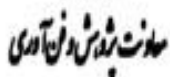


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ
٢٠



بہم فدا

مشور اخلاق پرورش

نمایی از خفاوند بعلون و اعتبار این که عالم خضر خداست و اولاد عالم را اهل انقیاد و مطیعان داشتند و در این نزدش در تکریم است و جایگاه و مقام و انقیاد و فرسنگ و خلق و شریک و انجمن و احسان و بدعت علی

اوصافى و ملحقات از اوصافى منتهى كرده املى زير و در بنام غایت الهى بنده شىء در نظر فرموده و در آن غلبه كرده:

۱. اصل غنیمت جملہ: کاوش در سائنسی لیجلی غنیمت و کھاری بہ آں امری از حرکتہ چنان سادی غنیمت

۲۔ اصل دعابت حق: اگر ہم دعابت کمال حق پر دستگیری و پرمسیدگی انسان، حیوان و نبات اور سایر مباحی حق

۱-۲ اصل بابت های و منوی نهید بر حیات کامل حقوق های و منوی دانشگاه کبیر مکتب های پژوهش

۴- اصل منفعی: تهیه و رعایت مصالح و دور نظر داشتن از بیشتر آنست که خود را به مزاايل نباشد.

۵- اصل رعایت انصاف و عدالت: تعدید اجتناب از مرکز گرای فخر طلبی و مخالفت با احوال، تمیزیت و صلاح و اعتدال

۶- اصل در ردی: قصد صانت از اسرار و اطلاعات محوله افراد سازمان که کشور و دیگر افراد دولتی مرتطبا نشین.

۷- اصل انحراف: تعدد ریاضت حریم از دست دادن تمام ثقیات و ریاضت جانب تعدد و غرضی از حریم که دست گشتی

۸- اعلیٰ تدریج: نصاب درجہ دانش و استاد عالی ترقی یافتہ و اشتغال آسان، بہ بھکاریوں علمی و انتہائی بہ خیر برادر مولوی کی وضع قانونی اور

۱- اصل درست: دانشنامه، درست جوی از حرکت، نقد خبر روزی و اعلام موضع نسبت به کثرت که خود علم و پژوهش را به مثابه ای غیر علمی می آید.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

تعمهنامه اصالت رساله یا پایان نامه

اینجانب دانش آموخته مقطع کارشناسی ارشد ناپیوسته/دکترای حرفه ای / دکتری تخصصی / در رشته که در تاریخ از پایان نامه / رساله خود تحت عنوان " " با کسب نمره و درجه دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

(۱) این پایان نامه / رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

(۲) این پایان نامه / رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پائین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

(۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

.....

تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات تهران
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی «Ph.D.»

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

حل معادلات دیفرانسیل پاره ای با مشتقات کسری با استفاده از پایه های متعامد

استادان راهنما:

دکتر اسمعیل بابلیان

دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور:

دکتر توفیق الهویرنلو

نگارش:

اسماء باصری باغسیاه

زمستان ۱۳۹۶

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار هستی را که به استعانت از او توفیق آن را پیدا نمودم تا از اقیانوس بی کران علم و دانش توشه ای بگیرم. برخورد لازم می دانم از استادان راهنمای ارجمندم، جناب آقای دکتر اسمعیل بابلیان و جناب آقای دکتر سعید عباس بندی که به پاس انگیزه ها و امیدواری هایشان در امر پژوهش اینجانب را از راهنمایی های بی دریغشان بهره مند ساخته اند، صمیمانه سپاسگزاری نمایم. از استاد گرامی جناب آقای دکتر توفیق الهویرنلو که مشاوره این رساله را به عهده داشته اند، کمال تشکر را دارم.

از خانواده عزیزم، پدر و مادر و همسر که همواره مشوق اصلی من در تمامی دوران تحصیل بودند و موفقیت خود را از آغاز دوره تحصیل تاکنون مرهون زحمات آن ها هستم، کمال تشکر را دارم.

اسماء باصری - زمستان ۱۳۹۶

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم و حاج بی بی گرامی که دعای خیرشان همواره بدرقه راهم بوده و همچنین تقدیم به همسر فداکارم که مرهم زخم خستگی هایم هست و باور توانستن را در من رویانید.

فهرست مطالب

چکیده	۱
مقدمه	۲
فصل ۱ پیش نیاز ها	۵
۱-۱ مقدمه	۶
۲-۱ حسابان کسری	۶
۳-۱ روش های طیفی	۹
۴-۱ چند جمله ای های برنشتاین	۱۲
۱-۴-۱ چند جمله ای های برنشتاین متعامد نرمال	۱۴
۱-۴-۱-۱ تقریب تابع	۱۵
۵-۱ چند جمله ای های چیشف	۱۵
۶-۱ چند جمله ای های چیشف انتقال یافته	۱۷
۱-۶-۱ تقریب تابع	۱۸
۷-۱ توابع چیشف گویا شده	۱۹
۱-۷-۱ تقریب تابع	۲۰
۸-۱ تقریب درونیابی چیشف گویاشده	۲۱
فصل ۲۲ حل معادله دیفرانسیل کسری پخش با روش مبتنی بر پایه چیشف	۲۲
۱-۲ مقدمه	۲۳
۲-۲ توصیف روش	۲۳
۳-۲ آنالیز خطا	۲۶
۱-۳-۲ کران خطا برای مشتق صحیح	۲۶
۲-۳-۲ کران خطا برای مشتق کسری	۳۰
۳-۳-۲ تقریب تابع مانده	۳۱

۳۲.....	۲- ۴ مثال های عددی
۳۶.....	فصل ۳ حل معادله دیفرانسیل کسری انتشار با روش طیفی مبتنی بر پایه برنشتاین
۳۷.....	۳-۱ مقدمه
۳۷.....	۳-۲ توابع برنشتاین نرمال شده گویا
۳۹.....	۳-۳ تقریب تابع با چندجمله ای های برنشتاین متعامد شده و توابع نرمال آن
۴۰.....	۳-۳-۱ روش هم محلی
۴۲.....	۳-۳-۲ روش گالرکین
۴۳.....	۳-۴ رابطه بین چندجمله ای های لژاندر و چندجمله ای های برنشتاین متعامد نرمال
۴۶.....	۳-۵ تخمین خطا
۵۲.....	۳-۶ مثال های عددی
۶۲.....	فصل 4 حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری با موجک برنشتاین
۶۳.....	۴-۱ مقدمه
۶۳.....	۴-۲ موجک برنشتاین متعامد و خواص آن
۶۴.....	۴-۳ تقریب تابع
۶۶.....	۴-۴ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک برنشتاین
۶۶.....	۴-۴-۱ توابع پالس بلوکی
۶۷.....	۴-۴-۲ ماتریس انتگرال کسری موجک برنشتاین
۶۸.....	۴-۵ روش عددی
۷۱.....	۴-۶ مثال های عددی
۷۵.....	فصل ۵ نتیجه گیری و پیشنهادات
۷۶.....	۵-۱ نتیجه گیری یافته های پژوهش
۷۷.....	۵-۲ پیشنهادهایی برای پژوهش های آینده
۷۹.....	مراجع

واژه نامه ۸۷

لیست جداول

جدول (2-1) بیشترین خطای مطلق برای مقادیر مختلف زمان با $n=m=3$ برای مثال 1.2	۳۳
جدول (2-2) بیشترین خطای مطلق برای $n=m=3$ با مقادیر مختلف β در $T=2$ برای مثال ۲.۲	۳۴
جدول (2-3) مقایسه ی بیشترین خطای مطلق برای مثال 2.2 با $n=m=5$	۳۴
جدول (2-4) بیشترین خطای مطلق برای مقادیر مختلف زمان با $n=m=3$ برای مثال 3.2	۳۵
جدول (3-1) بیشترین میزان خطا برای روش گالرکین و $n=5$, $\beta=0.6$, $\gamma=0.4$ برای مثال 1.3	۵۵
جدول (3-2) بیشترین میزان خطا با روش هم محلی و $n=5$, $\beta=0.6$, $\alpha=1.4$ برای مثال 1.3	۵۵
جدول (3-3) بیشترین میزان خطا با روش هم محلی و $\alpha=1.8, \beta=1$ برای مثال 2.3	۵۶
جدول (3-4) بیشترین میزان خطا برای مثال 2.3 با روش گالرکین و $\alpha=1.8, \beta=1$	۵۶
جدول (3-5) ماکسیموم خطای مانده برای $n=8$ برای مثال 2.3 با روش هم محلی و $\alpha \in (1,2)$ و $\beta \in (0,1)$	۵۶
جدول (3-6) خطای مطلق در $t=1$ با $\alpha=1.8, \beta=1$ و $n=5$ برای مثال 2.3	۵۷
جدول (3-7) بیشترین خطای مطلق با $\alpha=1.8, \beta=1$ با روش هم محلی برای مثال 3.3	۵۸
جدول (3-8) بیشترین خطای مطلق با $\alpha=1.8, \beta=1$ با روش گالرکین برای مثال 3.3	۵۸
جدول (3-9) ماکسیموم خطای مانده برای $n=8$ برای مثال 3.3 با روش گالرکین و $\alpha \in (1,2)$ و $\beta \in (0,1)$	۵۸
جدول (3-10) خطای مطلق در $t=1$ با $\alpha=1.8, \beta=1$ و $n=5$ برای مثال 3.3	۵۹
جدول (3-11) خطای مطلق با روش هم محلی برای مثال 4.3	۶۰
جدول (3-12) خطای مطلق در $t=1$ و $n=8$ برای مثال 4.3	۶۱
جدول (4-1) خطای مطلق برای مقادیر مختلف $\hat{m}$ برای مثال 1.4	۷۲
جدول (4-2) مقایسه خطای مطلق برای مثال 1.4 در $\hat{m}=12$	۷۲
جدول (4-3) خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف α برای مثال 2.4 در $\hat{m}=6$	۷۳
جدول (4-4) مقایسه خطای مطلق در $t=0.5$ برای مثال 2.4	۷۳

لیست نمودارها

- شکل (۱-۱) چندجمله ای های برنشتاین متعامد شده درجه ۳ روی بازه $[0,1]$ ۱۵
- شکل (۲-۱) چندجمله ای های چبیشف روی بازه $[-1,1]$ ۱۷
- شکل (۳-۱) چندجمله ای های چبیشف انتقال یافته روی بازه $[-2,2]$ ۱۸
- شکل (۴-۱) چندجمله ای های چبیشف گویا شده روی بازه $[0,1]$ ۲۰
- شکل (۱-۲) خطای مطلق مثال 1.2 برای مقادیر مختلف زمان با $n=m=3$ ۳۳
- شکل (۲-۲) بیشترین خطای روش وقتی α به ۱ میل می کند و $\beta=1$ برای مثال 2.2 با $n=m=5$ ۳۴
- شکل (۱-۳) توابع برنشتاین گویا شده روی بازه $[0,5]$ ۳۹
- شکل (۲-۳) بیشترین خطای روش وقتی α به ۲ میل می کند و $\beta=1$ برای مثال 2.3 با $n=m=8$ ۵۷
- شکل (3-3) بیشترین خطای مانده روش وقتی β به ۱ میل می کند و $\alpha=1.8$ برای مثال 3.3 با $n=m=5$ ۵۹
- شکل (4-3) خطادر $t=1$ و $n=5, \beta=1, \alpha=1.8$ برای $0 < x < 1$. (آ. روش هم محلی ب) روش گالرکین و ج) روش [18] برای مثال 3.3 ۶۰
- شکل (۱-۴) خطای مطلق برای مثال 2.4 در مقادیر متفاوت $\hat{m}$ و $\alpha=0.1$ ۷۴

فصل های دوم و سوم و چهارم این رساله اصیل هستند و مقالات زیر از این فصل ها استخراج شده اند:

1. A. Baseri, S. Abbasbandy, E. Babolian, A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions . AMC-D-17-00498R1. Volume 322, 1 April 2018, 55–65.
2. A. Baseri, S. Abbasbandy, E. Babolian, Normalized Bernstein polynomials in solving space-time fractional diffusion equation, Advances in Difference Equations (2017) 2017:346 DOI 10.1186/s13662-017-1401-1.
3. A. Baseri, S. Abbasbandy, E. Babolian, Bernstein wavelet method for solving fractional partial differential equations, submitted.

چکیده

معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری برای شرح و توصیف بهتر بسیاری از فرایندهای فیزیکی و مهندسی استفاده می شوند. هر زمان که یک رابطه بین چند متغیر با مقادیر مختلف در حالت‌ها یا زمان‌های مختلف وجود دارد می توان آن پدیده را با معادلات دیفرانسیل جزئی بیان کرد. با پیدایش مشتقات کسری و گسترش آن در علوم مختلف محققین به این نتیجه رسیدند که بهتر است در مدل بندی ها به جای استفاده از مشتقات با مرتبه صحیح از مشتقات کسری که پدیده های فیزیکی را به صورت دقیق تر بیان می کنند، استفاده کنند. با توجه به اهمیت و کاربرد معادله دیفرانسیل کسری در علوم مختلف یافتن جواب برای این مسائل بسیار حائز اهمیت است.

در این رساله، به حل معادلات پخش (انتقال گرما) با مشتق کسری کاپوچو نسبت به زمان و یا مکان و یا هردو می پردازیم. برای این منظور چند جمله ای های برنشتاین متعامد شده و چبیشف را مورد مطالعه قرار می دهیم و همچنین به معرفی یک نگاشت جدید برای پایه چند جمله ای های برنشتاین متعامد می پردازیم و برخی از خواص آن ها را بیان می کنیم و با استفاده از روش های طیفی هم محلی و گالرکین به حل آن ها می پردازیم و در ادامه به ساخت مجموعه متعامد موجک برنشتاین می پردازیم. حل این دسته از معادلات با استفاده از پایه های متعامد دارای این مزیت است که مسئله تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری می شود و این از اهمیت بالایی برخوردار است.

در پایان با استفاده از مثال های عددی دقت و کارایی روش پیشنهادی و نتایج تحلیلی را مورد ارزیابی و مقایسه قرار می دهیم.

واژه های کلیدی:

معادله جابه جایی پخش کسری ، مشتق کاپوچو ، چند جمله ای های برنشتاین متعامد ، چند جمله ای های چبیشف ، روش طیفی هم محلی و گالرکین، موجک برنشتاین، تحلیل خطا.

مقدمه

از آنجایی که اکثر علوم از جمله علوم مهندسی، پزشکی، نجوم و غیره با مسائلی سر و کار دارند که اغلب به یک یا چند معادله دیفرانسیل منجر می شود [60,30] و برای اکثر این مسائل راه حلی کلی برای به دست آوردن جواب تحلیلی وجود ندارد، بنابراین روش های تقریبی و عددی برای حل این مسائل از جایگاه خاصی برخوردار هستند.

حساب دیفرانسیل با مراتب غیر صحیح یکی از شاخه های ریاضی است که به بررسی و تحقیق در مورد خواص و کاربردهای انتگرال و مشتقات مراتب دلخواه می پردازد [26]. در سال های اخیر مقالاتی درباره کاربردهای فراوان حسابان کسری^۱ در فیزیک، شیمی، و علوم مهندسی و نانو تکنولوژی ارائه شده است [3,2,57,6]. شایان ذکر است که مشتقات کسری ابزار مناسبی برای توصیف حافظه، خواص کشسانی مواد، موضوع چسبندگی و کشش مواد پلاستیکی نانو در فناوری های جدید است.

اولین گزارش مربوط به تعمیم مشتقات معمولی به مشتقات کسری منسوب به لایب نیتز^۲ و هوپیتال^۳ است که در آن هوپیتال از لایب نیتز می پرسد که اگر در نماد $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ ، به جای p عدد $1/2$ قرار دهیم چه اتفاقی می افتد؟! بحث های اولیه این شاخه شامل کارهای لایب نیتز^۴، اویلر^۵، لاگرانژ^۶، لاپلاس^۷، آبل^۸، لیوویل^۹، ریمان^{۱۰}، کاپوچو^{۱۱} و بسیاری دیگر بوده است.

امروزه اصطلاح حسابان کسری عبارت است از حساب مربوط به انتگرال و مشتق گیری از مرتبه دلخواه به طوری که مرتبه مشتق بتواند گویا، گنگ و حتی مختلط باشد.

مشتق در حسابان کلاسیک^{۱۱} تغییرات تابع را به شکلی موضعی نشان می دهد. در مدل سازی پدیده های فیزیکی مختلفی مشاهده شده است که استفاده از مشتق مراتب دلخواه، منجر به مدل هایی با جواب های نزدیک تر به واقعیت مسأله می شود. معادلات دیفرانسیل کسری معادلات شامل مشتقات مرتبه حقیقی مثبت،

¹ Fractional calculus

² Leibnitz

³ Hopital

⁴ Euler

⁵ Lagrange

⁶ Laplace

⁷ Abel

⁸ Liouville

⁹ Reiman

¹⁰ Caputo

¹¹ classic calculus

که اصطلاحاً مشتقات کسری نامیده می شوند، هستند. مشتقات کسری روی دامنه هایی که مشتق پذیر نیستند (ناهموار) نیز قابل تعریف هستند اما در مورد مشتقات معمولی چنین امکانی وجود ندارد چون در قسمت های ناهموار دامنه مثل شکستگی ها، مشتق تعریف نشدنی است، و این یک برتری بزرگ حسابان کسری نسبت به مدل های مرتبه صحیح است [51,18].

فرمول بندی بسیاری از مسائل مهندسی و علوم می تواند بوسیله معادلات دیفرانسیل معمولی کسری¹ (FODE) یا معادلات دیفرانسیل جزئی کسری² (FPDE) بیان شود. معادلات جنبش کسری³ مانند معادلات انتشار کسری⁴، معادله پخش-وزش کسری⁵ و ... معادلاتی مفید و مناسب در موضوع جدید محاسبات مکانیکی و ریاضی هستند. این رساله مبحث معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری که تعمیمی از معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه صحیح است، در نظر گرفته شده است. مسئله مورد بررسی در این رساله حل این معادلات به گونه ایست که خطای روش به حداقل ممکن برسد. تابع مجهول، در معادلات در نظر گرفته شده به این شکل، به متغیرهای زمان و مکان وابسته اند، که به طور کلی این معادلات به دو دسته کلی زمان-کسری⁶ و مکان-کسری⁷ تقسیم می شوند [60]. البته ما حالت کلی از این دو دسته به صورت ترکیب مشتق نسبت به زمان و مکان را نیز در نظر گرفته ایم.

برای این مسائل قالب استاندارد از روش طیفی بر مبنای پایه برنشتاین⁸ و چبیشف⁹ معرفی و تجزیه و تحلیل می کنیم و در نهایت به معرفی موجک برنشتاین پرداخته و برای حل معادله مورد استفاده قرار می - دهیم. به طور کلی این رساله در پنج فصل به شرح زیر ارائه می شود.

در فصل اول مفاهیم اولیه معادلات دیفرانسیل و توابع پایه ای مانند برنشتاین و چبیشف معرفی می شوند. تعاریف مشتق و انتگرال مرتبه کسری و خواص مهم آن ها مطرح می شوند.

در فصل دوم پایه چندجمله ای های چبیشف در نظر گرفته و به کمک آن به حل معادلات دیفرانسیل کسری انتشار می پردازیم.

در فصل سوم چندجمله ای های برنشتاین متعامد شده و تقریب توابع با این چندجمله ای ها مطرح می شود. سپس به حل مسائلی مانند معادلات دیفرانسیل انتشار کسری وابسته به زمان و مکان با روش هم محلی¹⁰ و گالرکین¹¹ می پردازیم.

¹ Fractional ordinary differential equations

² Fractional partial differential equations

³ Fractional kinetic equations

⁴ Fractional diffusion equation

⁵ Fractional Advection-Diffusion equation

⁶ time-fractional

⁷ space-fractional

⁸ Bernstein

⁹ Chebyshev

¹⁰ Collocation method

¹¹ Galerkin method

در فصل چهارم بوسیله‌ی ساخت موجک جدید برنشتاین از توابع برنشتاین متعامد شده، معادله دیفرانسیل جزئی با شرایط مرزی را حل می‌نماییم.

در نهایت در فصل پنجم به نتیجه گیری و بحث در مورد تحقیقات آتی می‌پردازیم.

فصل ۱

پیش نیاز ها

معادلات دیفرانسیل کسری، تعمیم معادلات دیفرانسیل معمولی به مرتبه دلخواه (ناصحیح) هستند. تاریخچه ظهور عملگرهای دیفرانسیلی کسری را می توان در [69] یافت به دلیل کاربردهای وسیع معادلات دیفرانسیل کسری در مهندسی و علوم، تحقیقات در این عرصه بطور قابل توجهی رشد یافته است و علاقه شایانی در بهبود طرح های عددی برای راه حل آنها بوجود آمده است. این روش ها شامل تبدیلات فوریه، بسط بردار ویژه تبدیلات لاپلاس و روش های تجزیه آدومین، تکرار وردشی، تفاضلات متناهی، سری های توانی، تبدیل دیفرانسیلی کسری و آنالیز هوموتوبی است.

مشتقات کسری شامل تعاریف متعددی هستند که از مهم ترین آنها می توان به مشتقات کسری کاپوچو و ریمان-لیوویل اشاره کرد.

در این فصل ابتدا تعاریف و روابطی از حسابان کسری را که در فصول بعد لازم داریم، بیان می کنیم. برای این منظور از کتاب [25] استفاده کرده ایم.

۲-۱ حسابان کسری

فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد، $Df(x) := f'(x)$ عملگر مشتق و $J_a f(x) := \int_a^x f(t)dt$ عملگر انتگرال باشد. در این صورت، طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال $J_a f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و مشتق پذیر است و رابطه بین عملگر مشتق و انتگرال به صورت $DJ_a f = f$ است. به طور کلی $D^n J_a^n f = f$ که D^n و J_a^n به ترتیب عملگرهای تکراری D و J_a از مرتبه n هستند. یکی از اهداف حساب کسری حفظ چنین رابطه ای با تعمیم مناسبی از عملگرهای مشتق و انتگرال است.

عملگر ریمان-لیوویل تعمیم فرمول انتگرال کوشی است. در واقع در دستور انتگرال کوشی مقادیر n را که متعلق به اعداد صحیح هستند به مقادیر غیر صحیح تعمیم می دهیم، در این صورت سمت راست دستور انتگرال کوشی تعریف انتگرال ریمان-لیوویل می شود.

تعریف ۱-۱. [25] برای هر $x > 0$ عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل مرتبه α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (x^{\alpha-1} * f(x)), \quad (1-1)$$

قرار داد می‌کنیم وقتی $\alpha = 0$ عملگر انتگرال را با J نشان دهیم. از طرفی $J^0 = I$ عملگر همانی است که در این صورت داریم: $J^0 f(x) = f(x)$. (* نشانه عملگر پیچش است)

تعریف ۱-۲. [25] فرض کنید $m = [\alpha]$ که $[\alpha]$ بیانگر کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی α است. در این صورت عملگر

$$\hat{D}^\alpha f(x) = D^m J^{m-\alpha} f(x), \quad (2-1)$$

مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه α نامیده می‌شود. در مدل سازی مسائل دقیق با معادلات مرتبه کسری، مشتق ریمان-لیوویل مشکلات خاصی دارد. یک نمونه تصحیح شده از این مشتق، تعریف کاپوچو است که توسط کاپوچو ارائه شده است، این مشتق امکان تنظیم شرایط اولیه برای مسائل مقدار اولیه کسری را نیز فراهم می‌کند.

