

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم تحقیقات
گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)
گرایش آنالیز عددی

عنوان

استفاده از توابع پایه ای شعاعی با تمرکز روی پارامتر شکلی
متغیر برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی

استادان راهنما:

دکتر سعید عباس بندی
دکتر توفیق اللهویرنلو

استاد مشاور:

دکتر اسماعیل بابلیان

نگارش:

حنانه نوجوان

شهریور ۱۳۹۶



معاونت پژوهش و فن آوری
به نام خدا
مشور اخلاق و پژوهش

بایاری از خداوند بجان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و بهواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه اهمیت جایگاه دانشگاه در اعلامی فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضاء بیات علمی واحد های دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱. اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.
۲. اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران، پرسنل و دانشجویان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
۳. اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی و دانشگاه و کلیه بهکاران پژوهش.
۴. اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
۵. اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
۶. اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.
۷. اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.
۸. اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بهکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
۹. اصل برانت: التزام به برانت جویی از هرگونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شبه های غیر علمی می آلاینند.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم تحقیقات

تعهدنامه اصالت رساله یا پایان نامه

اینجانب حنانه نوجوان دانش‌آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی که در تاریخ ۹۶/۶/۲۹ از رساله خود تحت عنوان "استفاده از توابع پایه ای شعاعی با پارامتر شکلی متغیر در حل معادلات دیفرانسیل جزئی" با کسب نمره ۱۹.۵ و درجه عالی دفاع نموده‌ام بدینوسیله متعهد می‌شوم:

(۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده‌ام.

(۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پائین‌تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

(۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره‌برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این رساله داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می‌پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچ‌گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:
حنانه نوجوان
تاریخ و امضاء:

گزیده ای از دعای مکارم الاخلاق امام سجاد (علیه السلام)

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و ایمانم را به کاملترین درجه ایمان برسان و یقینم را بهترین یقین قرار ده و فرجام نیتم را بهترین نیتها بگردان و عملم را به بهترین اعمال برسان.
پروردگارا، با لطف خودت نیتم را نیکو گردان و یقینم را با رحمت بی پایانت از گزند انحراف، مصون دار و با قدرت بی انتهایت، هر عمل فاسدی که از من سر زده است اصلاح فرما.

پروردگارا، بر محمد و آل او درود فرست و اموری را که اهتمام به آنها مشغولم می کند کفایت فرما و مرا به کاری که فردای قیامت از من درخواست می کنی وادار کن و در ایام عمرم فراغت بخش تا به کاری که برای آنم آفریده ای پردازم و بی نیازم کن و به من روزی وسیع عطا فرما و عزت ببخش و گرفتار کبر و خودپسندی نکن و به عبادت خالص مشغولم دار و عبادتم را با عجب و غرور باطل نکن.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و به هر اندازه ای که میان مردم مرا مرتبه می بخشی پیش خودم به همان مقدار خوارم کن و هر عزت ظاهری که برایم پدیدار می سازی به همان اندازه پیش نفسم برای من خواری باطنی پدید آور.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و چنان کن که از هدایت شایسته بهره مند شوم و آن را با هیچ چیز عوض نکنم و از راه حق بهره مند گردم و از آن بیرون نروم و به نیت درست دست یابم و در آن شک نکنم و تا هنگامی که عمرم در راه طاعت تو می گذرد به من عمر بده و آنگاه که عمرم چراگاه شیطان شود، پیش از آنکه دشمنی سخت تو به من روی آورد یا خشم تو محکم و پایدار گردد جانم را بگیر.

پروردگارا، هیچ خصلتی را که مردم زشت بدانند در من نگذار مگر آنکه اصلاحش کنی و هیچ عادت ناپسندی را که مردم سرزنش کنند باقی نگذار مگر آنکه نیکش سازی و هیچ خوی پسندیده ای را در من ناقص نگذار مگر آنکه کاملش کنی.

پروردگارا بر محمد و آل او درود فرست و دشمنی سخت دشمنان را درباره من به دوستی تبدیل کن و حسد و بدخواهی سرکشان را به محبت تغییر ده و بدگمانی صالحان را به اطمینان و دشمنی نزدیکان را به دوستی و بدرفتاری خویشان را به خوشرفتاری و خوار کردن نزدیکان را به یاری و دوستی مدارا کنندگان را به دوستی واقعی مبدل فرما.

اگر تنها ترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه ندانستن ها است...

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.
در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ اساتید راهنمای خود، جناب آقای دکتر سعید عباس بندی و جناب آقای دکتر توفیق اللهویرنلو صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید. همچنین از جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان که به عنوان استاد مشاور از راهنمایی های ایشان بهره برده نیز تشکر می کنم. از داوران گرامی، آقایان دکتر حسین زاده لطفی، دکتر عزتی و دکتر فریبرز عراقی که زحمت داوری را را به عهده داشتند کمال تشکر را دارم. همچنین از سرکار خانم دکتر محمدی که دلسوزانه بنده را راهنمایی کردند، کمال تشکر و سپاس دارم.
در پایان، بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس شان را و تشکر می کنم از خانواده عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

حنانه نوجوان

شهریور ۱۳۹۶

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
خ	فهرست تصاویر
ر	فهرست جداول
۲	پیش‌گفتار
۵	۱ توابع پایه ای شعاعی
۶	۱-۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز
۷	۲-۱ توابع درونیاب پایه ای شعاعی
۸	۱-۲-۱ توابع معین مثبت
۱۸	۳-۱ هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت و فضاهای محلی
۱۹	۱-۳-۱ هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت
۲۱	۲-۳-۱ فضاهای محلی توابع معین مثبت اکید
۲۳	۴-۱ پایداری مسائل درونیاب پایه ای شعاعی
۲۸	۲ مروری بر روش های بدون شبکه
۲۹	۱-۲ مقدمه
۳۱	۲-۲ تولید نقاط
۳۲	۳-۲ تقریب جواب
۳۲	۴-۲ آزمودن به فرم سراسری (روش هم محلی)
۳۲	۱-۴-۲ روش هم محلی کانسا (نا متقارن)
۳۴	۲-۴-۲ آزمودن به فرم موضعی
۳۵	۳ روش بدون شبکه موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان
۳۶	۱-۳ مقدمه
۳۶	۲-۳ هسته های با پارامتر شکلی ثابت
۳۷	۳-۳ هسته های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده
۳۸	۱-۳-۳ درون یابی

۳۸		توابع پایه ای نیوتن	۴-۳
۴۰		روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده	۵-۳
		روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده برای حل معادله	۶-۳
۴۵		برگزر	
۴۸		نتایج عددی	۷-۳
۵۹		نتیجه گیری	۸-۳
۶۰		روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی با پارامتر شکلی متغیر	۴
۶۱		مقدمه	۱-۴
۶۱		پارامتر شکلی متغیر	۲-۴
۶۲		حل زوج معادلات دو بعدی غیرخطی برگزر	۳-۴
۶۶		نتایج عددی	۴-۴
۷۷		نتایج و پیشنهادات	۵
۷۸		مقدمه	۱-۵
۷۸		نتیجه گیری	۲-۵
۷۸		پیشنهادهات	۳-۵
۷۹		پیوست	
۸۲		منابع	
۹۱		واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۳		واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

فهرست تصاویر

صفحه	عنوان
۴۸	۱-۳ مجموعه نقاط متساوی الفاصله و دامنه های موضعی با فرض $n_s = 5$ در نقاط داخلی و مرزی. $\times$ بیانگر نقطه مرکزی می باشد.
۴۹	۲-۳ ماتریس های تنک D_1 و D_2 برای $n = 50$ نقطه
۵۰	۳-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 10$ (راست) و $Re = 100$ (چپ). (مثال ۱)
۵۰	۴-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ (راست) و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)
۵۱	۵-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 300$ برای $Re = 100000$ (راست) و $Re = 1000000$ (چپ). (مثال ۱)
۵۱	۶-۳ نتایج عددی u با فرض $c = 10$, $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ (راست) و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)
۵۱	۷-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$ برای $Re = 1000$ (راست) و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)
۵۱	۸-۳ نتایج عددی u با فرض $c = 10$, $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$ برای $Re = 1000$ (راست) و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)
۵۴	۹-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 10$ (راست) و $Re = 100$ (چپ). (مثال ۲)
۵۴	۱۰-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ (راست) و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)
۵۵	۱۱-۳ نتایج عددی u با فرض $c = 10$, $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)

- ۱۲-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$
- ۵۵ برای $Re = 1000$ (راست) و $n = 400$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)
- ۱۳-۳ نتایج عددی u با فرض $c = 10$, $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$ برای
- ۵۵ $Re = 1000$ (راست) و $n = 400$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)
- ۱۴-۳ نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 60$
- ۵۷ برای $Re = 100$ (راست) و $n = 210$ برای $Re = 1000$ (چپ). (مثال ۳)
- ۱۵-۳ نمودار خطای مطلق برای $Re = 10000$ و $T = 1$ با نقاط متساوی الفاصله $n = 40$, $\nu = \frac{5}{4}$
- ۵۷ و $c = 10$ (راست) و $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (چپ). (مثال ۴)
- ۱۶-۳ نمودار خطای مطلق $Re = 1000$ و $T = 0.2$ با نقاط متساوی الفاصله $n = 35$, $\nu = \frac{7}{4}$
- ۵۸ و $c = 10$ (راست) و $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (چپ). (مثال ۵)
- ۱-۴ مجموعه نقاط متساوی الفاصله و دامنه های موضعی با فرض $n_s = 5$ در نقاط داخلی
- ۶۷ و مرزی.
- ۲-۴ نتایج عددی U و V با فرض $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$
- ۶۸ استراتژی ۱. (مثال ۱)
- ۳-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 10$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 441$ و
- ۶۹ استراتژی ۳. (مثال ۱)
- ۴-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 10$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
- ۶۹ استراتژی ۳. (مثال ۱)
- ۵-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
- ۶۹ $c = 10$. (مثال ۱)
- ۶-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
- ۷۰ استراتژی ۱. (مثال ۱)
- ۷-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 3721$ و
- ۷۰ استراتژی ۱. (مثال ۱)
- ۸-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
- ۷۰ استراتژی ۲. (مثال ۱)
- ۹-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
- ۷۱ استراتژی ۳. (مثال ۱)
- ۱۰-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
- ۷۱ استراتژی ۴. (مثال ۱)

- ۱۱-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
 ۷۲ استراتژی ۵. (مثال ۱)
- ۱۲-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
 ۷۲ $c = 10$. (مثال ۱)
- ۱۳-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
 ۷۳ استراتژی ۲. (مثال ۱)
- ۱۴-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
 ۷۳ استراتژی ۳. (مثال ۱)
- ۱۵-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
 ۷۳ استراتژی ۴. (مثال ۱)
- ۱۶-۴ نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و
 ۷۴ استراتژی ۵. (مثال ۱)
- ۱۷-۴ نتایج عددی برای U و V با فرض $T = 0.4$, $x = 0.5$, $Re = 1000$, $c = 10$ و $n = 441$ (مثال ۲) ۷۶
- ۱۸-۴ نتایج عددی برای U و V با فرض $T = 0.4$, $x = 0.5$, $Re = 10000$ و $n = 441$ (مثال ۲) . . ۷۶

فهرست جداول

صفحه	عنوان
۵۲	۱-۳ نتایج عددی و خطای u با فرض $Re = 100$, $n = 90$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۱)
۵۲	۲-۳ نتایج عددی و خطای u با فرض $Re = 1000/3$, $n = 90$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۱)
۵۳	۳-۳ نتایج عددی u با فرض $T = 0.5$, $Re = 10000$, $n = 175$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۱)
۵۶	۴-۳ نتایج عددی u با فرض $Re = 100$, $n = 180$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۲)
۵۷	۵-۳ خطای مطلق برای $Re = 10000$ با نقاط متساوی الفاصله $n = 40$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۴)
۵۸	۶-۳ خطای مطلق برای مقادیر مختلف Re با نقاط متساوی الفاصله $n = 35$, $\nu = 7/2$ و $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۵)
۵۹	۷-۳ خطای مطلق برای مقادیر مختلف Re با نقاط یکنواخت $n = 25$, $\nu = 7/2$ و $c(x) = 1 - x^2$ (مثال ۶)
۷۴	۱-۴ نتایج عددی u در زمان $T = 2$ با فرض $Re = 100$ و $n = 441$
۷۴	۲-۴ نتایج عددی V در زمان $T = 2$ با فرض $Re = 100$ و $n = 441$

چکیده

در این رساله از روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای نیوتن و توابع پایه ای شعاعی موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان استفاده شده است. به منظور پایداری بیشتر از هسته های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده برای ساخت توابع پایه ای نیوتن استفاده کردیم. همچنین برای پایداری و دقت بیشتر، توابع پایه ای شعاعی را مجهز به پارامتر شکلی متغیر کردیم. در ادامه با در نظر گرفتن توابع پایه ای معرفی شده به عنوان توابع آزمون، تابع جواب را در راستای متغیر مکان با استفاده از توابع آزمون به روش هم مکانی تقریب زدیم. سپس با استفاده از روش خطوط، به دستگاهی از معادلات با مشتقات معمولی بر حسب تابع جواب در راستای متغیر زمان دست یافتیم. روش های معرفی شده را برای حل معادله غیرخطی برگرز و زوج معادلات غیرخطی برگرز به کار گرفته و با مشاهده نتایج عددی به دقت و کارایی روش پی بردیم.

کلمات کلیدی:

روش بدون شبکه موضعی، روش خطوط، توابع پایه ای نیوتن، هسته شعاعی به طور متغیر مقیاس شده، پارامتر شکلی متغیر، معادله غیرخطی برگرز

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان به طور وسیعی در مدل بندی پدیده های متنوع طبیعی در علوم پایه و علوم مهندسی مورد استفاده قرار گرفته اند. جواب های این رده از مدل های ریاضی برای پیش بینی رفتار پدیده های مختلف به کار می روند، به نحوی که کاملاً بر نتایج حاصل از شرایط تجربی و آزمایشگاهی منطبق می باشند. متأسفانه در اغلب موارد یک روش تحلیلی برای محاسبه جواب های دقیق این مسائل وجود ندارد، لذا بررسی عددی این مسائل دارای اهمیت ویژه ای می باشند. روش های عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان ارائه شده اند که از آن جمله می توان به روش های استاندارد تفاضلات متناهی،^۱ عناصر متناهی،^۲ حجم متناهی،^۳ و روش های عناصر مرزی^۴ اشاره کرد.

روش عناصر متناهی یکی از متداول ترین و قوی ترین روش های عددی می باشد که در دهه های اخیر نظریه های تحلیلی، کاربردهای فراگیر در علوم مهندسی و همچنین بسته های نرم افزاری و کاربردی وسیعی بر مبنای آن ارائه شده اند. هر چند روش عناصر متناهی روشی پرکاربرد در علوم مهندسی می باشد ولی متأسفانه دارای دو اشکال اساسی می باشد که عبارتند از: محدودیت در شبکه بندی مسائل با دامنه هایی با شکل های هندسی پیچیده و همچنین پیچیدگی محاسباتی برای حل مسائل با ابعاد بالا.

به طور کلی در حل عددی بسیاری از مسائل با استفاده از روش های مبتنی بر شبکه بندی در اغلب موارد به اصلاح کردن شبکه ها در نواحی خاصی از دامنه، به خصوص نزدیک مرزها می باشد که سبب پیچیدگی محاسباتی خواهد شد. به علاوه روش های مبتنی بر شبکه بندی برای حل مسائل با ابعاد بزرگ مناسب نمی باشند.

در دهه های اخیر برخی روش های عددی ارائه و توسعه یافته اند که بدون نیاز به شبکه بندی دامنه، برای حل معادلات استفاده می شوند. مهمترین هدف ارائه و توسعه روشهای بدون شبکه، فائق آمدن بر مشکل شبکه بندی و شبکه بندی مجدد کل دامنه می باشد. به طور کلی یک تعریف جامع برای روش های بدون شبکه به صورت زیر می باشد: روش بدون شبکه، روشی است که بدون استفاده از یک شبکه بندی از قبل تعیین شده برای گسسته سازی دامنه و تنها با استفاده از یک مجموعه نقاط پراکنده در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده، مساله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل نماید. روشهای بدون شبکه، از یک مجموعه نقاطی که در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده برای نمایش دامنه و مرزهای آن (و نه برای گسسته سازی دامنه) استفاده می کند. این مجموعه نقاط پخش شده، نقاط میدانی نامیده می شوند و این نقاط یک شبکه نمی سازند. به این معنی که هیچگونه اطلاعات قبلی درباره رابطه بین این گرهها برای درونیایی یا تقریب تابع مجهول و... نیاز نیست. به تازگی تکنیک های متنوعی مبتنی بر روش های بدون شبکه معرفی شده اند و کاربردهای خوبی در حل عددی مسائل پیچیده مختلفی داشته اند و نشان داده شده است که پتانسیل بالایی برای تبدیل شدن به یک وسیله عددی قوی دارند. با این وجود، این روشها هنوز در مرحله توسعه قرار دارند.

در سال های اخیر چندین روش بدون شبکه معرفی شده اند که از مهمترین رده آنها می توان به موارد زیر اشاره کرد: روش ذرات هیدرودینامیکی هموار^۵ (SPH) [۵۵] روش عناصر پخش شده (DEM) [۷۵]، روش افراز یک (PUM)

^۱ finite differences

^۲ finite elements

^۳ finite volume

^۴ boundary element methods

^۵ Smoothed Particle Hydrodynamic

^۶ Diffuse element method

^۱ [۶۳]، روش اچ-پی کلود ^۲ [۲۵]، روش گالرکین با عناصر آزاد (EFG) ^۳ [۸]، روش بازتولید عناصر هسته (RKPM) ^۴ [۵۴]، روش بدون شبکه هم محلی بر اساس توابع پایه ای شعاعی (RBF) [۴۳]. روش نودهای مرزی (BNM) ^۵ [۷۲]، روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی (LBIE) ^۶ [۷۰، ۱۹، ۹۶، ۱۰۵]، روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین (MLPG) ^۷ [۶۲، ۱۸، ۲۰، ۶]، روش درونیایی شعاعی نقاط ^۸ [۵۳]. به علت کثرت این روشها، بیان همه آنها امکان پذیر نیست اما، مرجع [۷۷] یک بازنگری (تا حدی کلی) از این روشها ارائه داده است.

در سال ۱۹۹۰ برای اولین بار کانسای یک روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه نمود. در حقیقت در این مقاله کانسای یک ترکیب خطی از توابع پایه ای شعاعی را به عنوان تقریب جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه کرد. توابع پایه ای شعاعی برای اولین بار توسط هاردی و برای درونیایی توابع با داده های پراکنده در سال ۱۹۷۰ معرفی شده بود ولی با این وجود به طور مستقیم برای اولین بار توسط کانسای برای حل معادلات مشتقات جزئی مورد استفاده قرار گرفتند. در ادامه این رده از روش های بدون شبکه به علت توانایی زیاد آن ها برای تقریب جواب معادلات با ابعاد بالا و سادگی اجرا به شدت مورد توجه محققان و مهندسان قرار گرفت. به طور کلی مزیت اصلی روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی بر روش های مبتنی بر شبکه بندی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

- (۱) به طور معمول در روش های مبتنی بر شبکه عمده هزینه محاسباتی صرف شبکه بندی دامنه ها می شود در حالی که در روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی انتخاب نقاط کاملاً آزاد می باشد.
- (۲) عدم وابستگی به بعد فضا در روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی و امکان به کار گیری آسان آن برای مسایل با ابعاد بالا از عمده مزیت های این روش ها می باشد.

در بین روش های بدون شبکه مبتنی بر هسته، روش هم محلی توابع پایه ای شعاعی به طور گسترده برای حل مسائل مختلف فیزیکی به کار رفته است [۲۸، ۳۲، ۴۳، ۴۴]. یکی از معایب اصلی روش هم محلی توابع پایه شعاعی سراسری این است که شامل ماتریس های پر حاصل از گسسته سازی حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می باشد که این ماتریس ها اغلب بد حالت هستند. برای غلبه بر بدحالتی آنها روش هم محلی توابع پایه شعاعی موضعی اولین بار توسط سارلر ^۹ [۸۴] برای مسائل انتشار معرفی شد که دارای نتایج بهتری از نظر دقت و کار آیی بود. با توجه به اهمیت روش هم محلی توابع پایه ای شعاعی موضعی می توان از آن در حل مسائل پیچیده مانند انتقال -انتشار گرما با تغییر فاز، انتقال حرارت و جریان سیال، معادلات ناویر استوکس، جریان آشفته و مسائلی از این قبیل استفاده کرد. انتخاب پارامتر شکل ^{۱۰} در توابع پایه شعاعی موضعی است که بیش از دو دهه مطرح شده است [۱۱، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۸۲، ۹۳]. روش دقیق برای بدست آوردن این پارامتر وجود ندارد. بیشتر محققان با آزمون و خطا مقدار مطلوب این

^۱ Partition of unity method

^۲ Hp-cloud method

^۳ Element free Galerkin method

^۴ Reproducing kernel particle method

^۵ Boundary node method

^۶ Meshless local boundary integral equation

method

^۷ Meshless local Petrov-Galerkin method

^۸ Radial point interpolation method

^۹ Sarler

^{۱۰} Shape parameter

پارامتر را بدست می آورند.

شاباک^۱ و همکاران با در نظر گرفتن پارامتر شکلی برای این توابع متوجه شدند که با افزایش این پارامتر عدد حالت افزایش یافته و مسئله ناپایدارتر می شود، اما جواب به مقدار واقعی نزدیک تر می شود. با کاهش این پارامتر عدد حالت کاهش یافته و مسئله پایدارتر می شود، اما جواب از جواب واقعی دورتر می شود. از این رو با اصل عدم قطعیت مواجه هستیم.

یکی از روش های حل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده از روش خطوط^۲ می باشد [۲۱، ۲۲، ۲۴، ۹۵]. ایده اساسی روش خطوط، جایگزینی مشتقات جزئی موجود در PDE با عبارت جبری است. در این روش پس از گسسته سازی دامنه، تمامی مشتقات مکانی به وسیله یکی از روش های عددی تقریب زده می شود، اما مشتق زمانی بدون تغییر باقی می ماند. در این صورت مشتقات جزئی موجود در جملات معادله دیفرانسیل، دیگر به طور صریح برحسب متغیرهای مستقل بیان نمی شوند و تنها یک متغیر در مسئله باقی می ماند. در حقیقت به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می رسیم که تقریبی از معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی اصلی است. در این مرحله از هریک از روش های عددی برای حل معادله دیفرانسیل معمولی می توانیم استفاده کنیم.

این رساله شامل پنج فصل می باشد. در فصل اول توابع پایه ای شعاعی معرفی و خواص آن ها بررسی خواهند شد. در فصل دوم برخی روش های بدون شبکه معرفی می شوند. در فصل سوم به توضیح و فرمول بندی روش پیشنهادی رساله برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان می پردازیم و همچنین به پیاده سازی روش ارایه شده روی معادله غیرخطی یک بعدی برگرز پرداخته. در فصل چهارم روش توابع پایه ای شعاعی موضعی با پارامتر شکلی متغیر را برای حل زوج معادلات غیرخطی برگرز دوبعدی به کار می بریم. در فصل پنجم به جمع بندی مطالب و ارایه پیشنهادات می پردازیم.

^۱Schaback

^۲Method of lines

فصل ۱

توابع پایه ای شعاعی

۱-۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

تعریف ۱-۱-۱. تابع $\Phi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع شعاعی^۱ نامیده میشود، مشروط بر این که یک تابع $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ چنان موجود باشد که:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\|,$$

به طوری که $\|\cdot\|$ نشان دهنده یک نرم روی $\mathbb{R}^s$ است.

تعریف ۲-۱-۱. تابع $\Phi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پایه ای شعاعی^۲ نامیده میشود، هرگاه

$$\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\| \implies \Phi(\mathbf{x}_1) = \Phi(\mathbf{x}_2), \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^s.$$

به طوری که $\|\cdot\|$ نشان دهنده یک نرم اقلیدسی^۳ روی $\mathbb{R}^s$ است.

مثال: تابع فاصله اقلیدسی $\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$ حالت ساده ای از توابع پایه ای شعاعی می باشد.

از آن جا که هسته ها^۴ نقش اساسی در تجزیه و تحلیل آنالیز توابع پایه ای شعاعی برعهده دارند. در زیر این توابع را معرفی کرده و برخی از خواص آن ها بررسی می شود.

تعریف ۳-۱-۱. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی از $\mathbb{C}^s$ ($\mathbb{R}^s$) باشد. آن گاه تابع دو متغیره

$$K: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}), \quad K: (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

را یک هسته مختلط (یا حقیقی) روی Ω می نامند. هسته $K(.,.)$ را یک هسته شعاعی روی Ω گویند، هرگاه $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ چنان موجود باشد که:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

همچنین هسته مختلط $K(.,.)$ را یک هسته هرمیتی^۵ روی $\Omega \subseteq \mathbb{C}^s$ گویند، هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{K(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$$

در صورتی که $K(.,.)$ یک هسته حقیقی با خاصیت فوق باشد، آن را یک هسته متقارن می گویند.

^۱Radial function

^۲Radial basis function

^۳Euclidean norm

^۴Kernels

^۵Hermitian Kernel

به عنوان مثال هسته گاوسی

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \kappa(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = e^{-\varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}, \quad \kappa(r) = e^{-\varepsilon^2 r^2},$$

یک هسته حقیقی شعاعی و متقارن می باشد که در آن $\varepsilon = \frac{1}{c}$ پارامتر شکل می باشد.

۲-۱ توابع درونیاب پایه ای شعاعی

در دهه های اخیر استفاده از توابع درونیاب پایه ای شعاعی به علت انعطاف پذیری زیاد آن ها در درونیابی داده های پراکنده و همچنین داده ها در فضاهای با بعد بالا مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. فرض کنید $\{(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N, : x_i \in \mathbb{R}^s, y_i \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه از داده های پراکنده در فضای $\mathbb{R}^s$ می باشند. تابع درونیاب این مجموعه از نقاط را به صورت $\mathcal{P}_f$ نشان می دهیم به طوری که :

$$\mathcal{P}_f(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1-1)$$

برای این منظور با توجه به درونیابی توابع پایه ای شعاعی، یک تابع درونیاب به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\mathcal{P}_f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + \sum_{k=1}^M \zeta_k p_k(\mathbf{x}), \quad (2-1)$$

به طوری که در آن $\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$ یک تابع پایه ای شعاعی و مجموعه $\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_M(\mathbf{x})\}$ یک پایه برای فضای چندجمله ای های کامل π_q^s از درجه (از پیش تعیین شده) q در فضای $\mathbb{R}^s$ می باشد. بعد این فضای چند جمله ای برابر است با $M = \binom{q+s}{s}$. به عنوان مثال این پایه ها برای فضای چندجمله ای های خطی در $\mathbb{R}^2$ ، π_1^2 عبارتند از $\{1, x, y\}$ و همچنین برای فضای چند جمله ای های مربعی π_2^2 عبارتند از $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$. اکنون با تحمیل شرایط درونیاب (1-1) بر تابع درونیاب پیشنهادی (2-1) و همچنین تحمیل شرایط زیر که به شرایط لحظه ای^۱ معروف می باشند،

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j p_k(x_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3-1)$$

^۱ Moment conditions

یک دستگاه معادلات خطی با $N \times M$ معادله و $N \times M$ مجهول $(\{\lambda_j\}_{j=1}^N \cup \{\zeta_k\}_{k=1}^M)$ نتیجه خواهد شد. این دستگاه معادلات خطی را می توان به فرم ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{pmatrix} \Phi & P \\ P & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \circ \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

به طوری که در آن $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$, $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ ، ماتریس P یک ماتریس $N \times M$ به صورت :

$$P = [p_k(\mathbf{x}_j)]_{N \times M}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

و در نهایت Φ یک ماتریس $N \times N$ به صورت

$$\Phi = [\phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)]_{N \times N}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

می باشند. ماتریس ضرایب در دستگاه (4-1) را ماتریس درونیاب می نامند.

بدیهی است که مسئله درونیاب فوق خوش وضع است، یعنی یک تابع درونیاب منحصر به فرد $\mathcal{P}_f$ موجود است اگر و تنها اگر ماتریس درونیاب نامنفرد باشد. متأسفانه تاکنون شرایط لازم و کافی برای نامنفرد بودن ماتریس های درونیاب توابع پایه ای شعاعی در حالت کلی ارایه نشده است. به منظور بررسی خوش تعریف بودن درونیاب های توابع پایه ای شعاعی ابتدا تعریف زیر را ارایه می دهیم.

