

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های عددی بر پایه طرح‌های حافظ گروه برای حل معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما

دکتر سعید عباس بندی

استادان مشاور

دکتر داود رستمی و دکتر روبرت ون گوردن

پژوهشگر

محمد حاجی‌کتابی

آذر ۹۶

نام خانوادگی دانشجو: حاجی کتابی

نام: محمد

عنوان: روش های عددی بر پایه طرح های حافظ گروه برای حل معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما: دکتر سعید عباس بندی

استادان مشاور: دکتر داود رستمی و دکتر روبرت ون گوردن

مقطع تحصیلی: دکتری

رشته: ریاضی کاربردی

گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره) قزوین

دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: آذر ۹۶

تعداد صفحات: ۱۲۲

واژگان کلیدی: طرح های حافظ گروه، روش پرتابی گروه لی، روش انتگرال گیری متغیر ساختگی، توابع پایه ای شعاعی، بسط مگنوس.

چکیده

هدف از این رساله بررسی گسترده ی روش های عددی بر پایه طرح های حافظ گروه، برای حل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل می باشد. از طرح حافظ گروه برای شبیه سازی عددی معادله غیر خطی کسمیر استفاده می کنیم و نشان می دهیم نتایج عددی کاملاً منطبق بر نتایج تحلیلی می باشد. از روش پرتابی گروه لی برای حل انواع مختلف مسائل مقدار مرزی غیر خطی از جمله مدل غیر خطی واکنش- انتشار و یامابه استفاده می کنیم و نشان می دهیم این روش یک ابزار قدرتمند در پیش بینی تعداد جواب های یک مساله مقدار مرزی و تقریب آن ها با دقت مناسب می باشد. برای حل معادله با مشتقات جزئی برینکمن-فرچیمر، از ترکیب طرح حافظ گروه با روش متغیر ساختگی استفاده می کنیم و جواب عددی این معادله را با دقت خیلی خوبی پیدا می کنیم. به منظور برطرف کردن برخی از مشکلات مربوط به گسسته سازی معادلات با مشتقات جزئی برای طرح های حافظ گروه، از توابع پایه شعاعی استفاده می کنیم و به کمک آن معادله تعمیم یافته بنجامین-بنا-ماهنی-برگرز را حل می کنیم. در نهایت با استفاده از بسط مگنوس، طرح های حافظ گروه جدیدی از مرتبه های مختلف را معرفی می کنیم که این طرح ها قابلیت انطباق طول گام را نیز دارا می باشند.

تقدیم بہ

پدرم و مادرم

سپاس‌گزاری

سپاس و ستایش خداوند یکتا را که به من توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امید که شایستگی ادامه این راه را داشته باشم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات و راهنمایی‌های استاد راهنمای خود جناب آقای پروفسور سعید عباس‌بندی، تشکر و قدردانی کنم. از استاد راهنمایم در اسپانیا پروفسور فرناندو کاساس،^۱ به خاطر تمام زحماتی که در مدت اقامتم در دانشگاه اوخی^۲ کشیدند و راهنمایی‌های که فرمودند کمال تشکر را دارم. از اساتید مشاور پایان‌نامه جناب آقای پروفسور داود رستمی و دکتر روبرت ون‌گوردر^۳ تشکر و قدر دانی می‌نمایم. به علاوه بر خود لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر محمد جباری، دکتر الیاس شیوانیان و دکتر شهنام جوادی که داوری این پایان‌نامه را با دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر نمایم.

با ادای احترام به وجود نازنین پدر و مادرم و سپاس فراوان از خواهران مهربانم...

محمد حاجی‌کتابی
آذر ۹۶

^۱ Fernando Casas

^۲ Universitat Jaume I

^۳ Robert Van Gorder

فهرست مطالب

ح	لیست تصاویر
ذ	لیست جداول
۵	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۵	۱.۱ منیفلد
۶	۱.۱.۱ نگاشت های میان منیفلد ها
۷	۲.۱ گروه لی
۸	۳.۱ برخی از ویژگی های گروه لورنتزی و جبر لی آن
۱۱	۲ وجود و شبیه سازی عددی جواب های موج رونده ی متناوب معادله کسمیر از سیستم ایتو
۱۱	۱.۲ مقدمه
۱۳	۲.۲ تجزیه و تحلیل جواب مثبت متناوب کران دار از مسئله مقدار اولیه ی (۷.۲)
۱۶	۱.۲.۲ یک کران بالا برای پارامتر A
۱۶	۲.۲.۲ دوره تناوب جواب نوسانی
۱۷	۳.۲.۲ خلاصه ای از نتایج تحلیلی
۱۷	۳.۲ طرح حافظ گروه
۲۰	۴.۲ حل مسئله مقدار اولیه ی کسمیر با استفاده از طرح حافظ گروه
۲۲	۵.۲ نتیجه گیری
۲۴	۳ روش پرتابی گروه لی برای حل مسائل مقدار مرزی غیر خطی
۲۴	۱.۳ مقدمه
۲۵	۲.۳ طرح حافظ گروه یک مرحله ای
۲۶	۱.۲.۳ روش نقطه میانی تعمیم یافته
۲۷	۲.۲.۳ نگاشت گروه لی بین دو نقطه روی مخروط
۲۹	۳.۳ روش پرتابی گروه لی
۳۰	۱.۳.۳ مقدار A

۳۱		حالت $A > 0$	۲.۳.۳
۳۲		حالت $A < 0$	۳.۳.۳
۳۳		وقف دادن شیب A	۴.۳.۳
۳۳		نتایج عددی	۴.۳
۳۳		معادله براتو	۱.۴.۳
۳۵		مدل غیر خطی واکنش-انتشار	۲.۴.۳
۳۶		معادله یامابه	۳.۴.۳
۳۸		نتیجه گیری	۵.۳
۴	یک روش گروه لی برای حل عددی معادله-برینکمن فرچیمز از جریان یک سویه روی یک دامنه مستطیل شکل		
۵۰		مقدمه	۱.۴
۵۱		روش انتگرال گیری متغیر ساختگی	۲.۴
۵۳		طرح حافظ گروه برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل	۱.۲.۴
۵۳		نتایج عددی	۳.۴
۵۸		تاثیر پارامترهای فیزیکی مسئله بر جواب	۱.۳.۴
۶۱		نتیجه گیری	۴.۴
۵	روش گروه لی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی برای حل معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز		
۶۲		مقدمه	۱.۵
۶۳		یک بررسی مختصر از معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز	۱.۱.۵
۶۴		پیاده سازی روش	۲.۵
۶۴		حالت یک بعدی	۱.۲.۵
۶۷		حالت n -بعدی ($n \geq 2$)	۲.۲.۵
۷۰		نتایج عددی	۳.۵
۷۰		مثال ۱	۱.۳.۵
۷۱		مثال ۲	۲.۳.۵
۷۲		مثال ۳	۳.۳.۵
۷۲		مثال ۴	۴.۳.۵
۷۳		نتیجه گیری	۴.۵
۸۷	طرح‌های حافظ بر پایه ی بسط مگنوس برای سیستم های غیر خطی		
۸۷		مقدمه	۱.۶
۸۹		بسط مگنوس برای سیستم های غیر خطی	۲.۶

۳.۶	انتگرال گیری های عددی بر پایه ی بسط مگنوس	۹۰
۴.۶	کاربرد ها	۹۵
۱.۴.۶	انتگرال گیری مگنوس و سیستم های دینامیکی افزوده	۹۶
۲.۴.۶	مسائل به شدت نوسانی	۹۸
۳.۴.۶	طرح های حافظ برای معادلات دیفرانسیل جزئی: معادله شرودینگر	
۱۰۲	مکعبی	
۵.۶	نتیجه گیری	۱۰۴
۷	نتیجه گیری و کارهای آتی	۱۰۶
	مراجع	۱۰۸
	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۱۱۷
	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۱۱۹

لیست تصاویر

۲۱	رسم تابع جواب $g(z)$ به ازای $a = 2$ و $A = 0.7$	۱.۲
۲۲	رسم تابع جواب $g(z)$ زمانی که $a = 2$ و $A = 1.2$	۲.۲
۲۳	رسم تابع جواب $g(z)$ زمانی که $a = 2$ و $A = 1.3741$	۳.۲
۴۰	نمودار $y(1) - 0.5$ (راست) و نمودار $y'(0) = A(r)$ (چپ) نسبت به r برای معادله براتو به ازای $\lambda = 3$	۱.۳
۴۰	نمودار $y(1) - 0.5$ (راست) برای λ_c و برای $\lambda = 4, 5$ (چپ) نسبت به پارامتر r برای معادله براتو.	۲.۳
۴۱	دو جواب عددی معادله براتو به همراه دو جواب دقیق به ازای $\lambda = 3$ (راست)، و جواب یکتای عددی و دقیق برای $\lambda = \lambda_c$ (چپ).	۳.۳
۴۱	خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) از شاخه اول (راست) و شاخه دوم (چپ) جواب های معادله براتو، به ازای $\lambda = 3$ و مقادیر مختلف Δx	۴.۳
۴۱	نمودار $y(1) - 0.5$ (راست) و $y'(-1) = A(r)$ (چپ) برای مدل واکنش-انتشار نسبت به r به ازای $m = -\frac{3}{4}$ و $\psi = 0.8$	۵.۳
۴۲	نمودار $y(1) - 0.5$ برای مدل واکنش-انتشار به ازای $\psi = 0.2$ (راست) و به ازای $\psi = 0.9, 1$ (چپ) نسبت به r	۶.۳
۴۲	جواب های عددی دو گانه روش پرتابی گروه لی به همراه جواب های دوگانه دقیق برای مدل واکنش-انتشار به ازای $m = -\frac{3}{4}$ ، $\psi = 0.8$ (راست)، و جواب یکتای عددی به همراه جواب یکتای دقیق برای $\psi = 0.2$ (چپ).	۷.۳
۴۳	خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه اول جواب (راست) و شاخه دوم جواب (چپ) برای جواب های دوگانه مدل واکنش-انتشار به ازای $m = -\frac{3}{4}$ ، $\psi = 0.8$ و برای مقادیر مختلف Δx	۸.۳
۴۳	نمودار $u'(0) - 0$ نسبت به r برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 0.1$ و $m = 3$ (راست)، $\lambda = 2$ و $m = 4$ (چپ).	۹.۳
۴۵	جواب های عددی بدست آمده با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 0.1$ (راست) و $\lambda = -1$ (چپ).	۱۰.۳

- ۱۱.۳ جواب‌های عددی بدست آمده با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 2$ (راست) و $\lambda = 4$ (چپ). ۴۶
- ۱۲.۳ خطای مانده بدست آمده با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 0.1$ (راست) و $\lambda = 2$ (چپ). ۴۶
- ۱۳.۳ جواب‌های متقارن شعاعی با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = -1$ و $\lambda = 4$ ، مشاهده می‌شود که $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{m,\lambda}(x) = v_{m,1}(x) = 1$ ۴۷
- ۱.۴ تعداد تکرارها بر حسب پارامتر m ۵۴
- ۲.۴ ریشه‌ی میانگین مربع خطای مانده به ازای مقادیر مختلف معیار توقف ϵ و تعداد نقاط گسسته‌ی مختلف، به ازای $A = B = C = 1$ (چپ) و $A = B = C = 100$ (راست). ۵۵
- ۳.۴ جواب تقریبی بدست آمده از روش متغیر ساختگی (راست) و خطای مانده این جواب (چپ) برای $A = B = C = 1$ ۵۶
- ۴.۴ جواب تقریبی بدست آمده از روش متغیر ساختگی (راست) و خطای مانده این جواب (چپ) برای $A = B = C = 100$ ۵۶
- ۵.۴ جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف $C_f \rho$ و مقادیر ثابت $\mu = \hat{\mu} = K = G = 1$ در نقطه $x = 0.5$ ۵۸
- ۶.۴ جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف μ و مقادیر ثابت $C_f \rho = \hat{\mu} = K = G = 1$ در نقطه $x = 0.5$ ۵۹
- ۷.۴ جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف G و مقادیر ثابت $\mu = \hat{\mu} = K = C_f \rho = 1$ در نقطه $x = 0.5$ ۶۰
- ۸.۴ جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف K و مقادیر ثابت $C_f \rho = \hat{\mu} = \mu = G = 1$ در نقطه $x = 0.5$ ۶۰
- ۹.۴ جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف $\hat{\mu}$ و مقادیر ثابت $\mu = G = K = C_f \rho = 1$ در نقطه $x = 0.5$ ۶۱
- ۱.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/1000$ و $c = 0.9$ بر روی بازه $[-10, 10]$ با $t \in [0, 10]$ برای مثال ۱. ۷۵
- ۲.۵ توزیع نقاط گره‌ای در ناحیه‌های مستطیلی، مثلثی و دایره‌ای شکل. ۷۵
- ۳.۵ توزیع نقاط گره‌ای در ناحیه‌های نامنظم. ۷۶
- ۴.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/200$ و $c = 0.1$ روی ناحیه‌ی دایره‌ای شکل با $T = 5$ برای مثال ۲. ۷۸
- ۵.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/15$ ، $\tau = 1/1000$ و $c = 0.5$ روی ناحیه‌ی نامنظم $(n = 4)$ با $T = 1$ برای مثال ۲. ۷۹
- ۶.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/15$ ، $\tau = 1/1000$ و $c = 0.5$ روی ناحیه‌ی نامنظم $(n = 8)$ با $T = 1$ برای مثال ۲. ۷۹

- ۷.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/5$ ، $\tau = 1/10$ و
- ۸۰ $c = 1.5$ روی ناحیه ی مستطیلی $[-5, 5] \times [-5, 5]$ با $r = 0$ و $T = 1$ برای مثال 3.
- ۸.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/5$ ، $\tau = 1/10$ و
- ۸۱ $c = 1.5$ روی ناحیه ی مستطیلی $[-5, 5] \times [-5, 5]$ با $r = 3$ و $T = 1$ برای مثال 3.
- ۹.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/10$ و
- ۸۱ $c = 0.52$ روی ناحیه مثلی با $r = 0$ و $T = 1$ برای مثال 3.
- ۱۰.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/10$ و
- ۸۲ $c = 0.2$ روی ناحیه دایره ای با $r = 1$ و $T = 1$ برای مثال 3.
- ۱۱.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/20$ و
- ۸۲ $c = 0.4$ روی ناحیه نامنظم ($n = 16$) با $r = 2$ و $T = 5$ برای مثال 3.
- ۱۲.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/100$ و
- ۸۳ $c = 0.8$ روی ناحیه نامنظم با $r = 3$ و $T = 1$ برای مثال 3.
- ۱۳.۵ توزیع نقاط گره ای روی ناحیه های مکعبی و کروی برای مثال 4 (نقاط مرزی
- ۸۳ قرمز رنگ و نقاط داخلی آبی هستند).
- ۱۴.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) با استفاده از روش عددی به ازای
- $h = 1/10$ ، $\tau = 1/100$ و $c = 0.9$ روی ناحیه مکعبی در $z = 0$ و $T = 1$ برای
- ۸۴ مثال 4.
- ۱۵.۵ جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) با استفاده از روش عددی به ازای
- ۸۶ $h = 1/8$ ، $\tau = 1/100$ و $c = 0.15$ روی ناحیه کروی در $z = 0$ و $T = 1$ برای مثال 4.
- ۱.۶ خطای نسبی برای انرژی در $t_f = 100$ بر حسب هزینه محاسباتی، بدست آمده با روش
- ۹۵ های مختلف مگنوس برای معادله اوایلر.
- ۲.۶ نرم اقلیدسی خطا بر حسب هزینه محاسباتی با روش های مختلف مگنوس و روش ارائه
- ۹۷ شده توسط لی یو برای مثال 2.
- ۳.۶ طول گام زمانی در روند انتگرال گیری زمانی برای پیاده سازی روش طول گام متغیر از
- ۹۸ مرتبه 4 بر پایه بسط مگنوس برای مثال 2.
- ۴.۶ خطای جواب برای مسئله به شدت نوسانی مثال 3، روش $M1m$ متناظر با طرح اصلاح
- ۱۰۰ شده (۲۸.۶) می باشد.
- ۵.۶ خطا برای انرژی گسسته (۳۹.۶) از معادله مکعبی شرودینگر با $a = 18$ و شرط اولیه
- (۴۱.۶) با روش های مگنوس از مرتبه اول (لیو)، دوم ($M2$)، چهارم ($M4$) و روش
- ۱۰۴ حافظ جداسازی عجیب (SS).
- ۶.۶ خطا انرژی گسسته (۳۹.۶) از معادله مکعبی شرودینگر با $a = 18$ و شرط اولیه (۴۱.۶)
- ۱۰۵ بر حسب هزینه محاسباتی هر روش.

لیست جداول

۱.۳	پارامترهای استفاده شده برای معادله یامابه به ازای (به ترتیب از بالا) $\lambda = -1$ ، $\lambda = 0.1$ ،
۴۴	$\lambda = 2$ و $\lambda = 4$
۲.۳	مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله
۴۷	یامابه به ازای $\lambda = -1$ ، $m = 3$
۳.۳	مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله
۴۸	یامابه به ازای $\lambda = -1$ ، $m = 6$
۴.۳	مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله
۴۸	یامابه به ازای $\lambda = 4$ ، $m = 6$
۵.۳	مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله
۴۹	یامابه به ازای $\lambda = 4$ ، $m = 10$
۱.۴	مقایسه بین خطای مانده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۴۸] برای مقادیر مختلف
۵۷	$C_f \rho$ و $\mu = \hat{\mu} = K = G = 1$
۲.۴	مقایسه بین خطای مانده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۴۸] برای مقادیر مختلف
۵۷	$C_f \rho = \mu = \hat{\mu} = K = 1$ و G
۳.۴	مقایسه بین خطای مانده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۴۸] برای مقادیر مختلف
۵۸	از K و $C_f \rho = \mu = \hat{\mu} = G = 1$
۱.۵	تعدادی از توابع پایه ای شعاعی.
۶۵	خطاهای بدست آمده از روش عددی در بازه $[0, 1]$ با $h = 1/10$ و $T = 1$ برای
۷۴	مثال ۱.
۳.۵	مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال ۱ به ازای $h = 1/10$
۴.۵	خطاهای بدست آمده برای روش عددی با $h = 1/10$ و $T = 5$ روی ناحیه
۷۷	مستطیلی $[0, 1] \times [0, 1]$ برای مثال ۲.
۵.۵	مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال ۲ به ازای $h = 1/10$
۷۷	روی ناحیه ی مستطیلی $[0, 1] \times [0, 1]$

- ۶.۵ خطاهای بدست آمده برای روش عددی با $h = 1/10$ و $T = 10$ روی ناحیه مثلثی
۷۸ برای مثال 2.
- ۷.۵ مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال 3 به ازای $r = 0$
۸۰ و $h = 1/5$ روی ناحیه ی مستطیلی $[-2, 2] \times [-2, 2]$.
- ۸.۵ مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال 4 به ازای $h = 1/10$
۸۴ و $T = 1$ در تعدادی نقاط از ناحیه ی مکعبی.
- ۹.۵ خطاهای بدست آمده از روش عددی به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/100$ ، $c = 0.9$ و
۸۵ $T = 1$ در زمان‌های مختلف روی ناحیه ی مکعبی برای مثال 4.
- ۱۰.۵ خطاهای بدست آمده برای روش عددی به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/100$ ، $c = 0.15$
۸۵ و $T = 1$ در زمان‌های مختلف روی ناحیه کروی برای مثال 4.

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل یکی از مهمترین ابزارها برای مدل بندی کردن پدیده های طبیعی می باشند. از کاربرد های مدرن معادلات دیفرانسیل می توان به زمینه های متنوعی همچون حرکت سیالات، شتاب دهنده های ذرات، مکانیک سیالات، الگو های جمعیتی، شبکه های برق و دینامیک مولکولی اشاره کرد. از دیدگاه ریاضی، نظریه معادلات دیفرانسیل شامل بسیاری از زمینه های مختلف ریاضی می شود و مسائل بر خواسسته از این نظریه نقش اساسی در آنالیز تابعی، جبر خطی و نظریه گروه های لی ایفا می کنند. به خاطر همین موضوع، روش ها و تکنیک های کلاسیک زیادی برای پیدا کردن جواب معادلات دیفرانسیل توسعه پیدا کرده اند.

از طرفی به کار بردن ابزار های جدید برای حل معادلات دیفرانسیل موضوع مورد علاقه فیزیک دانان و ریاضی دانان می باشد. استفاده از گروه های لی^۴ یکی از این روش هاست [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷]. به وضوح می توان گفت که امروزه گروه های تقارنی لی^۵ مهمترین و قوی ترین روش برای بدست آوردن جواب تحلیلی مسائل غیر خطی است. گروه های لی کاربرد های گسترده ای در زمینه های مختلفی مانند ریاضیات، فیزیک، هندسه دیفرانسیل، نسبیت و بسیاری از معادلات دیگر دارد. از نظر تاریخی، کاربرد های آنالیز تقارنی که توسط لی برای معادلات دیفرانسیل معرفی شده بود، به مرور زمان به دست فراموشی سپرده شد تا اینکه بعد از جنگ جهانی دوم بیرخوف^۶ (1911 – 1996) کاربرد های به کار نرفته ی گروه های لی را برای معادلات دیفرانسیل مستخرج از مکانیک سیالات انجام داد که موجب احیای جدید گروه های لی شد [۸]. سپس در اتحاد جماهیر شوروی سابق، اوسیانیکوف^۷ و شاگردانش طرح های نظام بندی از گرو های لی را به طور موفقیت آمیزی روی مسائل مهم فیزیکی پیاده نمودند [۱]. در دهه ی اخیر رده ی جدیدی از تقارنی های لی، از جمله تقارنی های غیر محلی^۸، λ -تقارنی ها، تقارنی های غیر کلاسیک^۹ و ... معرفی شده اند که اغلب جواب های جدیدی از معادلات دیفرانسیل را که قابل بدست آوردن از تقارنی های لی نیستند، به دست آورده اند.

اما برای خیلی از معادلات در نظر گرفته شده راه حل شناخته شده ای که جواب آن ها را به

^۴Lie-groups

^۵Lie symmetry groups

^۶Birkhoff

^۷Ovsiannikov

^۸Nonlocal symmetries

^۹Nonclassical symmetries

صورت توابع مقدماتی بیان کند، وجود ندارد. فقط تقریب‌های عددی به کمک کامپیوتر می‌توانند کمک کنند تا رفتار اینگونه معادلات دیفرانسیل فهمیده شود. در گذشته روش‌های عددی زیادی برای این ماموریت پیشنهاد شده‌اند که می‌توان به روش‌های اویلر، رانگه کوتا، آدامز باشفرس ملتن و ... اشاره کرد. همه‌ی این روش‌ها سیستم معادلات دیفرانسیل را گسسته می‌کنند تا معادلات تفاضلی ایجاد کنند. این روش‌ها طرح‌های متفاوتی از معادلات دیفرانسیل اصلی به دست می‌آورند اما همه‌ی آن‌ها دارای این هدف مشترک هستند که ساختار و دینامیک طرح‌ها باید دقیقاً مشابه با ساختار و دینامیک معادلات دیفرانسیل اصلی باشند. این یک سوال مهم است که آیا تقریب متناظر همان رفتار مجانبی معادلات دیفرانسیل اصلی را دارد؟ در این زمینه مطالعاتی انجام شده است که نشان می‌دهند در دینامیک معادلات دیفرانسیل اصلی و دینامیک طرح‌های گسسته متناظر، اختلاف وجود دارد [۹، ۱۰، ۱۱]. این مطالعات نشان می‌دهند که اصلی‌ترین مشکل، پدیدار شدن اصطلاحاً جواب‌های جعلی^{۱۰} و نقاط ثابت خیالی^{۱۱} می‌باشد.

برای رفع این مشکلات زمینه‌کاری نسبتاً جدیدی به نام انتگرال‌گیری هندسی به وجود آمده است که به رده‌ای از روش‌های عددی گفته می‌شود که در آن‌ها خصوصیات کیفی و هندسی معادلات دیفرانسیل اصلی حفظ می‌شوند [۱۲، ۱۳، ۱۴]. به طور مثال هایرر در [۱۲]، راه‌کاری را به منظور بهبود روش‌های عددی انتگرال‌گیری کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل روی منیفلد‌ها ارائه نمود که خواص هندسی مشخصی از معادله دیفرانسیل را حفظ می‌کند. یکی از جدیدترین کتاب‌های منتشر شده در این زمینه کتاب بلنس^{۱۳} و کاساس^{۱۴} می‌باشد [۱۵]. در این کتاب که در سال ۲۰۱۶ چاپ شده است سعی کرده‌اند روش‌های انتگرال‌گیری عددی هندسی که تاکنون در مقالات مختلف منتشر شده‌اند را جمع‌آوری کرده و با مثال‌های مختلف کارآمدی آن‌ها را نشان دهند. از جمله مهمترین مزیت این روش‌ها که در این کتاب به آن اشاره شده است این است که رفتار دراز مدت جواب مسئله به واسطه حفظ ویژگی‌های هندسی آن به خوبی توصیف می‌شود. در مقاله ایسرلس^{۱۵} و همکاران [۱۶]، نظریه‌ی جدیدی از روش‌های عددی که ساختار گروه‌لی را حفظ می‌کنند مورد بررسی قرار گرفت. این روش‌ها تحت گسسته‌سازی ساختار گروه‌لی را حفظ می‌کنند که این موضوع یک اصل مهم در کشف هندسه و ساختار صحیح از معادلات دیفرانسیل و همچنین کم کردن خطا‌های عددی است. لی یو^{۱۶} در سال ۲۰۰۱ رده‌ای خاص از این روش‌ها به نام طرح‌های حافظ گروه^{۱۷} را معرفی کرد [۱۷].

این رساله شامل شش فصل می‌باشد. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز آورده شده است. در فصل دوم وجود جواب‌های موج رونده‌ی متناوب معادله غیر خطی کسمیر، با توجه

^{۱۰}Spurious solutions^{۱۱}Ghost fixed points^{۱۲}Hairer^{۱۳}Blanes^{۱۴}Casas^{۱۵}Iserles^{۱۶}Liu^{۱۷}Group-preserving schemes

به پارامترهای آن مورد بحث قرار گرفته است و سپس با استفاده از طرح حافظ گروه درستی نتایج تحلیلی بررسی شده اند. در فصل سوم از روش پرتابی گروه لی برای حل مسائل مقدار مرزی مرتبه ی دوم استفاده شده است و نشان داده ایم این روش یک ابزار قدرتمند در پیدا کردن تعداد جواب های یک مسئله مقدار مرزی می باشد. در فصل چهارم معادله با مشتقات جزئی برینکمن-فرچیم را با استفاده از طرح حافظ گروه به کمک متغیر ساختگی اضافه شده به مسئله حل کرده ایم و جواب های معادله را با خطای مانده ی خوبی پیدا کرده ایم. در فصل پنجم برای در امان ماندن از برخی مشکلات مربوط به گسسته سازی های تفاضلات متناهی، برای اولین بار طرح حافظ گروه را با توابع پایه شعاعی به کار برده ایم و معادله کلی بنجامین-بنا-ماهنی-برگرز را با استفاده از این روش حل کرده ایم. در نهایت در فصل ششم با استفاده از بسط مگنوس طرح های حافظ از مرتبه های مختلفی را معرفی کرده ایم که قابلیت انطباق طول گام را نیز دارا می باشند. همچنین زمانی که این طرح ها را بر روی سیستم دینامیکی افزوده به کار می بریم، طرح های حافظ گروه جدید از مراتب بالاتر از روش لی یو بدست می آید.

فهرست مقالات مستخرج از رساله به شرح زیر است:

1. S. Abbasbandy, R.A. Van Gorder, M. Hajiketabi, Mesrizadeh, Existence and numerical solution of periodic traveling wave solutions to the Casimir equation for the Ito system, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 27 (2015) 254-262.
2. S. Abbasbandy, R.A. Van Gorder, M. Hajiketabi, The Lie-group shooting method for radial symmetric solutions of the Yamabe equation, CMES-Computer Modeling in Engineering and Sciences 104 (2015) 329-351.
3. M. Hajiketabi, S. Abbasbandy, F. Casas, The Lie-group method based on radial basis functions for solving nonlinear high dimensional generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation in arbitrary domains, Applied Mathematics and Computation 321 (2018) 223-243.
4. M. Hajiketabi, S. Abbasbandy, The combination of meshless method based on radial basis functions with a geometric numerical integration method for solving partial differential equations: Application to the heat equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, Engineering Analysis with Boundary Elements 87 (2018) 36-46.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه ی مورد نیاز برای فصل های بعدی را ارائه خواهیم نمود.

۱.۱ منیفلد

تعریف ۱.۱.۱. منیفلد m -بعدی مجموعه ای مانند M است همراه با خانواده ای از زیرمجموعه هایی مانند $U_\alpha \subset M$ بنام نمودارهای مختص^۱، و توابع یک به یکی مانند $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ بنام نگاشت های مختص موضعی^۲، به روی زیر مجموعه های باز همبند $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ ، که در شرایط زیر صدق می کند:

۱. نمودارهای مختص M را بپوشانند: $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$.

۲. روی اشتراک هر جفت از نمودارهای مختصه $U_\alpha \cap U_\beta$ ، نگاشت ترکیبی

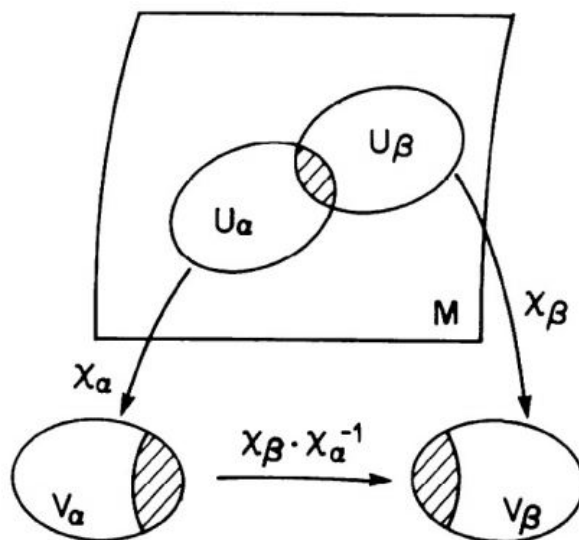
$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

یک تابع بی نهایت بار مشتق پذیر باشد.

۳. اگر $x \in U_\alpha$ و $\tilde{x} \in U_\beta$ نقاط جدا از هم باشند، آنگاه زیرمجموعه های باز $W \subset V_\alpha$ و $\tilde{W} \subset V_\beta$ وجود دارند با $\chi_\alpha(x) \in W$ و $\chi_\beta(\tilde{x}) \in \tilde{W}$ به طوری که در رابطه $\chi_\alpha^{-1}(W) \cap \chi_\beta^{-1}(\tilde{W}) = \emptyset$ صدق می کنند.

^۱Coordinate charts

^۲Local coordinate maps



شکل ۱: نمودارهای مختص روی منیفلد.

نمودارهای مختص $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ برای منیفلد M یک ساختار توپولوژیکی القا می‌کنند. عمدتاً برای هر زیر مجموعه باز $W \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ نیاز داریم که $\chi_\alpha^{-1}(W)$ زیر مجموعه بازی از M باشد. این مجموعه‌ها پایه‌ای برای فضای توپولوژیکی روی M محسوب می‌شوند. بنابراین $U \subset M$ یک مجموعه باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ یک همسایگی از x وجود داشته باشد که شامل U باشد، بنابراین $x \in \chi_\alpha^{-1}(W) \subset U$ جایی که $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ یک نمودار مختص شامل x است و W زیر مجموعه‌ی بازی از V_α است.

سومین نیاز اساسی در تعریف منیفلد، اصل موضوع جداسازی هاسدورف^۳ است: اگر $x \neq \tilde{x}$ نقاطی در M باشند آن‌گاه مجموعه‌های باز U شامل x و $\tilde{U}$ شامل $\tilde{x}$ وجود دارند به طوری که $U \cap \tilde{U} = \emptyset$.

مثال ۲.۱.۱. ساده‌ترین منیفلد m -بعدی فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ است و تنها یک نمودار مختص $U = \mathbb{R}^m$ با نگاشت مختص موضعی داده شده به وسیله $\chi = I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ وجود دارد. در حالت کلی‌تر، هر زیر مجموعه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^m$ یک منیفلد m -بعدی با یک نمودار مختص داده شده بوسیله U خود و نگاشت همانی به عنوان نگاشت مختص موضعی، می‌باشد.

۱.۱.۱ نگاشت‌های میان منیفلد‌ها

اگر M و N منیفلد‌های همواری باشند، نگاشت $F : M \rightarrow N$ هموار گفته می‌شود اگر برای هر نمودار مختص $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی M و هر نمودار $\tilde{\chi}_\beta : \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N ، نگاشت ترکیبی $\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک نگاشت هموار باشد. به عبارت دیگر، یک نگاشت هموار، به فرم $y = F(x)$ است که در آن F یک تابع هموار روی زیر مجموعه باز داده شده مختصات موضعی x روی M و y روی N است.

^۳Hausdorff

۲.۱ گروه لی

ابتدا تعریفی از گروه مجرد را ارائه می‌کنیم:

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه G همراه با عمل آن که معمولاً ضرب ($\cdot$) نامیده می‌شود یک گروه است هر گاه برای هر دو عضو g و h از G حاصل $g.h$ نیز عضوی از G باشد و ۳ شرط زیر نیز برقرار باشد:

۱. شرکت پذیری: اگر g, h و k عضو G باشند آن گاه

$$g.(h.k) = (g.h).k.$$

۲. عضو همانی: عضوی مانند e در G وجود داشته باشد به طوری که برای هر $g \in G$ داشته باشیم

$$e.g = g = g.e.$$

۳. عضو معکوس: برای هر عضو $g \in G$ یک عضو معکوس g^{-1} وجود داشته باشد به طوری که

$$g.g^{-1} = e = g^{-1}.g.$$

اگر علاوه بر سه شرط فوق برای هر $g, h \in G$ داشته باشیم $g.h = h.g$ ، آن گاه گروه را یک گروه آبدی می‌نامیم. اگر تعداد اعضای گروه G متناهی باشد G را گروه متناهی می‌نامیم، در غیر این صورت آن را یک گروه نامتناهی می‌نامیم. اگر G یک گروه متناهی باشد تعداد اعضای آن را مرتبه یا بعد گروه می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. یک گروه لی، مجموعه‌ای است مانند G که در درجه‌ی اول منیفلد است و همچنین خاصیت گروه را هم دارا می‌باشد.

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید E نمایشگر یک فضای برداری حقیقی و یا مختلط n -بعدی باشد. در این صورت E گروه جمعی است و بسته به اینکه میدان زمینه‌ی E مجموعه‌ی اعداد حقیقی باشد یا میدان اعداد مختلط، یک گروه لی n و یا $2n$ -بعدی می‌باشد. در اینجا یک نمودار مختص موضعی $U = E$ با نگاشت مختص موضعی داده شده به وسیله‌ی $\chi = I : E \rightarrow E$ وجود دارد. بنابراین E یک منیفلد است که خاصیت گروه را نیز دارا می‌باشد. در حالتی که E مختلط باشد یک فضای برداری حقیقی n -بعدی به گونه‌ای می‌توان یافت که E عبارت از مجموع مستقیم F و iF باشد که در اینجا i ریشه‌ی دوم -1 می‌باشد. نگاشت مختص مطرح شده در اینجا $J : F \oplus F \rightarrow E$ با ضابطه‌ی $J(u, v) = u + iv$ است.

مثال ۴.۲.۱. مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ وارون پذیر حقیقی یا مختلط یک گروه لی تشکیل می‌دهند که با نماد $GL(n, \mathbb{R})$ یا $GL(n, \mathbb{C})$ نمایش داده می‌شوند. زیر گروه خاصی از $GL(n)$ ، ماتریس‌های $n \times n$ وارون پذیر با دترمینان برابر با یک می‌باشند که این گروه لی را با $SL(n)$ نمایش می‌دهند. همچنین زیر گروه خاصی از $SL(n)$ که متریک g را ثابت نگه می‌دارند، تشکیل گروه لی می‌دهند که با نماد $SO(n)$ نشان داده می‌شوند. یعنی $M \in SO(n)$ اگر $\det M = 1$ و $M^t g M = g$

تعریف ۵.۲.۱. جبر لی g ، یک فضای برداری بر میدان F است که به یک حاصلضرب $g \times g \rightarrow [.,.]$ به نام براکت لی مجهز است که به ازای هر $a, b \in F$ و $x, y, z \in g$ در خواص زیر صدق می‌کند:

$$1. \text{ دوخطی: } [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y], \quad [ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$$

$$2. \text{ پاد تقارنی: } [x, y] = -[y, x]$$

$$3. \text{ اتحاد ژاکوبی: } [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

مثال ۶.۲.۱. مجموعه‌ای از ماتریس‌های $n \times n$ که تحت جمع برداری، ضرب اسکالر و جابه‌جایی بسته باشند یک جبر لی ماتریسی می‌سازند. ویژگی‌های پادتقارنی و تساوی ژاکوبی توسط ضرب ماتریسی برآورده می‌شوند.

۳.۱ برخی از ویژگی‌های گروه لورنتزی و جبر لی آن

ماتریس A که عضوی از جبر لی می‌باشد، در ویژگی

$$(1.1) \quad Ag + gA^t = 0 \quad \text{یا} \quad A^t g + gA = 0 \quad (\text{ویژگی ۱})$$

صدق می‌کند. با ضرب معادله‌ی اول از هر دو طرف در g و استفاده از این نکته که $g^2 = I_{n+1}$ ، معادله‌ی دوم نتیجه می‌شود. این معادله‌ها به این معناست که A یا (A^t) یک عضو از جبر لی گروه لورنتزی اورتوکرونوس^۴ می‌باشد.

برای هر G عضو گروه لورنتزی اورتوکرونوس، ویژگی‌های زیر برقرار است:

$$(2.1) \quad GgG^t = g \quad \text{یا} \quad G^t gG = g, \quad (\text{ویژگی ۲})$$

$$(3.1) \quad \det G = 1, \quad (\text{ویژگی ۳})$$

$$(4.1) \quad G_0^0 \geq 1. \quad (\text{ویژگی ۴})$$

که $G_0^0 = 1$ ، $G_0^0 = 1$ -امین عضو از G است. برای اثبات معادله‌ی دوم (۲.۱)، توجه کنید که $g^2 = I_{n+1}$ و $g^t = g$ ، و با ضرب معادله‌ی اول (۲.۱) از سمت چپ در g بدست می‌آید:

$$(Gg)^t gG = I_{n+1}.$$

این معادله نشان می‌دهد که $(Gg)^t$ معکوس gG است؛ بنابراین

$$gG(Gg)^t = I_{n+1}.$$

اکنون با ضرب معادله‌ی بالا از سمت چپ در g و استفاده دوباره از $g^2 = I_{n+1}$ و $g^t = g$ ، ثابت می‌شود $GgG^t = g$.

اعضای جبر لی و گروه لورنتزی اورتوکرونوس، به ترتیب با نمادهای $so(n, 1)$ و $SO_0(n, 1)$ نشان داده

^۴Orthochronous Lorentz group

می‌شوند، که n یک عدد صحیح مثبت از بعد سیستم است. در ادامه، ویژگی‌های زیر ثابت می‌شوند:

(ویژگی ۵): اگر $G \in SO_0(n, 1)$ آنگاه $G^{-1} = gG^t g$.

(ویژگی ۶): $MgM^t = NgN^t$ اگر و تنها اگر $M^{-1}N \in SO_0(n, 1)$.

(ویژگی ۷): اگر $A \in so(n, 1)$ آنگاه $\exp(tA) \in SO_0(n, 1)$.

(ویژگی ۸): اگر $A \in so(n, 1)$ و $\det(I_{n+1} + A) \neq 0$ آنگاه $Cay(A) := (I_{n+1} - A)^{-1}(I_{n+1} + A) \in SO_0(n, 1)$.

(ویژگی ۹): اگر $A \in so(n, 1)$ آنگاه $(A^{2m})^t g = gA^{2m}$.

(ویژگی ۱۰): اگر $A \in so(n, 1)$ آنگاه $(A^{2m+1})^t g = -gA^{2m+1}$.

(ویژگی ۱۱): اگر $f_e(x)$ یک چند جمله‌ای زوج باشد و $A \in so(n, 1)$ آنگاه $f_e(A^t)g = gf_e(A)$.

(ویژگی ۱۲): اگر $f_o(x)$ یک چند جمله‌ای فرد باشد و $A \in so(n, 1)$ آنگاه $f_o(A^t)g = -gf_o(A)$.

(ویژگی ۱۳): اگر $A \in so(n, 1)$ و $G \in SO_0(n, 1)$ آنگاه $G^{-1}AG := A' \in so(n, 1)$.

برهان. (ویژگی ۵): با توجه به اینکه $g^{-1} = g$ ، با گرفتن معکوس از دو طرف معادله (۲.۱) این ویژگی ثابت می‌شود.

(ویژگی ۶): با قرار دادن $M^{-1}N$ به جای G در معادله ی دوم (۲.۱)، این ویژگی بدست می‌آید.

(ویژگی ۷): این ویژگی واضح است.

(ویژگی ۸): با قرار دادن $(I_{n+1} - A)^{-1}(I_{n+1} + A)$ به جای G در معادله ی دوم (۲.۱) بدست می‌آید:

$$(I_{n+1} + A)g(I_{n+1} + A^t) = (I_{n+1} - A)g(I_{n+1} - A^t).$$

با ساده کردن و حذف g و AgA^t از دو طرف معادله ی بالا و استفاده از معادله ی دوم (۱.۱)، درستی معادله ی بالا ثابت شده و در نتیجه ویژگی (۸) ثابت می‌شود.

(ویژگی ۹): برای $m = 1$ بدست می‌آید:

$$(A^2)^t g = gA^2.$$

با ضرب معادله ی اول (۱.۱) از سمت چپ در A^t و استفاده دوباره از معادله ی اول (۱.۱) معادله

ی بالا ثابت می‌شود. فرض کنید که ویژگی ۹ برای $m = k$ برقرار باشد، یعنی،

$$(\mathbf{A}^{2k})^t \mathbf{g} = \mathbf{g} \mathbf{A}^{2k}.$$

با ضرب دو طرف معادله ی بالا از سمت چپ در $\mathbf{A}^t$ و استفاده از معادله ی اول (۱.۱) بدست می‌آید:

$$(\mathbf{A}^{2k+1})^t \mathbf{g} = -\mathbf{g} \mathbf{A}^{2k+1}.$$

با ضرب دوباره ی معادله ی بالا از سمت چپ در $\mathbf{A}^t$ و استفاده از معادله ی اول (۱.۱) بدست می‌آید:

$$(\mathbf{A}^{2k+2})^t \mathbf{g} = \mathbf{g} \mathbf{A}^{2k+2},$$

بنابراین ویژگی ۹ برای $m = k + 1$ برقرار است. در نتیجه با استفاده از استقرا ویژگی ۹ ثابت می‌شود.

