادله است. این معادله کاربرد فراوانی در معادله فیشر-کلموگوروف^۴ در مکانیک آماری [۷۴، ۷۵، ۷۶] و معادله مرتبه ششم معرفی شده توسط کاگینالپ^۵ و فیف^۶ به جهت مدل‌سازی دارد [۷۷، ۷۸]. معادله (۱.۷) را به صورت متعارف‌تر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - \lambda)u + u^3 = 0, \quad (2.7)$$

با شرایط مرزی

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (3.7)$$

^۱Swift

^۲Hohenberg

^۳Rayleigh-Bernard

^۴Fisher-Kolmogorov

^۵Caginalp

^۶Fife

که λ یک ثابت مقدار حقیقی است و دامنه مسئله $x \in [0, 1]$ و $t > 0$ می باشد. هدف از این فصل معرفی تکنیک عددی بر اساس روش هسته بازتولیدی برای حل معادله اسويفت-هوهنبرگ است. در سال های اخیر روش هسته بازتولیدی به یک ابزار مهم در زمینه های مختلف بخصوص آنالیزهای پیچیده، سیستم های غیرخطی و مسائل مقدار مرزی و اولیه، آمار و احتمال، تئوری نمایش گروه ها و تئوری عملگرهای انتگرال گیری تبدیل شده است [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۱۹]. این روش قابلیت حل مسائل مختلف و ساده گی اجرا را دارد.

۲.۷ روش هسته بازتولیدی

به منظور حل معادله (۲.۷) تحت شرایط مرزی (۳.۷) بر پایه نظری هسته بازتولیدی، نیاز به بیان اطلاعات اولیه ای در مورد فضای مورد بحث داریم. بنابراین برای بدست آوردن جواب تقریبی معادله (۲.۷) - (۳.۷) ابتدا نیاز داریم طوری تغییر متغیر دهیم که شرایط همگن شوند، در نتیجه $u(x, t) = \vartheta(x, t) + f(x)$ را تعریف می کنیم و لذا می توان (۲.۷) - (۳.۷) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4} + f^{(4)}(x) + 2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + 2f''(x) + (1 - \lambda)(\vartheta(x, t) + f(x)) + [\vartheta(x, t) + f(x)]^3 = 0,$$

$$\vartheta(0, t) = \vartheta(1, t) = 0, \quad \vartheta_{xx}(0, t) = \vartheta_{xx}(1, t) = 0, \quad \vartheta(x, 0) = 0. \quad (۴.۷)$$

دامنه مورد نیاز برای مسئله به صورت $\Phi = [0, X] \times [0, \infty)$ تعریف شده است. با توجه به ویژگی های فضای هسته بازتولید، اگر ω یک فضای هسته بازتولید با تابع هسته بازتولید R باشد باید رابطه زیر برقرار باشد

$$u(\cdot) = \langle u(x), R(x, \cdot) \rangle_{\omega}. \quad (۵.۷)$$

حال نیاز داریم فضاهایی که متغیرهای x و t در آن تعریف می شود را معرفی کنیم. پس فضای $({}^0\omega_2^2([0, \infty))$ طبق تعریف ارائه شده در فصل اول ۱۷.۱ به صورت زیر تعریف می شود

$${}^0\omega_2^2([0, \infty)) = \{v(t) \mid v(t), v'(t) \text{ مطلق است}, v, v'(t), v''(t) \in L^2([0, \infty)), v(0) = 0\}.$$

همچنین ضرب داخلی مربوط به این فضا با توجه به تعریف ارائه شده در فصل اول ۱۸.۱ به صورت زیر بیان می کنیم

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{{}^0\omega_2^2([0, \infty))} = \int_0^\infty \{4v_1(t)v_2(t) + 5v_1'(t)v_2'(t) + v_1''(t)v_2''(t)\} dt,$$

لذا دارای نرم $\|v\|_{{}^0\omega_2^2} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{{}^0\omega_2^2}}$ هستیم. با استفاده از تعریف ضرب داخلی و همچنین ویژگی اساسی تابع هسته بازتولید می توان $K_\eta(t)$ را که هسته فضای $({}^0\omega_2^2([0, \infty))$ است به صورت زیر تعریف کرد

$$K_\eta(t) = \begin{cases} \frac{1}{12} \left(e^{-2\eta-2t} - \frac{1}{12} e^{2t-2\eta} - \frac{e^{-\eta-t}}{6} + \frac{e^{t-\eta}}{6} \right), & t \leq \eta, \\ \frac{1}{6} \left((e^\eta - e^{-\eta}) e^{-t} - \frac{1}{12} (e^{4\eta} - 1) e^{-2\eta-2t} \right), & t > \eta. \end{cases}$$

به طور مشابه می توان فضای هسته بازتولید $\omega_2^5([0, 1])$ را براساس تعریف ۷.۱ به فرم زیر تعریف کرد

$$\omega_2^5([0, 1]) = \{v(x) \mid v^{(4)}(x) \text{ پیوسته است}, v^{(5)}(x) \in L^2([0, 1])\}.$$

ضرب داخلی و نرم مخصوص به فضای $\omega_2^5([0, 1])$ با توجه به تعریف ۸.۱ به فرم زیر است

$$\langle v_1, v_2 \rangle_{\omega_2^5} = \sum_{i=0}^4 v_1^{(i)}(0)v_2^{(i)}(0) + \int_0^1 v_1^{(5)}(x)v_2^{(5)}(x)dx, \quad \|v\|_{\omega_2^5} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{\omega_2^5}}.$$

با بهره بردن از این ویژگی اساسی هسته بازتولیدی و نیز با توجه به تعریف ضرب داخلی مخصوص این فضا می توان تابع هسته بازتولید را برای فضای $\omega_2^5([0, 1])$ و بدست آورد، در نتیجه $R_\zeta(x)$ تابع هسته بازتولید فضای $\omega_2^5([0, 1])$ به صورت

$$R_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{1}{12004600204800}(\mathcal{A}), & x > \zeta, \\ \frac{1}{12004600204800}(\mathcal{B}), & x \leq \zeta, \end{cases}$$

است به طوری که

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & -362880\zeta(x-1)x(x(x(x(91(x-8)x+1588)+664)-8030)-51500)+59380) \\ & +59380)3360\zeta^3x((x(x(x(33(x-9)x+91723)-636517)+1905393)+9526965) \\ & -22862340)x^2+11975040)+210\zeta^4x((x(x(x(207(x-9)x-176498) \\ & +1270262)-3836868)+80060040)-152431440)x^2+75116160+42\zeta^5x((x(x(x(x \\ & \times(207(x-9)x-176498)+1270262)-3836868)+80060040)-152431440)x^2 \\ & +75116160)+28x(11975040+x^2(-22862340+x(9526965+x(1905393+x \\ & \times(-636517+x(91723+33(-9+x)x))))))\zeta^6-4\zeta^7(x-1)x(x(x(x(x \\ & \times(579(x-8)x+100987)-541074)+1312155)+10578300)+87625620) \\ & -210107520+9\zeta^8(x-1)x(x(x(x(x(91(x-8)x+1588)+664)-8030) \\ & -51500)+59380)+59380)+\zeta^9(-91x^9+819x^8-2316x^7+924x^6 \\ & +8694x^5+43470x^4-110880x^3-33022080x+33081460, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & x((-91\zeta^9 + 819\zeta^8 - 2316\zeta^7 + 924\zeta^6 + 8694\zeta^5 + 43470\zeta^4 \\ & - 110880\zeta^3 - 33022080\zeta + 33081460)x^8 - 3360\zeta((\zeta(\zeta(\zeta(33(\zeta - 9)\zeta \\ & + 91723) - 636517) + 1905393) + 9526965) - 22862340)\zeta^2 + 11975040)x^2 \\ & + 28\zeta((\zeta(\zeta(\zeta(33(\zeta - 9)\zeta + 91723) - 636517) + 1905393) + 9526965) \\ & - 22862340)\zeta^2 + 11975040)x^5 + 210\zeta((\zeta(\zeta(\zeta(207(\zeta - 9)\zeta - 176498) \\ & + 1270262) - 3836868) + 80060040) - 152431440)\zeta^2 + 75116160)x^3 \\ & + 42\zeta((\zeta(\zeta(\zeta(207(\zeta - 9)\zeta - 176498) + 1270262) - 3836868) \\ & + 80060040) - 152431440)\zeta^2 + 75116160)x^4 - 362880(\zeta - 1)\zeta \\ & \times (\zeta(\zeta(\zeta(\zeta(91(\zeta - 8)\zeta + 1588) + 664) - 8030) - 51500) \\ & + 59380) + 59380) + 9(\zeta - 1)\zeta(\zeta(\zeta(\zeta(91(\zeta - 8)\zeta + 1588) + 664) \\ & - 8030) - 51500) + 59380) + 59380)x^7 - 4(\zeta - 1)\zeta(\zeta(\zeta(\zeta(579(\zeta - 8)\zeta \\ & + 100987) - 541074) + 1312155) + 10578300) + 87625620) - 210107520)x^6. \end{aligned}$$