تعریف ۱-۳. [25] فرض کنید $\alpha \geq 0$ و $m = [\alpha]$. در این صورت عملگر D^α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D^\alpha f(x) = J^{m-\alpha} D^m f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(t) dt = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} (x^{m-\alpha-1} * f^{(m)}(x)), \quad (3-1)$$

در این صورت این مشتق، مشتق کاپوچو نامیده می‌شود.

تعریف ریمان-لیوویل به شرایط اولیه ای منجر می‌شود که شامل مقادیر مشتق های کسری ریمان-لیوویل است و تفسیر فیزیکی معلومی برای چنین شرایطی وجود ندارد اما در تعریف کاپوچو شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل کسری به همان شکلی که برای معادلات دیفرانسیل هستند، در می‌آیند. مشتق کاپوچو، یک تابع ثابت صفر است، اما مشتق ریمان-لیوویل یک تابع ثابت صفر نیست. پس با تعریف هایی که کاپوچو، فیزیکدان ایتالیایی در بهبود تعریف مشتق ریمان-لیوویل انجام داده، امکان تنظیم شرایط اولیه برای مسائل مقدار اولیه کسری را در مشتق کاپوچو فراهم کرده است به این دلیل، مشتق به کاررفته در سراسر این رساله، مشتق کاپوچو می‌باشد. از طرفی اگر مساله ای با مشتق ریمان-لیوویل مطرح شود، با استفاده از رابطه ی بین

این دو مشتق که در زیر به صورت قضیه بیان می‌شود، می‌توان مسئله را به مسئله با مشتق کسری کاپوچو تبدیل نمود.

قضیه ۱-۱ [56] فرض می‌کنیم $f \in C^n[a, b]$ و $n-1 < \alpha \leq n$ در این صورت

$$\hat{D}^\alpha f(x) = D^\alpha f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a^+)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (x-a)^{k-\alpha}. \quad (1-1)$$

در زیر به بیان چند خاصیت این مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم [56,69].

• خاصیت خطی بودن

$$\xi(\mu f(x) + \lambda g(x)) = \mu \xi(f(x)) + \lambda \xi(g(x)) \quad (1-5)$$

که در آن ξ عملگر مشتق و یا انتگرال کسری است و μ و λ اعداد حقیقی هستند.

• خاصیت عملگرهای معکوس

$$D_a^\alpha J_a^\alpha f(x) = f(x) \quad (1-6)$$

$$J_a^\alpha D_a^\beta f(x) = J_a^{\alpha-\beta} f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^{\alpha-\beta+k}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)}, \quad \alpha \geq \beta, m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, \quad (1-7)$$

• قانون نماها

فرض کنید f تابعی پیوسته و $\alpha, \beta > 0$ به طوری که $m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}$ و $n-1 < \beta \leq n, n \in \mathbb{N}$ آنگاه برای هر x روابط زیر برقرار است:

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x) = J_a^\beta J_a^\alpha f(x), \quad (1-8)$$

$$D_a^\alpha (J_a^\beta) = \begin{cases} J_a^{\beta-\alpha} & \beta \geq \alpha \geq 0, \\ D_a^{\alpha-\beta} & \alpha \geq \beta \geq 0, \end{cases} \quad (1-9)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} (D_a^\alpha f(x)) = D_a^{\alpha+n} f(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1-10)$$

برطبق تعریف ۱-۳، مشتقات کسری کاپوچو برای تابع دومتغیره $u(x, t)$ نسبت به زمان و مکان به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱-۴ [8] عملگر مشتق کسری زمان کاپوچو از مرتبه $\beta > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_t^\beta u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t (t-v)^{m-\beta-1} \frac{\partial^m u(x,v)}{\partial v^m} dv, & m-1 < \beta < m, \\ \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial t^m}, & \beta = m \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (11-1)$$

و عملگر مشتق مکانی کسری از مرتبه $\alpha > 0$ نیز چنین تعریف می شود:

$$D_x^\alpha u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^x (x-v)^{m-\alpha-1} \frac{\partial^m u(v,t)}{\partial v^m} dv, & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{\partial^m u(x,t)}{\partial x^m}, & \alpha = m \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (12-1)$$

۳-۱ روش های طیفی

معمولا روش های تقریبی که برای حل معادلات به کار می روند به دو دسته تقسیم می شوند. دسته ی اول روش های موضعی هستند که در آن ها ابتدا دامنه تعریف مسئله به تعداد متناهی زیر دامنه تقسیم می شود، سپس در هر زیر دامنه جواب مسئله توسط توابع پایه ای مناسب تقریب زده می شود، روش تفاضلات متناهی و روش عناصر متناهی از جمله مهم ترین روش های موضعی هستند. دسته دوم روش های بسط هستند که جواب مسائل را در سراسر دامنه به صورت مجموعی از توابع پایه مناسب تقریب می زنند.

معروف ترین روش های فراگیر برای حل معادلات، روش های طیفی هستند. در روش های طیفی تابع جواب به صورت یک سری متناهی از توابع پایه در سراسر دامنه تعریف مسئله تقریب زده می شود. اگر توابع پایه ای طیفی به طور مناسب انتخاب شوند، این روش ها دقت بسیار خوبی در تقریب توابع خواهند داشت، بدین صورت که خطای حاصل از تقریب سری می تواند سریع تر از هر توان منفی تعداد عناصر پایه به کار رفته در تقریب به صفر میل کند. این ویژگی روش های طیفی، دقت طیفی یا دقت نمایی نامیده می شود.

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ Bu(x) = g, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (13-1)$$

که در آن L عملگر دیفرانسیل و B عملگری است که شرایط مرزی مربوط به معادله را دربر دارد و بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $\Omega = (-1,1)$ است.

$P_N([-1,1])$ فضای همهی چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی کمتر یا مساوی N و زیرفضای $P_N^B([-1,1])$ از فضای $P_N([-1,1])$ که در آن شرایط مرزی اعمال شده باشد را در نظر می‌گیریم. در روش طیفی جواب دقیق u مسئله (۱۲-۱) با u_N که به صورت مجموع متناهی زیر است، تقریب زده می‌شود:

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{i=0}^N \hat{u}_i \phi_i(x). \quad (14-1)$$

توابع پایه $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ را غالباً پایه‌های متعامد، مانند چبیشف و ... از فضای چندجمله‌ای‌های $P_N([-1,1])$ در نظر می‌گیریم و ضرایب $\hat{u}_i$ باید تعیین گردند.

با قرار دادن $u_N(x)$ در رابطه (۱۲-۱)، تابع مانده‌ی زیر حاصل می‌گردد:

$$R_N(x) = Lu_N(x) - f(x), \quad (15-1)$$

ایده‌ی این روش آن است که تابع مانده باید در شرط زیر صدق کند:

$$(R_N, \psi_j)_w = \int_{-1}^1 w(x) R_N(x) \psi_j(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (16-1)$$

که در آن w تابع وزن و ψ_j توابع آزمون هستند. واضح است که رابطه‌ی بالا شامل $N+1$ معادله با $N+1$ مجهول است. نحوه‌ی انتخاب توابع آزمون باعث تقسیم شدن روش طیفی به سه دسته‌ی عمده گالرکین، هم محلی و تاو می‌شود که در اینجا به اختصار بحث می‌شود [66]:

1-روش گالرکین: در این روش توابع آزمون و توابع پایه یکسان هستند و بایستی توابع پایه $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ را چنان انتخاب نمود که هرکدام در شرایط مرزی معادله به صورت زیر صدق کند:

$$B\phi_i = g, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (17-1)$$

با توجه به تعریف $P_N^B([-1,1])$ مجموعه $\{\phi_i\}_{i=0}^N$ تشکیل یک پایه برای آن می‌دهد. در روش گالرکین تابع مانده باید در شرایط زیر صدق کند:

$$\int_{-1}^1 w(x) R_N(x) \psi_i(x) dx = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (18-1)$$

اما چون در این روش $\psi_i = \phi_i$ بنابراین داریم:

$$\int_{-1}^1 w(x) R_N(x) v_i(x) dx = 0, \quad v_i \in P_N^B([-1,1]), \quad (19-1)$$

یعنی اینکه در روش گالرکین تابع مانده R_N بر فضای $P_N^B([-1,1])$ عمود می‌باشد.

۲- روش هم محلی: در این روش $N+1$ نقطه‌ی گره‌ای جزء مجموعه نقاط $[-1,1]$ است که آن‌ها را عموماً مطابق با یکی از مجموعه نقاط انتگرال‌گیری گاوسی یا گاوس-رادو انتخاب می‌کنیم و توابع آزمون توابع انتقال یافته‌ی دیراک $\psi_j(x) = \delta(x-x_j)$ و $w(x)=1$ هستند. بنابر ویژگی دلتای دیراک داریم:

$$(R_N, \delta(x-x_j))_w = R_N(x_j) = 0. \quad (20-1)$$

این روش برای نخستین بار توسط استلر [65] برای حل معادلات دیفرانسیل به کار رفت. کاربردهای نوین تر آن و همچنین نام‌گذاری این روش به فریزر و همکاران [31] برمی‌گردد.

۳- روش تاو: در روش گالرکین توابع آزمون، توابع نامتناهی هموار هستند که به طور جداگانه در شرایط مرزی همگن، صادق می‌باشند. روش تاو بهبودی از روش گالرکین است که برای مسائل شرایط مرزی غیرمتناوب به کار می‌رود. در این روش، کمینه‌سازی تابع باقیمانده همانند روش گالرکین صورت می‌پذیرد. تنها تفاوت در این است که شرایط مرزی نیز به عنوان محدودیت اعمال می‌گردد، یعنی نیازی نیست که توابع آزمون در شرایط مرزی صادق باشند.

در این قسمت به یادآوری چند تعریف و ویژگی از چندجمله‌ای‌های متعامد می‌پردازیم. چندجمله‌ای‌های متعامد نقش بسیار مهمی را در روش‌های طیفی ایفا می‌کنند، لذا لازم است تا یک بررسی از ویژگی‌های آن‌ها داشته باشیم.

تعریف ۵-۱ [66]. ضرب داخلی دو تابع f_1 و f_2 نسبت به تابع وزن w در بازه $\Lambda=[a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$(f_1, f_2)_{w(x)} = \int_{\Lambda} f_1(x) f_2(x) w(x) dx. \quad (21-1)$$

تعریف ۶-۱ [66]. یک مجموعه از توابع $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ را روی بازه‌ی $[a,b]$ نسبت به تابع وزن w متعامد می‌گوییم، هرگاه:

$$\forall i, j, \quad i \neq j \quad (\phi_i, \phi_j)_{w(x)} = Y_i \delta_{ij}. \quad (22-1)$$

به طوری که $\Upsilon_i = \|\phi_i\|_{L_w^2(\Lambda)}^2 = \int_{\Lambda} (\phi_i(x))^2 w(x) dx$ غیر صفر بوده و δ_{ij} دلتای کرونکر است. اگر در رابطه فوق $\Upsilon_i = 1$ آن گاه مجموعه توابع متعامد فوق را متعامد یکه یا نرمال می گویند.

فرض کنید P_N فضای تمام چندجمله‌ای‌های از درجه کمترین مساوی N باشد، یعنی

$$P_N := \text{Span}\{1, x, x^2, \dots, x^N\}, \quad (23-1)$$

قضیه وایراشتراس نشان می‌دهد که هر تابع پیوسته u در بازه متناهی را می‌توان به طور یکنواخت توسط چندجمله‌ای‌ها تقریب زد. ساختن چنین تقریبی به حل مسئله بهترین تقریب زیر می انجامد:

$$\|u - p_N^*\|_{L^\infty(\Lambda)} := \inf_{p_N \in P_N} \|u - p_N\|_{L^\infty(\Lambda)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (24-1)$$

که در منابع مختلف در ارتباط با وجود و یکتایی چندجمله‌ای p_N^* بحث‌های زیادی صورت گرفته است. با این حال به دست آوردن بهترین تقریب p_N^* بسیار پیچیده است. در حالی که مسئله یافتن بهترین تقریب در نرم L^2 بسیار ساده‌تر است و ثابت می‌شود که چندجمله‌ای

$$q_N^*(x) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k \phi_k(x), \quad \hat{u}_k = \frac{(u, \phi_k)_w}{\|\phi_k\|_{L_w^2(\Lambda)}^2}, \quad (25-1)$$

به طوری که $\{\phi_k\}_{k=0}^N$ یک پایه متعامد نسبت به تابع وزن w برای P_N است، یک جواب منحصر به فرد برای مسئله بهترین تقریب

$$\|u - q_N^*\|_{L_w^2(\Lambda)} := \inf_{q_N \in P_N} \|u - q_N\|_{L_w^2(\Lambda)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (26-1)$$

است، همچنین ثابت شده است که چندجمله‌ای بهترین تقریب q_N^* تصویر متعامد تابع u بر فضای P_N است، یعنی

$$(u - q_N^*, y)_w = 0, \quad \forall y \in P_N. \quad (27-1)$$

۴-۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌های برنشتاین نقشی کلیدی در گرافیک کامپیوتری جهت مدل سازی هندسی و تقریب خم‌ها و سطوح ایفا می‌کنند. یکی از ویژگی‌های این پایه این است که ثابت می‌شود در بین همه پایه‌های نامنفی یک پایه بهینه، به مفهومی که در [47] بررسی می‌شود، است. همچنین این چندجمله‌ای‌ها مشتق پذیر و انتگرال پذیر هستند، لذا به صورت یک پایه کامل روی هر بازه متناهی تعریف می‌شوند و با اتصالشان منحنی‌های اسپلاین را تشکیل می‌دهند که در تقریب توابع با دقت دلخواه به کار می‌روند. برای کاربردهای این پایه در طراحی کامپیوتری و هندسی به [43، 2، 4] رجوع کنید. از طرف دیگر، این پایه برای حل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال-دیفرانسیل و معادلات کسری به کار برده شده است. به

طور مثال مراجع [63,35,49,48, 67,47] [11] را ببینید. با این حال این پایه متعامد نیست و در صورتی که از آن استفاده شود، منجر به دستگاه های با ماتریس ضرایب پر با عدد وضعیت بزرگ می شود. چندجمله ای های پایه برنشتاین از درجه $N \in \mathbb{N}$ بر بازه $[a,b]$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$B_{i,N}(x) = \frac{\binom{N}{i} (x-a)^i (b-x)^{N-i}}{(b-a)^N}, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (28-1)$$

و در بازه استاندارد $[0,1]$ به شکل زیر هستند:

$$B_{i,N}(x) = \binom{N}{i} x^i (1-x)^{N-i}, \quad 0 \leq i \leq N. \quad (29-1)$$

در ادامه، چندجمله ای های برنشتاین را بر بازه استاندارد در نظر می گیریم. در حالت کلی برای سایر بازه ها، با تغییر متغیر ساده ای، نتایج مورد نظر به راحتی برای بازه های کلی به دست می آیند. قرارداد می کنیم که اگر $i < 0$ یا $i > N$ ، آن گاه $B_{i,N}(x) \equiv 0$.

برخی از ویژگی های چندجمله ای های برنشتاین به شرح زیر است [68,6]:

- مجموعه $\{B_{i,N}(x)\}_{i=0}^N$ یک پایه برای فضای چندجمله ای های تا درجه N ، P_N ، تشکیل می دهد.

- در نقاط انتهایی بازه ویژگی های زیر برقرار است:

$$B_{i,N}(0) = \delta_{i,0} = \begin{cases} 1, & i=0, \\ 0, & i>0, \end{cases} \quad B_{i,N}(1) = \delta_{i,N} = \begin{cases} 1, & i=N, \\ 0, & i<N, \end{cases} \quad (30-1)$$

این خاصیت در فرمول بندی عددی مسائل مقدار مرزی مفید است.

- همگی نامنفی و کراندار هستند، در واقع $0 \leq B_{i,N}(x) \leq 1$ برای $0 \leq x \leq 1$.
- تشکیل افراز واحد می دهند:

$$\sum_{i=0}^N B_{i,N}(x) = 1. \quad (31-1)$$

در نتیجه مقدار $p_N(x)$ در هر نقطه به عنوان مجموعی از مقادیر f در $N+1$ نقطه متساوی الفاصله از بازه، یک ترکیب محدب، یعنی یک مجموع وزن دار با وزن های نامنفی و مجموع یک، است.

- خاصیت افزایش درجه

هرچندجمله ای از درجه $N-1$ را می توان به صورت ترکیب خطی از چندجمله ای های برنشتاین از درجه N نوشت:

$$B_{i,N-1}(x) = \binom{N-1}{i} \left[\frac{1}{\binom{N}{i}} B_{i,N}(x) + \frac{1}{\binom{N}{i+1}} B_{i+1,N}(x) \right] \quad (32-1)$$

$$= \left(\frac{N-i}{N} \right) B_{i,N}(x) + \left(\frac{i+1}{N} \right) B_{i+1,N}(x).$$

• رابطه بازگشتی

$$B_{i,N+1}(x) = xB_{i-1,N}(x) + (1-x)B_{i,N}(x), \quad i = 0, 1, \dots, N+1, \quad (33-1)$$

با شروع از $B_{0,0}(x) \equiv 0$.

• تبدیل پایه برنشتاین به پایه توانی

$$B_{i,N}(x) = \sum_{k=0}^{N-i} \binom{N}{i} \binom{N-i}{k} (-1)^k x^{i+k}. \quad (34-1)$$

• انتگرال چندجمله‌ای‌های برنشتاین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_0^1 B_{i,N}(x) dx = \frac{1}{N+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (35-1)$$

• همچنین برای حاصلضرب دو چندجمله‌ای داریم:

$$B_{i,N}(x) B_{j,M}(x) = \frac{\binom{N}{i} \binom{M}{j}}{\binom{N+M}{i+j}} B_{i+j, N+M}(x), \quad i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, M. \quad (36-1)$$

۱-۴-۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعامد نرمال

با استفاده از فرایند گرام-اشمیت بر روی مجموعه چندجمله‌ای‌های برنشتاین از درجه n ، فرم صریح چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعامد یکه به دست می‌آید [16]:

$$b_{i,n}(x) = (\sqrt{2(n-i)+1})(1-x)^{n-i} \sum_{k=0}^i (-1)^k \binom{2n+1-k}{i-k} \binom{i}{k} x^{i-k}. \quad (37-1)$$

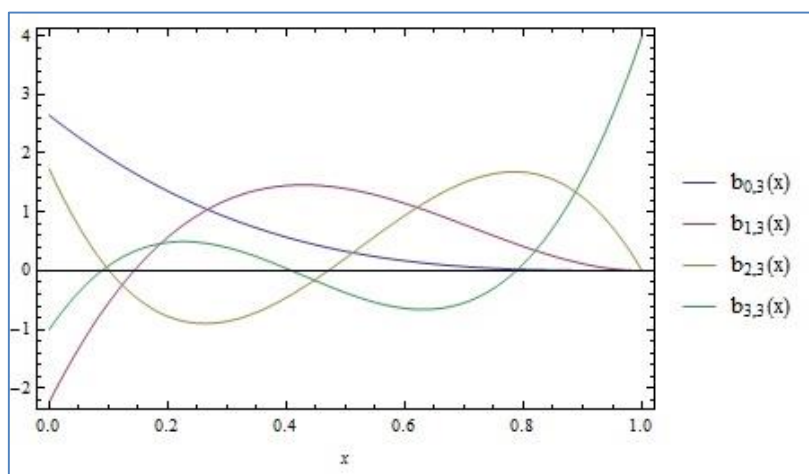
بعلاوه، چندجمله‌ای‌های نرمال شده می‌توانند برحسب توابع غیرمتعامد نیز نوشته شوند:

$$b_{i,n}(x) = (\sqrt{2(n-i)+1})(1-x)^{n-i} \sum_{k=0}^i (-1)^k \frac{\binom{2n+1-k}{i-k} \binom{i}{k}}{\binom{n-k}{i-k}} B_{i-k, n-k}(x). \quad (38-1)$$

با توجه به تابع وزن $w_s(x) = 1$ بر روی بازه $[0, 1]$ ، این توابع نیز دارای خاصیت تعامد هستند:

$$\int_0^1 b_{i,n}(x) b_{j,n}(x) w_s(x) dx = \delta_{ij}. \quad (39-1)$$

شکل (۱-۱) نمودار چهارجمله‌ای اول از چندجمله‌ای‌های برنشتاین نرمال شده از درجه $n=3$ را روی بازه $[0,1]$ نشان می‌دهد.



شکل (۱-۱): چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعامد شده درجه ۳ روی بازه $[0,1]$

۱-۱-۴-۱ تقریب تابع

تابع مربع انتگرال‌پذیر f می‌تواند برحسب پایه نرمال شده برنشتاین (۱-۳۶)، در بازه $[0,1]$ بسط داده شود، که در عمل اولین $n+1$ تا جمله برنشتاین در نظر گرفته می‌شود [6]:

$$f_n(x) \approx \sum_{j=0}^n d_{j,n} b_{j,n}(x) = D^T E(x), \quad (40-1)$$

که ضرایب $d_{j,n}$ و بردارهای تقریب به صورت زیر مفروض اند:

$$d_{j,n} = (f, b_{j,n}) = \int_0^1 f(x) b_{j,n}(x) dx, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (41-1)$$

$$D = [d_{0,n}, d_{1,n}, \dots, d_{n,n}]^T, \quad (42-1)$$

$$E(x) = [b_{0,n}(x), b_{1,n}(x), \dots, b_{n,n}(x)]^T. \quad (43-1)$$

۱-۵ چندجمله‌ای‌های چیشف

چندجمله‌ای‌های چیشف دارای انواع مختلفی هستند. چندجمله‌ای‌های چیشف نوع اول به صورت

$$T_k(x) = \cos(k \arccos C \cos(x)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (44-1)$$

تعریف می شوند. این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان در فرم سری توانی به صورت

$$T_k(x) = \frac{k}{2} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^m \frac{2^{k-2m} (k-m-1)!}{m!(k-2m)!} x^{k-2m}, \quad (45-1)$$

نمایش داد که در اینجا منظور از $\left[\frac{k}{2}\right]$ ، جزء صحیح $\frac{k}{2}$ است.

با استفاده از رابطه مثلثاتی

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta), \quad (46-1)$$

می‌توان رابطه بازگشتی زیر را به دست آورد.

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \quad (47-1)$$

این نمایش ویژگی‌های بسیاری را نتیجه می‌دهد. یک نتیجه فوری رابطه بازگشتی زیر است:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+1} T_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T_{n-1}(x) \right], \quad n \geq 2. \quad (48-1)$$

این چندجمله‌ای‌ها توابع ویژه‌ی مسئله شتورم-لیوویل زیر هستند:

$$\sqrt{1-x^2} (\sqrt{1-x^2} T'_n(x))' + n^2 T_n(x) = 0, \quad (49-1)$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$(1-x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2 T_n(x) = 0, \quad (50-1)$$

برخی خواص این چندجمله‌ای‌ها به شرح زیر است.

این چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[-1,1]$ نسبت به تابع وزن $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ متعامدند و رابطه‌ی تعامدشان به

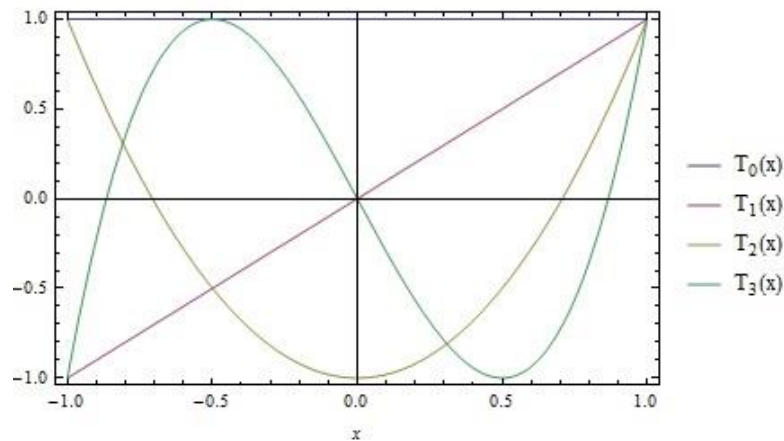
شکل زیر است:

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) w(x) dx = \frac{\pi \gamma_m}{2} \delta_{mn}, \quad (51-1)$$

که

$$\gamma_m = \begin{cases} 2, & \text{if } m=0, \\ 1, & m \geq 1, \end{cases} \quad (52-1)$$

شکل (۲-۱) نمودار چهارجمله‌ای اول از چندجمله‌ای‌های چبیشف را روی بازه $[-1,1]$ نشان می‌دهد.



شکل (۲-۱): چندجمله‌ای‌های چبیشف روی بازه $[-1,1]$

۶-۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته

اگر چندجمله‌ای‌های چبیشف را روی بازه $[a,b]$ در نظر بگیریم، به آن‌ها چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته گوییم که برای هر $x \in [a,b]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_n^*(x) = T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right), \quad n = 0, 1, \dots \quad (۵۳-۱)$$

این چندجمله‌ای‌ها در ویژگی‌های زیر صدق می‌کنند:

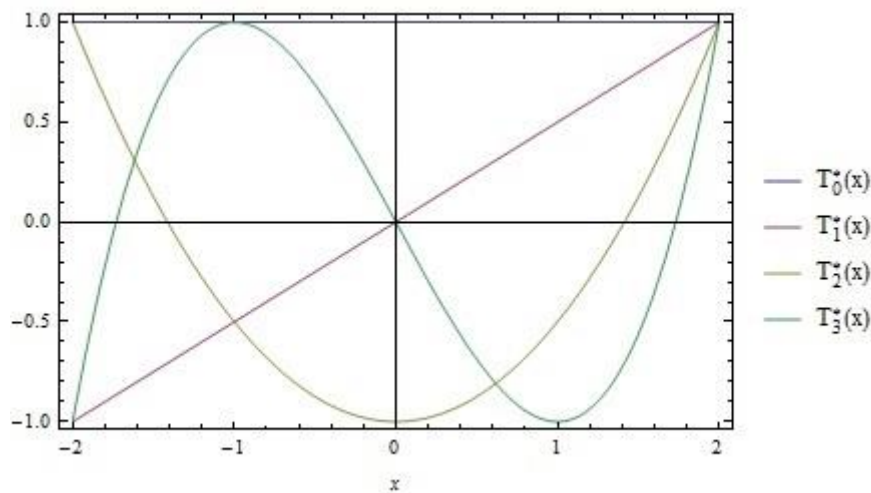
$$\bullet \int_a^b T_n^*(x) T_m^*(x) w_s(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_a^b T_n(x) T_m(x) w_s(x) dx = \frac{(b-a)\pi\gamma_m}{4} \delta_{mn}, \quad (۵۴-۱)$$

$$w_s(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{x(b-a-x)}},$$

$$\bullet T_0^*(x) = 0, \quad T_1^*(x) = \frac{2x-a-b}{b-a}, \quad T_{n+1}^*(x) = 2\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)T_n^*(x) - T_{n-1}^*(x). \quad (۵۵-۱)$$

شکل (۳-۱) نمودار چهارجمله‌ای اول از چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته را روی بازه $[-2,2]$ نشان

می‌دهد.



شکل (۳-۱): چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته روی بازه $[-2, 2]$.

۱-۶-۱ تقریب تابع

تابع مربع انتگرال‌پذیر $f(x)$ می‌تواند برحسب توابع چبیشف انتقال یافته، در بازه $[a, b]$ به صورت زیر بسط داده شود:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j^*(x), \quad (56-1)$$

که ضرایب a_j به صورت زیر مفروض اند:

$$a_j = \frac{4}{(b-a)\pi\gamma_j} \int_a^b f(x) T_j^*(x) w_s(x) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (57-1)$$

به منظور کاربرد این چندجمله‌ای‌ها در روش طیفی، تابع f را معمولاً به صورت یک سری متناهی تقریب می‌زنند:

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j T_j^*(x) = C^T \Phi_n(x), \quad (58-1)$$

که نشان T ، نشان‌دهنده ترانزاده و بردارهای C و $\Phi_n(x)$ ، به صورت زیر اند:

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T, \quad (59-1)$$

$$\Phi_n(x) = [T_0^*(x), T_1^*(x), \dots, T_n^*(x)]^T. \quad (60-1)$$

۷-۱ توابع چیشف گویا شده

با به کاربردن نگاشت $\phi(x) = \frac{x-L}{x+L}$ در چند جمله‌ای‌های چیشف، دسته‌ای از توابع بوجود می‌آیند که توابع چیشف گویا شده نامیده می‌شوند:

$$R_n(x) = T_n(\phi(x)), \quad (71-1)$$

که L یک پارامتر ثابت است و برای هر پارامتر ثابتی، بازه نیم متناهی $[0, +\infty)$ می‌تواند به $[-1, 1]$ نگاشته شود. بوید [15] اشاره می‌کند که مقدار L با تجربه می‌توان مشخص کرد. او در مورد مقدار L به تاثیر آن بر نرخ همگرایی اشاره می‌کند ولی از روی آزمایش، می‌توان مقدار و بازه مناسب برای L را تعیین کرد. رابطه‌ی بازگشتی برای این دسته از توابع به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = \frac{x-L}{x+L}, \quad R_{n+1}(x) = 2\left(\frac{x-L}{x+L}\right)R_n(x) - R_{n-1}(x), \quad (72-1)$$

که $R_n(x)$ ، n امین تابع ویژه مسئله شتورم-لیوویل زیر است [32]:

$$(x+L)\frac{\sqrt{x}}{L}\frac{d}{dx}((x+L)\sqrt{x}\frac{d}{dx}R_n(x)) + n^2R_n(x) = 0, \quad x \in (0, \infty). \quad (73-1)$$

هم اکنون به برخی از ویژگی‌های این دسته از توابع می‌پردازیم.

در نظر بگیرید $\Lambda = \{x | 0 \leq x < \infty\}$ ، تابع وزن نامنفی $w_r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ بر روی Λ به صورت $w_r(x) = w(x)\frac{d}{dx}\phi(x) = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{x}(x+L)}$ تعریف می‌شود [29]. فضای باناخ $L_{w_r}^2(\Lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{w_r}^2 = \{f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \mid f, \|f\|_{L_{w_r}^2} < \infty\}, \quad (74-1)$$

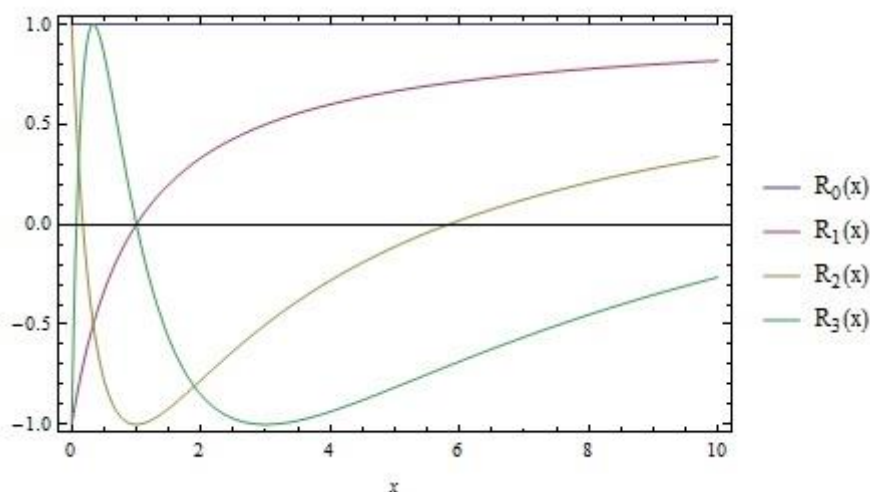
که در آن

$$\|f\|_{L_{w_r}^2}^2 = \int_0^\infty |f(x)|^2 w_r(x) dx. \quad (75-1)$$

ویژگی تعامد این دسته از توابع با ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)_{w_r}$ بر روی $L_{w_r}^2(\Lambda)$ مفروض است:

$$(R_m, R_n)_{w_r} = \int_0^\infty R_m(x) R_n(x) w_r(x) dx = \frac{\pi \gamma_m}{2} \delta_{mn}. \quad (66-1)$$

شکل (۴-۱) نمودار چهارجمله‌ی اول از چندجمله‌ای‌های چبیشف گویاشده را روی بازه $[0, 10]$ نشان می‌دهد.



شکل (۴-۱): چندجمله‌ای‌های چبیشف گویاشده روی بازه $[0, 10]$.

۱-۷-۱ تقریب تابع

هر تابع $f \in L^2_{w_r}(\Lambda)$ می‌تواند برحسب توابع چبیشف گویاشده به صورت زیر بسط داده شود:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} k_j R_j(x), \quad (67-1)$$

که ضرایب آن $k_j = \frac{(f, R_j)_{w_r}}{\|R_j\|_{w_r}} = \frac{2}{\pi \gamma_j} \int_{\Lambda} f(x) R_j(x) w_r(x) dx$ تعریف می‌شوند.

تابع f معمولاً به صورت سری متناهی از (۶۷-۱) تقریب زده می‌شود:

$$f(x) \approx f_n(x) = \sum_{j=0}^n k_j R_j(x) = K^T \Psi_n(x), \quad (68-1)$$

که نشان T ، نشان‌دهنده ترانزاده و بردارهای K و $\Psi_n(x)$ ، به صورت زیر است:

$$K = [k_0, k_1, \dots, k_n]^T, \quad (69-1)$$

$$\Psi_n(x) = [R_0(x), R_1(x), \dots, R_n(x)]^T. \quad (70-1)$$

۸-۱ تقریب درونیابی چیشف گویاشده

انتگرال گیری گاوس_رادو در [19,35] معرفی شده، بعلاوه نقاط گاوس_چیشف_رادو گویا نیز در [34]

تعریف شده اند به قسمی که اگر $Y_n = \text{span}\{R_0, R_1, \dots, R_n\}$ فضای توابع چیشف گویا باشد در این

صورت نقاط $j = 0, 1, \dots, n$ ، $x_j = \cos(\frac{2j\pi}{2n+1})$ ، $(n+1)$ نقطه ی گاوس_چیشف_رادو در $[-1,1]$

خواهد بود.

گره های گاوس_چیشف_رادو گویا را به گونه زیر تعریف می کنیم:

$$t_j = L \frac{1+x_j}{1-x_j}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (۷۱-۱)$$

توجه داریم که این نقاط در $[0, \infty)$ هستند.

رابطه ی بین سیستم های متعامد چیشف گویاشده با انتگرال های گاوس_رادو گویا به شکل زیر نیز می-

باشد:

$$\int_0^\infty u(t)w(t)dt = \int_{-1}^1 u(L \frac{1+x}{1-x})\rho(x)dx = \sum_{j=0}^n u(t_j)w_j, \quad (۷۲-۱)$$

که در آن ρ تابع وزن چند جمله ای های چیشف است و $w_0 = \frac{\pi}{2n+1}$ و $w_i = \frac{\pi}{n+1}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$

فصل ۲

حل معادله دیفرانسیل کسری پخش با روش مبتنی بر

پایه چیشف

معادلات دیفرانسیل جزئی کسری به طور گسترده ای در توصیف پدیده های فیزیکی در بسیاری از شاخه های علوم و مهندسی همچون علم مواد ویسکوالاستیک، سیستم های کنترلی، مدارهای الکتریکی، مکانیک آماری و کوانتومی و غیره به کار می روند.

معادله انتقال پخش زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = b(x,t) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + d(x,t) \frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial x^\gamma} + S(x,t), \quad (x,t) \in (0,b) \times (0,\infty), \quad (1-2)$$

که u تابع غلظت مجهول، b و d به ترتیب توابع پراکنش و پخش معلوم، S جمله منبع معلوم و مشتقات کسری از نوع کاپوتو است که $0 < \beta, \gamma \leq 1$ ، $1 < \alpha \leq 2$.

شرایط مرزی اولیه و مرزی برای این مسئله به صورت زیر است:

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0,b], \quad (2-2)$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(b,t) = g_2(t), \quad t > 0. \quad (3-2)$$

در این فصل با معرفی پایه ای متشکل از ترکیب خطی مناسبی از چند جمله ای های چیشف و توابع چیشف گویاشده که در شرایط اولیه و مرزی مسئله صدق می کند، یک روش هم محلی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری پخش به کار می بریم.

۲-۲ توصیف روش

هر تابع حقیقی مقدار u را می توان بر حسب چند جمله ای های چیشف انتقال یافته و توابع چیشف گویاشده تعریف شده در $[0,b] \times [0,\infty)$ به صورت زیر گسترش داد:

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} \lambda_{ij}(x,t), \quad (4-2)$$

که در آن $\lambda_{ij}(x,t) = T_i^*(x) R_j(t)$ و

$$u_{ij} = \frac{((u, T_i^*)_{w_s}, R_j)_{w_r}}{\|T_i^*\|_{w_s} \|R_j\|_{w_r}}. \quad (5-2)$$

فرض کنید که تقریب تابع u از برش سری نامتناهی (۲-۴) به صورت زیر به دست آمده باشد:

$$u(x,t) \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m u_{ij} \lambda_{ij}(x,t) = \Lambda(x,t)^T U = U^T \Lambda(x,t), \quad (6-2)$$

که $\Lambda(x,t)$ بردار $(n+1)(m+1) \times 1$ به شکل زیر است:

$$\Lambda(x, t) = \begin{pmatrix} T_0^*(x)R_0(t) \\ T_0^*(x)R_1(t) \\ \vdots \\ T_0^*(x)R_m(t) \\ \vdots \\ T_i^*(x)R_{j-1}(t) \\ T_i^*(x)R_j(t) \\ T_i^*(x)R_{j+1}(t) \\ \vdots \\ T_n^*(x)R_{m-1}(t) \\ T_n^*(x)R_m(t) \end{pmatrix} \quad (7-2)$$

و U نیز برداری از همین مرتبه است.

تابع مجهول مسئله (۱-۲) می تواند برحسب این توابع تقریب زده شود:

$$u(x, t) \approx U^T \Lambda(x, t), \quad (8-2)$$

U بردار مجهول مسئله است که باید تعیین شود. مشتق توابع مجهول نیز به شکل زیر بیان می شود:

$$D_{x/t}^{\alpha_i} u(x, t) \approx U^T D_{x/t}^{\alpha_i} \Lambda(x, t), \quad (9-2)$$

که $D_{x/t}^{\alpha_i}$ مشتق کاپوچو از مرتبه α_i را نسبت به متغیرهای x یا t نشان می دهد، توجه کنید که α_i می تواند α, β و یا γ باشد.

برای مشتق کاپوچوی $D_x^\alpha \Lambda(x, t)$ و $D_t^\beta \Lambda(x, t)$ ، تعریف مشتق را برای تک تک مولفه های آن یعنی $D_x^\alpha \lambda_{ij}(x, t)$ و $D_t^\beta \lambda_{ij}(x, t)$ به قسمی به کار می بریم که:

$$D_x^\alpha \lambda_{ij}(x, t) = \frac{R_j(t)}{\Gamma(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-z)^{\alpha+1-\lceil \alpha \rceil}} D_z^{\lceil \alpha \rceil} (T_i^*(z)) dz, \quad (10-2)$$

$$D_t^\beta \lambda_{ij}(x, t) = \frac{T_i^*(x)}{\Gamma(\lceil \beta \rceil - \beta)} \int_0^t \frac{1}{(t-z)^{\beta+1-\lceil \beta \rceil}} D_z^{\lceil \beta \rceil} (R_j(z)) dz, \quad (11-2)$$

مسئله (۱-۲) با شرایط اولیه و مرزی (۲-۲) و (۳-۲) را در نظر می گیریم، با استفاده از معادلات (۸-۲)-(۱۱-۲) برای این مسئله داریم:

$$\begin{aligned} U^T \frac{\partial^\beta \Lambda(x, t)}{\partial t^\beta} - d(x, t) U^T \frac{\partial^\alpha \Lambda(x, t)}{\partial x^\alpha} - b(x, t) U^T \frac{\partial^\gamma \Lambda(x, t)}{\partial x^\gamma} &= S(x, t), \\ u(x, 0) \approx U^T \Lambda(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 < x < b, \\ u(0, t) \approx U^T \Lambda(0, t) &= g_0(t), \quad u(b, t) \approx U^T \Lambda(b, t) = g_1(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (12-2)$$

با استفاده از صفرهای چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته در $[0, b]$ و صفرهای توابع گویاشده‌ی چبیشف به‌عنوان نقاط هم محلی، یک دستگاه جبری $(n+1)(m+1)$ تشکیل می‌شود که بردار مجهول U از آن به‌دست می‌آید.

پس به‌طور کلی اگر بخواهیم الگوریتمی برای این روش ارائه کنیم بدین صورت است که:

- ۱- مقادیر مفروض در مسئله مانند مشتقات کسری α, β, γ ، توابع پخش و پراکنش و جمله منبع $b(x, t), d(x, t), s(x, t)$ و شرایط اولیه و مرزی مسئله و همچنین مقادیر m, n که به‌ازاء آن مسئله باید حل شود را وارد نمایید.
- ۲- چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته $T_i^*(x) \quad i=0,1,\dots,n$ و توابع چبیشف گویاشده $R_j(t) \quad j=0,1,\dots,m$ را ساخته و بردار $(n+1)(m+1)$ بعدی $\Lambda(x, t)$ را تشکیل دهید.
- ۳- بردار $(n+1)(m+1)$ بعدی $U=[u_{ij}] \quad i=0,1,\dots,n, \quad j=0,1,\dots,m$ را در نظر بگیرید.
- ۴- بردارهای $D_t^\beta \Lambda(x, t)$ ، $D_x^\alpha \Lambda(x, t)$ و $D_x^\gamma \Lambda(x, t)$ را با توجه به تعریف مشتق کاپوچو بسازید.
- ۵- نقاط هم محلی $x_i \quad i=0,1,\dots,n$ و $t_j \quad j=0,1,\dots,m$ را که شامل صفرهای چندجمله‌ای‌های چبیشف انتقال یافته در $[0, b]$ و صفرهای توابع گویاشده‌ی چبیشف است را وارد نمایید.
- ۶- سری معادلات زیر را تشکیل دهید:

$$F_1(x, t) = U^T \frac{\partial^\beta \Lambda(x, t)}{\partial t^\beta} - d(x, t) U^T \frac{\partial^\alpha \Lambda(x, t)}{\partial x^\alpha} - b(x, t) U^T \frac{\partial^\gamma \Lambda(x, t)}{\partial x^\gamma} - S(x, t),$$

$$F_2(x, 0) = U^T \Lambda(x, 0) - u_0(x),$$

$$F_3(0, t) = U^T \Lambda(0, t) - g_0(t),$$

$$F_4(b, t) = U^T \Lambda(b, t) - g_1(t),$$

۷- با قرار دادن نقاط هم محلی در سری معادلات بالا به صورت

$$F_1(x_i, t_j) = 0 \quad i=1,\dots,n-1 \quad j=1,\dots,m,$$

$$F_2(x_i, 0) = 0 \quad i=0,1,\dots,n,$$

$$F_3(0, t_j) = 0 \quad j=1,\dots,m,$$

$$F_4(b, t_j) = 0 \quad j=1,\dots,m,$$

دستگاه $(n+1)(m+1)$ معادله با $(n+1)(m+1)$ مجهول $U=[u_{ij}] \quad i=0,1,\dots,n, \quad j=0,1,\dots,m$

را حل کنید و نهایتاً جواب را به صورت $u(x, t) \approx U^T \Lambda(x, t)$ به‌دست آورید.

۸- برای محاسبه خطا، از شکل گسسته L_∞ در زمان‌های متفاوت $T=1, 2, 10, 50, 100$ به‌صورت زیر استفاده کنید:

$$L_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, T) - U(x, T)| \approx \max_{0 \leq j \leq N} |u(x_j, T) - U(x_j, T)|.$$

۲-۳ آنالیز خطا

هدف ما در این بخش دستیابی به یک رویکرد کلی برای تحلیل همگرایی روش چیشف برای معادلات دیفرانسیل کسری از نوع (۱-۲) است.

به طور کلی رویه در تحلیل خطا، مقایسه جواب عددی u_N با تصویر متعامد $\Pi_N u$ از جواب دقیق u با استفاده از نامساوی زیر است:

$$\|u - u_N\| \leq \|u - \Pi_N u\| + \|\Pi_N u - u_N\|. \quad (۱۳-۲)$$

از قضیه 3.14 در [66] می دانیم که $\Pi_N u$ بهترین تقریب چندجمله‌ای از u است، پس برای به دست آوردن کران خطا، تنها کافیست به اندازه‌گیری کران خطای برشی $\|u - \Pi_N u\|$ پردازیم.

این قسمت را با تقریب کران خطا برای مشتقات صحیح و کسری آغاز می‌کنیم [13].

۲-۳-۱ کران خطا برای مشتق صحیح

ابتدا به تعاریف و قضایای مورد نیاز این بخش می‌پردازیم.

تعریف ۲-۲. مجموعه $P_N = \text{span}\{T_0^*, T_1^*, \dots, T_N^*\}$ را در نظر بگیرید. $\Pi_N : L^2(I) \rightarrow P_N$ تصویر متعامد L^2 را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که :

$$(\Pi_N u - u, v) = 0, \quad \forall v \in P_N, \quad (۱۴-۲)$$

یا به طور معادل

$$(\Pi_N u)(x) = \sum_{j=0}^N a_j T_j^*(x). \quad (۱۵-۲)$$

از قضیه 3.14 [66] می دانیم که $\Pi_N u$ بهترین تقریب درونیاب u از چندجمله‌ای‌های چیشف در $L^2(I)$ است. به منظور اندازه‌گیری خطای برشی $\Pi_N u - u$ ، فضای سوبولف چیشف وزن دار زیر را تعریف می‌کنیم:

$$B^m(I) = \{u : \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in L^2(I), 0 \leq k \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (۱۶-۲)$$

با ضرب داخلی، نرم و نیم-نرم زیر:

$$\begin{aligned}
(u, v)_{B^m} &= \sum_{j=0}^m \left(\frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \right) \\
\|u\|_{B^m} &= (u, u)_{H^m}^{1/2}, \\
|u|_{B^m} &= \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|.
\end{aligned} \tag{۱۷-۲}$$

فضای $B^m(I)$ خودش را از فضای سوبولف وزن دار کلی $H^m(I)$ بوسیله‌ی تابع وزن متفاوت برای مشتقات مراتب متفاوت، متمایز می‌کند. (ضمیمه B, [66]) بدیهی است که $H^m(I)$ یک زیرفضای $B^m(I)$ ، برای هر $m \geq 0$ است، یعنی $\|u\|_{B^m} \leq c \|u\|_{H^m}$.