(ویژگی ۱۰): این ویژگی مشابه ویژگی ۹ ثابت می‌شود.

(ویژگی ۱۱): هر جمله از تابع چند جمله ای $f_e(\mathbf{A})$ در ویژگی ۹ صدق می‌کند؛ در نتیجه مجموع همه ی جملات $f_e(\mathbf{A})$ نیز در این معادله صدق می‌کند. بنابراین ویژگی ۱۱ برقرار است.

(ویژگی ۱۲): به طور مشابه، هر جمله از تابع چند جمله ای $f_o(\mathbf{A})$ در معادله ی ویژگی ۱۰ صدق می‌کند؛ در نتیجه مجموع همه ی جملات $f_o(\mathbf{A})$ نیز در این معادله صدق می‌کند. بنابراین ویژگی ۱۲ برقرار است.

(ویژگی ۱۳): با ضرب معادله های اول (۱.۱) و (۲.۱) از سمت راست در $\mathbf{g}$ و استفاده از این نکته که $\mathbf{g}^2 = \mathbf{I}_{n+1}$ ، به ترتیب به دست می‌آید:

$$\mathbf{g} \mathbf{A} \mathbf{g} = -\mathbf{A}^t,$$

$$\mathbf{g} \mathbf{G} \mathbf{g} = \mathbf{G}^{-t}.$$

با استفاده از دو معادله ی بالا خواهیم داشت:

$$\mathbf{g} \mathbf{A}' \mathbf{g} = \mathbf{g} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G} \mathbf{g} = \mathbf{g}^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{g}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{A} \mathbf{g} \mathbf{g} \mathbf{G} \mathbf{g} = -\mathbf{G}^t \mathbf{A}^t \mathbf{G}^{-t} = -(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G})^t = -(\mathbf{A}')^t.$$

سپس، با ضرب معادله ی بالا از سمت راست در $\mathbf{g}$ و با توجه به اینکه $\mathbf{g}^2 = \mathbf{I}_{n+1}$ ، بدست می‌آید:

$$(\mathbf{A}')^t \mathbf{g} + \mathbf{g} \mathbf{A}' = 0,$$

که به معنای $\mathbf{A}' \in so(n, 1)$ می‌باشد. دو ماتریس $\mathbf{A}'$ و $\mathbf{A}$ با ویژگی $\mathbf{A}' = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{G}$ متشابه لورنتزی گفته می‌شوند. $\square$

توجه شود از آنجایی که $\mathbf{A}^t$ نیز یک عضو از $so(n, 1)$ می‌باشد، ویژگی هایی که برای $\mathbf{A}$ برقرار است برای $\mathbf{A}^t$ نیز برقرار است.

فصل ۲

وجود و شبیه سازی عددی جواب های موج رونده ی متناوب معادله کسمیر از سیستم ایتو

۱.۲ مقدمه

سیستم ایتو^۱ [۱۸] به صورت

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + 3U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (UV), \end{cases} \quad (۱.۲)$$

می باشد. سیستم ایتو (۱.۲) دارای بی نهایت از قوانین بقا می باشد. از لحاظ فیزیکی این سیستم معادله KdV را با یک متغیر اضافه V گسترش می دهد. نویسندگان در مقاله [۱۹] فرمول بندی دو بعدی همیلتونی^۲ را برای این سیستم بدست آورده اند. از این فرمول بندی یک تابع کسمیر^۳ و معادلات کسمیر مربوطه برای سیستم ایتو حاصل می شود. با معرفی یک تابع جریان^۴ برای معادله های کسمیر، تک معادله دیفرانسیل جزئی زیر حاصل می شود:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \pm \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \right]. \quad (۲.۲)$$

در حالی که شاید به اندازه دیگر مدل های فیزیکی، سیستم ایتو و معادله کسمیر مربوط به آن مورد مطالعه قرار نگرفته باشند، می توان برخی از نتایج را در مورد آن ها در مقالات پیدا کرد. مقالات

^۱Ito

^۲Bi-Hamiltonian

^۳Casimir

^۴Stream function

[۲۰، ۲۱] نشان می‌دهند که معادله (۲.۲) دارای انواع جواب‌های تحلیلی و مجانبی دقیق، شامل موج رونده (که در این فصل بر روی آن‌ها تمرکز می‌کنیم) می‌باشد. جواب‌های عددی برای یک معادله کاهش یافته از این معادله (معتبر تحت فرض موج رونده) در مقاله [۲۲] توسط روش طیفی هم مکانی گاوس-ژاکوبی انتقال یافته بدست آمده‌اند.

در این فصل علاقه مند به بررسی مسئله موج رونده برای معادله کسمیر (۲.۲) می‌باشیم. برای این کار و با در نظر گرفتن مقاله [۲۲]، یک جواب به صورت $w(x, t) = \phi(z)$ که $z = x - \beta^{-1/2}t$ متغیر موج و $\beta > 0$ یک ثابت می‌باشد، برای معادله (۲.۲) در نظر می‌گیریم. در این صورت معادله (۲.۲) به معادله دیفرانسیل معمولی

$$\phi'' = \frac{1}{\beta} \phi'^2 [\phi'^2 (\phi' + \epsilon \phi''')]', \quad (3.2)$$

تبدیل می‌شود که علامت پرایم نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر z می‌باشد و $\epsilon = 1$ یا $\epsilon = -1$ بسته به علامت (+ یا -) در (۲.۲) می‌باشد. سپس با معرفی تابع جدید $f(z) = \phi'(z)$ خواهیم داشت:

$$\frac{f'}{f^2} = \frac{1}{\beta} [f^2 (f + \epsilon f'')]'. \quad (4.2)$$

این معادله یک انتگرال اولیه دارد و بدست می‌آوریم:

$$\alpha - \frac{\beta}{f} = f^2 (f + \epsilon f''), \quad (5.2)$$

که در آن α ثابت انتگرال گیری می‌باشد. از آنجایی که $\beta > 0$ ، می‌توان تبدیل $g(z) = \beta^{-1/4} f(z)$ را در نظر گرفت به گونه‌ای که از معادله (۵.۲) (بعد از کمی ساده سازی) معادله زیر را بدست می‌آوریم:

$$g'' = \epsilon \left(\frac{a}{g^2} - \frac{1}{g^3} - g \right), \quad (6.2)$$

که $a = \alpha \beta^{-3/4}$. بنابراین با توجه به انتخاب علامت ϵ ، یک خانواده پارامتری از جواب‌های وابسته به پارامتر a حاصل می‌شود. واضح است که نقش β به این صورت است که اگر β افزایش پیدا کند، سرعت موج نیز افزایش پیدا خواهد کرد در حالی که نوسان موج کاهش می‌یابد. بنابراین، در مدل حاضر، موج‌های با نوسان کوچکتر قادر خواهند بود با سرعت بیشتری نوسان پیدا کنند. به طور عکس، نوسان‌های بزرگتر موج، با سرعت کمتر منتشر می‌شوند.

اگر $\epsilon = -1$ باشد معادله (۶.۲) شبیه $g'' - g = 0$ خطی سازی می‌شود بنابراین انتظار خواهیم داشت که جواب‌های معادله با رفتاری هایپربولیکی بدون کران رشد کنند [۲۰، ۲۱]. در حالی که وقتی $\epsilon = 1$ می‌باشد شبیه $g'' + g = 0$ خطی سازی می‌شود، در نتیجه انتظار داریم که جواب‌ها نوسان گر باشند [۲۱، ۲۲]. با این وجود، زمانی که $\epsilon = 1$ و دامنه کوچک باشد، جمله‌های غیر خطی به شدت غالب هستند و رفتار جواب به صورت خطی سازی غیر قابل پیش بینی است. جواب‌ها زمانی

که $\epsilon = 1$ بیشتر مورد علاقه می باشند، بنابراین مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر خواهیم گرفت:

$$\begin{cases} g'' + g - \frac{a}{g^2} + \frac{1}{g^3} = 0, \\ g(0) = A, \quad g'(0) = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

این مسئله قبلاً در مقاله [۲۲] طراحی و به طور عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. از جواب‌هایی که آنجا بدست آمده می توان ملاحظه کرد که روش عددی به کار گرفته شده (روش طیفی هم مکانی گاوس-ژاکوبی انتقال یافته) نسبتاً دقیق می باشد (برای دامنه‌های کران دار). به وضوح، معادله (۷.۲) یک مسئله مقدار اولیه غیر خطی دو پارامتری با پارامترهای $a \in \mathbb{R}$ و $A > 0$ را معرفی می کند. با این وجود، ممکن است این مسئله برای برخی از مقادیر پارامترها دارای جواب نباشد. بنابراین زمانی که این مسئله را به طور عددی حل می کنیم باید مراقب این موضوع باشیم. این حقیقت به ما برای بررسی این مسئله انگیزه داد.

۲.۲ تجزیه و تحلیل جواب مثبت متناوب کران دار از مسئله مقدار اولیه ی (۷.۲)

در این بخش جواب مثبت، کران دار و متناوب را برای معادله (۷.۲) مورد بررسی قرار خواهیم داد. تابع پیوسته $g(z)$ بگونه‌ای که $g(z) > 0$ را در نظر می گیریم. ابتدا معادله (۷.۲) را به صورت

$$\begin{cases} \frac{g''g^3}{g^4 - ag + 1} = -1, \\ g(0) = A, \quad g'(0) = 0, \end{cases} \quad (8.2)$$

می نویسیم. در اینجا باید اشاره کنیم که اگر مخرج معادله (۸.۲) دارای ریشه ی حقیقی نباشد، همواره بزرگتر از صفر خواهد بود. از طرفی از آنجایی که فرض کردیم $g(z) > 0$ بنابراین $g^3(z) > 0$ خواهد بود، در نتیجه با توجه به معادله (۸.۲)، $g''(z) < 0$ نتیجه خواهد شد. این بدان معنا است که تابع $g'(z)$ یک تابع اکیداً نزولی می باشد. با توجه به شرط $g'(0) = 0$ باید داشته باشیم که $g'(z) < 0$ برای همه مقادیر $z > 0$. بنابراین $g(z)$ یک تابع اکیدا نزولی برای $z > 0$ می باشد. از طرف دیگر تقعر تابع $g(z)$ رو به پایین می باشد، در نتیجه تابع $g(z)$ محور افقی را قطع خواهد کرد زمانی که مخرج معادله (۸.۲) دارای ریشه ی حقیقی نباشد، که این برخلاف فرض $g(z) > 0$ است. بنابراین باید محدودیت‌هایی را روی پارامتر a در نظر بگیریم که مطمئن شویم مخرج معادله (۸.۲) ریشه حقیقی دارد.

به وضوح باید $a \neq 0$ ، زیرا اگر $a = 0$ باشد مخرج معادله (۸.۲) هیچ ریشه حقیقی ندارد. اکنون با توجه به مخرج معادله (۸.۲) و اینکه $g(z) > 0$ تابع

$$f(x) = x^4 - ax + 1, \quad x > 0, \quad (9.2)$$

را در نظر می گیریم که برای آن

$$f'(x) = 4x^3 - a, \quad f''(x) = 12x^2, \quad x > 0. \quad (10.2)$$

در ابتدا فرض می‌کنیم $a > 0$ باشد. با توجه به قاعده علامت دکارت [۲۳]، تابع $f(x)$ یا ریشه‌ی حقیقی ندارد یا دارای دو ریشه‌ی حقیقی مثبت می‌باشد. از طرفی $f'\left(\left(\frac{a}{4}\right)^{1/3}\right) = 0$ و $f''(x) \geq 0$ ، بنابراین $x = \left(\frac{a}{4}\right)^{1/3}$ یک مینیمم نسبی برای $f(x)$ می‌باشد. برای اینکه مطمئن شویم که $f(x)$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد کافی است که پارامتر a بگونه‌ای انتخاب شود که $f\left(\left(\frac{a}{4}\right)^{1/3}\right) < 0$. این نامساوی $1.7547653506033232 \simeq 4\left(\frac{1}{3}\right)^{3/4} > a$ بدست می‌آید. بنابراین با انتخاب این قید بر روی پارامتر a معادله (۸.۲) به فرم

$$\frac{g''g^3}{(g^2 + pg + q)(g - a_1)(g - a_2)} = -1, \quad p, q \in \mathbb{R}, \quad a_2 > a_1 > 0, \quad (11.2)$$

تبدیل می‌شود که a_1 و a_2 ثابت‌های حقیقی مثبت غیر صفر می‌باشند. واضح است که حالت اولیه‌ی تابع $(g(0) = A)$ ، دینامیک (۱۱.۲) را به شدت تعیین خواهد کرد. در واقع، مقدار نسبی A در قیاس با a_1 و a_2 تعیین خواهد کرد که آیا جواب‌های متناوبی، مثبت و کران دار $g(z)$ وجود دارد؟ برای تعیین این موضوع تعدادی از حالت‌ها وجود دارند که باید در نظر گرفته شوند:

حالت ۱: در ابتدا حالت $A < a_1$ را در نظر می‌گیریم. پس برای $z \approx 0$ خواهیم داشت

$(g(z) - a_1) < 0$ و $(g(z) - a_2) < 0$. با توجه به معادله (۱۱.۲) و زیرا $g^3(z) > 0$ و $(g^2(z) + pg(z) + q) > 0$ داریم $g''(z) < 0$. بنابراین، تابع $g'(z)$ اکیدا نزولی و با توجه به اینکه $g'(0) = 0$ نتیجه می‌شود $g'(z) < 0$. پس در این حالت $g(z)$ یک تابع اکیدا نزولی است که تقعر آن رو به پایین است. به این ترتیب، $g(z)$ محور افقی z را قطع خواهد کرد که در تناقض با شرط $g(z) > 0$ می‌باشد. بنابراین، مقدار اولیه‌ی A نمی‌تواند کمتر از a_1 باشد.

حالت ۲: اگر $A = a_1$ یا $A = a_2$ ، آنگاه مخرج معادله (۱۱.۲) در نقطه اولیه‌ی $z = 0$ صفر می‌باشد. بعلاوه $g^3(0) > 0$ ، بنابراین $g''(0)$ باید صفر باشد. از معادله (۷.۲) داریم $g'(0) = 0$ ، بنابراین در این مورد $g(z)$ باید یک تابع ثابت باشد. حال از آنجایی که $g(0) = A$ ، باید داشته باشیم $g(z) = A$ که $A = a_1$ یا $A = a_2$. بنابراین، اگر مقدار اولیه A برابر با یکی از دو ریشه‌ی حقیقی مخرج معادله (۱۱.۲) باشد تابع جواب $g(z)$ یک تابع ثابت، برابر با مقدار اولیه‌ی A می‌باشد.

حالت ۳: اگر $A > a_2$ ، خواهیم داشت $(g(z) - a_1) > 0$ و $(g(z) - a_2) > 0$ برای $z \approx 0$. دوباره با توجه به معادله (۱۱.۲) و چون $g^3(z) > 0$ و $(g^2(z) + pg(z) + q) > 0$ داریم $g''(z) < 0$ برای مقادیر کوچک z . این بدان معنا است که تابع $g'(z)$ یک تابع اکیدا نزولی است و از آنجایی که $g'(0) = 0$ باید $g'(z) < 0$. قبل از رسیدن به خط a_2 تابع $g(z)$ یک تابع اکیدا نزولی است که تقعر آن رو به پایین است. در نتیجه $g(z)$ در نهایت خط a_2 را قطع کرده و به ناحیه‌ی بین خطوط a_1 و a_2 وارد خواهد شد.

فرض کنیم $g(z)$ خط a_2 را در نقطه $z = z^*$ قطع کند. پس مخرج معادله (۱۱.۲) در نقطه z^* صفر خواهد شد و با توجه به $g^3(z^*) > 0$ و $(g^2(z^*) + pg(z^*) + q) > 0$ ، باید داشته باشیم $g''(z^*) = 0$. از طرف دیگر، زمانی که تابع $g(z)$ در محوطه بین خطوط a_1 و a_2 می‌باشد داریم $a_1 < g(z^* + \delta) < a_2$ (برای مقادیر کوچک $\delta > 0$). بنابراین $(g(z^* + \delta) - a_2) < 0$ و $(g(z^* + \delta) - a_1) > 0$. پس با توجه

به معادله (۱۱.۲) و چون $g^3(z^* + \delta) > 0$ و $(g^2(z^* + \delta) + pg(z^* + \delta) + q) > 0$ ، نتیجه می‌شود که $g''(z^* + \delta) > 0$. بنابراین نقطه z^* که در آن تابع $g(z)$ خط a_2 را قطع می‌کند یک نقطه عطف تابع $g(z)$ می‌باشد.

با این وجود، یک سوال که در این زمان مطرح می‌شود این است که آیا تابع $g(z)$ خط a_1 را قطع خواهد کرد و از ناحیه ی بین خطوط a_1 و a_2 خارج خواهد شد؟ جواب منفی است. به محض اینکه تابع $g(z)$ خط a_1 را قطع کند و محدوده بین خطوط a_1 و a_2 را ترک کند، خواهیم داشت $(g(z) - a_1) < 0$ و $(g(z) - a_2) < 0$. بنابراین، با توجه به معادله (۱۱.۲) و $g^3(z) > 0$ و $(g^2(z) + pg(z) + q) > 0$ نتیجه می‌گیریم که $g''(z) < 0$. این موضوع بدان معنا است که تابع $g(z)$ بیرون محدوده بین خطوط a_1 و a_2 تغییر تقعر می‌دهد و در نتیجه محور افقی z را قطع خواهد کرد که در تناقض با شرط $g(z) > 0$ می‌باشد.

حال درون ناحیه بین خطوط a_1 و a_2 تابع $g'(z)$ یک تابع اکیدا صعودی می‌باشد زیرا در این ناحیه $g''(z) > 0$. قبل از اینکه $g(z)$ وارد این محدوده شود داریم $g'(z) < 0$ ، بنابراین در نقطه ای درون ناحیه بین خطوط باید $g'(z)$ صفر شود (با توجه به پیوستگی تابع $g(z)$). از طرف دیگر $g''(z) > 0$ بنابراین این نقطه مینیمم نسبی برای تابع $g(z)$ می‌باشد. از آنجایی که $g''(z) > 0$ تابع $g(z)$ به سمت خط a_2 حرکت کرده، خط a_2 را قطع می‌کند و از ناحیه ی بین خطوط خارج می‌شود.

همانند قبل، نقطه z که در آن تابع $g(z)$ خط a_2 را قطع می‌کند یک نقطه عطف است. بعد از ترک محدوده بین خطوط، $g(z)$ در $(g(z) - a_1) > 0$ و $(g(z) - a_2) > 0$ صدق می‌کند. دوباره با توجه به معادله (۱۱.۲)، $g^3(z) > 0$ و $(g^2(z) + pg(z) + q) > 0$ ، نتیجه می‌گیریم که $g''(z) < 0$ و در نتیجه $g'(z)$ اکیدا نزولی در ناحیه بالای خط a_2 می‌باشد. اما در ناحیه بین خطوط a_1 و a_2 و در محل تقاطع تابع $g(z)$ با خط a_2 ، تابع $g'(z)$ مثبت می‌باشد. بنابراین، نتیجه می‌شود که در نقطه ای مشخص خارج از محدوده بین خطوط a_1 و a_2 ، $g'(z)$ صفر می‌باشد و زیرا $g''(z) < 0$ این نقطه یک نقطه ی ماکزیمم نسبی برای تابع $g(z)$ می‌باشد. زیرا $g''(z) < 0$ دوباره $g(z)$ خط a_2 را قطع خواهد کرد و دوباره وارد محدوده بین خطوط a_1 و a_2 می‌شود.

آنچه که ما در بالا توصیف کردیم یک تابع نوسانی می‌باشد. مینیمم این تابع بالای خط a_1 قرار خواهد گرفت، در حالی که ماکزیمم آن بالای خط a_2 قرار می‌گیرد.

حالت ۴: اگر $a_1 < A < a_2$ ، در نتیجه $g(0)$ در ناحیه بین خطوط a_1 و a_2 می‌باشد و بنابراین $(g(z) - a_1) > 0$ و $(g(z) - a_2) < 0$. در نتیجه، با توجه به معادله (۱۱.۲) و از آنجایی که $g^3(z) > 0$ و $(g^2(z) + pg(z) + q) > 0$ نتیجه می‌گیریم که $g''(z) > 0$ برای مقادیر کوچک z . این بدان معنا است که $g'(z)$ یک تابع اکیدا صعودی می‌باشد و زیرا در ناحیه بین خطوط $g'(0) = 0$ می‌باشد، باید $g'(z) > 0$ باشد. در نتیجه $g(z)$ یک تابع اکیدا صعودی می‌باشد. بنابراین، بعد از شروع تابع $g(z)$ از نقطه اولیه ی A ، به سوی خط a_2 حرکت کرده و این خط را در نقطه ای مثبت از z قطع می‌کند. در ادامه رفتار نوسانی مشابه با آنچه در حالت قبل توصیف کردیم اتفاق می‌افتد.

۱.۲.۲ یک کران بالا برای پارامتر A

در بخش قبلی یک تابع جواب نوسانی که می‌تواند برای مقادیر $A \geq a_1$ وجود داشته باشد پیدا کردیم. حالا سؤالی که پیش می‌آید این است که کران بالا برای پارامتر A چگونه است به گونه‌ای که هنوز هم برای آن، جواب نوسانی وجود داشته باشد؟ برای جواب دادن به این سوال دو طرف معادله (۷.۲) را در $2g'(z)$ ضرب کرده و بعد از انتگرال‌گیری روی بازه $[0, z]$ و مقداری ساده‌سازی بدست می‌آوریم:

$$\frac{(g')^2 g^2}{g^4 - I(A, a)g^2 + 2ag - 1} = -1, \quad \text{که} \quad I(A, a) = A^2 - \frac{1}{A^2} + 2\frac{a}{A}. \quad (12.2)$$

مقدار اولیه A یک ریشه از مخرج معادله (۱۲.۲) می‌باشد. فرض کنید که A_1, A_2 و A_3 دیگر ریشه‌ها هستند، بنابراین معادله (۱۲.۲) می‌تواند به فرم زیر باز نویسی شود:

$$\frac{(g')^2 g^2}{(g - A)(g - A_1)(g - A_2)(g - A_3)} = -1. \quad (13.2)$$

از معادله (۱۳.۲) و با توجه به اینکه $g^2(z) > 0$ ، نتیجه می‌شود که اگر مخرج معادله (۱۳.۲) صفر شود سپس $g'(z)$ نیز صفر می‌شود. بنابراین، در هم‌چنین نقاطی اکسترم‌های محلی نسبت به تابع $g(z)$ وجود دارد. بدون کاستن از کلیت مسئله، فرض می‌کنیم که $A < A_1 < A_2 < A_3$ آنگاه اگر $A < g(z) < A_1$ خواهیم داشت $(g - A)(g - A_1)(g - A_2)(g - A_3) < 0$ ، اما اگر $A_1 < g(z) < A_2$ نتیجه می‌شود $(g - A)(g - A_1)(g - A_2)(g - A_3) > 0$ ، بنابراین با توجه به معادله (۱۳.۲) تابع $g(z)$ نمی‌تواند محدوده بین A و A_1 را ترک کند. با حل معادله $A_1, x^4 - I(A, a)x^2 + 2ax - 1 = 0$ می‌توانیم $a > 4(\frac{1}{3})^{3/4}$ مشخص کنیم. توجه کنید که $a > 4(\frac{1}{3})^{3/4}$ مشخص است. نقاط A و A_1 اکسترم‌های نسبی از تابع $g(z)$ می‌باشند بنابراین برای اینکه A ماکزیمم تابع $g(z)$ باشد، کافی است که داشته باشیم $A > A_1$. بنابراین با پیدا کردن جواب نامساوی‌های $A \geq a_1$ و $A > A_1$ می‌توانیم کران بالا را برای مقدار اولیه A پیدا کنیم.

۲.۲.۲ دوره تناوب جواب نوسانی

یک کلاس از جواب مثبت نوسانی کران دار معادله (۷.۲) نشان داده شد که وجود دارند. این جواب دارای مقادیر ماکزیمال و مینیمال می‌باشد که وابسته به پارامترهای A و a می‌باشد (می‌گوئیم $g_{\min}(A, a) \leq g(z) \leq g_{\max}(A, a)$). با جدا سازی و گرفتن ریشه دوم از مقادیر در (۱۲.۲) بدست می‌آوریم:

$$\frac{g|g'|}{\sqrt{1 - 2ag + I(A, a)g^2 - g^4}} = 1. \quad (14.2)$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف رابطه و توجه به این نکته که به علت تقارن مسئله، نصف تناوب بین $g_{\min}(A, a)$ و $g_{\max}(A, a)$ وجود خواهد داشت $(\tau/2)$ ، که τ نشان دهنده تناوب می‌باشد، خواهیم

داشت:

$$\int_{g_{\min}(A,a)}^{g_{\max}(A,a)} \frac{s}{\sqrt{1-2as+I(A,a)s^2-s^4}} ds = \frac{\tau}{2}. \quad (15.2)$$

بنابراین، یک فرمول برای دوره تابع $g(z)$ بدست آوردیم (البته به شرط آنکه جواب در حالت‌های نوسانی قرار بگیرد) و این تناوب بر حسب پارامترهای مدل A و a از فرمول زیر حساب می‌شود:

$$\tau(A,a) = 2 \int_{g_{\min}(A,a)}^{g_{\max}(A,a)} \frac{s}{\sqrt{1-2as+(A^4-1+2aA)s^2/A^2-s^4}} ds. \quad (16.2)$$

۳.۲.۲ خلاصه‌ای از نتایج تحلیلی

نتایج آنالیز بالا در مورد جواب مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی (۷.۲) می‌تواند در قالب قضیه زیر خلاصه شود:

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید که $g(z)$ یک تابع پیوسته و مثبت باشد و همچنین $a > 4(\frac{1}{3})^{3/4}$. اگر a_1 و a_2 دو ریشه‌ی حقیقی مثبت معادله $x^4 - ax + 1 = 0$ باشند ($a_2 > a_1$) باشند و A_1 ریشه‌ی حقیقی مثبت معادله $x^4 - I(A,a)x^2 + 2ax - 1 = 0$ باشد که $I(A,a) = A^2 - \frac{1}{A^2} + 2\frac{a}{A}$ باشد. همچنین اگر $a_1 \leq A < A_1$ ، نتایج زیر را خواهیم داشت:

(۱) اگر $A = a_1$ یا $A = a_2$ ، پس بترتیب $g(z) = a_1$ یا $g(z) = a_2$. این بدان معناست که معادله مقدار اولیه‌ی (۷.۲) دارای یک جواب پیوسته، کران دار، مثبت و متناوبی $g(z)$ است که یک تابع ثابت است.

(۲) اگر $a_1 < A \leq A_1$ ، معادله مقدار اولیه‌ی (۷.۲) دارای یک جواب پیوسته، کران دار، مثبت و متناوبی $g(z)$ است که یک تابع نوسانی می‌باشد. تابع جواب دارای مقدار ماکزیمال $g_{\max} > a_2$ و مینیمال $a_1 < g_{\min}$ می‌باشد. دوره تناوب تابع جواب $\tau(A,a)$ است که از فرمول (۱۶.۲) محاسبه می‌شود.

نکته: زمانی که $a < 0$ ، آنالیز بالا به طور مشابه می‌تواند انجام گیرد. در این حالت $a_1 < 0$ و $a_2 < 0$ ، در نتیجه باید داشته باشیم $g(z) < 0$.

در ادامه، توجه خود را به حل عددی معادله (۷.۲) و بدست آوردن تابع جواب $g(z)$ معطوف می‌کنیم. برای این کار از روش معروف به طرح حافظ گروه استفاده می‌کنیم و به طور عددی وجود جواب مثبت، کراندار و متناوبی را که در آنالیز بالا اثبات شد، بدست می‌آوریم.

۳.۲ طرح حافظ گروه

لی‌یو اولین بار در مقاله [۱۷] یک تبدیل گروه لی برای سیستم دینامیکی افزوده بر روی مخروط طراحی کرد و روشی موسوم به طرح حافظ گروه را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی

غیر خطی ایجاد کرد. برای توضیح روش سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی k -بعدی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}, z), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (17.2)$$

k -بعدی گفته می‌شود زیرا $\mathbf{u}$ یک بردار k -مولفه‌ای می‌باشد. می‌توان معادله (17.2) را به سیستم $(k+1)$ -بعدی افزوده زیر تبدیل کرد:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times k} & \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}, z)}{\|\mathbf{u}\|} \\ \frac{\mathbf{f}^T(\mathbf{u}, z)}{\|\mathbf{u}\|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| \end{bmatrix}. \quad (18.2)$$

در اینجا $\|\mathbf{u}\| > 0$ ، از این رو سیستم بالا خوش تعریف می‌باشد. در غیر این صورت با یک تغییر متغیر مناسب می‌توان این مشکل را حل کرد.

بدیهی است که نخستین سطر در معادله (18.2) همان معادله اصلی (17.2) می‌باشد. افزودن معادله دوم یک ساختار مینکوفسکی از متغیر افزوده $\mathbf{X} = (\mathbf{u}^T, \|\mathbf{u}\|)^T$ را تولید می‌کند که در شرط مخروطی

$$\mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{X} = 0, \quad (19.2)$$

صدق می‌کند که در آن

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k & \mathbf{0}_{k \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times k} & -1 \end{bmatrix}, \quad (20.2)$$

متریک مینکوفسکی، $\mathbf{I}_k$ ماتریس همانی از مرتبه k و نماد T نشان دهنده ی ترانزپوز ماتریسی می‌باشد. بر حسب $(\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\|)$ ، معادله (19.2) به صورت زیر است:

$$\mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{X} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 = 0, \quad (21.2)$$

که (۰) نشان دهنده ی ضرب داخلی اقلیدسی می‌باشد. بنابراین شرط مخروطی یک قید طبیعی است که به طور اتوماتیک بر روی سیستم افزوده ی (18.2) تحمیل می‌شود. در نتیجه سیستم $(k+1)$ -بعدی افزوده زیر را:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A} \mathbf{X}, \quad (22.2)$$

همراه با قید (19.2)، خواهیم داشت که ماتریس

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k \times k} & \frac{\mathbf{f}(\mathbf{u}, z)}{\|\mathbf{u}\|} \\ \frac{\mathbf{f}^T(\mathbf{u}, z)}{\|\mathbf{u}\|} & 0 \end{bmatrix}, \quad (23.2)$$

که در رابطه

$$\mathbf{A}^T \mathbf{G} + \mathbf{G} \mathbf{A} = 0, \quad (24.2)$$

صدق می‌کند یک عضو از جبر لی $\mathfrak{so}(k, 1)$ از گروه لورنتزی اورتوکرونوس $\mathrm{SO}_0(k, 1)$ می‌باشد. اگر چه در اینجا بعد سیستم جدید به اندازه یک واحد افزوده شد، اما لی یو در مقاله [۱۷] از طرح‌های حافظ گروه به صورت زیر برای حل این سیستم افزوده استفاده کرد تا تضمین کند شرط مخروطی حفظ می‌شود:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{H}(n) \mathbf{X}_n, \quad (25.2)$$

که $\mathbf{X}_n$ نشان دهنده ی مقدار عددی $\mathbf{X}$ در نقطه گسسته z_n می‌باشد و $\mathbf{H}(n) \in \mathrm{SO}_0(k, 1)$ مقدار گروه ماتریسی در z_n می‌باشد. بنابراین $\mathbf{H}$ در شرایط

$$\mathbf{H}^T \mathbf{G} \mathbf{H} = \mathbf{G}, \quad (26.2)$$

$$\det(\mathbf{H}) = 1, \quad (27.2)$$

$$H_0^0 > 0, \quad (28.2)$$

صدق می‌کند که $H_0^0 > 0$ ، H_0^0 -امین عضو از $\mathbf{H}$ می‌باشد. لی یو ابتدا در مقاله [۱۷] با استفاده از تبدیل کیلی^۵ و تقریب‌های پاده ی^۶ تابع $\exp[\Delta z \mathbf{A}(n)]$ ، توانست شکل‌های مختلفی برای ماتریس $\mathbf{H}$ ارائه دهد و با استفاده از ویژگی‌های گروه لورنتزی و جبر لی آن که در فصل قبل اشاره شد، ثابت کرد $\mathbf{H}$ در شرایط بالا نیز صدق می‌کند. او سپس در مقاله‌های بعدی فرم بسته ی این تابع را به صورت زیر بدست آورد:

$$\exp[\Delta z \mathbf{A}(n)] = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k + \frac{(\alpha_n - 1)}{\|\mathbf{f}_n\|^2} \mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T & \frac{\beta_n \mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|} \\ \frac{\beta_n \mathbf{f}_n^T}{\|\mathbf{f}_n\|} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad (29.2)$$

که

$$\alpha_n = \cosh \left(\frac{\Delta z \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{u}_n\|} \right), \quad (30.2)$$

$$\beta_n = \sinh \left(\frac{\Delta z \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{u}_n\|} \right). \quad (31.2)$$

^۵Cayley

^۶Pade

برای راحتی در نوشتن از $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(\mathbf{u}_n, z_n)$ استفاده کرده ایم. با قرار دادن $\exp[\Delta z \mathbf{A}(n)]$ به جای $\mathbf{H}(n)$ در معادله (۲۵.۲) و در نظر گرفتن سطر اول آن خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{(\alpha_n - 1)\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{u}_n + \beta_n \|\mathbf{u}_n\| \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{f}_n\|^2} \mathbf{f}_n = \mathbf{u}_n + \eta_n \mathbf{f}_n. \quad (۳۲.۲)$$

بنابراین این طرح، ویژگی‌های گروه را برای همه‌ی مقادیر $\Delta z > 0$ حفظ می‌کند و در نتیجه با حفظ شرط مخروطی در هر مرحله، سازگاری روش تضمین می‌شود. پس می‌توان طرح‌های حافظ گروه را در رده روش‌های انتگرال‌گیری هندسی قرار داد. همچنین ثابت می‌شود این روش برخلاف روش‌های انتگرال‌گیری استاندارد از معایب مربوط به وجود جواب‌های جعلی^۷ و نقاط ثابت خیالی^۸ در امان است، بنابراین رفتار دراز مدت سیستم اصلی به وسیله این طرح‌ها به خوبی توصیف می‌شود. [۱۷]

۴.۲ حل مسئله مقدار اولیه‌ی کسمیر با استفاده از طرح حافظ گروه

در ابتدا توابع جدید زیر را معرفی می‌کنیم:

$$u_1(z) = g(z), \quad u_2(z) = g'(z), \quad (۳۳.۲)$$

که معادله (۷.۲) را به دستگاه زیر تبدیل می‌کند:

$$\begin{cases} u_1'(z) = u_2(z), \\ u_2'(z) = -u_1(z) + \frac{a}{u_1^2(z)} - \frac{1}{u_1^3(z)}, \\ u_1(0) = A, \quad u_2(0) = 0. \end{cases} \quad (۳۴.۲)$$

سپس دستگاه (۳۴.۲) را در نمایش برداری

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}, z), \quad (۳۵.۲)$$

می‌نویسیم که

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(z) \\ u_2(z) \end{bmatrix}, \quad (۳۶.۲)$$

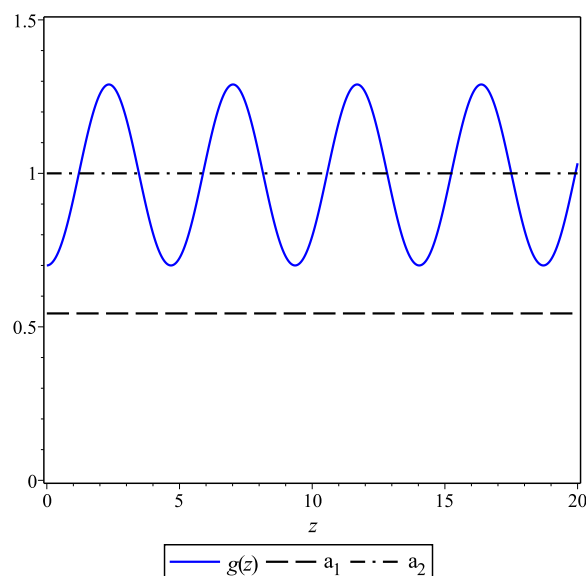
و

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} u_2(z) \\ -u_1(z) + \frac{a}{u_1^2(z)} - \frac{1}{u_1^3(z)} \end{bmatrix}. \quad (۳۷.۲)$$

اکنون می‌توانیم از طرح حافظ گروه (۳۲.۲) استفاده کنیم و حل عددی سیستم (۷.۲) را بدست آوریم.

^۷Spurious solutions

^۸Ghost fixed points

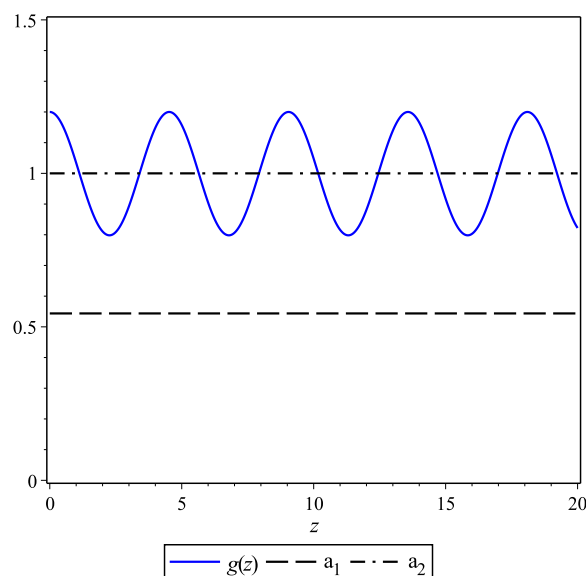


شکل ۱.۲: رسم تابع جواب $g(z)$ به ازای $a = 2$ و $A = 0.7$.

با توجه به آنالیز انجام شده باید $a \geq 1.7547653506033232$ ، بنابراین این پارامتر را به صورت $a = 2$ در نظر می‌گیریم. سپس از حل معادله $x^4 - 2x + 1 = 0$ ، پارامترهای $a_1 \approx 0.5436$ و $a_2 = 1$ را بدست می‌آوریم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که پارامتر A مقداری بین a_1 و a_2 داشته باشد. برای مثال قرار می‌دهیم $A = 0.7$. سپس، مسئله مقدار اولیه ی (۷.۲) را با استفاده از طرح حافظ گروه (۳۲.۲) و با طول گام $\Delta z = 0.0001$ حل می‌کنیم و یک جواب مثبت، کران دار و متناوبی را برای معادله بدست می‌آوریم. در شکل ۱.۲ این جواب را نسبت به خطوط a_1 و a_2 رسم کرده ایم. می‌توانیم مشاهده کنیم که جواب مسئله بالای خط a_1 باقی می‌ماند در حالی که بی نهایت بار خط a_2 را قطع می‌کند.

برای بدست آوردن کران بالا برای A زمانی که $a = 2$ می‌باشد یادآوری می‌کنیم با توجه به تحلیلی که انجام دادیم باید معادله $x^4 - I(A, a)x + 2ax - 1 = 0$ را حل کنیم و ریشه حقیقی مثبت A_1 را بدست آوریم. در نهایت کران بالا به صورت $A < 1.3742717560485989$ حاصل می‌شود. حال فرض می‌کنیم که A مقداری بین $a_2 = 1$ و 1.3742717560485989 را بگیرد برای مثال $A = 1.2$ ، سپس از طرح حافظ گروه استفاده کرده و جوابی که به صورت تحلیلی در بخش قبل پیش بینی کردیم را بدست می‌آوریم. این جواب به ازای طول گام $\Delta z = 0.0001$ در شکل شماره ۲.۲ رسم شده است.

در ادامه مقدار $A = 1.3741$ را برای پارامتر A انتخاب می‌کنیم که نزدیک به کران بالای این پارامتر می‌باشد و دوباره مسئله مقدار اولیه ی (۷.۲) را با استفاده از طرح حافظ گروه و با طول گام $\Delta z = 0.00001$ حل می‌کنیم. شکل ۳.۲ تابع $g(z)$ را در این حالت نشان می‌دهد. توجه کنید که مینیمم تابع $g(z)$ در این حالت به صورت عددی برابر با $g_{\min} = 0.5485410188276376$ می‌باشد در حالی که $a_1 = 0.5436890126920761$ است، یعنی همچنان که گفتیم تابع جواب $g(z)$ خط a_1 را

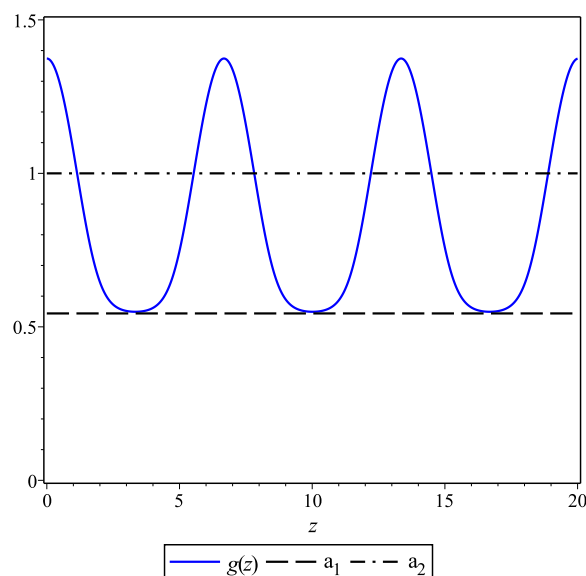


شکل ۲.۲: رسم تابع جواب $g(z)$ زمانی که $a = 2$ و $A = 1.2$.

قطع نخواهد کرد. همان طور که از شکل ۳.۲ مشاهده می‌کنیم، همزمان با اینکه مقدار مینیمم تابع جواب به مقدار a_1 نزدیک می‌شود، ساختار یکنواخت جواب متناوبی به صورت یک منطقه پهن تر نزدیک کران پایین و یک منطقه باریک تر نزدیک کران بالا، تغییر شکل می‌دهد. این مطلب با توجه به این حقیقت که a_1 یک نقطه تعادل پایدار می‌باشد، قابل توجیه است و از این رو مسیر سیستم دینامیکی به سمت این نقطه است (a_1 یک نقطه جذاب است). در مقابل a_2 یک نقطه تعادل غیر پایدار می‌باشد و به همین دلیل جواب‌ها در همه‌ی حالت‌ها از این مقدار تعادل عقب نشینی می‌کنند (به همین دلیل است که مسیرهای جواب از خط مربوط به این مقدار عبور می‌کنند).