با توجه به این نکته که مسئله مقدار اولیه مورد بحث در یک فضای دو متغیره مطرح شده است، باید فضای توابع دوتایی مربوط به فضای ${}^0\omega_2^{(5,2)}(\Phi)$ را با استفاده از تعریف ۱۹.۱ به فرم زیر تعریف کرد

$$\begin{aligned} {}^0\omega_2^{(5,2)}(\Phi) &= \omega_2^5([0, 1]) \times {}^0\omega_2^2([0, \infty)) \\ &= \left\{ u(x, t) \mid \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^4 \partial t} \text{ در } \Phi \text{ کاملاً پیوسته است}, \frac{\partial^7 u(x, t)}{\partial x^5 \partial t^2} \in L^2(\Phi), \right. \\ &\quad \left. u(0, t) = u(1, t) = 0, u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, u(x, 0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

با توجه به قضیه ۹.۴.۱ هسته بازتولیدی فضای ${}^0\omega_2^{(5,2)}(\Phi)$ به صورت زیر بیان خواهد شد

$$\Omega_{(\zeta, \eta)}(x, t) = R_{\zeta}(x) \kappa_{\eta}(t), \quad (۶.۷)$$

همچنین می‌توان به راحتی فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ همانند ${}^0\omega_2^{(5,2)}(\Phi)$ تعریف کرد و لذا فرض کنیم $\Upsilon_{(\zeta, \eta)}(x, t)$ تابع هسته بازتولیدی فضای $\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$ باشد، بنابراین عملگر خطی $\mathcal{L} : {}^0\omega_2^{(4,2)}(\Phi) \longrightarrow {}^0\omega_2^{(1,1)}(\Phi)$,

به فرم زیر بیان می‌شود

$$(\mathcal{L}\vartheta)(x, t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\vartheta(x, t) + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\vartheta(x, t) + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vartheta(x, t), \quad (۷.۷)$$

که

$$\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t)) \equiv (\lambda - 1)(\vartheta(x, t) + f(x)) - [\vartheta(x, t) + f(x)]^3 - f^{(4)}(x) - 2f''(x). \quad (۸.۷)$$

در نتیجه می‌توان معادله (۴.۷) را صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\vartheta(x, t) &= \mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t)), \\ \vartheta(0, t) &= \vartheta(1, t) = 0, \quad \vartheta_{xx}(0, t) = \vartheta_{xx}(1, t) = 0, \quad \vartheta(x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (۹.۷)$$

در این صورت قرار دهیم $\varphi_i(x, t) = \Upsilon_{(x_i, t_i)}(x, t)$ ، که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است. بعلاوه فرض می‌کنیم

$$\Psi_i(x, t) = \mathcal{L}^* \varphi_i(x, t), \quad (10.7)$$

که $\mathcal{L}^*$ عملگر الحاقی $\mathcal{L}$ می‌باشد. حال با توجه به مفروضات ارائه شده می‌توان قضیه زیر را بیان کرد **قضیه ۱۰.۲.۷.** اگر $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد، آن گاه $\{\Psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ یک سیستم کامل در فضای ${}^0\omega_2^{(5,2)}(\Phi)$ است.

□

برهان. مراجعه شود به ۱.۲.۳.

۳.۷ روش حل عددی برای معادله اسویفت-هوهنبرگ

در این بخش دو روش عددی برای حل معادله اسویفت-هوهنبرگ ارائه خواهیم نمود. در روش اول از فرآیند گرام اشمیت استفاده نخواهیم کرد، در حالی که در روش دوم از آن بهره می‌بریم. بنابراین در روش اول با کاهش شدید زمان محاسبات رو به رو هستیم، اما در روش دوم دارای آنالیز همگرایی بهتری هستیم. هر دو روش کارآمد و قابلیت بدست آوردن جواب تقریبی مسئله است و تنها در استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت فرق دارند.

۱.۳.۷ حل معادله (۹.۷) بدون متعامد سازی

قصد داریم یک الگوریتم تکراری به منظور محاسبه جواب تقریبی معادله (۹.۷) پیشنهاد کنیم. در این روش که بر اساس هسته بازتولیدی است از به کار بردن فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت پرهیز می‌کنیم. یکی از مزیت‌های آن کاهش زمان مصرفی برای یافتن جواب تقریبی مسئله مقدار مرزی مورد بحث می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۷. فرض کنید این که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ یک مجموعه چگال باشد. اگر معادله (۹.۷) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب تقریبی مسئله اسویفت-هوهنبرگ به فرم زیر بیان می‌شود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Psi_i(x, t), \quad (11.7)$$

به طوری که α_i ها ضرایبی هستند، که با استفاده از حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی $B\alpha = F$ تعیین می‌شود، که

$$B = [\mathcal{L}\Psi_i(x_j, t_j)], \quad i, j = 1, 2, \dots, \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots]^T,$$

و

$$F = [F(x_1, t_1, \vartheta(x_1, t_1)), F(x_2, t_2, \vartheta(x_2, t_2)), \dots]^T.$$

برهان. از آن جایی که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است، آن گاه $\Psi_i(x, t)$ یک سیستم کامل در ${}^0\omega_2^{(5,2)}$ است. جواب تقریبی معادله به فرم (۱۱.۷) نمایش داده شود، پس

$$\begin{aligned} \langle \Psi_j(x, t), \Psi_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} &= \langle \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t), \Psi_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} = \langle \varphi_j(x, t), \mathcal{L}\Psi_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \\ &= \mathcal{L}\Psi_i(x_j, t_j), \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\langle \vartheta(x, t), \Psi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} &= \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} = \langle \mathcal{L}\vartheta(x, t), \varphi_j(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \\ &= \mathcal{F}(x_j, t_j, \vartheta(x_j, t_j)).\end{aligned}$$

لذا طبق بهترین تقریب در فضای هیلبرت [۴۷]، ضرایب α_i با حل دستگاه نیم-نامتناهی معادلات خطی $B\alpha = \mathcal{F}$ تعیین می‌شود و اثبات کامل است. $\square$

۲.۳.۷ حل عددی معادله (۹.۷) با متعامد سازی

در این بخش روش کلاسیک هسته بازتولیدی را برای حل این مسئله اسوینفت-هوهنبرگ به کار می‌بریم. بنابراین چون نیاز به پایه‌های متعامد داریم باید فرآیند گرام اشمیت را به کار ببریم. در نتیجه $\{\bar{\Psi}_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ از فضای ${}^0\omega_2^{(5,2)}$ ، با اعمال فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت روی $\{\Psi_i(x, t)\}_{i=1}^{\infty}$ بدست آمده است. حال با در نظر گرفتن عناصر پایه داریم

$$\bar{\Psi}_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \Psi_k(x, t), \quad (12.7)$$

که ضرایب متعامدسازی هستند. به منظور یافتن جواب معادله (۹.۷) قضیه زیر را داریم

قضیه ۲.۳.۷. فرض کنید $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال باشد. اگر معادله (۹.۷) دارای جواب یکتا باشد، آن گاه جواب معادله به صورت زیر خواهد بود

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k)) \bar{\Psi}_i(x, t). \quad (13.7)$$

برهان. با فرض آن که $\vartheta(x, t)$ جواب معادله (۹.۷) باشد. با استفاده از قضیه ۱.۲.۷، $\vartheta(x, t)$ می‌تواند توسط سری فوریه به فرم زیر بسط داده شود

$$\begin{aligned}\vartheta(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle \vartheta(x, t), \bar{\Psi}_i(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \Psi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \vartheta(x, t), \mathcal{L}^* \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \langle \mathcal{L}\vartheta(x, t), \varphi_k(x, t) \rangle_{0\omega_2^{(1,1)}} \bar{\Psi}_i(x, t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k)) \bar{\Psi}_i(x, t),\end{aligned}$$

$\square$

در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

با استفاده از منقطع سازی سری (۱۳.۷)، تقریبی از جواب $\vartheta(x, t)$ را برای m جمله به فرم زیر می توان نمایش داد

$$\vartheta_m(x, t) = \sum_{i=1}^m \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t), \quad (14.7)$$

که

$$\kappa_i = \sum_{k=1}^i \rho_{ik} \mathcal{F}(x_k, t_k, \vartheta(x_k, t_k)). \quad (15.7)$$

۴.۷ آنالیز همگرایی روش

در این بخش به بررسی همگرایی الگوریتم دوم خواهیم پرداخت، اما قابل توجه است هر تابع پایه ای استفاده شده برای یافتن جواب مسئله مقدار مرزی مورد بحث را متعامد نمود و آنالیز همگرایی ارائه شده را برای آن بیان کرد. همگرایی دنباله $\vartheta_m(x, t)$ که جواب تقریبی مسئله می باشد توسط قضایای زیر بررسی می شود.