تعریف ۱-۲-۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، یک ماتریس حقیقی مرتبه n باشد، آن گاه:

• A را معین مثبت^۱ گویند، هرگاه $x^T A x > 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$.

• A را نیمه معین مثبت^۲ گویند، هرگاه $x^T A x \geq 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$.

از آن جایی که ماتریس های معین مثبت دارای مقادیر ویژه مثبت^۳ می باشند، لذا نامنفرد می باشند. بدین منظور در بخش بعد به بررسی توابع پایه ای شعاعی می پردازیم که ماتریس های درونیاب متناظر به آن ها معین مثبت باشند.

۱-۲-۱ توابع معین مثبت

در این بخش به معرفی توابع معین مثبت و خواص آن ها می پردازیم. به کارگیری توابع معین مثبت به عنوان توابع پایه در درونیابی منجر به ظاهر شدن ماتریس های درونیاب معین مثبت خواهند شد. لذا معرفی و بررسی آن ها حایز اهمیت می باشد.

^۱ Positive definite

^۲ Semi-positive definite

^۳ Eigen value

تعریف ۲-۲-۱. تابع $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع معین مثبت گویند، هرگاه به ازای هر مجموعه از نقاط متمایز $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ و هر بردار $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq 0.$$

همچنین تابع φ یک تابع معین مثبت اکید^۱ نامیده می شود هرگاه نابرابری در رابطه بالا به صورت اکید باشد.

مثال: تابع $\varphi(\mathbf{x}) = e^{I\varepsilon \mathbf{x}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ یک تابع معین مثبت روی $\mathbb{R}^n$ می باشد.

اثبات با توجه به تعریف ۲-۲-۱

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j e^{I\varepsilon(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i e^{I\varepsilon \mathbf{x}_i} \sum_{j=1}^n \bar{c}_j e^{-I\varepsilon \mathbf{x}_j} \\ &= \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{I\varepsilon \mathbf{x}_k} \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

در ادامه تلاش می شود برخی از ویژگی های توابع معین مثبت و همچنین ارتباط آن ها را با توابع پایه ای شعاعی بررسی کنیم. از آن جایی که بسیاری از این خواص توصیف انتگرالی دارند. در آغاز به طور خلاصه به معرفی برخی از تبدیلات انتگرالی مورد نیاز می پردازیم.

تعریف ۳-۲-۱. تبدیل فوریه تابع $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ را به صورت زیر تعریف می شود [۸۱]:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\omega \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (5-1)$$

و تبدیل فوریه معکوس به صورت زیر تعریف می شود:

$$\check{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) e^{i\omega \mathbf{x}} d\omega, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (6-1)$$

همچنین، تبدیل فوریه یک اندازه متناهی (علامت دار) μ روی $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\mu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \mathbf{x}} d\mu(\mathbf{x}), \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \quad (7-1)$$

^۱ strictly positive definite

از آن جایی که هدف ما بررسی خواص توابع پایه ای شعاعی است، در زیر یک قضیه اساسی ارایه می شود که نشان می دهد، تبدیل فوری هر تابع شعاعی خود یک تابع شعاعی می باشد.

قضیه ۱-۲-۴. فرض کنید $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ پیوسته و شعاعی باشد، یعنی $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|)$ آن گاه تبدیل فوری آن $\hat{\Phi}$ نیز شعاعی است، یعنی $\hat{\Phi}(\omega) = \mathcal{F}_n \varphi(\|\omega\|)$ که در آن :

$$\mathcal{F}_n \varphi(\|\omega\|) = \frac{1}{\sqrt{r^{n-1}}} \int_0^\infty \varphi(t) t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(rt) dt. \quad (۸-۱)$$

به طوری که $J_{\frac{n-1}{2}}$ تابع بسل کلاسیک نوع اول و از مرتبه $\frac{n-1}{2}$ می باشد.

اثبات: به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

تابع بسل کلاسیک نوع اول از مرتبه d به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_d(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (x/2)^{d+2i}}{i! \Gamma(d+i+1)},$$

که در آن تابع گاما $\Gamma(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt.$$

تبدیل انتگرالی (۸-۱) را تبدیل فوری-بسل^۱ یا تبدیل هنکل^۲ نیز می نامند.

در قضیه زیر یک نتیجه مهم و بسیار معروف از توصیف توابع معین مثبت بر حسب تبدیلات فوری ارایه می شود.

قضیه ۱-۲-۵. (قضیه بوچنر) تابع (مختلط) $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$ بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت است اگر و تنها اگر تبدیل فوری ای از یک اندازه برل نامنفی متناهی μ روی $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \hat{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} d\mu(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (۹-۱)$$

اثبات به مرجع [۹۸, ۱۰] مراجعه شود.

به منظور تضمین خوش تعریف بودن مساله درونیاب، تلاش می شود در صورت امکان یک توسیع از قضیه بوچنر را برای توابع معین مثبت اکید ارایه شود. در قضیه زیر یک شرط لازم برای این که تابعی معین مثبت اکید باشد ارایه می شود.

قضیه ۱-۲-۶. فرض کنید μ اندازه برل متناهی نامنفی بر $\mathbb{R}^n$ باشد مشروط بر اینکه محمل آن مجموعه ای از اندازه لبگ صفر نباشد. آن گاه تبدیل فوری μ بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید است.

^۱Fourier-Bessel transform

^۲Hankel transform

اثبات: به مرجع [۲۷] مراجعه شود.

در زیر یک قضیه مهم ارایه می شود که در حقیقت یک روش صریح برای تولید توابع معین مثبت اکید را مشخص می کند.

قضیه ۷-۲-۱. فرض کنید f یک تابع غیرصفر پیوسته و نامنفی بر $L_1(\mathbb{R}^n)$ باشد. آن گاه تبدیل فوریه f روی $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید خواهد بود.

اثبات: به مرجع [۲۷] مراجعه شود.

در قضیه زیر یک محک برای بررسی معین مثبت اکید بودن توابع ارایه می شود.

قضیه ۸-۲-۱. فرض کنید Φ تابعی پیوسته بر $L_1(\mathbb{R}^n)$ باشد. Φ معین مثبت اکید است اگر و تنها اگر Φ کراندار بوده و تبدیل فوریه آن نامنفی و هم ارز صفر نباشد.

اثبات: به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

اکنون با توجه به هدف اصلی این رساله که همانا بررسی توابع پایه ای شعاعی است، توجه خود را به توابع شعاعی معین مثبت معطوف خواهیم کرد. همان گونه که قبلا مشاهده شد، خاصیت معین مثبت (اکید) بودن برای توابع چند گانه بررسی شد. با این حال مناسب تر است هنگام بررسی معین مثبت (اکید) توابع شعاعی $\Phi(x) = \varphi(\|x\|)$ ، معین مثبت (اکید) بودن تابع φ متغیره بررسی شود.

لم ۹-۲-۱. اگر تابع $\Phi(\cdot) = \varphi(\|\cdot\|)$ یک تابع معین مثبت (اکید) و شعاعی بر $\mathbb{R}^n$ باشد آن گاه Φ بر $\mathbb{R}^s$ ، $s \leq n$ نیز معین مثبت (اکید) و شعاعی خواهد بود.

قضیه ۱۰-۲-۱. تابع پیوسته $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} : \varphi$ بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت و شعاعی است اگر و تنها اگر یک تبدیل فوریه-بسل تحت اندازه برل نامنفی متناهی μ بر $\mathbb{R}^{\geq 0}$ باشد. یعنی

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \Omega_n(rt) d\mu(t),$$

به طوری که در آن

$$\Omega_n = \begin{cases} \cos(r), & n = 1, \\ \Gamma(\frac{n}{2}) (\frac{r}{2})^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(r), & n \geq 2. \end{cases}$$

اثبات: به مرجع [۹۴] مراجعه شود.

اکنون تلاش می شود یک توصیف برای توابع معین مثبت اکید شعاعی بر مبنای تبدیلات فوریه ارایه شود.

قضیه ۱۱-۲-۱. (قضیه شوئنبرگ) تابع پیوسته $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} : \varphi$ یک تابع معین مثبت اکید شعاعی بر $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر قابل نمایش به فرم زیر باشد:

$$\varphi(r) = \int_0^\infty e^{-r^\gamma t^\gamma} d\mu(t),$$

به طوری که μ یک اندازه برل نامنفی متناهی بر $[0, \infty]$ می باشد.

اثبات: به مرجع [۹۴] مراجعه شود.

در قضیه شوئنبرگ، مشاهده شد که یک اندازه برل نامنفی متناهی بر $[0, \infty]$ به نحوی به کارگرفته می شود که تابع معین مثبت اکید شعاعی φ به فرم زیر قابل نمایش باشد:

$$\varphi(r) = \int_0^\infty e^{-r^\gamma t^\gamma} d\mu(t),$$

بنابراین r_0 صفر تابع $\varphi(r)$ است هرگاه داشته باشیم:

$$\varphi(r_0) = \int_0^\infty e^{-r_0^\gamma t^\gamma} d\mu(t) = 0,$$

با توجه به این که تابع نمایی $e^{-r^\gamma t^\gamma}$ مثبت و اندازه برل μ نامنفی است لذا تساوی بالا زمانی برقرار است که μ یک اندازه صفر بر $[0, \infty)$ باشد. در این صورت با توجه به قضیه شوئنبرگ نتیجه می شود که تابع φ یک تابع صفر است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که یک تابع معین مثبت اکید شعاعی غیر بدیهی بر $\mathbb{R}^n$ نمی تواند دارای ریشه باشد. به علاوه از توضیحات بالا می توان نتایج جالب زیر را برداشت کرد:

- تابع تک متغیری پیوسته نوسانی به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ موجود نیست که معین مثبت اکید شعاعی باشد.
- تابع تک متغیری پیوسته و با محمل فشرده به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ موجود نیست که معین مثبت اکید شعاعی باشد.

مثال های از توابع پایه ای شعاعی معین مثبت اکید

توابع گاوسی: توابع پایه شعاعی گاوسی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\varphi(r) = e^{-\varepsilon r^\gamma}, \quad \varepsilon > 0,$$

توابع پایه ای شعاعی گاوسی به طور یکنواخت نسبت به فاصله r نزولی بوده، و همچنین $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. همچنین با فرض $\varphi(r) = \Phi(\mathbf{x}) = e^{-\varepsilon \|\mathbf{x}\|^\gamma}$ تبدیل فوریه آن به صورت زیر است:

$$\hat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{\gamma}\varepsilon)^n} e^{-\frac{\|\omega\|^\gamma}{\gamma\varepsilon}} > 0,$$

همان گونه که مشاهده می شود تبدیلات فوریه یک تابع گاوسی خود یک تابع گاوسی می باشد به طور ویژه زمانی

که $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{r}}$ آن گاه $\Phi = \hat{\Phi}$. بنابراین با توجه به محک ارایه شده در قضیه ۸-۲-۱ نتیجه می شود که توابع گاوسی معین مثبت اکید می باشند. به علاوه با فرض اندازه های برل μ مناسب، ملاحظه می شود که توابع گاوسی در قضیه شوئنبرگ صدق می کنند و بنابراین می توان معین مثبت اکید بودن توابع گاوسی را با توجه به قضیه شوئنبرگ نیز نتیجه گرفت. لذا به راحتی و به طرق متفاوت با استناد به مطالب ارایه شده در این بخش معین مثبت اکید بودن توابع پایه شعاعی گاوسی را می توان نتیجه گرفت. توابع گاوسی از توابع پایه ای شعاعی پر کاربرد در درونیاب ها و روش های عددی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی می باشند.

در بخش قبل مشاهده شد که برخی توصیفات انتگرالی بر مبنای تبدیلات فوریه برای بررسی خاصیت معین مثبت (اکید) بودن توابع ارایه شد. متأسفانه محاسبه تبدیلات فوریه بسیاری از توابع به سادگی امکان پذیر نیست. بنابراین در این قسمت تلاش می شود یک توصیف جایگزین بر مبنای خاصیت کاملاً یکنوایی برای تشخیص توابع معین مثبت (اکید) ارایه شود.

تعریف ۱۲-۲-۱. تابع $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ و متعلق به $C[0, \infty) \cap C^\infty(0, \infty)$ که در رابطه زیر صدق کند:

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) \geq 0, \quad r > 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

را کاملاً یکنوا بر $[0, \infty)$ گویند.

به عنوان مثال توابع زیر بر $[0, \infty)$ کاملاً یکنوا می باشند.

$$\varphi(r) = \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0. \quad \text{تابع}$$

$$\varphi(r) = e^{-\varepsilon r}, \quad \varepsilon \geq 0. \quad \text{تابع زیرا}$$

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) = \varepsilon^l e^{-\varepsilon r} \geq 0.$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{(1+r)^\beta}, \quad \beta \geq 0. \quad \text{تابع زیرا}$$

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) = (-1)^l \beta(\beta+1) \dots (\beta+l-1) \frac{1}{(1+r)^{\beta+l}} \geq 0,$$

در این قسمت تلاش می شود به بررسی خواص توابع کاملاً یکنوا و ارتباط آن ها با توابع معین مثبت پرداخته شود. برای این منظور ابتدا یک توصیف انتگرالی برای توابع کاملاً یکنوا ارایه می شود. این توصیفات انتگرالی بر مبنای تبدیلات لاپلاس^۱ می باشند.

تعریف ۱۳-۲-۱. فرض کنید f یک تابع تکه ای پیوسته و کراندار بر $[0, \infty)$ باشد به نحوی که به ازای برخی مقادیر ثابت M, a داریم $|f(t)| \leq M e^{at}$ ، آن گاه تبدیل لاپلاس تابع f به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s > a,$$

^۱ Laplace transform

به طور مشابه، تبدیل لاپلاس یک اندازه برل بر $[0, \infty)$ به صورت :

$$\mathcal{L}\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\mu(t),$$

تعریف می شود. تبدیل لاپلاس اخیر در مبدا پیوسته است اگر و تنها اگر μ یک اندازه برل متناهی باشد.

قضیه ۱-۲-۱۴. (قضیه هاسدورف-برنشتاین-وایدر ^۱) تابع $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) : \varphi$ بر $[0, \infty)$ کاملاً یکنوا است اگر و تنها اگر φ تبدیل لاپلاس یک اندازه برل نامنفی متناهی بر $[0, \infty)$ باشد. یعنی، φ قابل نمایش به فرم :

$$\varphi(r) = \mathcal{L}\mu(r) = \int_0^\infty e^{-rt} d\mu(t),$$

اثبات: به مرجع [۱۵] مراجعه شود.

در ادامه یک قضیه ارایه می شود که بیانگر ارتباط بین توابع پایه ای شعاعی و توابع کاملاً یکنوا می باشد.

قضیه ۱-۲-۱۵. تابع φ بر $[0, \infty)$ کاملاً یکنواست اگر و تنها اگر تابع $\Phi = \varphi(\|\cdot\|^2)$ به ازای هر n بر $\mathbb{R}$ معین مثبت شعاعی باشد.

اثبات : به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

در قضیه قبل یک ارتباط بین توابع کاملاً یکنوا و توابع معین مثبت شعاعی و نه لزوماً توابع معین مثبت اکید شعاعی ارایه شد. در ادامه یک قضیه ارایه می شود که ارتباط بین توابع کاملاً یکنوا و توابع معین مثبت اکید شعاعی را توصیف می کند.

قضیه ۱-۲-۱۶. تابع $\mathbb{R} \rightarrow [0, \infty) : \varphi$ کاملاً یکنوای غیر ثابت است اگر و تنها اگر $\varphi(\|\cdot\|^2)$ به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید شعاعی باشد.

اثبات: به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

مثال: توابع چند ربعی های تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|^2) = (\|\mathbf{x}\|^2 + \varepsilon^2)^{-\beta}, \quad \beta, \varepsilon > 0,$$

توابع چند ربعی های معکوس تعمیم یافته متعلق به $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ بوده و همچنین به سادگی می توان نشان داد که معین مثبت اکید شعاعی می باشند. برای این منظور برای تابع $\varphi(r) = (r + \varepsilon^2)^{-\beta}$ داریم:

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) = (-1)^l \beta(\beta+1)(\beta+2) \dots (\beta+l-1)(r + \varepsilon^2)^{-\beta-l} \geq 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

^۱ Hausdorff-Bernstein-Widder

بنابراین تابع φ کاملاً یکنوا و غیر ثابت می باشد. با توجه به قضیه ۴-۲ نتیجه می شود تابع $\Phi(x)$ به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید شعاعی است. همان گونه که مشاهده شد بررسی معین مثبت بودن توابع چندربعی های معکوس تعمیم یافته با استفاده از خاصیت کاملاً یکنوا بودن آن بسیار ساده تر از بررسی خواص تبدیل فوریه آن می باشد.

در مطالب گذشته به بررسی توابع پایه ای شعاعی معین مثبت اکید پرداخته شد. مسایل درونیاب داده های پراکنده ۱-۲ با استفاده از توابع پایه ای شعاعی معین مثبت اکید بدون نیاز به پایه های چند جمله ای های کامل و به خودی خود مسایل خوش تعریف می باشند. در این حالت به کارگیری توابع معین مثبت اکید به عنوان پایه منجر به تولید ماتریس های درونیاب معین مثبت و نامنفرد می شوند. لذا به کارگیری توابع پایه ای شعاعی معین مثبت اکید در مسایل درونیاب و روش های عددی مورد توجه بسیار قرار دارد. در ادامه به معرفی و بررسی خواص کلاس ویژه ای از توابع پایه ای شعاعی تحت عنوان توابع پایه ای شعاعی معین مثبت مشروط می پردازیم.

تعریف ۱-۲-۱۷. تابع پیوسته $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع معین مثبت مشروط مرتبه m روی $\mathbb{R}^n$ گویند، هرگاه به ازای هر N داده پراکنده متمایز $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ و هر بردار $c = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T \in \mathbb{C}^N$ که به ازای هر چندجمله ای p حداکثر از درجه $m-1$ در رابطه

$$\sum_{j=1}^N c_j p(x_j) = 0,$$

صدق می کنند، داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \bar{c}_k \varphi(x_j - x_k) \geq 0,$$

تابع φ را معین مثبت مشروط اکید گویند هرگاه رابطه بالا تنها به ازای $c = 0$ برابر صفر شود.

قضیه ۱-۲-۱۸. هر تابع معین مثبت مشروط (اکید) مرتبه m بر فضای $\mathbb{R}^n$ یک تابع معین مثبت مشروط (اکید) از مراتب بالاتر نیز می باشد. به علاوه هر تابع معین مثبت (اکید) یک تابع معین مثبت مشروط از هر مرتبه می باشد.

در ادامه یک محک کاربردی برای تشخیص توابع معین مثبت مشروط و شعاعی در قالب قضیه زیر ارائه می شود.

قضیه ۱-۲-۱۹. فرض کنید $\varphi \in C[0, \infty) \cup C^\infty(0, \infty)$. آن گاه تابع $\phi = \varphi(\|\cdot\|^2)$ یک تابع معین مثبت مشروط از مرتبه m و به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می باشد، اگر و تنها اگر $(-1)^m \varphi^{(m)}(0, \infty)$ کاملاً یکنوا باشد.

□

برهان. به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

را بیان می کند. در زیر یک فرم کلی تر از قضیه اخیر ارائه می شود که ارتباط بین توابع کاملاً یکنوا و توابع شعاعی معین مثبت مشروط اکید

قضیه ۲۰-۲-۱. اگر تابع ϕ در شرایط قضیه ۱۹-۲-۱ صدق کند و به علاوه ϕ یک چند جمله ای حداکثر از درجه m نباشد، آن گاه تابع ϕ به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ معین مثبت مشروط اکید از مرتبه m و شعاعی می باشد. □

برهان. به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

قضایای ۱۹-۲-۱ و ۲۰-۲-۱ محک های عملی و کاربردی ساده ای برای تشخیص توابع شعاعی معین مثبت مشروط و توابع شعاعی معین مثبت مشروط اکید ارائه می دهند. در زیر مثال هایی از توابع شعاعی معین مثبت مشروط ارائه خواهد شد.

مثال های از توابع شعاعی معین مثبت مشروط

توابع چند ربعی توسعه یافته^۱: توابع چند ربعی توسعه یافته به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{[\beta]} (\varepsilon + \|\mathbf{x}\|^2)^\beta, \quad \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

از طرفی برای تابع

$$\varphi(r) = (-1)^{[\beta]} (\varepsilon + r)^\beta, \quad \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

داریم:

$$\varphi^{(l)}(r) = (-1)^{[\beta]} \beta(\beta-1) \dots (\beta-l+1) (\varepsilon + r)^{\beta-l},$$

بنابراین بدیهی است که به ازای $l = [\beta]$ داریم:

$$(-1)^{[\beta]} \varphi^{([\beta])}(r) = \beta(\beta-1) \dots (\beta-[\beta]+1) (\varepsilon + r)^{\beta-[\beta]} \geq 0,$$

و در نتیجه تابع φ کاملاً یکنوا می باشد. به علاوه $m = [\beta]$ کوچکترین مقدار برای m می باشد، به نحوی که تابع $(-1)^m \varphi^{(m)}$ کاملاً یکنوا است. از طرفی چون $\beta \notin \mathbb{N}$ لذا φ یک تابع چندجمله ای نمی باشد. بنابراین توابع چند ربعی توسعه یافته

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{[\beta]} (\varepsilon + \|\mathbf{x}\|^2)^\beta, \quad \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

توابع معین مثبت مشروط اکید و از مرتبه $m \geq [\beta]$ بوده و به علاوه به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می باشند.

^۱ Generalized multiquadrics

توابع توانی شعاعی^۱: توابع توانی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \|\mathbf{x}\|^\beta, \quad \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

ازطرفی به ازای تابع

$$\varphi(r) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} r^{\beta/2}, \quad \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

داریم

$$\varphi^{(l)}(r) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\beta}{2} - l + 1\right) r^{\beta/2 - l},$$

به وضوح بنا به رابطه بالا داریم:

$$(-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \varphi^{(l)}(r) = \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\beta}{2} - \lceil \beta/2 \rceil + 1\right) r^{\beta/2 - \lceil \beta/2 \rceil} \geq 0,$$

بنابراین به ازای $l = \lceil \beta/2 \rceil$ تابع فوق کاملاً یکنوا بوده و $l = \lceil \beta/2 \rceil$ کمترین مقدار ممکن است که به ازای آن تابع فوق کاملاً یکنوا می باشد. از طرفی چون $\beta \notin \mathbb{N}$ لذا φ یک تابع چندجمله ای نمی باشد و در نتیجه توابع توانی

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \|\mathbf{x}\|^\beta, \quad \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

توابع معین مثبت مشروط اکید از مرتبه $m \geq \lceil \beta/2 \rceil$ بوده و به علاوه به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می باشند. . توابع چند همسازه ها^۲: توابع چند همسازه ها به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\beta+1} \|\mathbf{x}\|^\beta \log(\|\mathbf{x}\|), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

توابع چند همسازه ها ، توابعی معین مثبت مشروط اکید و از مرتبه $m \geq \beta + 1$ بوده و به علاوه به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می باشند. برای بررسی این موضوع داریم:

$${}^2\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\beta+1} \|\mathbf{x}\|^\beta \log(\|\mathbf{x}\|^2), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

بنابراین با فرض

$$\varphi(r) = (-1)^{\beta+1} r^\beta \log(r), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

^۱Radial Powers

^۲thin plate splines

به وضوح مشاهده می شود که $\varphi(r)$ یک چندجمله ای نمی باشد و از طرفی

$$\varphi^{(l)}(r) = (-1)^{\beta+1} \beta(\beta-1) \dots (\beta-l+1) r^{\beta-l} \log(r) + p_l(r), \quad 1 \leq l \leq \beta,$$

به طوری که p_l یک چند جمله ای از درجه $\beta-l$ می باشد. بنابراین با فرض $l = \beta$ در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\varphi^{(\beta)}(r) = (-1)^{\beta+1} \beta! \log(r) + C,$$

بنابراین

$$\varphi^{(\beta+1)}(r) = (-1)^{\beta+1} \frac{\beta!}{r},$$

در نتیجه

$$(-1)^{\beta+1} \varphi^{(\beta+1)}(r) = \frac{\beta!}{r} \geq 0,$$

از رابطه بالا نتیجه می شود تابع φ کاملاً یکنوا بوده، بنابراین توابع چند همسازه ها معین مثبت مشروط اکید می باشند.

در ادامه حل پذیری و خوش تعریف بودن مسأله درونیابی داده های پراکنده ۲-۱، با به کارگیری توابع شعاعی معین مثبت مشروط به عنوان توابع پایه ای بررسی می شود.

قضیه ۲-۱-۲۱. فرض کنید در مسأله درونیاب داده های پراکنده ۲-۱، توابع پایه ای Φ توابع معین مثبت مشروط اکید مرتبه m بر فضای $\mathbb{R}^s$ باشند و همچنین فرض کنید مجموعه نقاط $x_1, x_2, \dots, x_N$ به طور یکتا یک پایه برای فضای چند جمله ای های حداکثر از درجه $m-1$ را مشخص کند. آن گاه ماتریس ضرائب دستگاه معادلات خطی ۴-۱ نامنفرد است و لذا دستگاه معادلات خطی ۴-۱ جواب منحصر به فرد دارد، در نتیجه مسأله درونیابی ۲-۱ خوش تعریف می باشد.

□

برهان. به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

۳-۱ هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت و فضاهای محلی

در این بخش به بیان مقدماتی برای بررسی و آنالیز کران های خطا در مسایل درونیابی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی پرداخته خواهد شد. برای این منظور ابتدا مفهوم هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت^۱ و همچنین فضاهای محلی^۲ متناظر به توابع معین مثبت اکید (مشروط) معرفی و برخی نتایج مربوط به آن ها بررسی می شوند.

^۱ Reproducing Kernel Hilbert Spaces

^۲ Native Spaces

۱-۳-۱ هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت حقیقی از توابع $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ و مجهز به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ باشد. آن گاه تابع $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را هسته بازتولیدی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می نامند هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

$$۱) \quad k(\cdot, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$۲) \quad f(\mathbf{x}) = \langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

توجه شود که عنوان هسته های بازتولیدی از خاصیت بازتولید کنندگی (۲) مشتق شده است. برخی از خواص اساسی هسته های باز تولید عبارتند از:

- هسته بازتولیدی یک فضای هیلبرت یکتاست.
- وجود یک هسته بازتولیدی برای یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ معادل این است که تابع های سنجش نقطه ای $\delta_{\mathbf{x}}$ تابع های خطی کران دار روی Ω باشند یعنی مقدار ثابت مثبت $M = M_{\mathbf{x}}$ چنان موجود باشد که

$$|\delta_{\mathbf{x}} f| = |f(\mathbf{x})| \leq M \|f\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

- اگر تابع $k(\cdot, \cdot)$ یک هسته بازتولیدی برای فضای $\mathcal{H}$ باشد، آن گاه

$$\delta_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}$$

رابطه فوق نشان می دهد تابع $\delta_{\mathbf{x}}$ خطی است و بنابر رابطه کوشی - شوارتز کران دار نیز می باشد. زیرا:

$$\begin{aligned} |\delta_{\mathbf{x}} f| = |f(\mathbf{x})| &= |\langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|k(\cdot, \mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

قضیه ۱-۳-۲. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت از توابع $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ با هسته بازتولیدی k باشد، آن گاه:

$$۱) \quad k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle k(\cdot, \mathbf{y}), k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{برای هر } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

$$۲) \quad k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \text{برای هر } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

۳ همگرایی در نرم فضای هیلبرت، همگرایی نقطه ای را نتیجه می دهد. یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \rightarrow 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

□

برهان. به مرجع [۲۷] مراجعه شود.

نکته: از خاصیت (۱) در قضیه قبل می توان مقدار $M_{\mathbf{x}}$ را برای تابع سنجش نقطه ای $\delta_{\mathbf{x}} f$ به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} |\delta_{\mathbf{x}} f| &= |\langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|k(\cdot, \mathbf{x})\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\langle k(\cdot, \mathbf{x}), k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{k(\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \end{aligned}$$

لذا نتیجه می شود

$$M_{\mathbf{x}} = \sqrt{k(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

به طور ویژه در هسته های شعاعی نتیجه می شود:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \kappa(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\|) = \kappa(0),$$

بنابراین $M_{\mathbf{x}} = \sqrt{\kappa(0)}$ که این کران بالا یک مقدار ثابت مثبت و مستقل از $\mathbf{x}$ می باشد.