۵.۲ نتیجه‌گیری

در این فصل یک مسئله مقدار اولیه‌ی غیر خطی مرتبه دوم که در مطالعه جواب موج رونده برای معادله کسمیر از سیستم ایتو (یک گسترش دو متغیره از مدل کلاسیک KdV) بدست می‌آید را مورد بررسی قرار دادیم. شرایطی را بر روی پارامترهای مسئله بدست آوردیم که این شرایط وجود جواب موج رونده مثبت، کران دار و متناوبی را تضمین می‌کند. در حالی که ما جواب $g(z)$ را بدست آوردیم این جواب می‌تواند از طریق یک انتگرال گیری ساده به جواب $\phi(z)$ برای معادله کسمیر تبدیل شود ([۲۲] را ملاحظه کنید). با انجام این انتگرال گیری، این جواب $\phi(z)$ در طول یک روند مثبت با یک نوع از رفتار پلکانی هموار، نوسان گر خواهد بود. همچنین تابع $\phi(z)$ می‌تواند به یک جواب مستقیم برای سیستم ایتو و در نتیجه جواب موج رونده برای توابع $U(x, t)$ و $V(x, t)$ برگردانده شود. در کنار نتایج تحلیلی وجود جواب، نتایج تحلیلی را نیز به طور عددی شبیه سازی کردیم. برای بدست آوردن جواب عددی از روش طرح حافظ گروه استفاده کردیم. نتایج عددی این اجازه را به



شکل ۳.۲: رسم تابع جواب $g(z)$ زمانی که $a = 2$ و $A = 1.3741$.

ما می‌دهد تا برخی از رفتارهای اورژانسی جوابی را که در بخش تحلیلی به طور دقیق آنالیز کردیم، مشاهده کنیم. ما مشاهده کردیم که جواب‌های با نوسان‌های کوچک، متقارن هستند در حالی که جواب‌های با نوسان‌های به اندازه کافی بزرگ برای نزدیک شدن به کران پایین نظری، تقارن عمودی کمتری را نشان می‌دهند. این موضوع بدین معنی است که کران پایین اساساً یک نقطه جذاب در حالت فضایی می‌باشد. از آنجایی که مسئله مقدار اولیه‌ی در نظر گرفته شده در اینجا دارای غیر خطی‌ای تا حدودی عجیب و غریب می‌باشد (که در واقع زمانی که جواب به سمت صفر می‌رود بیشتر می‌شود)، بنابراین طرح حافظ گروه می‌تواند با موفقیت با غیر خطی‌های پیچیده روبرو شود.

فصل ۳

روش پرتابی گروه لی برای حل مسائل مقدار مرزی غیر خطی

۱.۳ مقدمه

مسائل مقدار مرزی نقش اساسی در نظریه و کاربرد معادلات دیفرانسیل بازی می کنند. همچنین برای توصیف بسیاری از پدیده های علوم فیزیک، شیمی، بیولوژی و غیره به کار می روند. یافتن جواب تقریبی برای مسائل مقدار مرزی غیر خطی در علوم مهندسی و فیزیک دارای اهمیت زیادی می باشد. مسائل مقدار مرزی غیر خطی ممکن است جواب نداشته باشند یا دارای یک یا بیشتر از یک جواب باشند [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷]. در مقالات، روش های زیادی برای حل تقریبی مسائل مقدار مرزی غیر خطی ارائه شده است، اما با توجه به وجود جواب های چند گانه برای برخی از این مسائل، روش های ذکر شده معمولاً به یکی از شاخه های جواب همگرا هستند. پیش بینی چند گانگی جواب و همچنین تقریب مناسب همه ی شاخه های جواب مسائل مرزی غیر خطی دارای اهمیت فراوانی می باشد.

هدف ما در این فصل، پیش بینی تعداد جواب ها و محاسبه تقریبی آن ها برای مسائل غیر خطی مرتبه ی دوم دو نقطه ای، با استفاده از روشی موسوم به روش پرتابی گروه لی می باشد. روش پرتابی گروه لی بر پایه ی طرح های حافظ گروه می باشد. لی یو در مقاله [۲۸]، مفهوم طرح حافظ گروه لی یک مرحله ای را با استفاده از ویژگی بسته^۱ بودن گروه لی ارائه کرد و روش پرتابی جدید را روش پرتابی گروه لی نامید. مهمترین مزیت این روش پرتابی نسبت به روش های پرتابی معمول، دامنه تغییرات پارامتر پرتابی می باشد که به طور تحلیلی قابل محاسبه و معمولاً بازه ای کوچک می باشد. بنابراین، می توان به سرعت مقدار مناسب را برای این پارامتر پیدا کرد. در ادامه ابتدا این روش پرتابی را توضیح خواهیم داد و کاربرد آن را برای مسائل غیر خطی مقدار مرزی دو نقطه ای در غالب مثال های عددی خواهیم دید.

^۱Close

۲.۳ طرح حافظ گروه یک مرحله ای

بسیاری از سیستم‌های فیزیکی می‌توانند به صورت زیر نوشته شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}' &= \mathbf{f}(\mathbf{u}, x), \\ u_1(\alpha) &= c, \quad u_2(\beta) = c, \end{aligned} \quad (۱.۳)$$

که

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{bmatrix} u_2 \\ f(x, u_1, u_2) \end{bmatrix}. \quad (۲.۳)$$

در روش پرتابی گروه لی بسیار مهم است که شرایط مرزی غیر یکسان^۲ مسئله را با شرایط مرزی یکسان جایگزین کنیم. همچنان که در فصل قبل دیدیم، می‌توان معادله (۱.۳) را به یک دستگاه افزوده به فرم زیر تبدیل کرد:

$$\mathbf{X}' := \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bullet_{2 \times 2} & \frac{\mathbf{f}(x, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} \\ \frac{\mathbf{f}^T(x, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| \end{bmatrix} := \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (۳.۳)$$

که $\mathbf{A}$ عضوی از جبر لی $so(2, 1)$ است که در رابطه

$$\mathbf{A}^T \mathbf{g} + \mathbf{g} \mathbf{A} = \bullet, \quad (۴.۳)$$

صدق می‌کند که

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \bullet_{2 \times 1} \\ \bullet_{1 \times 2} & -1 \end{bmatrix}, \quad (۵.۳)$$

یک متر مینکوفسکی است. $\mathbf{I}_2$ و T به ترتیب نشان دهنده ماتریس همانی و ترانهاد می‌باشند. متغیر افزوده $\mathbf{X}$ در شرط مخروطی

$$\mathbf{X}^T \mathbf{g} \mathbf{X} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \|\mathbf{u}\|^2 = 0, \quad (۶.۳)$$

صدق می‌کند. بر این اساس، برای حل سیستم افزوده (۳.۳)، طرح حافظ گروه معرفی شده در [۱۷] به شکل

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{G}(k) \mathbf{X}_k, \quad (۷.۳)$$

^۲Un-equal

می باشد که در آن $\mathbf{X}_k$ نشان دهنده مقدار عددی $\mathbf{X}$ در نقطه گسسته x_k می باشد و $\mathbf{G}(k) \in SO_o(2, 1)$ در رابطه های

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^T \mathbf{g} \mathbf{G} &= \mathbf{g}, \\ \det \mathbf{G} &= 1, \\ G_0^0 &> 0, \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

صدق می کند که G_0^0 ، -00 - امین مولفه ی $\mathbf{G}$ و $SO_o(2, 1)$ گروه لورنتزی سه بعدی است.

۱.۲.۳ روش نقطه میانی تعمیم یافته

با به کار گیری طرح (۷.۳) برای معادله (۳.۳) و با شرط آغازین $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ جواب $\mathbf{X}(x)$ را بوسیله طرح حافظ گروه می توان محاسبه کرد. فرض کنیم طول گام استفاده شده در طرح حافظ گروه $\Delta x = (\beta - \alpha)/k$ باشد. با شروع از شرط افزوده ی آغازین $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{u}^T(\alpha), \|\mathbf{u}(\alpha)\|)^T$ مقدار $\mathbf{X}_f = (\mathbf{u}^T(\beta), \|\mathbf{u}(\beta)\|)^T$ را در نقطه $x = \beta$ محاسبه خواهیم کرد. با به کار گیری گام به گام (۷.۳) به دست می آوریم:

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{G}_k(\Delta x) \mathbf{G}_{k-1}(\Delta x) \cdots \mathbf{G}_1(\Delta x) \mathbf{X}_0. \quad (۹.۳)$$

یادآوری می کنیم که هر $\mathbf{G}_i$ ، $i = 1, 2, \dots, k$ عضوی از گروه لی $SO_o(2, 1)$ و با استفاده از خاصیت بسته بودن گروه های لی $\mathbf{G}_k(\Delta x) \mathbf{G}_{k-1}(\Delta x) \cdots \mathbf{G}_1(\Delta x)$ نیز یک گروه لی خواهد بود که با نماد $\mathbf{G}$ نشان می دهیم. از این رو خواهیم داشت:

$$\mathbf{X}_f = \mathbf{G} \mathbf{X}_0, \quad (۱۰.۳)$$

که یک تبدیل یک مرحله ای از $\mathbf{X}_0$ به $\mathbf{X}_f$ می باشد. در حالی که یک جواب دقیق از $\mathbf{G}$ در دسترس نمی باشد، می توان آن را با استفاده از روش نقطه میانی تعمیم یافته به طور عددی محاسبه کرد که در واقع با استفاده از یک نگاشت نمایی از $\mathbf{A}$ و قرار دادن مقادیر متغیرهای آن بر طبق روش نقطه میانی تعمیم یافته، به دست می آید. در این صورت گروه لی تولید شده به وسیله $\mathbf{A} \in so(2, 1)$ معروف به گروه لورنتزی اورتوکرونوس، به شکل بسته زیر است:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 + \frac{a-1}{\|\hat{\mathbf{f}}\|^2} \hat{\mathbf{f}} \hat{\mathbf{f}}^T & \frac{b\hat{\mathbf{f}}}{\|\hat{\mathbf{f}}\|} \\ \frac{b\hat{\mathbf{f}}^T}{\|\hat{\mathbf{f}}\|} & a \end{bmatrix}, \quad (۱۱.۳)$$

که در آن

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}(\hat{x}, \hat{\mathbf{u}}), \quad (12.3)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = r\mathbf{u}_0 + (1-r)\mathbf{u}_f, \quad (13.3)$$

$$a = \cosh\left((\beta - \alpha)\frac{\|\hat{\mathbf{f}}\|}{\|\hat{\mathbf{u}}\|}\right), \quad (14.3)$$

و

$$b = \sinh\left((\beta - \alpha)\frac{\|\hat{\mathbf{f}}\|}{\|\hat{\mathbf{u}}\|}\right). \quad (15.3)$$

در این رابطه برای محاسبه $\mathbf{G}$ ، از مقدار آغازین $\mathbf{u}_0 = (u_1(\alpha), u_2(\alpha))^T$ و نهایی $\mathbf{u}_f = (u_1(\beta), u_2(\beta))^T$ به همراه پارامتر r استفاده شده است که $0 < r < 1$ می باشد و $\hat{x} = r\alpha + (1-r)\beta$ همانطور که ملاحظه می کنیم در این روش $\mathbf{G}$ به صورت یک گروه لی یک پارامتری یعنی $\mathbf{G}(r)$ محاسبه می شود که مقدار مناسب برای پارامتر r با مقایسه شرط مرزی سمت راست مسئله به دست خواهد آمد.

۲.۲.۳ نگاشت گروه لی بین دو نقطه روی مخروط

در ادامه، بردار جدیدی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathbf{F} := \frac{\hat{\mathbf{f}}}{\|\hat{\mathbf{u}}\|}, \quad (16.3)$$

در نتیجه معادله های (۱۱.۳)، (۱۴.۳) و (۱۵.۳) به ترتیب به صورت زیر در می آیند:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 + \frac{a-1}{\|\mathbf{F}\|^2} \mathbf{F}\mathbf{F}^T & \frac{b\mathbf{F}}{\|\mathbf{F}\|} \\ \frac{b\mathbf{F}^T}{\|\mathbf{F}\|} & a \end{bmatrix}, \quad (17.3)$$

$$a = \cosh[(\beta - \alpha)\|\mathbf{F}\|], \quad (18.3)$$

و

$$b = \sinh[(\beta - \alpha)\|\mathbf{F}\|]. \quad (19.3)$$

از معادلات (۱۷.۳) و (۱۹.۳) نتیجه می شود:

$$\mathbf{u}_f = \mathbf{u}_0 + \eta\mathbf{F}, \quad (20.3)$$

$$\|\mathbf{u}_f\| = a\|\mathbf{u}_0\| + b\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F}\|}, \quad (21.3)$$

که در آن

$$\eta := \frac{(a-1)\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0 + b\|\mathbf{u}_0\|\|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}\|^2}. \quad (22.3)$$

با قرار دادن

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\eta}(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0), \quad (23.3)$$

در معادله (21.3) و تقسیم دو طرف رابطه بر $\|\mathbf{u}_0\|$ بدست می‌آید:

$$\frac{\|\mathbf{u}_f\|}{\|\mathbf{u}_0\|} = a + b \frac{(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0\| \|\mathbf{u}_0\|}, \quad (24.3)$$

که

$$a = \cosh \left(\frac{(\beta - \alpha) \|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0\|}{\eta} \right), \quad (25.3)$$

$$b = \sinh \left(\frac{(\beta - \alpha) \|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0\|}{\eta} \right), \quad (26.3)$$

با قرار دادن معادله (23.3) به جای $\mathbf{F}$ در معادله‌های (18.3) و (19.3) به دست می‌آیند. حال فرض کنیم:

$$\cos \theta := \frac{(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0\| \|\mathbf{u}_0\|}, \quad (27.3)$$

و

$$\gamma := (\beta - \alpha) \|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0\|, \quad (28.3)$$

که $0 \leq \theta \leq \pi$ زاویه بین بردارهای $\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0$ و $\mathbf{u}_0$ می‌باشد و در نتیجه از معادله‌های (24.3) - (26.3) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\|\mathbf{u}_f\|}{\|\mathbf{u}_0\|} = \cosh \left(\frac{\gamma}{\eta} \right) + \cos \theta \sinh \left(\frac{\gamma}{\eta} \right). \quad (29.3)$$

در ادامه با تعریف

$$Z := \exp \left(\frac{\gamma}{\eta} \right), \quad (30.3)$$

از معادله (29.3) یک معادله درجه دوم بر حسب Z به صورت

$$(1 + \cos \theta) Z^2 - \frac{2\|\mathbf{u}_f\|}{\|\mathbf{u}_0\|} Z + 1 - \cos \theta = 0, \quad (31.3)$$

به دست خواهد آمد که با حل آن داریم:

$$Z = \frac{\frac{\|\mathbf{u}_f\|}{\|\mathbf{u}_0\|} + \sqrt{\left(\frac{\|\mathbf{u}_f\|}{\|\mathbf{u}_0\|} \right)^2 - 1 + \cos^2 \theta}}{1 + \cos \theta}. \quad (32.3)$$

در نتیجه از معادله‌های (30.3) و (28.3) می‌توانیم η را با استفاده از

$$\eta = \frac{(\beta - \alpha) \|\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_0\|}{\ln Z}, \quad (33.3)$$

محاسبه کنیم. بنابراین بین دو نقطه $(\mathbf{u}_0, \|\mathbf{u}_0\|)$ و $(\mathbf{u}_f, \|\mathbf{u}_f\|)$ روی مخروط، عضوی از گروه لی $\mathbf{G} \in SO_0(2n, 1)$ ، با نگاشت از $(\mathbf{u}_0, \|\mathbf{u}_0\|)$ به روی $(\mathbf{u}_f, \|\mathbf{u}_f\|)$ وجود دارد که به صورت

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_f \\ \|\mathbf{u}_f\| \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \|\mathbf{u}_0\| \end{bmatrix}, \quad (34.3)$$

مشخص گردیده و $\mathbf{G}$ به صورت منحصر به فرد توسط $\mathbf{u}_0$ و $\mathbf{u}_f$ از طریق معادلات (۱۷.۳)، (۱۸.۳)، (۱۹.۳)، (۲۳.۳)، (۲۷.۳)، (۳۲.۳) و (۳۳.۳) تعیین می‌گردد. می‌توان $\mathbf{G}$ را به صورت $\mathbf{G}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_f)$ نوشت تا تاکید کنیم که آن یک نگاشت گروه لی بین دو مقدار $\mathbf{u}_0$ و $\mathbf{u}_f$ یعنی مقادیر تابع $\mathbf{u}$ در دو انتها از بازه $[\alpha, \beta]$ می‌باشد.

۳.۳ روش پرتابی گروه لی

در ادامه با استفاده از $\mathbf{G}(r) = \mathbf{G}(u_0, u_f)$ می‌توان معادلات لازم برای پیدا کردن شرط اولیه غایب را به دست آورد. از معادله‌های (۱.۳)–(۲.۳) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= f(x, u_1, u_2), \end{aligned} \quad (35.3)$$

$$\begin{aligned} u_1(\alpha) &= c, \quad u_1(\beta) = c, \\ u_2(\alpha) &= A, \quad u_2(\beta) = B, \end{aligned} \quad (36.3)$$

که در آن A و B ثابت‌های نامعلوم هستند و c ثابت مشخص است. از معادله‌های (۲۳.۳) و (۳۶.۳) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} 0 \\ B - A \end{bmatrix}. \quad (37.3)$$

از معادله‌های (۳۳.۳)، (۳۲.۳) و (۲۷.۳) با قرار دادن معادله (۲.۳) برای $\mathbf{u}$ و با توجه به اینکه

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_1(\alpha) \\ u_2(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_f = \begin{bmatrix} u_1(\beta) \\ u_2(\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ B \end{bmatrix}, \quad (38.3)$$

به دست می‌آوریم:

$$\eta = \frac{(\beta - \alpha)\sqrt{(A - B)^2}}{\ln Z}, \quad (39.3)$$

که

$$Z = \frac{\frac{\sqrt{c^2+B^2}}{\sqrt{c^2+A^2}} + \sqrt{\frac{c^2+B^2}{c^2+A^2} - 1 + \cos^2 \theta}}{1 + \cos \theta}, \quad (40.3)$$

و

$$\cos \theta = \frac{A(B-A)}{\sqrt{(A-B)^2 c^2 + A^2}}. \quad (41.3)$$

با مقایسه معادله (37.3) با (16.3) و با کمک معادله‌های (12.3)، (13.3) و (36.3) به دست می‌آید:

$$rA + (1-r)B = 0, \quad (42.3)$$

$$A - B + \frac{\eta}{\xi} \hat{f} = 0, \quad (43.3)$$

که

$$\hat{f} := f(r\alpha + (1-r)\beta, rc + (1-r)c, rA + (1-r)B) \quad (44.3)$$

و

$$\xi := \sqrt{c^2 + [rA + (1-r)B]^2}. \quad (45.3)$$

۱.۳.۳ مقدار A

برای مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم می‌توان به صورت تحلیلی مقدار A را به دست آورد [28]. از معادله‌های (42.3) و (45.3) نتیجه می‌شود:

$$\xi = c, \quad (46.3)$$

این معادله در کاهش محاسبات برای رسیدن به یک فرم بسته برای A بر حسب r بسیار مهم است. به همین دلیل است که شرایط مرزی غیر برابر با شرایط مرزی برابر در معادله (1.3) جایگزین شد که نتیجه آن $rA + (1-r)B = 0$ است و در نهایت ξ تعریف شده بوسیله معادله (45.3) به صورت یک ثابت در معادله (46.3) تبدیل می‌شود. بنابراین، از معادله (43.3) به کمک معادلات (39.3)–(42.3)، (44.3) و (46.3) می‌توان یک معادله جبری تنها برای پیدا کردن مقدار نامعلوم A به صورت زیر بدست آورد:

$$Ac + \eta_0 \hat{f} = 0, \quad (47.3)$$

که

$$\hat{f} = f(r\alpha + (1-r)\beta, c, 0), \quad (48.3)$$

$$Z = \frac{\sqrt{c^2 + B^2} + \sqrt{B^2}}{\sqrt{c^2 + A^2} - \sqrt{A^2}}, \quad (49.3)$$

$$\eta_0 = \frac{(\beta - \alpha)\sqrt{A^2}}{\ln Z}, \quad (50.3)$$

و با توجه به اینکه $r \in (0, 1)$ است، علامت $B = rA/(r-1)$ با A مختلف است. از معادله (۴۷.۳) می‌توان مقدار A را برای یک r داده شده بدست آورد و سپس می‌توان معادلات (۳۵.۳)–(۳۶.۳) را با یک روش انتگرال گیری مناسب برای مسائل مقدار اولیه حل کرد. با توجه به علامت A دو حالت زیر را خواهیم داشت:

۲.۳.۳ حالت $A > 0$

با قرار دادن مقدار η_0 از معادله (۵۰.۳) در معادله (۴۷.۳) بدست می‌آید:

$$\ln Z = -\frac{(\beta - \alpha)\hat{f}}{c}. \quad (51.3)$$

با تعریف

$$g_1 := \exp\left(-\frac{(\beta - \alpha)\hat{f}}{c}\right), \quad (52.3)$$

و جایگزین کردن معادله (۴۹.۳) برای مقدار Z در رابطه (۵۱.۳) خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{c^2 + B^2} + \sqrt{B^2}}{\sqrt{c^2 + A^2} - \sqrt{A^2}} = g_1. \quad (53.3)$$

با توجه به $A > 0$ و $B < 0$ معادله (۵۳.۳) می‌تواند به صورت

$$g_1 A - B = g_1 \sqrt{c^2 + A^2} - \sqrt{c^2 + B^2}, \quad (54.3)$$

نوشته شود. با به توان دو رساندن رابطه قبل و حذف جملات مشترک داریم:

$$2g_1 \sqrt{c^2 + A^2} \sqrt{c^2 + B^2} = (1 + g_1^2)c^2 + 2g_1 AB. \quad (55.3)$$

دوباره با انجام همین کار خواهیم داشت:

$$4g_1^2(A^2 + B^2) - 4g_1(1 + g_1^2)AB = (1 - g_1^2)^2 c^2. \quad (56.3)$$

اکنون با جایگزین کردن $B = rA/(r-1)$ و انجام محاسبات جبری نتیجه می‌شود:

$$\frac{4g_1}{(r-1)^2} [g_1 + (1 - g_1)^2 r - (1 - g_1)^2 r^2] A^2 = (1 - g_1^2)^2 c^2. \quad (57.3)$$

در نهایت اگر شرط

$$\Psi_1(r) := g_1 + (1 - g_1)^2 r - (1 - g_1)^2 r^2 > 0, \quad (58.3)$$

برقرار شود مقدار مثبت A به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$A = \sqrt{\frac{(r-1)^2 (1 - g_1^2)^2 c^2}{4\Psi_1 g_1}}. \quad (59.3)$$

بنابراین از شرط (۵۸.۳) می‌توان بازه قابل قبول را برای پارامتر r پیدا کرد.

۳.۳.۳ حالت $A < 0$

در ادامه حالت $A < 0$ با انجام روندی مشابه در نظر گرفته می‌شود. با قرار دادن مقدار η_0 از معادله (۵۰.۳) در معادله (۴۷.۳) بدست می‌آید:

$$\ln Z = \frac{(\beta - \alpha)\hat{f}}{c}. \quad (۶۰.۳)$$

با تعریف

$$g_2 := \exp\left(\frac{(\beta - \alpha)\hat{f}}{c}\right), \quad (۶۱.۳)$$

و جایگزین کردن معادله (۴۹.۳) برای مقدار Z در رابطه (۶۰.۳) خواهیم داشت:

$$\frac{\sqrt{c^2 + B^2} + \sqrt{B^2}}{\sqrt{c^2 + A^2} - \sqrt{A^2}} = g_2. \quad (۶۲.۳)$$

با توجه به $A < 0$ و $B > 0$ معادله (۶۲.۳) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$g_2 A - B = \sqrt{c^2 + B^2} - g_2 \sqrt{c^2 + A^2}. \quad (۶۳.۳)$$

با به توان دو رساندن رابطه بالا و حذف جملات مشترک خواهیم داشت:

$$2g_2 \sqrt{c^2 + B^2} \sqrt{c^2 + A^2} = (1 + g_2^2)c^2 + 2g_2 AB. \quad (۶۴.۳)$$

دوباره با انجام همین روند بر روی رابطه بالا داریم:

$$4g_2^2(A^2 + B^2) - 4g_2(1 + g_2^2)AB = (1 - g_2^2)^2 c^2. \quad (۶۵.۳)$$

با قرار دادن $B = rA/(r - 1)$ و انجام محاسبات ریاضی نتیجه می‌شود:

$$\frac{4g_2}{(r - 1)^2} [g_2 + (1 - g_2)^2 r - (1 - g_2)^2 r^2] A^2 = (1 - g_2^2)^2 c^2. \quad (۶۶.۳)$$

اگر شرط

$$\Psi_2(r) := g_2 + (1 - g_2)^2 r - (1 - g_2)^2 r^2 > 0, \quad (۶۷.۳)$$

برقرار باشد A مقدار منفی زیر را خواهد داشت:

$$A = -\sqrt{\frac{(r - 1)^2 (1 - g_2^2)^2 c^2}{4\Psi_2 g_2}}. \quad (۶۸.۳)$$

در این حالت نیز می‌توان از شرط (۶۷.۳) بازه‌ی قابل قبول را برای پارامتر r پیدا کرد.

۴.۳.۳ وقف دادن شیب A

در دو بخش قبلی فرمولی برای محاسبه شیب A در دامنه مجاز r به دست آمد. حال اگر A در دست باشد می‌توان طرح حافظ گروه را برای بدست آوردن (u, x) از معادلات (۳۵.۳)–(۳۶.۳) مورد استفاده قرار داد. به منظور تعیین مقدار صحیح برای r و در نتیجه A ، نیاز به استفاده از روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی (۳۵.۳)–(۳۶.۳) از طریق روش پرتابی خواهیم داشت. برای یک مقدار آزمایشی r در بازه قابل قبول می‌توان مقدار A را بدست آورد و سپس با حل عددی معادلات (۳۵.۳)–(۳۶.۳) از $x = \alpha$ تا $x = \beta$ مقدار عددی $u_1^r(\beta)$ را با مقدار دقیق $u_1(\beta) = c$ مقایسه کرد. اگر $|u_1^r(\beta) - c|$ کوچکتر از مقدار تولرانس داده شده (ϵ) باشد روند بدست آوردن A پایان می‌یابد. در غیر این صورت نیاز به محاسبه $u_1(\beta)$ متناظر با $r_1 < r$ و $r_2 > r$ خواهیم داشت که به ترتیب با نمادهای $u_1^{r_1}(\beta)$ و $u_1^{r_2}(\beta)$ مشخص می‌شوند. اگر $(u_1^{r_1}(\beta) - c)(u_1^{r_2}(\beta) - c) < 0$ برقرار باشد، یک ریشه بین r_1 و r_2 وجود خواهد داشت در غیر این صورت ریشه در بازه (r, r_2) قرار خواهد داشت. سپس از روش تنصیف برای پیدا کردن مقدار مناسب r استفاده خواهیم نمود. با ادامه این روند می‌توانیم مقدار r را به گونه‌ای پیدا کنیم که در شرط توقف $|u_1^r(\beta) - c| \leq \epsilon$ صدق کند.

۴.۳ نتایج عددی

۱.۴.۳ معادله براتو

مسئله براتو^۳ یک مسئله مقدار مرزی غیر خطی می‌باشد که به عنوان محکی برای دقت روش‌های عددی در مقالات بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است [۲۴، ۲۵، ۲۹، ۳۰، ۳۱]. مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda e^{u(x)} &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \quad (۶۹.۳)$$

که $\lambda > 0$. مسئله براتو دارای جواب تحلیلی به صورت زیر است:

$$u(x) = -2 \ln \left[\frac{\cosh \left((x - \frac{1}{2}) \frac{\theta}{2} \right)}{\cosh(\frac{\theta}{4})} \right], \quad (۷۰.۳)$$

که θ جواب معادله $\theta = \sqrt{2\lambda} \cosh(\frac{\theta}{4})$ می‌باشد. این مسئله دارای صفر، یک و دو جواب است زمانی که به ترتیب $\lambda > \lambda_c$ ، $\lambda = \lambda_c$ و $\lambda < \lambda_c$ که مقدار بحرانی λ_c در معادله

$$1 = \frac{1}{4} \sqrt{2\lambda_c} \cosh \left(\frac{\theta_c}{4} \right), \quad (۷۱.۳)$$

^۳Bratu

صدق می‌کند و برابر $\lambda_c = 3.513830719$ می‌باشد [۳۲، ۳۳]. به منظور استفاده از روش پرتابی گروه لی ابتدا از تبدیل زیر استفاده می‌کنیم:

$$y(x) = u(x) + c, \quad c > 0. \quad (۷۲.۳)$$

در نتیجه مسئله براتو به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda e^{y(x)-c} &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ y(0) &= y(1) = c. \end{aligned} \quad (۷۳.۳)$$

در ادامه معادله (۷۳.۳) را به سیستم زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x), \\ y_2'(x) &= f(x, y_1, y_2), \\ y_1(0) &= c, \quad y_2(0) = A, \end{aligned} \quad (۷۴.۳)$$

که

$$f(x, y_1, y_2) = -\lambda e^{y_1(x)-c}. \quad (۷۵.۳)$$

سپس روش پرتابی گروه لی را برای پیدا کردن مقدار نامعلوم A به کار خواهیم برد. در اینجا مقدار پارامتر آزاد c را با توجه به مسئله به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که از ناپایداری‌های عددی همانند سرریز^۴ در امان باشیم. به این منظور برای این مثال قرار می‌دهیم $c = 0.5$ ، همچنین تولرانس را برابر $\epsilon = 10^{-12}$ و طول گام را برابر $\Delta x = 0.0001$ انتخاب می‌کنیم. نتایج عددی برای $\lambda = 3$ ، $\lambda = \lambda_c = 3.513830719$ ، $\lambda = 4$ و $\lambda = 5$ گزارش شده‌اند. شکل ۱.۳ و ۲.۳ نشان می‌دهد که مسئله براتو برای $\lambda = 3$ دارای جواب دو گانه، برای $\lambda = \lambda_c = 3.513830719$ دارای جواب یکتا و برای $\lambda = 4, 5$ دارای جواب نمی‌باشد که دقیقاً منطبق بر نتایج تحلیلی بدست آمده برای پارامتر بحرانی λ_c می‌باشد. در شکل ۳.۳ می‌توان جواب‌های دوگانه عددی بدست آمده به وسیله روش پرتابی گروه لی را به همراه جواب‌های دقیق برای پارامتر $\lambda = 3$ مشاهده کرد. همچنین این شکل جواب یکتای عددی و جواب دقیق را برای پارامتر $\lambda_c = 3.513830719$ نشان می‌دهد. در نهایت در شکل ۴.۳ خطای روش را در مقیاس لگاریتمی برای هر دو شاخه از جواب مسئله به ازای پارامتر $\lambda = 3$ ، برای مقادیر مختلف طول گام رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌کنیم که هر چه طول گام کوچکتر می‌شود خطا نیز کمتر می‌شود.

^۴Over follow

۲.۴.۳ مدل غیر خطی واکنش-انتشار

مدل غیر خطی واکنش-انتشار^۵، یک فرآیند واکنش-انتشار را در جسم متخلخل نشان می‌دهد [۲۴، ۲۵، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷]. در حالت متغیر بدون بعد، مسئله مقدار مرزی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u''(x) - \psi^2 u^m(x) &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ u'(0) &= 0, \quad u(1) = 1. \end{aligned} \quad (۷۶.۳)$$

مقاله [۳۵] جواب‌های تحلیلی دقیق را برای این مسئله به شکل ضمنی ارائه داده است. در حالت مرتبه واکنش $m = -1$ ، مسئله برای $0 \leq \psi < \psi_{\max}(m) = 0.765152$ دارای دوگانگی جواب، برای $\psi > \psi_{\max}(m)$ بدون جواب و برای $\psi = \psi_{\max}(m)$ دارای جواب یکتا می‌باشد. در حالتی که مرتبه واکنش $-1 < m < 0$ باشد مسئله دارای جواب یکتا برای $0 \leq \psi < \psi^*(m)$ و $\psi = \psi_{\max}(m)$ ، دوگانه به ازای $\psi^*(m) \leq \psi < \psi_{\max}(m)$ و بدون جواب برای $\psi > \psi_{\max}(m)$ می‌باشد. برای محک روش پرتابی گروه لی مرتبه ی واکنش را $m = -\frac{3}{4}$ در نظر گرفته و مقادیر $\psi = 0.2, 0.6, 0.8, 0.9$ و $\psi = 1$ را برای ψ در نظر می‌گیریم. در این حالت مقادیر بحرانی $\psi^*(m)$ و $\psi_{\max}(m)$ در مقاله [۳۵] به صورت $\psi^*(m) = 0.40$ و $\psi_{\max}(m) = 0.839768$ محاسبه شده‌اند. همچنین نشان داده شده است در حالت $m = -\frac{3}{4}$ مسئله دارای جواب به شکل ضمنی

$$x = \frac{2\sqrt{2}c_0^{\frac{7}{8}}}{35\psi} \sqrt{\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{1}{4}} - 1} \left[16 + 8\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{1}{4}} + 6\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}} + 5\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{3}{4}} \right], \quad (۷۷.۳)$$

می‌باشد که اگر $\psi = 0.8$ ، $c_0 = 0.1836751649400644$ برای شاخه اول از جواب و $c_0 = 0.533047876754385$ برای شاخه دوم، و اگر $\psi = 0.2$ ، $c_0 = 0.9797428483877718$ برای تنها جواب مسئله می‌باشد.

برای استفاده از روش پرتابی گروه لی ابتدا تبدیل زیر را به کار می‌بریم:

$$y(x) = u(x) + c - 1. \quad (۷۸.۳)$$

بنابراین معادله (۷۶.۳) به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} y''(x) - \psi^2 (y(x) - c + 1)^m &= 0, \quad x \in [0, 1], \\ y'(0) &= 0, \quad y(1) = c. \end{aligned} \quad (۷۹.۳)$$

سپس معادله (۷۹.۳) را به سیستم زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x), \\ y_2'(x) &= f(x, y_1, y_2), \\ y_2(0) &= 0, \quad y_1(1) = c, \end{aligned} \quad (۸۰.۳)$$

^۵Reaction-diffusion model

که

$$f(x, y_1, y_2) = \psi^2 (y_1(x) - c + 1)^m. \quad (۸۱.۳)$$

از طرفی برای یکسان کردن شرایط مرزی مسئله، معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x), \\ y_2'(x) &= F(x, y_1, y_2), \\ y_1(-1) &= c, \quad y_1(1) = c \end{aligned} \quad (۸۲.۳)$$

که

$$F(x, y_1, y_2) = \begin{cases} f(x, y_1, y_2), & 0 \leq x \leq 1, \\ f(-x, y_1, -y_2), & -1 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (۸۳.۳)$$

یک بسط متقارن از تابع f می‌باشد. حال می‌توان روش پرتابی گروه لی را برای معادله (۸۲.۳) روی بازه $[-1, 1]$ به کار برد، اما در عمل فقط به محاسبه معادلات بالا از $x = -1$ تا $x = 0$ نیاز است و شیب $y_2(-1) = A$ را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که خطای $y_2(0) = 0$ از تئورانس داده شده کمتر باشد. در نهایت اگر شرط توقف برقرار شد کافی است جواب بدست آمده را به بازه $0 \leq x \leq 1$ (بازه اصلی مسئله) انتقال دهیم. برای این مثال $c = 0.5$ و $\epsilon = 10^{-12}$ را انتخاب می‌کنیم. شکل‌های ۵.۳ و ۶.۳ نشان می‌دهند که مدل واکنش-انتشار دارای دو جواب برای $\psi = 0.8$ ، جواب یکتا برای $\psi = 0.2$ و بدون جواب برای $\psi = 0.9$ و $\psi = 1$ می‌باشد که این نتایج با مقادیر بحرانی $\psi^*(m)$ و $\psi_{max}(m)$ کاملاً سازگار است. در شکل ۷.۳ می‌توان جواب‌های دوگانه عددی بدست آمده به وسیله روش پرتابی گروه لی را برای این مسئله به ازای $\psi = 0.8$ ، به همراه جواب‌های دقیق مشاهده کرد. همچنین می‌توان جواب یکتای عددی و دقیق را به ازای $\psi = 0.2$ در این شکل ملاحظه کرد. شکل ۸.۳ نمودارهای خطا را برای دو شاخه از جواب به ازای $\psi = 0.8$ برای طول گام‌های مختلف در مقیاس لگاریتمی نشان می‌دهد.

۳.۴.۳ معادله یامابه

معادله یامابه^۶ یک معادله دیفرانسیل غیر خطی دارای کاربرد در هندسه و برخی از حوزه‌های فیزیک می‌باشد [۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲]. این معادله را بر روی توپ واحد $\mathbf{B}^m$ در $\mathbb{R}^m$ در نظر خواهیم گرفت، که $m = 3, 4, 5, \dots$ بعد فضا می‌باشد. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{B}^m = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \mid \|\mathbf{z}\| \leq 1\}, \quad \mathbf{S}^{m-1} = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{m-1} \mid \|\mathbf{z}\| = 1\}$$

تعریف خواهیم کرد. سپس مسئله مقدار مرزی یامابه را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} -\Delta y &= y - \lambda y^{1+4/(m-2)}, \\ y(\mathbf{z}) &= 1, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{S}^{m-1}, \end{aligned} \quad (۸۴.۳)$$

^۶Yamabe equation

که Δ عملگر لاپلاسین و λ یک پارامتر می باشد. معادله یامابه یک معادله دیفرانسیل جزئی است که برای هر m بزرگتر از 2 به شدت غیر خطی است. برای ساده سازی این وضعیت یک تابع متقارن شعاعی و یک متغیر شعاعی معرفی می کنیم:

$$y(\mathbf{z}) = v(x) \quad \text{و} \quad x = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_m^2}, \quad (85.3)$$

همچنین $n = 1 + 4/(m - 2)$ را در نظر می گیریم به گونه ای که برای $m \geq 3$ ، $n \in (1, 5]$. بنابراین مسئله مقدار مرزی (84.3) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} v'''(x) + \frac{m-1}{x}v'(x) - v(x) + \lambda v^n(x) &= 0, \\ v'(0) &= 0, \quad v(1) = 1. \end{aligned} \quad (86.3)$$

همانطور که ملاحظه می کنیم معادله (86.3) فرمی شبیه به معادله معروف لین-امدن^۷ از نوع اول دارد. اما توجه کنید که (86.3) یک جمله اضافه تر دارد و همچنین شکل شرط های مسئله متفاوت می باشد (مسئله لین-امدن یک مسئله مقدار اولیه بوده نه یک مسئله مقدار مرزی). λ و n هر دو پارامتر هستند که می توان λ را یک پارامتر حقیقی در نظر گرفت در حالی که پارامتر n وابسته به m است: اگر $m = 3$ ، $n = 5$ ؛ اگر $m = 4$ ، $n = 3$ ؛ و به همین ترتیب. زمانی که m به بی نهایت میل می کند n به سمت یک می رود که مسئله در این حالت یک مسئله خطی بوده و می توان به طور دقیق آن را حل کرد. در ادامه معادله (86.3) را با روش پرتابی گروه لی و به ازای مقادیر مختلف λ و m که تا به حال کمتر مورد توجه قرار گرفته اند، حل خواهیم کرد و جواب های متقارن شعاعی معادله یامابه را بدست خواهیم آورد.

همانند قبل ابتدا از تبدیل زیر استفاده می کنیم:

$$v(x) = u(x) - c + 1. \quad (87.3)$$

بنابراین معادله یامابه به مسئله زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} u''(x) &= \frac{1-m}{x}u'(x) + u(x) - c + 1 - \lambda(u(x) - c + 1)^n, \\ u'(0) &= 0, \quad u(1) = c. \end{aligned} \quad (88.3)$$

سپس معادله بالا را به سیستم زیر تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), \\ u_2'(x) &= f(x, u_1, u_2), \\ u_2(0) &= 0, \quad u_1(1) = c, \end{aligned} \quad (89.3)$$

که

$$f(x, u_1, u_2) = \frac{1-m}{x}u_2(x) + u_1(x) - c + 1 - \lambda(u_1(x) - c + 1)^n. \quad (90.3)$$

^۷Lane-Emden

در ادامه معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), \\ u_2'(x) &= F(x, u_1, u_2), \\ u_1(-1) &= c, \quad u_1(1) = c, \end{aligned} \quad (91.3)$$

که

$$F(x, u_1, u_2) = \begin{cases} f(x, u_1, u_2), & 0 \leq x \leq 1, \\ f(-x, u_1, -u_2), & -1 \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (92.3)$$

یک بسط مقارن از f می‌باشد. حال همانند مثال قبل می‌توان روش پرتابی گروه لی را روی بازه $[-1, 1]$ به کار برد. برای $\lambda < 1$ حالت $u_2(-1) = A < 0$ و برای $\lambda > 1$ حالت $u_2(-1) = A > 0$ را در نظر می‌گیریم. در جدول ۱.۳ می‌توان پارامترهای مختلف استفاده شده در روش پرتابی گروه لی را برای $\lambda = 0.1, \lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = 4$ و مقادیر مختلف m مشاهده کرد. در شکل ۹.۳ می‌توان دو مثال از نمودار خطای عدم تطابق^۸ را نسبت به پارامتر r مشاهده کرد. در شکل‌های ۱۰.۳ و ۱۱.۳ می‌توان جواب‌های عددی بدست آمده با روش پرتابی گروه لی را برای $\lambda = 0.1, \lambda = -1$ و $\lambda = 2, \lambda = 4$ و مقادیر مختلف m مشاهده کرد. شکل شماره ۱۲.۳ خطای مانده^۹ معادله (۸۶.۳) را برای $\lambda = 0.1$ و $\lambda = 2$ به ازای مقادیر مختلف m نشان می‌دهد. باید اشاره کنیم که برای بدست آوردن خطای مانده از تقریب $v''(x_i) \simeq (v'(x_{i+1}) - v'(x_{i-1}))/2\Delta x$ در معادله (۸۶.۳) استفاده می‌کنیم که $v'(x_i)$ از روش پرتابی گروه لی بدست آمده است. معادله یامابه در حالت $\lambda = 1$ دارای جواب دقیق $v(x) = 1$ می‌باشد. در شکل ۱۳.۳ می‌توان جواب‌های عددی متفان شعاعی معادله یامابه را به همراه $v(x) = 1$ (جواب دقیق مسئله در حالت $\lambda = 1$) مشاهده کرد و ملاحظه می‌کنیم هر چه پارامتر m بزرگتر می‌شود جواب‌های معادله یامابه به سمت $v(x) = 1$ همگرا می‌شوند. در نهایت در جدول‌های ۲.۳-۵.۳ نتایج بدست آمده از روش پرتابی گروه لی را به ازای $\lambda = -1$ و $\lambda = 4$ با روش میدریچ^{۱۰} (روش نقطه میانی با درونیابی ریچاردسون [۴۳]) که یک روش قدرتمند برای حل مسائل منفرد^{۱۱} می‌باشد، مقایسه کرده‌ایم. این مقایسه دقت روش پرتابی گروه لی را بخوبی نشان می‌دهد.