قضیه ۱.۴.۷. اگر $\vartheta(x, t) \in \Phi$ باشد، آنگاه ثابت $C > 0$ وجود دارد به طوری که می توان نوشت

$$|\vartheta(x, t)| \leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}},$$

$$|\vartheta_t(x, t)| \leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}},$$

$$|\vartheta_x(x, t)| \leq C \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}.$$

برهان. به ازای هر $(x, t) \in \Phi$ داریم

$$|\vartheta(x, t)| = |\langle \vartheta(\zeta, \eta), \Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta) \rangle|_{0\omega_2^{(5,2)}} \leq \|\vartheta(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(5,2)}} \|\Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(5,2)}},$$

بنابراین ثابت $C_1 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|\vartheta(x, t)| \leq C_1 \|\vartheta(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}.$$

همچنین داریم

$$|\vartheta_x(x, t)| = \left| \left\langle \vartheta(\zeta, \eta), \frac{\partial}{\partial x} \Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta) \right\rangle \right|_{0\omega_2^{(5,2)}} \leq \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}} \left\| \frac{\partial}{\partial x} \Upsilon_{(x,t)}(\zeta, \eta) \right\|_{0\omega_2^{(5,2)}},$$

در این صورت ثابت $C_2 > 0$ وجود دارد که

$$|\vartheta_x(x, t)| \leq C_2 \|\vartheta(\zeta, \eta)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}.$$

به طور مشابه می توان ثابت های $C_3 > 0$ وجود دارد به طوری که $|\vartheta_t(x, t)| \leq C_3 \|\vartheta(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ حال فرض کنید $C = \max\{C_1, C_2, C_3\}$ ، آنگاه اثبات قضیه کامل است. $\square$

به عنوان نتیجه ای از قضیه بالا، می توان قضیه زیر را نوشت

قضیه ۲.۴.۷. اگر داشته باشیم $\vartheta_m(x, t) \xrightarrow{\|\cdot\|_{0\omega_2^{(5,2)}}} \bar{\vartheta}(x, t)$ و $(x_m, t_m) \rightarrow (x, t)$ به طوری که $m \rightarrow \infty$ و همچنین $\|\vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ کراندار و $\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t))$ پیوسته باشد، در این صورت $\mathcal{F}(x_m, t_m, \vartheta_{m-1}(x_m, t_m)) \rightarrow \mathcal{F}(x, t, \bar{\vartheta}(x, t)), \quad m \rightarrow \infty.$

برهان. از آنجایی که

$$\begin{aligned} |\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \bar{\vartheta}(x, t)| &= |\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \vartheta_{m-1}(x, t) + \vartheta_{m-1}(x, t) - \bar{\vartheta}(x, t)| \\ &\leq |\partial_x \vartheta_{m-1}| |x_m - x| + |\partial_t \vartheta_{m-1}| |t_m - t| + |\vartheta_{m-1}(x, t) - \bar{\vartheta}(x, t)|, \end{aligned}$$

و از شرط داده شده $\bar{\vartheta} \xrightarrow{\|\cdot\|_{0\omega_2^{(5,2)}}} \vartheta_m$ که $m \rightarrow \infty$ و کرانداري $\|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ و همچنین با در نظر

گرفتن قضیه ۱.۴.۷ به ازای هر $(x, t) \in \Phi$ ، داریم

$$|\vartheta_{m-1}(x_m, t_m) - \bar{\vartheta}(x, t)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

پیوستگی $\mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t))$ نتیجه می دهد

$$\mathcal{F}(x_m, t_m, \vartheta_{m-1}(x_m, t_m)) \rightarrow \mathcal{F}(x, t, \vartheta(x, t)),$$

□

وقتی که $m \rightarrow \infty$ ، بنابراین اثبات قضیه کامل می شود.

قضیه ۳.۴.۷. فرض کنید $\|\vartheta_m(x, t)\|$ در (۱۴.۷) کراندار باشد. اگر $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^\infty$ در Φ چگال باشد، آن گاه دنباله جواب تقریبی $\vartheta_m(x, t)$ که از روش ارائه شده بدست می آید به جواب دقیق $\vartheta(x, t)$ معادله (۹.۷) همگرا است و

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t), \quad (16.7)$$

که κ_i توسط رابطه (۱۵.۷) داده شده است.

برهان. اثبات را به دو قسمت تقسیم و همگرایی را ثابت می کنیم. بدین منظور ابتدا ثابت خواهیم کرد دنباله ϑ_m همگراست. با در نظر گرفتن معادله (۱۴.۷)، می توان استنتاج کرد که

$$\vartheta_{m+1}(x, t) = \vartheta_m(x, t) + \kappa_{m+1} \bar{\Psi}_{m+1}(x, t). \quad (17.7)$$

از تعامد $\{\bar{\Psi}_i(x, t)\}_{i=1}^\infty$ ، نتیجه می گیریم

$$\|\vartheta_{m+1}\|_{0\omega_2^{(5,2)}} = \|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(5,2)}} + \kappa_{m+1}^2. \quad (18.7)$$

بنابراین برقرار است که $\|\vartheta_{m+1}\|_{0\omega_2^{(5,2)}} \geq \|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ با توجه به کرانداري $\|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ ، $\|\vartheta_m\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ همگراست و ثابت c وجود دارد به طوری که

$$\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i^2 = c.$$

لذا نتیجه می دهد که $\kappa_i \in l^2$ ، اگر $n > m$ و از تعامد $\vartheta_{m+1}(x, t) - \vartheta_m(x, t)$ استفاده کنیم، آن گاه داریم

$$\begin{aligned} &\|\vartheta_n(x, t) - \vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}^2 \\ &= \|\vartheta_n(x, t) - \vartheta_{n-1}(x, t) + \vartheta_{n-2}(x, t) + \cdots + \vartheta_{m+1}(x, t) - \vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}^2 \\ &= \|\vartheta_n(x, t) - \vartheta_{n-1}(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}^2 + \cdots + \|\vartheta_{m+1}(x, t) - \vartheta_m(x, t)\|_{0\omega_2^{(5,2)}}^2 \\ &= \sum_{i=m+1}^n \kappa_i^2 \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

فشردگی ${}_{0\omega_2^{(5,2)}}$ نشان می‌دهد که $\bar{\vartheta} \xrightarrow{\|\cdot\|_{0\omega_2^{(5,2)}}} \vartheta_m$ وقتی $m \rightarrow \infty$. ثانیاً، اثبات خواهیم کرد که $\bar{\vartheta}$ جواب معادله (۹.۷) است. بدین منظور، از معادله (۱۴.۷) نتیجه می‌گیریم

$$\bar{\vartheta}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t).$$

نظر به این که

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_m, t_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \langle \mathcal{L}\bar{\Psi}_i, \varphi_m \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \langle \bar{\Psi}_i, \Psi_m \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}}, \quad (19.7)$$

داریم

$$\sum_{j=1}^m \rho_{mj} (\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_m, t_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \left\langle \bar{\Psi}_i, \sum_{j=1}^m \rho_{mj} \Psi_j \right\rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \langle \bar{\Psi}_i, \bar{\Psi}_m \rangle_{0\omega_2^{(5,2)}} = \kappa_m. \quad (20.7)$$