قضیه ۱-۲. [66] فرض کنید $0 \leq l < m \leq N+1$. سپس برای هر $u \in B^m(I)$ داریم:

$$\|\partial_x^l (u - \Pi_N u)\| \leq C_1 \sqrt{\frac{(N-m+1)!}{(N-l+1)!}} (N+m)^{(l-m)/2} \|\partial_x^m u\|, \tag{۱۸-۲}$$

و بنابراین

$$\|\partial_x^l (u - \Pi_N u)\| \leq C_1 \sqrt{\frac{(N-m+1)!}{(N-l+1)!}} (N+m)^{(l-m)/2} \|u\|_{B^m}, \tag{۱۹-۲}$$

و همچنین در فضای هیلبرت داریم:

$$\|\partial_x^l (u - \Pi_N u)\| \leq C \sqrt{\frac{(N-m+1)!}{(N-l+1)!}} (N+m)^{(l-m)/2} \|u\|_{H^m}, \tag{۲۰-۲}$$

که C و C_1 اعداد ثابت هستند.

از طرف دیگر، برای دامنه زمانی $\Lambda = (0, +\infty)$ نیز تعاریف و قضیه‌هایی داریم که نقش اساسی در تقریب دارند.

تعریف ۲-۳. تصویر متعامد $L^2(\Lambda) \rightarrow P_M$ ، $\hat{\Pi}_M$ با فرض فضای $\tilde{B}^m(\Lambda) := L^2_{w_r}$

به قسمی تعریف می‌شود که: $P_M = \text{span}\{R_0, R_1, \dots, R_M\}$

$$(\hat{\Pi}_M u - u, v) = 0, \quad \forall v \in P_M, \tag{۲۱-۲}$$

$$\text{و یا معادل با آن } (\hat{\Pi}_M u)(t) = \sum_{j=0}^M k_j R_j(t).$$

از مرجع [66] می دانیم که $\hat{\Pi}_M u$ بهترین تقریب درونیاب u از چندجمله‌ای‌های چبیشف گویاشده در $L^2(\Lambda)$ است، فضای $\tilde{B}^m(\Lambda)$ معادل با نرم و نیم-نرم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \tilde{B}^m(\Lambda) &= \{u : \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in L^2(\Lambda), 0 \leq k \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \|u\|_{\tilde{B}^m} &= \left(\sum_{j=0}^m \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|^2 \right)^{1/2}, \\ |u|_{\tilde{B}^m} &= \left\| \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right\|. \end{aligned} \quad (22-2)$$

برای تقریب چبیشف گویا شده، نتایج اساسی زیر را داریم:

قضیه ۲-۲. [66] فرض کنید 1 یا $l = 0$ و $l < m \leq M+1$. برای هر $u \in \tilde{B}^m(\Lambda)$ داریم:

$$\begin{aligned} \|\partial_t^l(u - \hat{\Pi}_M u)\| &\leq C_3 \sqrt{\frac{(M-m+1)!}{(M-l+1)!}} (M+m)^{(l-m)/2} \|\partial_t^m u\| \\ &\leq C_3 \sqrt{\frac{(M-m+1)!}{(M-l+1)!}} (M+m)^{(l-m)/2} \|u\|_{\tilde{B}^m}, \end{aligned} \quad (23-2)$$

که C_3 یک عدد ثابت است و نهایتاً در فضای هیلبرت با فرض $C_4 = cC_3$ داریم:

$$\|\partial_t^l(u - \hat{\Pi}_M u)\| \leq C_4 \sqrt{\frac{(M-m+1)!}{(M-l+1)!}} (M+m)^{(l-m)/2} \|u\|_{\tilde{H}^m}. \quad (24-2)$$

برای نرم خطای تابع u ، فضای دوبعدی $\Omega = I_x \times I_t$ که $I_x = (0,1)$ و $I_t = (0,+\infty)$ است را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi_{N,M} = \text{span}\{T_i^*(x)R_j(t), \quad i=0,1,\dots,N \quad j=0,1,\dots,M\}, \quad (25-2)$$

و فضای توابع اندازه‌پذیر $\square \rightarrow \Omega: u$ به طوری در نظر گرفته می‌شود که:

$$\|u\|_{H^{r,0}} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(\cdot, t)\|_{H^r(I_x)}^2 dt \right)^{1/2} < +\infty, \quad (26-2)$$

و $H^{r,0}$ نیز $L^2(I_t; H^r(I_x))$ است.

وقتی $r=0$ ، $H^{0,0} = L^2(\Omega)$ و نرم آن این گونه نشان داده می شود:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_0^{+\infty} \int_0^1 |u(x,t)|^2 dx dt \right)^{1/2} < +\infty. \quad (27-2)$$

از طرف دیگر $H^{0,s}$ برای هر عدد صحیح مثبت s می تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$H^{0,s} = H^s(I_t; L^2(I_x)) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in L^2(\Omega), 0 \leq j \leq s\}, \quad (28-2)$$

$$\|u\|_{H^{0,s}} = \left(\sum_{j=0}^s \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \text{ با نرم}$$

تعریف ۲-۴. فضای هیلبرت زیر را تعریف می کنیم:

$$H^{r,s}(\Omega) = H^s(I_t; H^r(I_x)) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j} \in L^2(\Omega), 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s\}, \quad (29-2)$$

با ضرب داخلی و نرم:

$$(u, v)_{r,s} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{\partial^{i+j} u(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} \frac{\partial^{i+j} v(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} dx dt, \quad (30-2)$$

$$\|u\|_{H^{r,s}} = \left(\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s \left\| \frac{\partial^{i+j} u(x,t)}{\partial x^i \partial t^j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

قضیه ۲-۳. اگر $\Pi_{N,M} u$ تصویر متعامد u بر روی $P_{N,M}$ به صورت $(\Pi_{N,M} u)(x,t) = u_{N,M}(x,t)$

باشد، سپس برای هر تابع $u \in L^2(\Omega)$ ، ثابت های C_1, C_2 برای $0 \leq r \leq N+1$ و $0 \leq s \leq M+1$ که

$r, s \in \square$ وجود دارد به طوری که:

$$\|u - \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \sqrt{\frac{(N-r+1)!}{(N+1)!}} (N+r)^{-r/2} \|u\|_{H^{r,0}} + C_2 \sqrt{\frac{(M-s+1)!}{(M+1)!}} (M+s)^{-s/2} \|u\|_{H^{0,s}}. \quad (31-2)$$

اثبات. با استفاده از تصویرهای متعامد یک بعدی تعریف شده در (۲-۲) و (۳-۲) برای Π_N و $\hat{\Pi}_M$ داریم:

$$\Pi_{N,M} u = \Pi_N \hat{\Pi}_M u,$$

ونیز با به کارگیری قضایای (۱-۲) و (۲-۲) و با توجه به کرانداری عملگر تصویر متعامد :

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u - \Pi_N u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_N(u - \hat{\Pi}_M u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u - \Pi_N u\|_{L^2(\Omega)} + C_3 \|u - \hat{\Pi}_M u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_1 \sqrt{\frac{(N-r+1)!}{(N+1)!}} (N+r)^{-r/2} \|u\|_{H^{r,0}} + C_2 \sqrt{\frac{(M-s+1)!}{(M+1)!}} (M+s)^{-s/2} \|u\|_{H^{0,s}} \quad \square \end{aligned}$$

تابع خطای تقریب $u_{N,M}$ از جواب مسئله (۱-۲) به صورت $e(x,t) = u(x,t) - u_{N,M}(x,t)$ تعریف می شود و متناسب با بهترین تقریب داریم:

$$e_{N,M}(x,t) = u(x,t) - \Pi_{N,M} u(x,t). \quad (۳۲-۲)$$

بر طبق قضیه (۳-۲) ، وقتی $N, M \rightarrow \infty$ در این صورت $\|e_{N,M}\| \rightarrow 0$ و در نتیجه

$$(\|e\| = \|u - u_{N,M}\| \leq \|u - \Pi_{N,M} u\| + \|\Pi_{N,M} u - u_{N,M}\|) \rightarrow 0. \quad (۳۳-۲)$$

۲-۳-۲ کران خطا برای مشتق کسری

قضیه ۴-۲. فرض کنید $u \in L^2(\Omega)$ اگر $n-1 < \alpha \leq n = \lceil \alpha \rceil$ و $n < r < N+1, r \in \mathbb{Z}$ در این صورت داریم:

$$\|D_x^\alpha u - D_x^\alpha \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C \sqrt{\frac{(N-r+1)!}{(N-n+1)!}} (N+r)^{(n-r)/2}}{\Gamma[n-\alpha+1]} \|u(x,t) - \Pi_{N,M} u(x,t)\|_{H^{r,0}(\Omega)}, \quad (۳۴-۲)$$

که C نیز عدد ثابت است.

اثبات. بنا به [11] داریم:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p,$$

با استفاده از تعریف های (۱-۱) و (۳-۱) و به کاربردن قضیه (۱-۲) اثبات به شرح زیر کامل می شود:

$$\begin{aligned}
& \|D_x^\alpha u - D_x^\alpha \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|J_x^{n-\alpha} (D_x^n u(x,t) - D_x^n \Pi_{N,M} u(x,t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& = \left\| \frac{1}{x^{1+\alpha-n} \Gamma[n-\alpha]} * (D_x^n u(x,t) - D_x^n \Pi_{N,M} u(x,t)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \left(\frac{1}{(n-\alpha) \Gamma(n-\alpha)} \right)^2 \|D_x^n u(x,t) - D_x^n \Pi_{N,M} u(x,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \left(\frac{C \sqrt{\frac{(N-r+1)!}{(N-n+1)!}} (N+r)^{(n-r)/2}}{\Gamma[n-\alpha+1]} \right)^2 \|u(x,t) - \Pi_{N,M} u(x,t)\|_{H^{r,0}(\Omega)}^2 \quad \square
\end{aligned}$$

پس وقتی N و M به بی نهایت میل می کنند، داریم:

$$(\|D_x^\alpha e_{N,M}\| = \|D_x^\alpha u - D_x^\alpha \Pi_{N,M} u\|) \rightarrow 0. \quad (35-2)$$

قضیه ۲-۵. با فرض $u \in L^2(\Omega)$ و $h = \lceil \beta \rceil$, $s \in \mathbb{N}$, $h-1 < \beta \leq h < s \leq M+1$ داریم:

$$\|D_t^\beta u - D_t^\beta \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C \sqrt{\frac{(M-s+1)!}{(M-h+1)!}} (M+s)^{(h-s)/2}}{\Gamma[h-\beta+1]} \|u(x,t) - \Pi_{N,M} u(x,t)\|_{H^{0,s}(\Omega)}, \quad (36-2)$$

که C ثابت است.

اثبات. مشابه قضیه ۲-۴ است. $\square$

همچنین وقتی N و M به بی نهایت میل می کنند، داریم:

$$(\|D_t^\beta e_{N,M}\| = \|D_t^\beta u - D_t^\beta \Pi_{N,M} u\|) \rightarrow 0. \quad (37-2)$$

۲-۳-۳ تقریب تابع مانده

برای روش پیشنهادی، ارزیابی خطا با استفاده از تابع خطای مانده ارائه شده است [13].

مسئله زیر با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
L[u_{N,M}(x,t)] &= D_t^\beta u_{N,M}(x,t) - d(x,t)D_x^\alpha u_{N,M}(x,t) - b(x,t)D_x^\gamma u_{N,M}(x,t) = S(x,t) + R_{N,M}(x,t), \\
u_{N,M}(x,0) &= u_0(x), \\
u_{N,M}(0,t) &= g_0(t), \quad u_{N,M}(b,t) = g_1(t),
\end{aligned} \tag{۳۸-۲}$$

که $R_{N,M}$ تابع مانده به دست آمده از تفریق معادلات (۱-۲)-(۳-۲) از (۳۸-۲) به شکل زیر است:

$$D_t^\beta e_{N,M}(x,t) - d(x,t)D_x^\alpha e_{N,M}(x,t) - b(x,t)D_x^\gamma e_{N,M}(x,t) = -R_{N,M}(x,t), \tag{۳۹-۲}$$

با شرایط اولیه و مرزی همگن. با استفاده از قضیه ۲-۴ برای مشتقات α, γ و قضیه ۲-۵ برای β ، وقتی N, M به بی نهایت میل می کنند، $R_{N,M} \rightarrow 0$.

۲-۴ مثال های عددی

در این بخش به ارائه مثال های عددی برای نشان دادن دقت روش می پردازیم. برای محاسبه خطا، از شکل گسسته L_∞ در زمان های متفاوت $T=1, 2, 10, 50, 100$ به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$L_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x,T) - U(x,T)| \approx \max_{0 \leq j \leq N} |u(x_j,T) - U(x_j,T)|. \tag{۴۰-۲}$$

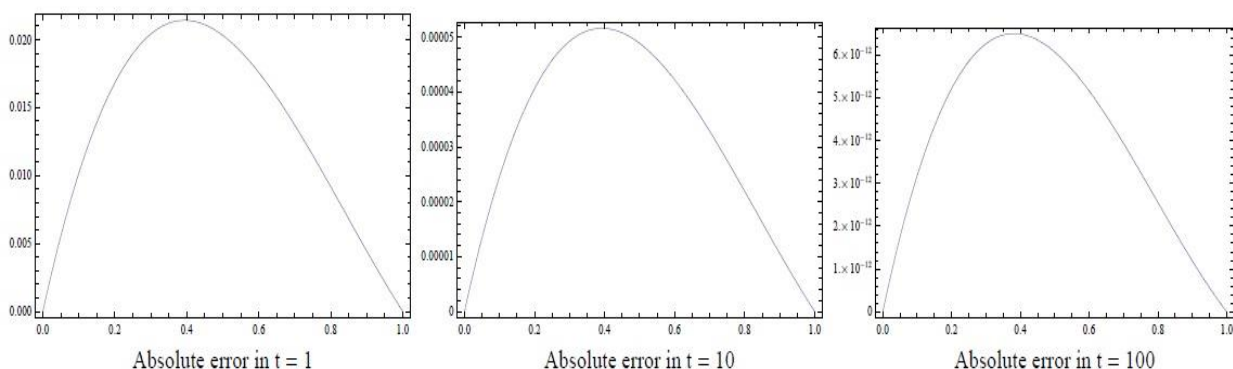
کلیه محاسبات را با نرم افزار ممتیکا انجام داده ایم.

مثال 1.2. معادله دیفرانسیل جزئی کسری پخش (۱-۲) با مرتبه های کسری $\alpha=1.8, \beta=0.8$ و تابع های $b(x,t)=0, \quad d(x,t)=\Gamma(1.2)x^\alpha$ (که Γ تابع اوایلرگاما است) و شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x,0) = x^2(1-x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

جواب دقیق مسئله برای $\beta=1$ نیز $u(x,t) = e^{-t^\beta} x^2(1-x)$ است که متناظر آن جمله منبع در نظر گرفته می شود.

شکل (۱-۲)، خطای مطلق را برای مقادیر مختلف t نشان داده است، همچنین ماکسیموم خطای مطلق در بعضی از گره ها در جدول (۱-۲) لیست شده است. این شکل و جدول نشانگر اجرای بهینه بر روی بازه نسبتاً طولانی است.



شکل (۱-۲): خطای مطلق مثال ۱.۲ برای مقادیر مختلف زمان با $n = m = 3$

جدول (۱-۲): بیشترین خطای مطلق برای مقادیر مختلف زمان با $n = m = 3$ برای مثال ۱.۲

x	T=1	T=10	T=100
0	$1/6 \times 10^{-17}$	$7/4 \times 10^{-19}$	$2/6 \times 10^{-20}$
0/2	$1/6 \times 10^{-2}$	$4/1 \times 10^{-5}$	$5/2 \times 10^{-12}$
0/4	$2/1 \times 10^{-2}$	$5/2 \times 10^{-5}$	$6/5 \times 10^{-12}$
0/6	$1/7 \times 10^{-2}$	$4/2 \times 10^{-5}$	$5/2 \times 10^{-12}$
0/8	$9/1 \times 10^{-3}$	$2/2 \times 10^{-5}$	$2/5 \times 10^{-12}$
1	$1/4 \times 10^{-17}$	$1/1 \times 10^{-19}$	$7/6 \times 10^{-21}$

مثال 2.2 [68,42,7] معادله دیفرانسیل جزئی کسری پخش را با $\alpha = 1.8$ و مقادیر مختلفی برای β به

صورت $\beta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ و توابع ضریب $d(x,t) = \Gamma(1.2)x^{1.8}$ و $b(x,t) = 0$ و جمله منبع

$S(x,t) = 3x^2(2x-1)e^{-t}$ در نظر بگیرید. اگر شرایط اولیه و مرزی به صورت

$u(x,0) = x^2(1-x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ باشد، در این صورت تابع $u(x,t) = x^2(1-x)e^{-t}$ جواب

دقیق مسئله برای $\beta = 1$ خواهد بود.

بیشترین میزان خطای L_∞ به ازای $T = 2$ و مقادیر مختلف β در جدول (۲-۲) آورده شده است. شکل

(۲-۲) نشان دهنده همگرایی روش است وقتی β به ۱ میل می کند و $\alpha = 1.8$ است. همچنین مقایسه‌ی

روش پیشنهادی چیشف و روش های توصیف شده در [68,42,7] در جدول (۳-۲) آمده است. روش

[42] براساس تقریب چندجمله‌ای‌های چیشف است که با روش تفاضل متناهی حل شده است، در این

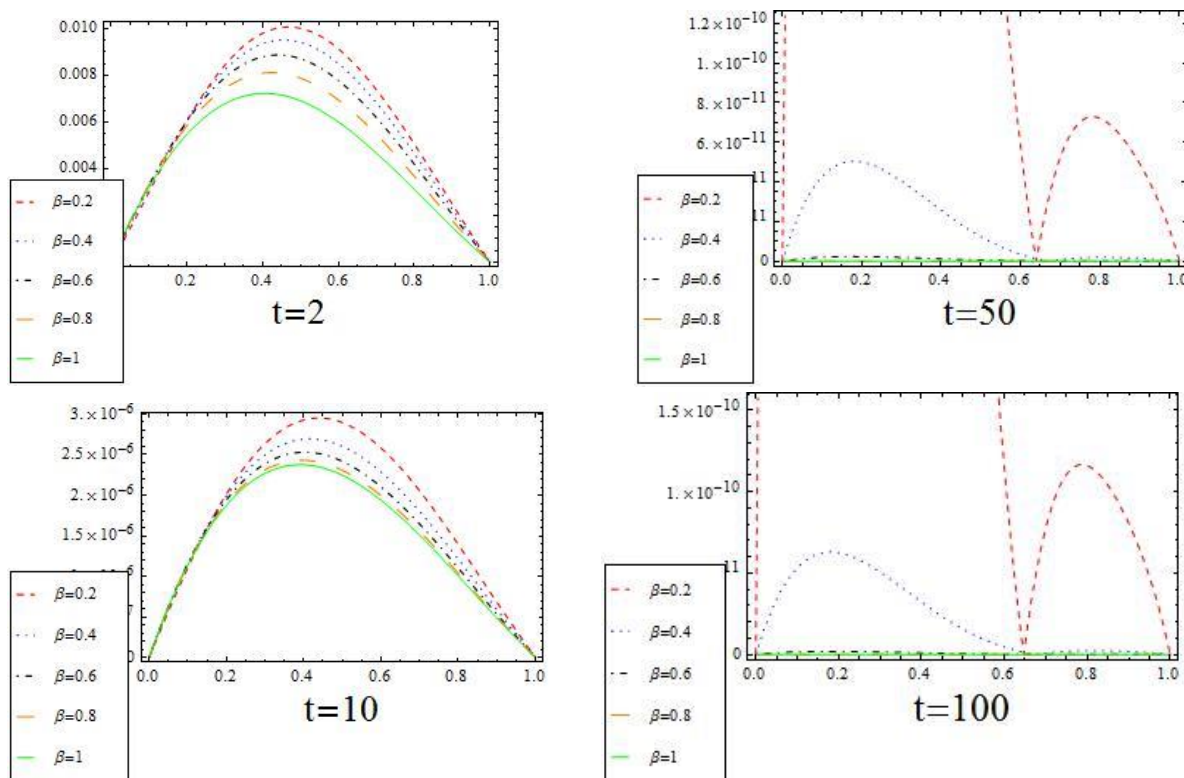
روش، خواص چندجمله‌ای‌های چیشف باعث شده است که معادله پخش کسری تبدیل به یک دستگاه

معادلات دیفرانسیل معمولی شود. از طرفی، روش کرانگ-نیکلسون یک تقریب عددی در [68] است که با

برونیا ب مکانی ترکیب شده است و نهایتاً [7] از چند جمله‌ای‌های لژاندر برای حل معادله انتشار کسری استفاده کرده است. مقایسه روش ارائه شده با روش های توصیف شده در [68,42,7] نشان می‌دهد که به تقریب بهتری در بازه نسبتاً طولانی دست یافته ایم.

جدول (۲-۲): بیشترین خطای مطلق برای $n = m = 3$ با مقادیر مختلف β در $T = 2$ برای مثال ۲.۲

x	$\beta=0/2$	$\beta=0/4$	$\beta=0/6$	$\beta=0/8$	$\beta=1$
0/2	0/00605	0/0061	0/00604	0/00585	0/00548
0/4	0/00981	0/00936	0/0088	0/00810	0/00723
0/6	0/00914	0/00851	0/00778	0/00695	0/00601
0/8	0/00507	0/00466	0/0042	0/00368	0/00312



شکل (۲-۲) بیشترین خطای روش وقتی β به ۱ میل می‌کند و $\alpha = 1.8$ برای مثال ۲.۲ با $n = m = 5$

جدول (۳-۲): مقایسه‌ی بیشترین خطای مطلق برای مثال ۲.۲ با $n = m = 5$.

t	T=2	T=10	T=50
روش پیشنهادی	$1/0 \times 10^{-2}$	$3/0 \times 10^{-6}$	$1/4 \times 10^{-9}$
روش [42]	$2/7 \times 10^{-5}$	3/7	67/6
روش [68]	$8/4 \times 10^{-5}$	7/1	23/7
روش [7]	$2/3 \times 10^{-2}$	$1/2 \times 10^{-2}$	$8/0 \times 10^{-5}$

مثال 3.2. شرط اولیه هموار $u(x, 0) = x^2(1-x)^2$ و شرایط مرزی همگن را برای معادله دیفرانسیل جزئی

کسری پخش در نظر می گیریم. مرتبه مشتقات کسری زمان و مکان به صورت $\alpha = 1.4, \beta = 0.1$ و

$\gamma = 0.2$ هستند و توابع ثابت $d(x, t) = 0.001$ ، $b(x, t) = 2$ به عنوان ضرایب انتشار هستند. جمله منبع

با توجه به جواب دقیق $u(x, t) = x^2(1-x)^2 \exp(t)$ به ازاء $\beta = 1$ تعیین می شود.