قضیه ۳-۳-۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای توابع هیلبرت هسته های بازتولیدی با هسته $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ بوده و همچنین فرض کنید $\mathcal{H}^*$ فضای دوگان آن (در این جا منظور فضای تابع های خطی و کران دار روی $\mathcal{H}$ می باشد) باشد. آن گاه k معین مثبت می باشد. به علاوه k معین مثبت اکید می باشد اگر و تنها اگر تابع های سنجش نقطه ای $\delta_{\mathbf{x}}$ بر $\mathcal{H}^*$ مستقل خطی باشند.

□

برهان. به مرجع [۲۷] مراجعه شود.

قضیه فوق یک ارتباط مستقیم بین توابع معین مثبت اکید و هسته های بازتولیدی را نشان می دهد. از آن جا که توابع پایه ای شعاعی مبنای این رساله می باشند، در ادامه تلاش خواهد شد تا چگونگی تولید یک فضای هیلبرت هسته های بازتولیدی متناظر به توابع پایه ای شعاعی معین مثبت اکید بررسی شود. این فضای هیلبرت هسته های بازتولیدی متناظر به توابع پایه ای شعاعی معین مثبت اکید را فضای محلی آن توابع می نامند.

۲-۳-۱ فضاهای محلی توابع معین مثبت اکید

در گام اول باید اشاره شود که طبق تعریف ۱-۳-۱ فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ شامل همه توابعی به فرم زیر می باشد:

$$f = \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_j \in \Omega.$$

از طرفی با توجه به رابطه فوق و همچنین قضیه ۲-۳-۱ نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}} = \langle f, f \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j), \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j c_i \langle k(., \mathbf{x}_j), k(., \mathbf{x}_i) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j c_i k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

بنابراین به راحتی می توان نرم فضای هیلبرت تابع f را به صورت فوق محاسبه کرد. در ادامه می توان یک فضای از ترکیبات خطی متناهی

$$H_k(\Omega) = \text{span}\{k(., \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \Omega\}$$

به همراه یک فرم دوخطی وابسته $\langle ., . \rangle_k$

$$\left\langle \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j), \sum_{i=1}^N d_i k(., \mathbf{y}_i) \right\rangle_k = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j d_i k(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i).$$

تعریف می کنیم. بنابراین هر عضو از فضای $H_k(\Omega)$ را می توان به فرم زیر نمایش داد

$$f = \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j).$$

توجه شود که در نمایش فوق نه تنها ضرایب c_j ها، بلکه مقادیر N و نقاط انتخابی $\mathbf{x}_j$ ها نیز با توجه به تغییر f ، تغییر می کنند.

قضیه ۴-۳-۱. اگر $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک هسته معین مثبت اکید و متقارن باشد آن گاه فرم دو خطی $\langle ., . \rangle_k$ یک ضرب داخلی روی $H_k(\Omega)$ تعریف می کند. به علاوه، فضای $H_k(\Omega)$ یک فضای پیش-هیلبرت^۱ با

^۱ Pre-Hilbert space

هسته باز تولیدی k می باشد.

□

برهان. به مرجع [۲۷] مراجعه شود.

نکته: فضای پیش - هیلبرت یک فضای ضرب داخلی می باشد که کامل ساز آن یک فضای هیلبرت باشد.

همان گونه که اشاره شد فضای $H_k(\Omega)$ یک فضای پیش - هیلبرت می باشد یعنی لزوماً کامل نمی باشد بنابراین منطقی به نظر می رسد که کامل ساز فضای $H_k(\Omega)$ متناظر به نرم $\|\cdot\|_k$ ، بدیهی ترین فضای هیلبرت متناظر به هسته باز تولیدی k می باشد.

تعریف ۱-۳-۵. فضای محلی $\mathcal{N}_k(\Omega)$ متناظر به هسته باز تولیدی k یک فضای هیلبرت کامل ساز فضای پیش - هیلبرت $H_k(\Omega)$ است که شامل همه توابع پیوسته روی Ω بوده و از طرفی

$$\|f\|_k = \|f\|_{\mathcal{N}_k(\Omega)}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_k(\Omega).$$

به طور ویژه زمانی که با توابع معین مثبت اکید $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ به عنوان هسته های باز تولیدی سروکار داریم و به علاوه $\Omega = \mathbb{R}^s$ ، آن گاه نمایش متداولی را از فضاهای محلی و بر حسب تبدیلات فوریه به صورت زیر می توان نشان داد.

قضیه ۱-۳-۶. فرض کنید $\Phi \in C(\mathbb{R}^s) \cap L_1(\mathbb{R}^s)$ یک تابع معین مثبت اکید و حقیقی باشد و

$$\mathfrak{S} = \{f \in L_2(\mathbb{R}^s) \cap C(\mathbb{R}^s) : \frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\Phi}}} \in L_2(\mathbb{R}^s)\}$$

به طوری که $\hat{f}$ و $\hat{\Phi}$ به ترتیب تبدیلات فوریه توابع f و Φ می باشند. همچنین فرض کنید فضای $\mathfrak{S}$ مجهز به نرم دوخطی

$$\langle f, g \rangle_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \langle \frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\Phi}}}, \frac{\hat{g}}{\sqrt{\hat{\Phi}}} \rangle_{L_2(\mathbb{R}^s)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int_{\mathbb{R}^s} \frac{\hat{f}(\omega) \bar{\hat{g}}(\omega)}{\hat{\Phi}(\omega)} d\omega.$$

باشد. در این صورت $\mathfrak{S}$ یک فضای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}}$ و هسته باز تولیدی $\Phi(\cdot - \cdot)$ می باشد. بنابراین $\mathfrak{S}$ یک فضای محلی از Φ روی $\mathbb{R}^s$ می باشد یعنی $\mathfrak{S} = \mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^s)$. به طور ویژه هر تابع $f \in \mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^s)$ را می توان توسط تبدیل فوریه متناظر به آن $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^s) \cap L_2(\mathbb{R}^s)$ بازیابی کرد.

□

برهان. به مرجع [۲۷] مراجعه شود.

قضیه فوق نشان می دهد که فضاهای محلی برای هسته های باز تولیدی روی $\mathbb{R}^s$ را می توان به صورت

تعمیم فضاهای سوبولف استاندارد^۱ در نظر گرفت. فضاهای سوبولف استاندارد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$W_p^m(\Omega) = \{f \in L_p(\Omega) \cap C(\Omega) : D^\alpha f \in L_p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^s\}$$

به طور متناظر به ازای هر $m > s/2$ فضای سوبولف W_p^m را به صورت زیر نیز می توان نشان داد:

$$W_p^m(\mathbb{R}^s) = \{f \in L_p(\mathbb{R}^s) \cap C(\mathbb{R}^s) : \hat{f}(\cdot)(1 + \|\cdot\|_p^2)^{m/2} \in L_p(\mathbb{R}^s)\}$$

به علاوه نرم فضای سوبولف $W_p^m(\mathbb{R}^s)$ به صورت

$$\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^s)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L_p(\mathbb{R}^s)}^p \right\}^{1/p}$$

یا به طور متناظر به نرم

$$\|f\|_{W_p^m(\mathbb{R}^s)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^s} |\hat{f}(\omega)|^p (1 + \|\omega\|_p^2)^m d\omega \right\}^{1/p}$$

تعریف می شود.

نتیجه ۱-۳-۷. فرض کنید $\Phi \in L_p(\mathbb{R}^s) \cap C(\mathbb{R}^s)$ یک هسته مثبت اکید بوده و در شرایط زیر صدق کند:

$$c_1(1 + \|\omega\|_p^2)^{-m} \leq \hat{\Phi}(\omega) \leq c_2(1 + \|\omega\|_p^2)^{-m}, \quad \omega \in \mathbb{R}^s$$

به طوری که $m > s/2$ و c_1, c_2 مقادیر مثبت و همچنین $c_1 \leq c_2$ ، یعنی تبدیل فوریه هسته Φ به صورت جبری کاهش یابد. آن گاه فضای محلی $\mathcal{N}_\Phi(\mathbb{R}^s)$ متناظر به هسته بازتولیدی Φ دقیقاً با فضای سوبولف $W_p^m(\mathbb{R}^s)$ یکسان بوده و به علاوه نرم فضای محلی با نرم فضای سوبولف یکسان می باشند.

۴-۱ پایداری مسائل درونیاب پایه ای شعاعی

در بسیاری از روش های عددی دقت نتایج و پایداری روش وابسته به مقدار عدد شرطی^۲ روش عددی می باشد. به طور ویژه در یک مسأله درونیاب داده های پراکنده با استفاده از توابع پایه ای شعاعی، عدد شرطی ماتریس درونیاب پایداری مسأله را مشخص می کند. برای ماتریس A ، L_2 -عدد شرطی ماتریس A

^۱Standard Sobolev Spaces.

^۲Condition Number

به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}},$$

به طوری که در آن $\sigma_{\min}$ و $\sigma_{\max}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر تکین ماتریس A می باشند. اگر ماتریس A معین مثبت باشد، آن گاه

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

به طوری که $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A می باشند. در اغلب موارد ماتریس ضرائب مسائل درونیایی داده های پراکنده ۱-۲ ماتریس های با عدد شرطی بزرگ می باشند. متأسفانه در حل این گونه از دستگاه معادلات خطی بروز یک خطای کوچک در داده های ورودی مانند خطاهای ذخیره سازی اعداد سبب بروز و انتشار خطای زیادی در مدل خواهد شد. در دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ داریم:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

به طوری که $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ بیانگر خطای نسبی بردار سمت می باشد که می تواند ناشی از خطای ذخیره سازی در ماشین باشد و در اغلب موارد اجتناب ناپذیر است. در این صورت از رابطه بالا مشاهده می شود که به ازای مقادیر بزرگ عدد شرطی ماتریس ضرائب، خطای نسبی $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ اطلاعات دقیقی در رابطه با خطای نسبی جواب های تقریبی نمی دهد. لذا با توجه به اهمیت و تأثیر عدد شرطی ماتریس ضرائب در میزان دقت و پایداری روش های عددی در این بخش تلاش می شود عدد شرطی ماتریس های حاصل از مسائل درونیایی با استفاده از انواع توابع پایه ای شعاعی بررسی شود. برای این منظور با توجه به قضیه گرشگورین^۱ (مرجع [۶۴] مشاهده شود) داریم:

$$|\lambda_{\max} - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$$

بنابراین داریم:

$$\lambda_{\max} \leq N \max |a_{ij}|, i, j = 1, \dots, N$$

از طرفی در ماتریس ضرائب مسائل درونیایی، $a_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ بنابراین:

$$\lambda_{\max} \leq N \max\{|a_{ij}|, i, j = 1, \dots, N\} = N \max\{|\phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)|, i, j = 1, 2, \dots, N\},$$

^۱Gershgorin's theorem

از رابطه بالا نتیجه می شود که اگر مجموعه نقاط خیلی بد پراکنده نشده باشند، آن گاه مقدار N متناظر به فاصله تراکم مجموعه نقاط $(h_{X,\Omega}^{-s})$ رشد می کند و لذا یک کران بالای قابل قبول برای مقادیر ویژه ماتریس ضرائب ایجاد می شود مخصوصاً اگر بعد فضا (s) زیاد نباشد. بنابراین برای محاسبه یک کران بالا برای عدد شرطی ماتریس ضرائب، کافی است یک کران بالا برای $\|A^{-1}\|$ یا متناظراً یک کران پایین برای $\lambda_{\min}$ محاسبه شود. برای بررسی موارد فوق، توجه خود را بر ماتریس های معین مثبت متمرکز خواهیم کرد. با توجه به خارج قسمت ریلی^۱ نتیجه می شود که همواره برای کوچکترین مقدار ویژه ماتریس های معین مثبت رابطه زیر برقرار است:

$$\lambda_{\min} = \inf_{c \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{c^T A c}{c^T c},$$

لم ۱-۴-۱. فرض کنید $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ مجموعه ای از نقاط متمایز بر فضای $\mathbb{R}^s$ باشد و همچنین $\phi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع معین مثبت اکید یا تابع معین منفی اکید مشروط از مرتبه یک و خاصیت $\phi(0) \leq 0$ باشد. همچنین فرض کنید ماتریس A یک ماتریس درونیاب با درایه های $a_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ باشد. در این صورت اگر به ازای هر بردار $\mathbf{c}$ با فرض $\sum_{j=1}^n c_j = 0$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j a_{ij} \geq \theta \|\mathbf{c}\|^2,$$

آن گاه

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \theta^{-1}.$$

توجه شود که به ازای ماتریس های معین مثبت، با توجه به خارج قسمت ریلی نتیجه می شود که $\theta = \lambda_{\min}$. بنابراین لم فوق نشان می دهد که چگونه عکس کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A یک کران بالا برای نرم ماتریس A^{-1} ارائه می دهد. در این قسمت از بیان چگونگی محاسبه کران برای نرم ماتریس A^{-1} اجتناب می شود. برای مطالعه بیشتر در رابطه با تکنیک های محاسبه این کران ها برای نرم ماتریس A^{-1} ، علاقمندان می توانند به مراجع [۹۸، ۷۴، ۸۹] مراجعه کنند. در ادامه برخی کران ها محاسبه شده از مرجع [۹۸] گزارش می شوند. در مثال های زیر از ثابت های مشخص زیر استفاده شده است:

$$M_s = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \Gamma(\frac{s+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{s+1}} \leq 6.38s, \quad C_s = \frac{1}{2 \Gamma(\frac{s+1}{2})} \left(\frac{M_s}{\sqrt{\lambda}} \right)^s.$$

^۱ Rayleigh quotient

در روابط بالا کران بالایی ارائه شده برای M_s با به کارگیری فرمول استرلینگ^۱ محاسبه شده است [۹۸]. مثال

ها

۱-توابع گاوسی برای توابع گاوسی $\phi(\mathbf{x}) = e^{-\varepsilon \|\mathbf{x}\|^2}$ داریم:

$$\lambda_{\min} \geq C_s(\varepsilon)^{-\frac{s}{\gamma}} e^{-\varepsilon \gamma s^2 / (q_X \varepsilon)} q_X^{-s},$$

۲-توابع چند ربعی های معکوس تعمیم یافته برای توابع چند ربعی های معکوس تعمیم یافته

$$\phi(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\|^2 + \varepsilon^2)^\beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

داریم:

$$\lambda_{\min} \geq C(\varepsilon, \beta, s) q_X^{\beta - \frac{s}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}} e^{-\varepsilon M_s / q_X}$$

که در آن $C(\varepsilon, \beta, s)$ یک ثابت مشخص می باشد.

همان گونه که از کران های محاسبه شده برای توابع گاوسی و چند ربعی های معکوس تعمیم یافته مشاهده می شود، در یک مسأله درونیابی با فرض ثابت بودن مقدار ε ، در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک نقاط q_X (افزایش تعداد نقاط درونیابی) کران پایین $\lambda_{\min}$ به طور نمایی به صفر میل می کند، در نتیجه انتظار می رود عدد شرطی ماتریس درونیاب به طور نمایی افزایش یابد. لذا در اغلب موارد افزودن نقاط درونیابی در دامنه مورد نظر به منظور بهبود دقت درونیابی، سبب بد شرطی بیشتر مسأله خواهد شد. در برخی موارد می توان از این افزایش بد شرطی جلوگیری کرد زیرا همانگونه که مشاهده می شود بد شرطی در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک رخ می دهد و نه لزوماً در اثر افزایش نقاط درونیابی. به علاوه، همانگونه که از کران های محاسبه شده مشاهده می شود، با فرض ثابت بودن تعداد نقاط درونیابی (یا به طور ویژه ثابت بودن فاصله تفکیک نقاط)، در اثر کاهش مقدار ε ، ماتریس درونیاب به طور صعودی بد شرط می شود. بنابراین انتظار می رود با کاهش مقدار ε ، بد شرطی مسأله کاهش یابد.

۳-توابع اسپلاین های صفحه ای باریک برای توابع اسپلاین های صفحه ای باریک داریم:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\beta+1} \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log(\|\mathbf{x}\|), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

خواهیم داشت:

$$\lambda_{\min} \geq C(\varepsilon, \beta, s) c_\beta (\varepsilon M_s)^{-s-2\beta} (q_X)^{2\beta},$$

به طوری که c_β یک ثابت مشخص می باشد.

^۱ Stirling's formula

همان گونه که از رابطه بالا مشاهده می شود برای توابع اسپلاین های صفحه ای باریک، در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک نقاط q_X در مسأله درونیابی مقدار کران پایین $\lambda_{\min}$ کاهش می یابد و در نتیجه مقدار عدد شرطی ماتریس درونیاب افزایش می یابد. هرچند این افزایش بد شرطی مسأله از مرتبه چندجمله ای می باشد.

۴-توابع توانی شعاعی برای توابع توانی شعاعی :

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \|\mathbf{x}\|^\beta, \quad 0 < \beta \notin \mathbb{N}.$$

خواهیم داشت:

$$\lambda_{\min} \geq C(\varepsilon, \beta, s) c_\beta (2M_s)^{-s-\beta} (q_X)^\beta,$$

به طوری که c_β (متفاوت با ثابت c_β در توابع اسپلاین صفحه ای بارک) یک ثابت مشخص می باشد. همان گونه که از رابطه بالا مشاهده می شود در این حالت مشابه توابع اسپلاین های صفحه ای باریک، در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک نقاط q_X در مسأله درونیابی مقدار کران پایین $\lambda_{\min}$ کاهش می یابد و در نتیجه مقدار عدد شرطی ماتریس درونیاب افزایش می یابد. هرچند این افزایش بد شرطی مسأله از مرتبه چندجمله ای می باشد.

فصل ۲

مروری بر روش های بدون شبکه

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان به طور وسیعی در مدل بندی پدیده های متنوع طبیعی در علوم پایه و علوم مهندسی مورد استفاده قرار گرفته اند. جواب های این رده از مدل های ریاضی برای پیش بینی رفتار پدیده های مختلف به کار می روند، به نحوی که کاملاً بر نتایج حاصل از شرایط تجربی و آزمایشگاهی منطبق می باشند. متأسفانه در اغلب موارد یک روش تحلیلی برای محاسبه جواب های دقیق ایم مسائل وجود ندارد، لذا بررسی عددی این مسائل دارای اهمیت ویژه ای می باشند. روش های عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان ارائه شده اند که از آن جمله می توان به روش های استاندارد تفاضلات متناهی^۱، عناصر متناهی^۲، حجم متناهی^۳ و روش های عناصر مرزی^۴ اشاره کرد.

روش عناصر متناهی یکی از متداول ترین و قوی ترین روش های عددی می باشد که در دهه های اخیر نظریه های تحلیلی، کاربردهای فرگیر در علوم مهندسی و همچنین بسته های نرم افزاری و کاربردی وسیعی بر مبنای آن ارائه شده اند. هر چند روش عناصر متناهی روشی پرکاربرد در علوم مهندسی می باشد ولی متأسفانه دارای دو اشکال اساسی می باشد (این دو اشکال، از معایب اصلی روش های مبتنی بر شبکه بندی می باشند): محدودیت در شبکه بندی مسائل با دامنه هایی با شکل های هندسی پیچیده و همچنین پیچیدگی محاسباتی برای حل مسائل با ابعاد بالا.

به طوری کلی در حل عددی بسیاری از مسائل با استفاده از روش های مبتنی بر شبکه بندی در اغلب موارد به اصلاح کردن شبکه ها در نواحی خاصی از دامنه، به خصوص نزدیک مرزها می باشد که سبب پیچیدگی محاسباتی خواهد شد. به علاوه روش های مبتنی بر شبکه بندی برای حل مسائل با ابعاد بزرگ مناسب نمی باشند، حتی با استفاده از روش های مدرن شبکه بندی، همچنین حل مسائل سه بعدی بسیار پیچیده و دشوار می باشند. در مسائل با ابعاد بالاتر از سه، عملاً به کارگیری روش های معمول مبتنی بر شبکه، مانند تفاضلات متناهی و عناصر متناهی امکان پذیر نمی باشند. در دهه های اخیر برخی روش های عددی ارائه و توسعه یافته اند که بدون نیاز به شبکه بندی دامنه، برای حل معادلات استفاده می شوند. مهمترین هدف ارائه و توسعه روشهای بدون شبکه، فائق آمدن بر مشکل شبکه بندی و شبکه بندی مجدد کل دامنه باشد. به طور کلی یک تعریف جامع برای روش های بدون شبکه به صورت زیر می باشد: روش بدون شبکه، روشی است که بدون استفاده از یک شبکه بندی از قبل تعیین شده برای گسسته سازی دامنه و تنها با استفاده از یک مجموعه نقاط پراکنده در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده، مساله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل نماید. روشهای بدون شبکه، از یک مجموعه نقاطی که در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده برای نمایش دامنه و مرزهای آن (و نه برای گسسته سازی دامنه) استفاده می کند. این مجموعه نقاط پخش شده، نقاط میدانی^۵ نامیده می شوند، و این نقاط یک شبکه نمی سازند، به این معنی که هیچگونه اطلاعات قبلی درباره رابطه بین این گرهها برای درونیایی یا تقریب تابع مجهول و ... نیاز نیست. اخیراً تکنیک های متنوعی مبتنی بر روش های بدون شبکه معرفی شده اند و کاربردهای خوبی در حل عددی مسائل پیچیده مختلفی داشته اند و نشان داده شده است که پتانسیل بالایی

^۱ finite difference^۲ finite element^۳ finite volume^۴ boundary element methods^۵ Field nodes

برای تبدیل شدن به یک وسیله عددی قوی دارند. با این وجود، این روشها هنوز در مرحله توسعه قرار دارند و هنوز سوالات و مسائل تکنیکی وجود دارند که باید پاسخ داده شوند.

در سال های اخیر چندین روش بدون شبکه معرفی شده اند که از مهمترین رده آنها می توان به موارد زیر اشاره کرد: روش ذرات هیدرودینامیکی هموار^۱ (SPH) [۵۵] روش عناصر پخش شده (DEM)^۲ [۷۵]، روش افراز یک (PUM)^۳ [۶۳]، روش اچ-پی کلود^۴ [۲۵]، روش گالرکین با عناصر آزاد (EFG)^۵ [۸]، روش بازتولید عناصر هسته (RKPM)^۶ [۵۴]، روش بدون شبکه هم محلی بر اساس توابع پایه ای شعاعی (RBF)^۷ [۴۳]، روش نودهای مرزی (BNM)^۷ [۷۲]، روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی (LBIE)^۸ [۷۰، ۱۹، ۹۶، ۱۰۵]، روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین (MLPG)^۹ [۶۲، ۱۸، ۲۰، ۶]، روش درونیابی شعاعی نقاط^{۱۰} [۵۳]. به علت کثرت این روشها، بیان همه آنها امکان پذیر نیست اما، مرجع [۷۷] یک بازنگری (تا حدی کلی) از این روشها ارائه داده است.

هر چند روش های بدون شبکه متعددی ارائه شده اند ولی در همه این روش ها، اجرای روش بر سه گام اساسی و معمول استوار می باشد:

۱- تولید نقاط^{۱۱}:

اولین گام مشترک و اساسی در اجرای روش های بدون شبکه تولید نقاط می باشد، به این صورت که دامنه و مرز مسأله توسط یک مجموعه پراکنده از نقاط پوشش داده می شوند. این نقاط پوششی می توانند به صورت داده های پراکنده منظم یا نامنظم (تصادفی) باشند.

۲- تقریب جواب:^{۱۲}

در گام دوم اجرای روش های بدون شبکه، تابع مجهول به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه ای مشخص از اعضای جواب تقریب زده می شوند. این عمل را تقریب جواب می نامیم.

۳- آزمون:^{۱۳}

در گام آخر اجرای روش های بدون شبکه، برای محاسبه ضرائب مجهول در تقریب جواب پیشنهادی در گام دوم، باید آن جواب در معادلات حاکم صدق کند. این گام را آزمون جواب می نامند. این آزمون می تواند محلی یا کلی باشد. روشهای متفاوت تقریب جواب و آزمون منجر به روشهای بدون شبکه متفاوتی شده اند. در این رساله هدف بررسی و توسعه یک روش بدون شبکه بر مبنای توابع پایه ای شعاعی می باشد. در ادامه اجزاء سه گانه اجرای روش های بدون شبکه به طور ویژه بررسی خواهند شد.

^۱Smoothed Particle Hydrodynamic

^۲Diffuse element method

^۳Partition of unity method

^۴Hp-cloud method

^۵Element free Galerkin method

^۶Reproducing kernel particle method

^۷Boundary node method

^۸ Meshless local boundary integral equation method

^۹ Meshless local Petrov-Galerkin method

^{۱۰}Radial point interpolation method

^{۱۱}Node generation

^{۱۲}Trial approximation

^{۱۳}Testing

۲-۲ تولید نقاط

همان گونه که اشاره شد، در گام اول اجرای روش های بدون شبکه نیاز به تولید نقاط میدانی در ناحیه مسأله مورد نظر می باشد. یکی از مزیت های اصلی روش های بدون شبکه آزادی عمل در انتخاب داده های پراکنده در داخل دامنه و روی مرز ها می باشد. در ادامه برخی از فرم های متداول در انتخاب داده های پراکنده در دامنه های تست $\Omega \in \mathbb{R}^1$ و همچنین $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ارائه می شوند:

– داده های یکنواخت : یکی از متداول ترین نوع انتخاب نقاط در روش های بدون شبکه، انتخاب نقاط با پراکندگی یکنواخت در دامنه می باشد. به این صورت که:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

– نقاط چبیشف^۱ : مجموعه نقاط چبیشف، رده معمول دیگری از نقاط انتخابی در روش های بدون شبکه می باشد. این مجموعه از نقاط اغلب برای حل مسائلی که حساسیت جواب در نقاط نزدیک به مرز بیشتر است، استفاده می شوند. در حقیقت این نقاط ریشه های چند جمله ای های چبیشف واقع در دامنه می باشند. همچنین رده های متفاوت دیگری از نقاط پراکنده در دامنه موجود می باشند که به عنوان نقاط میدانی در روش های بدون شبکه استفاده خواهند شد. در ارتباط با تاثیر پراکندگی نقاط، معیاری به نام فاصله انباشتگی مطرح می شود.

$$h_{X,\Omega} = \sup_{x \in \Omega} \min_{x_j \in X} \|x - x_j\|_2,$$

در روش RBF کران خطا با استفاده از $h_{X,\Omega}$ بیان می شود. فاصله انباشتگی کمتر، موجب دقت بیشتر می شود.(مشروط بر اینکه پایداری حفظ شود)

^۱ Chebyshev data

۳-۲ تقریب جواب

همان گونه که قبلاً اشاره شد، دومین گام اساسی و مشترک در روش های بدون شبکه، تقریب جواب می باشد. در این گام جواب مسأله به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه ای و به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi_j(\mathbf{x}),$$

به طوری که در رابطه فوق، $\Phi_j(\cdot)$ توابع پایه ای مشخص و λ ضرائب مجهول می باشند که در گام سوم روش های بدون شبکه محاسبه می شوند. در فصل قبل توابع پایه ای شعاعی معرفی شدند و قضایای مربوط به آن ها در مسائل درونیایی داده های پراکنده به طور جامع بررسی شدند. به طور کلی در این رساله از توابع پایه ای شعاعی با پایه های نیوتن و استاندارد در گام تقریب جواب ها استفاده می شود. باید توجه داشت که در مواجهه با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بعضی از نتایج و قضایا در مسائل درونیایی فاقد اعتبار می باشند و یا با اعمال برخی تغییرات قابل استفاده می باشند. در ادامه و هنگام بررسی روش های بدون شبکه، این نتایج و قضایا بررسی خواهند شد.

در گام سوم روش های بدون شبکه، جواب های پیشنهادی در فرم معادلات حاکم صدق داده می شود و سپس ضرائب مجهول محاسبه می شوند. چندین روش آزمودن تا به حال ارائه گردیده اند که می توان آنها را در گروه های زیر دسته بندی کرد:

۴-۲ آزمودن به فرم سراسری (روش هم محلی)

این روش به طور گسترده در تقریب توابع پایه ای شعاعی و همچنین روش ذرات هیدرودینامیکی هموار به کار می رود. در این روش، تابع تقریب باید در یک مجموعه از نقاط (نقاط هم محلی) در فرم اصلی معادلات حاکم صدق کند. تعداد این نقاط نباید از تعداد ضرایب مجهول کمتر باشد و این نقاط باید مجزا باشند. در نتیجه مسأله تبدیل به یک دستگاه معادلات می شود که ضرایب تقریب مجهول هستند. به وضوح این روش یک روش ساده و سریع می باشد، اما مشکل اصلی آن ناپایداری است.