اگر $m = 1$ باشد، در این صورت

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_1, t_1) = \mathcal{F}(x_1, t_1, \vartheta_0(x_1, t_1)).$$

همچنین برای $m = 2$ داریم

$$\rho_{21}(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_1, t_1) + \rho_{22}(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_2, t_2) = \rho_{21}\mathcal{F}(x_1, t_1, \vartheta_0(x_1, t_1)) + \rho_{22}\mathcal{F}(x_2, t_2, \vartheta_0(x_2, t_2)).$$

واضح است که

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_2, t_2) = \mathcal{F}(x_2, t_2, \vartheta_0(x_2, t_2)).$$

با استفاده از استقرا می‌توان نوشت

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(x_j, t_j) = \mathcal{F}(x_j, t_j, \vartheta_{j-1}(x_j, t_j)). \quad (21.7)$$

برای هر $(\mu, \varrho) \in \Phi$ ، یک زیر دنباله $\{(x_{m_j}, t_{m_j})\}_{j=1}^{\infty}$ وجود دارد که به (μ, ϱ) همگراست، از آن جایی که $\{(x_i, t_i)\}_{i=1}^{\infty}$ در Φ چگال است. بنابراین با در نظر گرفتن دنباله ϑ_m و قضیه ۲.۴.۷ نتیجه می‌گیریم که

$$(\mathcal{L}\bar{\vartheta})(\mu, \varrho) = \mathcal{F}(\mu, \varrho, \bar{\vartheta}(\mu, \varrho)). \quad (22.7)$$

که $\bar{\vartheta}(x, t)$ جواب معادله (۹.۷) است و

$$\vartheta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t).$$

□

لذا اثبات کامل است.

قضیه ۴.۴.۷. فرض کنید $\vartheta(x, t)$ جواب معادله (۹.۷) و $\tau_m(x, t)$ خطای تقریبی بین $\vartheta_m(x, t)$ و $\vartheta(x, t)$ است. آن گاه خطای $\tau_m(x, t)$ یکنوا نزولی با نرم $\|\cdot\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ است.

برهان. از (۱۶.۷) و طبق اثبات قضیه ۳.۴.۷، داریم

$$\|\tau_m\|_{0\omega_2^{(5,2)}}^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{\infty} \kappa_i \bar{\Psi}_i(x, t) \right\|_{0\omega_2^{(5,2)}}^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \kappa_i^2. \quad (23.7)$$

□

معادله (۲۳.۷) نشان می‌دهد که خطای τ_m یکنوا نزولی با تعریف نرم $\|\cdot\|_{0\omega_2^{(5,2)}}$ است.

۵.۷ نتایج عددی

برای بررسی دقت و کارآمد بودن روش پیشنهادی شرایط و مقدار پارامتر λ خاصی را در نظر می گیریم. به جهت مقرون به صرفه بودن انجام محاسبات و زمان مصرفی از الگوریتم تکراری اول به ازای در اختیار گرفتن $n = 20$ نقطه استفاده می کنیم. در جدول های ۱.۷-۷.۷ مقدار خطای مانده $E(x, t)$ را به ازای نقطه $(x, t) \in \Phi$. باید توجه داشت باید شرط اولیه $u(x, 0) = f(x)$ به علت تغییر متغیر داده شده در شرایط $f(0) = f(1) = 0$ و $f''(0) = f''(1) = 0$ هم صدق کند. همچنین جواب تقریبی بدست آمده در شکل های ۱.۷-۶.۷ رسم شده است. با مقایسه اطلاعات گزارش شده در مقاله [۷۳] و داده هایی که در جدول ۴.۷ ارائه شده است، که در هر دو شاهد شرایط یکسان هستیم، کمترین خطای مانده 1.16711×10^{-7} به کمک مقادیر بهینه پارامترها در مقاله [۷۳] بیان شده است. در نتیجه قابل توجه است روش پیشنهادی نسبت به روش عددی دیگری که بر روی این مسئله مقدار مرزی به کار گرفته شده است دارای برتری هستیم.

۶.۷ نتیجه گیری

در این فصل دو روش عددی بر اساس روش هسته بازتولیدی برای حل معادله اسویفت-هوهنبرگ ارائه کردیم. هر دو روش پیشنهادی جواب تقریبی مسئله را به صورت یک سری ارائه می کنند. تفاوت این دو روش در کاربرد فرآیند متعامد سازی گرام اشمیت بود، به طوری که در روش اول به علت کاهش زمان محاسبات از فرآیند متعامد سازی استفاده نکردیم. اما در الگوریتم دوم از روش کلاسیک هسته بازتولیدی استفاده کردیم. همان طور که مشاهده کردیم جواب های عددی و نیز آنالیز همگرایی ارائه شده، هر دو بیانگر کارایی و دقت روش های پیشنهادی است.

جدول ۱.۷: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 0.3$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.179332	4.42522×10^{-13}
(0.2, 0.2)	0.119827	1.10906×10^{-13}
(0.3, 0.3)	-0.0681305	8.19524×10^{-13}
(0.4, 0.4)	-0.24348	6.55282×10^{-13}
(0.5, 0.5)	-0.299323	1.27512×10^{-12}
(0.6, 0.6)	-0.205003	7.56301×10^{-13}
(0.7, 0.7)	-0.0138996	1.32987×10^{-12}
(0.8, 0.8)	0.158666	1.24659×10^{-12}
(0.9, 0.9)	0.187279	1.48586×10^{-12}

جدول ۲.۷: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 1$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.180014	3.93843×10^{-13}
(0.2, 0.2)	0.120782	1.54844×10^{-13}
(0.3, 0.3)	-0.0685617	7.92034×10^{-13}
(0.4, 0.4)	-0.245981	6.19716×10^{-13}
(0.5, 0.5)	-0.302736	1.23951×10^{-12}
(0.6, 0.6)	-0.207414	6.9298×10^{-13}
(0.7, 0.7)	-0.0143605	1.22743×10^{-12}
(0.8, 0.8)	0.159375	1.1751×10^{-12}
(0.9, 0.9)	0.187739	1.40536×10^{-12}

جدول ۳.۷: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 8$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.187114	2.51455×10^{-14}
(0.2, 0.2)	0.131178	3.59431×10^{-14}
(0.3, 0.3)	-0.0730962	3.47283×10^{-13}
(0.4, 0.4)	-0.274048	2.84722×10^{-13}
(0.5, 0.5)	-0.341661	7.10487×10^{-13}
(0.6, 0.6)	-0.235036	3.39517×10^{-13}
(0.7, 0.7)	-0.0198524	6.05743×10^{-13}
(0.8, 0.8)	0.166777	5.70221×10^{-13}
(0.9, 0.9)	0.192435	7.08918×10^{-13}

جدول ۴.۷: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = -0.7$

Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.122988	3.06577×10^{-13}
(0.2, 0.2)	0.118486	6.70665×10^{-14}
(0.3, 0.3)	-0.0675217	8.16245×10^{-13}
(0.4, 0.4)	-0.239993	5.3667×10^{-13}
(0.5, 0.5)	-0.294577	1.21825×10^{-12}
(0.6, 0.6)	-0.201653	6.22051×10^{-13}
(0.7, 0.7)	-0.0132647	1.20544×10^{-14}
(0.8, 0.8)	0.157662	1.13173×10^{-13}
(0.9, 0.9)	0.186624	1.34524×10^{-12}