جدول (۲-۴) نتایج را برای مقادیر متفاوت x در زمان های $T = 1, 10, 100$ نشان می دهد، که گویای دقت تقریب بهتر در زمان طولانی است.

جدول (۲-۴) : بیشترین خطای مطلق برای مقادیر مختلف زمان با $n = m = 3$ برای مثال ۳.۲

x	T=1	T=10	T=100
0/1	$3/0324 \times 10^{-3}$	$5/4832 \times 10^{-5}$	$1/54753 \times 10^{-18}$
0/3	$1/62183 \times 10^{-2}$	$3/4072 \times 10^{-6}$	$4/20128 \times 10^{-18}$
0/5	$2/2993 \times 10^{-2}$	$3/44105 \times 10^{-6}$	$5/82759 \times 10^{-18}$
0/7	$1/62489 \times 10^{-2}$	$2/83353 \times 10^{-5}$	$5/42101 \times 10^{-18}$
0/9	$3/00455 \times 10^{-3}$	$2/59776 \times 10^{-5}$	$2/49366 \times 10^{-18}$

فصل ۳

حل معادله دیفرانسیل کسری انتشار با روش طیفی

مبتنی بر پایه برنشتاین

انتقال در فیزیک، مهندسی و علوم زمین به مفهوم جابه‌جایی ماده از طریق حرکت توده ای سیال است و پخش و پراکنش به معنی جابه‌جایی های ناشی از واکنش های بین مولکولی مواد است. فرایند انتقال شامل پدیده های مهمی در رشته های مختلف می شود که از آن جمله می توان به گسترش آلاینده ها در آسمان شهر، انتقال دارو از طریق جریان خون، انتقال مواد مورد نیاز گیاهان از طریق جریان آب از خاک به گیاه، انتقال مواد نفتی در لایه های متخلخل در مناطق نفت خیز اشاره کرد.

معادله انتقال_پخش

$$\frac{\partial^\beta u(x,t)}{\partial t^\beta} = b(x,t) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} + d(x,t) \frac{\partial^\gamma u(x,t)}{\partial x^\gamma} + S(x,t), \quad (x,t) \in (0,b) \times (0,\infty), \quad (1-3)$$

را با شرایط اولیه و مرزی زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), & x \in [0,b], \\ u(0,t) &= g_1(t), & u(b,t) = g_2(t), & t > 0. \end{aligned} \quad (2-3)$$

که u تابع غلظت مجهول، b و d به ترتیب توابع پراکنش و پخش معلوم، S جمله منبع معلوم و مشتقات کسری از نوع کاپوچو است که $0 < \beta, \gamma \leq 1$ ، $1 < \alpha \leq 2$. توجه داریم که هنگامی که $\beta = 1$ ، $\alpha = 2$ و نیز $\gamma = 1$ است، معادله تبدیل به معادله انتشار کلاسیک می-شود [57,46].

قبل از ارائه روش با استفاده از توابع برنشتاین، ابتدا به تعریف توابع جدیدی از نوع برنشتاین می پردازیم و سپس به ارائه روش می پردازیم.

۳-۲ توابع برنشتاین نرمال شده گویا

برای مسائل با دامنه نیم متناهی $[0,\infty)$ ، مطابق با آنچه در [66] برای توابع گویاشده آمده است، ما یک نگاشت جبری پیشنهاد می دهیم تا دسته ای از توابع برنشتاین گویاشده را بسازیم که بازه $[0,1]$ را به $[0,\infty)$ می نگارد، بدین صورت که

$$x = \frac{t}{t+L} \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{xL}{1-x}, \quad x \in [0,1] \quad t \in [0,\infty) \quad (3-3)$$

که در آن L یک پارامتر ثابت است. روش‌هایی جهت بهینه‌سازی پارامتر مثبت L در نگاشت‌ها وجود دارد که می‌توان در [26] یافت. در این‌جا ما آن را ۱ در نظر می‌گیریم.

پس با تغییر مولفه $\phi(t) = \frac{t}{t+L}$ در چندجمله‌ای‌های برنشتاین نرمال‌شده، به تولید دسته‌ای از توابع برنشتاین گویا در بازه $[0, \infty)$ می‌پردازیم. توابع برنشتاین نرمال گویاشده به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$R_{i,n}(t) = b_{i,n}(\phi(t)). \quad (۴-۳)$$

مشابه فضایی که برای توابع گویاشده (فصل ۱، توابع چبیشف گویاشده) تعریف کردیم، در این‌جا نیز داریم: (توجه شود چون این فضاها به صورت جداگانه مورد استفاده قرار می‌گیرد، اندیس‌ها یکسان در نظر گرفته شده است)

فرض می‌کنیم $\Lambda = \{t | 0 \leq t < \infty\}$ ، تابع وزن نامنفی $w_r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ بر روی Λ به صورت $w_r(t) = w_s(t) \frac{d}{dt} \phi(t) = \frac{L}{(t+L)^2}$ تعریف می‌کنیم. فضای باناخ $L_{w_r}^2(\Lambda)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_{w_r}^2 = \{f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \mid f, \|f\|_{L_{w_r}^2} < \infty\}, \quad (۵-۳)$$

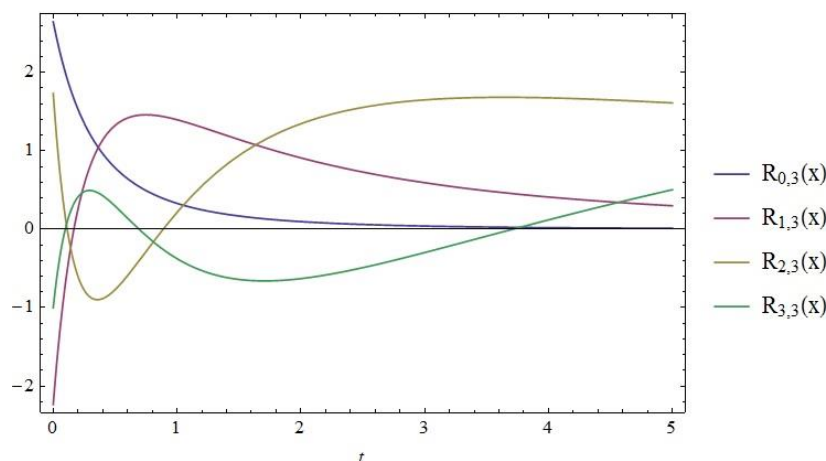
که در آن

$$\|f\|_{L_{w_r}^2} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 w_r(x) dx \right)^{1/2}. \quad (۶-۳)$$

ویژگی تعامد این دسته از توابع بر روی $L_{w_r}^2(\Lambda)$ بدین صورت حفظ می‌شود:

$$(R_{i,n}, R_{j,n})_{w_r} = \int_0^\infty R_{i,n}(t) R_{j,n}(t) w_r(t) dt = \delta_{ij}. \quad (۷-۳)$$

شکل (۱-۳) توابع برنشتاین گویا شده را برای $n=3$ بر روی بازه $[0, 5]$ نشان می‌دهد.



شکل (۱-۳): توابع برنشتاین گویا شده روی بازه $[0, 5]$

هر تابع $f \in L^2_{w_r}(\Lambda)$ می تواند بر حسب توابع برنشتاین نرمال گویا شده به صورت زیر بسط داده شود:

$$f(t) = \sum_{j=0}^n k_{j,n} R_{j,n}(t) = K^T \Psi(t), \quad (۸-۳)$$

که ضرایب آن $j = 0, 1, \dots, n$ $k_{j,n} = (f, R_j)_{w_r} = \int_{\Lambda} f(t) R_{j,n}(t) w_r(t) dt$ ، $\Psi(t)$ و K تعریف می شوند و

به صورت زیر هستند:

$$K = [k_{0,n}, k_{1,n}, \dots, k_{n,n}]^T, \quad (۹-۳)$$

$$\Psi(t) = [R_{0,n}(t), R_{1,n}(t), \dots, R_{n,n}(t)]^T. \quad (۱۰-۳)$$

۳-۳ تقریب تابع با چند جمله ای های برنشتاین متعامد شده و توابع نرمال آن

تابع حقیقی مقدار u تعریف شده در $[0, b] \times [0, \infty)$ را بوسیله ی چند جمله ای ها و توابع برنشتاین گویای نرمال تقریب می زنیم:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} b_{i,n}(x) R_{j,n}(t), \quad (۱۱-۳)$$

که در آن

$$\lambda_{ij} = \int_0^b \int_0^{+\infty} u(x, t) b_{i,n}(x) w_s(x) R_{j,n}(t) w_r(t) dt dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n. \quad (۱۲-۳)$$

در واقع u از تقریب سری متناهی از (۱۱-۳) بدین صورت به دست می آید.

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \lambda_{ij} b_{i,n}(x) R_{j,n}(t) = \Phi^T(x) U \Psi(t), \quad (13-3)$$

که در آن $\Phi(x)$ بردار $(n+1)$ بعدی تعریف شده در (۱-۶۵) و $\Psi(t)$ نیز بردار $(n+1)$ متناظر در

(۳-۱۵) است. $U = [\lambda_{ij}]$ ماتریس $(n+1) \times (n+1)$ که شامل مقادیر مجهول است.

از طرفی توابع مشتق کسری را نیز می‌توان بدین گونه تقریب زد که:

$$D_x^\alpha u(x,t) \approx (D_x^\alpha \Phi(x))^T U \Psi(t), \quad (14-3)$$

$$D_t^\beta u(x,t) \approx \Phi(x)^T U (D_t^\beta \Psi(t)), \quad (15-3)$$

از آنجایی که $D_x^\alpha \Phi(x)$ شامل مولفه‌های $D_x^\alpha b_{i,n}(x)$ است، با به کار بردن مشتق کاپوچو برای این دسته از توابع داریم:

$$D_x^\alpha b_{i,n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\lceil \alpha \rceil - \alpha)} \int_0^x \frac{1}{(x-z)^{\alpha+1-\lceil \alpha \rceil}} D_z^{\lceil \alpha \rceil} (b_{i,n}(z)) dz, \quad (16-3)$$

همین طور $D_t^\beta \Psi(t)$ شامل مولفه‌های $D_t^\beta R_{j,n}(t)$ است، داریم:

$$D_t^\beta R_{j,n}(t) = \frac{1}{\Gamma(\lceil \beta \rceil - \beta)} \int_0^t \frac{1}{(t-z)^{\beta+1-\lceil \beta \rceil}} D_z^{\lceil \beta \rceil} (R_{j,n}(z)) dz. \quad (17-3)$$

لازم به یادآوری هست که وقتی $t \in [0, b]$ داریم $\Psi(t) = \Phi(t)$.

برای حل معادله پخش با شرایط اولیه و مرزی دو روش هم محلی و گالرکین را به شرح زیر به کار می‌بریم.

۱-۳-۳ روش هم محلی

معادله پخش (۱-۳) با شرایط اولیه و مرزی (۲-۳) را در نظر می‌گیریم، با استفاده از معادله (۳-۱۳) برای تابع مجهول u به تقریب این تابع می‌پردازیم. از طرفی باتوجه به وجود مشتقات کسری در معادله با به کارگیری (۳-۱۶) و (۳-۱۷) مشتقات کسری را تقریب می‌زنیم. هدف در اینجا به دست آوردن ماتریس مجهول U است. با جایگذاری تقریب تابع مجهول و مشتقات آن در مسئله داریم:

$$H(x,t) = \Phi(x)^T U (D_t^\beta \Psi(t)) - d(x,t) (D_x^\alpha \Phi(x))^T U \Psi(t) - b(x,t) (D_x^\gamma \Phi(x))^T U \Psi(t) - S(x,t), \quad (18-3)$$

با به کاربردن نقاط گاوس_چبیشف_رادو انتقال یافته در $[0, b]$ برای x و گاوس_چبیشف_رادو گویا شده برای t در $[0, \infty)$ ، در روش هم محلی $n^2 - n$ معادله‌ی مستقل خطی به صورت زیر به دست می-آوریم:

$$H(x_i, t_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n, \quad (19-3)$$

تقریب تابع مجهول را در شرایط اولیه و مرزی نیز اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \Phi(x)^T U \Psi(0) - u_0(x) = 0, \quad 0 < x < b, \\ \Omega_1(t) &= \Phi(0)^T U \Psi(t) - g_0(x) = 0, \\ \Omega_2(t) &= \Phi(b)^T U \Psi(t) - g_1(x) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (20-3)$$

با جایگذاری نقاط هم محلی در این شرایط، $3n+1$ معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho(x_i) &= 0, \quad i = 0, \dots, n, \\ \Omega_k(t_j) &= 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (21-3)$$

که معادلات (۱۹-۳) و (۲۱-۳) یک دستگاه $(n+1)^2$ معادله‌ای با $(n+1)^2$ مجهول u_{ij} ، $i, j = 0, 1, \dots, n$ به ما می‌دهد. با به دست آوردن ضرایب u_{ij} و جایگذاری آن در تابع تقریب، تقریبی از تابع مجهول جواب مسئله به دست می‌آید.

پس به طور کلی اگر بخواهیم الگوریتمی برای این روش ارائه کنیم بدین صورت است که:

۱- مقادیر مفروض در مسئله مانند مشتقات کسری α, β, γ ، توابع پخش و پراکنش و جمله منبع $b(x, t), d(x, t), s(x, t)$ و شرایط اولیه و مرزی مسئله و همچنین مقدار n که به ازاء آن مسئله باید حل شود را وارد نمایید.

۲- بردار چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعامد نرمال شده $\Phi(x) = \{b_{i,n}(x) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ و بردار توابع برنشتاین گویاشده $\Psi(t) = \{R_{j,n}(t) \mid j = 0, 1, \dots, n\}$ را ساخته و ماتریس $(n+1)^2$ بعدی $U = [u_{ij}]$ را برای مجهول مسئله در نظر بگیرید.

۳- بردارهای $D_t^\beta \Psi(t)$ ، $D_x^\gamma \Phi(x)$ و $D_x^\alpha \Phi(x)$ را با توجه به تعریف مشتق کاپوچو بسازید.

۴- نقاط هم محلی $x_i \mid i = 0, 1, \dots, n$ و $t_j \mid j = 0, 1, \dots, m$ که نقاط گاوس_چبیشف_رادو انتقال یافته در $[0, b]$ و گاوس_چبیشف_رادو گویا شده در $[0, \infty)$ است، را وارد نمایید.

۵- با قرار دادن نقاط هم محلی در سری معادلات $H(x, t), \rho(x), \Omega_1(t), \Omega_2(t)$ به صورت

$$H(x_i, t_j) = 0 \quad i = 1, \dots, n-1 \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\rho(x_i) = 0 \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\Omega_1(t_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\Omega_2(t_j) = 0 \quad j = 1, \dots, n,$$

می‌توانید دستگاه $(n+1)^2$ معادله با $(n+1)^2$ مجهول $U = [u_{ij}]$ $i, j = 0, 1, \dots, n$ را حل

کنید و نهایتاً جواب را به صورت $u(x, t) \approx \phi(x)^T U \psi(t)$ به دست خواهید آورد.

۶- برای محاسبه خطا، از شکل گسسته L_∞ در زمان‌های متفاوت $T = 1, 2, 10, 50, 100$ به صورت زیر

استفاده کنید:

$$L_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x, T) - U(x, T)| \approx \max_{0 \leq j \leq N} |u(x_j, T) - U(x_j, T)|.$$

۳-۳-۲ روش گالرکین

به منظور فرموله کردن روش گالرکین برای مسئله (۳-۱)، تابع مجهول را مطابق (۳-۱۳) تقریب زده، توابع آزمون را با توابع پایه اولیه یکسان در نظر می‌گیریم، در این صورت باتوجه به تابع وزن و حاصل ضرب داخلی داریم:

$$((H(\cdot, t), \Phi(\cdot))_{w_s}, \Psi(t))_{w_r} = 0. \quad (22-3)$$

در نتیجه:

$$p[i, j] := \int_0^b \int_0^{+\infty} H(x, t) b_{i,n}(x) w_s(x) R_{j,n}(t) w_r(t) dt dx = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad j = 1, \dots, n. \quad (23-3)$$

برای شرایط اولیه و مرزی نیز داریم:

$$(\rho, \Phi)_{w_s} = 0 \Rightarrow p[i, 1] := (\rho, b_{i,n})_{w_s} = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (24-3)$$

$$(\Omega_k, \Psi)_{w_r} = 0 \Rightarrow p[k, j] := (\Omega_k, R_{j,n})_{w_r} = 0, \quad k = 1, 2, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (25-3)$$

معادلات انتگرالی بالا به وسیله انتگرال گیری گاوس-چبیشف حل می‌شود و در نتیجه یک دستگاه $(n+1)^2$

معادله‌ای با $(n+1)^2$ مجهول u_{ij} ، $i, j = 0, 1, \dots, n$ به ما می‌دهد.

الگوریتم این روش تا مرحله ۳ روش هم محلی مشابه می باشد و سپس در ادامه داریم:

۴- در این مرحله نوبت به تشکیل ضرب های داخلی می باشد در سری معادلات $H(x,t), \rho(x), \Omega_1(t), \Omega_2(t)$ ، ضرب های داخلی زیر را تشکیل می دهیم:

$$p[i, j] = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^n H(x_k, t_l) b_{i,n}(x_k) R_{j,n}(t_l) w_k w_l, \quad i=1, \dots, n-1 \quad j=1, \dots, n,$$

$$p[i, 1] = \sum_{k=0}^n \rho(x_k) b_{i,n}(x_k) w_k \quad i=0, 1, \dots, n,$$

$$p[1, j] = \sum_{l=0}^n \Omega_1(t_l) R_{j,n}(t_l) w_l \quad j=1, \dots, n,$$

$$p[2, j] = \sum_{l=0}^n \Omega_2(t_l) R_{j,n}(t_l) w_l \quad j=1, \dots, n,$$

که w_k, w_l و x_k, t_l نقاط و وزن های انتگرال گیری گاوس_چبیشف می باشد نهایتا دستگاه $(n+1)^2$ معادله با $(n+1)^2$ مجهول $U=[u_{ij}] \quad i, j=0, 1, \dots, n$ را می توان حل کرد و جواب به صورت $u(x,t) \approx \phi(x)^T U \psi(t)$ تقریب زده خواهد شد.

قبل از اینکه به تخمین خطای این روش ها پردازیم، رابطه ی بین چندجمله ای های لژاندر و برنشتاین متعامد نرمال شده را بیان و اثبات می کنیم که در اثبات قضایا از آن استفاده خواهیم کرد.

۳-۴ رابطه بین چندجمله ای های لژاندر و چندجمله ای های برنشتاین متعامد نرمال

در ابتدا، توصیف مختصری در مورد چندجمله ای های لژاندر داده و سپس به پیدا کردن رابطه ی بین چندجمله ای های برنشتاین نرمال شده و لژاندر از طریق ماتریس های تبدیل می پردازیم.

چندجمله ای های لژاندر روی بازه $[0,1]$ ، شامل یک سری از پایه های متعامد یکه با رابطه بازگشتی زیر می باشند (توجه کنید که این چندجمله ای ها در واقع چندجمله ای های لژاندر انتقال یافته اند که به اختصار در اینجا چندجمله ای های لژاندر نامیده شده اند):

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, & L_1(x) &= 2x-1, \\ L_{i+1}(x) &= \frac{(2i+1)(2x-1)}{i+1} L_i(x) - \frac{i}{i+1} L_{i-1}(x), & i &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (26-3)$$

که خاصیت تعامد در آن ها به این صورت است:

$$\int_0^1 L_i(x) L_j(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{1}{2i+1}, & i = j. \end{cases} \quad (27-3)$$

هر چند جمله‌ای $P_n(x)$ از درجه n می‌تواند بر حسب چند جمله‌ای‌های لژاندر بیان شود:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n s_j L_j(x) = S^T \varphi(x), \quad (28-3)$$

که S و $\varphi(x)$ به ترتیب بردارهای ضرایب و چند جمله‌ای‌های لژاندر هستند:

$$S = [s_0, s_1, \dots, s_n]^T, \quad (29-3)$$

$$\varphi(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)]^T. \quad (30-3)$$

اگر بتوان چند جمله‌ای‌های لژاندر را بر حسب چند جمله‌ای برنشتاین درجه n در $[0,1]$ نوشت:

$$L_k(x) = \sum_{i=0}^n w_{k,i} b_{i,n}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (31-3)$$

در این صورت ضرایب $w_{k,i}$ ، $k, i = 0, 1, \dots, n$ تشکیل یک ماتریس $(n+1)(n+1)$ می‌دهند که باید ضرایب آن به گونه‌ای تعیین شوند که:

$$w_{k,j} = \int_0^1 L_k(x) b_{j,n}(x) dx. \quad (32-3)$$

برای به دست آوردن ضابطه‌ی این ضرایب، چند جمله‌ای‌های لژاندر را بر طبق [15] بر حسب چند جمله‌ای‌های برنشتاین غیرمتعامدنرمال می‌نویسیم:

$$L_k(x) = \sum_{j=0}^n h_{k,j} B_{j,n}(x), \quad (33-3)$$

که ضرایب آن بدین گونه تعریف شده‌اند:

$$h_{k,j} = \frac{1}{\binom{n}{j}} \sum_{i=\max(0, j+k-n)}^{\min(j,k)} (-1)^{k+j-i} \binom{k}{i} \binom{k}{j-i} \binom{n-k}{j-i}, \quad (34-3)$$

و رابطه (۳۷-۱) را برای برنشتاین متعامد جایگزین می‌کنیم و از خاصیت های (۳۴-۱) و (۳۵-۱) برنشتاین و نهایتاً ساده‌سازی داریم:

$$w_{k,j} = \sum_{j=0}^n \sum_{k_1=0}^i h_{k,j} \sqrt{2(n-i)+1} (-1)^{k_1} \frac{\binom{n}{j} \binom{2n+1-k_1}{i-k_1} \binom{i}{k_1}}{(2n-k_1+1) \binom{2n-k_1}{i+j-k_1}}, \quad (35-3)$$

که فرم ماتریسی آن به شکل $\varphi(x) = W\Phi(x)$ است که $\Phi(x)$ بردار چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعامد نرمال شده (۴۲-۱) است.