۵.۳ نتیجه‌گیری

در این فصل از روش پرتابی گروه لی برای حل مسائل مقدار مرزی غیرخطی دو نقطه‌ای استفاده کردیم. همچنان که دیدیم در روش پرتابی گروه لی می‌توان شرط غایب مسئله را به صورت تابعی

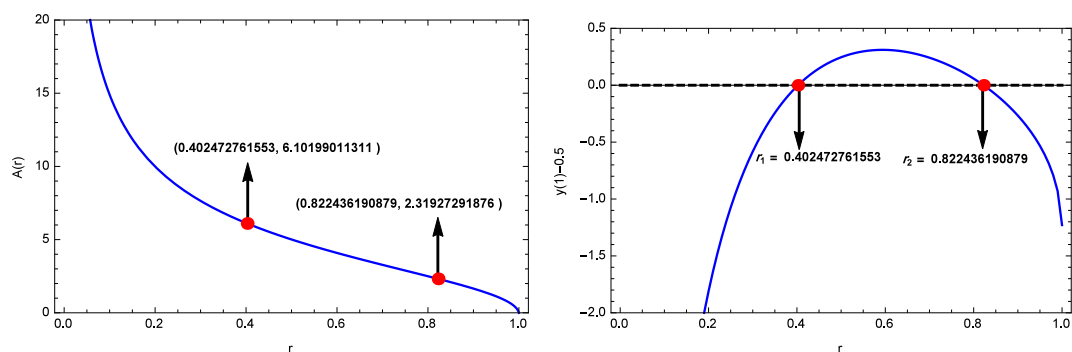
^۸Mis-matching error

^۹Residual error

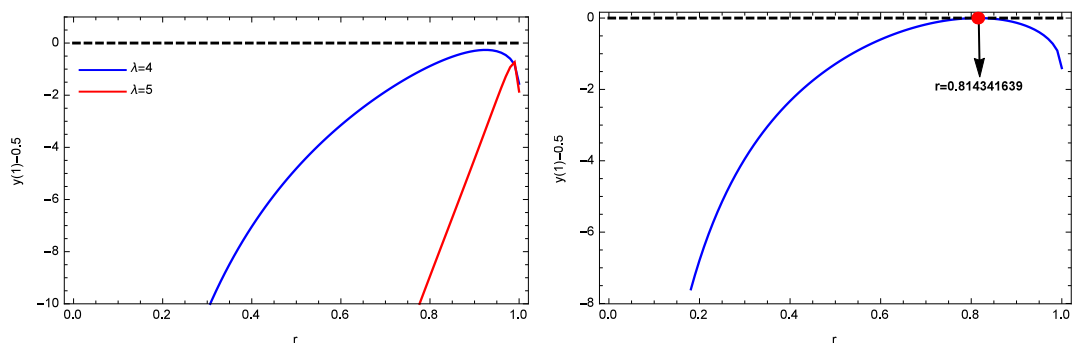
^{۱۰}Midrich

^{۱۱}Singular

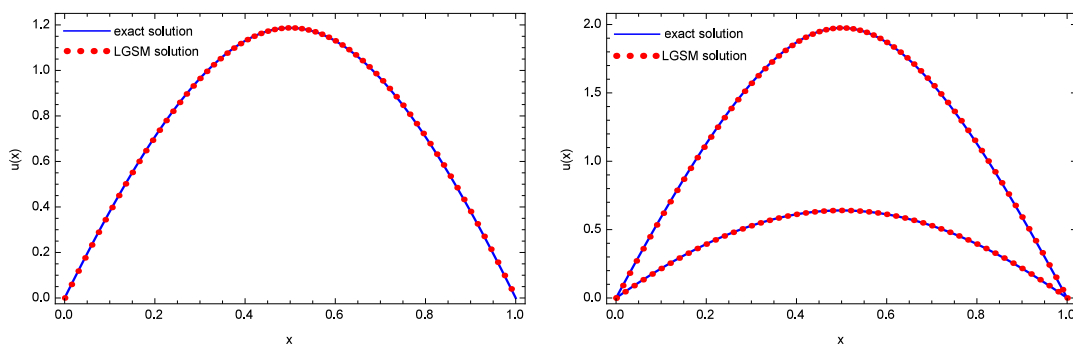
از پارامتر r بدست آورد که می‌توان دامنه قابل قبول را برای پارامتر r بدست آورد و این مزیت مهم این روش نسبت به روش‌های پرتابی معمولی می‌باشد. در بخش نتایج عددی این روش را بر روی سه مثال پیدا کردیم که در دو مثال برای یکسان‌سازی شرایط مسئله از بسط متقارن استفاده کردیم. مسئله‌های معروف براتو و مدل واکنش-انتشار که دارای جواب دقیق می‌باشند و مسئله منفرد یامابه که هنوز جواب دقیقی برای آن گزارش نشده است را با این روش حل کردیم. می‌توان دید که روش پرتابی گروه لی به خوبی تعداد شاخه‌های جواب را پیش‌بینی کرده و این جواب‌ها را با دقت خوبی تقریب می‌زند.



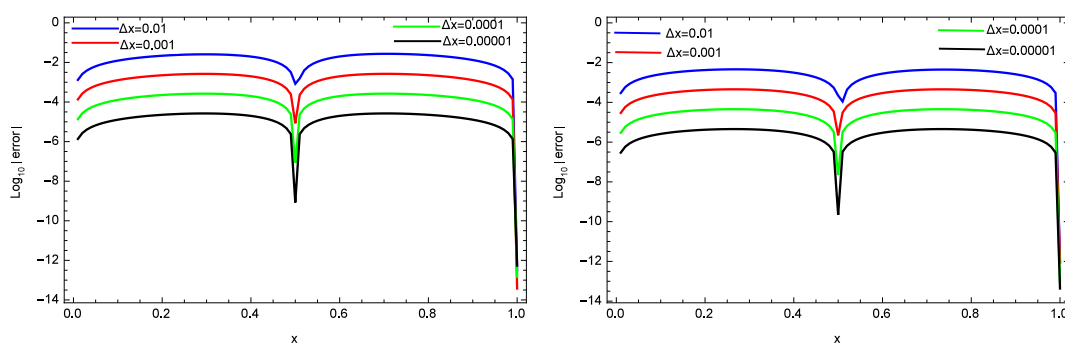
شکل ۱.۳: نمودار $y(1) - 0.5$ (راست) و نمودار $y'(0) = A(r)$ (چپ) نسبت به r برای معادله براتو به ازای $\lambda = 3$.



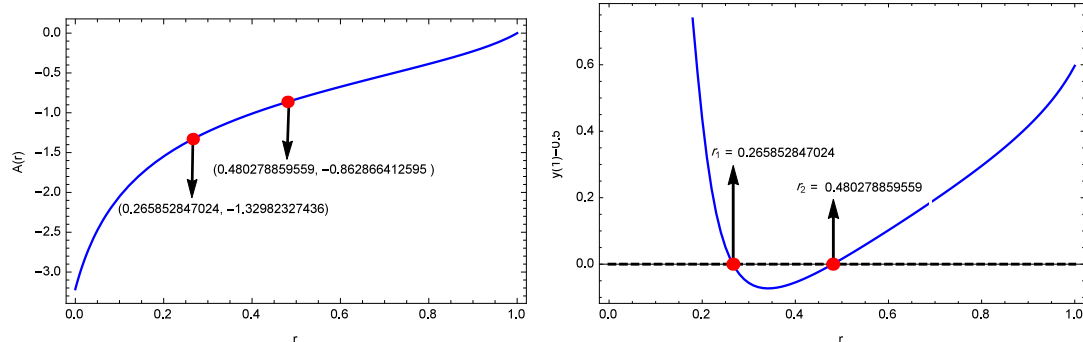
شکل ۲.۳: نمودار $y(1) - 0.5$ (راست) برای λ_c و برای $\lambda = 4, 5$ (چپ) نسبت به پارامتر r برای معادله براتو.



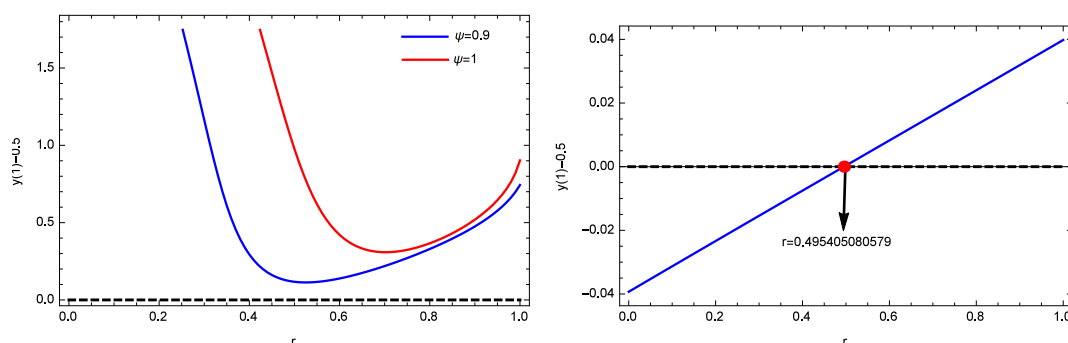
شکل ۳.۳: دو جواب عددی معادله براتو به همراه دو جواب دقیق به ازای $\lambda = 3$ (راست)، و جواب یکتای عددی و دقیق برای $\lambda = \lambda_c$ (چپ).



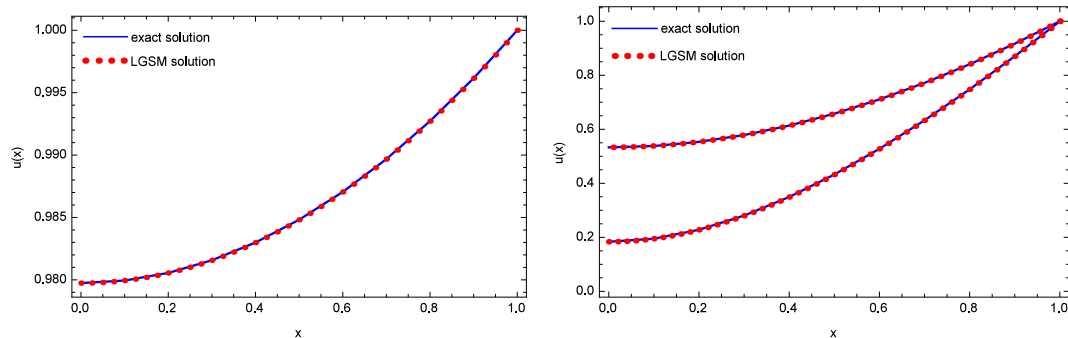
شکل ۴.۳: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) از شاخه اول (راست) و شاخه دوم (چپ) جواب‌های معادله براتو، به ازای $\lambda = 3$ و مقادیر مختلف Δx .



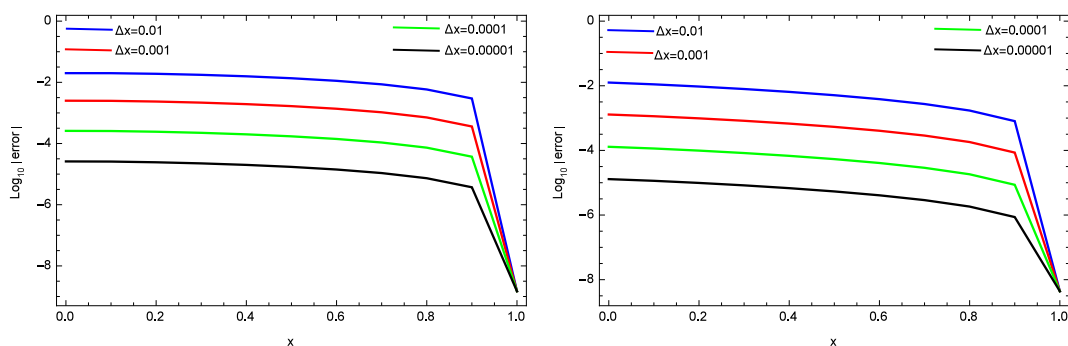
شکل ۵.۳: نمودار $y(1) - 0.5$ (راست) و $y'(-1) = A(r)$ (چپ) برای مدل واکنش-انتشار نسبت به r به ازای $m = -\frac{3}{4}$ و $\psi = 0.8$.



شکل ۶.۳: نمودار $y(1) - 0.5$ برای مدل واکنش-انتشار به ازای $\psi = 0.2$ (راست) و به ازای $\psi = 0.9, 1$ (چپ) نسبت به r .



شکل ۷.۳: جواب‌های عددی دو گانه روش پرتابی گروه لی به همراه جواب‌های دو گانه دقیق برای مدل واکنش-انتشار به ازای $m = -\frac{3}{4}$ ، $\psi = 0.8$ (راست)، و جواب یکتای عددی به همراه جواب یکتای دقیق برای $\psi = 0.2$ (چپ).



شکل ۸.۳: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه اول جواب (راست) و شاخه دوم جواب (چپ) برای جواب‌های دو گانه مدل واکنش-انتشار به ازای $m = -\frac{3}{4}$ ، $\psi = 0.8$ و برای مقادیر مختلف Δx .

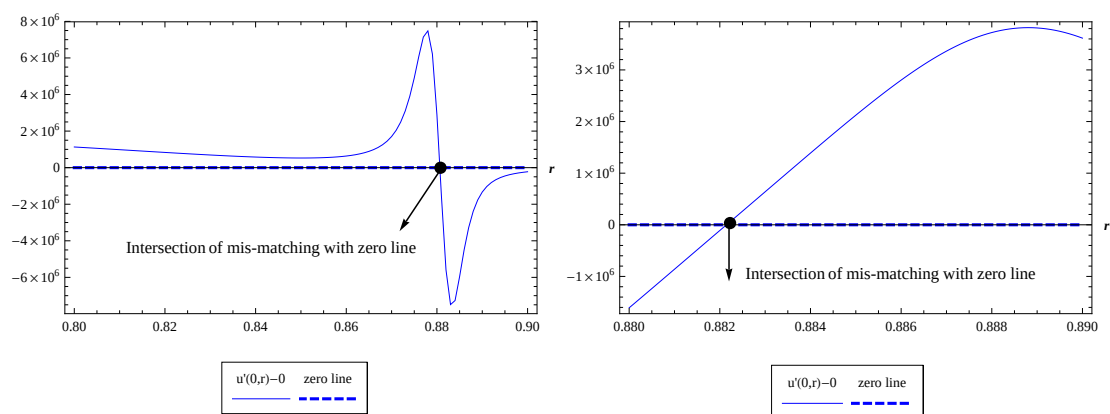
جدول ۱۰.۳: پارامترهای استفاده شده برای معادله یامابه به ازای (به ترتیب از بالا) $\lambda = -1$ ، $\lambda = 0.1$ ، $\lambda = 2$ و $\lambda = 4$.

ϵ	r	Δx	c	m
2×10^{-9}	0.882147796469	0.0001	1	3
3×10^{-8}	0.914317329532	0.001	1	4
7×10^{-8}	0.944591577888	0.005	1	6

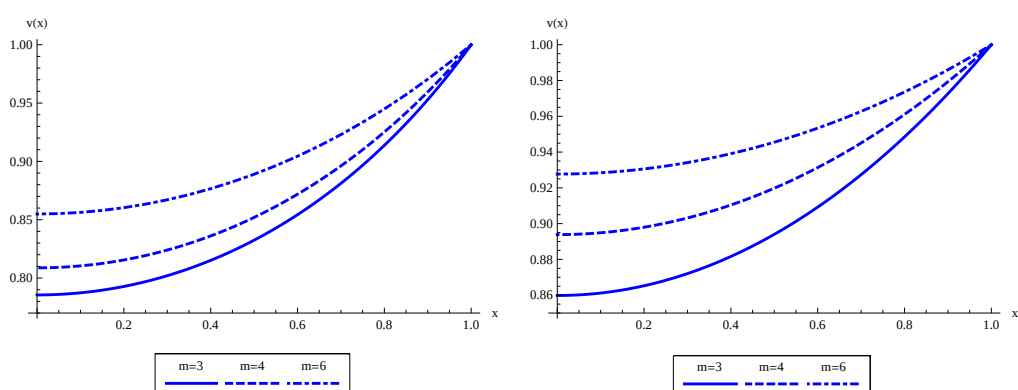
ϵ	r	Δx	c	m
6×10^{-8}	0.873285360792	0.0001	10	3
4×10^{-8}	0.892809997425	0.001	10	4
2×10^{-7}	0.922926007352	0.005	10	6

ϵ	r	Δx	c	m
6×10^{-10}	0.880650585250	0.001	1	4
4×10^{-8}	0.944044641065	0.005	1	6
3×10^{-6}	0.960964387295	0.01	1	8

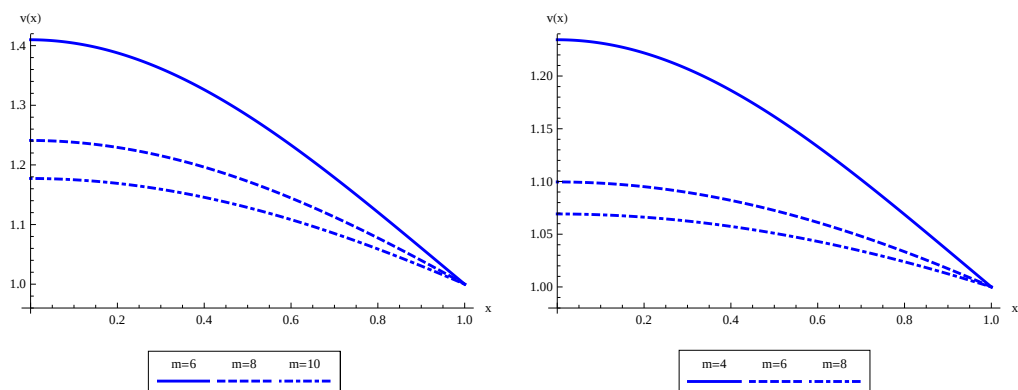
ϵ	r	Δx	c	m
2×10^{-7}	0.903135356042	0.005	10	6
4×10^{-6}	0.935530255437	0.01	10	8
6×10^{-4}	0.950318540055	0.01	10	10



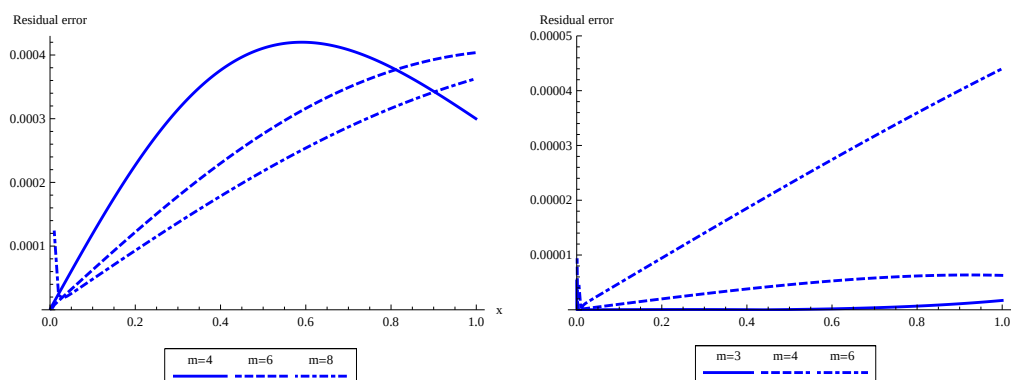
شکل ۹.۳: نمودار $u'(0) - 0$ نسبت به r برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 0.1$ و $m = 3$ (راست)، $\lambda = 2$ و $m = 4$ (چپ).



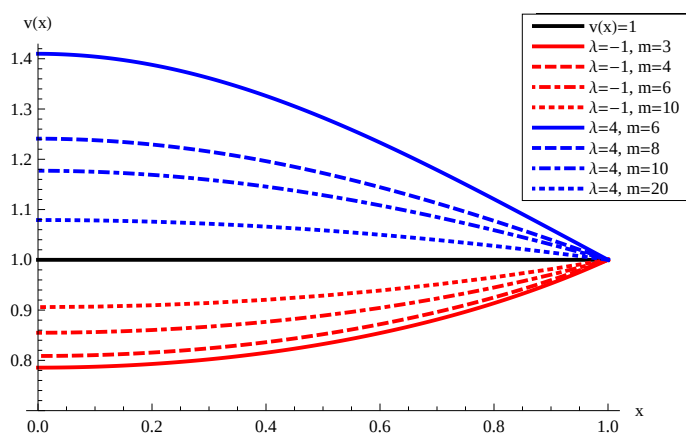
شکل ۱۰.۳: جواب‌های عددی بدست آمده با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 0.1$ (راست) و $\lambda = -1$ (چپ).



شکل ۱۱.۳: جواب‌های عددی بدست آمده با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 2$ (راست) و $\lambda = 4$ (چپ).



شکل ۱۲.۳: خطای مانده بدست آمده با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = 0.1$ (راست) و $\lambda = 2$ (چپ).



شکل ۱۳.۳: جواب‌های متقارن شعاعی با استفاده از روش پرتابی گروه لی برای معادله یامابه به ازای $\lambda = -1$ و $\lambda = 4$ ، مشاهده می‌شود که $\lim_{m \rightarrow \infty} v_{m,\lambda}(x) = v_{m,1}(x) = 1$.

جدول ۲.۳: مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله یامابه به ازای $m = 3$ ، $\lambda = -1$.

روش میدریچ		روش پرتابی گروه لی		نقاط
$v'(x)$	$v(x)$	$v'(x)$	$v(x)$	
0	0.785556	5.33891×10^{-8}	0.785535	0
0.036262	0.787367	0.036260	0.787347	0.1
0.073164	0.792830	0.073161	0.792812	0.2
0.111389	0.802043	0.111385	0.802027	0.3
0.151709	0.815177	0.151704	0.815162	0.4
0.195049	0.832486	0.195044	0.832472	0.5
0.242573	0.854326	0.242567	0.854314	0.6
0.295810	0.881190	0.295805	0.881180	0.7
0.356861	0.913748	0.356857	0.913741	0.8
0.428723	0.952921	0.428724	0.952917	0.9
0.515868	1	0.515876	1	1

جدول ۳.۳: مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله یامابه به ازای $m = 6$ ، $\lambda = -1$.

روش میدریچ		روش پرتابی گروه لی		نقاط
$v'(x)$	$v(x)$	$v'(x)$	$v(x)$	
0	0.855624	1.87684×10^{-7}	0.854891	0
0.026506	0.856948	0.026477	0.856279	0.1
0.053284	0.860934	0.053231	0.860329	0.2
0.080608	0.867623	0.080539	0.867079	0.3
0.108767	0.877084	0.108688	0.876603	0.4
0.138067	0.889415	0.137987	0.888998	0.5
0.168842	0.904747	0.168766	0.904399	0.6
0.201455	0.923245	0.201395	0.922970	0.7
0.236318	0.945113	0.236283	0.944919	0.8
0.273893	0.970599	0.273897	0.970496	0.9
0.314714	1	0.314773	1	1

جدول ۴.۳: مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله یامابه به ازای $m = 6$ ، $\lambda = 4$.

روش میدریچ		روش پرتابی گروه لی		نقاط
$v'(x)$	$v(x)$	$v'(x)$	$v(x)$	
0	1.40842	-1.42957×10^{-7}	1.40991	0
-0.108075	1.40300	-0.108274	1.40421	0.1
-0.212051	1.38694	-0.212333	1.38787	0.2
-0.308166	1.36085	-0.308428	1.36151	0.3
-0.393291	1.32568	-0.393453	1.32609	0.4
-0.465135	1.28264	-0.465145	1.28286	0.5
-0.522336	1.23314	-0.522177	1.23323	0.6
-0.564463	1.17867	-0.564147	1.17867	0.7
-0.591906	1.12074	-0.591468	1.12069	0.8
-0.605726	1.06075	-0.605214	1.06071	0.9
-0.607454	1	-0.606924	1	1

جدول ۵.۳: مقایسه نتایج عددی بدست آمده از روش پرتابی گروه لی با روش میدریچ برای معادله یامابه به ازای $m = 10$ ، $\lambda = 4$

روش میدریچ		روش پرتابی گروه لی		نقاط
$v'(x)$	$v(x)$	$v'(x)$	$v(x)$	
0	1.17559	-5.1712×10^{-4}	1.17726	0
-0.039139	1.17363	-0.039218	1.17510	0.1
-0.077743	1.16778	-0.077876	1.16905	0.2
-0.115289	1.15812	-0.115451	1.15918	0.3
-0.151286	1.14478	-0.151452	1.14564	0.4
-0.185283	1.12793	-0.185434	1.12861	0.5
-0.216885	1.10780	-0.217001	1.10830	0.6
-0.245756	1.08464	-0.245824	1.08499	0.7
-0.271630	1.05875	-0.271640	1.05896	0.8
-0.294312	1.03042	-0.294260	1.03052	0.9
-0.313680	1	-0.313565	1	1

فصل ۴

یک روش گروه لی برای حل عددی معادله-برینکمن فرچیمر از جریان یک سویه روی یک دامنه مستطیل شکل

۱.۴ مقدمه

معادله تکانه برینکمن-فرچیمر^۱ برای جریان یک سویه در جهت z از یک مجرای مستطیلی به صورت زیر مدل بندی می شود:

$$\hat{\mu}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) - \frac{C_f \rho}{\sqrt{K}} u^2 - \frac{\mu}{K} u + G = 0, \quad (۱.۴)$$

که u سرعت در جهت z ، C_f اینرسی داخلی، ρ چگالی، μ غلظت جریان، $\hat{\mu}$ غلظت موثر، K نفوذ پذیری و در نهایت G اثر سوء گرادیان فشار کاربردی می باشد. شرایط مرزی مناسب به صورت

$$u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0, \quad (۲.۴)$$

می باشند. با تعریف ثابت های A ، B و C به صورت

$$A = \frac{C_f \rho}{\hat{\mu} \sqrt{K}}, \quad B = \frac{\mu}{\hat{\mu} K}, \quad C = \frac{G}{\hat{\mu}}, \quad (۳.۴)$$

و عملگر لاپلاسین دو بعدی

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (۴.۴)$$

می توان معادله دیفرانسیل (۱.۴) را به شکل فشرده زیر نوشت:

$$\Delta u = Au^2 + Bu - C. \quad (۵.۴)$$

^۱Brinkman-Forchheimer

نویسنده در مقاله [۴۴] با در نظر گرفتن آنالوگ معادله برینکمن-فرچیمر بر روی یک متغیر x ، یک جواب با استفاده از نظریه اختلال، برای همرفت اجباری در یک مجرای متخلخل اشباع بدست آورد. همچنین [۴۵] معادله برینکمن خطی را در یک بعد در نظر گرفت. علاوه بر این نویسنده در مقاله [۴۶] یک شکل خطی از معادله دیفرانسیل (۱.۴) را در نظر گرفته است که حالت خاصی از این معادله برای $A = 0$ می باشد. بنابراین معادله ای که در این بخش بررسی خواهد شد یک تعمیم از مسئله بررسی شده در مقالات [۴۴، ۴۶] می باشد. ون گورد^۲ در مقاله [۴۱] بوسیله روش هموتویی جواب‌های تحلیلی تقریبی از معادله تکانه برینکمن-فرچیمر را بدست آورده است. همچنین او و همکاران در مقاله [۴۷] معادله برینکمن-فرچیمر را برای یک سطح مقطع دو بعدی، به خصوص یک مجرای مستطیلی با یک روش تقریبی تغییراتی مطالعه کرده است. اخیراً عباس بندی و همکاران در مقاله [۴۸] با استفاده از روش هسته‌ای باز تولیدی جواب‌های عددی این معادله را با خطای مانده‌ی خوبی گزارش کرده اند. همچنین در مقاله [۴۹] نشان داده شده است که مسئله مقدار مرزی (۵.۴) با شرایط (۲.۴) دارای جواب یکتای هموار می باشد.

برای حل معادله‌ی برینکمن-فرچیمر با استفاده از روش طرح حافظ گروه به یک متغیر با مشتق مرتبه‌ی اول در معادله نیازمندیم. در ابتدا با استفاده از ایده‌ای جالب که نخستین بار در مقاله‌ی [۵۰] مطرح شد، این متغیر ساختگی را به معادله اضافه می کنیم. سپس با استفاده از گسسته سازی‌های معمولی، سایر متغیرهای موجود در معادله یعنی x و y را گسسته می کنیم. بنابراین به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب متغیر ساختگی دست پیدا می کنیم. برای حل این دستگاه از روش طرح حافظ گروه استفاده می کنیم. این روش متغیر ساختگی در مقاله‌های [۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸] نیز مورد استفاده قرار گرفته است که نتایج عددی بسیار خوبی را حاصل کرده است.

۲.۴ روش انتگرال گیری متغیر ساختگی

در ابتدا دو طرف معادله (۵.۴) را در ثابت $v_0 > 0$ ضرب می کنیم تا پایداری روش عددی را افزایش دهیم:

$$v_0 \Delta u - v_0 f(u) = 0, \quad (6.4)$$

که $f(u) = Au^2 + Bu - C$. سپس از تبدیل اساسی زیر استفاده خواهیم کرد:

$$v(x, y, \tau) = (1 + \tau)^m u(x, y), \quad 0 < m \leq 1, \quad (7.4)$$

بنابراین معادله (۵.۴) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\frac{v_0}{(1 + \tau)^m} \Delta v - v_0 f\left(\frac{v}{(1 + \tau)^m}\right) = 0. \quad (8.4)$$

^۲Van Gorder

حال با استفاده از رابطه

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = m(1 + \tau)^{m-1}u(x, y), \quad (9.4)$$

و افزودن آن به دو طرف رابطه (۸.۴) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{v_0}{(1 + \tau)^m} \Delta v - v_0 f \left(\frac{v}{(1 + \tau)^m} \right) + m(1 + \tau)^{m-1}u(x, y). \quad (10.4)$$

سپس معادله (۱۰.۴) می‌تواند به یک نوع جدید از معادله دیفرانسیل جزئی بر حسب v تبدیل شود:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{v_0}{(1 + \tau)^m} \Delta v - v_0 f \left(\frac{v}{(1 + \tau)^m} \right) + \frac{mv}{1 + \tau}. \quad (11.4)$$

حال با استفاده از

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{v}{(1 + \tau)^m} \right) = \frac{v_\tau}{(1 + \tau)^m} - \frac{mv}{(1 + \tau)^{m+1}}, \quad (12.4)$$

و بعد از ضرب دو طرف معادله (۱۱.۴) در فاکتور انتگرال $\frac{1}{(1 + \tau)^m}$ بدست خواهیم آورد:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{v}{(1 + \tau)^m} \right) = \frac{v_0}{(1 + \tau)^{2m}} \Delta v - \frac{v_0}{(1 + \tau)^m} f \left(\frac{v}{(1 + \tau)^m} \right). \quad (13.4)$$

در ادامه با استفاده دوباره از معادله (۷.۴) یک معادله دیفرانسیل جزئی برای تابع u مطابق زیر بدست خواهیم آورد:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{v_0}{(1 + \tau)^m} (\Delta u - f(u)). \quad (14.4)$$

توجه کنید که در معادله بالا τ یک متغیر زمان ساختگی است و از آن استفاده شده است تا معادله (۵.۴) را به یک معادله دیفرانسیل جزئی در فضای $\mathbb{R}^{2+1}$ تبدیل کند. همچنین u یک تابع نامعلوم با $u = u(x, y, \tau)$ و شرایط (۲.۴) برای همه $\tau \geq 0$ می‌باشد و مقدار $u(x, y, \tau)|_{\tau=0}$ به وسیله حدس اولیه تعیین خواهد شد. حال فرض کنیم $u_i^j(\tau) := u(x_i, y_j, \tau)$ یک مقدار عددی از u در زمان ساختگی τ و در یک نقطه از شبکه (x_i, y_j) باشد. با استفاده از روش شبه-گسسته سازی بر روی معادله (۱۴.۴) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} u_i^j(\tau) = \frac{v_0}{(1 + \tau)^m} & \left(\frac{u_{i+1}^j(\tau) - 2u_i^j(\tau) + u_{i-1}^j(\tau)}{(\Delta x)^2} + \frac{u_i^{j+1}(\tau) - 2u_i^j(\tau) + u_i^{j-1}(\tau)}{(\Delta y)^2} \right. \\ & \left. - f(u_i^j(\tau)) \right), \end{aligned} \quad (15.4)$$

که $\Delta x = \frac{1}{n_1}$ ، $\Delta y = \frac{1}{n_2}$ ، $x_i = i\Delta x$ ، $y_j = j\Delta y$ و $i = 1, 2, \dots, n_1 - 1$ ، $j = 1, 2, \dots, n_2 - 1$.

۱.۲.۴ طرح حافظ گروه برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل

در ادامه با فرض $\mathbf{u} = (u_1^1, u_1^2, \dots, u_{n_1-1}^{n_2-1})^T$ معادله (۱۵.۴) به یک سیستم از معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل خواهد شد:

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \tau), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^M, \quad \tau \geq 0, \quad (16.4)$$

که $\mathbf{f}$ نشان دهنده یک تابع بردار با M مؤلفه در سمت راست معادله (۱۵.۴) خواهد بود و $M = (n_1 - 1) \times (n_2 - 1)$ تعداد کل نقطه‌های گسسته در درون دامنه $(0, 1) \times (0, 1)$ می باشد. اکنون با استفاده از روش طرح حافظ گروه

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{(\alpha_n - 1)\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{u}_n + \beta_n \|\mathbf{u}_n\| \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{f}_n\|^2} \mathbf{f}_n = \mathbf{u}_n + \eta_n \mathbf{f}_n. \quad (17.4)$$

معادله (۱۶.۴) را نسبت به متغیر τ با فرض مقدار اولیه $w_i^j(0)$ از زمان ساختگی اولیه $\tau = 0$ تا زمان ساختگی نهایی τ_f حل خواهیم نمود. شرط توقف برای این انتگرال گیری عددی به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} \left(w_i^j(n+1) - w_i^j(n) \right)^2 \leq \epsilon, \quad (18.4)$$

که ϵ یک معیار همگرایی معلوم می باشد. پارامترهای v_0 و m نیز می توانند باعث تقویت پایداری و افزایش سرعت همگرایی انتگرال گیری عددی شوند.

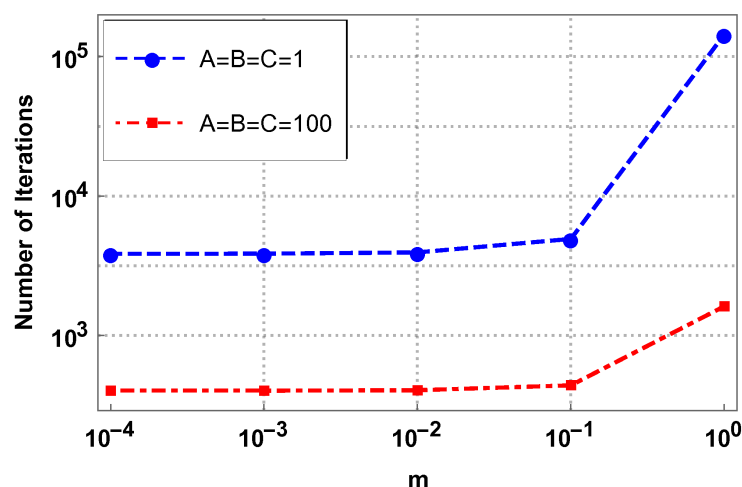
۳.۴ نتایج عددی

در این بخش حل عددی معادله برینکمن-فرچمیر را برای مقادیر مختلف A ، B و C بدست می آوریم. برای اثبات دقت روش عددی، خطای مانده و ریشه ی میانگین مربع خطای مانده را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R(x_i, y_j) = \frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} + \frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{(\Delta y)^2} - f(w_i^j),$$

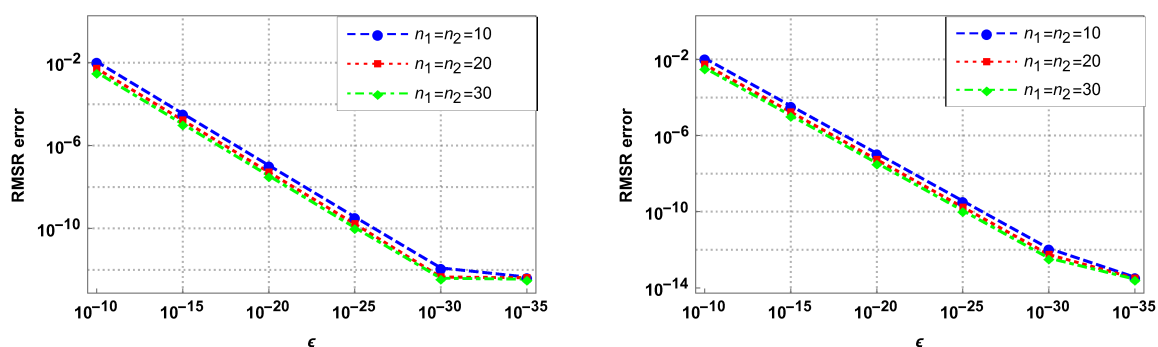
$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1-1} \sum_{j=1}^{n_2-1} R^2(x_i, y_j)}{(n_1 - 1)(n_2 - 1)}}, \quad (19.4)$$

که $f(u) = Au^2 + Bu - C$ و w_i^j تقریب جواب معادله در نقطه ی (x_i, y_j) است. در ابتدا برای نشان دادن تاثیر پارامتر m بر سرعت همگرایی، سایر پارامترها را به صورت $v_0 = \Delta\tau = 0.01$ ، $n_1 = n_2 = 20$ و $\epsilon = 10^{-10}$ ثابت می کنیم و شکل شماره ۱.۴ را رسم می کنیم. این شکل نشان می دهد هر چه پارامتر m به یک نزدیک می شود تعداد تکرارها برای رسیدن به محک توقف بیشتر

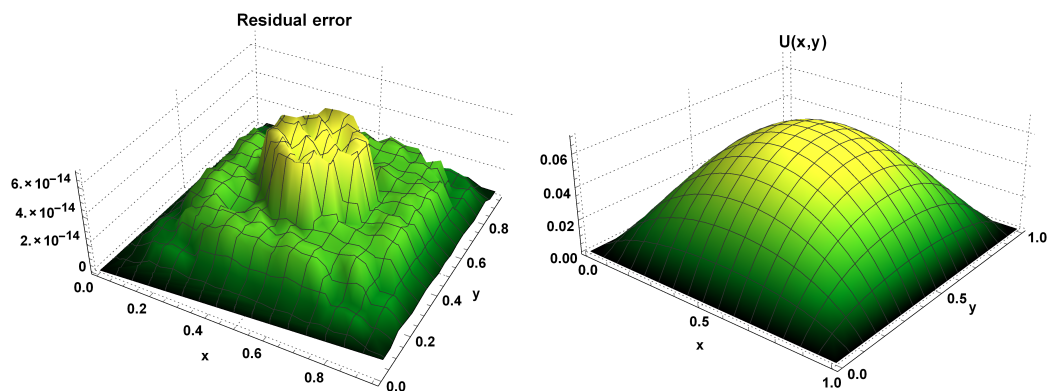


شکل ۱.۴: تعداد تکرارها بر حسب پارامتر m .

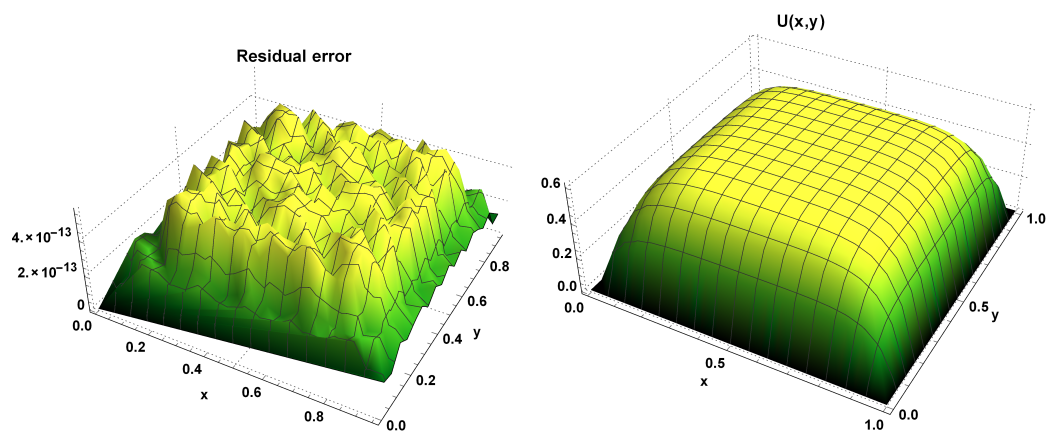
می‌شود. از طرفی برای مقادیر $m \leq 0.01$ تعداد تکرارها تقریباً ثابت است. بنابراین پارامتر m را برابر 0.01 انتخاب می‌کنیم. در شکل شماره ۲.۴ می‌توان مشاهده کرد که با کاهش معیار توقف (ϵ) یا به عبارتی افزایش تعداد تکرارهای روش طرح حافظ گروه، خطا کاهش می‌یابد که نشانه‌ای از همگرایی می‌باشد. همچنین انتخاب نقاط گره‌ای بیشتر نتایج را بهبود می‌بخشد. در شکل ۳.۴ مقادیر $n_1 = n_2 = 20$ و $\epsilon = 10^{-35}$ را در نظر گرفته و جواب عددی را به همراه خطای مانده آن که بسیار دقیق می‌باشد به ازای پارامترهای $A = B = C = 1$ رسم کرده‌ایم. از شکل ۴.۴ همین نتایج را می‌توان به ازای $A = B = C = 100$ مشاهده کرد. این خطاهای کم دقت روش عددی ارائه شده در این بخش را ثابت می‌کند. مقاله [۴۷] جواب‌های تحلیلی این معادله را بر حسب دو نوع توابع پایه‌ای متفاوت بدست آورده است. باید اشاره کنیم نتایج عددی ارائه شده توسط روش این فصل دقیق‌تر است از نتایج تحلیلی [۴۷] که دارای خطای $\mathcal{O}(10^{-3} \cdot \max(A, B, C))$ می‌باشد. همچنین در جدول‌های ۱.۴ - ۳.۴ خطای مانده‌ی روش را با نتایج بدست آمده توسط مقاله [۴۸] مقایسه کرده‌ایم. جدول‌ها نشان می‌دهند نتایج توسط روش ارائه شده در این فصل بهبود پیدا کرده‌اند.