۱-۴-۲ روش هم محلی کانسا (نا متقارن)

روش کانسا^۱ [۴۲، ۴۳] یکی از معروفترین روش های بدون شبکه می باشد. در این روش از توابع پایه ای شعاعی برای تقریب جواب استفاده می شود، لذا در اغلب موارد این روش را روش هم محلی توابع پایه ای شعاعی نیز می نامند. این روش مبتنی بر فرم معادلات حاکم بر مسأله و برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانسا معرفی و برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی مورد استفاده قرار گرفت [۴۲]. به علت سادگی در اجرا و کارایی بالای روش کانسا،

^۱Kansa's method

این روش به سرعت مورد توجه مهندسان و دانشمندان قرار گرفت و به طور وسیعی در حل مسائل مهندسی و علوم پایه استفاده شد. در سال های اخیر توسعه های زیادی برای افزایش کارایی و دقت این روش داده شده است و به علاوه نتایج تحلیلی جالبی در رابطه با کران خطا و همگرایی این روش اثبات شده اند. مزیت اصلی روش کانسا در دقت بالا و انعطاف پذیری آن در مواجهه با مسائل با دامنه های هندسی نامنظم می باشد. باید متذکر شد که تنها اطلاعات هندسی مورد نیاز در روش کانسا فاصله بین نقاط میدانی انتخاب شده در دامنه می باشد و لذا به راحتی می توان آن را برای مسائل با ابعاد بالا تعمیم داد.

برای توضیح روش کانسا، مسأله مقدار مرزی کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1-2)$$

$$Bu(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2-2)$$

به طوری که در رابطه فوق $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیلی، B عملگر دیفرانسیلی مرزی، f ، g توابع معلوم و به اندازه کافی هموار، $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ناحیه داخلی دامنه مدل، Γ مرز Ω و در نهایت $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. فرض کنید $\{\mathbf{x}_j, f(\mathbf{x}_j)\}_{j=1}^{\mathcal{N}_i}$ ، $\mathcal{N}_i$ نقطه میدانی و متمایز در داخل دامنه Ω و $\{\mathbf{x}_j, g(\mathbf{x}_j)\}_{j=\mathcal{N}_i+1}^{\mathcal{N}}$ ، نقاط میدانی متمایز مرزی باشند. در ادامه این بخش از نماد $\mathcal{N}_i$ برای نشان دادن تعداد نقاط داخلی و از نماد $\mathcal{N}_b$ برای نشان دادن تعداد نقاط مرزی استفاده خواهد شد. روش های هم محلی مدل ۱-۲ را با انتخاب نقاط هم محلی $\{\xi_k\}_{k=1}^{\mathcal{N}}$ به صورت دستگاه معادلات خطی زیر تبدیل می کنند:

$$\mathcal{L}u(\xi_k) = f(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_i, \quad (3-2)$$

$$Bu(\xi_k) = g(\xi_k), \quad k = \mathcal{N}_i + 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (4-2)$$

ایده اساسی روش کانسا، تقریب تابع جواب u به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه ای شعاعی می باشد:

$$u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|), \quad (5-2)$$

به طوری که $\mathbf{x}_j$ ها نقاط مرکزی و λ_j ها ضرایب مجهول می باشند. با جایگذاری رابطه (۵-۲) در مدل ارائه شده (۱-۲) نتیجه می شود:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \mathcal{L}\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6-2)$$

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \mathcal{B}\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (7-2)$$

و در ادامه با استفاده از دستگاه هم محلی، نتیجه می شود:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \mathcal{L}\phi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|) = f(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_i, \quad (8-2)$$

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \mathcal{B}\phi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|) = g(\xi_k), \quad k = \mathcal{N}_i + 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (9-2)$$

معمولاً در اجرای روش کانسا نقاط مرکزی و نقاط هم محلی یکسان در نظر گرفته می شوند. در ادامه با حل دستگاه معادلات (۸-۲) یک جواب تقریبی برای مدل ارائه شده محاسبه می شود. کارایی و اعتبار روش کانسا در مقالات متنوعی بررسی شده است. کانسا در مقاله [۴۳] مجموعه ای از روش ها که از روش هم محلی توابع پایه ای شعاعی استفاده می کنند را شرح داده و کارایی این روش با استفاده از توابع چند ربعی ها به عنوان توابع پایه ای را از دید پیچیدگی محاسباتی و دقت مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و نتایج حاصل را با روش تفاضلات متناهی مقایسه کرده است. متأسفانه مشکل اساسی روش کانسا این است که دستگاه حاصل از گسسته سازی هم محلی برای آرایش خاصی از نقاط می تواند منفرد باشد. در مقاله [۳۷] نویسندگان به طور مفصل به بررسی این موضوع پرداخته اند.

۲-۴-۲ آزمون به فرم موضعی

این روش، در سال های اخیر معرفی و استفاده شده است. در این روش بر خلاف روش های آزمون به فرم سراسری که جواب های تقریبی در یک مجموعه از نقاط پراکنده در دامنه اصلی برای آزمون جواب استفاده می کرد، از مجموعه نقاط پراکنده در نواحی موضعی در دامنه اصلی استفاده می کند. در این روش ممکن است، تعداد نقاط محدودی که تا نقطه مورد نظر کمترین فاصله را دارند یا از داده هایی استفاده شود که تا نقطه مورد نظر کمترین فاصله را دارند. به بیانی دیگر در این روش، نقاط همسایه بر اساس تعداد یا فاصله تعریف می شوند. این نوع آزمون سبب افزایش پایداری روش می شود.

فصل ۳

روش بدون شبکه موضعی برای حل
معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان

۱-۳ مقدمه

در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بر روی دامنه های بزرگ با استفاده از روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی، احتمال بدو ضعی ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی حاصل بالا می رود. برای غلبه بر این مشکل، روش هم محلی توابع پایه ای شعاعی موضعی اولین بار توسط سارلر [۸۴] برای مسایل انتشار معرفی شد که دارای نتایج بهتری از نظر دقت و کار آیی بود.

اخیرا نیز در مقالات گسترده استفاده از روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه شعاعی که برای هر زیر دامنه از کل دامنه اعمال می شود بررسی شده است [۴۹، ۹۲، ۱۰۱]. استفاده از روش موضعی باعث تنک شدن ماتریس ضرایب و به دنبال آن کاهش بدو ضعی ماتریس ضرایب می شود.

بنابراین روش به کار برده شده در این رساله نیز به فرم موضعی می باشد که در این فصل به طور کامل به توضیح آن می پردازیم.

بعد از معرفی روش پیشنهادی، به حل عددی معادله برگرز که یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه دوم می باشد و به عنوان یک مدل ساده شده برای آشفستگی، رفتار لایه مرزی، فرم بندی موج ضربه ای و انتقال دادن جرم به کار برده می شود، می پردازیم.

در سال های اخیر روش های عددی متعددی برای حل معادله برگرز با عدد رینولدز کوچک و بزرگ ارائه شده اند ([۱، ۵، ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۲۶، ۳۵، ۳۶، ۴۰، ۴۱، ۴۶، ۶۵، ۸۰، ۹۷، ۱۰۲]). در این فصل به حل مثال های مختلف این معادله با اعداد رینولدز مختلف پرداخته و کارایی روش را بویژه برای معادله با عدد رینولدز بزرگ بررسی می کنیم.

۲-۳ هسته های با پارامتر شکلی ثابت

هسته ها در $\mathbb{R}^d$ می توانند مجهز به پارامتر شکل c به صورت زیر شوند.

$${}_cK(x, y) = K\left(\frac{x}{c}, \frac{y}{c}\right) \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

که این عامل نقش اساسی در کنترل شکل توابع پایه ای شعاعی دارد. بنابراین هسته های شعاعی در $\mathbb{R}^d$ را می توان به صورت زیر در نظر گرفت [۱۱].

$${}_cK(x, y) = \phi\left(\frac{x-y}{c}\right) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d,$$

$${}_cK(x, y) = \phi\left(\frac{r}{c}\right), \quad r = \|x-y\|_2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

انتخاب پارامتر شکل موضعی است که بیش از دو دهه مطرح شده است [۱۱، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۸۲، ۹۳]. روش دقیق برای بدست آوردن این پارامتر وجود ندارد بنابراین بیشتر محققان با آزمون و خطا مقدار مطلوب این پارامتر را

بدست می آورند.

شاباک و همکاران با در نظر گرفتن پارامتر شکلی برای توابع پایه ای شعاعی، متوجه شدند که با افزایش این پارامتر عدد وضعیت افزایش یافته و مسئله ناپایدارتر می شود، اما جواب به مقدار واقعی نزدیک تر می شود. با کاهش این پارامتر عدد وضعیت کاهش یافته و مسئله پایدارتر می شود، اما جواب از جواب واقعی دورتر می شود. از این رو با اصل عدم قطعیت^۱ مواجه هستیم. این اصل منجر به تلاش هایی برای یافتن پارامتر شکلی بهینه شده است، یعنی مقداری که در عین حال که مسئله را از لحاظ عددی پایدار نگه می دارد، حداکثر دقت را نیز ارائه کند. این تلاش ها اگر چه منجر به یافتن مقادیری برای پارامتر شکل شده است اما همگی وابسته به شرایط خاص مسئله است و هم چنان تحقیقات برای یافتن پارامتر شکلی بهینه در حالت کلی ادامه دارد. به همین دلیل است که در بیشتر موارد پارامتر شکلی برای هر مسئله به طور تجربی بدست می آید.

۳-۳ هسته های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده

ایده اصلی روش هسته های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده توسط بوزینی و همکاران در [۱۱] مطرح شده است.

تعریف ۳-۳-۱. c را یک تابع مقیاس $(0, \infty) : \mathbb{R}^d \rightarrow c$ در نظر بگیرید. هسته به طور متغیر مقیاس شده روی $\mathbb{R}^d$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$K_c(x, y) = K((x, c(x)), (y, c(y))), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d.$$

قضیه ۳-۳-۲. اگر K مثبت (نیمه) معین باشد آنگاه K_c نیز معین مثبت است. اگر K و c پیوسته باشند آن گاه K_c نیز پیوسته است.

اگر K هسته شعاعی باشد یعنی $K(x, y) = \phi(r^2)$ آن گاه

$$K_c(x, y) = \phi(r^2 + (c(x) - c(y))^2), \quad r = \|x - y\|_2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

یک هسته شعاعی متغیر است. یکی از هسته های مهم، هسته مترن-سوبولف $r^\nu K_\nu(r)$ به طوریکه

$$\nu = m - d/2, \quad r = \|x - y\|_2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d,$$

و فضای محلی متناظر با این هسته بازتولیدی، فضای سوبولف $W_\nu^m(\mathbb{R}^d)$ می باشد. بنابراین هسته مترن-سوبولف به

^۱uncertainty principle

طور متغیر مقیاس شده به صورت زیر می باشد.

$$(r^\nu + ((c(x) - c(y))^\nu)^{\nu/2} K_\nu \left((r^\nu + ((c(x) - c(y))^\nu)^{1/2} \right), \quad r = \|x - y\|_2, \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

هسته های به طور متغیر مقیاس شده فاصله تفکیک را زیاد می کنند، بنابراین پایداری افزایش می یابد. از طرفی فاصله انباشتگی نیز زیاد می شود که باعث افزایش کران خطا می شود. در [۱۱] ثابت شده است که هرگاه فاصله تفکیک و فاصله انباشتگی متناسب باشند، ارتباط نزدیکی بین خطا و پایداری وجود دارد.

۱-۳-۳ درون یابی

مسئله درون یابی برای نقاط گره ای متمایز $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ و $f_1, f_2, \dots, f_n$ به طوری که $i = 1, 2, \dots, n$ $f_i \in \mathbb{R}$ مشابه درون یابی با استفاده از هسته شعاعی می باشد. تابع چند متغیره $S : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ را در نظر بگیرید. تقریب تابع S با هسته (تابع) شعاعی به طور متغیر مقیاس شده ϕ به صورت زیر خواهد بود:

$$S(x, c(x)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(r_j), \quad r_j = \|(x, c(x)) - (y, c(y))\| \quad (1-3)$$

که با قراردادن نقاط $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ در (۱-۳) دستگاه معادلات خطی زیر را خواهیم داشت:

$$A\Lambda = F,$$

به طوریکه

$$A = \left(\|x_i - x_j\|_2^\nu + ((c(x_i) - c(x_j))^\nu) \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \Lambda = (\lambda_i, 1 \leq i \leq n)^T, \\ F = (S(x_i, c(x_i)), 1 \leq i \leq n)^T.$$

۴-۳ توابع پایه ای نیوتن

استفاده از توابع پایه ای نیوتن به جای توابع پایه ای استاندارد به نتایج دقیق تر و پایداری منجر می شود که در این بخش به توضیح این توابع می پردازیم [۷۳].

هسته معین مثبت متقارن هموار $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ روی دامنه Ω را در نظر بگیرید. استفاده از پایه های استاندارد برای درون یابی وقتی فاصله تفکیک کوچک باشد، منجر به ماتریس هسته بدوضع

$$A = (K(x_j, x_k))_{1 \leq j, k \leq n},$$

که ناپایدار است، می شود. برای رفع این مشکل، شاباک و همکاران در [۷۳] به معرفی توابع پایه ای نیوتن که متعامد یکه و کامل در فضای هیلبرت محلی می باشند، پرداخته اند. توابع پایه ای نیوتن $\{N_k(x)\}_{k=1}^n$ را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$N_k(x) = \sum_{j=1}^n K(x, x_j) \tilde{c}_{jk}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (2-3)$$

به طوریکه

$$N(x) = (N_1(x), \dots, N_n(x)),$$

و

$$T(x) = (K(x, x_1), \dots, K(x, x_n)),$$

می باشد. فرم ماتریسی رابطه (۲-۳) به صورت زیر بیان می شود :

$$N(x) = T(x) \tilde{C},$$

که ماتریس $\tilde{C} = (\tilde{c}_{jk})_{1 \leq j, k \leq n}$ را ماتریس ساختار می نامیم. همچنین ماتریس مقدار $V = (N_j(x_i))_{1 \leq i, j \leq n}$ از پایه $N(x)$ به فرم ماتریسی $V = A \tilde{C}$ می باشد به طوریکه A ماتریس مقدار از پایه های استاندارد می باشد. بنابراین پایه های جدید $N(x)$ با انتخاب های متفاوت $\tilde{C}$ حاصل می شوند. یکی از این انتخاب ها تجزیه چولسکی ماتریس A به صورت $A = LL^T$ که L یک ماتریس پایین مثلثی نامنفرد بوده و با انتخاب $\tilde{C} = (L^T)^{-1}$ ، ماتریس مقدار متناظر با پایه جدید به صورت $V = L$ می باشد که خوش وضع تر از ماتریس A می باشد [۷۸].

ویژگی های پایداری توابع پایه ای نیوتن نسبت به پایه های استاندارد و لاگرانژ در [۷۳] نشان داده شده است. همچنین مشاهده شده است که عدد حالت ماتریس هم محلی متناظر با توابع پایه ای نیوتن کوچکتر از ماتریس متناظر با توابع پایه ای شعاعی می باشد. تحقیقات نظری درباره مشخصات ماتریس مقدار حاصل شده از توابع پایه ای نیوتن همچنان ادامه دارد. اگر مقادیر پایه نیوتن و نگاشت خطی $\mathcal{L}$ مانند مشتقات در نقاط مختلف مورد نیاز باشند، سیستم های خطی زیر را به ترتیب بدست می آوریم.

$$VN^T(x) = T(x)^T,$$

و

$$V\mathcal{L}(N^T(\cdot)) = \mathcal{L}(T(\cdot)^T), \quad (3-3)$$

قابل ذکر است که توابع مورد استفاده در این فصل توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده، به صورت زیر می باشد.

$$N_c(x) = T_c(x)\tilde{C},$$

که با در نظر گرفتن هسته به طور متغیر مقیاس شده $K_c(x, y)$ در معادله (۲-۳) بدست می آید. با توجه به (۳-۳) برای بدست آوردن مشتقات $K_c(x, y)$ از نماد گزاری و تکنیک مطرح شده در [۸۸] استفاده می کنیم که برای روش های مبتنی بر هسته با استفاده از برنامه نویسی در متلب بسیار مفید می باشد. فرض کنید:

$$K_c(x, y) = \phi \left(\frac{1}{\gamma} (\|x - y\|_\gamma^2 + (c(x) - c(y))^2) \right), \quad x, y \in \mathbb{R}^d.$$

قرار می دهیم: $K_c(x, y) = \phi(s)$ که $s = \frac{1}{\gamma} (\|x - y\|_\gamma^2 + (c(x) - c(y))^2)$ بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} K_c(x, y) &= \phi'(s) \frac{\partial s}{\partial x_i} \\ &= \phi'(s) \left((x_i - y_i) + ((c(x) - c(y)) \frac{\partial c}{\partial x_i}) \right). \end{aligned}$$

به همین ترتیب می توانیم دیگر مقادیر مشتقات جزئی را با توجه به مطالب بالا بدست آوریم [۸۸]. در این رساله برای راحتی کار اندیس c از K_c را حذف می کنیم.

۳-۵ روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده

با توجه به توضیحاتی که در بخش های قبلی ذکر شد، به شرح روش پیشنهادی رساله برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی می پردازیم. معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان زیر را در نظر بگیرید.

$$\mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T], \quad (4-3)$$

با شرط اولیه زیر :

$$\mathcal{I}u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (5-3)$$

و با شرایط مرزی دیریکله و نیومن :

$$u(x, t) = g^D(x, t), \quad x \in D \subset \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (6-3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = g^N(x, t), \quad x \in \mathcal{N} \subset \partial\Omega, \quad t \in [0, T], \quad (7-3)$$

که در آن $\mathcal{L} : H \rightarrow F$ یک عملگر مشتق می باشد و $\mathcal{I}$ یک عملگر خطی می باشد. همچنین H و F فضاهای هیلبرت توابع روی $\bar{\Omega}$ می باشند. فرض بر این است که مساله (3-4) تا (3-7) خوش وضع می باشد. حال نقاط گسسته $1 \leq i, x^{[i]}$ و هسته معین مثبت متقارن $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می گیریم. نقاط را به صورت $\{X^I \cup X^D \cup X^N\}$ مرتب می کنیم که در آن $X^I = \{x^{[1]}, \dots, x^{[n_i]}\}$ مجموعه نقاط درونی و $X^D = \{x^{[ni+1]}, \dots, x^{[ni+nd]}\}$ مجموعه نقاط مرزی دیریکله و $X^N = \{x^{[ni+nd+1]}, \dots, x^{[n]}\}$ مجموعه نقاط مرزی نیومن می باشند. ni و nd تعداد نقاط داخلی و نقاط مرزی دیریکله می باشند. برای هر نقطه مرکزی $x^{[i]}$ و $(i = 1, \dots, n)$ شبکه $S_i = \{x_k^{[i]}\}_{k=1}^{n_s}$ را در نظر می گیریم که شامل نقطه مرکزی $x^{[i]}$ و $n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در همسایگی نقطه مفروض می باشند. همچنین پایه های نیوتن $N_1^{[i]}, N_2^{[i]}, \dots, N_{n_s}^{[i]}$ متناظر با این نقاط را تشکیل می دهیم. در روش بدون شبکه موضعی، تابع مجهول $u(x, t)$ به ازای هر نقطه مرکزی $x^{[i]}$ روی S_i به صورت ترکیب خطی از توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده و به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$u^{[i]}(x, t) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(x), \quad x \in S_i. \quad (8-3)$$

فرم ماتریسی درون یابی برای هر زیر دامنه به شکل زیر می باشد:

$$U^{[i]} = N^{[i]} * \alpha^{[i]}(t),$$

و در هر زیر دامنه، ضرایب مجهول $\alpha^{[i]}(t)$ توسط روش هم محلی به صورت زیر است:

$$\alpha^{[i]}(t) = N^{-1} * U^{[i]}, \quad (9-3)$$

به طوریکه

$$\begin{aligned} U^{[i]} &= \left(u^{[i]}(x_1^{[i]}, t), u^{[i]}(x_2^{[i]}, t), \dots, u^{[i]}(x_{n_s}^{[i]}, t) \right)^T, \\ \alpha^{[i]} &= \left(\alpha_1^{[i]}(t), \alpha_2^{[i]}(t), \dots, \alpha_{n_s}^{[i]}(t) \right)^T, \\ N^{[i]} &= \left(N_j^{[i]}(x_k^{[i]}) \right)_{1 \leq k \leq n_s, 1 \leq j \leq n_s}. \end{aligned}$$

می باشد. مشتقات مکانی $u^{[i]}$ در نقاط $x^{[i]}$ با استفاده از مشتقات توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده به صورت زیر بدست می آید:

$$L(u^{[i]}(x, t)) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) L(N_j^{[i]}(x)), \quad x \in S_i,$$

و L عملگر مشتق مکان در مختصات دکارتی می باشد. بنابراین معادله زیر حاصل می شود:

$$L(u^{[i]}(x^{[i]}, t)) = L(N^{[i]}) * N^{-1[i]} * U^{[i]},$$

به طوری که

$$L(N^{[i]}) = \left(L(N_j^{[i]}(x^{[i]})) \right)_{1 \leq j \leq n_s}.$$

حال با قراردادن نقاط هم محلی درونی $x^{[i]}, i = 1, \dots, n_i$ در معادله (۳-۴) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\mathcal{L}u(x^{[i]}, t) = f(x^{[i]}, t),$$

بنابراین

$$\mathcal{L}u^{[i]}(x^{[i]}, t) = f(x^{[i]}, t).$$

در نتیجه

$$\mathcal{L}\left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(x^{[i]})\right) = f(x^{[i]}, t), \quad i = 1, \dots, n_i. \quad (۳-۱۰)$$

با در نظر گرفتن رابطه (۳-۹) فرم ماتریسی معادله (۳-۱۰) فقط شامل بردار مجهول $U^{[i]}$ است که تنها وابسته به t می باشد. سپس با در نظر گرفتن مجموع مقادیر تابع در نقاط مرکزی سیستم موضعی در موقعیت های مناسب در ردیف i ام، یک سیستم سراسری ODE با بردار مجهول سراسری U که مقادیر تابع را در تمام نقاط درونی فراهم می کند، بدست

می آید. در ادامه می خواهیم شرایط مرزی (۶-۳) و (۷-۳) را در معادله اعمال کنیم. برای این منظور فرض می کنیم:

$$\begin{aligned} U &= (U^I, U^D, U^N)^T, \\ U^I &= (u(x^{[i]}, t), 1 \leq i \leq ni), \\ U^D &= (u(x^{[i]}, t), ni + 1 \leq i \leq ni + nd), \\ U^N &= (u(x^{[i]}, t), ni + nd + 1 \leq i \leq n). \end{aligned}$$

از شرط دیریکله (۶-۳) داریم:

$$U^D = (g^D(x^{[i]}, t), ni + 1 \leq i \leq ni + nd). \quad (۱۱-۳)$$

و از شرط نیومن (۷-۳) نتیجه می گیریم:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial \mathbf{n}}(x^{[i]}) = g^N(x^{[i]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq i \leq n,$$

به طوری که فرم ماتریسی آن به صورت زیر می باشد:

$$N_{\mathbf{n}}^{[i]} * N^{-1[i]} * U^{[i]} = g^N(x^{[i]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq i \leq n, \quad (۱۲-۳)$$

و

$$N_{\mathbf{n}}^{[i]} = \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial \mathbf{n}}(x^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right).$$

اکنون فرض کنید، I_i برداری شامل اندیس نقاط مرکزی $x^{[i]}$ و تعداد $n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در همسایگی نقطه مفروض اند می باشد. همچنین ماتریس تنک W را که ابعاد آن $(n - ni - nd) \times n$ می باشد به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$W(i - ni - nd, I_i) = N_{\mathbf{n}}^{[i]} * N^{-1[i]}, \quad i = ni + nd + 1, \dots, n.$$

با جایگذاری W در معادله (۱۲-۳) رابطه زیر حاصل می شود:

$$W * U = (g^N(x^{[i]}, t), ni + nd + 1 \leq i \leq n)^T.$$

همچنین بردار مجهول U^N را بر حسب بردار مجهول U^I می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} W(:, ni + nd + 1 : n) * U^N &= (g^N(x^{[i]}, t), ni + nd + 1 \leq i \leq n)^T \\ -W(:, 1 : ni) * U^I - W(:, ni + 1 : ni + nd) * U^D. \end{aligned} \quad (13-3)$$

به علاوه با استفاده از شرط اولیه (5-3) داریم:

$$\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(\circ) \mathcal{I}(N_j^{[i]}(x^{[i]})) = u_\circ(x^{[i]}), \quad i = 1, \dots, ni.$$

فرض کنید ماتریس تنک D با ابعاد $ni \times n$ به صورت زیر باشد:

$$D(i, I_i) = \mathcal{I}(N^{[i]}) * N^{-1[i]}, \quad i = 1, \dots, ni,$$

به طوری که

$$\mathcal{I}(N^{[i]}) = \left(\mathcal{I}(N_j^{[i]}(x^{[i]})) \right)_{1 \leq j \leq n_s}.$$

سپس معادله زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} D(:, 1 : ni) * U^I(\circ) &= (u_\circ(x^{[i]}), 1 \leq i \leq ni)^T \\ -D(:, ni + 1 : ni + nd) * U^D(\circ) - D(:, ni + nd + 1 : n) * U^N(\circ). \end{aligned} \quad (14-3)$$

با توجه به تساوی (9-3) و با در نظر گرفتن (11-3) و (13-3) معادله (10-3) معادله ODE زیر را نتیجه می دهد:

$$\tilde{\mathcal{L}}(U^I(t)) = \mathcal{F}(U^I(t)),$$

با شرط اولیه (14-3) که در آن عملگر خطی مشتق می باشد و $\mathcal{F}$ عملگری است که شامل ماتریس های تنک می باشد. لازم به ذکر می باشد که غیرخطی بودن معادله حفظ شده است و معادله دیفراسیل معمولی با یک حل گر خوب ODE در متلب، به طور اتوماتیک گام زمانی منطقی را تعیین می کند و میزان سختی سیستم را تشخیص می دهد و معادله را حل می کند.