بالعکس، برای نوشتن چندجمله‌ای‌های برنشتاین نرمال شده برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر می‌نویسیم:

$$b_{k,n}(x) = \sum_{i=0}^n g_{k,i} L_i(x), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (36-3)$$

که ضرایب $g_{k,i}$ تشکیل ماتریس $(n+1)(n+1)$ ، G را بدین صورت می‌دهند که:

$$g_{k,j} = (2j+1) \int_0^1 b_{k,n}(x) L_j(x) dx. \quad (37-3)$$

چندجمله‌ای برنشتاین متعامد شده را با (۳۷-۱) و چندجمله‌ای برنشتاین غیرمتعامد آن را با رابطه [60] زیر جایگزین می‌کنیم:

$$B_{k,n}(x) = \sum_{j=0}^n l_{k,j} L_j(x) dx, \quad (38-3)$$

با استفاده از این روابط و به‌کاربردن خواص چندجمله‌ای‌های لژاندر داریم:

$$g_{k,j} = (2j+1)^2 \sqrt{2(n-k)+1} \sum_{p=0}^k (-1)^p \frac{\binom{2n+1-p}{k-p} \binom{k}{p}}{\binom{n-p}{k-p}} l_{k-p,i}, \quad (39-3)$$

$$l_{k,j} = \frac{2j+1}{n+j+1} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \frac{\binom{j}{i} \binom{j}{i}}{\binom{n+j}{k+i}}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n \quad \text{که}$$

است. $\Phi(x) = G\varphi(x)$

۳-۵ تخمین خطا

مشابه بخش ۳-۴ به طور کلی در تحلیل خطا، مقایسه جواب عددی u_N با تصویر متعامد $\Pi_N u$ از جواب دقیق u با استفاده از نامساوی زیر است:

$$\|u - u_N\| \leq \|u - \Pi_N u\| + \|\Pi_N u - u_N\|. \quad (۳-۵۰)$$

چون $\Pi_N u$ بهترین تقریب چندجمله‌ای از u است، پس برای به دست آوردن کران خطا، به اندازه‌گیری کران خطای برشی $\|u - \Pi_N u\|$ می‌پردازیم.

تقریب کران خطا برای مشتقات صحیح و کسری را با تعریف زیر شروع می‌کنیم [14].

تعریف ۳-۱. مجموعه $P_N = \text{span}\{b_{0,N}, b_{1,N}, \dots, b_{N,N}\}$ را در نظر بگیرید. $\Pi_N : L^2(I) \rightarrow P_N$ تصویر متعامد L^2 را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که :

$$(\Pi_N u - u, v) = 0, \quad \forall v \in P_N, \quad (۳-۴۱)$$

که در آن $\Pi_N u$ بهترین تقریب درونیاب u از چندجمله‌ای‌های برنشتاین متعامد نرمال شده به این صورت است:

$$(\Pi_N u)(x) = \sum_{j=0}^N a_j b_{j,N}(x). \quad (۳-۴۲)$$

(جهت جلوگیری از افزایش اندیس‌ها ضرایب $a_{j,N}$ با a_j نشان داده شده است.)

به منظور اندازه‌گیری خطای برشی $\Pi_N u - u$ ، فضای سوبولف زیر را تعریف می‌کنیم:

$$H^m(I) = \{u : \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in L^2(I), \quad 0 \leq k \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (۳-۴۳)$$

با ضرب داخلی، نرم و نیم-نرم زیر:

$$\begin{aligned}(u, v)_{H^m} &= \sum_{j=0}^m \left(\frac{\partial^j u}{\partial x^j}, \frac{\partial^j v}{\partial x^j} \right) \\ \|u\|_{H^m} &= (u, u)_{H^m}^{1/2}, \\ |u|_{H^m} &= \left\| \frac{\partial^m u}{\partial x^m} \right\|.\end{aligned}\tag{۴۴-۳}$$

قضیه ۳-۱. فرض کنید $0 \leq l < m_1 \leq N+1$. سپس برای هر $u \in H^{m_1}(I)$ داریم:

$$\|\partial_x^l (u - \Pi_N u)\| \leq C_1 \sqrt{\frac{(N - m_1 + 1)!}{(N - l + 1)!}} (N + m_1)^{(l - m_1)/2} \|u\|_{H^{m_1}}, \tag{۴۵-۳}$$

که C_1 یک عدد ثابت است.

اثبات: بر طبق رابطه‌ی بین چندجمله‌ای‌های لژاندر و توابع برنشتاین متعامد (۳-۳۶) داریم:

$$\begin{aligned}(\Pi_N u)(x) &= \sum_{j=0}^N a_j b_{j,N}(x) = \sum_{j=0}^N a_j \sum_{i=0}^N g_{j,i} L_i(x) \\ &= \sum_{i=0}^N \left(\sum_{j=0}^N a_j g_{j,i} \right) L_i(x) = \sum_{i=0}^N q_i L_i(x),\end{aligned}$$

که $q_i = \sum_{j=0}^N a_j g_{ji}$. این بدان معناست که $\Pi_N u$ نیزبهترین تقریب برای چندجمله‌ای‌های لژاندر در

$L^2(I = [0,1])$ است، از طرفی بنا به [66] (بخش ۳.5، قضیه 3.35) برای این چندجمله‌ای‌ها داریم:

$$\|\partial_x^l (u - \Pi_N u)\| \leq C_2 \sqrt{\frac{(N - m_1 + 1)!}{(N - l + 1)!}} (N + m_1)^{(l - m_1)/2} \|\partial_x^{m_1} u\|,$$

که C_2 یک عدد ثابت است. با استفاده از تعریف داریم:

$$\|\partial_x^l (u - \Pi_N u)\| \leq C_2 \sqrt{\frac{(N - m_1 + 1)!}{(N - l + 1)!}} (N + m_1)^{(l - m_1)/2} \|u\|_{H^{m_1}},$$

در نتیجه نامساوی قضیه فقط با قرار دادن $C_1 = C_2$ برقرار است. $\square$

اثبات این قضیه، به یکی از ویژگی مهم تصویر متعامد اشاره دارد که برای هر بعدی و توسط هر پایه‌ای برقرار است که به این ویژگی مستقل از پایه^۱ گفته می‌شود.

برای دامنه زمانی $\Lambda = [0, +\infty)$ نیز تعاریف و قضیه‌هایی داریم که نقش اساسی در تقریب توسط برنشتاین-های متعامد دارند.

تعریف ۲-۳. تصویر متعامد L^2 ، $\hat{\Pi}_M : L^2(\Lambda) \rightarrow P_M$ ، با فرض فضای $\tilde{H}^m(\Lambda) := L^2_{w_r}$ و

$P_M = \text{span}\{R_{0,M}, R_{1,M}, \dots, R_{M,M}\}$ را به قسمی تعریف می‌کنیم که:

$$(\hat{\Pi}_M u - u, v) = 0, \quad \forall v \in P_M, \quad (۱۶-۳)$$

$$\text{و } (\hat{\Pi}_M u)(t) = \sum_{j=0}^M k_j R_{j,M}(t).$$

فضای $\tilde{H}^m(\Lambda)$ را با نرم و نیم-نرم، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{H}^m(\Lambda) = \{u : \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \in L^2(\Lambda), 0 \leq k \leq m\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\|u\|_{\tilde{H}^m} = \left(\sum_{j=0}^m \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|^2 \right)^{1/2}, \quad (۱۷-۳)$$

$$|u|_{\tilde{H}^m} = \left\| \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \right\|.$$

قضیه ۲-۳. [66] فرض کنید $l = 0$ or 1 و $l \leq m_2 \leq M+1$. برای هر $u \in \tilde{H}^{m_2}(\Lambda)$ داریم:

$$\|\partial_t^l (u - \hat{\Pi}_M u)\| \leq C_3 \sqrt{\frac{(M - m_2 + 1)!}{(M - l + 1)!}} (M + m_2)^{(l-m_2)/2} \|u\|_{\tilde{H}^{m_2}}, \quad (۱۸-۳)$$

که C_3 یک عدد ثابت است.

تعریف ۳-۳. فضای هیلبرت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$H^{r,s}(\Omega) = H^s(I_t; H^r(I_x)) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial t^j} \in L^2(\Omega), 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s\}, \quad (۱۹-۳)$$

¹ basis-free

با دامنه دو بعدی $\Omega = I_x \times I_t = (0,1) \times (0,+\infty)$ و ضرب داخلی و نرم:

$$(u, v)_{r,s} = \sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s \int_0^{+\infty} \int_0^1 \frac{\partial^{i+j} u(x, t)}{\partial x^i \partial t^j} \frac{\partial^{i+j} v(x, t)}{\partial x^i \partial t^j} dx dt, \quad (55-3)$$

$$\|u\|_{H^{r,s}} = \left(\sum_{i=0}^r \sum_{j=0}^s \left\| \frac{\partial^{i+j} u(x, t)}{\partial x^i \partial t^j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

فضای توابع اندازپذیر $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ به طوری در نظر گرفته می شود که $L^2(I_t; H^r(I_x))$ به این صورت نمایش داده می شود:

$$\|u\|_{H^{r,0}} = \left(\int_0^{+\infty} \|u(., t)\|_{H^r(I_x)}^2 dt \right)^{1/2} < +\infty. \quad (51-3)$$

از طرفی برای هر s صحیح مثبت، $H^{0,s}$ می تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$H^{0,s} = H^s(I_t; L^2(I_x)) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \left| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \in L^2(\Omega), 0 \leq j \leq s \right. \right\}, \quad (52-3)$$

$$\|u\|_{H^{0,s}} = \left(\sum_{j=0}^s \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \text{ با این نرم:}$$

قضیه ۳-۳. تصویر متعامد $\Pi_{N,M} = \text{span}\{b_{i,N}(x)R_{j,M}(t), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, M\}$ را بر روی

$P_{N,M}$ به صورت $(\Pi_{N,M}u)(x, t) = u_{N,M}(x, t)$ در نظر بگیرید به قسمی که $\Pi_{N,M}u(x, t)$ بهترین تقریب

چندجمله ای $u_{N,M}(x, t) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^M \lambda_{ij} b_{i,N}(x) R_{j,M}(t)$ در $L^2(\Omega)$ باشد. برای هر تابع $u \in L^2(\Omega)$ ، ثابت-

های C_6, C_7 برای $0 \leq m_1 \leq N+1$ و $0 \leq m_2 \leq M+1$ که $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که:

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{N,M}u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_6 \sqrt{\frac{(N-m_1+1)!}{(N+1)!}} (N+m_1)^{-m_1/2} \|u\|_{H^{m_1,0}} \\ &+ C_7 \sqrt{\frac{(M-m_2+1)!}{(M+1)!}} (M+m_2)^{-m_2/2} \|u\|_{H^{0,m_2}}. \end{aligned} \quad (53-3)$$

اثبات. مشابه قضیه ۲-۳، با استفاده از تصویرهای متعامد یک بعدی تعریف شده در ۳-۱ و ۳-۲ برای Π_N و

$\hat{\Pi}_M$ داریم:

$$\Pi_{N,M}u = \Pi_N \hat{\Pi}_M u,$$

ونیز با به کارگیری قضایای ۱-۳ و ۲-۳ :

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u - \Pi_N u\|_{L^2(\Omega)} + \|\Pi_N(u - \hat{\Pi}_M u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u - \Pi_N u\|_{L^2(\Omega)} + C_5 \|u - \hat{\Pi}_M u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_6 \sqrt{\frac{(N - m_1 + 1)!}{(N + 1)!}} (N + m_1)^{-m_1/2} \|u\|_{H^{m_1,0}} + C_7 \sqrt{\frac{(M - m_2 + 1)!}{(M + 1)!}} (M + m_2)^{-m_2/2} \|u\|_{H^{0,m_2}}. \end{aligned}$$

که $C_7 = C_5 C_3$ و C_6 اعداد ثابت هستند. $\square$

تابع خطای تقریب $u_{N,M}$ برای جواب دقیق u از مسئله (۱-۳) به صورت $e(x,t) = u(x,t) - u_{N,M}(x,t)$ تعریف می شود و متناسب با بهترین تقریب داریم:

$$e_{N,M}(x,t) = u(x,t) - \Pi_{N,M} u(x,t), \quad (۵۴-۳)$$

بر طبق قضیه ۳-۳، وقتی $N, M \rightarrow \infty$ در این صورت $\|e_{N,M}\| \rightarrow 0$ و در نتیجه

$$\|e\| = \|u - u_{N,M}\| \leq \|u - \Pi_{N,M} u\| + \|\Pi_{N,M} u - u_{N,M}\| \rightarrow 0. \quad (۵۵-۳)$$

هم اکنون به سراغ کرانهای خطا برای مشتقات کسری می رویم.

قضیه ۳-۴. فرض کنید $u \in L^2(\Omega)$ اگر $n = \lceil \alpha \rceil$ و $n-1 < \alpha \leq n$ و $n < m_1 < N+1, m_1 \in \mathbb{N}$ در این صورت داریم:

$$\|D_x^\alpha u - D_x^\alpha \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_8 \sqrt{\frac{(N - m_1 + 1)!}{(N - n + 1)!}} (N + m_1)^{(n-m_1)/2}}{\Gamma[n - \alpha + 1]} \|u - \Pi_{N,M} u\|_{H^{m_1,0}(\Omega)}, \quad (۵۶-۳)$$

که C_8 نیز عدد ثابت است.

اثبات. با استفاده از [11] و مشابه قضیه ۲-۴ داریم:

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p,$$

و اثبات به شرح زیر کامل می شود:

$$\begin{aligned}
& \|D_x^\alpha u - D_x^\alpha \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|J_x^{n-\alpha} (D_x^n u(x,t) - D_x^n \Pi_{N,M} u(x,t))\|_{L^2(\Omega)}^2, \\
& = \left\| \frac{1}{x^{1+\alpha-n} \Gamma[n-\alpha]} * (D_x^n u(x,t) - D_x^n \Pi_{N,M} u(x,t)) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \left(\frac{1}{(n-\alpha) \Gamma[n-\alpha]} \right)^2 \|D_x^n u(x,t) - D_x^n \Pi_{N,M} u(x,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq \left(\frac{C_8 \sqrt{\frac{(N-m_1+1)!}{(N-n+1)!}} (N+m_1)^{(n-m_1)/2}}{\Gamma[n-\alpha+1]} \right)^2 \|u(x,t) - \Pi_{N,M} u(x,t)\|_{H^{m,0}(\Omega)}^2 \quad \square
\end{aligned}$$

پس وقتی N و M به بی نهایت میل می کنند، داریم:

$$\|D_x^\alpha e_{N,M}\| = \|D_x^\alpha u - D_x^\alpha \Pi_{N,M} u\| \rightarrow 0. \quad (57-3)$$

قضیه ۳-۵. با فرض $u \in L^2(\Omega)$ و $h = \lceil \beta \rceil$, $h-1 < \beta \leq h < m_2 \leq M+1$, $m_2 \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\|D_t^\beta u - D_t^\beta \Pi_{N,M} u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_9 \sqrt{\frac{(M-m_2+1)!}{(M-h+1)!}} (M+m_2)^{(h-m_2)/2}}{\Gamma[h-\beta+1]} \|u(x,t) - \Pi_{N,M} u(x,t)\|_{H^{0,m_2}(\Omega)}, \quad (58-3)$$

که C_9 ثابت است.

اثبات. اثبات مشابه قضیه ۳-۴ است. $\square$

همچنین داریم، وقتی N و M به بی نهایت میل می کنند:

$$\|D_t^\beta e_{N,M}\| = \|D_t^\beta u - D_t^\beta \Pi_{N,M} u\| \rightarrow 0. \quad (59-3)$$

برای روش پیشنهادی، ارزیابی خطا با استفاده از تابع خطای مانده ارائه شده است [24].

مسئله با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
L[u_{N,M}(x,t)] &= D_t^\beta u_{N,M}(x,t) - d(x,t) D_x^\alpha u_{N,M}(x,t) - b(x,t) D_x^\gamma u_{N,M}(x,t) \\
&= S(x,t) + R_{N,M}(x,t), \\
u_{N,M}(x,0) &= u_0(x), \\
u_{N,M}(0,t) &= g_0(t), \quad u_{N,M}(b,t) = g_1(t),
\end{aligned} \quad (60-3)$$

که $R_{N,M}$ تابع مانده به دست آمده از تفريق معادلات (۳-۱) و (۳-۲) از (۳-۶۰) به شکل زیر است:

$$D_t^\beta e_{N,M}(x,t) - d(x,t)D_x^\alpha e_{N,M}(x,t) - b(x,t)D_x^\gamma e_{N,M}(x,t) = -R_{N,M}(x,t), \quad (61-3)$$

با شرایط اولیه و مرزی همگن. با استفاده از قضیه ۳-۴ برای مشتقات α, γ و قضیه ۳-۵ برای β ، وقتی N, M به بی نهایت میل می کنند، $R_{N,M} \rightarrow 0$.

۳-۶ مثال های عددی

در این بخش به ارائه مثال های عددی برای نشان دادن دقت روش می پردازیم. برای محاسبه خطا، مشابه فصل قبل از شکل گسسته L_∞ در زمان های متفاوت $T = 1, 2, 10, 50, 100$ به صورت زیر استفاده می کنیم. نرخ همگرایی ماتریس ضرایب، با عدد وضعیت نسبت به عدد وضعیت ماتریس هیلبرت H ، با توجه به نرم بی نهایت فراهم شده است:

$$R_\infty = \frac{C_\infty(A)}{C_\infty(H)}, \quad C_\infty(A) := \text{Cond}_\infty(A), \quad (62-3)$$

کلیه محاسبات را با نرم افزار متمتیکا انجام داده ایم.

مثال ۱.۳ [40] معادله دیفرانسیل جزئی کسری انتشار را با مرتبه های کسری زمانی و مکانی

$\alpha = 1.4, \beta = 0.6, \gamma = 0.5$ در نظر می گیریم. جمله منبع را متناسب با هر مرتبه کسری در نظر می گیریم و به این منظور آن را با $S_{\alpha,\beta,\gamma}(x,t)$ نشان می دهیم. در واقع جمله منبع به گونه ای تعیین می شود که جواب دقیق مسئله برای $\beta = 1$ ، $u(x,t) = x^2(1-x)^2 \exp(t)$ باشد. برای $n = 5$ ، بردار چندجمله ای های برنشتاین متعامد یکه به این صورت هستند:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{11}(1-x)^5 \\ 3(1-x)^4(-1+11x) \\ \sqrt{7}(1-x)^3(1-20x+55x^2) \\ \sqrt{5}(1-x)^2(-1+27x-135x^2+165x^3) \\ \sqrt{3}(1-x)(1-32x+216x^2-480x^3+320x^4) \\ -1+35x-280x^2+840x^3-1050x^4+462x^5 \end{pmatrix} \quad (63-3)$$

و متناظر با آن، بردار توابع برنشتاین گویاشده را داریم:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{11}\left(1-\frac{t}{t+1}\right)^5 \\ 3\left(1-\frac{t}{t+1}\right)^4\left(-1+\frac{11t}{t+1}\right) \\ \sqrt{7}\left(1-\frac{t}{t+1}\right)^3\left(1-\frac{20t}{t+1}+\frac{55t^2}{(t+1)^2}\right) \\ \sqrt{5}\left(1-\frac{t}{t+1}\right)^2\left(-1+\frac{27t}{t+1}-\frac{135t^2}{(t+1)^2}+\frac{165t^3}{(t+1)^3}\right) \\ \sqrt{3}\left(1-\frac{t}{t+1}\right)\left(1-\frac{32t}{t+1}+\frac{216t^2}{(t+1)^2}-\frac{480t^3}{(t+1)^3}+\frac{320t^4}{(t+1)^4}\right) \\ -1+\frac{35t}{t+1}-\frac{280t^2}{(t+1)^2}+\frac{840t^3}{(t+1)^3}-\frac{1050t^4}{(t+1)^4}+\frac{462t^5}{(t+1)^5} \end{pmatrix} \quad (64-3)$$

ماتریس مجهول U را نیز با ابعاد 6×6 را در نظر می گیریم:

$$U = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} & u_{0,4} & u_{0,5} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} & u_{1,5} \\ u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} & u_{2,5} \\ u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} & u_{3,5} \\ u_{4,0} & u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} & u_{4,5} \\ u_{5,0} & u_{5,1} & u_{5,2} & u_{5,3} & u_{5,4} & u_{5,5} \end{pmatrix}. \quad (65-3)$$

حال می توانیم تابع مجهول u را با چند جمله ای ها و توابع برنشتاین به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$u_{5,5}(x,t) \approx \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^5 \lambda_{ij} b_{i,5}(x) R_{j,5}(t) = \Phi^T(x) U \Psi(t). \quad (66-3)$$

و همچنین برای تقریب توابع مشتق (3-14) و (3-15) باید مشتقات $D_t^\beta \Psi(t)$ و $D_x^\alpha \Phi(x)$ و $D_x^\gamma \Phi(x)$ را به دست آوریم که این نیز مستلزم محاسبه ی بردارهای با اندازه 6، $D_t^\beta R_{j,n}(t)$ و $D_x^\alpha b_{i,n}(x)$ و $D_x^\gamma b_{i,n}(x)$ است.

با جایگزینی (3-64) و (3-63) و بردارهای مشتق در (3-18) داریم:

$$H(x,t) = \Phi(x)^T U D_t^\beta \Psi(t) - 0.01 (D_x^\alpha \Phi(x))^T U \Psi(t) - 2 (D_x^\gamma \Phi(x))^T U \Psi(t) - S_{\alpha,\beta,\gamma}(x,t) = 0, \quad (67-3)$$

که شرایط اولیه و مرزی نیز به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \Phi(x)^T U \Psi(0) - x^2(1-x)^2 = 0, \quad 0 < x < 1, \\ \Omega_1(t) &= \Phi(0)^T U \Psi(t) = 0, \\ \Omega_2(t) &= \Phi(1)^T U \Psi(t) = 0, \quad t \geq 0.\end{aligned}\tag{۶۸-۳}$$

حال برای روش هم‌محلی، با جایگزین کردن نقاط هم‌محلی در معادلات (۶۷-۳) و (۶۸-۳) به یک دستگاه ۳۶ معادله‌ای با ۳۶ مجهول u_{ij} , $i, j = 0, 1, \dots, 5$ می‌رسیم.

برای به‌کاربردن روش گالرکین داریم:

$$\begin{aligned}((H(x, t), \Phi(x))_{w_s}, \Psi(t))_{w_r} &= 0, \quad \Rightarrow \\ p[i, j] &= \int_0^1 \int_0^{+\infty} H(x, t) b_{i,5}(x) R_{j,5}(t) w_s(x) w_r(t) dt dx = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 5\end{aligned}\tag{۶۹-۳}$$

که این انتگرال‌ها بوسیله‌ی انتگرال‌گیری گاوس-چبیشف حل می‌شود:

$$p[i, j] = \sum_{k=0}^5 \sum_{l=0}^5 H(x_k, t_l) b_{i,5}(x_k) R_{j,5}(t_l) w_k w_l, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 5\tag{۷۰-۳}$$

شرایط اولیه و مرزی نیز

$$\begin{aligned}(\rho(x), \Phi(x))_{w_s} = 0 &\Rightarrow p[i, 1] := (\rho(x), b_{i,5}(x))_{w_s} = \sum_{k=0}^5 \rho(x_k) b_{i,5}(x_k) w_k = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 5, \\ (\Omega_k(t), \Psi(t))_{w_r} = 0 &\Rightarrow p[k, j] := (\Omega_k(t), R_{j,5}(t))_{w_r} = \sum_{l=0}^5 \Omega_k(t_l) R_{j,5}(t_l) w_l = 0, \quad k = 1, 2, \quad j = 1, \dots, 5,\end{aligned}\tag{۷۱-۳}$$

نهایتاً معادلات (۷۰-۳) و (۷۱-۳) یک دستگاه معادلات خطی به ما می‌دهد.

جدول (۱-۳) نیز خطای مطلق ماکسیموم را برای روش گالرکین و مقادیر مختلف مجاز برای α و جدول (۲-۳) بیشترین میزان خطا را برای روش هم‌محلی با $n=5$ و مقادیر مختلف γ نشان می‌دهند.