شکل ۲.۴: ریشه ی میانگین مربع خطای مانده به ازای مقادیر مختلف معیار توقف ϵ و تعداد نقاط گسسته ی مختلف، به ازای $A = B = C = 1$ (چپ) و $A = B = C = 100$ (راست).



شکل ۳.۴: جواب تقریبی بدست آمده از روش متغیر ساختگی (راست) و خطای مانده این جواب (چپ) برای $A = B = C = 1$.



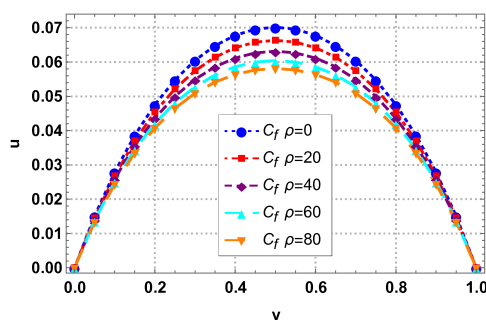
شکل ۴.۴: جواب تقریبی بدست آمده از روش متغیر ساختگی (راست) و خطای مانده این جواب (چپ) برای $A = B = C = 100$.

جدول ۱۰.۴: مقایسه بین خطای مانده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۴۸] برای مقادیر مختلف $C_f\rho$ و $\mu = \hat{\mu} = K = G = 1$.

$R(x, y), C_f\rho = 20$		$R(x, y), C_f\rho = 0$		گره‌ها
روش حاضر	روش [۴۸]	روش حاضر	روش [۴۸]	
7.4384×10^{-15}	4.7225×10^{-12}	9.1038×10^{-15}	9.7532×10^{-13}	(0.1, 0.1)
3.1863×10^{-14}	8.9296×10^{-12}	2.8310×10^{-14}	1.2051×10^{-12}	(0.2, 0.2)
3.2418×10^{-14}	1.3499×10^{-11}	3.3528×10^{-14}	1.9556×10^{-12}	(0.3, 0.3)
3.1197×10^{-14}	1.4683×10^{-11}	7.2053×10^{-14}	5.2708×10^{-14}	(0.4, 0.4)
5.2513×10^{-14}	41.5061×10^{-11}	6.9166×10^{-14}	1.2245×10^{-12}	(0.5, 0.5)
3.1197×10^{-14}	1.4584×10^{-11}	7.2053×10^{-14}	2.6600×10^{-12}	(0.6, 0.6)
3.2418×10^{-14}	1.2878×10^{-11}	3.3528×10^{-14}	2.6944×10^{-12}	(0.7, 0.7)
3.1863×10^{-14}	9.9805×10^{-12}	3.1086×10^{-14}	2.0740×10^{-13}	(0.8, 0.8)
5.1270×10^{-15}	6.3057×10^{-12}	7.4384×10^{-15}	4.6567×10^{-13}	(0.9, 0.9)

جدول ۲۰.۴: مقایسه بین خطای مانده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۴۸] برای مقادیر مختلف G و $C_f\rho = \mu = \hat{\mu} = K = 1$.

$R(x, y), G = 3$		$R(x, y), G = 1$		گره‌ها
روش حاضر	روش [۴۸]	روش حاضر	روش [۴۸]	
2.8865×10^{-14}	3.2648×10^{-11}	8.6597×10^{-15}	8.6817×10^{-12}	(0.1, 0.1)
6.4392×10^{-14}	6.3851×10^{-11}	3.2751×10^{-14}	1.6994×10^{-11}	(0.2, 0.2)
1.0347×10^{-13}	9.5980×10^{-11}	2.5535×10^{-14}	2.5481×10^{-11}	(0.3, 0.3)
1.1901×10^{-13}	1.1197×10^{-11}	6.5503×10^{-14}	2.9877×10^{-11}	(0.4, 0.4)
1.4477×10^{-13}	1.1831×10^{-10}	6.3060×10^{-14}	3.1781×10^{-11}	(0.5, 0.5)
1.1901×10^{-13}	1.1518×10^{-10}	6.5503×10^{-14}	3.1156×10^{-11}	(0.6, 0.6)
1.2567×10^{-13}	1.0074×10^{-11}	3.1086×10^{-14}	2.7408×10^{-11}	(0.7, 0.7)
6.4392×10^{-14}	7.6348×10^{-11}	3.5527×10^{-14}	2.0859×10^{-11}	(0.8, 0.8)
3.1530×10^{-14}	4.4938×10^{-12}	7.9936×10^{-15}	1.2254×10^{-11}	(0.9, 0.9)



شکل ۵.۴: جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف $C_f \rho$ و مقادیر ثابت $\mu = \hat{\mu} = K = G = 1$ در نقطه $x = 0.5$.

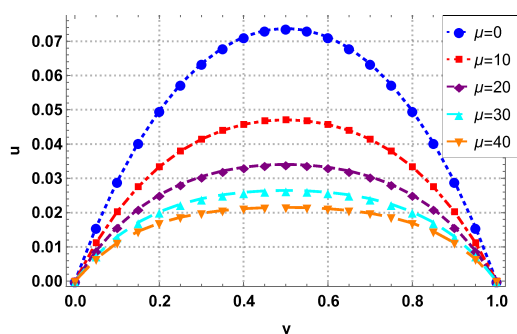
جدول ۳.۴: مقایسه بین خطای مانده از روش حاضر و روش ارائه شده در [۴۸] برای مقادیر مختلف از K و $C_f \rho = \mu = \hat{\mu} = G = 1$.

$R(x, y), K = 0.01$		$R(x, y), K = 0.1$		گره‌ها
روش حاضر	روش [۴۸]	روش حاضر	روش [۴۸]	
4.3298×10^{-15}	3.1343×10^{-11}	6.9944×10^{-15}	1.2070×10^{-12}	(0.1, 0.1)
4.4408×10^{-15}	9.7821×10^{-11}	1.6875×10^{-14}	3.1520×10^{-12}	(0.2, 0.2)
7.7438×10^{-15}	1.6396×10^{-11}	3.4527×10^{-14}	2.7080×10^{-12}	(0.3, 0.3)
8.9303×10^{-15}	2.1366×10^{-10}	3.0642×10^{-14}	3.7003×10^{-12}	(0.4, 0.4)
6.2970×10^{-15}	2.4540×10^{-10}	2.8199×10^{-14}	3.8493×10^{-12}	(0.5, 0.5)
8.9303×10^{-15}	2.3117×10^{-10}	3.0642×10^{-14}	2.7731×10^{-12}	(0.6, 0.6)
7.7438×10^{-15}	1.8493×10^{-10}	3.4527×10^{-14}	2.3381×10^{-12}	(0.7, 0.7)
4.4408×10^{-15}	1.1658×10^{-10}	1.6875×10^{-14}	2.8966×10^{-12}	(0.8, 0.8)
4.3298×10^{-15}	4.1058×10^{-11}	7.7715×10^{-15}	5.1097×10^{-13}	(0.9, 0.9)

۱.۳.۴ تاثیر پارامترهای فیزیکی مسئله بر جواب

در این بخش تاثیر پارامترهای فیزیکی موجود در معادله را بر جواب‌های مسئله بررسی خواهیم کرد. برای این کار تغییرات در مقادیر A ، B و C را که نشان دهنده تغییرات در پارامترهای فیزیکی C_f ، μ ، $\hat{\mu}$ و G می‌باشند را در نظر می‌گیریم. تغییر در یک پارامتر در حالی که همه پارامترهای دیگر ثابت فرض شده‌اند را بررسی می‌کنیم.

در ابتدا تغییر در C_f ، ضریب اینرسی یا تغییر در ρ چگالی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هر دو تغییر تاثیر یکسانی بر معادله (۵.۴) خواهد داشت از این رو کافی است تا تغییر در یکی از دو پارامتر C_f یا ρ (یا حاصل ضرب آن‌ها یعنی $C_f \rho$) را بررسی کنیم. در معادله (۵.۴) این معادل خواهد



شکل ۶.۴: جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف μ و مقادیر ثابت $C_f \rho = \hat{\mu} = K = G = 1$ در نقطه $x = 0.5$.

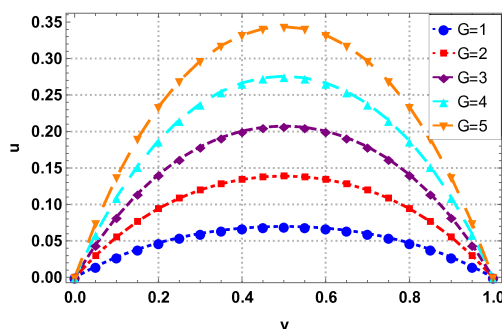
بود با افزایش در پارامتر A در حالی که سایر پارامترها ثابت نگه داشته شوند. در شکل شماره ۵.۴ جواب‌های عددی بدست آمده در نقطه ثابت $x = 0.5$ را با در نظر گرفتن $A = 0, 20, 40, 60, 80$ در حالی که $B = C = 1$ ثابت هستند را می‌توان مشاهده کرد. توجه داشته باشید که برای تمام نمودارهای این بخش می‌توانیم متغیر y را نیز ثابت کنیم چرا که جواب‌ها متقارن هستند. در شکل ۵.۴ ملاحظه می‌کنیم که همزمان با افزایش مقدار $C_f \rho$ جواب‌های معادله یعنی u ، در دامنه کاهش می‌یابند. از این رو، همزمان با افزایش مقدار حاصل ضرب ضریب اینرسی و چگالی، اندازه u بر روی مجرای مستطیلی کاهش می‌یابد. در حالتی که C_f یا ρ صفر باشند، $A = 0$ خواهد شد و معادله (۵.۴) دیگر غیر خطی نخواهد بود و به حالت در نظر گرفته شده در مقاله [۴۶] خواهد انجامید.

در ادامه تغییر در μ که ویسکوزیته^۳ جریان می‌باشد را بررسی می‌کنیم. افزایش در μ مستقیماً باعث افزایش B در معادله (۵.۴) خواهد شد. در شکل شماره ۶.۴ جواب‌های عددی بدست آمده بوسیله روش ارائه شده در این فصل را با ثابت در نظر گرفتن $x = 0.5$ برای مقادیر $B = 0, 10, 20, 30, 40$ و مقادیر ثابت $A = C = 1$ می‌توان مشاهده کرد. از این شکل مشخص است که افزایش در μ موجب کاهش در مقدار جواب u بر روی دامنه می‌شود. بنابراین همچنان که ویسکوزیته جریان افزایش می‌یابد اندازه u بر روی دامنه کاهش خواهد یافت.

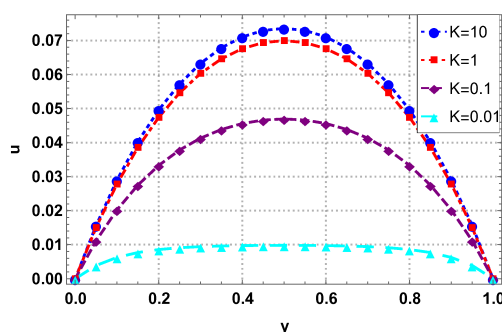
سوء گرادین فشار G تنها بر روی پارامتر C اثر گذار خواهد بود. به این ترتیب، با تغییر در پارامتر C تغییرات جواب را نسبت به پارامتر G بررسی کنیم. در شکل شماره ۷.۴ می‌توان جواب‌های بدست آمده را در نقطه ثابت $x = 0.5$ و به ازای پارامترهای $C = 1, 2, 3, 4, 5$ و ثابت‌های $A = B = 1$ مشاهده کرد. از این شکل مشاهده می‌کنیم که افزایش در پارامتر G موجب افزایش مقدار جواب می‌شود. این بدین معنی است زمانی که اثر منفی گرادین فشار اعمال شده افزایش می‌یابد، اندازه جواب بدست آمده برای معادله برینکمن-فرچیمر نیز افزایش خواهد یافت.

در ادامه تاثیر پارامتر K را مورد بررسی قرار می‌دهیم که نشان دهنده نفوذ پذیری مایع می‌باشد. پارامتر K هر دو جمله A و B را در معادله (۵.۴) به راه‌های متفاوت تحت تاثیر قرار می‌دهد. با

^۳Viscosity

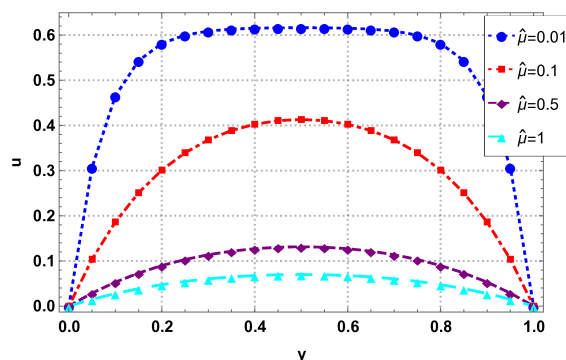


شکل ۷.۴: جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف G و مقادیر ثابت $\mu = \hat{\mu} = K = C_f \rho = 1$ در نقطه $x = 0.5$.



شکل ۸.۴: جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف K و مقادیر ثابت $C_f \rho = \hat{\mu} = \mu = G = 1$ در نقطه $x = 0.5$.

ثابت نگه داشتن همه پارامترهای فیزیکی، مشاهده می‌کنیم که A با نرخ $1/\sqrt{K}$ تغییر خواهد کرد، در صورتی که B با سرعت $1/K$ تغییر می‌کند. بنابراین هر دو پارامتر A و B با افزایش K کاهش خواهند یافت؛ اگر چه سرعت این کاهش برای هر یک متفاوت است و برای پارامتر B بیشتر است. در شکل شماره ۸.۴ حالت‌های $K = 0.01, 0.1, 1, 10$ را در نظر گرفته ایم. به این ترتیب برای این مقادیر انتخاب شده از K مقادیر متناظر $A = 10, \sqrt{10}, 1, 1/\sqrt{10}$ و $B = 100, 10, 1, 1/10$ را خواهیم داشت. همچنین مقدار $C = 1$ را ثابت می‌کنیم زیرا پارامتر K هیچ تأثیر مستقیمی بر روی پارامتر C نخواهد داشت. در شکل شماره ۸.۴ مشاهده می‌کنیم که افزایش پارامتر K موجب افزایش در جواب معادله می‌شود. در نتیجه افزایش نفوذپذیری باعث افزایش در اندازه u خواهد شد. در نهایت یک تغییر مثبت در $\hat{\mu}$ ، ویسکوزیته موثر، همه پارامترهای A ، B و C را به یک اندازه کاهش می‌دهد. بنابراین زمانی که $\hat{\mu}$ افزایش می‌یابد سمت راست معادله (۵.۴) کاهش می‌یابد. در شکل شماره ۹.۴ حالت‌های $\hat{\mu} = 0.01, 0.1, 0.5, 1$ را در نظر گرفته شده است. ملاحظه می‌کنیم که افزایش $\hat{\mu}$ باعث کاهش u خواهد شد. در نتیجه افزایش ویسکوزیته موثر موجب کاهش مقدار u می‌شود.



شکل ۹.۴: جواب‌های عددی برای مقادیر مختلف $\hat{\mu}$ و مقادیر ثابت $\mu = G = K = C_f \rho = 1$ در نقطه $x = 0.5$.

۴.۴ نتیجه‌گیری

در این فصل معادله-برینکمن فرچیمر را با استفاده از روش انتگرال گیری متغیر ساختگی که در کلاس روش‌های انتگرال‌گیری گروه لی می باشد، حل کردیم. در این روش مشتقات موجود در مسئله را با استفاده از تفاضلات متناهی معمولی گسسته سازی کرده و از روش طرح حافظ گروه برای حل مسئله نسبت به متغیر اضافه شده ساختگی استفاده کردیم. همچنین پارامترهای m و v_0 را برای افزایش پایداری و سرعت همگرایی روش به مسئله وارد کرده ایم. نتایج عددی بدست آمده نشان دهنده دقت بالای روش می باشد. همچنین تأثیر پارامترهای فیزیکی موجود در معادله را بر روی جواب مسئله، به طور دقیق بررسی کردیم.

فصل ۵

روش گروه لی مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی برای حل معادله کلی بنجامین- بونا-ماهونی-برگرز

۱.۵ مقدمه

در سال های اخیر، تکنیک های مختلفی برای پیاده سازی طرح های حافظ گروه بر روی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به کار گرفته شده است [۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴]. در بیشتر آن ها لازم است همه ی مشتقات موجود در مسئله را به جز یکی گسسته کنیم و یک سیستم از معادلات دیفرانسیل معمولی تولید کنیم. سپس از طرح حافظ گروه برای حل این سیستم استفاده کنیم (مانند روندی که در فصل قبل انجام شد). اما به کارگیری این روش بعضی مشکلات را به دنبال خواهد داشت. این روش به انتخاب طول گام بسیار حساس می باشد بدین معنا که بسیاری از معیار ها همانند پایداری، سازگاری و غیره باید در نظر گرفته شوند. اگر طول گام خیلی بزرگ انتخاب شود پایداری و یا سازگاری مسئله می تواند دچار مشکل شود و جواب قابل اعتمادی بدست نیاید. از طرفی اگر برای بدست آوردن نتایج خوب طول گام را خیلی کوچک انتخاب کنیم، با تعداد زیادی از معادلات دیفرانسیل معمولی روبرو خواهیم بود، بنابراین حجم محاسبات افزایش می یابد. با این توضیحات به کارگیری طرح حافظ گروه با این روش بر روی معادلات با مشتقات جزئی که دارای مشتقات پیچیده می باشند عملاً غیر ممکن است.

در این فصل برای حل این مشکل از توابع پایه ای شعاعی کمک می گیریم و طرح حافظ گروه را برای اولین بار با این توابع به کار می بریم. همچنین برای نشان دادن کارایی روش معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز^۱ (GBBMB) را با این روش حل می کنیم.

^۱Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers

۱.۱.۵ یک بررسی مختصر از معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز

معادله غیر خطی کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را در نظر می‌گیریم:

$$u_t - \Delta u_t - \Delta u + \nabla \cdot u = \nabla \cdot (F(u)) + f, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (۱.۵)$$

با شرط اولیه

$$u(\mathbf{x}, 0) = \omega(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۲.۵)$$

و شرط مرزی

$$u(\mathbf{x}, t) = h(t), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (۳.۵)$$

که $F(u)$ یک تابع غیر خطی است، f یک تابع از متغیرهای فضا و زمان می‌باشد، Δ ، $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ و ∇ به ترتیب عملگرهای لاپلاسین و گرادیان می‌باشند. با انتخاب $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ ، معادله بالا بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز نامیده می‌شود. اگر جمله Δu را حذف کنیم، معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی را خواهیم داشت. همچنین اگر علاوه بر حذف Δu ، قرار دهیم $F(u) = \frac{1}{2}u^2$ ، معادله بنجامین-بونا-ماهونی بدست می‌آید.

از میان کاربرد های معادله بنجامین-بونا-ماهونی می‌توانیم به موارد زیر اشاره کنیم [۶۵، ۶۶، ۶۷]:

- آنالیز امواج سطحی از طول موج بلند در مایعات؛
- امواج هیدرو در پلاسمای سرد؛
- امواج صوتی-گرانش در سیالات متراکم؛
- امواج صوتی در بلورهای هارمونیک.

روش‌های تحلیلی و عددی مختلفی برای حل معادله بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز در مقالات استفاده شده است که تعدادی از آن‌ها را مرور می‌کنیم. نویسنده در مقاله [۶۵] از روش انتگرال اولیه برای بدست آوردن یک جواب تحلیلی برای معادله اصلاح شده بنجامین-بونا-ماهونی استفاده کرده است. معادله بنجامین-بونا-ماهونی در مقاله [۶۷] توسط یک روش تعمیم یافته از روش معروف تانژانت-کوتانژانت هیپربولیک حل شده است. آنالیز غیر خطی از پروفایل‌های شوک چسبناک مسطح از معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز در دو بعد در مقاله [۶۸] انجام شده است. نویسنده و همکارانش در مقاله [۶۹] نرخ‌های واپاشی بهینه از جواب‌ها را برای معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی در فضای چند بعدی $n \geq 3$ مورد مطالعه قرار داده‌اند. نویسندگان در مقاله [۷۰] یک نرخ واپاشی نمایی از جواب‌ها برای مسئله کوشی از معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را با به کار گرفتن روش انرژی وزن دار فضا-زمان نشان می‌دهند. معادله‌های

بنجامین-بونا-ماهونی و اصلاح شده بنجامین-بونا-ماهونی با استفاده از روش تابع نمایی در مقاله [۷۱] حل شده اند و تعدادی از جواب‌های سالیتون از آن‌ها بدست آمده است. نویسندگان در مقاله [۷۲] نرخ همگرایی از جواب‌های معادله کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را برای انحطاط مربوط به جواب‌های لایه ای مرزی در نیم فضا مطالعه کرده اند. یک طرح تفاضل متناهی از نوع کرانک-نیکلسون با اثبات همگرایی از مرتبه دو در نرم گسسته H^1 در مقاله [۷۳] برای حل معادله بنجامین-بونا-ماهونی مورد بحث قرار گرفته است. نویسنده در مقاله [۷۴] یک روش بر پایه ی روش گالرکین استاندارد و فرمول کرانک-نیکلسون به ترتیب برای متغیرهای فضا و زمان ارائه می کند و همگرایی طرح اصلاح شده گالرکین خطی را ثابت می کند. خوانندگان علاقه مند برای اطلاعات بیشتر می توانند به [۷۵، ۶۶، ۶۷] مراجعه کنند.

۲.۵ پیاده سازی روش

۱.۲.۵ حالت یک بعدی

در این حالت Ω یک بازه دلخواه در $\mathbb{R}$ می باشد. در ابتدا بسط زیر از تابع $u(x, t)$ را در نظر می گیریم [۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹]:

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(r_j) + c_{M+1}(t)x + c_{M+2}(t). \quad (4.5)$$

تعدادی از انتخاب‌های محبوب برای تابع پایه ای شعاعی φ در جدول (۱.۵) آورده شده است که پارامتر آزاد c ، پارامتر شکل 2 نامیده می شود. در این فصل از توابع پایه ای شعاعی چند ربعی 3 استفاده خواهیم کرد. بنابراین در معادله (۴.۵) خواهیم داشت:

$$\varphi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + c^2}, \quad (5.5)$$

که $r_j = \{\|x - x_j\|, x_j \in \Omega\}$ ، نشان دهنده فاصله اقلیدسی بین x_j و x می باشد ($\{x_j\}_{j=1}^M$ معمولاً نقاط مرکزی 4 نامیده می شوند). همان طور که در مقاله [۸۰] ذکر شده است دقت تعداد زیادی از طرح‌ها با توابع پایه ای شعاعی به پارامتر شکل c بستگی دارد. در حالی که مقاله‌های بسیاری بر روی مقدار بهینه c نوشته شده است [۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶]، اما می توان گفت پیدا کردن یک مقدار بهینه هنوز یک مسئله باز است. از طرفی بسیاری نویسندگان از روش آزمون و خطا برای بدست آوردن پارامتر شکل مناسب استفاده می کنند به گونه ای که نتایج دارای بهترین دقت، یا عدد حالت ماتریس ضرایب روش عددی دارای کمترین مقدار باشد. ما هم در این فصل از همین روش استفاده کرده ایم. در معادله (۴.۵)، $M+2$ متغیر مجهول داریم. در کنار M معادله نتیجه شده

^۲Shape parameter

^۳Multiquadratics

^۴Center nodes

جدول ۱.۵: تعدادی از توابع پایه‌ای شعاعی.

تعریف تابع	نام تابع
r	خطی
r^3	مکعبی
$\sqrt{r^2 + c^2}$	چند ربعی
e^{-cr^2}	گاوسی
$r^{2n} \ln(r)$	اسپلاین صفحه‌ای باریک

از محاسبه معادله (۴.۵) در M نقطه $\{x_i\}_{i=1}^M$ ، دو معادله دیگر نیز لازم است که به صورت زیر اضافه می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^M c_j^n = \sum_{j=1}^M c_j^n x_j = 0, \quad (6.5)$$

که $c_j^n \equiv c_j(t_n)$. برای استفاده از روش کانساس^۵ فرض می‌کنیم $\{x_i\}_{i=1}^M$ ، M نقطه در Ω باشند به طوری که $\{x_i\}_{i=2}^{M-1}$ نقاط داخلی هستند و x_1 و x_M نقاط مرزی اند. برای هر نقطه x_i در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(r_{ij}) = \sqrt{r_{ij}^2 + c^2}, \quad (7.5)$$

که در آن $r_{ij} = \{\|x_i - x_j\|, x_i, x_j \in \Omega\}$ نشان دهنده فاصله اقلیدسی بین x_i و x_j می‌باشد. با قرار دادن معادله (۴.۵) برای نقاط داخلی در معادله (۱.۵) بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}(t) x_i + c_{M+2}(t) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(r_{ij}) \right) = \\ \sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(r_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \nabla \varphi(r_{ij}) - c_{M+1}(t) + \\ \nabla \left(F \left(\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}(t) x_i + c_{M+2}(t) \right) \right) + f(x_i, t), \quad i = 2, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (8.5)$$

که $\nabla \varphi(r_{ij}) = \{\varphi'(r_j)\}|_{x=x_i}$ و $\Delta \varphi(r_{ij}) = \{\varphi''(r_j)\}|_{x=x_i}$. حال با تعریف بردارهای زیر

$$\mathbf{u}(t) = \left[\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}(t) x_i + c_{M+2}(t) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(r_{ij}) \right]_{i=2}^{M-1},$$

^۵Kansas

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) = \left[\sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(r_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \nabla \varphi(r_{ij}) - c_{M+1}(t) + \nabla \left(F \left(\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}(t) x_i + c_{M+2}(t) \right) \right) + f(x_i, t) \right]_{i=2}^{M-1}, \quad (9.5)$$

معادله (۸.۵) به فرم $\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t))$ تبدیل می‌شود. در ادامه از طرح حافظ گروه به صورت

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{(\alpha_k - 1) \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_k + \beta_k \|\mathbf{u}_k\| \|\mathbf{f}_k\|}{\|\mathbf{f}_k\|^2} \mathbf{f}_k = \mathbf{u}_k + \eta_k \mathbf{f}_k, \quad (10.5)$$

برای حل معادله (۸.۵) نسبت به t استفاده می‌کنیم. برای این کار $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ که $\tau = T/N$ طول گام زمانی و T زمان نهایی می‌باشد را در نظر می‌گیریم. با استفاده از معادله (۱۰.۵) برای $n = 0$ ، رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$\sum_{j=1}^M c_j^1 \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}^1 x_i + c_{M+2}^1 - \sum_{j=1}^M c_j^1 \Delta \varphi(r_{ij}) = (\omega(x_i) - \omega''(x_i)) + \eta_0 \mathbf{f}_0, \quad i = 2, \dots, M-1, \quad (11.5)$$

که در آن $\mathbf{f}_0 = [\omega''(x_i) - \omega'(x_i) + F'(\omega(x_i)) + f(x_i, 0)]_{i=2}^{M-1}$ و η_0 با استفاده از معادله (۱۰.۵) محاسبه می‌شود. برای $1 \leq n \leq N-1$ خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^M c_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}^{n+1} x_i + c_{M+2}^{n+1} - \sum_{j=1}^M c_j^{n+1} \Delta \varphi(r_{ij}) = \left(\sum_{j=1}^M c_j^n \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}^n x_i + c_{M+2}^n - \sum_{j=1}^M c_j^n \Delta \varphi(r_{ij}) \right) + \eta_n \mathbf{f}_n, \quad i = 2, \dots, M-1, \quad (12.5)$$

که

$$\mathbf{f}_n = \left[\sum_{j=1}^M c_j^n \Delta \varphi(r_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j^n \nabla \varphi(r_{ij}) - c_{M+1}^n + \nabla \left(F \left(\sum_{j=1}^M c_j^n \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}^n x_i + c_{M+2}^n \right) \right) + f(x_i, t_n) \right]_{i=2}^{M-1}, \quad (13.5)$$

و η_n با استفاده از معادله (۱۰.۵) بدست می‌آید. با استفاده از معادلات (۶.۵)، (۱۱.۵)، (۱۲.۵) و شرط مرزی (۳.۵) ماتریس زیر را خواهیم داشت:

$$\mathbf{A} \mathbf{c}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1}, \quad (14.5)$$

که

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varphi(r_{1,1}) & \varphi(r_{1,2}) & \cdots & \varphi(r_{1,M}) & x_1 & 1 \\ \Pi(\varphi(r_{2,1})) & \Pi(\varphi(r_{2,2})) & \cdots & \Pi(\varphi(r_{2,M})) & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Pi(\varphi(r_{M-1,1})) & \Pi(\varphi(r_{M-1,2})) & \cdots & \Pi(\varphi(r_{M-1,M})) & x_{M-1} & 1 \\ \varphi(r_{M,1}) & \varphi(r_{M,2}) & \cdots & \varphi(r_{M,M}) & x_M & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_M & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (15.5)$$

 یک ماتریس $(M+2) \times (M+2)$ - بعدی است، عملگر Π نیز به صورت

$$\Pi(\varphi(r_{i,j})) = \{\varphi(r_j) - \Delta\varphi(r_j)\} |_{x=x_i}, \quad 2 \leq i \leq M-1, \quad 1 \leq j \leq M,$$

است. همچنین داریم

$$\mathbf{c}^{n+1} = [c_1^{n+1} \quad c_2^{n+1} \quad \cdots \quad c_{M+1}^{n+1} \quad c_{M+2}^{n+1}]^T, \quad \mathbf{B}^{n+1} = [b_1^{n+1} \quad b_2^{n+1} \quad \cdots \quad b_M^{n+1} \quad 0 \quad 0]^T, \quad (16.5)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} b_i^1 &= \{\omega(x) - \omega''(x) + \eta_0 \mathbf{f}_0\} |_{x=x_i}, \quad 1 < i < M, \\ b_i^{n+1} &= \sum_{j=1}^M c_j^n \varphi(r_{ij}) + c_{M+1}^n x_i + c_{M+2}^n \\ &\quad - \sum_{j=1}^M c_j^n \Delta\varphi(r_{ij}) + \eta_n \mathbf{f}_n, \quad 1 < i < M, \quad 1 \leq n \leq N-1, \end{aligned} \quad (17.5)$$

و در نهایت از شرایط مرزی مسئله داریم:

$$b_1^{n+1} = h(a, t_{n+1}), \quad b_M^{n+1} = h(b, t_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (18.5)$$

بعد از حل دستگاه معادلات جبری $\mathbf{Ac}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1}$ در هر طول گام زمانی، می‌توان جواب عددی را با استفاده از معادله (۴.۵) ساخت. برای حل دستگاه معادلات $\mathbf{Ac}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1}$ از تجزیه LU استفاده کرده ایم.

۲.۲.۵ حالت n - بعدی ($n \geq 2$)

در این حالت Ω یک ناحیه دلخواه در $\mathbb{R}^n$ ، $n \geq 2$ می‌باشد. برای $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ یک بسط تقریبی از $u(\mathbf{x}, t)$ را به شکل زیر تشکیل می‌دهیم:

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(\mathbf{r}_j), \quad (19.5)$$

به طوری که

$$\varphi(\mathbf{r}_j) = \sqrt{\mathbf{r}_j^2 + c^2}, \quad (20.5)$$

که $\mathbf{r}_j = \{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, \mathbf{x}_j \in \Omega\}$ نشان دهنده فاصله اقلیدسی بین $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}_j$ می باشد. برای استفاده از روش کانساس فرض می کنیم $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^M$ ، M نقطه هم مکانی در Ω باشند که در آن $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{M_l}$ نقاط مرزی هستند و $\{\mathbf{x}_i\}_{i=M_l+1}^M$ نقاط داخلی می باشند. برای هر نقطه $\mathbf{x}_i$ در نظر می گیریم:

$$\varphi(\mathbf{r}_{ij}) = \sqrt{\mathbf{r}_{ij}^2 + c^2}, \quad (21.5)$$

که $\mathbf{r}_{ij} = \{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \Omega\}$. با قرار دادن معادله (۱۹.۵) برای نقاط داخلی در معادله (۱.۵) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) \right) = \\ \sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \nabla \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \nabla \left(F \left(\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(\mathbf{r}_{ij}) \right) \right) \\ + f(\mathbf{x}_i, t), \quad i = M_l + 1, \dots, M, \quad (22.5) \end{aligned}$$

که $\Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) = \{\Delta \varphi(\mathbf{r}_j)\} |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ و $\nabla \varphi(\mathbf{r}_{ij}) = \{\nabla \varphi(\mathbf{r}_j)\} |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}$ اکنون با تعریف بردارهای

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = \left[\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) \right]_{i=M_l+1}^M, \\ \mathbf{f}(t, \mathbf{u}(t)) = \left[\sum_{j=1}^M c_j(t) \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j(t) \nabla \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \nabla \left(F \left(\sum_{j=1}^M c_j(t) \varphi(\mathbf{r}_{ij}) \right) \right) + f(\mathbf{x}_i, t) \right]_{i=M_l+1}^M, \quad (23.5) \end{aligned}$$

معادله (۲۲.۵) را می توان به کمک طرح حافظ گروه حل کرد. برای این منظور نقاط گسسته را به صورت $t_k = n\tau$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$ که $\tau = T/N$ طول گام زمانی و T زمان نهایی می باشد، در نظر می گیریم. در نتیجه برای $n = 0$ فرم زیر را خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^M c_j^1 \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j^1 \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) = (\omega(\mathbf{x}_i) - \Delta \omega(\mathbf{x}_i)) + \eta_0 \mathbf{f}_0, \quad i = M_l + 1, \dots, M, \quad (24.5)$$

که $\mathbf{f}_0 = [\Delta \omega(\mathbf{x}_i) - \nabla \omega(\mathbf{x}_i) + \nabla F(\omega(\mathbf{x}_i)) + f(\mathbf{x}_i, 0)]_{i=M_l+1}^M$ و η_0 از معادله (۱۰.۵) محاسبه می شوند. برای $1 \leq n \leq N-1$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M c_j^{n+1} \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j^{n+1} \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) = \\ \sum_{j=1}^M c_j^n \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j^n \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \eta_n \mathbf{f}_n, \quad i = M_l + 1, \dots, M, \quad (25.5) \end{aligned}$$

که

$$\mathbf{f}_n = \left[\sum_{j=1}^M c_j^n \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j^n \nabla \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \nabla \left(F \left(\sum_{j=1}^M c_j^n \varphi(\mathbf{r}_{ij}) \right) \right) + f(\mathbf{x}_i, t_n) \right]_{i=M_l+1}^M,$$

و η_n از معادله (۱۰.۵) بدست خواهد آمد. با استفاده از معادلات (۲۴.۵)، (۲۵.۵) و شرط مرزی (۳.۵) فرم ماتریسی زیر را داریم:

$$\mathbf{A}\mathbf{c}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1}, \quad (26.5)$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varphi(\mathbf{r}_{1,1}) & \varphi(\mathbf{r}_{1,2}) & \cdots & \varphi(\mathbf{r}_{1,M_l}) & \cdots & \varphi(\mathbf{r}_{1,M}) \\ \varphi(\mathbf{r}_{2,1}) & \varphi(\mathbf{r}_{2,2}) & \cdots & \varphi(\mathbf{r}_{2,M_l}) & \cdots & \varphi(\mathbf{r}_{2,M}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi(\mathbf{r}_{M_l,1}) & \varphi(\mathbf{r}_{M_l,2}) & \cdots & \varphi(\mathbf{r}_{M_l,M_l}) & \cdots & \varphi(\mathbf{r}_{M_l,M}) \\ \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M_l+1,1})) & \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M_l+1,2})) & \cdots & \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M_l+1,M_l})) & \cdots & \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M_l+1,M})) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M,1})) & \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M,2})) & \cdots & \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M,M_l})) & \cdots & \Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{M,M})) \end{bmatrix}, \quad (27.5)$$

یک ماتریس $M \times M$ - بعدی، عملگر Υ به صورت

$$\Upsilon(\varphi(\mathbf{r}_{i,j})) = \{\varphi(\mathbf{r}_j) - \Delta \varphi(\mathbf{r}_j)\} |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}, \quad M_l + 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq M,$$

و خواهیم داشت:

$$\mathbf{c}^{n+1} = [c_1^{n+1} \quad c_2^{n+1} \quad \cdots \quad c_M^{n+1}]^T, \quad \mathbf{B}^{n+1} = [b_1^{n+1} \quad b_2^{n+1} \quad \cdots \quad b_M^{n+1}]^T, \quad (28.5)$$

که

$$b_i^1 = \{\omega(\mathbf{x}) - \Delta \omega(\mathbf{x}) + \eta_0 \mathbf{f}_0\} |_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}, \quad M_l + 1 \leq i \leq M, \quad (29.5)$$

و همچنین بدست می آوریم:

$$b_i^{n+1} = \sum_{j=1}^M c_j^n \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \sum_{j=1}^M c_j^n \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \eta_n \mathbf{f}_n, \quad M_l + 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (30.5)$$

و سرانجام از شرایط مرزی مسئله بدست می آوریم:

$$b_i^{n+1} = h(\mathbf{x}_i, t_{n+1}), \quad 1 \leq i \leq M_l, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (31.5)$$

بعد از حل سیستم معادلات جبری $\mathbf{A}\mathbf{c}^{n+1} = \mathbf{B}^{n+1}$ در هر طول گام زمانی با روش تجزیه LU می توان جواب نهایی معادله را با استفاده از (۱۹.۵) بدست آورد.

۳.۵ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی بدست آمده از روش عددی ارائه شده در این فصل را ارائه می‌دهیم. دقت روش را با به کار بردن آن بر روی مثال‌های مختلف با در نظر گرفتن مقادیر مختلف h (فاصله نقاط در فضا) و τ (طول گام زمانی) نشان می‌دهیم. به طور خاص، نرم‌های خطای زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$L_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq M} |u(\mathbf{x}_i, T) - U(\mathbf{x}_i, T)|, \quad L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^M |u(\mathbf{x}_i, T) - U(\mathbf{x}_i, T)|^2},$$

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |u(\mathbf{x}_i, T) - U(\mathbf{x}_i, T)|^2}, \quad absolute \ error = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N |u(x_i, t_j) - U(x_i, t_j)|,$$

که T زمان نهایی، M تعداد کل نقاط و N مجموع نقاط گسسته سازی شده زمانی می‌باشند.

۱.۳.۵ مثال ۱

در ابتدا معادله غیر خطی کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز را در یک بعد در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + f(x, t), \quad (32.5)$$

با شرط اولیه ی

$$u(x, 0) = \operatorname{sech}(x), \quad a < x < b, \quad (33.5)$$

و شرایط مرزی

$$u(a, t) = \operatorname{sech}(a - t), \quad u(b, t) = \operatorname{sech}(b - t), \quad 0 < t \leq T. \quad (34.5)$$

با در نظر گرفتن

$$f(x, t) = \operatorname{sech}(t - x) (\operatorname{sech}^2(t - x) (1 - 5 \tanh(t - x)) - \operatorname{sech}(t - x) \tanh(t - x) + \tanh^2(t - x) (\tanh(t - x) - 1)), \quad (35.5)$$

جواب دقیق این مسئله $u(x, t) = \operatorname{sech}(x - t)$ می‌باشد. این مثال را با روش ارائه شده در این فصل و به ازای مقادیر مختلف h, τ, a و b در زمان‌های نهایی مختلف T حل می‌کنیم. طول گام فضا را $h = 1/10$ انتخاب می‌کنیم. جدول ۲.۵ خطاهای بدست آمده روش را روی بازه $[0, 1]$ با زمان نهایی $T = 1$ برای مقادیر مختلف τ نشان می‌دهد. از این جدول می‌توان مشاهده کرد هر چه طول گام زمانی τ کوچکتر می‌شود خطاهای بدست آمده کوچکتر می‌شوند. در جدول ۳.۵ خطای بدست آمده از روش حاضر را با خطای روش ارائه شده در مقاله [۶۷] مقایسه کرده ایم. ملاحظه می‌کنیم خطا برای زمان نهایی $T = 1$ تقریباً یکسان است اما برای $T = 5$ نتایج روش ما کمی بهتر می‌باشد. همچنین، شکل ۱.۵ جواب تقریبی معادله به همراه خطای مطلق آن را بر روی بازه $[-10, 10]$ با $t \in [0, 10]$ نشان می‌دهد.

۲.۳.۵ مثال ۲

در این مثال معادله را در دو بعد در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \\ + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = u(x, y, t) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + u(x, y, t) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + f(x, y, t), \end{aligned} \quad (36.5)$$

با شرط اولیه ی

$$u(x, y, 0) = 1, \quad x, y \in \Omega, \quad (37.5)$$

و شرط مرزی

$$u(x, y, t) = 1 + t \sin(x + y), \quad x, y \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (38.5)$$

با انتخاب

$$f(x, y, t) = \sin(x + y) (3 + 2t - 2t^2 \cos(x + y)), \quad (39.5)$$

جواب دقیق معادله $u(x, y, t) = 1 + t \sin(x + y)$ می‌باشد. این مثال را نیز برای مقادیر مختلف h و τ در زمان‌های نهایی مختلف بر روی ناحیه‌های مستطیلی $\Omega_1 = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ ، مثلثی $\Omega_2 = \{(x, y) : y \geq 0, y + x \leq 1, y - x \leq 1\}$ ، و دایره‌ای $\Omega_3 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ که این نواحی را می‌توان در شکل ۲.۵ مشاهده کرد، حل کرده ایم. همچنین این مثال را بر روی ناحیه نامنظم^۶ که معادله آن به صورت $r = \frac{1}{n^2} [1 + 2n + n^2 - (n + 1) \cos(n\theta)]$ می‌باشد، حل کرده ایم. می‌توان این ناحیه‌های نامنظم را برای $n = 4$ و $n = 8$ در شکل ۳.۵ مشاهده کرد که به ترتیب با Ω_4 و Ω_5 مشخص شده‌اند. جداول شماره ۴.۵ و ۶.۵ به ترتیب خطاهای بدست آمده برای روش عددی را با $h = 1/10$ ، $T = 5$ روی ناحیه مستطیلی و با $h = 1/10$ ، $T = 10$ بر روی ناحیه مثلثی به ازای مقادیر مختلف τ نشان می‌دهند. در جدول ۵.۵ نتایج عددی حاصل شده را با روش مقاله [۶۷] مقایسه کرده ایم که نشان دهنده ی بهبود خطاها توسط روش ما می‌باشد. در شکل‌های ۴.۵-۶.۵ می‌توان جواب تقریبی و خطای مطلق آن را به ترتیب بر روی نواحی دایره‌ای و نامنظم برای زمان‌های نهایی مختلف مشاهده کرد.