جدول ۵.۷: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 0.3$

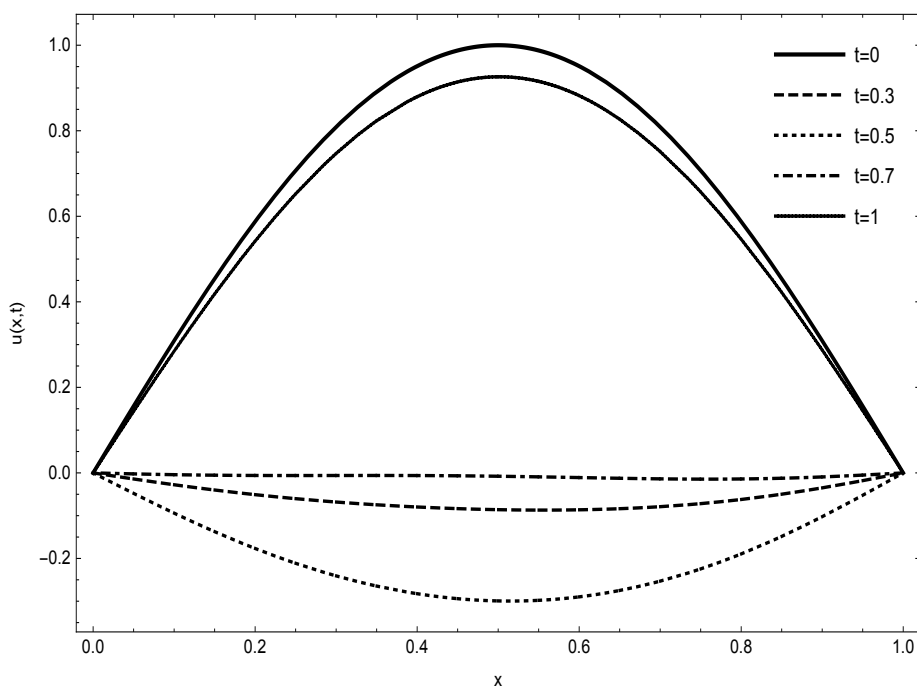
Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.227373	1.21098×10^{-11}
(0.2, 0.2)	0.158925	1.7906×10^{-11}
(0.3, 0.3)	-0.0286819	4.60745×10^{-11}
(0.4, 0.4)	-0.196038	6.31725×10^{-11}
(0.5, 0.5)	-0.258467	7.38272×10^{-11}
(0.6, 0.6)	-0.196576	7.6835×10^{-11}
(0.7, 0.7)	-0.0486184	8.60242×10^{-11}
(0.8, 0.8)	0.102154	1.09004×10^{-12}
(0.9, 0.9)	0.149519	1.14691×10^{-11}

جدول ۶.۷: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 1$

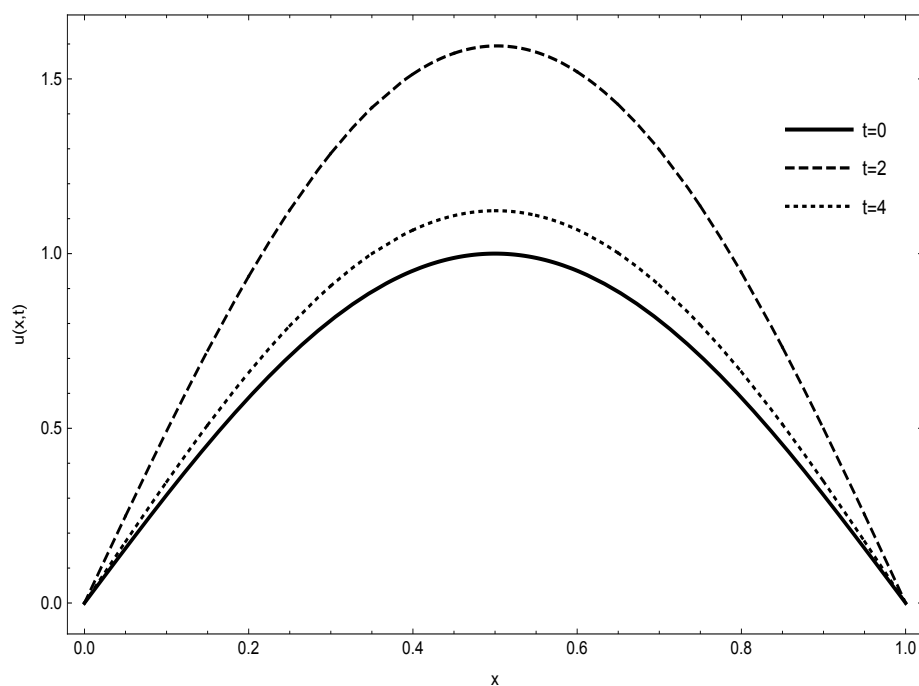
Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.228238	1.39757×10^{-11}
(0.2, 0.2)	0.16016	2.15371×10^{-11}
(0.3, 0.3)	-0.0287455	5.14205×10^{-11}
(0.4, 0.4)	-0.198026	6.99688×10^{-11}
(0.5, 0.5)	-0.261383	8.18388×10^{-11}
(0.6, 0.6)	-0.19881	8.56434×10^{-11}
(0.7, 0.7)	-0.0492896	9.58326×10^{-11}
(0.8, 0.8)	0.102574	1.20004×10^{-10}
(0.9, 0.9)	0.149885	1.26796×10^{-11}

جدول ۷.۷: نتایج عددی و خطای مانده برای $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 8$

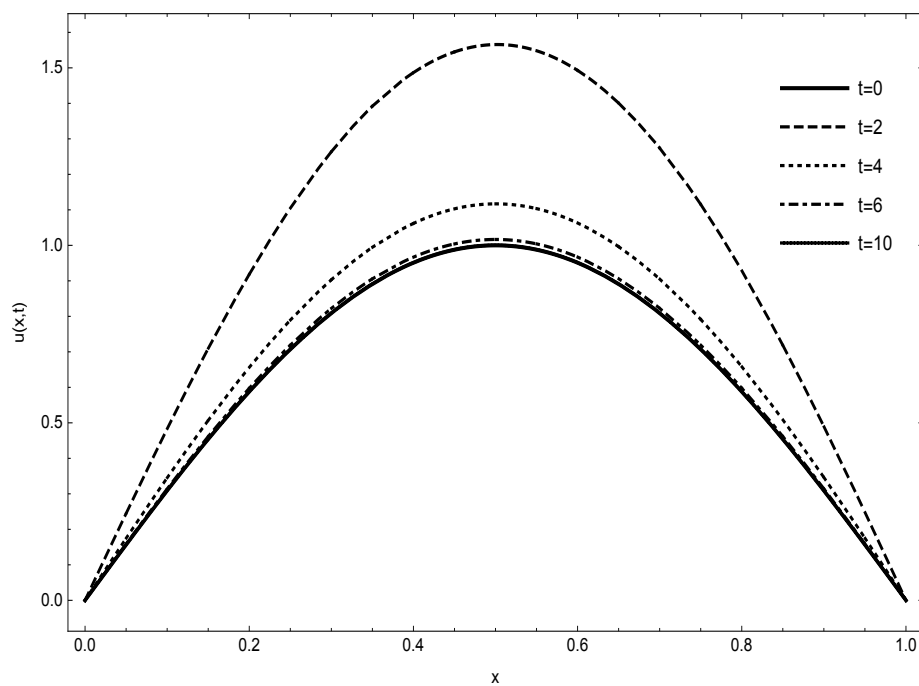
Nodes	$u_{20}(x, t)$	$E(x, t)$
(0.1, 0.1)	0.237237	9.31578×10^{-12}
(0.2, 0.2)	0.173574	2.30782×10^{-11}
(0.3, 0.3)	-0.0291853	1.14156×10^{-12}
(0.4, 0.4)	-0.220289	1.14303×10^{-11}
(0.5, 0.5)	-0.294597	1.62139×10^{-11}
(0.6, 0.6)	-0.224314	2.74148×10^{-11}
(0.7, 0.7)	-0.0570162	3.12081×10^{-11}
(0.8, 0.8)	0.106913	2.17772×10^{-11}
(0.9, 0.9)	0.153612	2.93794×10^{-11}



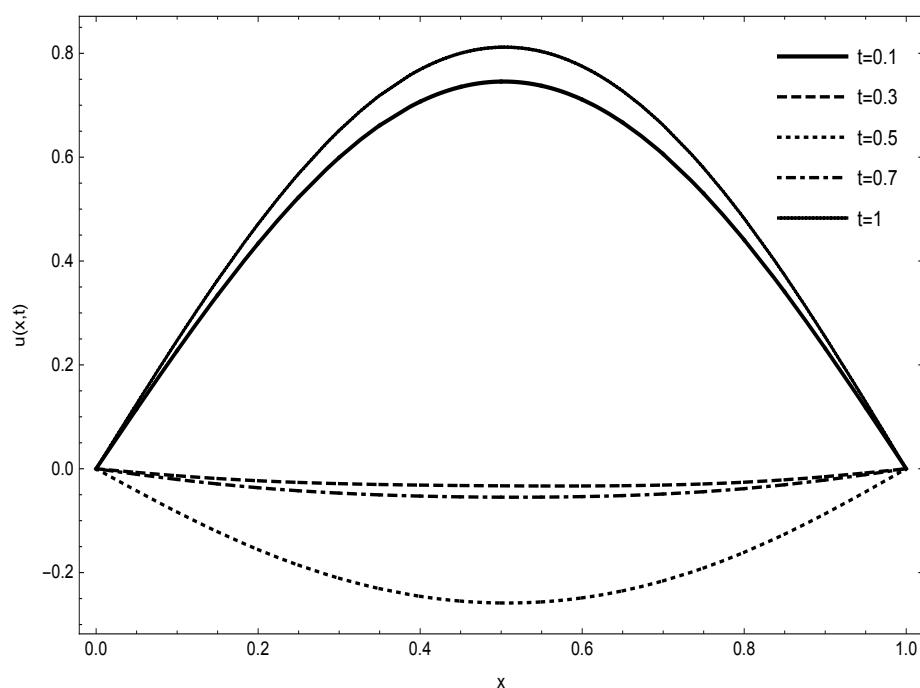
شکل ۱۰.۷: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ ، $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 0.3$