۳-۶ روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده برای حل معادله برگرز

در این قسمت روش شرح داده شده در رساله، را روی معادله برگرز غیر خطی یک بعدی برای بدست آوردن جواب عددی به کار می گیریم. ابتدا فرمول بندی مسئله را توضیح می دهیم.
معادله یک بعدی برگرز زیر را در نظر بگیرید.

$$u_t(x, t) = -u(x, t)u_x(x, t) + \frac{1}{Re}u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T], \quad (15-3)$$

همراه با شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in [a, b], \quad (16-3)$$

$$\beta_1 u(a, t) + \gamma_1 u_x(a, t) = g_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (17-3)$$

$$\beta_2 u(b, t) + \gamma_2 u_x(b, t) = g_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (18-3)$$

که Re عدد رینولدز و $\frac{1}{Re}$ ویسکوزیته سینماتیک می باشد. اگر نقاط گسسته $X = \{x^{[1]}, x^{[2]}, \dots, x^{[n]}\}$ را در بازه $[a, b]$ به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$a < x^{[1]} < \dots < x^{[n-2]} < b,$$

$$x^{[n-1]} = a,$$

$$x^{[n]} = b.$$

برای هر $x^{[i]} \in X$ ($i = 1, \dots, n$) شبکه $S_i = \{x_k^{[i]}\}_{k=1}^{n_s}$ که شامل نقطه مرکزی $x^{[i]}$ و $n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در مجاورت نقطه مفروض می باشند، در نظر می گیریم. متناظر با این نقاط، توابع پایه ای نیوتن $N_1^{[i]}, N_2^{[i]}, \dots, N_{n_s}^{[i]}$ را تشکیل داده. در ادامه، تابع مجهول $u(x, t)$ به ازای هر نقطه مرکزی $x^{[i]}$ روی S_i به صورت ترکیب خطی از توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده و به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$u^{[i]}(x, t) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(x), \quad x \in S_i. \quad (19-3)$$

سپس داریم:

$$\alpha^{[i]} = N^{-1[i]} * U^{[i]}, \quad (20-3)$$

که بردارها و ماتریس به صورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} U^{[i]} &= \left(u^{[i]}(x_1^{[i]}, t), u^{[i]}(x_2^{[i]}, t), \dots, u^{[i]}(x_{n_s}^{[i]}, t) \right)^T, \\ \alpha^{[i]} &= \left(\alpha_1^{[i]}(t), \alpha_2^{[i]}(t), \dots, \alpha_{n_s}^{[i]}(t) \right)^T, \\ N^{[i]} &= \left(N_j^{[i]}(x_k^{[i]}) \right)_{1 \leq k \leq n_s, 1 \leq j \leq n_s}. \end{aligned}$$

حال با قرار دادن نقاط داخلی $x^{[i]}$ ($i = 1, \dots, n-2$) در معادله دیفرانسیل جزئی (۳-۱۵) به معادله زیر می رسم.

$$u_t^{[i]}(x^{[i]}, t) = -u^{[i]}(x^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(x^{[i]}) \right) + \frac{1}{Re} \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial^2 N_j^{[i]}}{\partial x^2}(x^{[i]}) \right) + f(x^{[i]}, t).$$

با استفاده از معادله (۳-۲۰) داریم:

$$u_t^{[i]}(x^{[i]}, t) = -u^{[i]}(x^{[i]}, t) (N_x^{[i]} * N^{-1[i]} * U^{[i]}) + \frac{1}{Re} (N_{xx}^{[i]} * N^{-1[i]} * U^{[i]}) + f(x^{[i]}, t), \quad i = 1, \dots, n-2, \quad (3-21)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} N_x^{[i]} &= \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(x^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right), \\ N_{xx}^{[i]} &= \left(\frac{\partial^2 N_j^{[i]}}{\partial x^2}(x^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right). \end{aligned}$$

در ادامه فرض می کنیم که I_i برداری شامل اندیس نقطه مرکزی $x^{[i]}$ و $n_s - 1$ نقطه که در همسایگی نقطه مفروض قرار گرفته اند، باشد. به کمک آن، ماتریس های تنک D_1, D_2 با ابعاد $(n-2) \times n$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} D_1(i, I_i) &= N_x^{[i]} * N^{-1[i]}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ D_2(i, I_i) &= N_{xx}^{[i]} * N^{-1[i]}, \quad i = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

با جایگذاری D_1 و D_2 در رابطه (۳-۲۱) معادله زیر را نتیجه می گیریم:

$$\tilde{U}_t = -\tilde{U} * (D_1 * U) + \frac{1}{Re} (D_2 * U) + F, \quad (3-22)$$

که بردارها به صورت زیر می باشند.

$$\begin{aligned} U &= \left(u(x^{[1]}, t), \dots, u(x^{[n]}, t) \right)^T, \\ \tilde{U} &= \left(u(x^{[1]}, t), \dots, u(x^{[n-1]}, t) \right)^T, \\ F &= \left(f(x^{[1]}, t), \dots, f(x^{[n-1]}, t) \right)^T, \end{aligned}$$

و *. ضرب نقطه ای بین بردار و ماتریس می باشد. حال با اعمال شرایط مرزی (۱۷-۳) و (۱۸-۳) در نقاط $x^{[n]}$ و $x^{[n-1]}$ داریم:

$$\begin{aligned} \beta_1 \left(u^{[n-1]}(x^{[n-1]}, t) \right) + \gamma_1 \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[n-1]}(t) \frac{\partial N_j^{[n-1]}}{\partial x} (x^{[n-1]}) \right) &= g_1(t), \\ \beta_2 \left(u^{[n]}(x^{[n]}, t) \right) + \gamma_2 \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[n]}(t) \frac{\partial N_j^{[n]}}{\partial x} (x^{[n]}) \right) &= g_2(t). \end{aligned}$$

و با استفاده از رابطه (۲۰-۳) معادله زیر حاصل می شود:

$$\beta_1 \left(u^{[n-1]}(x^{[n-1]}, t) \right) + \gamma_1 (N_x^{[n-1]} * N^{-1[n-1]} * U^{[n-1]}) = g_1(t), \quad (23-3)$$

$$\beta_2 \left(u^{[n]}(x^{[n]}, t) \right) + \gamma_2 (N_x^{[n]} * N^{-1[n]} * U^{[n]}) = g_2(t). \quad (24-3)$$

اگر W را ماتریس تنک با ابعاد $2 \times n$ به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$W(i - n + 2, I_i) = \beta_{i-n+2} (\mathbf{1}_i) + \gamma_{i-n+2} (N_x^{[i]} * N^{-1[i]}), \quad i = n - 1, n,$$

به طوری که $\mathbf{1}_i$ برداری $1 \times n$ با عدد ۱ در درایه i ام و صفر در بقیه درایه ها می باشد. با جایگذاری W در معادلات (۲۳-۳) و (۲۴-۳) معادله زیر حاصل می شود:

$$W * U = (g_i(t), \quad i = 1, 2)^T.$$

که بردار مجهول $(u(x^{[i]}, t), i = n - 1, n)^T$ می تواند برحسب بردار مجهول $\tilde{U}$ به صورت زیر نوشته شود:

$$W(:, n - 1 : n) * (u(x^{[i]}, t), i = n - 1, n)^T = (g_i(t), \quad i = 1, 2)^T - W(:, 1 : n - 2) * \tilde{U}. \quad (25-3)$$

در نتیجه با قراردادن معادله (۲۵-۳) در (۲۲-۳) معادله ODE با شرط اولیه زیر را داریم.

$$\tilde{U}(\circ) = (\phi(x^{[i]}), 1 \leq i \leq n-2).$$

۷-۳ نتایج عددی

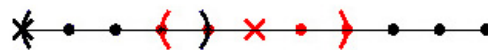
در این قسمت، به حل مثال های مختلف معادله برگرز یک بعدی می پردازیم. برای حل معادله، هسته مترن با پارامتر های $\nu = 3/2, 5/2, 7/2$ و تابع مقیاس $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ برای مثال های ۱ تا ۵ و $c(x) = 1-x^2$ برای مثال ۶ در نظر گرفته شده است. نقاط مرکزی و هم محلی در نظر گرفته شده، نقاط چپیشف

$$x^{[i]} = -\cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n-1}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

اند که متعلق به بازه $[-1, 1]$ می باشند و قابل انتقال به بازه $[a, b]$ با تبدیل $y = \frac{b-a}{4}x + \frac{a+b}{4}$ می باشند. همچنین نقاط متساوی الفاصله

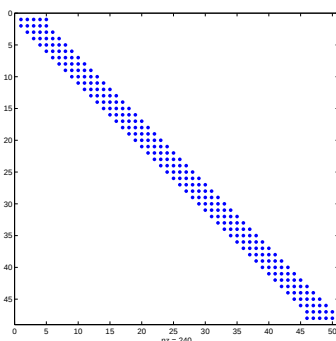
$$x^{[i]} = a + (i-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

نیز برای حل استفاده شده است. در فرم موضعی زیر دامنه هایی با $n_s = 5$ از دامنه اصلی انتخاب شده اند که در شکل ۱-۳ مشاهده می کنید.



شکل ۱-۳: مجموعه نقاط متساوی الفاصله و دامنه های موضعی با فرض $n_s = 5$ در نقاط داخلی و مرزی. $\times$ بیانگر نقطه مرکزی می باشد.

همچنین در شکل ۲-۳ ماتریس های تنک D_1 و D_2 برای $n = 50$ رسم شده است. همانطور که در شکل مشاهده می کنید هر سطر شامل ۵ درایه غیرصفر می باشد و بقیه درایه ها صفر می باشند.



شکل ۳-۲: ماتریس های تنک D_1 و D_2 برای $n = 50$ نقطه

برای حل معادله دیفرانسیل معمولی حاصل شده از ode113 برنامه متلب، استفاده کرده ایم. برای محاسبه دقت روش، خطای نرم

$$L_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j - \tilde{u}_j|,$$

را به کار برده ایم که u و $\tilde{u}$ به ترتیب بیانگر مقدار دقیق و مقدار تقریبی می باشند.

مثال ۱: معادله برگرز (۳-۱۵) با شرط اولیه $\phi(x) = \sin(\pi x)$ و شرط مرزی دیریکله

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (\gamma_1 = \gamma_2 = g_1(t) = g_2(t) = 0)$$

را در نظر بگیرید که $f(x, t) = 0$ می باشد. جواب دقیق در مقاله [۱۴] به صورت زیر بیان شده است:

$$u(x, t) = \frac{2\pi\mu \sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2\mu\pi^2 t)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \exp(-n^2\mu\pi^2 t)}, \quad (3-26)$$

با ضرایب فوریه

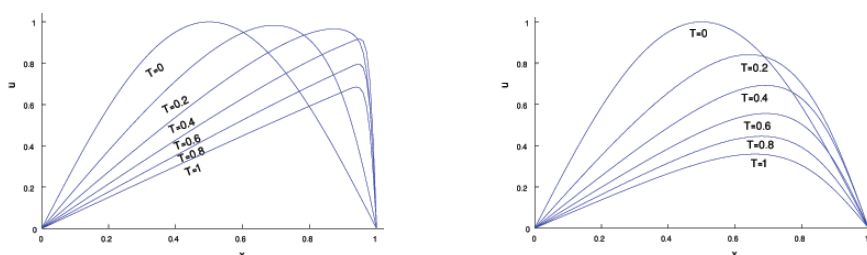
$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{2\pi\mu}[1 - \cos(\pi x)]\right\} dx,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{2\pi\mu}[1 - \cos(\pi x)]\right\} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

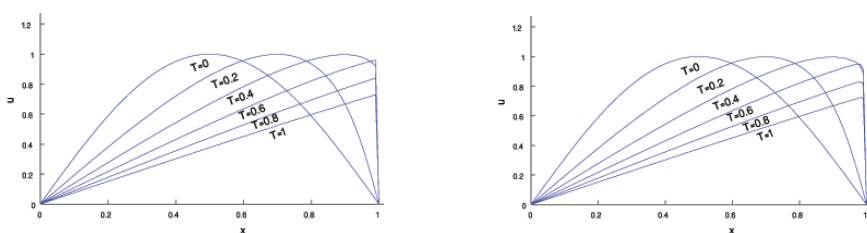
که $\mu = \frac{1}{Re}$ می باشد. نتایج عددی روش بیان شده برای مقادیر مختلف عدد رینولدز 10^6 تا 10^7 در زمان های $T = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ با استفاده از نقاط چبیشف و پارامتر شکلی متغیر در شکل های ۳-۳، ۳-۴ و ۳-۵ رسم شده است. نتایج عددی روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن با پارامتر ثابت $c = 10$ برای $Re = 1000$ و $Re = 10000$ در نقاط چبیشف در زمان های مختلف T در شکل ۳-۶ رسم شده است. همچنین نمودار u برای $Re = 1000$ و $Re = 10000$

در زمان های مختلف T با استفاده از نقاط متساوی الفاصله و پارامتر شکلی متغیر در شکل ۷-۳ رسم شده است. نتایج عددی با استفاده از روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن برای $Re = 1000$ و $Re = 100$ در زمان های مختلف در نقاط متساوی الفاصله با پارامتر ثابت شکل ۱۰-۳ در شکل ۸-۳ رسم شده است. نمودار u برای $t \geq 0.4$ همانطور که در شکل های ۶-۳ و ۸-۳ مشاهده می کنید در نزدیکی سمت راست مرز دارای شیب تندی می باشد. در واقع برای مقادیر بزرگ عدد رینولدز عبارت جابجایی بر عبارت پخش غالب است و با استفاده از روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن با پارامتر ثابت این نوسانات از بین نمی رود. اما نتایج عددی روش مطرح شده با پارامتر شکلی متغیر پایدار هستند و همانطور که در شکل ۴-۳ و ۷-۳ مشخص است، نوسانی مشاهده نمی شود.

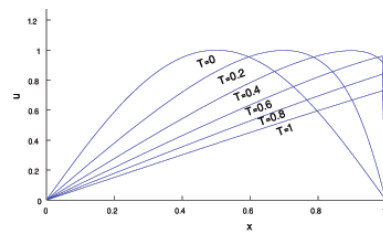
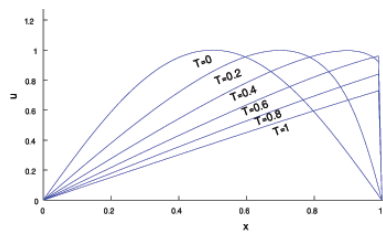
در جدول ۱-۴ و ۲-۴ نتایج عددی روش برای $Re = 100$ و $Re = 1000/3$ که با نقاط چبیشف بدست آمده، با جواب دقیق و با نتایج سایرین مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می کنید روش از دقت مطلوبی برخوردار است. برای اعداد رینولدز بزرگ به علت وجود سری فوریه در جواب که باعث کند شدن همگرایی می شود نمی توان به جواب تحلیلی (۳-۲۷) اعتماد کرد. بنابراین نتایج عددی گزارش شده در جدول ۳-۳ برای عدد رینولدز $Re = 10000$ با نتایج سایرین مقایسه شده است. اعداد داخل جدول نشان می دهد که جواب بدست آمده به جواب دیگران نزدیک می باشد.



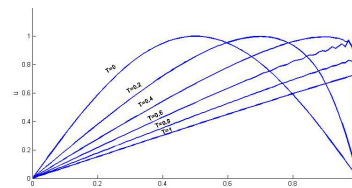
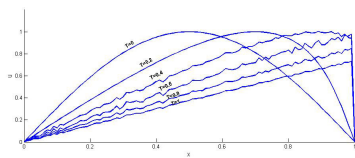
شکل ۳-۳: نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 10$ (راست) و $Re = 100$ (چپ). (مثال ۱)



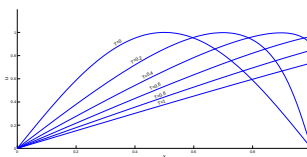
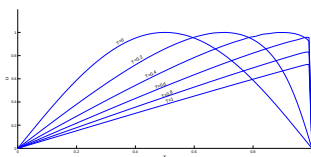
شکل ۴-۳: نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ (راست) و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)



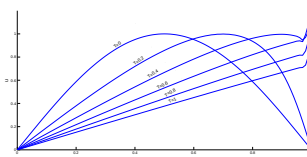
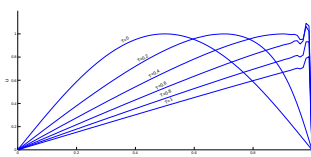
شکل ۳-۵: نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 300$ برای $Re = 100000$ (راست) و $n = 865$ برای $Re = 1000000$ (چپ). (مثال ۱)



شکل ۳-۶: نتایج عددی u با فرض $c = 10$ و $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ (راست) و $n = 150$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)



شکل ۳-۷: نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$ برای $Re = 1000$ (راست) و $n = 400$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)



شکل ۳-۸: نتایج عددی u با فرض $c = 10$ و $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$ برای $Re = 1000$ (راست) و $n = 400$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۱)

جدول ۳-۱: نتایج عددی و خطای u با فرض $Re = 100$, $n = 90$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۱)

خطا	جواب دقیق	روش پیشنهادی	[۴۰]	[۵]	t	x
1.1×10^{-5}	۰.۳۴۱۹۱	۰.۳۴۱۹۲	۰.۳۴۱۸۴	۰.۳۴۱۹۳	۰.۴	۰.۲۵
1.0×10^{-5}	۰.۲۶۸۹۶	۰.۲۶۸۹۷	۰.۲۶۸۹۱	۰.۲۶۸۹۸	۰.۶	
7.1×10^{-6}	۰.۲۲۱۴۸	۰.۲۲۱۴۸	۰.۲۲۱۴۳	۰.۲۲۱۴۹	۰.۸	
8.6×10^{-6}	۰.۱۸۸۱۹	۰.۱۸۸۱۹	۰.۱۸۸۱۵	۰.۱۸۸۲۰	۱	
6.7×10^{-6}	۰.۰۷۵۱۱	۰.۰۷۵۱۱	۰.۰۷۵۱۰	۰.۰۷۵۱۲	۳	
1.8×10^{-5}	۰.۶۶۰۷۱	۰.۶۶۰۷۲	۰.۶۶۰۶۰	۰.۶۶۰۷۶	۰.۴	۰.۵
1.5×10^{-5}	۰.۵۲۹۴۲	۰.۵۲۹۴۳	۰.۵۲۹۳۲	۰.۵۲۹۴۵	۰.۶	
1.4×10^{-5}	۰.۴۳۹۱۴	۰.۴۳۹۱۵	۰.۴۳۹۰۵	۰.۴۳۹۱۶	۰.۸	
1.4×10^{-5}	۰.۳۷۴۴۲	۰.۳۷۴۴۳	۰.۳۷۴۳۶	۰.۳۷۴۴۳	۱	
7.7×10^{-6}	۰.۱۵۰۱۸	۰.۱۵۰۱۸	۰.۱۵۰۱۷	۰.۱۵۰۱۸	۳	
4.1×10^{-5}	۰.۹۱۰۲۶	۰.۹۱۰۳۰	۰.۹۱۰۲۶	۰.۹۱۰۴۶	۰.۴	۰.۷۵
3.8×10^{-5}	۰.۷۶۷۲۴	۰.۷۶۷۲۷	۰.۷۶۷۱۹	۰.۷۶۷۳۳	۰.۶	
2.8×10^{-5}	۰.۶۴۷۴۰	۰.۶۴۷۴۲	۰.۶۴۷۴۵	۰.۶۴۷۴۴	۰.۸	
3.1×10^{-5}	۰.۵۵۶۰۵	۰.۵۵۶۰۷	۰.۵۵۶۰۸	۰.۵۵۶۰۸	۱	
3.2×10^{-5}	۰.۲۲۴۸۱	۰.۲۲۴۸۴	۰.۲۲۵۰۴	۰.۲۲۴۸۴	۳	

جدول ۳-۲: نتایج عددی و خطای u با فرض $Re = 1000/3$, $n = 90$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۱)

خطا	جواب دقیق	روش پیشنهادی	[۴۰]	t	x
2.43×10^{-6}	۰.۱۸۹۰۱	۰.۱۸۹۰۲	۰.۱۸۸۹۸	۱	۰.۲۵
9.1×10^{-5}	۰.۰۴۶۹۸	۰.۰۴۶۹۸	۰.۰۴۶۹۷	۵	
2.4×10^{-6}	۰.۲۴۲۲	۰.۲۴۲۲	۰.۲۴۲۲	۱۰	
7.7×10^{-6}	۰.۱۶۳۱	۰.۱۶۳۱	۰.۱۶۳۱	۱۵	
3.9×10^{-5}	۰.۳۷۶۱۹	۰.۳۷۶۲۳	۰.۳۷۶۱۵	۱	۰.۵
8.9×10^{-6}	۰.۰۹۳۹۵	۰.۰۹۳۹۵	۰.۰۹۳۹۴	۵	
1.5×10^{-5}	۰.۴۸۴۳	۰.۴۸۴۴	۰.۴۸۴۳	۱۰	
4.1×10^{-6}	۰.۳۲۶۳	۰.۳۲۶۳	۰.۳۲۶۳	۱۵	
5.3×10^{-5}	۰.۵۵۹۲۴	۰.۵۵۹۲۹	۰.۵۵۹۱۹	۱	۰.۷۵
2.5×10^{-5}	۰.۱۴۰۹۵	۰.۱۴۰۹۲	۰.۱۴۰۹۱	۵	
1.1×10^{-5}	۰.۰۷۲۶۰	۰.۰۷۲۶۱	۰.۰۷۲۶۱	۱۰	
1.0×10^{-5}	۰.۴۸۴۱	۰.۴۸۳۹	۰.۴۸۴۰	۱۵	

جدول ۳-۳: نتایج عددی u با فرض $\nu = 5/2$, $n = 175$, $Re = 10000$, $T = 5$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۱)

روش پیشنهادی	[۱۰۲]	[۳۵]	[۳۶]	x
۰.۳۷۹۲۳	۰.۳۷۹۲۳	۰.۳۷۹	۰.۴۲۴	۰.۵
۰.۸۳۴۱۲	۰.۸۳۴۱۹	۰.۸۳۴	۰.۸۴۳	۰.۱۱
۰.۱۲۱۲۸۸	۰.۱۲۱۲۸۸	۰.۱۲۱۳	۰.۱۲۶۳	۰.۱۶
۰.۱۶۶۶۸۲	۰.۱۶۶۶۸۲	۰.۱۶۶۷	۰.۱۶۸۴	۰.۲۲
۰.۲۰۴۴۴۵	۰.۲۰۴۴۴۵	۰.۲۰۴۴	۰.۲۱۰۳	۰.۲۷
۰.۲۴۹۶۶۰	۰.۲۴۹۶۶۱	۰.۲۴۹۷	۰.۲۵۲۲	۰.۳۳
۰.۲۸۷۲۳۸	۰.۲۸۷۲۳۹	۰.۲۸۷۲	۰.۲۹۳۹	۰.۳۸
۰.۳۳۲۱۸۵	۰.۳۳۲۱۸۶	۰.۳۳۲۲	۰.۳۳۵۵	۰.۴۴
۰.۳۷۶۹۴۲	۰.۳۷۶۹۴۳	۰.۳۷۶۹	۰.۳۷۶۹	۰.۵۰
۰.۴۱۴۰۷۰	۰.۴۱۴۰۷۰	۰.۴۱۴۱	۰.۴۱۸۲	۰.۵۵
۰.۴۵۸۳۸۶	۰.۴۵۸۳۸۵	۰.۴۵۸۴	۰.۴۵۹۲	۰.۶۱
۰.۴۹۵۰۹۰	۰.۴۹۵۰۸۸	۰.۴۹۵۱	۰.۴۹۹۹	۰.۶۶
۰.۵۳۸۸۲۱	۰.۵۳۸۸۱۷	۰.۵۳۸۸	۰.۵۴۰۴	۰.۷۲
۰.۵۷۴۹۵۷	۰.۵۷۴۹۴۷	۰.۵۷۴۹	۰.۵۸۰۵	۰.۷۷
۰.۶۱۷۹۰۷	۰.۶۱۷۹۰۹	۰.۶۱۷۹	۰.۶۲۰۰	۰.۸۳
۰.۶۵۳۴۴۳	۰.۶۵۳۳۰۳	۰.۶۵۳۳	۰.۶۶۰۰	۰.۸۸
۰.۶۹۵۰۱۹	۰.۶۹۵۲۱۶	۰.۶۹۵۲	۰.۶۹۵۷	۰.۹۴
۰.۷۲۲۱۲۱	۰.۷۲۹۶۰۰	۰.۷۲۹۶	—	۰.۹۹

مثال ۲: معادله برگرز (۱۵-۳) با شرط اولیه $\phi(x) = 4x(1-x)$ و شرط مرزی دیریکله

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (\gamma_1 = \gamma_2 = g_1(t) = g_2(t) = 0).$$

را در نظر بگیرید که $f(x, t) = 0$ می باشد. جواب دقیق در [۱۴] به صورت زیر می باشد:

$$u(x, t) = \frac{2\pi\mu \sum_{n=1}^{\infty} na_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2\mu\pi^2 t)}{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) \exp(-n^2\mu\pi^2 t)}, \quad (27-3)$$

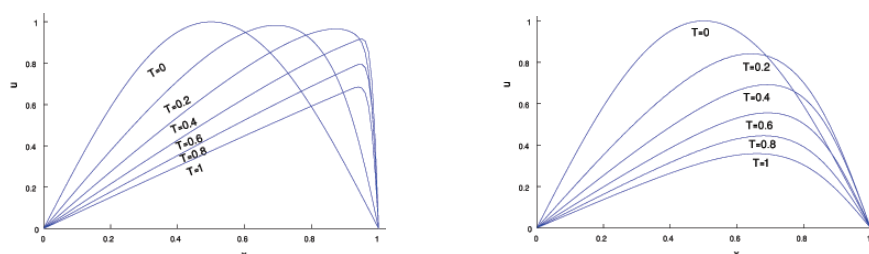
با ضرایب فوریه

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{3\mu}(3x^2 - 2x^3)\right\} dx,$$

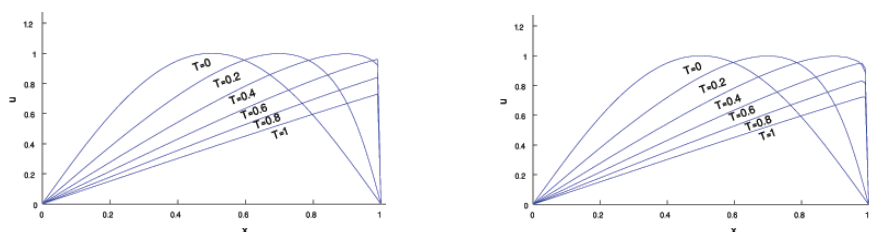
$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\left\{-\frac{1}{3\mu}(3x^2 - 2x^3)\right\} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

که $\mu = \frac{1}{Re}$. نتایج عددی روش مطرح شده با نقاط چبیشف برای $Re = 10, 100, 1000, 10000$ در نقاط مختلف زمانی $T = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ در شکل های ۳-۹ و ۳-۱۰ رسم شده است که نمایشگر رفتار فیزیکی صحیح مسئله می باشد. در شکل ۳-۱۱ نتایج عددی روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن با پارامتر ثابت $c = 10$ و با نقاط چبیشف برای

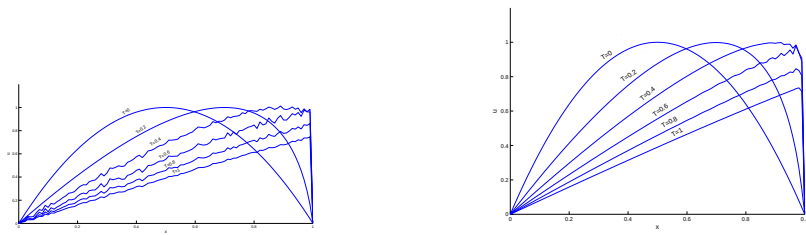
برای $Re = 1000$ و $Re = 10000$ رسم شده است. در شکل ۱۲-۳ نتایج عددی با نقاط متساوی الفاصله و پارامتر شکلی متغیر $c = 10$ برای $Re = 1000$ و $Re = 10000$ رسم شده است. نتایج عددی روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن با نقاط متساوی الفاصله و پارامتر ثابت $c = 10$ برای $Re = 1000$ و $Re = 10000$ در شکل ۱۳-۳ رسم شده است. نمودار u برای $t \geq 4\%$ همانطور که در شکل های ۱۱-۳ و ۱۳-۳ مشاهده می کنید در نزدیکی سمت راست مرز دارای شیب تندی می باشد. در واقع برای مقادیر بزرگ عدد رینولدز عبارت جابجایی بر عبارت پخش غالب است و با استفاده از روش هم محلی توابع پایه ای نیوتن با پارامتر ثابت این نوسانات از بین نمی رود. اما نتایج عددی روش مطرح شده با پارامتر شکلی متغیر پایدار هستند و همانطور که در شکل ۱۰-۳ و ۱۲-۳ مشخص است، نوسانی مشاهده نمی شود. در جدول ۴-۳ نتایج عددی مطرح شده همراه با نقاط متساوی الفاصله برای $Re = 100$ در نقاط مختلف با جواب تحلیلی و نتایج مقالات [۴۰، ۴۱، ۶۵] مقایسه شده است. نتایج عددی گزارش شده در جدول گویای دقت مطلوب روش نسبت به نتایج سایرین و با دقت خوبی با توجه به جواب دقیق بدست آمده است.