^۶ Irregular

۳.۳.۵ مثال ۳

در این مثال یک مسئله دو بعدی دیگر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \\ + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = \cos(u(x, y, t)) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \\ + \cos(u(x, y, t)) \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + f(x, y, t), \quad (40.5) \end{aligned}$$

با شرط اولیه ی

$$u(x, y, 0) = \operatorname{sech}^2(x + y - r) + \operatorname{sech}^2(x + y + r), \quad x, y \in \Omega, \quad (41.5)$$

و شرط مرزی

$$u(x, y, t) = \exp(t) (\operatorname{sech}^2(x + y - r) + \operatorname{sech}^2(x + y + r)), \quad x, y \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (42.5)$$

در این مثال $f(x, y, t)$ را بگونه ای انتخاب می‌کنیم که جواب دقیق

$$u(x, y, t) = \exp(t) (\operatorname{sech}(x + y - r) + \operatorname{sech}^2(x + y + r)),$$

شود. این مثال را نیز با روش عددی ارائه شده در این فصل برای چندین مقدار مختلف h ، τ و r در زمان‌های نهایی مختلف بر روی نواحی مستطیلی، مثلثی و دایره ای حل کرده ایم. همچنین این مثال را بر روی نواحی نامنظم $\{\frac{1}{n^2} (1 + 2n + n^2 - (n + 1) \cos(n\theta)) \mid n = 16\}$ و Ω_7 $\{\exp(\sin(\theta)) \sin^2(2\theta) + \exp(\cos(\theta)) \cos^2(2\theta)\}$ حل کرده ایم که می‌توان این نواحی نامنظم را در شکل شماره ۳.۵ ملاحظه کرد. ابتدا در جدول ۷.۵ نتایج عددی را با نتایج مقاله ی [۶۷] در زمان‌های نهایی $T = 1$ و $T = 2$ مقایسه کرده ایم. این جدول نشان می‌دهد روش عددی به کار گرفته شده در این فصل نتایج را بهبود بخشیده است. در ادامه، نتایج عددی بدست آمده برای این مثال را می‌توان در شکل‌های ۷.۵-۱۲.۵ مشاهده کرد.

۴.۳.۵ مثال ۴

در آخرین مثال، یک حالت سه بعدی از مسئله را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} \\ + \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} = u(x, y, z, t) \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial x} + u(x, y, z, t) \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial y} \\ + f(x, y, z, t), \quad (43.5) \end{aligned}$$

با شرط اولیه ی

$$u(x, y, z, 0) = 1, \quad x, y, z \in \Omega, \quad (44.5)$$

و شرط مرزی

$$u(x, y, z, t) = 1 + t \sin(x + y + z), \quad x, y, z \in \partial\Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (45.5)$$

با در نظر گرفتن

$$f(x, y, z, t) = (4 + 3t) \sin(x + y + z) + t \cos(x + y + z) (1 - 2t \sin(x + y + z)) - t \cos(x + y + z) (1 + t \sin(x + y + z)), \quad (46.5)$$

جواب دقیق این مسئله $u(x, y, t) = 1 + t \sin(x + y + z)$ می باشد. این مثال را بر روی نواحی مکعبی و کروی که در شکل ۱۳.۵ نشان داده شده اند، حل کرده ایم. در جدول ۸.۵ نتایج بدست آمده روی ناحیه ی مکعبی را در زمان نهایی $T = 1$ با نتایج مقاله [۶۷] مقایسه کرده ایم. باز هم ملاحظه می کنیم روش عددی ارائه شده در این فصل دقیق تر می باشد. در جدول های ۹.۵ و ۱۰.۵ خطاهای بدست آمده برای این مثال را در زمان های مختلف با $h = 1/10$ و $\tau = 1/100$ بر روی نواحی مکعب و کره می توان مشاهده کرد. همچنین $z = 0$ و $T = 1$ را ثابت در نظر گرفته ایم و جواب های عددی و خطای مطلق این جواب ها را می توان در شکل های ۱۴.۵ و ۱۵.۵ مشاهده کرد.

۴.۵ نتیجه گیری

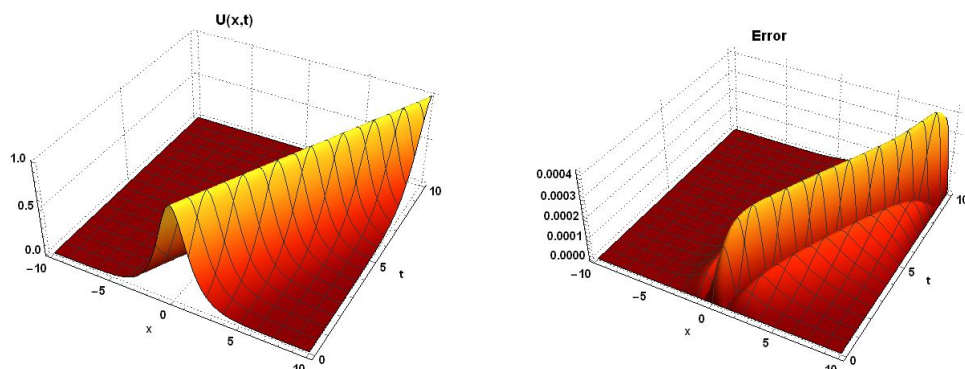
در این فصل روش طرح حافظ گروه را با توابع پایه ای شعاعی ترکیب کردیم و از آن برای حل معادله با مشتقات جزئی کلی بنجامین-بونا-ماهونی-برگرز استفاده کردیم. از جمله مزیت های این روش نسبت به گسسته سازی های معمولی که قبلاً انجام می شد این است که از مشکلات مربوط به گسسته سازی های معمولی در امان هستیم. همچنین با توجه به استفاده از توابع پایه ای شعاعی می توان از این روش روی مسائل با بعد بالا و دامنه به شکل های مختلف استفاده کرد. مثال های عددی حل شده کارایی روش را بخوبی نشان می دهند.

جدول ۲.۵: خطاهای بدست آمده از روش عددی در بازه $[0, 1]$ با $h = 1/10$ و $T = 1$ برای مثال ۱.

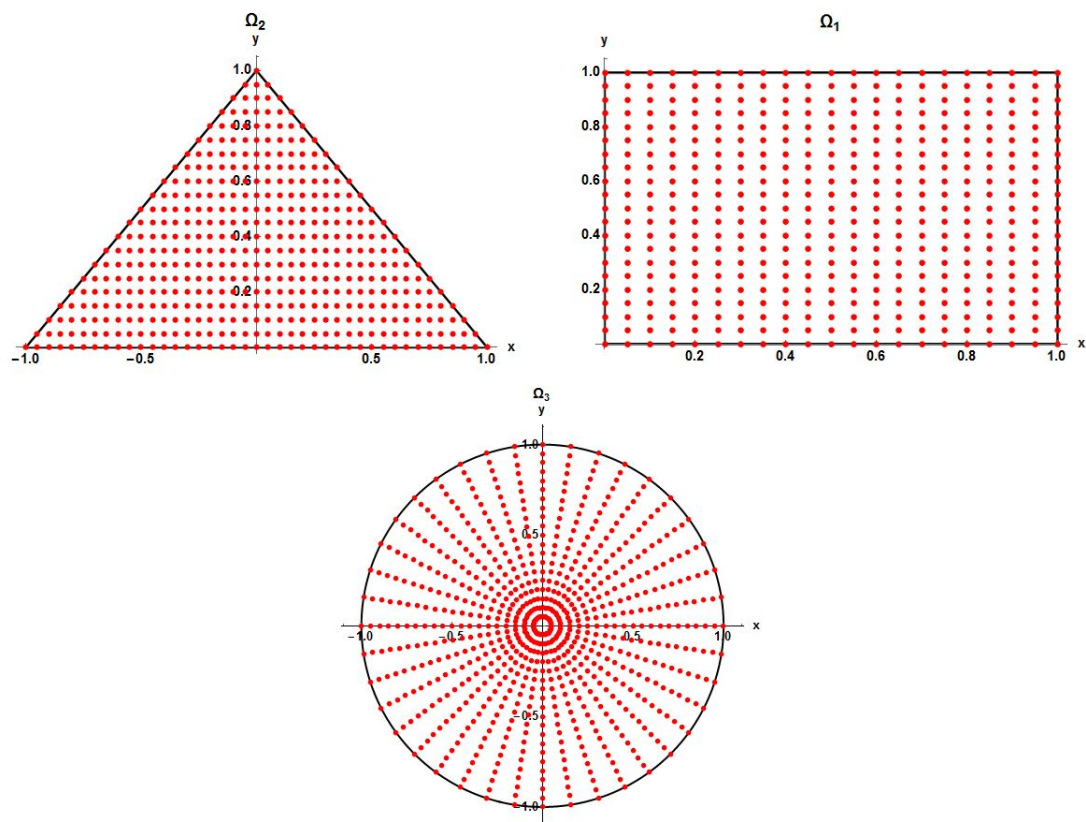
c	L_2	L_∞	RMS	τ
0.1	2.5534×10^{-2}	1.1899×10^{-2}	7.6989×10^{-3}	1/10
0.2	1.4099×10^{-2}	6.4885×10^{-3}	4.2509×10^{-3}	1/20
0.3	7.0083×10^{-3}	3.2224×10^{-3}	2.1131×10^{-3}	1/40
0.4	3.4985×10^{-3}	1.6079×10^{-3}	1.0548×10^{-3}	1/80
0.5	1.7566×10^{-3}	8.0634×10^{-4}	5.2964×10^{-4}	1/160
0.6	8.8586×10^{-4}	4.0580×10^{-4}	2.6710×10^{-4}	1/320
0.7	4.4784×10^{-4}	2.0463×10^{-4}	1.3503×10^{-4}	1/640
0.8	2.2665×10^{-4}	1.0328×10^{-4}	6.8336×10^{-5}	1/1280
0.9	1.1474×10^{-4}	5.2139×10^{-5}	3.4594×10^{-5}	1/2560

جدول ۳.۵: مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال ۱ به ازای $h = 1/10$.

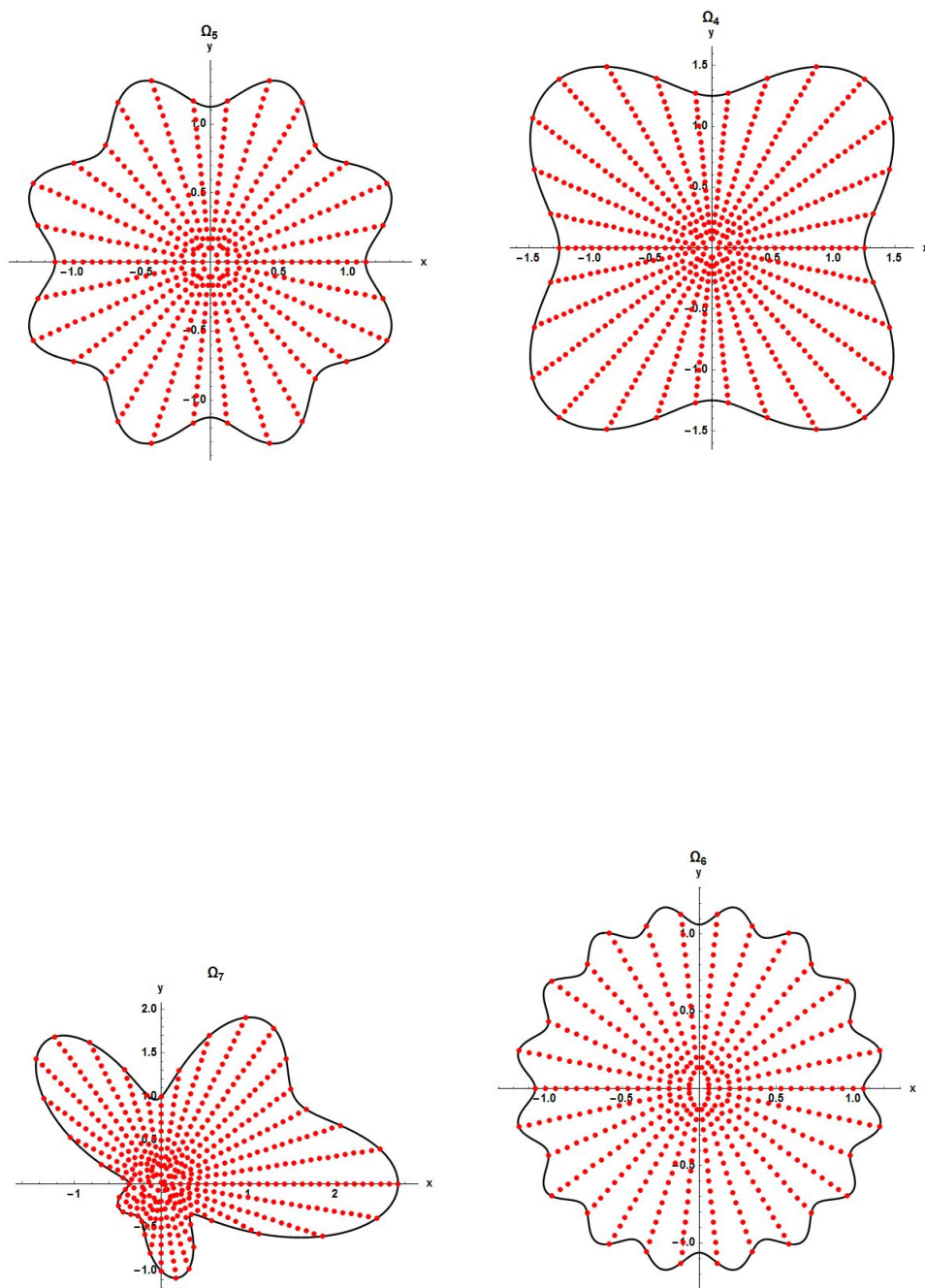
$T = 5, L_\infty$		$T = 1, L_\infty$		τ
روش حاضر	روش [۶۷]	روش حاضر	روش [۶۷]	
5.4835×10^{-4}	1.0335×10^{-3}	1.1899×10^{-2}	1.1306×10^{-2}	1/10
2.8818×10^{-4}	5.8509×10^{-4}	6.4885×10^{-3}	5.6005×10^{-3}	1/20
1.5032×10^{-4}	2.9635×10^{-4}	3.2224×10^{-3}	2.7770×10^{-3}	1/40
7.7386×10^{-5}	1.4801×10^{-4}	1.6079×10^{-3}	1.3862×10^{-3}	1/80
3.9435×10^{-5}	7.3858×10^{-5}	8.0634×10^{-4}	6.9513×10^{-4}	1/160
1.9972×10^{-5}	3.6874×10^{-5}	4.0580×10^{-4}	3.4956×10^{-4}	1/320



شکل ۱.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/1000$ و $c = 0.9$ بر روی بازه $[-10, 10]$ با $t \in [0, 10]$ برای مثال ۱.



شکل ۲.۵: توزیع نقاط گره‌ای در ناحیه‌های مستطیلی، مثلثی و دایره‌ای شکل.



شکل ۳.۵: توزیع نقاط گره‌ای در ناحیه‌های نامنظم.

جدول ۴.۵: خطاهای بدست آمده برای روش عددی با $h = 1/10$ و $T = 5$ روی ناحیه مستطیلی $[0, 1] \times [0, 1]$ برای مثال ۲.

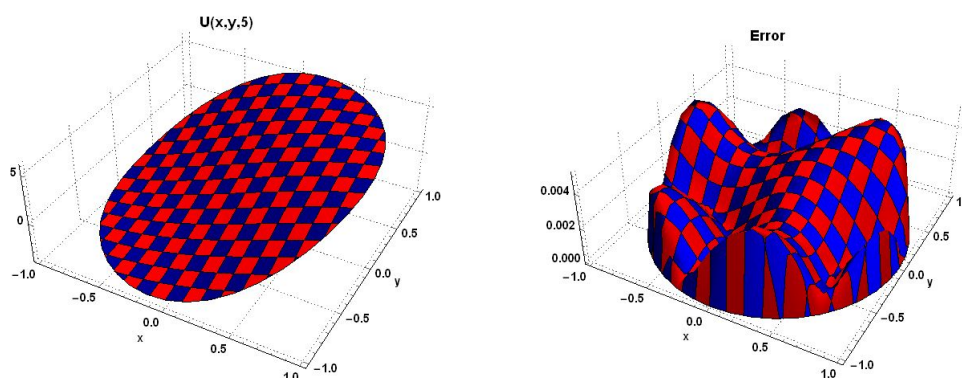
c	L_2	L_∞	RMS	τ
0.2	3.1182×10^{-2}	1.2215×10^{-2}	2.8347×10^{-3}	1/10
0.3	1.5447×10^{-2}	4.8958×10^{-3}	1.4043×10^{-3}	1/20
0.4	8.2766×10^{-3}	1.9643×10^{-3}	7.5242×10^{-4}	1/40
0.5	4.4546×10^{-3}	9.5117×10^{-4}	4.0496×10^{-4}	1/80
0.6	2.3505×10^{-3}	5.0916×10^{-4}	2.1368×10^{-4}	1/160
0.7	1.2121×10^{-3}	2.6442×10^{-4}	1.1019×10^{-4}	1/320
0.8	6.1196×10^{-4}	1.3437×10^{-4}	5.5633×10^{-5}	1/640
0.9	3.0258×10^{-4}	6.7045×10^{-5}	2.7507×10^{-5}	1/1280
0.95	1.2375×10^{-4}	2.6461×10^{-5}	1.1250×10^{-5}	1/2560

جدول ۵.۵: مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال ۲ به ازای $h = 1/10$ روی ناحیه ی مستطیلی $[0, 1] \times [0, 1]$.

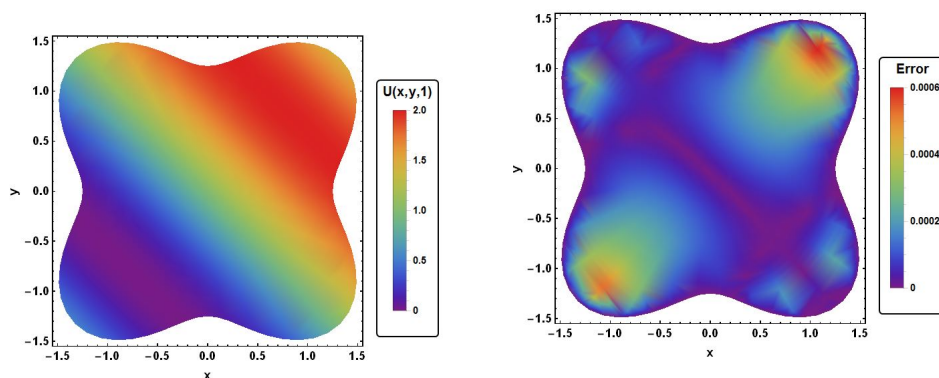
$T = 10, L_\infty$		$T = 5, L_\infty$		τ
روش حاضر	روش [۶۷]	روش حاضر	روش [۶۷]	
4.9445×10^{-4}	4.4655×10^{-2}	1.8468×10^{-3}	2.0927×10^{-2}	1/10
2.5911×10^{-4}	1.8978×10^{-2}	8.5218×10^{-4}	8.7888×10^{-3}	1/20
1.3078×10^{-4}	8.1482×10^{-3}	3.5909×10^{-4}	3.7341×10^{-3}	1/40
6.3677×10^{-5}	3.5189×10^{-3}	1.8606×10^{-4}	1.6029×10^{-3}	1/80
5.1413×10^{-5}	1.5485×10^{-3}	9.4986×10^{-5}	7.0137×10^{-4}	1/160
3.9876×10^{-5}	7.0350×10^{-4}	4.7289×10^{-5}	3.1392×10^{-4}	1/320
2.8596×10^{-5}	3.3268×10^{-4}	2.4801×10^{-5}	1.4378×10^{-4}	1/640
1.5596×10^{-5}	1.6439×10^{-4}	8.7045×10^{-6}	6.8364×10^{-5}	1/1280

جدول ۶.۵: خطاهای بدست آمده برای روش عددی با $h = 1/10$ و $T = 10$ روی ناحیه مثلثی برای مثال ۲.

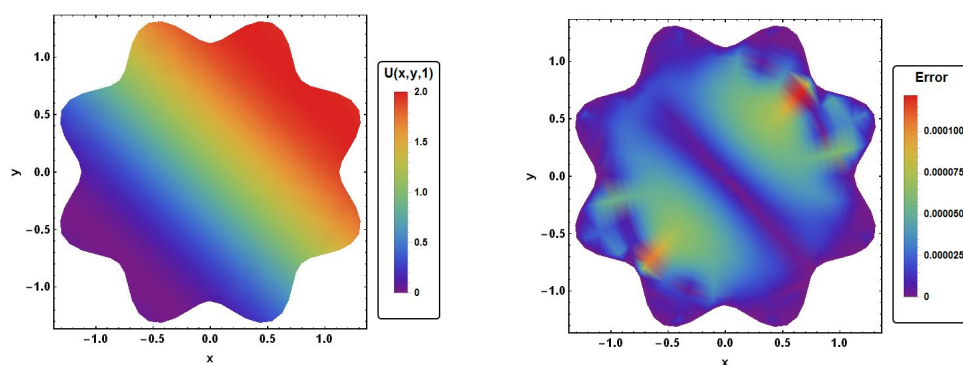
c	L_2	L_∞	RMS	τ
0.4	1.6278×10^{-2}	3.8469×10^{-3}	1.4798×10^{-3}	1
0.5	8.1966×10^{-3}	1.7500×10^{-3}	7.4514×10^{-4}	1/2
0.6	4.1127×10^{-3}	8.8739×10^{-4}	3.7388×10^{-4}	1/4
0.7	2.0552×10^{-3}	4.6471×10^{-4}	1.8684×10^{-4}	1/8
0.8	1.0243×10^{-3}	2.4038×10^{-4}	9.3123×10^{-5}	1/16
0.9	5.1168×10^{-4}	1.2329×10^{-4}	4.6516×10^{-5}	1/32
1	2.6003×10^{-4}	6.3175×10^{-5}	2.3639×10^{-5}	1/64
1.1	1.3385×10^{-4}	3.1685×10^{-5}	1.2168×10^{-5}	1/128
1.2	7.3098×10^{-5}	1.6033×10^{-5}	6.6453×10^{-6}	1/256



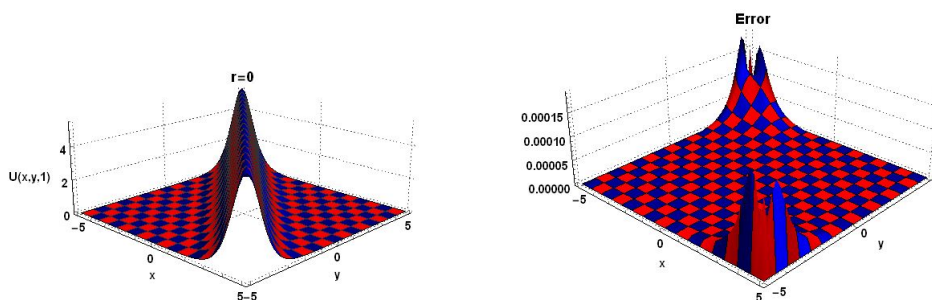
شکل ۴.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/200$ و $c = 0.1$ روی ناحیه دایره‌ای شکل با $T = 5$ برای مثال ۲.



شکل ۵.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/15$ ، $\tau = 1/1000$ و $c = 0.5$ روی ناحیه نامنظم $(n = 4)$ با $T = 1$ برای مثال ۲.



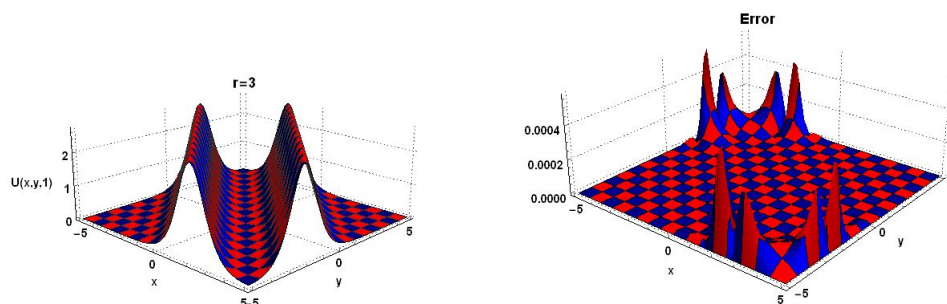
شکل ۶.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/15$ ، $\tau = 1/1000$ و $c = 0.5$ روی ناحیه نامنظم $(n = 8)$ با $T = 1$ برای مثال ۲.



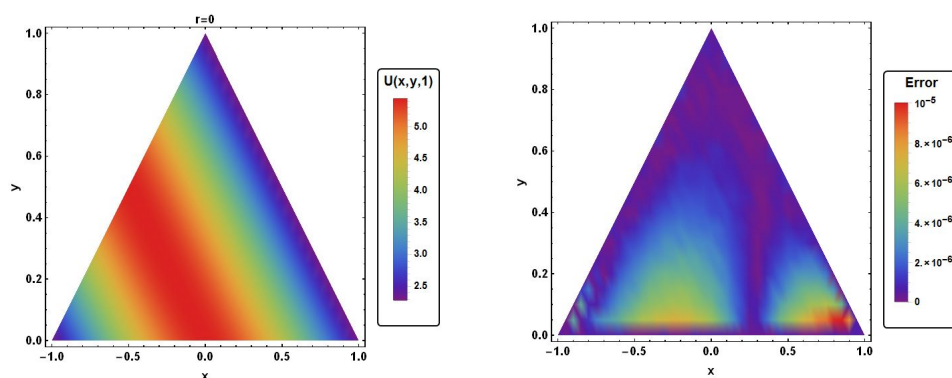
شکل ۷.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/5$ ، $\tau = 1/10$ و $c = 1.5$ روی ناحیه $[-5, 5] \times [-5, 5]$ با $r = 0$ و $T = 1$ برای مثال 3.

جدول ۷.۵: مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال 3 به ازای $r = 0$ و $h = 1/5$ روی ناحیه $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

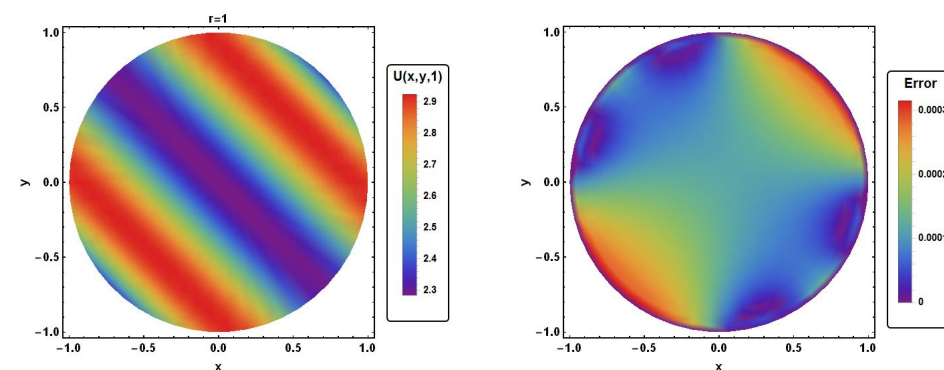
$T = 2, L_{\infty}$		$T = 1, L_{\infty}$		τ
روش حاضر	روش [۶۷]	روش حاضر	روش [۶۷]	
5.1091×10^{-4}	7.7952×10^{-1}	1.8855×10^{-4}	1.2187×10^{-1}	1/10
4.1586×10^{-4}	3.8698×10^{-1}	1.6804×10^{-4}	6.0296×10^{-2}	1/20
2.1213×10^{-4}	1.9274×10^{-1}	1.3225×10^{-4}	2.9981×10^{-2}	1/40
1.1227×10^{-4}	9.6149×10^{-2}	1.1248×10^{-4}	1.4939×10^{-2}	1/80
9.1236×10^{-5}	4.7985×10^{-2}	9.9553×10^{-5}	7.4461×10^{-3}	1/160
8.1253×10^{-5}	2.3937×10^{-2}	7.2345×10^{-5}	3.7069×10^{-3}	1/320
5.1270×10^{-5}	1.1920×10^{-2}	5.8967×10^{-5}	1.8389×10^{-3}	1/640



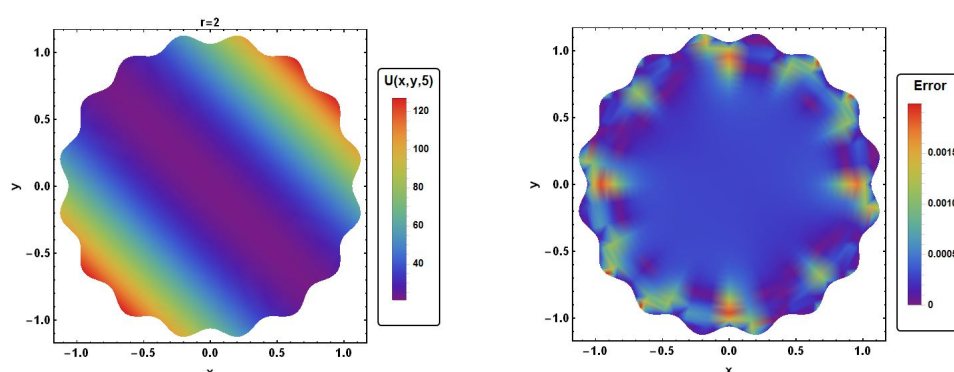
شکل ۸.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/5$ ، $\tau = 1/10$ و $c = 1.5$ روی ناحیه ی مستطیلی $[-5, 5] \times [-5, 5]$ با $r = 3$ و $T = 1$ برای مثال 3.



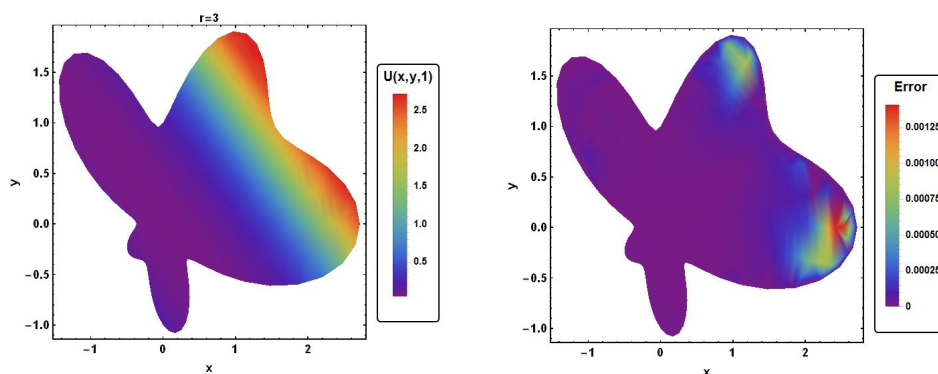
شکل ۹.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/10$ و $c = 0.52$ روی ناحیه مثلثی با $r = 0$ و $T = 1$ برای مثال 3.



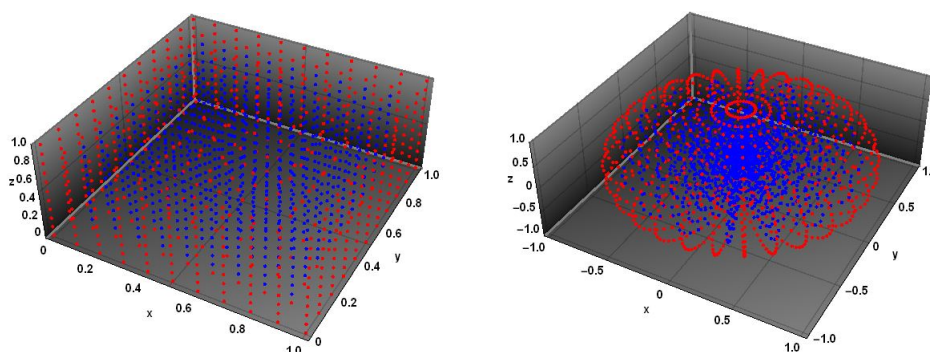
شکل ۱۰.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/10$ و $c = 0.2$ روی ناحیه دایره ای با $r = 1$ و $T = 1$ برای مثال 3.



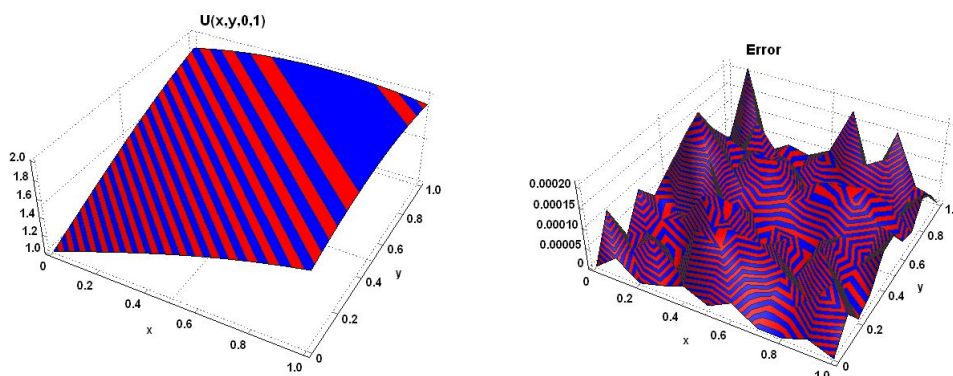
شکل ۱۱.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/20$ ، $\tau = 1/20$ و $c = 0.4$ روی ناحیه نامنظم ($n = 16$) با $r = 2$ و $T = 5$ برای مثال 3.



شکل ۱۲.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/100$ و $c = 0.8$ روی ناحیه نامنظم با $r = 3$ و $T = 1$ برای مثال ۳.



شکل ۱۳.۵: توزیع نقاط گره‌ای روی ناحیه‌های مکعبی و کروی برای مثال ۴ (نقاط مرزی قرمز رنگ و نقاط داخلی آبی هستند).



شکل ۱۴.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) با استفاده از روش عددی به ازای $h = 1/10$, $\tau = 1/100$, $c = 0.9$ روی ناحیه مکعبی در $z = 0$ و $T = 1$ برای مثال 4.

جدول ۸.۵: مقایسه خطاها بین روش حاضر و روش ارائه شده در [۶۷] برای مثال 4 به ازای $h = 1/10$ و $T = 1$ در تعدادی نقاط از ناحیه مکعبی.

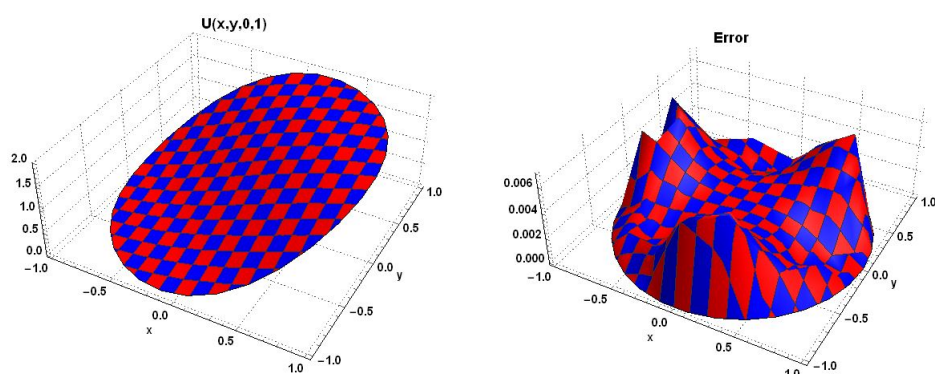
روش حاضر	روش [۶۷]	(x, y, z)
2.91301×10^{-4}	4.4851×10^{-2}	$(0.1, 0.1, 0.1)$
1.40227×10^{-3}	4.4363×10^{-2}	$(0.2, 0.2, 0.2)$
2.93329×10^{-3}	4.6234×10^{-2}	$(0.3, 0.3, 0.3)$
4.18388×10^{-3}	4.6553×10^{-2}	$(0.4, 0.4, 0.4)$
4.61567×10^{-3}	4.5498×10^{-2}	$(0.5, 0.5, 0.5)$
4.08167×10^{-3}	4.4917×10^{-2}	$(0.6, 0.6, 0.6)$
2.83632×10^{-3}	4.4182×10^{-2}	$(0.7, 0.7, 0.7)$
1.39163×10^{-3}	4.3156×10^{-2}	$(0.8, 0.8, 0.8)$
3.23101×10^{-4}	4.5028×10^{-3}	$(0.9, 0.9, 0.9)$

جدول ۹.۵: خطاهای بدست آمده از روش عددی به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/100$ ، $c = 0.9$ و $T = 1$ در زمان‌های مختلف روی ناحیه ی مکعبی برای مثال 4.

L_2	L_∞	RMS	t
4.2556×10^{-3}	3.0817×10^{-4}	1.1410×10^{-4}	0.1
7.0896×10^{-3}	5.1315×10^{-4}	1.9009×10^{-4}	0.2
9.0286×10^{-3}	6.5332×10^{-4}	2.4208×10^{-4}	0.3
1.0364×10^{-2}	7.4956×10^{-4}	2.7788×10^{-4}	0.4
1.1273×10^{-2}	8.1453×10^{-4}	3.0225×10^{-4}	0.5
1.1874×10^{-2}	8.5641×10^{-4}	3.1836×10^{-4}	0.6
1.2249×10^{-2}	8.8066×10^{-4}	3.2841×10^{-4}	0.7
1.2462×10^{-2}	8.9087×10^{-4}	3.3413×10^{-4}	0.8
1.2573×10^{-2}	8.8931×10^{-4}	3.3711×10^{-4}	0.9
1.2661×10^{-2}	8.7721×10^{-4}	3.3946×10^{-4}	1

جدول ۱۰.۵: خطاهای بدست آمده برای روش عددی به ازای $h = 1/10$ ، $\tau = 1/100$ ، $c = 0.15$ و $T = 1$ در زمان‌های مختلف روی ناحیه کروی برای مثال 4.

L_2	L_∞	RMS	t
7.8261×10^{-2}	3.1080×10^{-3}	1.5450×10^{-3}	0.1
8.0249×10^{-2}	4.1034×10^{-3}	1.5842×10^{-3}	0.2
8.2939×10^{-2}	5.0939×10^{-3}	1.6373×10^{-3}	0.3
8.6278×10^{-2}	6.0856×10^{-3}	1.7032×10^{-3}	0.4
9.0217×10^{-2}	7.0936×10^{-3}	1.7810×10^{-3}	0.5
9.4712×10^{-2}	8.1387×10^{-3}	1.8697×10^{-3}	0.6
9.9719×10^{-2}	9.1955×10^{-3}	1.9686×10^{-3}	0.7
1.0520×10^{-1}	1.0265×10^{-2}	2.0768×10^{-3}	0.8
1.1113×10^{-1}	1.1348×10^{-2}	2.1939×10^{-3}	0.9
1.1748×10^{-1}	1.2444×10^{-2}	2.3192×10^{-3}	1



شکل ۱۵.۵: جواب تقریبی (چپ) و خطای مطلق (راست) با استفاده از روش عددی به ازای $\tau = 1/100$ ، $h = 1/8$ و $c = 0.15$ روی ناحیه کره در $z = 0$ و $T = 1$ برای مثال 4.

فصل ۶

طرح های حافظ بر پایه ی بسط مگنوس برای سیستم های غیر خطی

۱.۶ مقدمه

در این فصل سیستم های غیر خطی از معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل

$$y' = A(t, y)y, \quad y(0) = y_0, \quad (1.6)$$

را در نظر می گیریم که در آن y در گروه لی ماتریسی G و $A(t, y)$ در جبر لی (ماتریسی) متناظر $\mathfrak{g}$ از G قرار دارد. این شکل از معادلات دارای کاربرد های زیادی می باشد. به طور مثال در مکانیک جسم سخت، گروه لی مربوطه $SO(n)$ می باشد. در سیستم های دینامیکی همیلتونی، G متناظر با گروه سیمپلکتیک^۱ $Sp(n)$ (با n زوج) می باشد، در حالی که سیستم های کوانتومی به وسیله $G = SU(n)$ و $A = A(t)$ که به y وابسته نیست به صورت

$$y' = A(t)y, \quad y(0) = y_0, \quad (2.6)$$

مدل بندی می شوند. اغلب، این شکل مخصوص از معادله (۱.۶) به معنی حفظ دقیق برخی از ویژگی های مهم کیفی بوسیله جواب دقیق می باشد. به طور خاص، زمانی که $G = SO(n)$ ، $\|y(t)\| = \|y_0\|$ ، به ازای همه t ، در حالی که اگر $G = Sp(n)$ جریان سیمپلکتیک می باشد.

به طور کلی حل دقیق معادله (۱.۶) یا (۲.۶) امکان پذیر نیست، بنابراین مجبور به استفاده از روش های جایگزین برای رسیدن به جواب های مناسب تحلیلی یا عددی هستیم. در نتیجه بسیار مهم است تا تقریب هایی بدست آوریم که این ویژگی های مهم کیفی را با جواب دقیق به اشتراک بگذارند [۸۷، ۸۸].

^۱Symplectic

یک ابزار ارزشمند در این رابطه، روش بسط مگنوس^۲ می باشد که جواب معادله خطی (۲.۶) را به صورت تابع نمایی یک سری نامتناهی مشخص، بیان می کند:

$$y(t) = e^{\Omega(t)} y_0, \quad \Omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(t), \quad (۳.۶)$$

که جمله های $\Omega_k(t)$ ترکیب های خطی از انتگرال های شامل جابه جاگر های تو در تو^۳ از ماتریس $A(t)$ در زمان های مختلف می باشند [۸۹]. برای روشن شدن موضوع، جمله های اولیه به صورت

$$\begin{aligned} \Omega_1(t) &= \int_0^t A(s) ds, \\ \Omega_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^{s_1} [A(s_1), A(s_2)] ds_2 ds_1, \\ \Omega_3(t) &= \frac{1}{6} \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} [A(s_1), [A(s_2), A(s_3)]] + [A(s_3), [A(s_2), A(s_1)]] ds_3 ds_2 ds_1; \end{aligned} \quad (۴.۶)$$

می باشند که در آن جابه جاگر از دو ماتریس مربعی به صورت

$$[X, Y] = XY - YX,$$

تعریف می شود. توجه کنید، با توجه به ساختار روش، هر تقریب بدست آمده بعد از در نظر گرفتن تعداد متناهی از سری، متعلق به گروه لی G ای خواهد بود که معادله دیفرانسیل در آن تعریف شده است. در نتیجه، تقریب بدست آمده هر ویژگی جواب دقیق که با گروه لی G مرتبط می شود (همانند سیمپلیتیک، تعامد، یگانگی، حفظ حجم و ...) را دارا می باشد [۹۰]. در بررسی عددی معادله (۲.۶)، بسط مگنوس نشان داده است که یک ابزار قدرتمند برای ساختن انتگرال های کارآمد می باشد که جریان های عددی را در همان گروه لی جریان پیوسته تولید می کند. این روش مثال های مخصوصی از روش های گروه لی را تشکیل می دهند و به شکل های مختلفی به کار برده شده اند (به عنوان مثال مقاله [۱۶] و منابع آن را نگاه کنید).