جدول (۱-۳): بیشترین میزان خطا برای روش گالرکین و $n=5$, $\beta=0.6$, $\gamma=0.4$ برای مثال ۱.۳

α	T=2	T=10	T=100	CPU time(s)	R_{∞}
1/2	$1/1873 \times 10^{-4}$	$2/1702 \times 10^{-5}$	$2/2841 \times 10^{-7}$	17.082	$5/4121 \times 10^{-5}$
1/4	$1/1849 \times 10^{-4}$	$2/1675 \times 10^{-5}$	$2/2801 \times 10^{-7}$	16.331	$5/4149 \times 10^{-5}$
1/6	$1/1813 \times 10^{-4}$	$2/1588 \times 10^{-5}$	$2/2746 \times 10^{-7}$	16.472	$5/4215 \times 10^{-5}$
1/8	$1/1761 \times 10^{-4}$	$2/1488 \times 10^{-5}$	$2/2675 \times 10^{-7}$	16.256	$5/4321 \times 10^{-5}$

جدول (۲-۳): بیشترین میزان خطا با روش هم محلی و $n=5$, $\beta=0.6$, $\alpha=1.4$ برای مثال ۱.۳

γ	T=2	T=10	T=100	CPU time(s)	R_{∞}
0/2	$1/1524 \times 10^{-4}$	$1/7496 \times 10^{-5}$	$1/7102 \times 10^{-7}$	17.209	$7/4867 \times 10^{-6}$
0/4	$1/1849 \times 10^{-4}$	$2/1657 \times 10^{-5}$	$3/2801 \times 10^{-7}$	15.085	$9/0131 \times 10^{-6}$
0/6	$1/1717 \times 10^{-4}$	$1/4756 \times 10^{-5}$	$2/9772 \times 10^{-7}$	17.471	$7/2619 \times 10^{-6}$
0/8	$1/2221 \times 10^{-4}$	$1/9312 \times 10^{-5}$	$1/9469 \times 10^{-7}$	16.473	$8/9388 \times 10^{-6}$

مثال 2.3 [7] معادله دیفرانسیل جزئی کسری انتشار با توابع $d(x,t) = \Gamma(1.2)x^{1.8}$ (که Γ نیز تابع گامای اوایلر است) و $b(x,t) = 0$ (از این رو $\gamma = 0$) با شرایط اولیه و مرزی

$$u(x,0) = x^2(1-x), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0.$$

فرض کنید جواب دقیق برای جمله منبع مناسب به صورت $u(x,t) = x^2(1-x)e^{-t}$ با $\beta=1$ باشد.

جدول (۳-۳) بیشترین میزان خطای مطلق L_{∞} را برای مقادیر مختلف T, n با روش هم محلی لیست کرده است و همچنین در جدول (۴-۳) برای روش گالرکین این مثال ارائه شده است. نتایج هردو جدول نشان می‌دهد که روش‌های ارائه شده دقت تقریبی خوبی برای بازه زمانی نسبتاً طولانی داشته‌اند.

به منظور تحقیق همگرایی روش‌ها، روش‌ها را برای مقادیر مختلفی از مراتب کسری به کار می‌بریم. جدول (۵-۳) خطای مانده را برای $n=8$ با $\alpha \in (1,2)$ و $\beta \in (0,1)$ با روش هم محلی نشان می‌دهد که به جواب دقیق همگراست. همچنین این همگرایی به جواب دقیق برای مقادیر متفاوت α در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. موقعیتی متشابه برای β نیز وجود دارد. مقایسه‌ی بین روش پیشنهادی و روش لژاندر توصیف شده توسط [7]، در جدول (۶-۳) نمایان شده است، که نتایج عددی این مثال دقت بیشتر روش‌های ما را نسبت به روش تقریبی [7] در $t=1$ و برای $n=5$ بیان می‌کند.

جدول (۳-۳): بیشترین میزان خطا با روش هم محلی و $\alpha=1.8, \beta=1$ برای مثال ۲.۳

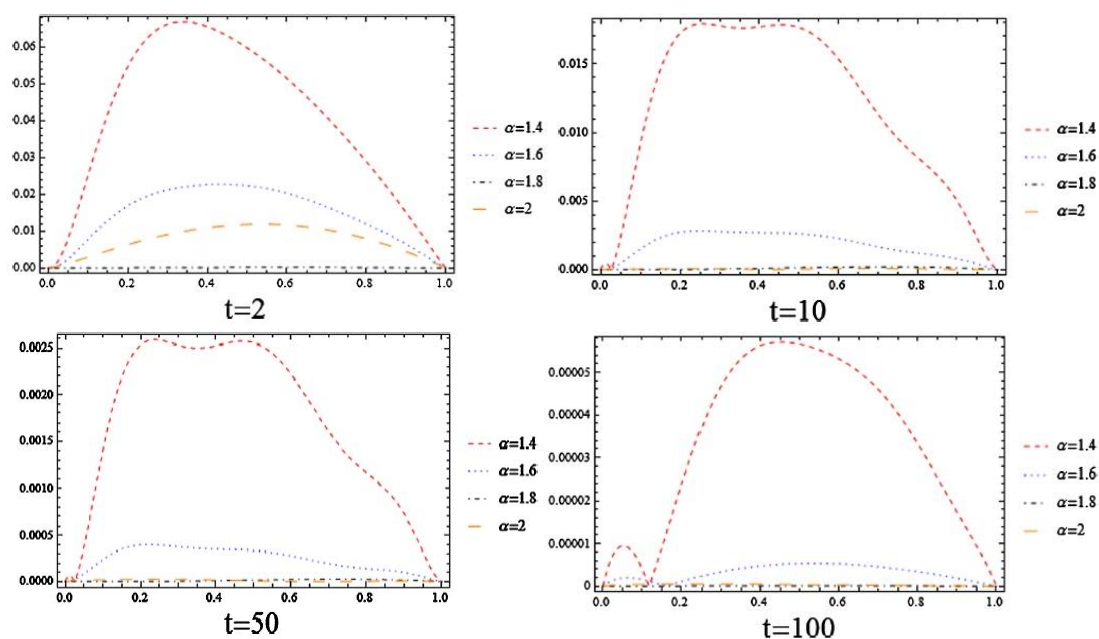
n	T=2	T=1۰	T=1۰۰	CPU time(s)	R_{∞}
5	$5/۰ \times 1۰^{-4}$	$2/5 \times 1۰^{-5}$	$2/۰ \times 1۰^{-7}$	4.37	$7/8232 \times 1۰^{-5}$
8	$1/5 \times 1۰^{-4}$	$1/5 \times 1۰^{-4}$	$1/2 \times 1۰^{-7}$	12.917	$3/5269 \times 1۰^{-8}$
۱۰	$6/۰ \times 1۰^{-6}$	$6/۰ \times 1۰^{-6}$	$1/2 \times 1۰^{-7}$	21.669	$1/6۰27 \times 1۰^{-10}$
16	$4/۰ \times 1۰^{-6}$	$3/۰ \times 1۰^{-6}$	$3/5 \times 1۰^{-10}$	74.458	$2/3252 \times 1۰^{-17}$

جدول (۴-۳): بیشترین میزان خطا برای مثال ۲.۳ با روش گالرکین و $\alpha=1.8, \beta=1$

n	T=2	T=1۰	T=1۰۰	CPU time(s)	R_{∞}
5	$3/۰ \times 1۰^{-3}$	$1/۰ \times 1۰^{-3}$	$5/۰ \times 1۰^{-4}$	4.868	$2/269۰ \times 1۰^{-3}$
8	$8/۰ \times 1۰^{-4}$	$2/۰ \times 1۰^{-4}$	$5/۰ \times 1۰^{-5}$	21.416	$4/7888 \times 1۰^{-6}$
۱۰	$1/5 \times 1۰^{-4}$	$1/5 \times 1۰^{-5}$	$1/2 \times 1۰^{-5}$	53.۰39	$3/138۰ \times 1۰^{-8}$
16	$1/5 \times 1۰^{-6}$	$1/5 \times 1۰^{-6}$	$8/۰ \times 1۰^{-7}$	636.265	$3/6979 \times 1۰^{-15}$

جدول (۵-۳): ماکسیمم خطای مانده برای $n=8$ برای مثال ۲.۳ با روش هم محلی و $\beta \in (0,1)$ و $\alpha \in (1,2)$

β	α	T=2	T=1۰	T=5۰	T=1۰۰	R_{∞}
۰/4	2	$8/۰ \times 1۰^{-3}$	$1/4 \times 1۰^{-2}$	$7/۰ \times 1۰^{-3}$	$5/۰ \times 1۰^{-3}$	$2/6454 \times 1۰^{-8}$
۰/6		$3/۰ \times 1۰^{-3}$	$6/۰ \times 1۰^{-3}$	$2/۰ \times 1۰^{-3}$	$1/5 \times 1۰^{-3}$	$2/5723 \times 1۰^{-8}$
۰/8		$5/۰ \times 1۰^{-3}$	$2/۰ \times 1۰^{-3}$	$5/۰ \times 1۰^{-4}$	$3/۰ \times 1۰^{-4}$	$2/855۰ \times 1۰^{-8}$
1	1/4	$6/۰ \times 1۰^{-2}$	$1/5 \times 1۰^{-2}$	$2/5 \times 1۰^{-3}$	$5/۰ \times 1۰^{-5}$	$9/5567 \times 1۰^{-8}$
	1/6	$2/۰ \times 1۰^{-2}$	$2/5 \times 1۰^{-3}$	$4/۰ \times 1۰^{-4}$	$5/۰ \times 1۰^{-6}$	$4/495۰ \times 1۰^{-8}$
	1/8	$1/5 \times 1۰^{-4}$	$1/5 \times 1۰^{-4}$	$2/۰ \times 1۰^{-5}$	$1/2 \times 1۰^{-7}$	$3/5239 \times 1۰^{-8}$



شکل (۳-۲): بیشترین خطای روش وقتی α به ۲ میل می کند و $\beta = 1$ برای مثال ۲.۳ با $n = m = 8$

جدول (۳-۶): خطای مطلق در $t = 1$ با $\alpha = 1.8, \beta = 1$ و $n = 5$ برای مثال ۲.۳

روش [64]	روش گالرکین پیشنهادی	روش هم محلی پیشنهادی	X
$3/5 \times 10^{-6}$	$5/84791 \times 10^{-7}$	$2/40083 \times 10^{-8}$	0/1
$4/26 \times 10^{-6}$	$8/63544 \times 10^{-7}$	$2/97841 \times 10^{-8}$	0/2
$5/995 \times 10^{-6}$	$9/2933 \times 10^{-7}$	$2/54578 \times 10^{-8}$	0/3
$6/942 \times 10^{-6}$	$8/58172 \times 10^{-7}$	$1/72148 \times 10^{-8}$	0/4
$4/575 \times 10^{-6}$	$7/11067 \times 10^{-7}$	$9/34788 \times 10^{-9}$	0/5
$2/37 \times 10^{-6}$	$5/34071 \times 10^{-7}$	$4/30953 \times 10^{-9}$	0/6
$1/142 \times 10^{-5}$	$3/59841 \times 10^{-7}$	$2/76392 \times 10^{-9}$	0/7
$1/393 \times 10^{-5}$	$2/08591 \times 10^{-7}$	$3/63934 \times 10^{-9}$	0/8
$7/452 \times 10^{-6}$	$8/91471 \times 10^{-7}$	$4/18034 \times 10^{-9}$	0/9

مثال 3.3 [24] معادله دیفرانسیل جزئی کسری پخش را با توابع $d(x, t) = \frac{\Gamma(2.2)}{6} x^{2.8}$, $b(x, t) = 0$ و

شرایط مرزی $u(0, t) = 0$, $u(1, t) = \exp(-t)$, $u(x, 0) = x^3$ در نظر می گیریم. جمله منبع را طوری

در نظر می گیریم که جواب دقیق برای $\beta = 1$ این گونه باشد $u(x, t) = x^3 e^{-t}$.

ماکسیموم خطاهای L_∞ برای مقادیر مختلف T و n برای روش های هم محلی و گالرکین در جداول

(۳-۷) و (۳-۸) به ترتیب ارائه شده است.

توجه کنید که در این جداول و در الگوریتم ها برای دست آوردن جواب عددی، زمان CPU بر حسب ثانیه، محاسبه شده است و هنگامی که دو الگوریتم را برای یک مسئله باهم مقایسه می کنیم، مشاهده می کنیم که روش هم محلی در زمان کوتاه تری نسبت به روش گالرکین عمل می کند.

جدول (۹-۳) ماکسیموم خطای مطلق را برای $n=8$ برای $\alpha \in (1,2)$ و $\beta \in (0,1)$ می دهد. همگرایی روش گالرکین به جواب دقیق از این جدول مشهود است. همچنین، این همگرایی به جواب دقیق برای مقادیر مختلف β که به ۱ میل می کند در شکل (۳-۳) مشهود است. برای α نیز به طور مشابه داریم. برای روش هم محلی در جدول (۳-۱۰) خطای مطلق نیز در $t=1$ آورده شده و با روش طیفی تاو-چیشیف [24] مقایسه شده است که بهتر عمل کردن روش ما را نشان می دهد. شکل (۳-۴) بیشترین میزان خطای مطلق را نیز در $t=1$ و برای $\alpha=1.8, \beta=1$ و $n=5$ برای $x \in [0,1]$ در روش های هم محلی، گالرکین و روش طیفی تاو-چیشیف نشان می دهد.

جدول (۷-۳): بیشترین خطای مطلق با $\alpha=1.8, \beta=1$ با روش هم محلی برای مثال ۳.۳

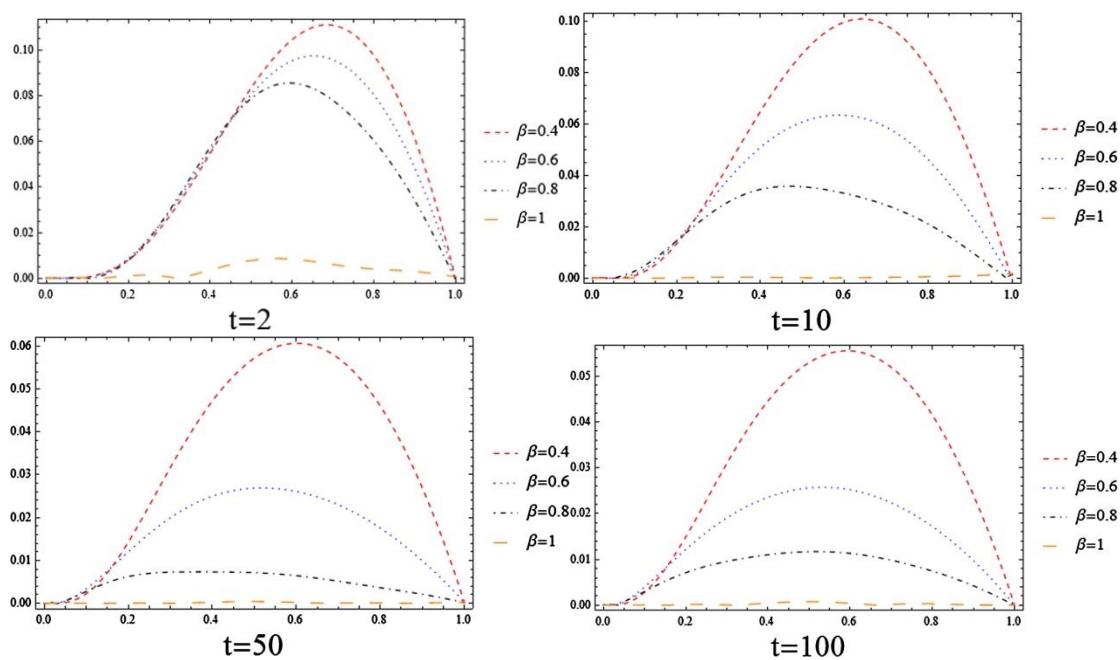
n	T=2	T=10	T=100	CPU time(s)	R_{∞}
5	$4/0 \times 10^{-3}$	$7/0 \times 10^{-4}$	$1/2 \times 10^{-5}$	4.275	$2/3301 \times 10^{-4}$
8	$8/0 \times 10^{-4}$	$1/0 \times 10^{-3}$	$5/0 \times 10^{-6}$	13.009	$8/91987 \times 10^{-7}$
10	$6/0 \times 10^{-5}$	$6/0 \times 10^{-5}$	$4/0 \times 10^{-7}$	22.198	$7/66056 \times 10^{-9}$
16	$2/0 \times 10^{-5}$	$2/0 \times 10^{-5}$	$2/0 \times 10^{-7}$	76.581	$9/8201 \times 10^{-16}$

جدول (۸-۳): بیشترین خطای مطلق با $\alpha=1.8, \beta=1$ با روش گالرکین برای مثال ۳.۳

n	T=2	T=10	T=100	CPU time(s)	R_{∞}
5	$1/5 \times 10^{-2}$	$7/0 \times 10^{-3}$	$2/5 \times 10^{-3}$	5.053	$1/267 \times 10^{-3}$
8	$8/0 \times 10^{-3}$	$1/5 \times 10^{-3}$	$7/0 \times 10^{-4}$	22.385	$2/91652 \times 10^{-6}$
10	$2/5 \times 10^{-3}$	$4/0 \times 10^{-4}$	$3/0 \times 10^{-4}$	53.508	$1/52719 \times 10^{-8}$
16	$1/4 \times 10^{-5}$	$2/0 \times 10^{-5}$	$6/0 \times 10^{-6}$	646.187	$5/1871 \times 10^{-16}$

جدول (9-3): ماکسیموم خطای مانده برای $n=8$ برای مثال 3.3 با روش گالرکین و $\alpha \in (1,2)$ و $\beta \in (0,1)$

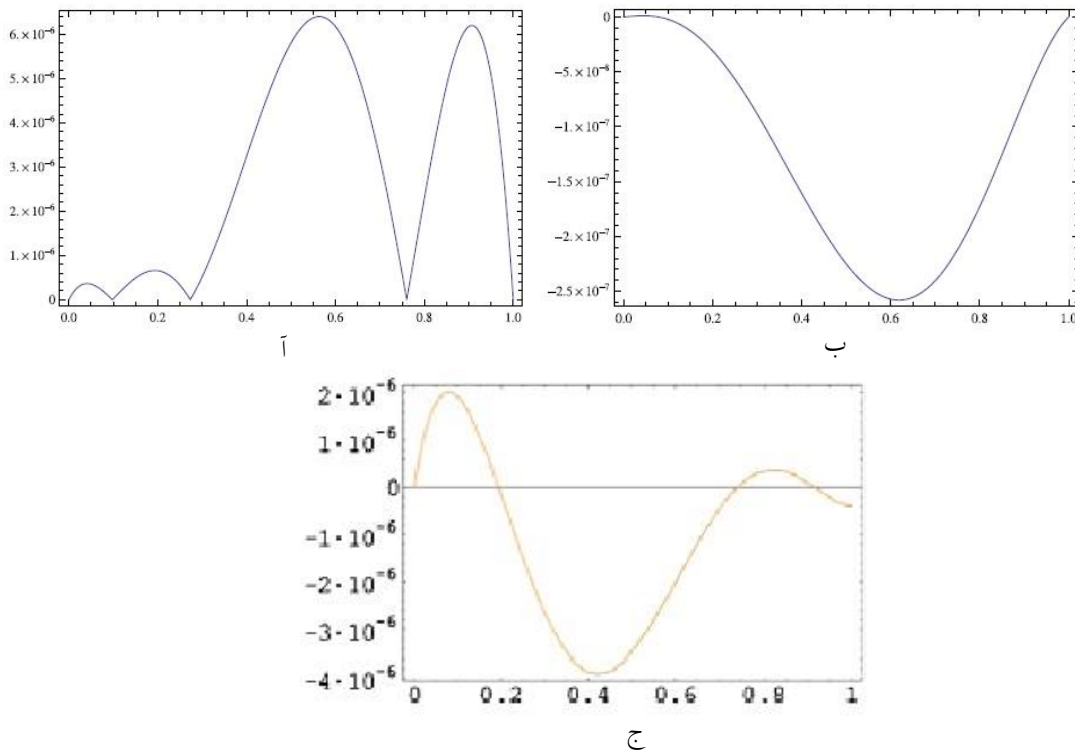
β	α	T=2	T=10	T=50	T=100	R_{∞}
0/4	1/8	$1/0 \times 10^{-1}$	$1/0 \times 10^{-1}$	$6/0 \times 10^{-2}$	$5/0 \times 10^{-2}$	$1/12744 \times 10^{-7}$
0/6		$8/0 \times 10^{-2}$	$6/0 \times 10^{-2}$	$2/5 \times 10^{-2}$	$2/5 \times 10^{-2}$	$3/93491 \times 10^{-7}$
0/8		$8/0 \times 10^{-2}$	$3/5 \times 10^{-2}$	$7/0 \times 10^{-3}$	$1/0 \times 10^{-2}$	$1/60004 \times 10^{-6}$
1	1/3	$4/0 \times 10^{-2}$	$8/0 \times 10^{-3}$	$2/0 \times 10^{-3}$	$1/4 \times 10^{-3}$	$1/36568 \times 10^{-5}$
	1/5	$6/0 \times 10^{-2}$	$8/0 \times 10^{-3}$	$4/0 \times 10^{-3}$	$8/0 \times 10^{-3}$	$2/85066 \times 10^{-5}$
	1/8	$8/0 \times 10^{-3}$	$1/5 \times 10^{-3}$	$4/0 \times 10^{-4}$	$7/0 \times 10^{-4}$	$2/91652 \times 10^{-6}$



شکل (۳-۳): بیشترین خطای روش وقتی β به ۱ میل می کند و $\alpha = 1.8$ برای مثال $n = m = 5$ با $\beta = 0.4, 0.6, 0.8, 1$

جدول (3-1) خطای مطلق در $t = 1$ با $\alpha = 1.8, \beta = 1$ برای مثال 3.3

X	روش هم محلی پیشنهادی	روش گالرکین پیشنهادی	روش [18]
0/1	$2/20576 \times 10^{-9}$	$2/35702 \times 10^{-8}$	$1/930 \times 10^{-6}$
0/2	$3/09058 \times 10^{-8}$	$6/54584 \times 10^{-7}$	$1/434 \times 10^{-7}$
0/3	$8/8553 \times 10^{-8}$	$5/16048 \times 10^{-7}$	$2/644 \times 10^{-6}$
0/4	$1/60935 \times 10^{-7}$	$3/24496 \times 10^{-6}$	$3/862 \times 10^{-6}$
0/5	$2/25077 \times 10^{-7}$	$5/80895 \times 10^{-6}$	$3/466 \times 10^{-6}$
0/6	$2/57137 \times 10^{-7}$	$6/17752 \times 10^{-6}$	$2/012 \times 10^{-6}$
0/7	$2/40314 \times 10^{-7}$	$3/18557 \times 10^{-6}$	$4/571 \times 10^{-7}$
0/8	$1/72743 \times 10^{-7}$	$2/29109 \times 10^{-6}$	$3/391 \times 10^{-7}$
0/9	$7/54001 \times 10^{-8}$	$6/17811 \times 10^{-6}$	$9/767 \times 10^{-8}$



شکل (4-3): خطا در $t=1$ و $n=5, \beta=1, \alpha=1.8$ برای $0 < x < 1$ (آ. روش گالرکین ب. روش هم محلی و ج. روش [24] برای مثال 3.3

مثال 4.3. معادله دیفرانسیل جزئی کسری پخش با مرتبه‌های مشتق $\gamma=0.8$, $\beta=0.6$, $\alpha=1.5$ و

توابع ضریب $b(x,t)=x$, $d(x,t)=t$ در نظر می‌گیریم. جواب دقیق به صورت

$u(x,t)=x(2-x)\exp(-t)+t\exp(-t)$ برای $\beta=1$ با جمله منبع مناسب در نظر گرفته می‌شود. شرایط

اولیه و مرزی به شکل $u(x,0)=x(2-x)$, $u(0,t)=t\exp(-t)$, $u(1,t)=\exp(-t)+t\exp(-t)$

هستند. جدول (3-11) خطای L_∞ را برای روش هم محلی در مقابل مختلف T و n و جدول (3-12)

خطای مطلق را برای روش‌های گالرکین و هم محلی در $x \in (0,1)$, $n=8$, $t=1$ نشان می‌دهد.