شکل ۹-۳: نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 10$ (راست) و $Re = 100$ (چپ). (مثال ۲)



شکل ۱۰-۳: نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $\nu = 3/2$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ (راست) و $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)



شکل ۳-۱۱: نتایج عددی u با فرض $\nu = 3/2$, $c = 10$ و نقاط چبیشف $n = 55$ برای $Re = 1000$ و $n = 150$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)



شکل ۳-۱۲: نتایج عددی u با فرض $\nu = 3/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$ برای $Re = 1000$ (راست) و $n = 400$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)



شکل ۳-۱۳: نتایج عددی u با فرض $\nu = 3/2$, $c = 10$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 200$ برای $Re = 1000$ (راست) و $n = 400$ برای $Re = 10000$ (چپ). (مثال ۲)

جدول ۳-۴: نتایج عددی u با فرض $Re = 100$, $n = 180$, $\nu = 5/2$, $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (مثال ۲)

خطا	جواب دقیق	روش پیشنهادی	[۴۱]	[۶۵]	[۴۰]	t	x
6.1×10^{-5}	۰.۳۶۲۲۶	۰.۳۶۲۲۶	۰.۳۶۲۲۵	۰.۳۶۲۲۵	۰.۳۶۲۱۷	۰.۴	۰.۲۵
5.1×10^{-6}	۰.۲۸۲۰۴	۰.۲۸۲۰۴	۰.۲۸۲۰۴	۰.۲۸۲۰۲	۰.۲۸۱۹۷	۰.۶	
7.6×10^{-6}	۰.۲۳۰۴۵	۰.۲۳۰۴۵	۰.۲۳۰۴۵	۰.۲۳۰۴۴	۰.۲۳۰۴۰	۰.۸	
1.1×10^{-6}	۰.۱۹۴۶۹	۰.۱۹۴۶۹	۰.۱۹۴۶۹	۰.۱۹۴۶۸	۰.۱۹۴۶۵	۱	
4.1×10^{-6}	۰.۰۷۶۱۳	۰.۰۷۶۱۳	۰.۰۷۶۱۳	۰.۰۷۶۱۳	۰.۰۷۶۱۳	۳	
2.6×10^{-6}	۰.۶۸۳۶۸	۰.۶۸۳۶۸	۰.۶۸۳۶۴	۰.۶۸۳۶۸	۰.۶۸۳۵۷	۰.۴	۰.۵
1.4×10^{-5}	۰.۵۴۸۳۲	۰.۵۴۸۳۲	۰.۵۴۸۳۱	۰.۵۴۸۳۲	۰.۵۴۸۲۲	۰.۶	
3.1×10^{-6}	۰.۴۵۳۷۱	۰.۴۵۳۷۰	۰.۴۵۳۷۱	۰.۴۵۳۷۱	۰.۴۵۳۶۳	۰.۸	
7.۰×10^{-6}	۰.۳۸۵۶۸	۰.۳۸۵۶۸	۰.۳۸۵۶۸	۰.۳۸۵۶۷	۰.۳۸۵۶۱	۱	
6.6×10^{-6}	۰.۱۵۲۱۸	۰.۱۵۲۱۸	۰.۱۵۲۱۹	۰.۱۵۲۱۸	۰.۱۵۲۱۷	۳	
1.9×10^{-5}	۰.۹۲۰۵۰	۰.۹۲۰۵۱	۰.۹۲۰۴۴	۰.۹۲۰۵۲	۰.۹۲۰۵۰	۰.۴	۰.۷۵
3.۸×10^{-5}	۰.۷۸۲۹۹	۰.۷۸۳۰۲	۰.۷۸۲۹۷	۰.۷۸۳۰۰	۰.۷۸۲۹۳	۰.۶	
8.1×10^{-6}	۰.۶۶۲۷۲	۰.۶۶۲۷۲	۰.۶۶۲۷۲	۰.۶۶۲۷۲	۰.۶۶۲۶۴	۰.۸	
8.۵×10^{-6}	۰.۵۶۹۳۲	۰.۵۶۹۳۲	۰.۵۶۹۳۲	۰.۵۶۹۳۲	۰.۵۶۹۲۴	۱	
1.6×10^{-5}	۰.۲۲۷۷۴	۰.۲۲۷۷۲	۰.۲۲۷۷۹	۰.۲۲۷۸۲	۰.۲۲۷۷۴	۳	

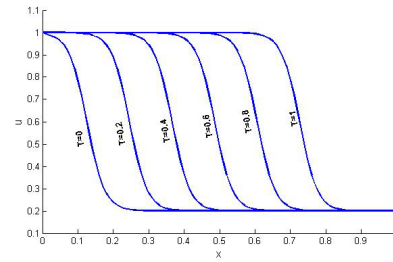
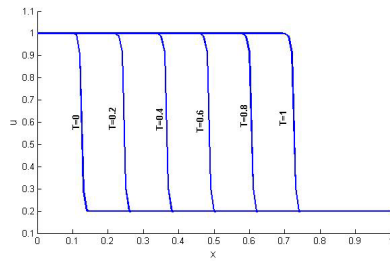
مثال ۳: معادله برگرز (۳-۱۵) که جواب دقیق آن در [۱۶] به صورت زیر بیان شده است در نظر بگیرید.

$$u(x, t) = \frac{\alpha + \rho + (\rho - \alpha) \exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)},$$

که $\eta = \frac{\alpha(x - \rho t - \gamma)}{\mu}$ و $\mu = \frac{1}{Re}$. همچنین $\alpha = 0.4$, $\rho = 0.6$, $\gamma = 0.125$ فرض شده است. شرط اولیه از قراردادن $t = 0$ در جواب تحلیلی بدست می آید و شرایط مرزی به صورت زیر می باشند:

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) = 0.2, \quad t \in [0, T], \quad (\gamma_1 = \gamma_2 = 0).$$

همچنین $f(x, t) = 0$ می باشد. نتایج عددی با نقاط متساوی الفاصله برای $Re = 100$ و $Re = 1000$ در زمان های مختلف در شکل ۳-۱۴ رسم شده است که نمایشگر رفتار فیزیکی صحیح مسئله می باشد.

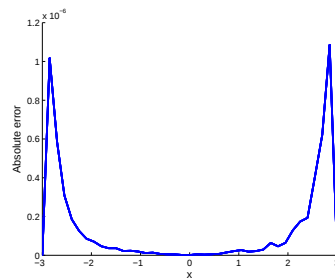
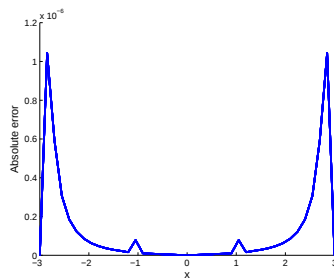


شکل ۳-۱۴: نتایج عددی u با فرض $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ ، $\nu = 3/2$ و نقاط متساوی الفاصله $n = 60$ برای $Re = 100$ (راست) و $n = 210$ برای $Re = 1000$ (چپ). (مثال ۳)

مثال ۴: معادله برگرز برای اعداد رینولدز بالا که جواب تحلیلی آن در [۲۶] به صورت زیر بیان شده است، در نظر بگیرید.

$$u(x, t) = \frac{1}{Re + t} \left(x + \tan \left(\frac{x Re}{2(Re + t)} \right) \right).$$

شرط اولیه از قراردادن $t = 0$ و همچنین شرایط مرزی از جایگذاری $x = \pm 3$ در جواب تحلیلی بدست آمده. خطای مطلق روش برای $Re = 10000$ با نقاط متساوی الفاصله و پارامتر متغیر در جدول ۳-۵ گزارش شده و دقت مطلوب روش را نسبت به روش هم محلی توابع پایه شعاعی با پارامتر ثابت که در [۹۷] بیان شده را نشان می دهد.



شکل ۳-۱۵: نمودار خطای مطلق برای $Re = 10000$ و $T = 1$ با نقاط متساوی الفاصله $n = 40$ ، $\nu = 5/2$ و $c = 10$ (راست) و $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (چپ). (مثال ۴)

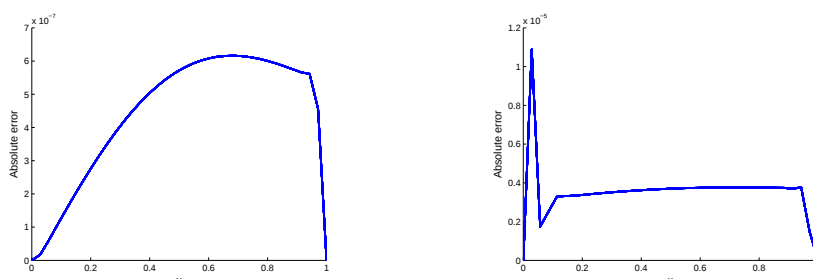
جدول ۳-۵: خطای مطلق برای $Re = 10000$ با نقاط متساوی الفاصله $n = 40$ ، $\nu = 5/2$ ، $c(x) = \sqrt{1-x^2}$. (مثال ۴)

T	C	[۹۷]	روش پیشنهادی
۱	۳,۷۲	$2,1296 \times 10^{-5}$	$1,0433 \times 10^{-6}$
۲	۳,۵۵	$1,1971 \times 10^{-5}$	$2,0769 \times 10^{-6}$
۳	۳,۵۴	$1,7986 \times 10^{-5}$	$3,1009 \times 10^{-6}$
۴	۳,۷۵	$2,4114 \times 10^{-5}$	$4,1154 \times 10^{-6}$
۵	۳,۶۰	$3,0091 \times 10^{-5}$	$5,1206 \times 10^{-6}$

مثال ۵: معادله برگرز را با جواب های موج نوسان دار که در [۴۶] به صورت زیر بیان شده است، در نظر بگیرید.

$$u(x, t) = \frac{c}{\alpha} + \left(\frac{2}{\alpha Re} \tanh(x - ct) \right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

که α و c ثابت های دلخواهی هستند که به ترتیب برابر ۱ و ۰٫۸ در نظر گرفتیم. شرط اولیه از قرار دادن $t = 0$ و شرایط مرزی از قرار دادن $x = 0, 1$ در جواب تحلیلی بدست آمده. نتایج عددی روش برای مقادیر مختلف Re در جدول ۳-۶ درج شده و با خطای مطلق که در [۴۶] بیان شده، مقایسه شده است. نتایج جدول دقت مطلوب روش را نشان می دهد. همچنین برای مقایسه، خطای مطلق روش با استفاده از پارامتر شکلی ثابت و متغیر برای $Re = 1000$ در زمان $T = 0.2$ در شکل ۳-۱۶ رسم شده است. همانطور که در شکل مشاهده می کنید خطای مطلق برای توابع پایه ای نیوتن با پارامتر شکلی متغیر کمتر از توابع پایه ای نیوتن با پارامتر شکلی ثابت می باشد.



شکل ۳-۱۶: نمودار خطای مطلق $Re = 1000$ و $T = 0.2$ با نقاط متساوی الفاصله $n = 35$ ، $\nu = \frac{1}{4}$ و $c = 10$ (راست) و $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (چپ). (مثال ۵)

جدول ۳-۶: خطای مطلق برای مقادیر مختلف Re با نقاط متساوی الفاصله $n = 35$ ، $\nu = 1/2$ و $c(x) = \sqrt{1-x^2}$. (مثال ۵)

$T = 0.1$			$T = 0.2$		$T = 0.25$	
Re	[۴۶]	روش پیشنهادی	[۴۶]	روش پیشنهادی	[۴۶]	روش پیشنهادی
۱۰۰	3.6×10^{-5}	3.6×10^{-5}	6.11×10^{-5}	6.11×10^{-5}	7.62×10^{-5}	7.64×10^{-5}
۱۰۰۰	3.6×10^{-7}	3.8×10^{-7}	6.18×10^{-7}	6.15×10^{-7}	7.82×10^{-7}	7.69×10^{-7}
۱۰۰۰۰	2.24×10^{-8}	5.88×10^{-9}	5.22×10^{-8}	9.91×10^{-9}	8.94×10^{-8}	1.56×10^{-8}

مثال ۶: معادله برگرز (۳-۱۵) با شرط اولیه $\phi(x) = \frac{1}{4} \cos(\pi x)$ و شرایط مرزی

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (\beta_1 = \beta_2 = g_1(t) = g_2(t) = 0).$$

را در نظر بگیرید. همچنین

$$f(x, t) = -\frac{1}{4}e^{-(\mu t)} \cos(\pi x) \left[\mu + \frac{\pi}{4}e^{(t\mu)} \sin(\pi x) - \mu\pi^2 \right],$$

و $\mu = \frac{1}{Re}$ جواب دقیق معادله به صورت زیر می باشد [۸۰].

$$u(x, t) = \frac{1}{4}e^{-(\mu t)} \cos(\pi x)$$

در جدول ۷-۳ خطای مطلق روش برای پارامتر ثابت $C = 10$ و متغیر $c(x) = 1 - x^2$ بدست آمده است. نتایج جدول تأثیر پارامتر شکلی متغیر را نشان می دهد.

جدول ۷-۳: خطای مطلق برای مقادیر مختلف Re با نقاط یکنواخت $n = 25$ و $\nu = 7/2$ و $c(x) = 1 - x^2$ (مثال ۶)

خطای روش پیشنهادی	خطا	C	Re
1.50×10^{-5}	2.00×10^{-4}	10	100
5.94×10^{-6}	9.44×10^{-5}	10	1000
7.10×10^{-6}	1.57×10^{-5}	10	10000
7.22×10^{-6}	1.00×10^{-5}	10	100000

۸-۳ نتیجه گیری

در این فصل یک روش بدون شبکه موضعی مبتنی بر توابع پایه ای نیوتن ارائه شد و برای حل معادله برگرز یک بعدی به کار گرفته شد. در روند حل عددی معادله برگرز غیرخطی با عدد رینولدز بالا اغتشاشاتی بوجود می آید که منجر به ناپایداری جواب می شود. برای غلبه بر این مشکل و پایداری بیشتر، دو تابع مقیاس برای پارامتر شکل پایه های نیوتن معرفی کردیم. در ادامه توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده را به عنوان توابع آزمون در نظر گرفته و تابع جواب را در راستای متغیر مکان با استفاده از توابع آزمون به روش هم محلی تقریب زدیم. سپس با استفاده از روش خطوط به دستگاہی از معادلات با مشتقات معمولی بر حسب تابع جواب در راستای متغیر زمان دست یافتیم که با حل گر ode 113 در نرم افزار متلب به جواب های عددی رسیدیم. روش پیشنهادی را برای مثال های مختلف معادله برگرز با شرایط اولیه و مرزی دیریکله و نیومن پیاده کرده و به مقایسه نتایج آنها با نتایج سایرین و جواب دقیق پرداختیم. نتایج عددی نشان دادند که پایه های مجهز شده به پارامتر شکلی متغیر با حفظ دقت مطلوب از پایداری بیشتری نسبت به پارامتر شکلی ثابت برخوردارند و این نشان دهنده کارایی و دقت روش می باشد.

فصل ۴

روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه ای
شعاعی با پارامتر شکلی متغیر

۴-۱ مقدمه

معادله تحولی غیرخطی، معادله دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان می باشد که با گذشت زمان تغییر می کند. به عنوان مثال، معادله ناویر استوکس از مکانیک سیالات، معادله واکنش-پخش از انتقال گرما و معادله غیرخطی شرودینگر از مکانیک کوانتوم از معادلات تحولی غیرخطی هستند. زوج معادلات برگرز نیز یکی از معادلات تحولی است که در بسیاری از مسایل ریاضی و مهندسی رخ می دهد. که این مسایل شامل بسیاری از حالت های فیزیکی از قبیل فیزیک حالت ایستا، فیزیک سیالات و فیزیک پلاسما می باشد.

در سال های اخیر روش های عددی متعددی برای حل این نوع معادلات ارائه شده است. نویسندگان در مقالات [۳۰، ۷، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۳، ۸۵] به بررسی زوج معادلات دو بعدی غیرخطی برگرز پرداخته و روش های عددی متفاوتی را برای حل آن ها به کار گرفته اند. در این فصل یک روش عددی کارا مبتنی بر روش هم محلی با استفاده از توابع پایه ای شعاعی ارائه می شود. برای افزایش پایداری و جلوگیری از بدشرطی ماتریس ضرایب، فرم موضعی برای روش فوق ارائه و در حل عددی معادله برگرز مدل بندی شدند. همچنین برای افزایش دقت، توابع پایه ای شعاعی را مجهز به پارامتر شکلی متغیر می کنیم.

۴-۲ پارامتر شکلی متغیر

پارامتر شکل نقش اساسی در کنترل شکل توابع پایه ای شعاعی و پایداری روش های مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی را برعهده دارد. برای کاهش بدوضعی و رسیدن به دقت مطلوب توابع پایه ای شعاعی را به پارامتر شکلی متغیر مجهز می کنیم. برای این منظور می توان به ازای هر نقطه مرکزی، یک پارامتر شکل متفاوت تعیین کرد. به بیان دیگر هر ستون از ماتریس درونیابی می تواند یک پارامتر شکل مجزا داشته باشد. در واقع استفاده از پارامتر شکل متغیر منجر به ایجاد درایه های مجزاتر در ماتریس حاصل از گسسته سازی می شود که به نوبه خود می تواند عدد وضعیت را کاهش داده و خطای گرد کردن را در محاسبات کمتر نماید. هسته مجهز به پارامتر شکلی متغیر به فرم زیر می باشد.

$$K_c(x, x_j) = \phi\left(\left(\frac{r_j}{c_j}\right)^\nu\right), \quad r_j = \|x - x_j\|_2, \quad x, x_j \in \mathbb{R}^d,$$

به طوری که c_j پارامتر شکلی متناظر با مرکز j ام می باشد.

برای مثال، هسته مترن-سوبولف با پارامتر شکلی متغیر به صورت زیر می باشد.

$$\left(\left(\frac{r_j}{c_j}\right)^\nu\right)^\nu K_\nu\left(\left(\frac{r_j}{c_j}\right)^\nu\right), \quad r_j = \|x - x_j\|_2, \quad x, x_j \in \mathbb{R}^d.$$

که c_j می تواند مقادیر مختلفی در نظر گرفته شود. در این قسمت چند استراتژی برای پارامتر شکلی متغیر بیان می کنیم.

$$\begin{aligned}
c_j &= (c_{min} + (\frac{c_{max}-c_{min}}{n-1})(j-1))^{1/2} & j = 1, 2, \dots, n, : 1 \text{ استراتژی} \\
c_j &= (c_{min} + (\frac{c_{max}-c_{min}}{n-1})(j-1))^{-1/4} & j = 1, 2, \dots, n, : 2 \text{ استراتژی} \\
c_j &= (c_{min}^{1/2} (\frac{c_{max}^{1/2}}{c_{min}^{1/2}})^{\frac{(j-1)}{(n-1)}})^{1/2} & j = 1, 2, \dots, n, : 3 \text{ استراتژی} \\
c_j &= (c_{min} + (c_{max} - c_{min}) \exp(-j))^{-1} & j = 1, 2, \dots, n, : 4 \text{ استراتژی} \\
c_j &= c_{min} + (c_{max} - c_{min}) \sin(j) & j = 1, 2, \dots, n, : 5 \text{ استراتژی}
\end{aligned}$$

پارامتر شکلی متغیر خطی در [۴۳، ۴۴] به فرم زیر معرفی شده است.

$$c_j = c_{min} + (\frac{c_{max} - c_{min}}{n-1})j \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

در این فصل با بهبود پارامتر شکلی متغیر خطی، استراتژی های ۱ و ۲ را به کار برده ایم. استراتژی های ۳ و ۵ به ترتیب بنام پارامتر شکلی متغیر نمایی و مثلثاتی می باشند که در [۴۳، ۹۹] بیان شده است. در این رساله پارامتر جدیدی که بطور تجربی بدست آورده ایم در استراتژی ۴ معرفی شده است. در ادامه از روش بیان شده در فصل سوم برای حل زوج معادلات برگرز غیرخطی استفاده می کنیم. با این تفاوت که به جای استفاده از توابع پایه ای نیوتن به طور متغیر مقیاس شده، از توابع پایه ای شعاعی با پارامتر شکلی متغیر که در استراتژی های بالا ذکر شد، استفاده می کنیم.

۳-۴ حل زوج معادلات دو بعدی غیرخطی برگرز

زوج معادلات دو بعدی غیرخطی برگرز با شرایط اولیه و مرزی در عبارت زیر معرفی شده است:

$$\begin{cases}
\begin{cases} U_t(X, t) = -U(X, t)U_x(X, t) - V(X, t)U_y(X, t) + \frac{1}{Re}\Delta U(X, t), \\ V_t(X, t) = -V(X, t)V_y(X, t) - U(X, t)V_x(X, t) + \frac{1}{Re}\Delta V(X, t) \end{cases} & X \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T] \quad (۱-۴)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(U(X, t), V(X, t)) = (f^D(X, t), g^D(X, t)) & X \in D \subseteq \partial\Omega, \quad t \in [0, T] \\
(\frac{\partial U}{\partial n}(X, t), \frac{\partial V}{\partial n}(X, t)) = (f^N(X, t), g^N(X, t)) & X \in \mathcal{N} \subseteq \partial\Omega, \quad t \in [0, T],
\end{cases} \quad (۲-۴)$$

$$\begin{cases}
U(X, 0) = U_0(X), \\
V(X, 0) = V_0(X),
\end{cases} \quad X \in \bar{\Omega}, \quad (۳-۴)$$

که در آن $X = (x, y)$ و Re عدد رینولدز می باشد. $U_0, V_0, f^D, g^D, f^N, g^N$ و توابع معلوم می باشند. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ دامنه مورد نظر و $\partial\Omega$ مرز دامنه Ω می باشد. Δ عملگر لاپلاس و U و V توابع مجهول می باشند. گسسته سازی نقاط دامنه به صورت $\{X^I \cup X^D \cup X^N\}$ که $X^I = \{x^{[1]}, \dots, x^{[ni]}\}$ نقاط داخلی، $X^D = \{x^{[ni+1]}, \dots, x^{[ni+nd]}\}$ نقاط مرزی دیریکله و $X^N = \{x^{[ni+nd+1]}, \dots, x^{[n]}\}$ نقاط مرزی نیومن می باشند. برای

هر $x^{[i]} \in X$ ($i = 1, \dots, n$) شبکه $S_i = \{x_k^{[i]}\}_{k=1}^{n_s}$ که شامل نقطه مرکزی $x^{[i]}$ و $n_s - 1$ نقطه که نزدیکترین نقاط در مجاورت نقطه مفروض می باشند، در نظر می گیریم. متناظر با این نقاط، توابع پایه ای شعاعی موضعی $N_1^{[i]}, N_2^{[i]}, \dots, N_{n_s}^{[i]}$ را تشکیل داده. به دنبال یافتن جواب های $U(\cdot, t) | [0, T] \rightarrow N_K$ و $V(\cdot, t) | [0, T] \rightarrow N_K$ به فرم زیر می باشیم.

$$U^{[i]}(X, t) = \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(X), \quad X \in S_i,$$

$$V^{[i]}(X, t) = \sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) N_j^{[i]}(X), \quad X \in S_i,$$

و $N_j^{[i]}(X)$ تابع پایه ای شعاعی متناظر با هسته k که باز تولیدی در فضای هیلبرت محلی N_K می باشد. در نتیجه، معادله زیر را داریم:

$$\begin{cases} \alpha^{[i]}(t) = \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{U}^{[i]}, \\ \beta^{[i]}(t) = \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{V}^{[i]}, \end{cases} \quad (4-4)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \alpha^{[i]}(t) &= (\alpha_j^{[i]}(t)), \quad 1 \leq j \leq n_s)^T, \\ \beta^{[i]}(t) &= (\beta_j^{[i]}(t)), \quad 1 \leq j \leq n_s)^T, \\ \mathbf{N}^{[i]} &= \left(N_j^{[i]}(X_k^{[i]}) \right)_{1 \leq k \leq n_s, 1 \leq j \leq n_s}, \\ \mathbf{U}^{[i]} &= (\mathbf{U}^I, \mathbf{U}^D, \mathbf{U}^{\mathcal{N}})^T, \\ \mathbf{V}^{[i]} &= (\mathbf{V}^I, \mathbf{V}^D, \mathbf{V}^{\mathcal{N}})^T, \\ \mathbf{U}^I &= (U(X^{[j]}, t), \quad 1 \leq j \leq ni), \\ \mathbf{U}^D &= (U(X^{[j]}, t), \quad ni + 1 \leq j \leq ni + nd), \\ \mathbf{U}^{\mathcal{N}} &= (U(X^{[j]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq j \leq n), \\ \mathbf{V}^I &= (V(X^{[j]}, t), \quad 1 \leq j \leq ni), \\ \mathbf{V}^D &= (V(X^{[j]}, t), \quad ni + 1 \leq j \leq ni + nd), \\ \mathbf{V}^{\mathcal{N}} &= (V(X^{[j]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq j \leq n). \end{aligned}$$

حال با قراردادن نقاط داخلی $X^{[i]}$ ($i = 1, \dots, n_i$) در معادله (۴-۱) معادلات زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned}
 U_t^{[i]}(X^{[i]}, t) &= -U^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(X^{[i]}) \right) - V^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial y}(X^{[i]}) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j^{[i]}(t) \Delta N_j^{[i]}(X^{[i]}) \quad (۵-۴) \\
 V_t^{[i]}(X^{[i]}, t) &= -V^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial y}(X^{[i]}) \right) - U^{[i]}(X^{[i]}, t) \left(\sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) \frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(X^{[i]}) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^{n_s} \beta_j^{[i]}(t) \Delta N_j^{[i]}(X^{[i]}) \quad (۶-۴)
 \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۴-۴) فرم ماتریسی معادلات زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases}
 \mathbf{U}_t^{[i]} = -\mathbf{U}^{[i]} \cdot \left(\mathbf{N}_x^{[i]} * \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{U}^{[i]} \right) - \mathbf{V}^{[i]} \cdot \left(\mathbf{N}_y^{[i]} * \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{U}^{[i]} \right) + \frac{1}{Re} \left(\Delta \mathbf{N}^{[i]} * \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{U}^{[i]} \right), \\
 \mathbf{V}_t^{[i]} = -\mathbf{V}^{[i]} \cdot \left(\mathbf{N}_y^{[i]} * \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{V}^{[i]} \right) - \mathbf{U}^{[i]} \cdot \left(\mathbf{N}_x^{[i]} * \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{V}^{[i]} \right) + \frac{1}{Re} \left(\Delta \mathbf{N}^{[i]} * \mathbf{N}^{-1[i]} * \mathbf{V}^{[i]} \right),
 \end{cases} \quad (۷-۴)$$

به طوری که

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_x^{[i]} &= \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial x}(x^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right), \\
 \mathbf{N}_y^{[i]} &= \left(\frac{\partial N_j^{[i]}}{\partial y}(x^{[i]}), j = 1, \dots, n_s \right).
 \end{aligned}$$

فرض کنید بردار I_i شامل اندیس نقاط مرکزی $X^{[i]}$ و تعداد $n_s - 1$ نقطه، در مجاورت نقطه مرکزی باشند. بنابراین

ماتریس های تنک D_1, D_2 و D_3 که $n \times ni$ بعدی می باشند را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned}
 D_1(i, I_i) &= N_x^{[i]} * N^{-1[i]}, \\
 D_2(i, I_i) &= N_y^{[i]} * N^{-1[i]}, \\
 D_3(i, I_i) &= \Delta N^{[i]} * N^{-1[i]}.
 \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۱-۴) معادله زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{U}}_t = -\tilde{\mathbf{U}} * (D_{\setminus} * \mathbf{U}) - \tilde{\mathbf{V}} * (D_{\setminus} * \mathbf{U}) + \frac{1}{Re} D_{\setminus} * \mathbf{U}, \\ \tilde{\mathbf{V}}_t = -\tilde{\mathbf{V}} * (D_{\setminus} * \mathbf{V}) - \tilde{\mathbf{U}} * (D_{\setminus} * \mathbf{V}) + \frac{1}{Re} D_{\setminus} * \mathbf{V}, \end{cases} \quad (۸-۴)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \left(U(X^{[1]}, t), \dots, U(X^{[n]}, t) \right)^T, \\ \tilde{\mathbf{U}} &= \left(U(X^{[1]}, t), \dots, U(X^{[ni]}, t) \right)^T, \\ \mathbf{V} &= \left(V(X^{[1]}, t), \dots, V(X^{[n]}, t) \right)^T, \\ \tilde{\mathbf{V}} &= \left(V(X^{[1]}, t), \dots, V(X^{[ni]}, t) \right)^T, \end{aligned}$$

همچنین با توجه به شرایط دیریکله، معادله زیر نتیجه می شود:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^D = (f^D(X^{[j]}, t)), \quad ni + 1 \leq j \leq ni + nd, \\ \mathbf{V}^D = (g^D(X^{[j]}, t)), \quad ni + 1 \leq j \leq ni + nd. \end{cases} \quad (۹-۴)$$

و با توجه به شرایط نیومن، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_s} \alpha_j(t) \frac{\partial N_j}{\partial n}(x^{[i]}) &= f^{\mathcal{N}}(x^{[i]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq i \leq n, \\ \sum_{j=1}^{n_s} \beta_j(t) \frac{\partial N_j}{\partial n}(x^{[i]}) &= g^{\mathcal{N}}(x^{[i]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

که به ترتیب

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial n} * \mathbf{N}^{-1} * \mathbf{U} &= (f^{\mathcal{N}}(x^{[i]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq i \leq n), \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial n} * \mathbf{N}^{-1} * \mathbf{V} &= (g^{\mathcal{N}}(x^{[i]}, t), \quad ni + nd + 1 \leq i \leq n), \end{aligned}$$

9

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial n} = \left(\frac{\partial N_j}{\partial n}(X^{[i]}) \right)_{ni+nd+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}.$$

می باشد. فرض کنید

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial n} * \mathbf{N}^{-1},$$

بنابراین بردارهای $\mathbf{U}^{\mathcal{N}}$ و $\mathbf{V}^{\mathcal{N}}$ به صورت زیر معرفی می شوند:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}(:, ni + nd + 1 : n) * \mathbf{U}^{\mathcal{N}} \\ = (f^{\mathcal{N}}(X^{[i]}, t), ni + nd + 1 \leq i \leq n)^T - \mathbf{W}(:, 1 : ni) * \mathbf{U}^I - \mathbf{W}(:, ni + 1 : ni + nd) * \mathbf{U}^D, \\ \mathbf{W}(:, ni + nd + 1 : n) * \mathbf{V}^{\mathcal{N}} \\ = (g^{\mathcal{N}}(X^{[i]}, t), ni + nd + 1 \leq i \leq n)^T - \mathbf{W}(:, 1 : ni) * \mathbf{V}^I - \mathbf{W}(:, ni + 1 : ni + nd) * \mathbf{V}^D. \end{array} \right. \quad (10-4)$$

با قرار دادن معادلات (9-4) و (10-4) در (8-4) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ODE با شرایط اولیه زیر تشکیل می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{U}}_{I^{\circ}} = \tilde{\mathbf{U}}_{I^{\circ}}, \\ \tilde{\mathbf{V}}_{I^{\circ}} = \tilde{\mathbf{V}}_{I^{\circ}}, \end{array} \right.$$

به طوری که

$$\tilde{\mathbf{U}}_{I^{\circ}} = (U_{\circ}(X^{[j]}), 1 \leq j \leq ni)^T,$$

$$\tilde{\mathbf{V}}_{I^{\circ}} = (V_{\circ}(X^{[j]}), 1 \leq j \leq ni)^T.$$

4-4 نتایج عددی

در این بخش کارایی و دقت روش برای حل زوج معادلات دو بعدی غیرخطی برگرز در دو مثال زیر بررسی می شود. برای حل معادله، هسته مترن با پارامتر $\nu = m - d/2 = 2$ که هسته بازتولیدی در فضای هیلبرت $W_2^2(\mathbb{R}^2)$ می باشد را به کار برده ایم. نقاط مرکزی و هم محلی در نظر گرفته شده، نقاط لژاندر

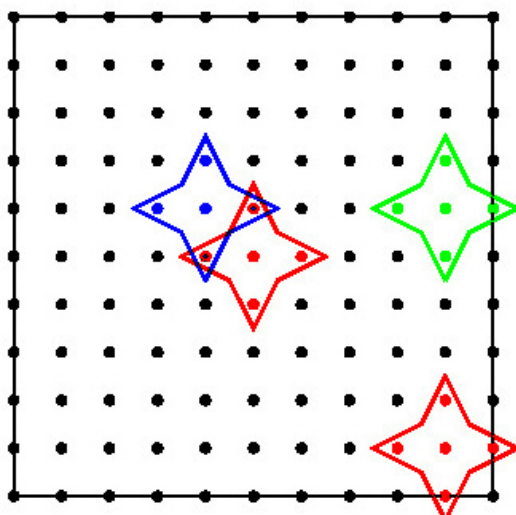
$$x_i = -1 + \left(\frac{2(i-1)}{n-1} \right), \quad i = 1, \dots, n,$$

اند که متعلق به بازه $[-1, 1]$ می باشند و قابل انتقال به بازه $[a, b]$ با تبدیل $y = \frac{b-a}{4}x + \frac{a+b}{4}$ می باشند. و همچنین نقاط متساوی الفاصله

$$x^{[i]} = a + (i-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

نیز برای حل استفاده شده است.