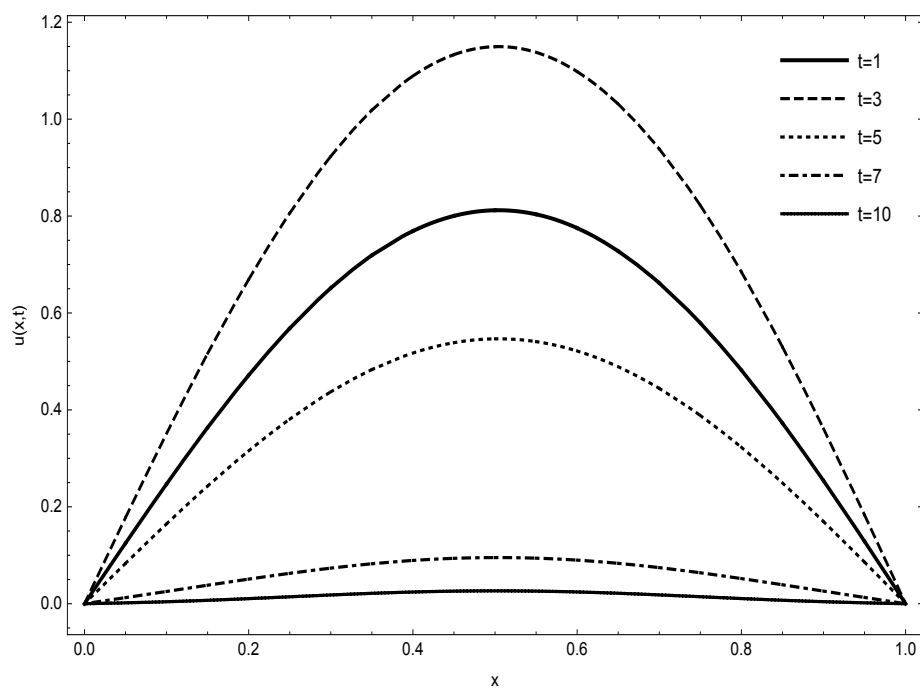
شکل ۲.۷: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ ، $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 1$



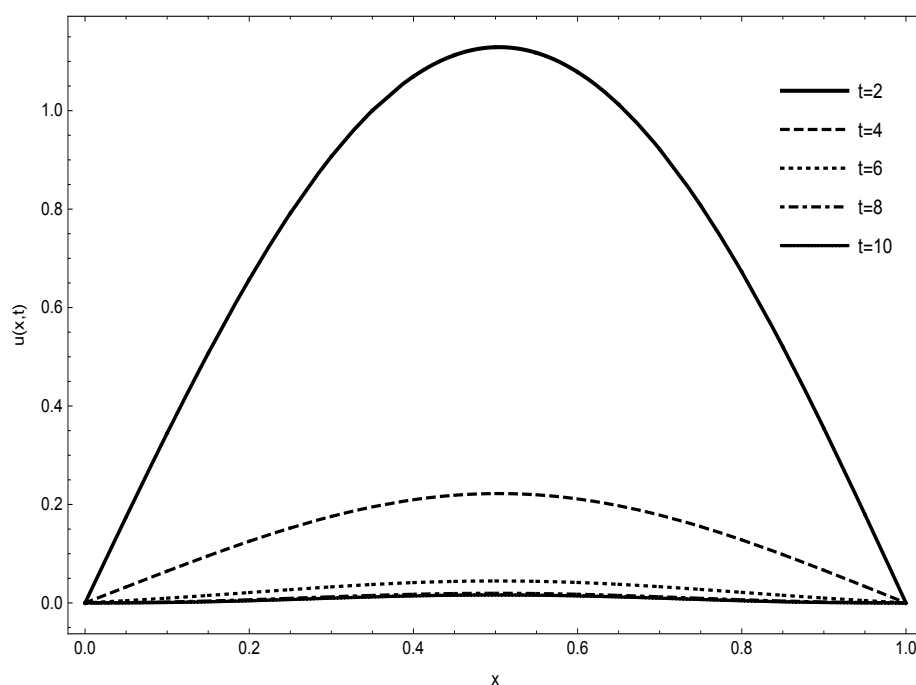
شکل ۳.۷: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ ، $f(x) = \sin(\pi x)$ و $\lambda = 8$



شکل ۴.۷: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ ، $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 0.3$



شکل ۵.۷: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ ، $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 1$



شکل ۶.۷: رسم جواب عددی u مسئله مقدار اولیه بدست آمده با $n = 20$ ، $f(x) = x^3(1-x)^3$ و $\lambda = 8$

فصل ۸

نتیجه گیری و کارهای آتی

از نتایج بارز این رساله می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. کارآمدی روش هسته های بازتولیدی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مقدار اولیه، مقدار مرزی.
 ۲. بهبود روش کلاسیک هسته های بازتولیدی با حذف روش متعامد سازی گرام اشمیت و جایگزین کردن آن با حل دستگاه به طوری که الگوریتم ارائه شده دارای سرعت اجرای بالاتر و در نتیجه تقویت روش می شود.
 ۳. بررسی همگرایی روش ارائه شده.
 ۴. حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با دامنه های کراندار و همچنین دامنه های نامتناهی.
 ۵. محاسبات عددی و بررسی آن ها که مشاهده می شود با یافته های نظری بدست آمده منطبق است.
 ۶. تولید هسته های بازتولیدی جدید از مرتبه های مختلف و همچنین شرایط اولیه و مرزی متفاوت.
- برای دانشجویانی که علاقه به کار در این زمینه دارند برخی از پیشنهادات به صورت زیر ارائه می شود:
۱. آیا می توان چندگانگی جواب را در مسئله با مشتقات جزئی با استفاده از روش هسته های بازتولیدی فضای هیلبرت مورد بررسی قرار داد؟
 ۲. برآورد خطا یا تحلیل خطایی برای اعمال روش هسته های بازتولیدی فضای هیلبرت بر روی مسائل غیرخطی.
 ۳. با توجه به گستردگی مطالعات انجام شده در روش های شبه طیفی^۱ با استفاده از چند جمله ای های متعامد و همچنین تکنیک های برآورد خطا در این روش ها بررسی امکان به کارگیری آن ها با استفاده از پایه های تولید شده توسط هسته ای بازتولیدی پیشنهاد می شود.

^۱Pseudo-spectral method

۴. حذف روش گرام-اشمیت در روش کلاسیک با استفاده از روش‌های مختلف به طوری که منجر به افزایش دقت محاسباتی شود.

۵. با توجه به این که پایه‌های تولید شده توسط هسته‌های بازتولیدی، پایه‌ای یک فضای ضرب داخلی هستند، پیشنهاد می‌شود گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل معمولی و مسائل با مشتقات جزئی با استفاده از روش‌های ارائه شده براساس فرم قوی (روش هم‌محلی^۲) و فرم ضعیف (روش گالرکین^۳) معادلات مورد بررسی قرار گیرد.