با تمرکز بر روی مسئله غیر خطی کلی تر تعریف شده بوسیله (۱.۶)، یک روش معمول برای بدست آوردن روش های عددی حافظ ساختار گروه لی، انتقال مسئله از G به جبر لی زمینه ای $\mathfrak{g}$ می باشد (برای مثال، با تابع نمایی). سپس فرمول بندی و حل کردن معادله دیفرانسیل مرتبط در $\mathfrak{g}$ و در نهایت برگرداندن جواب به G می باشد. در این روش فرآیند گسسته سازی در یک فضای خطی به جای گروه لی صورت می گیرد، به طوریکه، یک روش کلاسیک رانگه-کوتا می تواند به کار برده شود تا جواب معادله دیفرانسیل را در $\mathfrak{g}$ تقریب بزنند. این دقیقاً مکانیسم عملیاتی در کلاس روش های رانگه-کوتا-مونت-کاس^۴ می باشد [۹۱، ۹۲].

^۲Magnus expansion

^۳Nested commutators

^۴Runge-Kutta-Munthe-Kaas

نتایج بسیار عالی از انتگرال گیری‌های عددی بر پایه بسط مگنوس در حالت خطی (۲.۶) حاصل شده است، همچنین چندین تلاش برای تعمیم آن‌ها به معادله غیر خطی (۱.۶) در گذشته انجام شده است. به طور خاص مرجع [۹۳] را معرفی می‌کنیم، که نشان می‌دهد چگونه طرح‌هایی از مرتبه p با برش دادن مناسب بسط و سپس به کار بردن ایده هم مکانی برای معادله دیفرانسیل تعریف شده در g می‌توانند به دست آیند. با این حال، روش‌های بدست آمده ضمنی می‌باشند، اگرچه به کمک شرایط هم مکانی این امکان وجود دارد تا روش‌های صریح از مرتبه بالاتر از سه بدست آوریم. در مقابل، شیوه‌ی به کار رفته در [۹۴] به روش انتگرال گیری صریح بر پایه‌ی بسط مگنوس منجر شده است که بر حسب جملات انتگرالی بیان می‌شوند. در این روش، گام اول ساختن دنباله‌ای از تقریب‌های پیوسته برای جواب دقیق بر حسب ترکیب‌های خطی از انتگرال‌ها شامل جابه‌جاگرهایی از A می‌باشد. سپس در گام دوم انتگرال‌ها با تقریب‌های مناسب انتخاب شده، مطابق با نوع مسئله، جایگزین می‌شوند که این موجب انعطاف پذیری روش می‌شود. بدین صورت که زمانی که مقدار A فقط در نقاط همجوشی^۵ مشخص است می‌توان از روش نیوتون-کاتس^۶ برای تقریب انتگرال‌ها استفاده کرد. برای رسیدن به مرتبه‌ی بالا با کمترین محاسبات از روش گاوس، و روش فیلون^۷ احتمالاً بهترین انتخاب برای زمانی می‌باشد که مسئله (۱.۶) به شدت نوسانی است. در حالی که هدف اصلی [۹۴] ایجاد فرمول‌هایی بر پایه بسط مگنوس برای سیستم غیر خطی (۱.۶) بوده است (تمرکز بر روی گام اول)، گام دوم کمتر مورد توجه قرار گرفته است. اما در این فصل با انتخاب کاربردهای مختلف از روش، بر روی گام دوم تمرکز می‌کنیم و نشان می‌دهیم چگونه با توجه به نوع مسئله (۱.۶) می‌توان از روش‌های مناسب سود برد. در این رابطه، همچنین نشان می‌دهیم با معرفی روش طول گام قابل تغییر می‌توان کارآمدی الگوریتم‌ها را افزایش داد.

۲.۶ بسط مگنوس برای سیستم‌های غیر خطی

همانند معادله (۳.۶) در حالت خطی، جواب معادله (۱.۶) را به صورت نمایی از یک تابع بیان می‌کنیم:

$$y(t) = e^{\Omega(t)} y_0. \quad (5.6)$$

سپس با قرار دادن معادله (۵.۶) در (۱.۶) و با محاسبه مشتق تابع نمایی که به عنوان مثال در [۹۰] نشان داده شده است، یک معادله دیفرانسیل برای Ω بدست می‌آید. این معادله به صورت

$$\Omega'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \text{ad}_{\Omega(t)}^k A(t, e^{\Omega(t)} y_0), \quad \Omega(0) = 0, \quad (6.6)$$

خواهد بود که در آن $\{B_k\}$ اعداد برنولی و ad^m یک نماد برای جابه‌جاگر تکراری به صورت

$$\text{ad}_{\Omega}^0 A = A, \quad \text{ad}_{\Omega}^{m+1} A = [\Omega, \text{ad}_{\Omega}^m A], \quad m \geq 0.$$

^۵Equispace

^۶Newton-Cotes

^۷Filon

می باشد. با تعریف $\Omega^{[0]}(t) \equiv 0$ و به کارگیری روش تکرار نقطه ثابت پیکارد، بعد از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\Omega^{[m]}(t) = \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} ad_{\Omega^{[m-1]}(s)}^k A(s, e^{\Omega^{[m-1]}(s)} y_0) ds, \quad m \geq 1. \quad (7.6)$$

در یک همسایگی کوچک مناسب از $t = 0$ و با در نظر گرفتن شرایط منظم^۸ کافی برای $A(t, y)$ ، زمانی که $m \rightarrow \infty$ ، $\Omega^{[m]}(t)$ همگرا به $\Omega(t)$ خواهد بود. به طور واضح، برای ارائه تقریب عملی، مجبور هستیم تا به طور مناسبی سری نامتناهی ظاهر شده در (۷.۶) را برش دهیم. همانطور که در [۹۴] نشان داده شده است اگر جملات سری تا $k = m - 2$ حفظ شوند، خواهیم داشت:

$$\Omega^{[m]}(t) = \Omega(t) + \mathcal{O}(t^{m+1}).$$

در نتیجه تکرارهای متوالی را برای بدست آوردن جواب‌های تحلیلی (۱.۶) بر حسب انتگرال‌ها به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \Omega^{[1]}(t) &= \int_0^t A(s, y_0) ds, \\ \Omega^{[m]}(t) &= \sum_{k=0}^{m-2} \frac{B_k}{k!} \int_0^t ad_{\Omega^{[m-1]}(s)}^k A(s, e^{\Omega^{[m-1]}(s)} y_0) ds, \quad m \geq 2, \end{aligned} \quad (8.6)$$

از آنجایی که $\Omega^{[m]}(t)$ فقط شامل ترکیب خطی از انتگرال‌های چندگانه از جابه‌جاگرهای تو در تو می‌باشد، بنابراین مطابق پیش‌بینی متعلق به $\mathfrak{g}$ خواهد بود و بنابراین $y^{[m]}(t)$ در همان گروه لی جواب دقیق $y(t)$ برای همه $m \geq 1$ و $t > 0$ قرار می‌گیرد. باید اشاره کنیم، اگر چه در اینجا بسط مگنوس بر روی سیستم‌های غیر خطی (۱.۶)، از نوع گروه لی ماتریسی پیاده‌سازی شد اما واضح است این روش برای سیستم‌های غیر خطی که در آن جواب عضوی از گروه لی نمی‌باشد نیز قابل پیاده‌سازی است.

۳.۶ انتگرال گیری‌های عددی بر پایه ی بسط مگنوس

با توجه به پیچیدگی عبارات (۸.۶) در بیشتر موارد حل دقیق امکان‌پذیر نمی‌باشد، بنابراین باید آنالیز کنیم که چه طرح عددی برای ارائه تقریب‌های عملی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. برای دست یافتن به یک تقریب عددی $y(t_f)$ از مرتبه $\mathcal{O}(t^p)$ در زمان نهایی t_f ، با انتخاب نقاط شبکه مناسب $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ در بازه $[t_0, t_f]$ با طول گام $h_n = t_{n+1} - t_n$ برای $0 \leq n \leq N - 1$ ، مقادیر حل عددی از رابطه

$$y_0 = y(t_0), \quad y_{n+1} = \exp(\Omega^{[p]}(t_n + h_n, t_n)) y_n \approx y(t_{n+1}), \quad (9.6)$$

^۸Regularity

بدست می‌آیند. در ادامه همه‌ی انتگرال‌های موجود در $\Omega^{[1]}, \Omega^{[2]}, \dots, \Omega^{[p]}$ باید به طور مناسبی تقریب زده شوند و همچنین حاصل ضرب تابع‌های نمایی $\exp(\Omega^{[j]})$ برای $j = 1, \dots, p$ بر روی بردار ها باید محاسبه شوند. در اینجا فقط بر روی موضوع اول تمرکز خواهیم داشت در حالی که تکنیک‌های مختلفی در مقالات برای مورد دوم موجود هستند (به طور خاص [۹۵] و مراجع آن را ملاحظه کنید).

دستیابی به تقریب‌های مرتبه دوم با استفاده از روش طول گام زمانی بالا تقریباً سر راست می‌باشد، به طوری که در زیر بازه $[t_n, t_{n+1}]$ فقط با دو تکرار اولیه در (۸.۶) رو برو می‌شویم:

$$\begin{aligned}\Omega^{[1]}(t_{n+1}, t_n) &= \int_{t_n}^{t_n+h_n} A(s, y_n) ds, \\ \Omega^{[2]}(t_{n+1}, t_n) &= \int_{t_n}^{t_n+h_n} A(s, e^{\Omega^{[1]}(s, t_n)} y_n) ds.\end{aligned}\quad (10.6)$$

حال چندین حالت بسته به تقریب‌های استفاده شده در انتگرال‌های بالا اتفاق می‌افتد. فرض کنید که $\Omega^{[1]}$ بوسیله روش اوایلر $h_n A(t_n, y_n)$ تقریب زده شود و قاعده ذوزنقه‌ای برای $\Omega^{[2]}$ در (۱۰.۶) استفاده شود. در نتیجه، طرح عددی صریح مرتبه دوم زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}u &= h_n A(t_n, y_n), \\ v &= \frac{h_n}{2} (A(t_n, y_n) + A(t_{n+1}, e^u y_n)), \\ y_{n+1} &= e^v y_n.\end{aligned}\quad (11.6)$$

البته اگر $\Omega^{[1]}$ بتواند به طور دقیق محاسبه شود، u می‌تواند به صورت $u = \Omega^{[1]}(t_{n+1}, t_n)$ در (۱۱.۶) در نظر گرفته شود. این طرح مرتبه دوم را با $M2$ نشان می‌دهیم. روش دیگر، اگر قاعده نقطه میانی استفاده شود، به یک روش مرتبه دوم جدید خواهیم رسید که هزینه محاسباتی مشابه $M2$ دارد:

$$\begin{aligned}u &= \frac{h_n}{2} A(t_n, y_n), \\ v &= h_n A\left(t_n + \frac{h_n}{2}, e^u y_n\right), \\ y_{n+1} &= e^v y_n.\end{aligned}\quad (12.6)$$

روش‌های مراتب بالاتر با کار بر روی $\Omega^{[p]}$ برای $p > 2$ به طور مشابه حاصل می‌شوند. بنابراین، اگر با روش گاوس-لژاندر بر اساس گره‌های

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad (13.6)$$

همه‌ی انتگرال‌های ظاهر شده در $\Omega^{[1]}, \Omega^{[2]}$ و $\Omega^{[3]}$ گسسته شوند، به الگوریتم مرتبه سه زیر دست

خواهیم یافت:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= h_n A(t_n, y_n), \\
 Q_2 &= h_n A(t_n + h_n, e^{Q_1} y_n) - Q_1, \\
 u_3 &= c_1 Q_1 + \frac{1}{2} c_1^2 Q_2, \\
 u_4 &= c_2 Q_1 + \frac{1}{2} c_2^2 Q_2, \\
 Q_3 &= -Q_1 - c_1 Q_2 + h_n A(t_n + c_1 h_n, e^{u_3} y_n), \\
 Q_4 &= -Q_1 - c_2 Q_2 + h_n A(t_n + c_2 h_n, e^{u_4} y_n), \\
 v &= Q_1 + \frac{1}{2} Q_2 + Q_3 + Q_4 - \frac{1}{8} (c_1^2 + c_2^2) [Q_1, Q_2], \\
 y_{n+1} &= e^v y_n.
 \end{aligned} \tag{۱۴.۶}$$

در حالی که استفاده از قاعده سیمسون به طرح مرتبه ی سه

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= h_n A(t_n, y_n), \\
 Q_2 &= h_n A(t_n + \frac{1}{2} h_n, e^{\frac{1}{2} Q_1} y_n) - Q_1, \\
 u_3 &= \frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{4} Q_2, \\
 u_4 &= Q_1 + Q_2, \\
 Q_3 &= -u_4 + h_n A(t_n + \frac{1}{2} h_n, e^{u_3} y_n), \\
 Q_4 &= -u_4 - Q_2 + h_n A(t_n + h_n, e^{u_4} y_n), \\
 u_5 &= u_4 + \frac{2}{3} Q_3 + \frac{1}{6} Q_4 - \frac{1}{6} [Q_1, Q_2], \\
 y_{n+1} &= e^{u_5} y_n,
 \end{aligned} \tag{۱۵.۶}$$

منجر می شود [۹۴] که آن را با $M3$ نشان می دهیم. اگر چه روش های (۱۴.۶) و (۱۵.۶) خیلی مشابه هستند، باید اشاره کنیم که $e^{u_4} y_n$ محاسبه شده در رابطه (۱۵.۶) قبلا یک تقریب مرتبه دوم جواب را در نقطه $t = t_{n+1}$ فراهم کرده است، که این امکان در الگوریتم (۱۴.۶) فراهم نیست. زیرا با توجه به ساختار (۱۴.۶)، $e^{u_3} y_n$ و $e^{u_4} y_n$ به تقریب های مرتبه دوم فقط به ترتیب در نقاط گره $t_n + c_1 h$ و $t_n + c_2 h$ منجر خواهند شد. این ویژگی موجب می شود تا با محاسبه ی $\|y_{n+1} - e^{u_4} y_n\|$ به عنوان یک تخمین از خطای موضعی ساخته شده توسط $M3$ بتوان روش را به صورت طول گام قابل تغییر پیاده سازی کرد که در ادامه برای $M4$ به طور کامل آن را توضیح می دهیم.

یک روش از مرتبه چهار با محاسبه کامل (۱۵.۶) به همراه محاسبات زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} u_6 &= u_3 + \frac{1}{3}Q_3 - \frac{1}{24}Q_4 - \frac{1}{48}[Q_1, Q_2], \\ Q_5 &= -u_4 + h_n A(t_n + \frac{1}{2}h_n, e^{u_6}y_n), \\ Q_6 &= -u_4 - Q_2 + h_n A(t_n + h_n, e^{u_5}y_n), \\ v &= u_4 + \frac{2}{3}Q_5 + \frac{1}{6}Q_6 - \frac{1}{6}\left[Q_1, Q_2 - Q_3 + Q_5 + \frac{1}{2}Q_6\right], \\ y_{n+1} &= e^v y_n, \end{aligned} \quad (۱۶.۶)$$

که آن را با $M4$ نشان داده ایم. توجه کنید که مشابه $M3$ طرح‌های (۱۵.۶) و (۱۶.۶) نیز امکان تنظیم کردن طول گام h_n را به عنوان مثال با تکنیک برون یابی موضعی [۹۶] بدون هیچ گونه هزینه اضافی فراهم می‌کنند، به گونه‌ای که روش کارآمدتر خواهد شد. برای نشان دادن روند، طرح مرتبه چهار (۱۶.۶) را در نظر می‌گیریم که دو حل عددی را در نقطه t_{n+1} به ترتیب از مرتبه‌های سه و چهار ایجاد می‌کند:

$$\hat{y}_{n+1} = e^{u_5}y_n, \quad \text{و} \quad y_{n+1} = e^v y_n.$$

سپس با استفاده از

$$E_r = \|y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}\|, \quad (۱۷.۶)$$

خطای موضعی محاسبه می‌شود. اگر E_r محاسبه شده در t_{n+1} کمتر از تولرانس مشخص شده باشد، گام t_n به t_{n+1} پذیرفته می‌شود و سپس به سراغ محاسبه جواب تقریبی در نقطه t_{n+2} می‌رویم. اگر $E_r \geq \text{tol}$ باشد، تقریب بدست آمده در t_{n+1} رد شده و یک طول گام کوچکتر برای محاسبه تقریب جدید در نقطه t_{n+1} انتخاب می‌شود. در هر دو حالت (پذیرش یا رد) طول گام جدید می‌تواند به صورت زیر انتخاب شود [۹۷]:

$$h_{\text{new}} = s h_c \left(\frac{\text{tol}}{E_r} \right)^{1/4}, \quad (۱۸.۶)$$

که در آن h_c نشان دهنده مقدار اخیر طول گام می‌باشد و s یک ضریب ایمنی می‌باشد که به گونه‌ای انتخاب می‌شود که احتمال رد شدن طول گام را کاهش دهد. توجه کنید زمانی که گام $t_n \rightarrow t_{n+1}$ کامل شود دو تقریب عددی y_{n+1} و $\hat{y}_{n+1}$ در t_{n+1} موجود هستند، به گونه‌ای که این امکان وجود دارد که هر کدام را به عنوان حل عددی انتخاب کنیم. در برون یابی موضعی، جواب از مرتبه بالاتر y_{n+1} را انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که در روش ما مقدار E_r بدون هیچ گونه محاسبه اضافی بدست می‌آید چرا که در هر حال مجبور خواهیم بود تا برای محاسبه y_{n+1} مقدار $\hat{y}_{n+1}$ را نیز محاسبه کنیم. همچنین می‌توان پارامترهای دیگری برای جلوگیری از رشد خیلی آهسته یا خیلی سریع طول گام معرفی کرد [۹۶]. همین طور برای طول گام اولیه یک انتخاب ممکن $h_0 = \text{tol}/2$ می‌باشد.

اگر چه روش بسط مگنوس توضیح داده شده در این فصل، برای مسائلی که به طور صریح وابسته به متغیر مستقل (در اینجا t) می باشند، طراحی شدند، اما این الگوریتم‌ها برای حالتی که معادله به طور صریح وابسته به متغیر مستقل نیست، یعنی برای معادلات غیر خطی به شکل

$$y' = A(y)y, \quad y(0) = y_0, \quad (19.6)$$

نیز تقریب‌های خوبی فراهم می کنند. این مورد در مقابل حالت خطی می باشد زیرا در این حالت بسط مگنوس جواب دقیق مسئله را ایجاد می کند.

مثال ۱. برای یک نمونه از الگوریتم‌های قبلی، حرکت یک جسم سخت آزاد را که بوسیله معادله‌های اوایلر استاندارد توصیف می شوند را در نظر خواهیم گرفت [۹۸]:

$$y' = \begin{pmatrix} \Pi_1' \\ \Pi_2' \\ \Pi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Pi_3}{I_3} & \frac{-\Pi_2}{I_2} \\ -\frac{\Pi_3}{I_3} & 0 & \frac{\Pi_1}{I_1} \\ \frac{\Pi_2}{I_2} & -\frac{\Pi_1}{I_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \\ \Pi_3 \end{pmatrix} = A(y)y, \quad (20.6)$$

که $I_1, I_2, I_3 > 0$ سه مورد از لحظات اصلی از اینرسی بدن هستند و $\Pi = (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3)$ ، تکانه زاویه ای در قاب در حال حرکت می باشد. این سیستم دارای دو ویژگی درجه دوم به صورت زیر می باشد:

$$C = \frac{1}{2} \|\Pi\|^2, \quad (21.6)$$

طول تکانه زاویه ای ثابت در قاب بدن متعامد، و

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3} \right),$$

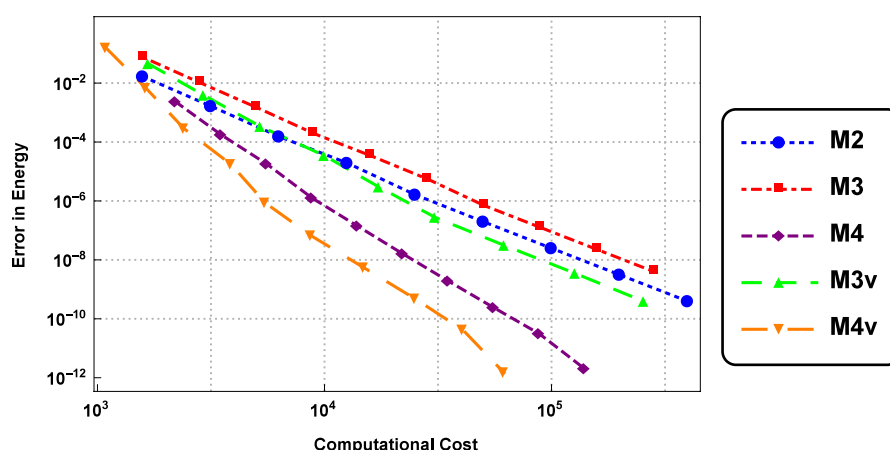
انرژی سیستم می باشد. زمانی که طرح‌های قبلی بر پایه بسط مگنوس بر روی (۲۰.۶) به کار برده شوند، با توجه به ساختار طرح‌ها، C دقیقاً حفظ می شوند (با مقداری خطا حاصل از گرد کردن^۹). در حالی که خطای حاصل برای H در طول انتگرال گیری می تواند کمک کند تا بتوانیم کارآمدی روش‌های مختلف را بررسی کنیم. برای این کار $I_1 = 3$ ، $I_2 = 2$ و $I_3 = 3/2$ را در نظر می گیریم و شرط‌های اولیه را به صورت $\Pi(0) = (1, 1, 1)$ انتخاب کرده و انتگرال گیری را تا زمان نهایی $t_f = 100$ با روش‌های مختلف مگنوس و طول گام‌ها و تولرانس‌های مختلف انجام می دهیم. سپس خطای نسبی در انرژی را در زمان نهایی t_f محاسبه می کنیم و این خطا را بر حسب هزینه محاسباتی رسم خواهیم کرد. هزینه محاسباتی هر روش را می توان با محاسبه مجموع تعداد ماتریس‌های A ، تابع‌های نمایی و جابه‌جاگرهای مورد نیاز، مطابق جدول زیر بدست آورد:

روش	مرتبه روش	تعداد ماتریس A	تعداد تابع نمایی	تعداد جابه‌جاگر
$M2$	2	2	2	0
$M3$	3	4	4	1
$M4$	4	6	6	2

^۹Round-off

بنابراین اگر C_{Mx} مشخص کننده هزینه محاسباتی از یک روش بر حسب بسط مگنوس Mx باشد، پس $C_{M3} \sim 2.1 C_{M2}$ ، در صورتی که $C_{M4} \sim 3.2 C_{M2}$. در شکل ۱.۶ نتایج بدست آمده برای $M2$ ، $M3$ و $M4$ به همراه روش‌های مرتبه سوم و چهارم با طول گام متغیر که به ترتیب با $M3v$ و $M4v$ مشخص شده اند، رسم شده است.

چندین نکته در این شکل وجود دارد. اول اینکه $M2$ برای این مثال یک روش از مرتبه سه می باشد، به طوری که کارآمد تر از $M3$ می باشد. دوم، پیاده سازی طول گام متغیر کارایی طرح‌ها را بهبود می بخشد. سوم، $M4v$ کارآمد ترین روش برای این مثال است با اینکه هزینه محاسباتی آن در هر مرحله بیشتر است. چهارم، همه ی طرح‌ها ویژگی ثابت (۲۱.۶) را با ۱۵ - ۱۴ رقم دقت بدون وابستگی به طول گام حفظ می کنند، که این موضوع بر خلاف سایر روش‌های استاندارد همچون روش‌های رانگه کوتاه می باشد. ممکن است به نظر برسد که تخمین ما از هزینه محاسبات با این روش تقریباً خام و ناپخته باشد. ولی این روش کاملاً به طور دقیق کارایی نسبی طرح‌ها را نشان می دهد به طوری که اگر به جای آن زمان محاسبات لازم را بوسیله هر طرح اندازه گیری کنیم، یک نمودار مشابه نتیجه می شود.



شکل ۱.۶: خطای نسبی برای انرژی در $t_f = 100$ بر حسب هزینه محاسباتی، بدست آمده با روش‌های مختلف مگنوس برای معادله اوایلر.

۴.۶ کاربرد ها

در این بخش الگوریتم‌های بدست آمده بر پایه ی بسط مگنوس را بر روی چندین معادله از نوع معادله (۱.۶) پیاده سازی می کنیم (البته در کاربرد دوم y عضوی از گروه لی نیست). مشاهده خواهیم کرد که این طرح‌ها نه تنها رفتار کیفی جواب مسئله را به خوبی ارائه می کنند بلکه تقریبی دقیق از آن را نیز فراهم می کنند.

۱.۴.۶ انتگرال گیری مگنوس و سیستم‌های دینامیکی افزوده

همانطور که در فصل‌های قبل دیدیم در مقاله [۱۷]، لوی یک تکنیک کلی برای انتگرال گیری عددی از هر سیستم شامل k معادله دیفرانسیل $x' = f(t, x)$ ، $x \in \mathbb{R}^k$ ارائه می‌دهد که در این روش فقط متغیر مکان x را در نظر نمی‌گیرد بلکه نرم آن را $\|x\|$ نیز در نظر می‌گیرد. این روش بعداً بر روی مسائل مختلف از معادلات دیفرانسیل سخت^{۱۰} تا مسائل مقدار مرزی و همچنین سیستم‌هایی با قید‌های مشخص به کار گرفته شد [۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳].

با معرفی بردار $(k+1)$ -بعدی $y = (x, \|x\|)^T$ ، محاسبات سرراستی نشان می‌دهد که $y(t)$ در معادله دیفرانسیل

$$y' = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \|x\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{k \times k} & \frac{f(t, x)}{\|x\|} \\ \frac{f^T(t, x)}{\|x\|} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \|x\| \end{pmatrix} \equiv A(t, y)y, \quad (22.6)$$

صدق می‌کند، به طوری که f در شرط لپ شیتز صدق کرده و $\|x\| > 0$ موجب می‌شود سیستم خوش تعریف باشد. همان‌طور که در فصل‌های قبل اشاره کردیم اگر چه بعد سیستم به اندازه یک واحد افزایش پیدا کرده است، سیستم دینامیکی افزوده (۲۲.۶) دارای یک تقارن ذاتی یعنی $A \in \mathfrak{so}(k, 1)$ ، جبر لی از گروه لورنتزی $SO(k, 1)$ ، تشکیل شده از همه ی ماتریس‌های Y با دترمینان واحد می‌باشد به گونه ای که $YJY^T = J$ ، که در آن

$$J = \begin{pmatrix} I_k & O_{k \times 1} \\ O_{1 \times k} & -1 \end{pmatrix},$$

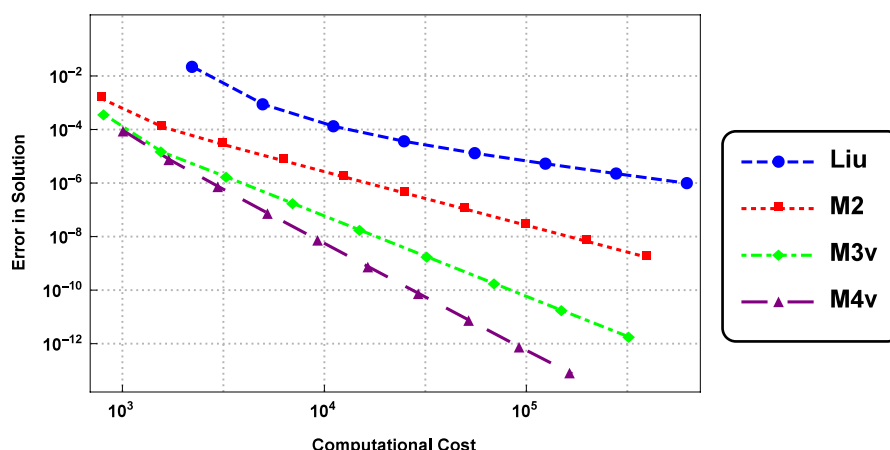
در حالی که A در رابطه $AJ + JA^T = 0$ صدق می‌کند. توجه کنید که $y^T J y = x \cdot x - \|x\|^2 = 0$ و بنابراین این شرط باید به طور دقیق بوسیله هر طرح عددی به کار گرفته شده برای (۲۲.۶) حفظ شود تا سازگاری روش تضمین شود. همچنان که در فصل‌های قبل دیدیم لی یو برای این کار از گسسته سازی مرتبه اول لی-اوایلر بر پایه ماتریس نمایی

$$y_{n+1} = \exp(hA(t_n, y_n))y_n, \quad (23.6)$$

یا تبدیل کیلی و/یا تقریب‌های پایه استفاده کرد و ثابت کرد که این روش معایب روش‌های استاندارد در رابطه با وجود جواب‌های جعلی و نقاط ثابت جعلی را برای برخی از مسائل برطرف می‌کند [۱۷]. واضح است که طرح‌ها بر پایه بسط مگنوس که در بخش ۳.۶ ارائه شد می‌تواند یک گزینه در دسترس برای رسیدن به تقریب‌های مرتبه بالاتر برای جواب سیستم دینامیکی افزوده (۲۲.۶) باشد. مزیت دیگر این است که همه ماتریس‌های نمایی ظاهر شده در الگوریتم که شامل جابه‌جاگرها نمی‌باشند، می‌توانند به طور دقیق در یک فرم بسته محاسبه شوند، در نتیجه طرح‌ها کارآمدتر خواهند شد. به طور خاص

$$\exp(hA(t_n, y_n)) = \begin{pmatrix} I_k + \frac{a_n - 1}{\|f_n\|^2} f_n f_n^T & \frac{b_n f_n}{\|f_n\|} \\ \frac{b_n f_n^T}{\|f_n\|} & a_n \end{pmatrix},$$

^{۱۰} Stiff



شکل ۲.۶: نرم اقلیدسی خطا بر حسب هزینه محاسباتی با روش‌های مختلف مگنوس و روش ارائه شده توسط لی یو برای مثال ۲.

که

$$f_n \equiv f(t_n, x_n), \quad a_n \equiv \cosh\left(\frac{h\|f_n\|}{\|x_n\|}\right), \quad b_n \equiv \sinh\left(\frac{h\|f_n\|}{\|x_n\|}\right).$$

در ادامه استفاده از انتگرال‌های مگنوس را در ترکیب با ایده افزایش بعد از سیستم اصلی نشان خواهیم داد.

مثال ۲. سیستم زیر را در نظر می‌گیریم [۱۰۴]:

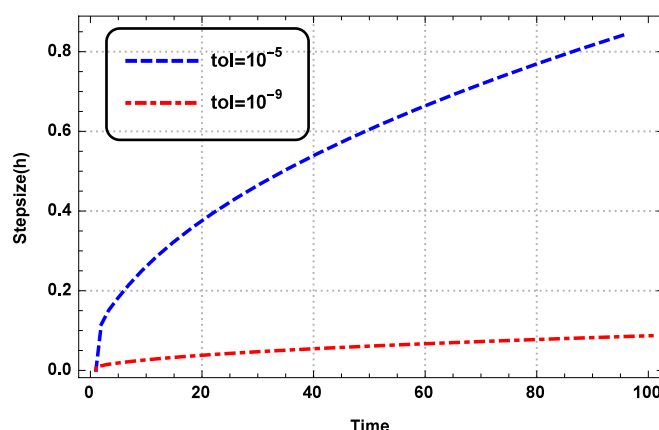
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_1(1) &= 0, \\ x_2' &= -x_1 - x_2^2 + \ln(t), & x_2(1) &= 1, \end{aligned} \quad (24.6)$$

با جواب دقیق

$$x_e(t) \equiv (x_1(t), x_2(t)) = \left(\ln(t), \frac{1}{t}\right). \quad (25.6)$$

که در آن $f(t, x) = (x_2, -x_1 - x_2^2 + \ln(t))^T$ ، بنابراین روش‌های مگنوس را بروی معادله (۲۲.۶) به کار خواهیم برد که اکنون A یک ماتریس 3×3 می‌باشد. به طور خاص، حل عددی را در بازه $t \in [1, 101]$ با روش مرتبه اول (۲۳.۶) و روش‌های $M2$ ، $M3v$ و $M4v$ بدست آورده ایم. سپس خطا را به صورت نرم اقلیدسی از تفاضل بین x_e و حل عددی در $t_f = 101$ برای چندین طول گام مختلف بدست می‌آوریم و سرانجام این خطا را به عنوان یک تابع از هزینه محاسباتی هر الگوریتم به صورتی که در مثال ۱ توضیح داده شد، در شکل ۲.۶ رسم کرده ایم. به وضوح می‌توان مزیت استفاده از طرح انتگرال‌گیری مرتبه بالاتر را در مسائلی که روش لی یو به کار گرفته شده است، ملاحظه کرد. آن‌ها نه تنها تقارن ذاتی و شرط مخروطی از سیستم دینامیکی افزوده را حفظ می‌کنند، بلکه برای دقت داده شده هزینه محاسباتی را نیز کاهش می‌دهند.

برای نشان دادن چگونگی تنظیم طول گام در فرآیند انتگرال‌گیری طرح مرتبه چهار با طول گام متغیر یعنی $M4v$ ، در شکل ۳.۶ نمودار طول گام‌های انتخاب شده را بر حسب زمان برای مثال دو برای دو تولرانس مختلف 10^{-5} و 10^{-9} رسم کرده ایم.



شکل ۳.۶: طول گام زمانی در روند انتگرال‌گیری زمانی برای پیاده‌سازی روش طول گام متغیر از مرتبه ۴ بر پایه بسط مگنوس برای مثال ۲.

از شکل ۲.۶ مشخص است که $M2$ با هزینه محاسباتی مشابه با طرح مرتبه اول (۲۳.۶) دارای دقت بالاتری است. بنابراین برای مسائل با بعد بالا که هزینه‌ی محاسباتی به علت وجود جابه‌جاگرها در $M3$ و $M4$ بالا می‌رود، $M2$ یک جایگزین خوب برای تقریب لی-اولر خواهد بود. بنابراین پیشنهاد می‌کنیم برای همه مسائل (بعد پایین و بعد بالا) روش لی یورا با $M2$ برای حل سیستم‌های دینامیکی افزوده جایگزین کنیم.

۲.۴.۶ مسائل به شدت نوسانی

در طول دهه اخیر تلاش‌های زیادی انجام شده است تا روش‌های عددی را به طور خاص برای معادلاتی که دارای جواب به شدت نوسانی هستند، طراحی کنند. از این میان می‌توان به روش‌های مثلثاتی و اصلاح شده آن‌ها برای حل مسائل به شدت نوسانی مرتبه دوم غیر وابسته به متغیر مستقل یعنی $q'' = -Aq + g(q)$ ، که در آن A یک ماتریس متقارن مثبت معین است، اشاره کرد [۱۰۵، ۱۰۶]. برای آشنایی با روش‌های دیگر عددی مخصوص سیستم‌های به شدت نوسانی می‌توان به [۱۰۷، ۱۰۸] مراجعه کرد.

از طرفی سیستم‌های به شدت نوسانی که به طور صریح وابسته به متغیر t هستند، وجود دارند که می‌توانند در غالب معادله (۱.۶) توصیف شوند ولی قابل حل با روش‌های ذکر شده در بالا نیستند. به طور خاص می‌توان اشاره کرد به سیستم‌های مکانیکی کلاسیک با فرکانس‌های وابسته به زمان که با معادلات غیر خطی به شکل $y' = \epsilon^{-1}A(t, y)y$ نشان داده می‌شوند، که ϵ یک پارامتر کوچک است. برای این سیستم‌ها در ادامه دو روش متفاوت را بیان می‌کنیم تا تقریب‌های عددی را بر پایه‌ی بسط مگنوس وابسته به ماتریس مخصوص A بدست آوریم.

رویکرد اول:

روش اول در واقع تعمیمی از روش بسط مگنوس اصلاح شده، به کار گرفته شده توسط [۱۰۹، ۱۱۰] می‌باشد. این روش توسط [۹۴] بر روی معادله‌های غیر خطی به شکل $y'' + a(t, y, y')y = 0$ با

$1 \gg a(t, y, y')$ نیز گسترش داده شد. در اینجا این روش را برای معادلات به شکل (۱.۶) زمانی که تابع جواب نوسانی است پیاده سازی می کنیم.

برای شروع به طور معمول فرض می کنیم که $y_n \approx y(t_n)$ محاسبه شده است و هدف تعیین حل تقریبی y_{n+1} در $t_{n+1} = t_n + h_n$ می باشد. در ابتدا جواب را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$y(t_n + \tau) = e^{\tau A(t_n, y_n)} z(\tau), \quad \tau \geq 0. \quad (26.6)$$

با قرار دادن معادله (۲۶.۶) در (۱.۶) معادله دیفرانسیل زیر بر حسب $z(\tau)$ بدست می آید:

$$\frac{dz}{d\tau} = B(\tau, z)z, \quad z(0) = y_n, \quad (27.6)$$

با

$$B(\tau, z) = e^{-\tau A(t_n, y_n)} \left(A(t_n + \tau, e^{\tau A(t_n, y_n)} z) - A(t_n, y_n) \right) e^{\tau A(t_n, y_n)}.$$

متغیر جدید $z(\tau)$ می تواند به عنوان یک اصلاح^{۱۱} برای تقریب ارائه شده توسط اولین جمله بسط مگنوس که با روش اویلر تقریب زده شده است در نظر گرفته شود و همان طور که ملاحظه می کنیم در معادله دیفرانسیل (۲۷.۶) از همان نوع $y(t)$ صدق می کند اما با تفاوت های مهم: (i) با توجه به ساختار مسئله $\|B\| \ll \|A\|$ ، (ii) اعضای آن ها به شدت نوسانی می باشند زیرا از اعضای $\exp(\tau A)$ بدست آمده اند. بنابراین اگر بسط مگنوس برای (۲۷.۶) استفاده شود، تقریب هایی با خطایی به طور قابل ملاحظه کوچکتر قابل انتظار است حتی اگر همان تقریب های قبلی برای انتگرال مورد استفاده قرار گیرد. ابتدا، تنها تکرار اول بسط مگنوس اعمال شده بر روی (۲۷.۶) را با طول گام ثابت h در نظر می گیریم:

$$\Omega^{[1]}(h) = \int_0^h G_1(\tau) d\tau,$$

که

$$G_1(\tau) = e^{-\tau A(t_n, y_n)} \left(A(t_n + \tau, e^{\tau A(t_n, y_n)} y_n) - A(t_n, y_n) \right) e^{\tau A(t_n, y_n)}.$$

این انتگرال را با قاعده سیمسون گسسته می کنیم که با توجه به اینکه $G_1(0) = 0$ خواهیم داشت:

$$\Omega^{[1]}(h) \approx u(h) \equiv \frac{h}{6} \left(4G_1\left(\frac{h}{2}\right) + G_1(h) \right).$$

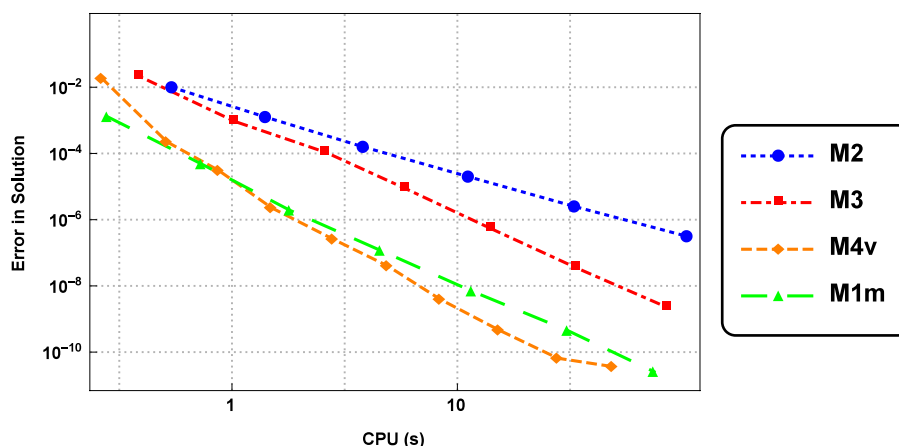
طرح نتیجه شده به صورت

$$y_{n+1} = e^{hA(t_n, y_n)} e^{u(h)} y_n, \quad (28.6)$$

اگر چه ساده می باشد اما نتایجی دقیق تر از همتای استاندارد خود یعنی $M1$ برای این نوع از مسائل فراهم می کند. برای ملاحظه این نکته، مثال زیر را در نظر می گیریم:
مثال ۳. سیستم زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -tx_1^3 + g(t), \end{aligned} \quad (29.6)$$

^{۱۱}Correction



شکل ۴.۶: خطای جواب برای مسئله به شدت نوسانی مثال ۳، روش $M1m$ متناظر با طرح اصلاح شده (۲۸.۶) می باشد.

با $g(t) = t \cos(t^2) (-4t + \cos^2(t^2)) - 2 \sin(t^2)$ جواب دقیق وقتی که $x_2(0) = 0, x_1(0) = 1$ می باشد به صورت

$$x_1(t) = \cos(t^2), \quad x_2(t) = -2t \sin(t^2),$$

است. به وضوح جواب مسئله به شدت نوسانی است. دستگاه (۲۹.۶) می تواند با معرفی $y = (x_1, x_2, 1)^T$ و ماتریس افزایشی

$$A(t, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -tx_1^2 & 0 & g(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

به شکل معادله (۱.۶) در آید. این مثال را در بازه $t \in [0, 20]$ با روش اصلاح شده (۲۸.۶) و همچنین $M2, M3$ و $M4$ با طول گام قابل تغییر انتگرال گیری کرده ایم و نرم خطای نسبی جواب را در زمان $t_f = 20$ ، به عنوان تابعی از زمان محاسبات لازم در شکل ۴.۶ رسم کرده ایم. ملاحظه می کنیم که طرح اصلاح شده (۲۸.۶) با طول گام ثابت خطایی مشابه با $M4v$ دارد. توجه کنید که روش های مثلثاتی (اصلاح شده) به سادگی قابل پیاده سازی روی این سیستم نمی باشند.