در فرم موضعی زیر دامنه های با $n_s = 5$ از دامنه اصلی انتخاب شده اند که در شکل ۴-۱ مشاهده می کنید.



شکل ۴-۱: مجموعه نقاط متساوی الفاصله و دامنه های موضعی با فرض $n_s = 5$ در نقاط داخلی و مرزی.

برای حل معادله دیفرانسیل معمولی حاصل شده با استفاده از روش خطوط از دستور ode113 نرم افزار متلب، استفاده کرده ایم. برای محاسبه دقت روش، خطای

$$L_{\infty} = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j - \tilde{u}_j|,$$

را به کار برده ایم که u و $\tilde{u}$ به ترتیب بیانگر مقدار واقعی و مقدار تقریبی می باشند.

مثال ۱: معادلات مطرح شده در (۴-۱)-(۴-۳) را در نظر بگیرید. شرایط اولیه از قرارداد $t = 0$ و شرایط مرزی دیریکله از قرار دادن $x = 0, 1$ و $y = 0, 1$ در جواب تحلیلی که در [۸۵] به صورت زیر بیان شده است، بدست می آید.

$$U(X, t) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4 \left(1 + \exp \left((-4x + 4y - t) \left(\frac{Re}{34} \right) \right) \right)},$$

$$V(X, t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4 \left(1 + \exp \left((-4x + 4y - t) \left(\frac{Re}{34} \right) \right) \right)}.$$

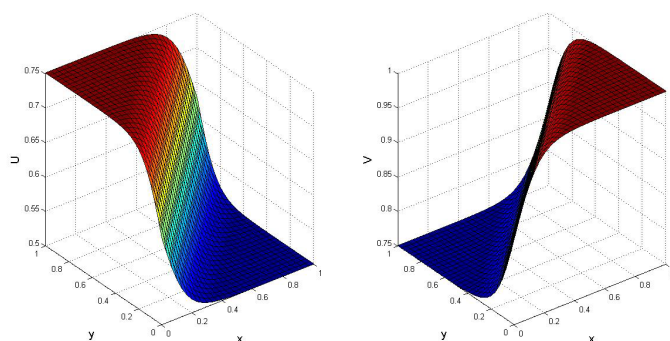
جواب معادله برای اعداد رینولدز بالا دارای شیب تندی می باشد. این ویژگی در شکل ۴-۲ مشاهده می شود. در ادامه نمودار خطای مطلق را برای مقادیر مختلف Re در زمان $T = 2$ رسم کرده و به تجزیه و تحلیل می پردازیم.

نمودار خطای مطلق برای $Re = 10$ در زمان $T = 2$ با استراتژی ۳ برای نقاط متساوی الفاصله در شکل های ۳-۴ و ۴-۴ رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود با افزایش نقاط خطا کاهش می یابد.

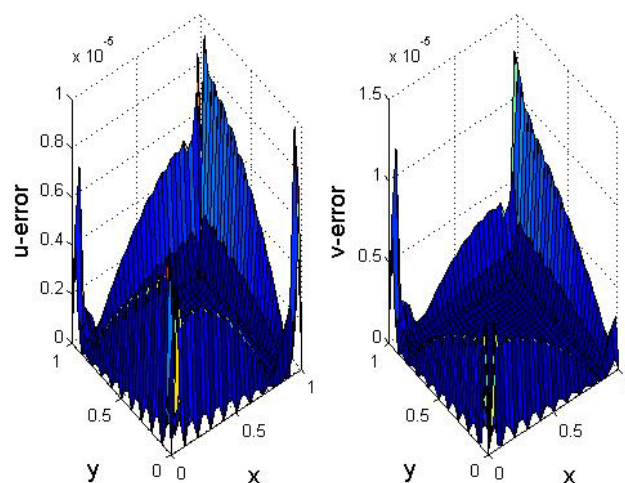
برای تاثیر پارامتر شکلی متغیر، ابتدا نمودار خطا را برای $Re = 100$ با پارامتر ثابت $c = 10$ در زمان $T = 2$ رسم می کنیم که در شکل ۵-۴ آن را مشاهده می کنید. سپس نمودار خطا را برای این حالت با استفاده از استراتژی های مختلف که برای پارامتر شکل مطرح شده بود، رسم می کنیم. نمودار خطا با استفاده از استراتژی ۱ برای تعداد نقاط مختلف در شکل های ۶-۴، ۷-۴، ۸-۴، ۹-۴، ۱۰-۴ و ۱۱-۴ می توان مشاهده کرد.

شکل ۱۲-۴ نمودار خطای مطلق را برای $Re = 1000$ با پارامتر شکلی ثابت $c = 10$ نشان می دهد. همچنین در این حالت، نمودار خطا برای پارامترهای شکلی متغیر مختلف رسم شده، که در شکل های ۱۳-۴، ۱۴-۴، ۱۵-۴ و ۱۶-۴ می توان مشاهده کرد.

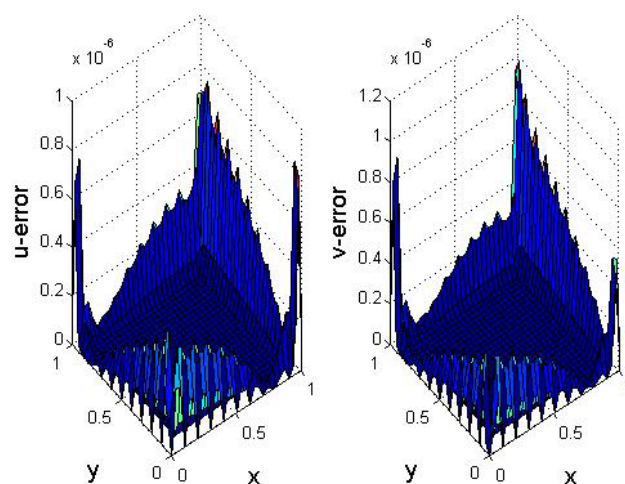
از تصاویر بالا می توان نتیجه گرفت که پارامتر شکلی متغیر منجر به کاهش خطا نسبت به پارامتر ثابت می شود. نتایج عددی روش برای $Re = 100$ در جدول ۱-۴ و ۲-۴ درج شده است. همانطور که از نتایج جدول مشخص است، روش مذکور از دقت مطلوب تری نسبت به بقیه روش ها برخوردار است.



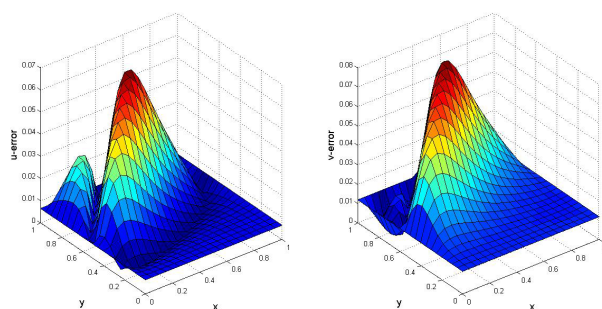
شکل ۲-۴: نتایج عددی U و V با فرض $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ استراتژی ۱. (مثال ۱)



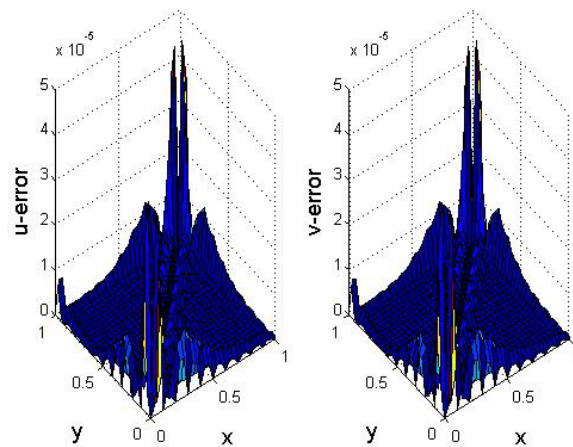
شکل ۳-۴: نمودار خطای مطلق برای $Re = 10$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 441$ و استراتژی ۳. (مثال ۱)



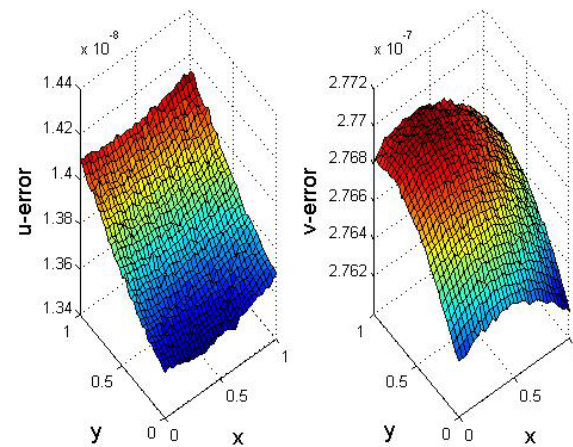
شکل ۴-۴: نمودار خطای مطلق برای $Re = 10$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۳. (مثال ۱)



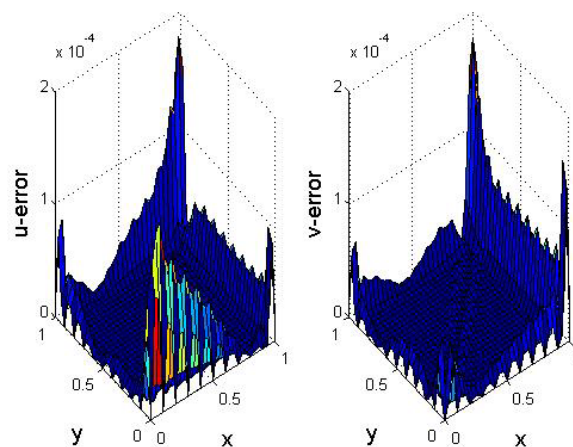
شکل ۵-۴: نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و $c = 10$. (مثال ۱)



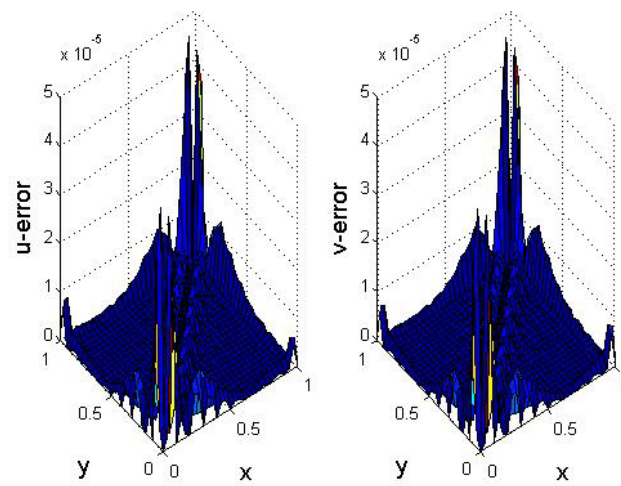
شکل ۴-۶: نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۱. (مثال ۱)



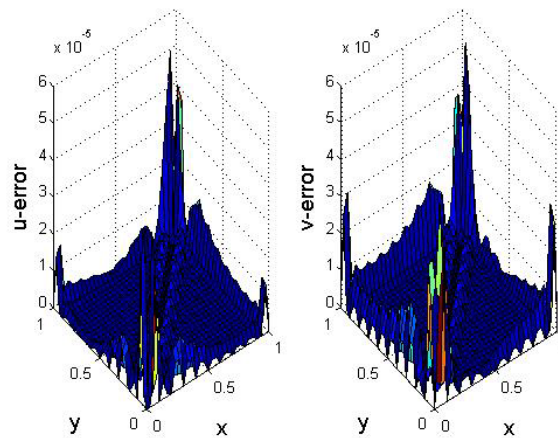
شکل ۴-۷: نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 3721$ و استراتژی ۱. (مثال ۱)



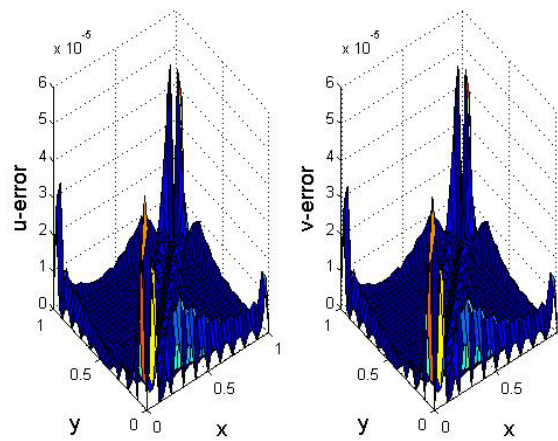
شکل ۴-۸: نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۲. (مثال ۱)



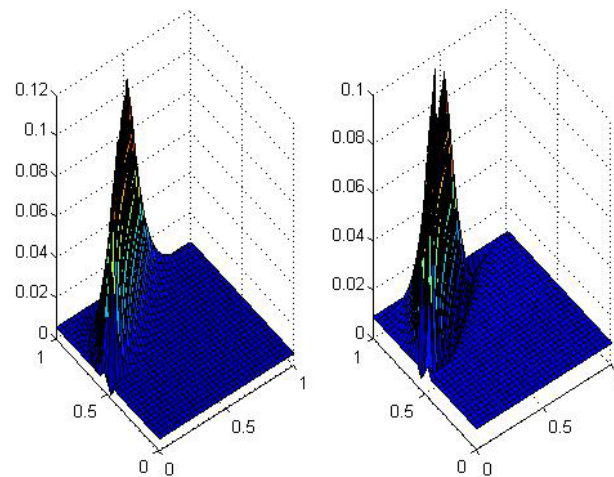
شکل ۴-۹: نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۳. (مثال ۱)



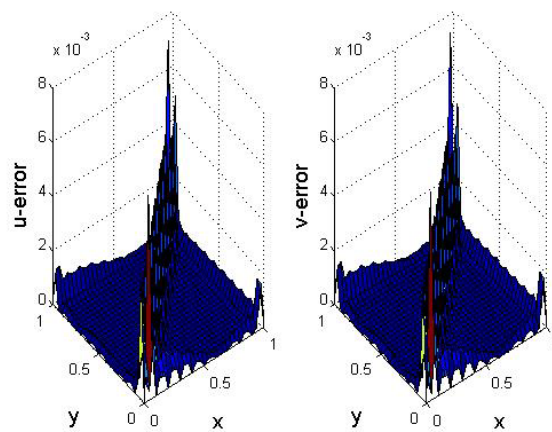
شکل ۴-۱۰: نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۴. (مثال ۱)



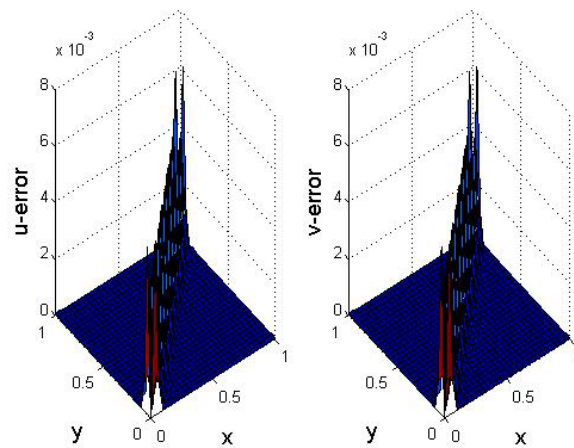
شکل ۴-۱۱: نمودار خطای مطلق برای $Re = 100$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۵. (مثال ۱)



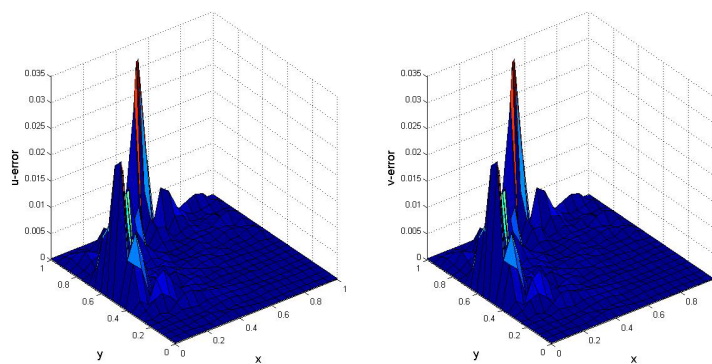
شکل ۴-۱۲: نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و $c = 10$. (مثال ۱)



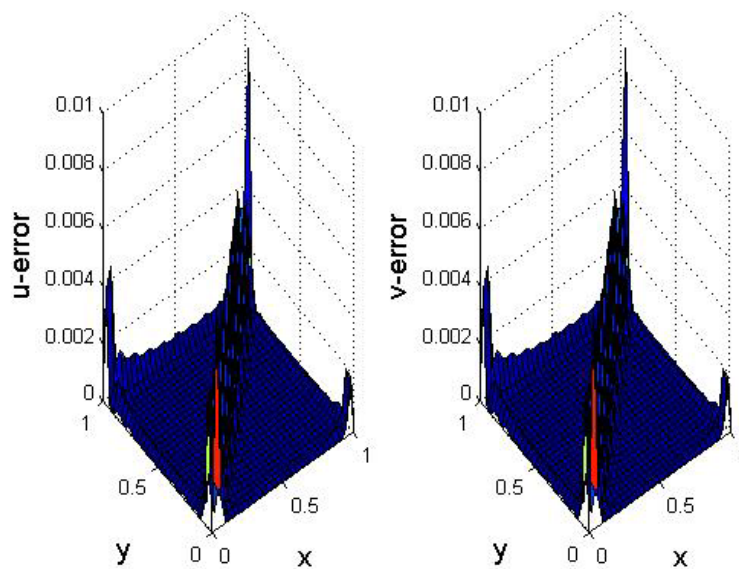
شکل ۴-۱۳: نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۲. (مثال ۱)



شکل ۴-۱۴: نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۳. (مثال ۱)



شکل ۴-۱۵: نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۴. (مثال ۱)



شکل ۴-۱۶: نمودار خطای مطلق برای $Re = 1000$ در زمان $T = 2$ با نقاط یکنواخت $n = 1681$ و استراتژی ۵. (مثال ۱)

جدول ۴-۱: نتایج عددی u در زمان $T = 2$ با فرض $Re = 100$ و $n = 441$

(x, y)	(۰.۱, ۰.۱)	(۰.۳, ۰.۳)	(۰.۵, ۰.۵)	(۰.۳, ۰.۷)	(۰.۱, ۰.۹)	(۰.۵, ۰.۹)
جواب دقیق	۰.۵۰۰۴۸۲	۰.۵۰۰۴۸۲	۰.۵۰۰۴۸۲	۰.۵۵۵۶۷۵	۰.۷۴۴۲۵۶	۰.۵۵۵۶۷۵
استراتژی ۴	۰.۵۰۰۴۹۰	۰.۵۰۰۵۱۴	۰.۵۰۰۵۲۸	۰.۵۵۴۷۵۴	۰.۷۴۴۱۶۵	۰.۵۵۵۳۶۵
[۳]	۰.۵۰۰۳۵	۰.۵۰۰۴۲	۰.۵۰۰۴۶	۰.۵۵۶۰۹	۰.۷۴۴۰۹	۰.۵۵۶۰۴
[۷]	۰.۴۹۹۸۳	۰.۴۹۹۷۷	۰.۴۹۹۷۳	۰.۵۵۴۲۹	۰.۷۴۳۴۰	۰.۵۵۴۱۳
[۱۰۰]	۰.۵۰۰۱۲	۰.۵۰۰۴۲	۰.۵۰۰۴۱	۰.۵۵۴۱۳	۰.۷۴۴۱۶	۰.۵۵۶۳۷

جدول ۴-۲: نتایج عددی V در زمان $T = 2$ با فرض $Re = 100$ و $n = 441$

(x, y)	(۰.۱, ۰.۱)	(۰.۳, ۰.۳)	(۰.۵, ۰.۵)	(۰.۳, ۰.۷)	(۰.۱, ۰.۹)	(۰.۵, ۰.۹)
جواب دقیق	۰.۹۹۹۵۱۸	۰.۹۹۹۵۱۸	۰.۹۹۹۵۱۸	۰.۹۴۴۳۲۵	۰.۷۵۵۷۴۴	۰.۹۴۴۳۲۵
استراتژی ۴	۰.۹۹۹۵۳۷	۰.۹۹۹۵۸۲	۰.۹۹۹۶۱۷	۰.۹۴۵۲۰۶	۰.۷۵۵۸۶۷	۰.۹۴۴۶۷۹
[۳]	۰.۹۹۹۳۶	۰.۹۹۹۵۱	۰.۹۹۹۵۸	۰.۹۴۳۸۷	۰.۷۵۵۹۲	۰.۹۴۳۹۲
[۷]	۰.۹۹۸۲۶	۰.۹۹۸۶۱	۰.۹۹۸۲۱	۰.۹۴۴۰۹	۰.۷۵۵۰۰	۰.۹۴۴۴۱
[۱۰۰]	۰.۹۹۹۴۶	۰.۹۹۹۳۸	۰.۹۹۹۴۱	۰.۹۴۳۸۷	۰.۷۵۵۵۸	۰.۹۴۳۴۵

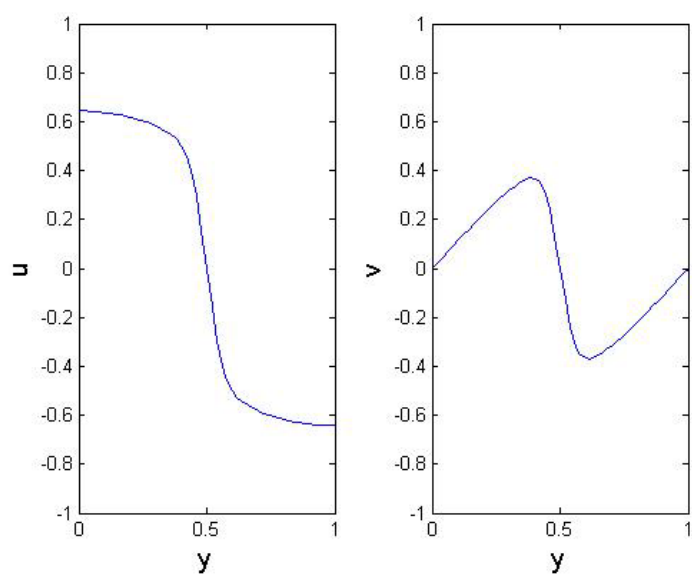
مثال ۲: معادله برگرز (۴-۱)-(۴-۳) با شرایط اولیه و مرزی ترکیب نیومن-دیریکله زیر را در نظر بگیرید، که در

[۱۰۲] مطرح شده است .

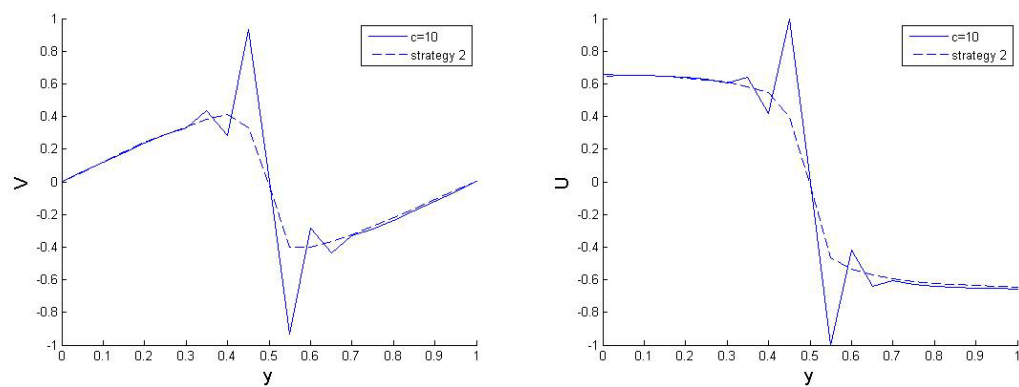
$$\left\{ \begin{array}{l} U(x, y, \circ) = \sin(\pi x) \cos(\pi y), \\ V(x, y, \circ) = \cos(\pi x) \sin(\pi y), \\ \left\{ \begin{array}{l} U(\circ, y, t) = U(\backslash, y, t) = \circ, \\ V(x, \circ, t) = V(x, \backslash, t) = \circ, \\ \frac{\partial U}{\partial n}(x, \circ, t) = \frac{\partial U}{\partial n}(x, \backslash, t) = \circ, \\ \frac{\partial V}{\partial n}(\circ, y, t) = \frac{\partial V}{\partial n}(\backslash, y, t) = \circ. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

این معادله جواب دقیق ندارد. بنابراین فقط می توانیم نتایج روش را با نتایج روش هایی که در [۸۵، ۶۸] مطرح شده مقایسه کنیم.