^۲ Collocation method

^۳ Galerkin method

مراجع

- [1] Abbasbandy, S., Shivanian, E. (2010) Prediction of multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems: Novel application of homotopy analysis method, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 15 3830–3846.
- [2] Abbasbandy, S., Magyari, E., Shivanian, E., (2009) The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 14 3530–3536.
- [3] Abbasbandy, S., Hashemi, M.S., Liu, C.S. (2011) The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 16 4238–4249.
- [4] Abbasbandy, S., (2008) Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method, *Chem. Eng. J.*, 136 144–150.
- [5] Abbasbandy, S., Roohani Ghehsareh, H., Hashim, I., (2013) A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear Schrodinger equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37 885–898.
- [6] Abbasbandy, S., Hashemi, M.S., (2011) Group preserving scheme for the Cauchy problem of the Laplace equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 35 1003–1009.
- [7] Abbasbandy, S., Ghehsareh, H.R., Hashim, I., (2012) Numerical analysis of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis using a meshfree method based on the radial basis function, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 36 1811–1818.
- [8] Zaremba, S., (1908) Sur le calcul numerique des founctions demandness dans le problems de dirichlet et le problems hydrodynamique, *Bulletin International de I Academie des Sciences de Cracovie*, 68 125-195.
- [9] Bergman, S., (1930) Uber Kurvenintegale von Funktionen zweier komplexen Veranderlichen, die Differentialgleichungen befriedigen, *Math. Z.*, 32 386–406.
- [10] Bergman, S., (1940) The approximation of functions satisfying a linear partial differential equation, *Duke Math. J.*, 6 537–561.
- [11] Aronszajn, N., (1943) The theory of reproducing kernels and their applications, *Cambridge Philosophy Society Proceedings*, 39 133–153.
- [12] Aronszajn, N., (1950) Theory of reproducing kernels, *Transactions of the American Mathematical Society*, 68 no.3 337–404.
- [13] Cui, M.G., Lin, Y.Z., (2009) Nonlinear Numerical Analysis in Reproducing Kernel Space, Nova Science Pub. Inc., Hauppauge.
- [14] Cui, M.G., Geng, F.Z., (2007) Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space, *J. Comput. Appl. Math.*, 205 6–15.



- [15] Cui, G., Geng, F.Z., (2008) A computational method for solving third-order singularly perturbed boundary-value problems, *Appl. Math. Comput.*, 198 896–903.
- [16] Abbasbandy, S., Azarnavid, B., Alhuthali, M.S., (2015) A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 279 293–305.
- [17] Li, X.Y., Wu, B.Y., (2013) Error estimation for the reproducing kernel method to solve linear boundary value problems, *J. Comput. Appl. Math.*, 243 10–15.
- [18] Li, X.Y., Wu, B.Y., (2011) A novel method for nonlinear singular fourth order four-point boundary value problems, *Comput. Math. Appl.*, 62 27–31.
- [19] Li, X.Y., Wu, B.Y., (2014) A continuous method for nonlocal functional differential equations with delayed or advanced arguments, *J. Math. Anal. Appl.*, 409 485–493.
- [20] Niu, J., Lin, Y., Cui, M., (2012) Approximate solutions to three-point boundary value problems with two-space integral condition for parabolic equations, *Abstr. Appl. Anal.* 2012 1–9.
- [21] Niu, J., Lin, Y., Zhang, C., (2012) Numerical solution of nonlinear three-point boundary value problem on the positive half-line, *Math. Methods Appl. Sci.*, 35 1601–1610.
- [22] Niu, J., Lin, Y., Zhang, C., (2012) Approximate solution of nonlinear multi-point boundary value problem on the half-line, *Math. Model. Anal.*, 2 190–202.
- [23] Lin, Y., Niu, M., Cui, C., (2012) A numerical solution to nonlinear second order three-point boundary value problems in the reproducing kernel space, *Appl. Math. Comput.*, 218 7362–7368.
- [24] Zhang, C., Niu, J., Lin, Y., (2012) Numerical Solutions for the Three-Point Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equations, *Abstr. Appl. Anal.*, 2012 1–16.
- [25] Niu, J., Lin, Y., Cui, M., (2013) A novel approach to calculation of reproducing kernel on infinite interval and applications to boundary value problems, *Abstr. Appl. Anal.* 2013 1–7.
- [26] Niu, J., Li, Y., (2014) Numerical Algorithm for the Third-Order Partial Differential Equation with Three-Point Boundary Value Problem, *Abstr. Appl. Anal.* 2014 1–7.
- [27] Wang, Y.L., Chao, L., (2008) Using reproducing kernel for solving a class of partial differential equation with variable-coefficients, *Appl. Math. Mech. Engl. Ed.*, 29(1) 129–137.
- [28] Wang, Y.L., Cao, X.J., Li, X.N., (2011) A new method for solving singular fourth-order boundary value problems with mixed boundary conditions, *Appl. Math. Comput.*, 217 7385–7390.
- [29] Abbasbandy, S., Van Gorder, R.A., Bakhtiari, P., (2017) Reproducing kernel method for the numerical solution of the Brinkman–Forchheimer momentum equation, *J. Comput. Appl. Math.*, 311 262–271.
- [30] Bakhtiari, P.; Abbasbandy, S.; Van Gorder, R.A.; (2017) Solving the Dym initial value problem in reproducing kernel space, *Numer. Algor.*, DOI 10.1007/s11075-017-0381-2.
- [31] Bakhtiari, P.; Abbasbandy, S.; (2016) Reproducing kernel method for the numerical solution of the sine–Gordon equation with initial conditions, 13th International Seminar on Differential Equations, Dynamical Systems and Applications, Department of Mathematical Sciences Isfahan University of Technology, Isfahan.



- [32] Bakhtiari, P; Abbasbandy, S; (2017) The numerical solution of Benjamin–Bona–Mahony equation by using the reproducing kernel method, 48th Annual Iranian Mathematics Conference, Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran.
- [33] Aliprantis, C.D., (1998) Principles of real analysis, Gulf Professional Publishing.
- [34] Cheney, W; Kincaid, D; (1994) Numerical Mathematics and Computing, Pacific Grove.
- [35] Andersson, L; Chrusciel P.T; Friedrich, H; (1992) On the regularity of solutions to the Yamabe equation and the existence of smooth hyperboloidal initial data for Einstein's field equations, *Communications in mathematical physics*, 149 587–612.
- [36] Brendle, S; (2008) Blow-up phenomena for the Yamabe equation, *Journal of the American Mathematical Society*, 21 951–980.
- [37] Alice Chang, S.Y; Han Z.C; Yang, P; (2005) Classification of singular radial solutions to the σ_k Yamabe equation on annular domains, *Journal of Differential Equations*, 216 482–501.
- [38] Van Gorder, R.A; (2012) Control of error in the homotopy analysis of semi-linear elliptic boundary value problems, *Numer. Algorithms*, 61 613–629.
- [39] Bhrawy, A.H; Alofi, A.S; Van Gorder, R.A; (2014) An efficient collocation method for a class of boundary value problems arising in mathematical physics and geometry, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, 2014 ID:425648.
- [40] Geng, F.Z; (2009) New method based on the HPM and RKHSM for solving forced Duffing equations with integral boundary conditions, *J. Comput. Appl. Math.*, 233 165–172.
- [41] Geng, F.Z; Cui, M.G; (2007) Solving a nonlinear system of second order boundary value problems, *J. Math. Anal. Appl.*, 327 1167–1181.
- [42] Geng, F.Z; Cui, M.G; (2012) A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems, *Appl. Math. Lett.*, 25 818–823.
- [43] Hooman, K; (2008) A perturbation solution for forced convection in a porous-saturated duct, *J. Comput. Appl. Math.*, 211 57–66.
- [44] Weidman, P.D; Medina, A; (2008) Porous Media Convection between Vertical Walls: Continuum of Solutions from Capped to Open Ends, *Acta. Mechanica.*, 199 209–216.
- [45] Hooman, K; Merrikh, A.A; (2006) Analytical solution of forced convection in a duct of rectangular cross section saturated by a porous medium, *Heat Transfer*, 128 596–600.
- [46] Van Gorder, R.A; Vajravelu, K; Akyildiz, F.T; (2009) Solutions to the Brinkman–Forchheimer momentum equation for a unidirectional flow over a rectangular domain, *Int. J. Fluid Mech. Res.*, 36 552–565.
- [47] Mohammadi, M; Mokhtari, R; (2014) A reproducing kernel method for solving a class of nonlinear system of PDEs, *Math. Model. Anal.*, 19 180–198.
- [48] Amann, H; (1971) On the existence of positive solutions of nonlinear elliptic boundary value problems, *Indiana Univ. Math. J.*, 21 125–146.
- [49] Gidas, B; Ni, W.M; Nirenberg, L; (1979) Symmetry and related properties via the maximum principle, *Comm. Math. Phys.*, 68 209–243.
- [50] Yucel Ugur; (2008) Homotopy analysis method for the sine-Gordon equation with initial conditions, *Appl. Math. Comput.*, 203, 6 387–395.