رویکرد دوم:

روش بالا می تواند برای وضعیت خاص (اما مهم در کاربرد) یعنی زمانی که $A(t, y)$ طیفی کاملاً موهومی دارد و می تواند برای مقادیر ثابت t و y قطری شود، تطبیق داده شود. در این صورت می توان نوشت:

$$A(t_n, y_n) = V D V^{-1}, \quad \text{با} \quad D = \text{diag}(i\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (30.6)$$

به گونه ای که

$$G_1(\tau) = V e^{-\tau D} \widetilde{M}(\tau) e^{\tau D} V^{-1},$$

با

$$\widetilde{M}(\tau) = V^{-1} \left(A(t_n + \tau, e^{\tau A(t_n, y_n)} y_n) - A(t_n, y_n) \right) V.$$

اولین جمله بسط مگنوس به کار رفته بر روی (۲۷.۶) به صورت زیر است:

$$\Omega^{[1]}(h) = V \int_0^h e^{-\tau D} \widetilde{M}(\tau) e^{\tau D} d\tau V^{-1}. \quad (۳۱.۶)$$

توجه شود که اعضای ماتریس انتگرال قبلی به شکل

$$\left(e^{-\tau D} \widetilde{M}(\tau) e^{\tau D} \right)_{k\ell} = e^{i(\lambda_\ell - \lambda_k)\tau} \widetilde{M}_{k\ell}(\tau), \quad (۳۲.۶)$$

می باشند. همانند قبل، گام بعدی به کار بردن روش انتگرال گیری عددی مناسب بر روی (۳۱.۶) می باشد. با توجه به خاصیت به شدت نوسانی (۳۲.۶)، به نظر استفاده از روشی موسوم به فیلون^{۱۲} [۱۱۱] مناسب به نظر می رسد. از آنجایی که اعضای (۳۱.۶) به شکل $\int_0^h g(s) e^{i\omega s} ds$ می باشند قاعده زیر را در نظر می گیریم:

$$\int_0^h g(\tau) e^{i\omega \tau} d\tau \approx b_1 g(0) + b_2 g(h/2) + b_3 g(h), \quad (۳۳.۶)$$

که وزن های b_i به صورت زیر بگونه ای تعیین شده اند که معادله (۳۳.۶) برای $g(\tau) = 1, \tau, \tau^2$ دقیق باشد:

$$\begin{aligned} b_1(\omega, h) &= \frac{i}{\omega} + \frac{3 + e^{i\omega h}}{h\omega^2} - 4i \frac{1 - e^{i\omega h}}{h^2\omega^3}, \\ b_2(\omega, h) &= -4 \frac{1 + e^{i\omega h}}{h\omega^2} + 8i \frac{1 - e^{i\omega h}}{h^2\omega^3}, \\ b_3(\omega, h) &= -i \frac{e^{i\omega h}}{\omega} + \frac{1 + 3e^{i\omega h}}{h\omega^2} - 4i \frac{1 - e^{i\omega h}}{h^2\omega^3}. \end{aligned}$$

توجه کنید

$$(b_1, b_2, b_3) \rightarrow h \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right) \quad \text{زمانی که} \quad \omega \rightarrow 0$$

و بنابراین قاعده سیمسون در این حالت حدی بدست می آید.

در این مورد، از آنجایی که $\widetilde{M}(0) = 0$ ، تقریب به صورت زیر در می آید:

$$\left(\Omega^{[1]}(h) \right)_{ij} \approx V_{ik} \left(b_2(\omega_{k\ell}, h) \widetilde{M}\left(\frac{h}{2}\right) + b_3(\omega_{k\ell}, h) \widetilde{M}(h) \right)_{k\ell} (V^{-1})_{\ell j}, \quad (۳۴.۶)$$

که اکنون $\omega_{k\ell} \equiv \lambda_\ell - \lambda_k$. بنابراین در نهایت جواب تقریبی را می توان از

$$y_{n+1} = e^{hA(t_n, y_n)} e^{\Omega^{[1]}(h)} y_n,$$

محاسبه نمود.

^{۱۲}Filon

۳.۴.۶ طرح‌های حافظ برای معادلات دیفرانسیل جزئی: معادله شرودینگر مکعبی

در بسیاری موارد، معادله (۱.۶) وقتی که معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی در بعد مکانی گسسته می‌شود، نتیجه می‌شود. روش مگنوس در این حالت نیز یک جایگزین مناسب خواهد بود. بخصوص اگر معادله دیفرانسیل جزئی اصلی تعدادی ویژگی ثابت داشته باشد که به دنبال حفظ آن‌ها با گسسته سازی عددی باشیم. در این گونه مسائل ماتریس حاصل دارای بعد بالایی خواهد بود به گونه ای که محاسبه تابع‌های نمایی ماتریسی پر هزینه تر خواهند شد. از طرفی برای محاسبه طرح‌های بالاتر از مرتبه ی دو جابه جا گر‌های ماتریسی وجود دارند که برای ماتریس‌های با بعد‌های بالا هزینه محاسبات را افزایش می‌دهند. بنابراین فکر کردن به کاهش زمان محاسبات روش، برای مسائل با بعد بالا، با جایگزینی روش‌های اصلاحی برای محاسبه تابع نمایی ماتریسی و کم کردن یا حذف جابه جا گر‌ها می‌تواند ایده ی جالبی باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که طرح‌های ارائه شده در این فصل به همین شکل نیز برای مسئله غیر خطی شرودینگر که بعد از گسسته سازی و با انتخاب طول گام، ماتریس ضرایب یک ماتریس با بعد نسبتاً بالا است، کارایی قابل توجهی دارند. برای نشان دادن این موضوع، معادله دیفرانسیل یک بعدی غیر خطی شرودینگر را در نظر می‌گیریم:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + a|\psi|^2\psi = 0, \quad \psi(x,0) = \psi_0(x), \quad (35.6)$$

که $\psi(x,t)$ یک تابع مختلط مقدار و $a > 0$ یک ثابت می‌باشد. معادله (۳۵.۶) دارای کاربردهای بسیاری در فیزیک از اپتیک غیر خطی تا مطالعه امواج آب (برای مثال مقاله [۱۱۲]) و مراجع آن را ملاحظه کنید) و همچنین دارای کاربرد در قضیه سیستم‌های انتگرال پذیر می‌باشد. این معادله، به طور خاص، دارای ویژگی‌های ثابت زیر

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(|\psi_x|^2 - \frac{1}{2}a|\psi|^4 \right) dx, \quad Q = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx, \quad (36.6)$$

یعنی به ترتیب انرژی و شارژ می‌باشد. این دو قانون تضمین می‌کند که جواب مسئله (۳۵.۶) برای همه زمان کراندار باقی می‌ماند. بنابراین نیاز است تا روش انتگرال گیری عددی به کار ببریم که این دو شرط ثابت را بخوبی حفظ کند.

اگر طرح تفاضل مرکزی مرتبه دوم را برای گسسته سازی مکانی معادله (۳۵.۶) بر روی بازه $[x_L, x_R]$ به کار ببریم، معادله زیر در گره‌های $x = x_j = x_L + j\Delta x$ ، $j = 1, \dots, N$ نتیجه می‌شود:

$$i \frac{d}{dt} \psi_j(t) + \frac{1}{(\Delta x)^2} (\psi_{j+1}(t) - 2\psi_j(t) + \psi_{j-1}(t)) + a|\psi_j(t)|^2\psi_j(t) = 0, \quad \psi_j(0) = \psi_0(x_j), \quad (37.6)$$

که در مقاله [۱۱۳] نشان داده شده است که اگر شرط اولیه $\psi_0(x)$ یک تابع مربع انتگرال پذیر باشد، سپس جواب معادله (۳۷.۶) به جواب اصلی (۳۵.۶) زمانی که $\Delta x \rightarrow 0$ همگرا می‌شود.

با نوشتن $\psi_j = p_j + iq_j$ ، معادله (۳۷.۶) معادل با سیستم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q_j - \frac{1}{(\Delta x)^2}(p_{j+1} - 2p_j + p_{j-1}) - a(q_j^2 + p_j^2)p_j &= 0, \\ \frac{d}{dt}p_j + \frac{1}{(\Delta x)^2}(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) + a(q_j^2 + p_j^2)q_j &= 0, \end{aligned}$$

که می‌تواند به فرم ماتریسی زیر نوشته شود

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} O & \frac{1}{(\Delta x)^2}C + aD \\ -\frac{1}{(\Delta x)^2}C - aD & O \end{pmatrix} y \equiv A(y)y, \quad (38.6)$$

بر حسب $y = (q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)^T$ و ماتریس‌های $N \times N$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}((q_1^2 + p_1^2), \dots, (q_N^2 + p_N^2)).$$

در اینجا فرض کرده ایم که شرایط مرزی به صورت $\psi(x_L, t) = \psi(x_R, t) = 0$ باشند، به گونه ای که

$$q_0 = p_0 = q_{N+1} = p_{N+1} = 0$$

از طرفی می‌توان بررسی کرد که معادله‌های

$$\tilde{E} = \frac{1}{2(\Delta x)^2}(q^T C q + p^T C p) + \frac{a}{4} \sum_{k=1}^N (q_k^2 + p_k^2)^2, \quad (39.6)$$

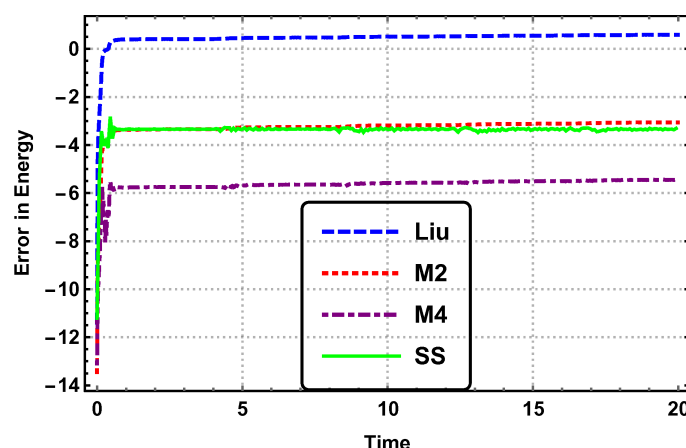
$$\tilde{Q} = \sum_{k=1}^N (q_k^2 + p_k^2), \quad (40.6)$$

با استفاده از جواب‌های معادله (۳۸.۶) حفظ شده‌اند. این معادلات به عنوان طرح‌های نیمه-گسسته سازی از شرایط ثابت (۳۶.۶) از سیستم پیوسته در نظر گرفته می‌شوند. در واقع، معادله (۳۸.۶) متناظر با سیستم همیلتونی با تابع همیلتونی داده شده توسط (۳۹.۶) می‌باشد [۱۱۳].

در آزمایشات عددی شرط اولیه را به صورت

$$\psi(x, 0) = \psi_0(x) = \text{sech}x, \quad (41.6)$$

در نظر می‌گیریم. در این حالت ثابت شده است یک حالت مقید از k سالتون، اگر $a = 2k^2$ ، $k = 1, 2, \dots$ تولید می‌شود [۱۱۴]. در اینجا $a = 18$ (متناظر با حالت مقید از $k = 3$ سالتون) را در نظر می‌گیریم که معمولاً از نقطه نظر عددی به علت وجود گرادیان‌های بزرگ در جواب مشکل ساز است [۱۱۳]. همچنین دامنه مکانی را $x \in [x_L = -20, x_R = 20]$ در نظر می‌گیریم به گونه ای که $\psi(x_L, 0) = \psi(x_R, 0) = 0$. سپس از معادله حاصل (۳۸.۶) با در نظر گرفتن $\Delta x = 0.2$ در بازه زمانی $t \in [0, 20]$ انتگرال می‌گیریم و حفظ دو شرط $\tilde{E}$ و $\tilde{Q}$ را توسط جواب بررسی می‌کنیم.



شکل ۵.۶: خطا برای انرژی گسسته (۳۹.۶) از معادله مکعبی شرودینگر با $a = 18$ و شرط اولیه (۴۱.۶) با روش‌های مگنوس از مرتبه اول (لیو)، دوم ($M2$)، چهارم ($M4$) و روش حافظ جداسازی عجیب (SS).

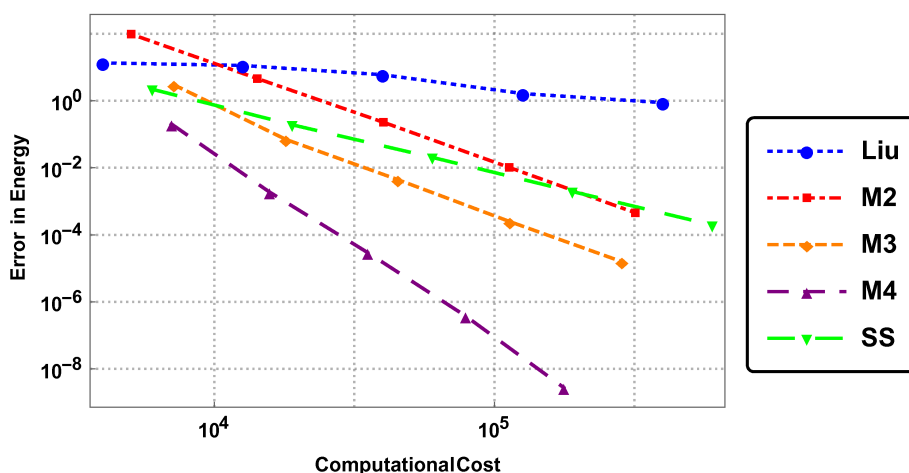
شکل ۵.۶ مقدار $\|\tilde{E}(t) - \tilde{E}(0)\|$ بدست آمده از طرح‌های مرتبه دوم $M2$ و چهارم $M4$ مگنوس را تا $t = 20$ نشان می‌دهد. همچنین نتایج را با روش‌های لیو و جداسازی عجیب SS ^{۱۳} مقایسه کرده ایم. در این جا طول گام زمانی به گونه ای انتخاب شده است که هزینه محاسباتی برای همه روش‌ها یکسان باشد. در این مثال خطا برای $\tilde{Q}$ همیشه کمتر از 10^{-14} می‌باشد.

شکل ۶.۶ خطای انرژی را در زمان نهایی $t = 20$ بر حسب هزینه ی محاسباتی هر روش نشان می‌دهد. از این شکل می‌توان مشاهده کرد $M2$ یک روش از مرتبه ی سه می‌باشد و زمانی که دقت بالا مورد نیاز است نسبت به روش جداسازی عجیب کارآمد تر است. همچنین اگر چه روش‌های $M3$ و $M4$ در هر مرحله هزینه ی محاسباتی بالاتری دارند اما دقت آن‌ها به مراتب بهتر است به گونه ای که کارآمد تر نسبت به بقیه هستند. توجه شود هزینه محاسباتی روش جداسازی عجیب به صورت یک محاسبه ماتریس A و دو محاسبه تابع نمایی ماتریسی در هر مرحله در نظر گرفته شده است. بار دیگر در اینجا تاکید می‌کنیم اگر چه الگوریتم‌های قبلی بر پایه ی بسط مگنوس برای سیستم‌های وابسته به متغیر مستقل طراحی شدند اما همچنان که ملاحظه می‌کنیم نتایج بسیار خوبی را در حالت غیر وابسته به متغیر مستقل نیز فراهم کردند.

۵.۶ نتیجه گیری

در این فصل سیستم‌های دینامیکی را بررسی کردیم که ویژگی‌های کیفی خاصی را دارا می‌باشند و به طور مداوم در کاربردها اتفاق می‌افتند. غالباً این ویژگی‌های سیستم در ارتباط با ساختار خاصی از ماتریس ضرایب $A(t, y)$ هستند، بدین معنا که ماتریس A متعلق به جبر لی می‌باشد. به عنوان مثال اگر A یک ماتریس کج متقارن باشد اندازه بردار جواب $y(t)$ در طول انتگرال گیری حفظ می‌شود. با حفظ این ویژگی از جواب بوسیله ی روش عددی در واقع می‌توان رفتار جواب را به خصوص در

^{۱۳}Strang splitting



شکل ۶.۶: خط انرژی گسسته (۳۹.۶) از معادله مکعبی شرودینگر با $a = 18$ و شرط اولیه (۴۱.۶) بر حسب هزینه محاسباتی هر روش.

زمان‌های طولانی بخوبی توصیف کرد. روش عددی مناسب معرفی شده در این فصل روش‌های عددی بر پایه بسط مگنوس می‌باشند. این روش‌ها علاوه بر اینکه این ویژگی‌ها را بخوبی حفظ می‌کنند، همچنین همگی صریح بوده و قابلیت انطباق طول گام را نیز دارا می‌باشند. این قابلیت باعث می‌شود که در هر مرحله با انتخاب طول گام مناسب بتوان کارایی روش را بیشتر کرد. به وضوح یکی از کاربردهای این روش ماتریس دینامیکی افزوده لی یو می‌باشد. بعد از به کار بردن این روش بر روی ماتریس دینامیکی افزوده در واقع می‌توان طرح‌های حافظ گروه از مراتب بالاتر از روش لی یو بدست آورد که نسبت به روش لی یو کارآمدتر نیز می‌باشند. علاوه بر این شکل اصلاح شده این روش را برای سیستم‌های به شدت نوسانی به کار بردیم که شکل اصلاح شده روش را کارآمدتر می‌کند. همچنین طرح‌های حافظ را بر روی معادله با مشتق جزئی شرودینگر که بعد از گسسته سازی، ماتریس ضرایب بعد بالایی دارد با موفقیت پیاده سازی کردیم.

فصل ۷

نتیجه گیری و کارهای آتی

از نتایج بارز این رساله می توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱. اثبات وجود جواب موج رونده برای معادله ی کسمیر از سیستم ایتو (پیدا کردن محدوده ی مناسب پارامترهای ظاهر شده در معادله برای وجود جواب).
۲. کارآمدی روش طرح حافظ گروه برای حل معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه، مقدار مرزی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی.
۳. کارآمدی روش پرتابی گروه لی برای حل مسائل مقدار مرزی که دارای جواب های چند گانه می باشند. سرعت در پیدا کردن پارامتر پرتابی با توجه به بدست آوردن بازه ی قابل قبول برای آن.
۴. وارد کردن متغیر ساختگی به مسئله برای مسائلی که نیاز به متغیری با مشتق مرتبه ی اول داریم.
۵. استفاده از طرح حافظ گروه بر روی دامنه به شکل دلخواه با کمک گرفتن از توابع پایه ای شعاعی.
۶. نشان دادن کاربرد های مهم برای بسط مگنوس و همچنین نشان دادن قابلیت انطباق طول گام برای این طرح ها.
۷. تولید طرح های حافظ گروه جدید از مرتبه های مختلف.

برای دانشجویانی که علاقه به کار در این زمینه دارند برخی از پیشنهادات به صورت زیر ارائه می شود:

۱. آیا می توان به جای شرط مخروطی از شرط دیگری برای تولید سیستم های دینامیکی افزوده استفاده کرد؟

۲. استفاده از طرح‌های حافظ (گروه) مطرح شده در رساله برای معادلات دیگر از جمله کسری، انتگرالی و معکوس. استفاده از طرح‌ها با طول گام قابل انطباق برای مسائل لایه مرزی^۱.
۳. همان‌طور که می‌دانیم روش‌های بدون شبکه بر سه گام اساسی تولید نقاط، تقریب جواب و آزمودن استوار می‌باشند که روش‌های متفاوت تقریب جواب و آزمودن، منجر به روش‌های بدون شبکه متفاوتی می‌شوند. استفاده از ایده‌های مطرح شده در این سه گام برای افزایش کارآمدی روش ترکیبی طرح حافظ گروه با توابع پایه‌ای شعاعی.
۴. بدست آوردن طرح‌های حافظ از مرتبه بالاتر از چهار و بررسی کارآمدی و قابلیت انطباق طول گام برای آن‌ها.
۵. محاسبه تابع نمایی ماتریسی و همچنین جا به جا گرهای ماتریسی کاری پرهزینه و زمان‌بر می‌باشد. کاهش زمان محاسبات روش از طریق به کار بردن الگوریتم‌های اصلاحی برای محاسبه تابع نمایی و جا به جا گرهای ماتریسی.
۶. همان‌طور که ملاحظه کردیم طرح‌های حافظ ارائه شده یکی از ویژگی‌های هندسی معادله را به طور کامل حفظ می‌کرد. آیا می‌توان روش انتگرال‌گیری هندسی ایجاد کرد که همزمان دو یا چند ویژگی هندسی را به طور کامل حفظ کند؟

^۱ Boundary layer

- [1] P.J. Olver, Application of Lie Groups to Differential Equations, New York: Springer-Verlag; 1993.
- [2] R. Gilmore, Lie groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, Wiley, (1974).
- [3] V. Dorodnitsyn, Applications of Lie Groups to Difference Equations, CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [4] R. Gilmore, Lie groups, Physics and Geometry, Cambridge, (2008).
- [5] N.H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, Wiley, Chichester, 1999.
- [6] F. Lachello, Lie Algebras and Applications, Springer, (2006).
- [7] M.S. Hashemi, Analytical and numerical solution of differential equations by Lie symmetry groups and Lie-group shooting method, PhD thesis, Imam Khomeini international university (2013).
- [8] B.J. Cantwell, Introduction to Symmetry Analysis, Cambridge Uni-versity Press, Cambridge, 2002.
- [9] A. Iserles, A.T. Peplow, A.M. Stuart, A unified approach to spurious solutions introduced by time discretisation, Part I: basic theory, SIAM J. Numer. Anal. 28 (1991) 1723–1751.
- [10] A. Iserles, A.M. Stuart, Unified approach to spurious solutions introduced by time discretisation, Part II: BDF-like methods, IMA J. Numer. Anal. 12 (1992) 487–502.
- [11] A.R. Humphries, Spurious solutions of numerical methods for initial value problems, IMA J. Numer. Anal. 13 (1993) 263–290.
- [12] C.J. Budd, A. Iserles, Geometric integration: numerical solution of differential equations on manifolds, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 357 (1999) 945–956.
- [13] P.G. Ciarlet (Editor), F. Cucker (Guest Editor), Handbook of Numerical Analysis Volume XI. Special Volume, Foundations of Computational Mathematics, Elsevier, Amsterdam, 2003.



- [14] E. Hairer, Geometric integration of ordinary differential equations on manifolds, BIT Numerical Mathematics 41 (2001) 996-1007.
- [15] S. Blanes, F. Casas, A Concise Introduction to Geometric Numerical Integration, CRC Press, Boca Raton, (2016).
- [16] A. Iserles, H. Z. Munthe-Kaas, S.P. Nørsett, A. Zanna, Lie-group methods, Acta Numerica 9 (2000) 215-365.
- [17] C. S. Liu, Cone of non-linear dynamical system and group preserving schemes, Int. J. Non-Linear Mech. 36 (2001) 1047-1068.
- [18] M. Ito, Symmetries and conservation laws of a coupled nonlinear wave equation, Phys. Lett. A 91 (1982) 335-338.
- [19] P. J. Olver, P. Rosenau, Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support, Phys. Rev. E 53 (1996) 1900-1906.
- [20] R. A. Van Gorder, Solutions to a novel Casimir equation for the Ito system, Commun. Theor. Phys. 56 (2011) 801-804.
- [21] J. Haussermann, R. A. Van Gorder, Classification of two types of weak solutions to the Casimir equation for the Ito system, Quart. Appl. Math. 72 (2014) 471-490.
- [22] A. H. Bhrawy, R. A. Van Gorder, Numerical computation of travelling wave solutions for the nonlinear Ito system, Appl. Math. Inf. Sci. 9 (2015) 75-83.
- [23] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Heidelberg: Springer, 2002.
- [24] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Prediction of multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems: Novel application of homotopy analysis method, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15 (2010) 3830-3846.
- [25] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, M. S. Alhuthali, A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, J. Comput. Appl. Math. 279 (2015) 293-305.
- [26] S. J. Liao, A new branch of solutions of boundary-layer flows over a permeable stretching plate, Int. J. Nonlinear Mech. 42 (2007) 819-830.
- [27] H. Xu, S.J. Liao, Dual solutions of boundary layer flow over an upstream moving plate, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 13 (2008) 350-358.
- [28] C. S. Liu, Efficient shooting methods for the second order ordinary differential equations, Comput. Model. Eng. Sci. 15 (2006) 69-86.



- [29] S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, C.S. Liu, The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16 (2011) 4238–49.
- [30] A. M. Wazwaz, Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations, *Appl. Math. Comput.* 166 (2005) 652–663.
- [31] A. Mohsen, L.F. Sedeek, S.A. Mohamed, New smoother to enhance multigrid-based methods for Bratu problem, *Appl. Math. Comput.* 204 (2008) 325–339.
- [32] J.P. Chebyshev, polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the one-dimensional Bratu equation, *Appl. Math. Comput.* 143 (2003) 189–200.
- [33] Y.A.S. Aregbesola, Numerical solution of Bratu problem using the method of weighted residual, *Electron. J. South Afr. Math. Sci.* 3 (2003) 1–7.
- [34] S. Abbasbandy, Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method, *Chem. Eng. J.* 136 (2008) 144–150.
- [35] E. Magyari, Exact analytical solution of a nonlinear reaction-diffusion model in porous catalysts, *Chem. Eng. J.* 143 (2008) 167–171.
- [36] Y. P. Sun, S. B. Liu, S. Keith, Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by decomposition method, *Chem. Eng. J.* 102 (2004) 1–10.
- [37] S. Abbasbandy, E. Magyari, E. Shivanian, The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 14 (2009) 3530–3560.
- [38] L. Andersson, P.T. Chrusciel, H. Friedrich, On the regularity of solutions to the Yamabe equation and the existence of smooth hyperboloidal initial data for Einstein's field equations, *Comm. Math. Phys.* 149 (1992) 587–612.
- [39] S. Brendle, Blow-up phenomena for the Yamabe equation, *J. Amer. Math. Soc.* 21 (2008) 951–980.
- [40] S. Y. Alice Chang, Z. C. Han, P. Yang, Classification of singular radial solutions to the σ_k Yamabe equation on annular domains, *J. Differential Equations*, 216 (2005) 482–501.
- [41] R. A. Van Gorder, Control of error in the homotopy analysis of semi-linear elliptic boundary value problems, *Numer. Algorithms* 61 (2012) 613–629.



- [42] A. H. Bhrawy, A. S. Alofi, R. A. Van Gorder, An efficient collocation method for a class of boundary value problems arising in mathematical physics and geometry, *Abs. Appl. Anal.* 2014 (2014) ID:425648.
- [43] L. Lapidus, J. H. Seinfeld, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering 74 (1971) Academic Press, New York-London.
- [44] K. Hooman, A perturbation solution for forced convection in a porous-saturated duct, *J. Comput. Appl. Math.* 211 (2008) 57–66.
- [45] P. D. Weidman, A. Medina, Porous media convection between vertical walls: continuum of solutions from capped to open ends, *Acta Mechanica*, 199 (2008) 209–216.
- [46] K. Hooman, A. A. Merrikh, Analytical solution of forced convection in a duct of rectangular cross section saturated by a porous medium, *Heat Transfer*, 128 (2006) 596–600.
- [47] R. A. Van Gorder, K. Vajravelu, F.T. Akyildiz, Solutions to the Brinkman–Forchheimer momentum equation for a unidirectional flow over a rectangular domain, *Int. J. Fluid Mech. Res.* 36 (2009) 552–565.
- [48] S. Abbasbandy, R.A. Van Gorder, P. Bakhtiari, Reproducing kernel method for the numerical solution of the Brinkman–Forchheimer momentum equation, *J. Comput. Appl. Math.* 311 (2017) 262–271.
- [49] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 224, Springer, New York, 1977.
- [50] C. S. Liu, Solving an inverse Sturm–Liouville problem by a Lie-group method, *Boundary Value Problems*, 2008 (2008) 18 pages.
- [51] C. S. Liu, S.N. Atluri, A fictitious time integration method (FTIM) for solving mixed complementarity problems with applications to non-linear optimization, *Comput. Model. Eng. Sci.* 34 (2008) 155–178.
- [52] C. S. Liu, A fictitious time integration method for a quasilinear elliptic boundary value problem defined in an arbitrary plane domain, *CMC- Comput. Mate. Contin.* 11 (2009) 15–32.
- [53] C. S. Liu, A fictitious time integration method for solving m-point boundary value problems, *Comput. Model. Eng. Sci.* 39 (2009) 125–154.



- [54] C. S. Liu, S. N. Atluri, A fictitious time integration method for the numerical solution of the fredholm integral equation and for numerical differentiation of noisy data, and its relation to the filter theory, *Comput. Model. Eng. Sci.* 41 (2009) 243–261.
- [55] C. S. Liu, W. Yeih, S. N. Atluri, An enhanced fictitious time integration method for non-linear algebraic equations with multiple solutions: boundary layer, boundary value and eigenvalue problems, *Comput. Model. Eng. Sci.* 59 (2010) 301–323.
- [56] J. Y. Chang, C. C. Tsai, T.W. Hsu, Using fictitious time integration method to study wave propagation over arbitrary bathymetry, *J. of Mech.* 29 (2013) 551–558.
- [57] M. S. Hashemi, M. Sariri, A fictitious time integration method for a one-dimensional hyperbolic boundary value problem, *J. math. comput. Sci.* 14 (2015) 87–96.
- [58] M. S. Hashemi, D. Baleanu, M. P. Haghghi, E. Darvishi, Solving the time-fractional diffusion equation using a Lie group integrator, *Ther. Sci.* 19 (2015) S77–S83.
- [59] C. W. Chang, C. S. Liu, An implicit Lie-group iterative scheme for solving the nonlinear Klein-Gordon and sine-Gordon equations, *Appl. Math. Model.* 40 (2016) 1157–1167.
- [60] C. S. Liu, Group preserving scheme for backward heat conduction problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2004) 2567–2576.
- [61] C. S. Liu, Two-dimensional bilinear oscillator: group-preserving scheme and steady-state motion under harmonic loading, *Int. J. Non-Linear Mech.* 38 (2003) 1581–602.
- [62] C. W. Chang, C. S. Liu, The backward group preserving scheme for multi-dimensional nonhomogeneous and nonlinear backward wave problems, *Appl. Math. Model.* 38 (2014) 4027–4048.
- [63] S. Abbasbandy, M. S. Hashemi, Group preserving scheme for the Cauchy problem of the Laplace equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 35 (2011) 1003–1009.
- [64] C. S. Liu, C. W. Chang, A novel mixed group preserving scheme for the inverse Cauchy problem of elliptic equations in annular domains, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 36 (2012) 211–219.
- [65] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, The first integral method for modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 15 (2010) 1759–1764.
- [66] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi, The use of interpolating element-free Galerkin technique for solving 2D generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers and regularized long-wave equations on non-rectangular domains with error estimate, *J. Comput. Appl. Math.* 286 (2015) 211–231.



- [67] M. Dehghan, M. Abbaszadeh, A. Mohebbi, The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation via the meshless method of radial basis functions, *Comput. Math. Appl.* 68 (2014) 212–237.
- [68] C. A. Gomez, A. H. Salas, B. A. Frias, New periodic and soliton solutions for the generalized BBM and BBM–Burgers equations, *Appl. Math. Comput.* 217 (2010) 1430–1434.
- [69] Q. Xiao, H. Zhao, Nonlinear stability of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers shock profiles in several dimensions, *J. Math. Anal. Appl.* 406 (2013) 165–187.
- [70] H. Yin, J. Hu, Exponential decay rate of solutions toward traveling waves for the Cauchy problem of generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Nonlinear Analysis* 73 (2010) 1729–1738.
- [71] M. A. Noor, K. I. Noor, A. Waheed, E. A. Al-Said, Some new solitary solutions of the modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Comput. Math. Appl.* 62 (2011) 2126–2131.
- [72] X. Qinghua, C. Z. Zheng, Degenerate boundary layer solutions to the generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation, *Acta Math. Scientia* 32 (2012) 1743–1758.
- [73] T. Achouri, N. Khiari, K. Omrani, On the convergence of difference schemes for the Benjamin–Bona–Mahony (BBM) equation, *Appl. Math. Comput.* 182 (2006) 999–1005.
- [74] K. Omrani, The convergence of fully discrete Galerkin approximations for the Benjamin–Bona–Mahony (BBM) equation, *Appl. Math. Comput.* 180 (2006) 614–621.
- [75] A. Mekki, M.M. Ali, Numerical simulation of Kadomtsev–Petviashvili–Benjamin–Bona–Mahony equations using finite difference method, *Appl. Math. Comput.* 219 (2013) 11214–11222.
- [76] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, I. Hashim, A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear Schrodinger equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 37 (2013) 885–898.
- [77] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, I. Hashim, Numerical analysis of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis using a meshfree method based on the radial basis function, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 36 (2012) 1811–1818.



- [78] S. Abbasbandy, H. R. Ghehsareh, M. Alhuthali, H. Alsulami, Comparison of meshless local weak and strong forms based on particular solutions for a non-classical 2-D diffusion model, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 39 (2014) 121–128.
- [79] A. Shirzadi, L. Ling, S. Abbasbandy, Meshless simulations of the two-dimensional fractional-time convection-diffusion-reaction equations, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 36 (2012) 1522–1527.
- [80] S. Rippa, An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation, *Adv. Comput. Math.* 11 (1999) 193–210.
- [81] G. E. Fasshauer, J. G. Zhang, On choosing optimal shape parameters for RBF approximation, *Numer. Algorithms* 45 (2007) 345–368.
- [82] V. Bayona, M. Moscoso, M. Kindelan, Optimal constant shape parameter for multiquadric based RBF–FD method, *J. Comput. Phys.* 230 (2011) 7384–7399.
- [83] Y. V. S. S. Sanyasiraju, Ch. Satyanarayana, Local Hermite-RBF based grid-free scheme with a variable (optimal) shape parameter for steady convection-diffusion equations, *Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B* 4 (2013) 382–393.
- [84] B. Fornberg, J. Zuev, The Runge phenomenon and spatially variable shape parameters in RBF interpolation, *Comput. Math. Appl.* 54 (2007) 379–398.
- [85] M. Uddin, On the selection of a good value of shape parameter in solving time-dependent partial differential equations using RBF approximation method, *Appl. Math. Model.* 38 (2014) 135–144.
- [86] S. Sarra, D. Sturgill, A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33 (2009) 1239–1245.
- [87] E. Hairer, Ch. Lubich, and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer-Verlag, Second edition, 2006.
- [88] S. Blanes and F. Casas, *A Concise Introduction to Geometric Numerical Integration*, CRC Press, 2016.
- [89] W. Magnus, On the exponential solution of differential equations for a linear operator, *Comm. Pure and Appl. Math.* VII: (1954) 649–673.
- [90] S. Blanes, F. Casas, J.A. Oteo, J. Ros, The Magnus expansion and some of its applications, *Phys. Rep.* 470 (2009) 151–238.
- [91] H. Munthe-Kaas, Runge–Kutta methods on Lie groups, *BIT* 38 (1998) 92–111.



- [92] H. Munthe-Kaas, High order Runge–Kutta methods on manifolds, *Appl. Numer. Math.* 29 (1999) 115–127.
- [93] A. Zanna, Collocation and relaxed collocation for the Fer and the Magnus expansions, *SIAM J. Numer. Anal.* 36 (1999) 1145–1182.
- [94] F. Casas, A. Iserles, Explicit Magnus expansions for nonlinear equations, *J. Phys. A, Math. Gen.* 39 (2006) 5445–5461.
- [95] C. B. Moler, C. F. Van Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later, *SIAM Review* 45 (2003) 3–49.
- [96] E. Hairer, S. P. NQrsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I, Nonstiff Problems*, Springer-Verlag, Second revised edition, 1993.
- [97] J. M. Sanz-Serna, M.P. Calvo, *Numerical Hamiltonian Problems*, Chapman Hall, 1994.
- [98] J. E. Marsden, T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag, 2nd edition, 1999.
- [99] C. S. Liu, Nonstandard group-preserving schemes for very stiff ordinary differential equations, *CMES: Comp. Model. Eng.* 9 (2005) 225–272.
- [100] C. S. Liu. A new sliding control strategy for nonlinear system solved by the Lie-group differential algebraic equation method, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 19 (2014) 2012–2038.
- [101] C. S. Liu, A novel Lie-group theory and complexity of nonlinear dynamical systems, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 20 (2015) 39–58,.
- [102] S. Abbasbandy, R.A. Van Gorder, M. Hajiketabi, M. Mesrizadeh, Existence and numerical solution of periodic traveling wave solutions to the Casimir equation for the Ito system, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 27 (2015) 254–26.
- [103] S. Abbasbandy, R. A. Van Gorder, M. Hajiketabi, The Lie-group shooting method for radial symmetric solutions of the Yamabe equation, *CMES-Comp. Model. Eng.* 104 (2015) 329–351.
- [104] C. S. Liu, W. S. Jhao, The second Lie-group $SO(n, 1)$ used to solve ordinary differential equations, *J. Math. Research* 6 (2014) 18–37.
- [105] R.I. McLachlan and A. Stern. Modified trigonometric integrators, *SIAM J. Numer. Anal.* 52 (2014) 1378–1397.



- [106] B. Wang, A. Iserles, X. Wu, Arbitrary-order trigonometric fourier collocation methods for multi-frequency oscillatory systems, *Found. Comput. Math.* 16 (2016) 151–181.
- [107] M.P. Calvo and J.M. Sanz-Serna, Heterogeneous multiscale methods for mechanical systems with vibrations, *SIAM J. Sci. Comput.* 32 (2010) 2029–2046.
- [108] Ph. Chartier, A. Murua, and J.M. Sanz-Serna, Higher-order averaging, formal series and numerical integration I: B-series. *Found. Comput. Math.* 10 (2010) 695–727.
- [109] A. Iserles, On the global error of discretization methods for highly oscillatory ordinary differential equations, *BIT*, 42 (2002) 561–599.
- [110] A. Iserles, On the method of Neumann series for highly oscillatory equations, *BIT*, 44 (2004) 473–488.
- [111] A. Iserles and S. P. Nørsett, On quadrature methods for highly oscillatory integrals and their implementation, *BIT* 44 (2004) 755–772.
- [112] G. Fibich, *The Nonlinear Schrodinger Equation. Singular Solutions and Optical Collapse*, Springer, 2015.
- [113] Y. F. Tang, L. Vazquez, F. Zhang, V. M. Perez-Garcia, Symplectic methods for the nonlinear Schrodinger equation, *Computers Math. Applic.* 32 (1996) 73–83.
- [114] B. M. Herbst, J. L. Morris, and A.R. Mitchell, Numerical experience with the nonlinear Schrodinger equation, *J. Comput. Phys.* 60 (1985) 282–305.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Perturbation	اختلال
Initial	آغازی
Horizontal	افقی
Augmented	افزوده
Upper	بالایی
Expansion	بسط
Lower	پایینی
Shooting	پرتابی
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Concavity	تقعر
Flows	جریان
Multiple	چندگانه
Polynomial	چندجمله ای
Preserving	حافظ
Error	خطا
Exact	دقیق
Accuracy	دقت
Arbitrary	دلخواه
Period	دوره تناوب
Dual	دوگانه
Traveling	رونده
Branch	شاخه
Condition	شرط
Radial	شعاعی

Coefficient	ضریب
Implicitly	ضمنی
Scheme	طرح
Operator	عملگر
Intersect	قطع کردن
Lie-group	گروه لی
Symmetric	متقارن
Cone	مخروط
High-order	مرتبه بالا
Boundary	مرزی
Valid	معتبر
Minkowski	مینکوفسکی
Oscillating	نوسانی
Existence	وجود
Convergence	همگرایی
Geometric	هندسی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Accuracy	دقت
Agumented	افزوده
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Arbitrary	دلخواه
Boundary	مرزی
Branch	شاخه
Coefficient	ضریب
Concavity	تقعر
Cone	مخروط
Condition	شرط
Convergence	همگرایی
Dual	دوگانه
Error	خطا
Exact	دقیق
Existence	وجود
Expansion	بسط
Flows	جریان
Geometric	هندسی
Horizontal	افقی
High-order	مرتبه بالا
Implicitly	ضمنی
Initial	آغازی
Intersect	قطع کردن
Lie-group	گروه لی

Linear	خطی
Lower	پایینی
Minkowski	مینکوفسکی
Multiple	چندگانه
Multiplicity	چندگانگی
Operator	عملگر
Oscillating	نوسانی
Period	دوره تناوب
Perturbation	اختلال
Polynomial	چندجمله‌ای
Preseving	حافظ
Radial	شعاعی
Scheme	طرح
Shooting	پرتابی
Symmetric	متقارن
Traveling	رونده
Upper	بالایی
Valid	معتبر

Surname: Hajiketabi

Name: Mohammad

Title: Numerical methods based on group preserving schemes for solving differential equations

Supervisor: Prof. Saeid Abbasbandy

Advisors: Prof. Davood Rostamy and Dr. Robert A. Van Gorder

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University

Faculty of Sciences

Department of Mathematics

Date: 2017

Number of pages: [122](#)

Keywords: Group preserving schemes; Lie group shooting method; The fictitious variable integration method; Radial basis functions; Magnus expansion.

Abstract

The aim of this thesis is an extensive review of numerical methods based on group preserving schemes for solving of differential equations. We use of group preserving schemes for numerical simulation of Casimir nonlinear equation and show the numerical results are entirely consistent with the analytical results. We apply the Lie-group shooting method for solving of different of boundary value problems including Bratu equation, reaction-diffusion model and Yamabe equation and also show this method is a powerful tool for predict of the number of solutions and approximate them with good accuracy. We solve the Brinkman-Forchheimer partial differential equation via the combination of group preserving schemes with the fictitious variable integration method and find the numerical solution of this equation with very good precision. To overcome some difficulties related to discretization of partial differential equations for group preserving schemes, we use of radial basis functions and solve the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation. Finally, with help of Magnus expansion we design new group preserving schemes of different orders with ability to adapt stepsize during the integration.



Imam Khomeini International University
Faculty of Sciences
Department of Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

Numerical methods based on group preserving schemes for solving differential equations

Supervisor

Prof. Saeid Abbasbandy

Advisors

Prof. Davood Rostamy and Dr. Robert A. Van Gorder

by

Mohammad Hajiketabi

2017