برای معادله با عدد رینولدز کوچک، جواب به اندازه کافی هموار و پایدار می باشد . برای مقادیر بزرگ Re جملات غیرخطی تمایل دارند نقش غالب را بازی کنند و جواب به سرعت در حال تغییر است. امواج ممکن است به نوعی شوک تبدیل شوند. این نوسانات در روش تفاضلات متناهی، روش عناصر متناهی و روش گالرکین آزاد نیز گزارش شده است. همچنین، در [۶۸] نشان داده شده است که حتی با تطریف کردن و افزایش نقاط نمی توان از رفتار نوسانی که به علت شیب تند ایجاد شده، اجتناب کرد. برای حذف رفتار نوسانی و غلبه بر ناپایداری برای عدد رینولدز $Re = 1000$ از روش توضیح داده شده با پارامتر ثابت $c = 10$ همان طور که در شکل ۴-۱۷ مشاهده می کنید، استفاده کردیم. اما برای عدد رینولدز بزرگ $Re = 10000$ همانطور که در شکل ۴-۱۸ مشاهده می کنید، به ازای پارامتر ثابت $c = 10$ جواب دارای رفتار نوسانی و ناپایدار می باشد. برای غلبه بر این مشکل و بدست آوردن جواب پایدار جاهایی که دارای شیب تند می باشد، از پارامتر شکلی متغیر که در استراتژی ۲ معرفی شده استفاده می کنیم.



شکل ۴-۱۷: نتایج عددی برای U و V با فرض $T = 0.4$, $\varepsilon = 0.5$, $Re = 1000$, $c = 10$ و $n = 441$ (مثال ۲)



شکل ۴-۱۸: نتایج عددی برای U و V با فرض $T = 0.4$, $\varepsilon = 0.5$, $Re = 10000$ و $n = 441$ (مثال ۲)

فصل ۵

نتایج و پیشنهادات

۱-۵ مقدمه

معادله برگرز به عنوان یک مدل ریاضی تلاطم آزاد به دلایل زیر مورد توجه محققین قرار گرفت.

۱. شامل ساده ترین فرم غیرخطی جمله پهن رفت و جمله اتلاف برای شبیه کردن پدیده های فیزیکی حرکت موج است.

۲. یکی از ویژگی های مدل برگرز رفتار موج شوک آن است، وقتی Re بزرگ است. در این حالت می توان این معادله را به عنوان یک مسئله اختلال منحصر به فرد از معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی فرض کرد. علاوه بر این شبیه سازی معادله برگرز یک گام اولیه به سوی توسعه روش هایی برای محاسبه جریان های پیچیده است.

۲-۵ نتیجه گیری

در این رساله از روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای نیوتن و توابع پایه ای شعاعی موضعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان استفاده شده است. به منظور پایداری بیشتر از هسته های شعاعی به طور متغیر مقیاس شده برای ساخت توابع پایه ای نیوتن استفاده کردیم. همچنین برای پایداری و دقت بیشتر، توابع پایه ای شعاعی را مجهز به پارامتر شکلی متغیر کردیم. در ادامه با در نظر گرفتن توابع پایه ای معرفی شده به عنوان توابع آزمون، تابع جواب را در راستای متغیر مکان با استفاده از توابع آزمون به روش هم مکانی تقریب زدیم. سپس با استفاده از روش خطوط، به دستگاهی از معادلات با مشتقات معمولی بر حسب تابع جواب در راستای متغیر زمان دست یافتیم. روش های معرفی شده را برای حل معادله غیرخطی برگرز و زوج معادلات غیرخطی برگرز به کار گرفته و با مشاهده نتایج عددی به دقت و کارایی روش پی بردیم.

۳-۵ پیشنهادات

روش ارائه شده را می توانیم برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی در ابعاد بالاتر به کار ببریم. همچنین تابع مقیاس در هسته را می توانیم تابعی از زمان نیز در نظر بگیریم که برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان بسیار مطلوب می باشد.

پوست ۱

الگوریتم روش فصل سوم

1. Choose n discretization points in the domain set $\bar{\Omega}$.
2. Classify discretization points into three sets $X^I = \{x^{[1]}, \dots, x^{[ni]}\}$ (interior points), $X^D = \{x^{[ni+1]}, \dots, x^{[ni+nd]}\}$ (Dirichlet boundary points) and $X^N = \{x^{[ni+nd+1]}, \dots, x^{[n]}\}$ (Neumann boundary points).
3. For $i = 1, \dots, n$ do
4. Set a stencil $S_i = \{x_k^{[i]}\}_{k=1}^{n_s}$.
5. Form Matern kernel matrix $B^{[i]} = (K(x_j, x_k))_{1 \leq j, k \leq n_s}$ corresponding to the stencil S_i .
6. Set $c(x)$ as a scale function.
7. Form Matern kernel with scale function matrix $A^{[i]} = (K(x_j, c(x_j)), (x_k, c(x_k)))_{1 \leq j, k \leq n_s}$ corresponding to the stencil S_i .
8. Obtain Cholesky decomposition of the matrix $A^{[i]}$ as $A^{[i]} = L^{[i]} \cdot (L^{[i]})^T$.
9. Set Newton kernel matrix $N^{[i]} = (N_j(x_k))_{1 \leq j, k \leq n_s}$ as $N^{[i]} = L^{[i]}$.
10. Form matrix $\frac{\partial}{\partial x}(N^{[i]}) = (\frac{\partial}{\partial x}K(x_j, x_k))_{1 \leq j, k \leq n_s} * (N^{-1[i]})^T$, corresponding to the stencil S_i .
11. Form matrix $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(N^{[i]}) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2}K(x_j, x_k))_{1 \leq j, k \leq n_s} * (N^{-1[i]})^T$, corresponding to the stencil S_i .
12. End for
13. For $i = ni + nd + 1, \dots, n$ do
14. Form the vector I_i containing the indices of center $X^{[i]}$ and it's $n_s - 1$ nearest neighbouring points.
15. Form sparse matrix W , where $W(i - ni - nd, I_i) = \frac{\partial}{\partial x}(N^{[i]}) * N^{-1[i]}$,

corresponding to the stencil S_i .

16. END FOR

17. for $i = 1, \dots, ni$ do

18. Form sparse matrix D_1 , where $D_1(i, I_i) = \frac{\partial}{\partial x}(N^{[i]}) * N^{-1[i]}$.

19. Form sparse matrix D_2 , where $D_2(i, I_i) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(N^{[i]}) * N^{-1[i]}$.

20. ENDFOR

21. Set vector $G = (g^{\mathcal{N}}(X^{[ni+nd+1]}, t), \dots, g^{\mathcal{N}}(X^{[n]}, t))^T$.

22. Set initial vectors $\tilde{U}(0) = (U_0(X^{[i]}))_{1 \leq i \leq n}$.

23. Solve the system of ODEs

$$\tilde{U}_t = -\tilde{U} * (D_1 * U) + \frac{1}{Re}(D_2 * U),$$

where $U = (\tilde{U}, U^{\mathcal{D}}, U^{\mathcal{N}})^T$, $U^{\mathcal{N}} = W^{-1}(:, ni + nd + 1 : n) * (G - W(:, 1 : ni) * \tilde{U} - W(:, ni + 1 : ni + nd) * U^{\mathcal{D}})$

منابع

- [1] Abbasbandy, S., Darvishi, M.T. (2005). "A numerical solution of Burgers' equation by time discretization of Adomian's decomposition method". Appl. Math. Comput. 170,95–102.
- [2] Abbasbandy, S., Azarnavid, B., Alhuthali, M.s.(2015)"A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems". J. Comput. Appl. Math. 279,293–305.
- [3] Ali, A., Islam, S.U., Haq, S. (2009). "A computational meshfree technique for the numerical solution of the two-dimensional coupled Burgers' equations". Int. J. Comput. Methods Eng. Sci. Mech.10, 406–412.
- [4] Azarnavid, B., Parvaneh, F., Abbasbandy, S.(2015). "Picard–reproducing kernel Hilbert space method for solving generalized singular nonlinear Lane–Emden type equations". Math. Model. Anal. 20, 754–767.
- [5] Asaithambi, A. (2010)."Numerical solution of the Burgers' equation by automatic differentiation".Appl. Math. Comput. 216, 2700–2708.
- [6] S.N. Atluri, S. Shen,The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method, Tech Science Press, 2002.
- [7] Bahdir, A.R. (2003). "A fully implicit finite difference scheme for two dimensional Burgers' equations". Appl. Math. Comput. 137, 131–137.
- [8] Belytschko, T., Lu, Y.Y., Gu, L. (1994)." Element-free Galerkin methods". Int. J. Numer. Methods Engrg. 37, 229-256.
- [9] Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming. M., Krysl, P. (1996)." Meshless methods: an overview and recent developments, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. special issue, 139, 3–47.
- [10] Bochner, S. (1933). Monotone Funktionen, Stieltjes Integrale und harmonische Analyse, Math. Ann. 108 , 378–410.

- [11] Bozzini, M., Lenarduzzi, L., Rossini, M., Schaback, R. (2015). "Interpolation with variably scaled kernels". *IMA J. Numer. Anal.* 35, 199–219.
- [12] Buhmann, M.D. (2004). "Radial Basis Functions". Cambridge University, CB2 2RU.
- [13] Burger, J.M.(1948). "A mathematical model illustrating the theory of turbulence". *Adv. Appl. Mech.* 1, 171–199.
- [14] Caldwell, J. Smith, P. (1982). "Solution of Burgers' equation with a large Reynolds number". *Appl. Math. Model.* 6, 381–385.
- [15] Cheney, E.W., Light, W.A. (1999). "A Course in Approximation Theory". Brooks/Cole (Pacific Grove, CA).
- [16] Christie, I., Griffiths, D.F., Mitchell, A.R., Sanz-Serna, J.M. (1981). "Product approximation for non-linear problems in the finite element method" *IMAJ. Numer. Anal.* 1, 253–266.
- [17] Dag, I., Irk, D., Saka, B. (2015). "A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines". *Appl. Math. Comput.* 163(1), 199–211.
- [18] Dehghan, M., Mirzaei, D. (2008). "The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the generalized two-dimensional non-linear Schrodinger equation". *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 32, 747-756.
- [19] Dehghan, M., Mirzaei, D. (2008). "Numerical solution to the unsteady two-dimensional Schrodinger equation using meshless local boundary integral equation method". *Int. J. Numer. Methods Eng.* 76, 501-520.
- [20] Dehghan, M., Mirzaei, D. (2009). "Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity". *Appl. Numer. Math.* 59, 1043-1058.
- [21] Dehghan, M., Mohammadi, V. (2015). "The method of variably scaled radial kernels for solving two-dimensional magnetohydrodynamic (MHD) equations using two discretizations: The Crank-Nicolson scheme and the method of lines (MOL)". *Comput. Math. Appl.* 70, 2292–2315.

- [22] Dehghan, M., Shakeri, F. (2009). "Method of lines solutions of the parabolic inverse problem with an overspecification at a point". *Numer Algorithms*. 50, 417–437.
- [23] Dehghan, M., Mohammadi, V. (2014). "The numerical solution of Fokker–Planck equation with radial basis functions (RBFs) based on the meshless technique of Kansa's approach and Galerkin method". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 47, 38–63.
- [24] Dereli, Y., Schaback, R. (2013). "The meshless kernel-based method of lines for solving the equal width equation". *Appl. Math. and Comp.* 219, 5224–5232.
- [25] Duarte, C.A., Oden, J.T. (1996). "An h-p adaptative method using clouds". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139, 237–262.
- [26] Evans, D., Abdullah, A. (1984). "The group explicit method for the solution of Burgers' equation". *Computing* 32, 239–253.
- [27] Fasshauer G.E. (2007). "Meshfree Approximation Methods with MATLAB". World Scientific Publishers, Singapore.
- [28] Fasshauer, G. (1997). "Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions". In: Mehaute AL, Rabut C, Schumaker LL, editors. *Surface fitting and multiresolution methods*. Nashville, TN: Vanderbilt University Press. 131–138.
- [29] Fletcher, J.D.(1983). "Generating exact solutions of the two-dimensional Burgers' equations". *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 3, 213–216.
- [30] Fletcher, C.A.J. (1983). "A comparison of finite element and finite difference solution of the one and two dimensional Burgers' equations". *J. Comput. Phys.* 51, 159–188.
- [31] Franke, C., Schaback, R. (1998). "Convergence order estimates of meshless collocation methods using radial basis functions". *Adv. Comput. Math.* 8, 381–399.
- [32] Franke, C. Schaback, R. (1998). "Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions". *Appl. Math. Comp.* 93, 73–82.

- [33] Golbabai, A., Rabiei, H. (2012). "Hybrid shape parameter strategy for the RBF approximation of vibrating systems". *Int. J. Comput. Math.* 89, 2410–2427.
- [34] Hardy, R.L. (1971). "Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces". *J. Geophys. Res.* 76, 1905–1915.
- [35] Hashemian, A. Shodja, H.M. (2008). "A meshless approach for solution of Burgers' equation". *J. Comput. Appl. Math.* 220, 226–239.
- [36] Hon, Y.C., Mao, X.Z. (1998). "An efficient numerical scheme for Burgers' equation". *Appl. Math. Comp.* 95, 37–50.
- [37] Hon, Y.C., Schaback, R. (2001). "On unsymmetric collocation by radial basis functions". *Appl. Math. Comput.* 119, 177–186.
- [38] Hon, Y., Schaback, R. (2008). "Solvability of partial differential equations by meshless kernel methods". *Adv. Comput. Math.* 28, 283–299.
- [39] Huang, C.S., Lee, C.F., Cheng, A.D. (2007). "Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 31, 614–623.
- [40] Jiwari, R. (2012). "A haar wavelet quasi linearization approach for numerical simulation of Burgers' equation". *Comput. Phys. Commun.* 183, 2413–2423
- [41] Jiwari, R. (2015). "A hybrid numerical scheme for the numerical solution of the Burgers' equation". *Comput. Phys. Commun.* 188, 59–67.
- [42] Kansa, E.J. (1986). "Application of Hardy's multiquadric interpolation to hydrodynamics". in: *Proc. Simul. Conf.* 4, 111–117.
- [43] Kansa, E.J. (1990). "Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with application to computational fluid dynamics, part I". *Comput. Math Appl.* 19, 127–145.
- [44] Kansa, E.J. (1990). "Multiquadrics—a scattered data approximation scheme with application to computational fluid dynamics, part II". *Comput. Math Appl.* 19, 147–161.
- [45] Kansa, E.J., Aldredge, R.C., Ling, L. (2009). "Numerical simulation of two-dimensional combustion using mesh-free methods". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33, 940–950.

- [46] Khater, A.H., Temsaha, R.S., Hassanb, M.M. (2208). "A chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations". J. Comput. Appl. Math. 222, 333--350
- [47] Kosec, G., Sarler, B. (2008). "Local RBF collocation method for Darcy flow". CMES: Comput. Model. Eng. Sci. 25, 197–207.
- [48] Lee, C.F, Ling, L., Schaback, R. (2009). "On convergent numerical algorithms for unsymmetric collocation". Adv. Comput. Math. 30, 339–354.
- [49] Lee, C., Liu, X., Fan, S. (2003). "Local multiquadric approximation for solving boundary value problems". Comput. Mech. 30, 396–409.
- [50] Li, J., Hon, Y.C. (2004). "Domain decomposition for radial basis meshless methods". Numer. Methods Partial. Differ. Equ. 20, 450–462.
- [51] Ling, L., Kansa, E.J. (2004). "Preconditioning for radial basis functions with domain decomposition methods". Math. Comput. Modell. 40, 1413–1427.
- [52] Ling, L., Schaback, R. (2009). "An improved subspace selection algorithm for meshless collocation methods". Int. J. Numer. Methods. Eng. 80, 1623–1639.
- [53] Liu, G.R. (2003). "Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method". CRC press.
- [54] Liu, W.K., Jun, S., Zhang, Y.F. (1995). "Reproducing kernel particle methods". Int. J. Numer. Methods Fluids 21, 1081-1106.
- [55] Lucy, L.B. (1997). "A numerical approach to the testing of fusion process". Astron. J. 88, 1013- 1024.
- [56] L.T. Luh, The mystery of the shape parameter, arXiv:1001.5087.
- [57] L.T. Luh, The mystery of the shape parameter II, arXiv:1002.2082.
- [58] L.T. Luh, The mystery of the shape parameter III, arXiv:1004.0759.
- [59] L.T. Luh, The mystery of the shape parameter IV, arXiv:1004.0761.
- [60] L.T. Luh, The shape parameter in the Gaussian function, Comput. Math. Appl. 63 (2012) 687–694.

- [61] Mavric, B., Sarler, B. (2015). "Local radial basis function collocation method for linear thermoelasticity in two dimensions". *Int. J. Numer. Method H.* 25, 1488–1510.
- [62] Mazarei M.M., A. Aminataei A. (2012). "Numerical Solution of Poisson's Equation Using a Combination of Logarithmic and Multiquadric Radial Basis Function Networks". *Journal of Applied Mathematics*. [dx.doi.org/10.1155/286391](https://doi.org/10.1155/286391).
- [63] Melenk, J.M., Babuska, I. (1996). "The partition of unity finite element method: basic theory and applications". *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 139, 289-314.
- [64] Meyer, C.D. (2007). "Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM (Philadelphia)".
- [65] Mittal, R., Jain, R. (2012). "Numerical solutions of nonlinear burgers' equation with modified cubic b-splines collocation method". *Appl. Math. Comput.* 218(15), 7839–7855.
- [66] Mohammadi, M., Mokhtari, R. (2011). "Solving the generalized regularized long wave equation on the basis of a reproducing kernel space". *J. Comput. Appl. Math.* 235, 4003–4014.
- [67] Mohammadi, M., Mokhtari, R. (2013). "A new algorithm for solving nonlinear Schrödinger equation in the reproducing kernel space". *Iranian J. Sci. Tech.* 37, 523–546.
- [68] Mohammadi, M., Mokhtari, R., Panahipour, H. (2013). "A Galerkin-reproducing kernel method: Application to the 2D nonlinear coupled Burgers' equations". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 37, 1642–1652.
- [69] Mohammadi, M., Mokhtari, R., Schaback, R. (2014). "A meshless method for solving the 2D Brusselator reaction-diffusion system". *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.* 101, 113–138.
- [70] Mohebbi, A., Dehghan, M. (2008). "High order compact solution of the one-space-dimensional linear hyperbolic equation". *Numer. Methods Partial Differential Equations* 24, 1222-1235.
- [71] Mokhtari, R., Mohammadi, M. (2009). "New exact solutions to a class of coupled nonlinear PDEs". *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 10, 779–796.

- [72] Mukherjee, Y.X., Mukherjee, S. (1997). "The boundary node method for potential problems". *Int. J. Numer. Methods Eng.* 40, 797-815.
- [73] Muller, S., Schaback, R. (2009). "A Newton basis for kernel spaces". *J. Approx. Theory.* 161, 645–655.
- [74] Narcowich, F.J., Sivakumar, N., Ward, J.D. (1994). "On condition numbers associated with radialfunction interpolation". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 186, 457–485.
- [75] Nayroles, B., Touzot, G., Villon, P. (1992). "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements". *Comput. Mech.* 10, 307-318.
- [76] Nee, J., Duan, J. (1998). "Limit set of trajectories of the coupled viscous Burgers' equations". *Appl. Math. Lett.* 11, 57–61.
- [77] Nguyen, V.P., Rabczuk, T., Bordas, S., Duflot, M. (2008). "Meshless methods: A review and computer implementation aspects,". *Math. Comput. Simul.* 79, 763-813.
- [78] Pazouki, M., Schaback, R. (2011). "Bases for kernel-based spaces". *J. Comput. Appl. Math.* 236, 575–588.
- [79] Perko, J., Sarler, B. (2007). "Weight function shape parameter optimization in meshless methods for non-uniform grids". *Comput. Model. Eng. Sci.* 19, 55–68.
- [80] Pugh, S.M. (1995). "Finite element approximation of Burgers' equation". M.S. Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [81] Rudin, W. (1973). "Functional Analysis". McGraw-Hill, New York.
- [82] Sanyasiraju, Y., Satyanarayana, C. (2013). "On optimization of the RBF shape parameter in a grid-free local scheme for convection dominated problems over non-uniform centers". *Appl. Math. Model.* 37, 7245–7272.
- [83] Sarra, S.A., Sturgill, D. (2009). "A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33, 1239–1245.

- [84] Sarler, B. (2007). "From global to local radial basis function collocation method for transport phenomena". Berlin: Springer, 257–282.
- [85] Sarler, B., Vertnik, R., Kosec, G. (2012). "Radial basis function collocation method for the numerical solution of the two-dimensional transient nonlinear coupled Burgers' equations". Appl. Math. Model. 36, 1148–1160.
- [86] Schaback, R. (2015). "A computational tool for comparing all linear PDE solvers". Adv. in Comp. Math. 41, 333–355.
- [87] Schaback, R. (2011). "Kernel-based meshless methods". Lecture Note, Göttingen, <http://num.math.uni-goettingen.de/schaback/teaching/AV2.pdf>.
- [88] Schaback, R. (2011). "Matlab Programming for Kernel-Based methods". Technical Report, <http://num.math.uni-goettingen.de/schaback/research/papers/MPfKBM.pdf>.
- [89] Schaback, R. (2002). "Stability of radial basis function interpolants". Approximation Theory X, C. K. Chui, L. L. Schumaker, and J. Stckler (eds.), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 433-440.
- [90] Schaback, R., Wendland, H. (2006). "Kernel techniques: from machine learning to meshless methods". Acta Numerica. 15, 543–639.
- [91] Schoenberg, I.J. (1938). "Metric spaces and completely monotone functions". Annals of Mathematics 39, 811-841.
- [92] Sarra, S. (2012). "A local radial basis function method for advection-diffusion-reaction equations on complexly shaped domains". Appl. Math. Comp. 218, 9853–9865.
- [93] Sarra, S., Sturgill, D. (2009). "A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods". Eng. Anal. Bound. Elem. 33, 1239–1245.
- [94] Schoenberg, I.J. (1938). "Metric spaces and completely monotone functions". Annals of Mathematics 39, 811-841.
- [95] Shakeri, F., Dehghan, M. (2008). "The method of lines for solution of the one-dimensional wave equation subject to an integral conservation condition". Comput. Math. Appl. 56, 2175–2188.

- [96] Sladek, J., Sladek, V., Atluri, S.N. (2000). "Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problem of elasticity with nonhomogeneous material properties". *Comput. Mech.* 24, 456-462.
- [97] Xie, H., Zhou, J., Jiang, Z., Guo, X. (2016). "Approximations for Burgers' equations with C-N scheme and RBF collocation methods". *J. Nonlinear Sci. Appl.* 9, 3727–3734.
- [98] Wendland, H. (2005). "Scattered data approximation, Cambridge monographs on applied and computational mathematics". Cambridge University Press.
- [99] Xiang, S., Wang, K.M., Ai, Y.T., Sha, Y.D., Shi, H. (2012). "Trigonometric variable shape parameter and exponent strategy for generalized multiquadric radial basis function approximation". *Appl. Math. Model.* 36, 1931–1938.
- [100] Younga, D., Fana, C., Hua, S., Alturi, S. (2009). "The Eulerian-Lagrangian method of fundamental solutions for two-dimensional unsteady Burgers' equations". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 32, 395–412.
- [101] Yun, D.F., Hon, Y.C. (2016). "Improved localized radial basis function collocation method for multi-dimensional convection-dominated problems". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 67, 63–80.
- [102] Zhang, X.H, Ouyang, J., Zhang, L. (2009). "Element-free characteristic Galerkin method for Burgers' equation". *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33, 356–362.
- [103] Zhang, L., Ouyang, J., Wang, X., Zhang, X. (2010). "Variational multiscale element-free Galerkin method for 2D Burgers' equation". *J. Comput. Phys.* 29, 7147–7161.
- [104] Zhang, W., Ahang, C., Xi, G. (2010). "An explicit Chebyshev pseudospectral multigrid method for incompressible Navier-Stokes equations". *Comput. Fluids.* 39, 178–188.
- [105] Zhu, T., Zhang, J.D., Atluri, S.N.(1998). "A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach". *Comput. Mech.* 21, 223-235.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Thin plate spline	اسپلاین صفحه نازک
Uncertainty principle	اصل عدم قطعیت
Borel measure	اندازه برل
Measure	اندازه
Shape parameter	پارامتر شکلی
Stability	پایداری
Fourier-Bessel transform	تبدیل بسل-فوریه
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Hankel transform	تبدیل هنکل
Trial approximation	تقریب جواب
Radial basis function	توابع پایه شعاعی
Meshless Petrov-Galerkin Method	روش بدون شبکه پترف-گالرکین
Meshless local boundary integral	روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی
equation method	
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Finite volume method	روش حجم متناهی
Radial point interpolation method	روش درونیابی شعاعی نقاط
Smoothed Particle Hydrodynamic method	روش ذرات هیدرودینامیکی هموار
Diffuse element method	روش عناصر پخش شده
Finite elements method	روش عناصر متناهی
Boundary element method	روش عناصر مرزی
Kansa's method	روش کانسا
Galerkin method	روش گالرکین
Element free Galerkin method	روش گالرکین با عناصر آزاد
Condition number	عدد حالت

Fill distance	فاصله تراکم
Separation distance	فاصله تفکیک
Sobolev space	فضای سوبولف
Native space	فضای محلی
Hilbert space	فضای هیلبرت
Gershgorin's Theorem	قضیه گرشگورین
Sparse matrix	ماتریس تنک
Positive definite	معین مثبت
Strictly positive definite	معین مثبت اکید
Conditionally positive definite	معین مثبت مشروط
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Field nodes	نقاط میدانی
Kernel	هسته
Reproducing kernel	هسته بازتولید شده
Hermitian kernel	هسته هرمیتی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Boundary Element Method	روش عناصر مرزی
Boundary node method	روش نودهای مرزی
Collocation method	روش هم محلی
Condition number	عدد حالت
Conditionally positive definite	معین مثبت اکید
Dense matrix	ماتریس پر
Diffuse element method	روش عناصر پخش شده
Element free Galerkin method	روش گالرکین با عناصر آزاد
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Field nodes	نقاط میدانی
Fill distance	فاصله تراکم
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Finite elements method	روش عناصر متناهی
Finite volume method	روش حجم متناهی
Fourier-Bessel transform	تبدیل بسل-فوریه
Galerkin method	روش گالرکین
Generalized multiquadrics	چند ربعی های تعمیم یافته
Gershgorin's Theorem	قضیه گرشگورین
Hankel transform	تبدیل هنکل
Hermitian kernel	هسته هرمیتی
Hilbert space	فضای هیلبرت
Interpolant	درونیابی
Kansa method	روش کانسا
Kernel	هسته
Meshless method	روش بدون شبکه

Meshless Petrov-Galerkin Method	روش بدون شبکه پترف-گالرکین
Native space	فضای محلی
Node generation	تولید نقاط
Reproducing kernel	هسته بازتولید شده
Semipositive definite	نیمه معین مثبت
Separation distance	فاصله تفکیک
Shape parameter	پارامتر شکلی
Sobolev spaces	فضاهای سوبولف
Stably	پایدار
Strictly positive definite	معین مثبت اکید
Trial approximation	تقریب جواب
Uncertainty principle	اصل عدم قطعیت

Abstract

In this thesis some meshless methods based on the local Newton and the local radial basis functions are used to solve some time dependent partial differential equations. For stability reasons, used variably scaled radial kernels for constructing Newton basis functions. Also for more stability and accuracy, radial basis functions equipped with variable shape parameter. In continuation, with considering presented basis functions as trial functions, approximated solution functions in the event of spatial variable with collocation method. It lead to a system of ordinary differential equations for the time-dependent PDEs. Then, with aid of method of lines obtained a system of ordinary differential equations according to solution function in the event of time. Methods applied for solving the nonlinear Burgers' equation and couple Burgers' equation. The numerical results show that the proposed method is efficient, accurate and stable.

Keywords:

Local meshless method, Method of lines, Newton basis functions, Variably scaled radial kernel, Variable shape parameter, Burgers' equation



ISLAMIC AZAD UNIVERSITY
SCIENCE AND RESEARCH BRANCH
Department of Mathematics

Ph.D Thesis

Title of the Thesis

**The use of radial basis functions by focus on variable
shape parameter for solving partial differential equations**

Supervisors

S. Abbasbandy Ph.D. and T. Allahviranloo Ph.D.

Advisor

E.Babolian Ph.D.

By

Hananeh Nojavan

September 2017