- [51] Kruskal, M.D; (1975) Nonlinear wave equations, in: J. Moser (Ed.), *Dynamical Systems, Theory and Applications, Lecture Notes in Physics, Springer*, 38 19–25.
- [52] Fuchssteiner, B; Schulze, T; Carillo, S; (1992) Explicit solutions for the Harry Dym equation, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 25 223–230, doi: 10.1088/030-4470/25/1/025.
- [53] Gesztesy, F; Unterkofer, K; (1992) Isospectral deformations for Sturm–Liouville and Dirac–type operators and associated nonlinear evolution equations, *Reports on Mathematical Physics*, 31 113–137.
- [54] Kadanoff, L.P; (1990) Exact solutions for the Saffman–Taylor problem with surface tension, *Physical Review Letters*, 65 2986–2988.
- [55] Rogers, C; (1987) The Harry Dym equation in $2 + 1$ dimensions: a reciprocal link with the Kadomtsev–Petviashvili equation, *Physics Letters A*, 120 15–18.
- [56] Dmitrieva, L.A; (1993) The higher–times approach to multisoliton solutions of the Harry Dym equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 26 60– 65.
- [57] Feng, B; Inoguchi, J; Kajiwara, K; Maruno, Y; Ohta, Z; (2013) Integrable discretizations of the Dym equation, *Front. Math. China*, 8 no.5, 1017–1029.
- [58] Mallory, K; Van Gorder, R.A; (2014) Method for constructing analytical solutions to the Dym initial value problem, *Appl. Math. Comput.*, 226 67–82.
- [59] Guo, B.Y; Rogers, C; (1989) On Harry–Dym equation and its solution, *Sci. China Ser. A*, 32 283–295.
- [60] Hereman, W; Banerjee, P.P; Chatterjee, M.R; (1989) Derivation and implicit solution of the Harry Dym equation and its connections with the Korteweg–de Vries equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 22 241–258.
- [61] Novikov, D.p; (1999) Algebraic–geometric solutions of the Harry Dym equation, *Siberian Mathematical Journal*, 40 136–140.
- [62] Mokhtari, R; (2011) Exact solutions of the Harry–Dym equation, *Communications in Theoretical Physics*, 55 204–208.
- [63] Abbasbandy, S; Shirzadi, A; (2010) The first integral method for modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 15 1759–1764.
- [64] Dehghan, M; Abbaszadeh, M; Mohebbi, A; (2014) The numerical solution of non-linear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation via the meshless method of radial basis functions, *Comput. Math. Appl.*, 68 212–237.
- [65] Noor, M.A; Noor, K.I; Waheed, A; Al-Said, A.E; (2011) Some new solitary solutions of the modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Comput. Math. Appl.*, 62 2126–2131.
- [66] Omrani, K; (2006) The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin–Bona–Mahony (BBM) equation, *Appl. Math. Comput.*, 180 614–621.
- [67] Xiao, H; Zhao, Q; (2013) Nonlinear stability of generalized Benjamin–Bona–Mahony– Burgers shock profiles in several dimensions, *J. Math. Anal. Appl.*, 406 165– 187.
- [68] Dehghan, M; Abbaszadeh, M; Mohebbi, A; (2015) The use of interpolating element-free Galerkin technique for solving 2D generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and regularized long-wave equations on non-rectangular domains with error estimate, *Journal of Comput. Appl. Math.*, 286 211–231.
- [69] Swift, J.B; Hohenberg, P.C; (1977) Hydrodynamic fluctuations at the convective instability, *Phys. Rev. A*, 15 319–328.



- [70] Chaparova, J; Peletier, L.A; Tersian, S; (2004) Existence and nonexistence of non-trivial solutions of semilinear sixth order ordinary differential equations, *Appl. Math. Lett.*, 17 1207–1212.
- [71] Chaparova, J; Peletier, L.A; Tersian, S; (2003) Existence and nonexistence of non-trivial solutions of semilinear fourth- and sixth-order ordinary differential equations, *Adv. Diff. Eqns.*, 8 1237–1258.
- [72] Perez-Moreno, S.S; Chavarria, R; (2013) Chavarria, Numerical Solution of the Swift–Hohenberg Equation, Experimental and Computational Fluid Mechanics, *Environmental Science and Engineering*, 409–416.
- [73] Vishal, K; Das, S; Ong, S.H; Ghosh,P; (2013) On the solutions of fractional Swift Hohenberg equation with dispersion, *Appl. Math. and Comput.*, 219 5792–5801.
- [74] Talay Akyildiz, F; Siginer, D.A; Vajravelu, K; Van Gorder, R.a; (2010) Analytical and numerical results for the Swift–Hohenberg equation, *Appl. Math. and Comput.*, 216 221–226.
- [75] Dee, G.T; Saarloos, W; (1988) Bistable systems with propagating fronts leading to pattern formation, *Phys. Rev. Lett.*, 60 2641–2644.
- [76] Zimmerman, W; (1991) Propagating fronts near a Lifschitz point, *Phys. Rev. Lett.*, 66 1546.
- [77] Caginalp, G; Fife, P.C; (1986) Higher order phase field models and detailed anisotropy, *Phys. Rev. B.*, 34 4940–4943.
- [78] Gardner, R.A; Jones, C.K; (1989) Traveling waves of a perturbed diffusion equation arising in a phase field model, *Indiana Univ. Math. J.*, 38 1197–1222.
- [79] Andrzejczak, G; (2012) A simple NSC-RKHS algorithm for solving linear boundary value problems–error bounds and implementations, *Appl. Math. Comput.*, 218 11009–11020.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Absolutely	به طور مطلق
Accuracy	دقت
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریبی
Arbitrary	دلخواه
Boundary	مرزی
Covergence	همگرایی
Conditions	شرایط
Continuous	پیوسته
Dense	چگال
Equation	معادله
Error	خطا
Exact	دقیق
Existence	وجود
Gram-Schmidt	گرام-اشمیت
Hilbert space	فضای هیلبرت
Higher	بالا
Inner product	ضرب داخلی
Initial value	مقدار اولیه
Iterative	تکراری
Kernel	هسته
Linear	خطی
Lower	پایینی
Method	روش
Multipoint	چندنقطه‌ای

Norm	نرم
Nonlinear	غیرخطی
Order	مرتبه
Orthogonal	متعامد
Process	فرآیند
Radial	شعاعی
Reproducing	بازتولید
Series	سری
Symmetric	متقارن

Surname: Bakhtiari

Name: Parisa

Title: Application of a Novel Numerical Method for Solving Partial Differential Equations Based on Reproducing Kernel Space

Supervisor: Prof. Saeid Abbasbandy

Advisors: Prof. Davood Rostamy and Dr. Robert A. Van Gorder

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University

Faculty of Sciences

Department of Applied Mathematics

Date: February 2018

Number of pages: 96

Keywords: Partial Differential Equation; Reproducing Kernel Method; Boundary Value Problem; Initial Value Problem; Gram-Schmidt Orthogonalization; Riesz Representation Theorem; Convergence Analysis.

Abstract

Many of the phenomena in science and engineering are modeled in differential equations with boundary and initial conditions. Generally, the analytical solution of these equations is not possible. Hence, the utilization of the efficient numerical methods for solving these equations is so important in applied sciences. The aim of this thesis is to study the numerical method for solving partial differential equations and the reproducing kernel property has the primary role with regard to its space. As a result, the approximate solution of the problem is presented in the form of the series. It is also shown that it converges to an analytical solution. The major problem with the classical method of reproducing kernel method is the application in high dimension for partial differential equations. Therefore, we intend to present a novel application of the reproducing kernel method. We present a method that avoids the implementation of Gram-Schmidt orthogonalization process used in the classical method and finally, this will reduce the computational time.

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

Imam Khomeini International University
Faculty of Sciences
Department of Applied Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

Application of a Novel Numerical Method for Solving Partial Differential Equations Based on Reproducing Kernel Space

Supervisor

Prof. Saeid Abbasbandy

Advisors

Prof. Davood Rostamy and Dr. Robert A. Van Gorder

by

Parisa Bakhtiari

February 2018