جدول (3-11): خطای مطلق با روش هم محلی برای مثال 4.3.

n	T=2	T=10	T=100	CPU time(s)	R_∞
5	$4/0 \times 10^{-3}$	$3/0 \times 10^{-3}$	$2/0 \times 10^{-7}$	15.257	$7/3551 \times 10^{-3}$
8	$7/0 \times 10^{-4}$	$9/0 \times 10^{-3}$	$7/0 \times 10^{-8}$	41.432	$1/2637 \times 10^{-6}$
10	$1/0 \times 10^{-3}$	$3/4 \times 10^{-4}$	$4/0 \times 10^{-9}$	58.343	$2/1779 \times 10^{-9}$
16	$1/0 \times 10^{-4}$	$9/5 \times 10^{-4}$	$8/0 \times 10^{-10}$	217.746	$1/3003 \times 10^{-16}$

جدول (۳-۱۲) : خطای مطلق در $t=1$ و $n=8$ برای مثال ۴.۳.

x	روش گالرکین	روش هم محلی
۰/۱	$2/42738 \times 10^{-11}$	$1/60766 \times 10^{-12}$
۰/۳	$1/20381 \times 10^{-11}$	$1/79642 \times 10^{-11}$
۰/۵	$1/69176 \times 10^{-11}$	$3/06019 \times 10^{-11}$
۰/۷	$6/62043 \times 10^{-12}$	$3/04411 \times 10^{-11}$
۰/۹	$3/01258 \times 10^{-11}$	$1/63679 \times 10^{-11}$

فصل 4

حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری با موجک برنشتاین

۴-۱ مقدمه

موجک‌ها در اواخر دهه ۱۹۸۰ میلادی معرفی شدند و در زمینه های مختلفی از علوم و مهندسی مورد استفاده قرار گرفته اند. پردازش تصاویر و آنالیز عددی از مهم ترین این زمینه ها می باشد.

در این فصل به حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری به شکل زیر می پردازیم:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = F(x, t, u, \frac{\partial^\beta u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial^\mu u}{\partial t^\mu}, \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}), \quad 0 < \beta, \gamma \leq 1, \quad 1 < \alpha, \mu \leq 2, \quad (1-4)$$

که پارامترهای α, β, γ و μ مشتقات مرتبه کسری با شرایط $0 < \beta, \gamma \leq 1, 1 < \alpha, \mu \leq 2$ و تابع مجهول u است.

با استفاده از چندجمله ای های برنشتاین متعامد یکه به ساخت موجک آن می پردازیم و برخی از خواص آن را بررسی می کنیم.

۴-۲ موجک برنشتاین متعامد و خواص آن

موجک‌ها خانواده ای از توابع هستند که از انتقال و اتساع تابعی به نام موجک مادر^۱ ساخته می شوند.

با تغییر پارامترهای انتقال^۲ a و اتساع^۳ b خانواده توابع موجکی $\psi_{a,b}(x)$ به صورت زیر ساخته می شود:

$$\psi_{a,b}(x) = |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad (2-4)$$

اگر پارامترهای a و b را به صورت گسسته $a = \bar{a}_0 k$ و $b = nb_0 \bar{a}_0 k$ محدود کنیم که $a_0 > 1, b_0 > 0$ ، در این صورت خانواده ی گسسته ای از موجک‌ها را به صورت زیر داریم:

$$\psi_{k,n}(x) = |a_0|^{\frac{k}{2}} \psi(a_0^k x - nb_0), \quad k, n \in \mathbb{Z}, \quad (3-4)$$

که $\psi_{k,n}$ یک پایه موجک در $L^2(\mathbb{R})$ تشکیل می دهد. به خصوص وقتی $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ ، $\psi_{k,n}(x)$ یک پایه یکه متعامد تشکیل می دهند. با توجه به چگونگی انتخاب پارامترهای انتقال و اتساع می توان پایه های

¹ Mother wavelet

² Translation

³ Dilation

موجکی با ویژگی های متفاوت ساخت. معمولاً موجک های متعامد به دلیل ساختار ساده و هزینه های محاسباتی کم، بهترین نوع پایه های موجکی برای حل معادلات هستند.

موجک برنشتاین بر روی بازه $[0,1]$ به صورت

$$\psi_{n,m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} b_m(2^k x - n), & \text{if } \frac{n}{2^k} \leq x < \frac{n+1}{2^k}, \\ 0, & \text{O.W.} \end{cases} \quad (4-4)$$

تعریف می شود، که در آن $m = 0, 1, \dots, M$ و $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ یک عدد صحیح مثبت است، و $b_m(x) := b_{m,M}(x)$ که $b_{m,M}(x)$ چندجمله ای برنشتاین متعامد مرتبه M است. بنا به خاصیت تعامد چندجمله ای های برنشتاین نرمال شده، موجک آن نیز دارای این خاصیت است:

$$(\psi_{n,m}, \psi_{i,j}) = \int_0^1 \psi_{n,m}(x) \psi_{i,j}(x) dx = \delta_{ni} \delta_{mj}, \quad (5-4)$$

با توجه به اینکه تابع وزن این توابع یک است، تابع وزن موجک نیز ثابت یک است.

۳-۴ تقریب تابع

مشابه روش های طیفی می توان یک تابع را برحسب پایه های موجک برنشتاین به صورت

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{n,m} \psi_{n,m}(x) = C^T \Psi(x), \quad (6-4)$$

تقریب زد که در آن C و $\Psi(x)$ بردارهای ستونی $\hat{m} = 2^k(M+1)$ به شکل زیر هستند:

$$C = [c_{0,0}, c_{0,1}, \dots, c_{0,M}, c_{1,0}, \dots, c_{1,M}, \dots, c_{2^k-1,0}, \dots, c_{2^k-1,M}]^T, \quad (7-4)$$

$$\Psi(x) = [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,M}, \psi_{1,0}, \dots, \psi_{1,M}, \dots, \psi_{2^k-1,0}, \dots, \psi_{2^k-1,M}]^T.$$

ضرایب بردار C به صورت زیر مفروض است:

$$c_{ij} = (f, \psi_{i,j}) = \int_0^1 f(x) \psi_{i,j}(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad j = 0, 1, \dots, M. \quad (8-4)$$

از طرفی مشاهده می شود که $\{\psi_{n,m}(t) \psi_{n',m'}(t) : n, n' = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad m, m' = 0, 1, \dots, M\}$ تشکیل یک مجموعه متعامد بر روی $[0,1] \times [0,1]$ می دهد:

$$\begin{aligned}
& (\psi_{n,m} \psi_{n',m'}, \psi_{i,j} \psi_{i',j'})_{L^2([0,1] \times [0,1])} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) \psi_{i,j}(x) \psi_{i',j'}(t) dx dt \\
&= \int_0^1 \psi_{n,m}(x) \psi_{i,j}(x) dx \int_0^1 \psi_{n',m'}(t) \psi_{i',j'}(t) dt \\
&= \delta_{ni} \delta_{mj} \delta_{n'i'} \delta_{m'j'}.
\end{aligned} \tag{۹-۴}$$

حال تابع $u \in L^2(R^2)$ که بر روی $[0,1] \times [0,1]$ تعریف شده است را می توان بر حسب بسط زیر نوشت:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} a_{n,m,n',m'} \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t). \tag{۱۰-۴}$$

که می تواند بر حسب مجموع متناهی زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &\approx \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \sum_{n'=0}^{2^k-1} \sum_{m'=0}^M a_{n,m,n',m'} \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) \\
&= \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \psi_{n,m}(x) \left(\sum_{n'=0}^{2^k-1} \sum_{m'=0}^M a_{n,m,n',m'} \psi_{n',m'}(t) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \psi_{n,m}(x) A_{n,m} \Psi(t),
\end{aligned} \tag{۱۱-۴}$$

که ماتریس $A_{n,m}^T$ و $\Psi(t)$ به صورت $2^k(M+1) \times 1$ مفروض است:

$$\begin{aligned}
A_{n,m} &= [a_{n,m,0,0}, a_{n,m,0,1}, \dots, a_{n,m,0,M}, \dots, a_{n,m,2^k-1,0}, a_{n,m,2^k-1,1}, \dots, a_{n,m,2^k-1,M}], \\
\Psi(t) &= [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,M}, \dots, \psi_{2^k-1,0}, \psi_{2^k-1,1}, \dots, \psi_{2^k-1,M}]^T.
\end{aligned} \tag{۱۲-۴}$$

که برای $n = 0, 1, \dots, 2^k - 1$ ، می نویسیم:

$$\begin{aligned}
\Psi_n(x) &= [\psi_{n,0}(x), \psi_{n,1}(x), \dots, \psi_{n,M}(x)], \\
A_n &= [A_{n,0}, A_{n,1}, \dots, A_{n,M}]^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1,
\end{aligned} \tag{۱۳-۴}$$

در این صورت $u(x,t)$ به صورت زیر می توان نوشت:

$$\begin{aligned}
u(x,t) &\approx \sum_{n=0}^{2^k-1} \sum_{m=0}^M \psi_{n,m}(x) A_{n,m} \Psi(t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} \Psi_n(x) A_n \Psi(t) \\
&= \begin{pmatrix} \Psi_0(x) & \dots & \Psi_{2^k-1}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{2^k-1} \end{pmatrix} \Psi(t) \\
&= \Psi^T(x) A \Psi(t),
\end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

که A ماتریس $2^k(M+1) \times 2^k(M+1)$ مفروض است و A_i سطر i ام A است:

$$A = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_{2^k-1} \end{pmatrix} \tag{۱۵-۴}$$

که ضرایب به شکل زیر است:

$$a_{n,m,n',m'} = \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) \psi_{n,m}(x) \psi_{n',m'}(t) dx dt, \quad n, n' = 0, 1, \dots, 2^k - 1, \quad m, m' = 0, 1, \dots, M. \tag{۱۶-۴}$$

۴-۴ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک برنشتاین

در این بخش ابتدا توضیحاتی در مورد توابع پالس بلوکی می‌دهیم و سپس قضیه‌ای در مورد ماتریس انتگرال کسری آن بیان می‌کنیم و با استفاده از آن ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک برنشتاین را ارائه می‌نماییم:

۴-۴-۱ توابع پالس بلوکی

مجموعه توابع پالس بلوکی $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ در بازه $[0,1]$ به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i}{m} \leq x < \frac{i+1}{m}, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \tag{۱۷-۴}$$

با این ویژگی که

$$\varphi_i(x)\varphi_j(x) = \begin{cases} \varphi_i(x), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (۱۸-۴)$$

تابع $u \in L^2[0,1]$ را می‌توان با استفاده از این توابع به این گونه تقریب زد که:

$$u(x) \approx U_m^T \Phi_m(x), \quad U_m = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{m-1} \end{pmatrix}, \quad \Phi_m(x) = \begin{pmatrix} \varphi_0(x) \\ \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_{m-1}(x) \end{pmatrix}, \quad (۱۹-۴)$$

و ضرایب تابع $j = 0, 1, \dots, m-1$ $u_j = m \int_{\frac{j}{m}}^{\frac{j+1}{m}} u(x) dx$ هستند.

قضیه ۱.۴. [58,50] با فرض اینکه J^ν عملگر انتگرال ریمان-لیوویل باشد، داریم

$$J^\nu \Phi_m(x) = \rho_m^\nu \Phi_m(x), \quad (۲۰-۴)$$

که

$$\rho_m^\nu = \frac{1}{m^\nu} \frac{1}{\Gamma(\nu+2)} \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_{m-1} \\ 0 & 1 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \xi_1 & \dots & \xi_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \xi_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (۲۱-۴)$$

ماتریس انتگرال گیری ریمان-لیوویل برای توابع بلوک پالس است که

$$\xi_k = (k+1)^{\nu+1} - 2k^{\nu+1} + (k-1)^{\nu+1}, \quad (k=1, 2, \dots, m-1).$$

۲-۴-۴ ماتریس انتگرال کسری موجک برنشتاین

موجک برنشتاین را می‌توان برحسب مجموعه $\hat{m} = 2^k (M+1)$ تایی از توابع پالس بلوکی نوشت:

$$\Psi(t) = \Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}} \Phi(t), \quad (۲۲-۴)$$

که ماتریس ضرایب موجک $\Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}} = [\Psi(t_1) \ \Psi(t_2) \ \dots \ \Psi(t_{\hat{m}})]$ با نقاط

$$t_i = \frac{2i-1}{2\hat{m}}, \quad i=1, 2, \dots, \hat{m} \text{ مشخص می شود.}$$

هم اکنون با استفاده از ماتریس عملیاتی توابع بلوک پالس، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری موجک برنشتاین را به دست می آوریم. فرض کنید:

$$J^\nu \Psi(t) = P^\nu \Psi(t), \quad (23-4)$$

با استفاده از روابط (25-4) و (22-4) داریم:

$$J^\nu \Psi(t) \approx J^\nu \Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}} \Phi_{\hat{m}}(t) = \Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}} (J^\nu \Phi_{\hat{m}}(t)) \approx \Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}} \rho_{\hat{m}}^\nu (\Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}})^{-1} \Psi(t), \quad (24-4)$$

در نتیجه انتگرال کسری موجک برنشتاین از مرتبه ν به شکل $P^\nu = \Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}} \rho_{\hat{m}}^\nu (\Upsilon_{\hat{m} \times \hat{m}})^{-1}$ است.

در حالت خاص وقتی $k=1, M=2$ و $\nu=0.8$ این ماتریس به صورت زیر است:

$$P^{0.8} = \begin{pmatrix} 0.189 & 0.275 & 0.111 & 0.271 & 0.190 & 0.107 \\ 0.009 & 0.163 & 0.165 & 0.280 & 0.182 & 0.104 \\ -0.007 & -0.032 & 0.075 & 0.122 & 0.070 & 0.042 \\ 0 & 0 & 0 & 0.189 & 0.275 & 0.111 \\ 0 & 0 & 0 & 0.009 & 0.163 & 0.165 \\ 0 & 0 & 0 & -0.007 & -0.032 & 0.075 \end{pmatrix}. \quad (25-4)$$

۴-۵ روش عددی

معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر می گیریم:

$$D_x^{\nu_1} u(x, t) = F(x, t, u, D_x^{\nu_2} u, D_t^{\mu_1} u, D_t^{\mu_2} u), \quad 0 < \nu_2, \mu_2 \leq 1, \quad 1 < \nu_1, \mu_1 \leq 2, \quad (26-4)$$

با شرایط مرزی دیریکله زیر:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_0(x), & u(0, t) &= g_0(t), \\ u(x, 1) &= f_1(x), & u(1, t) &= g_1(t), \end{aligned} \quad (27-4)$$

که توابع f_i و g_i توابع پیوسته روی $[0, 1]$ هستند.

برای حل این مسئله، تابع زیر را تقریب می‌زنیم:

$$\frac{\partial^{v_1+\mu_1} u(x,t)}{\partial x^{v_1} \partial t^{\mu_1}} \approx (\Psi(x))^T U \Psi(t), \quad (28-4)$$

که $U = [u_{ij}]_{\hat{m} \times \hat{m}}$ ماتریس مجهول است که باید به دست بیاوریم. $\Psi(\cdot)$ بردار موجک های برنشتاین می- باشد. با استفاده از عملگر انتگرال گیری ریمان-لیوویل برای مرتبه μ_1 با توجه به متغیر زمان داریم:

$$\frac{\partial^{v_1} u(x,t)}{\partial x^{v_1}} \approx (\Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(t) + \frac{\partial^{v_1} u}{\partial x^{v_1}} \Big|_{t=0} + t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{v_1} u}{\partial x^{v_1}} \right) \Big|_{t=0}. \quad (29-4)$$

با قرار دادن $t=1$ در معادله (29-4) و در نظر گرفتن شرایط مرزی داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^{v_1} u}{\partial x^{v_1}} \right) \Big|_{t=0} \square \frac{\partial^{1+v_1} u(x,t)}{\partial t \partial x^{v_1}} \approx \frac{\partial^{v_1} f_1}{\partial x^{v_1}} - \frac{\partial^{v_1} f_0}{\partial x^{v_1}} - (\Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(1). \quad (30-4)$$

هم اکنون با جایگذاری (30-4) در (29-4) داریم:

$$\frac{\partial^{v_1} u}{\partial x^{v_1}} \approx (\Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(t) - t (\Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) + (1-t) \frac{\partial^{v_1} f_0}{\partial x^{v_1}} + t \frac{\partial^{v_1} f_1}{\partial x^{v_1}}, \quad (31-4)$$

حال با انتگرال گیری از معادله (28-4) با توجه به متغیر x به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^{\mu_1} u}{\partial t^{\mu_1}} \square (P^{v_1} \Psi(x))^T U \Psi(t) + \frac{\partial^{\mu_1} u}{\partial t^{\mu_1}} \Big|_{x=0} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{\mu_1} u}{\partial t^{\mu_1}} \right) \Big|_{x=0}. \quad (32-4)$$

در عبارت (32-4) مقدار $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{\mu_1} u}{\partial t^{\mu_1}} \right) \Big|_{x=0}$ نیز مجهول می‌باشد پس با قرار دادن $x=1$ در (32-4) و در نظر

گرفتن شرایط مرزی، برای این عبارت داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{\mu_1} u}{\partial t^{\mu_1}} \right) \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{\mu_1} u(1,t)}{\partial t^{\mu_1}} - (P^{v_1} \Psi(1))^T U \Psi(t) - \frac{\partial^{\mu_1} u(x,t)}{\partial t^{\mu_1}} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^{\mu_1} g_1(t)}{\partial t^{\mu_1}} - (P^{v_1} \Psi(1))^T U \Psi(t) - \frac{\partial^{\mu_1} g_0(t)}{\partial t^{\mu_1}} \quad (33-4)$$

حال معادله (33-4) را به جای $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{\mu_1} u}{\partial t^{\mu_1}} \right) \Big|_{x=0}$ در معادله (32-4) جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\partial^{\mu_1} u}{\partial t^{\mu_1}} \square (P^{v_1} \Psi(x))^T U \Psi(t) - x (P^{v_1} \Psi(1))^T U \Psi(t) + (1-x) \frac{\partial^{\mu_1} g_0}{\partial t^{\mu_1}} + x \frac{\partial^{\mu_1} g_1}{\partial t^{\mu_1}}. \quad (34-4)$$

نهایتاً از معادله (۳۱-۴) نسبت به متغیر x با مرتبه ν_1 انتگرال گرفته و داریم:

$$u(x, t) = (P^{\nu_1} \Psi(x))^T U \Psi(t) - t(P^{\nu_1} \Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) - x(P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1} \Psi(t) \\ + xt(P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) + H(x, t), \quad (35-4)$$

که تابع H به صورت زیر مفروض است:

$$H(x, t) = g_0(t) + (1-t)(f_0(x) - f_0(0) - xf'_0(0)) + t(f_1(x) - f_1(0) - xf'_1(0)) \\ + x(g_1(t) - g_0(t)) - x(1-t)(f_0(1) - f_0(0) - f'_0(0)) - xt(f_1(1) - f_1(0) - f'_1(0)). \quad (36-4)$$

که می توان این تابع را با $H(x, t) \square \Psi(x)^T H \Psi(t)$ تقریب زد.

بنابراین تابع u به شکل زیر درمی آید:

$$u(x, t) = (P^{\nu_1} \Psi(x))^T U \Psi(t) - t(P^{\nu_1} \Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) - x(P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1} \Psi(t) \\ + xt(P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) + \Psi(x)^T H \Psi(t), \quad (37-4)$$

با انتگرال گیری کسری از (۳۷-۴) از مرتبه های ν_2, μ_2 به ترتیب نسبت به t, x داریم:

$$\frac{\partial^{\nu_2} u}{\partial x^{\nu_2}} \square (P^{\nu_1-\nu_2} \Psi(x))^T U \Psi(t) - t(P^{\nu_1-\nu_2} \Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\nu_2)} x^{1-\nu_2} (P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) \\ + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\nu_2)} x^{1-\nu_2} t(P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) + (P^{\nu_2} \Psi(x))^T H \Psi(t), \quad (38-4)$$

$$\frac{\partial^{\mu_2} u}{\partial t^{\mu_2}} \square (P^{\nu_1} \Psi(x))^T U P^{\mu_2} \Psi(t) - \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\mu_2)} t^{1-\mu_2} (P^{\nu_1} \Psi(x))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) - x(P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1-\mu_2} \Psi(t) \\ + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\mu_2)} xt^{1-\mu_2} (P^{\nu_1} \Psi(1))^T U P^{\mu_1} \Psi(1) + \Psi(x)^T H P^{\mu_2} \Psi(t), \quad (39-4)$$

با جایگذاری معادلات (۳۱-۴) تا (۳۹-۴) در (۲۶-۴) و قراردادن نقاط هم محلی

$$x_i, t_i = \frac{2i-1}{2\hat{m}}, \quad i=1, 2, \dots, \hat{m}$$

در معادلات به دست آمده، یک دستگاه غیرخطی جبری به دست می-آوریم که می توان با یک روش تکراری مانند نیوتن حل کرد.

توجه کنید در صورتی که شرایط مرزی تغییر کند مثلاً به صورت

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) = g_0(t), \quad u(1, t) = g_1(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (40-4)$$

باشد، فرایند کار مشابه است.

حال اگر بخواهیم الگوریتمی برای این فصل ارائه کنیم، به این شرح است که:

۱- مقادیر مفروض در مسئله مانند مشتقات کسری v_1, μ_1, v_2, μ_2 ، توابع ثابت شرایط اولیه و مرزی

f_0, f_1, g_0, g_1 و همچنین مقدار k, M که به ازاء آن مسئله باید حل شود را وارد نمایید.

۲- چند جمله‌ای‌های برنشتاین متعامد نرمال شده $b_{n,M}(x)$ $n=0,1,\dots,M$ را ساخته و بردار موجک

$$\Psi(x) = [\psi_{0,0}, \psi_{0,1}, \dots, \psi_{0,M}, \psi_{1,0}, \dots, \psi_{1,M}, \dots, \psi_{2^k-1,0}, \dots, \psi_{2^k-1,M}]^T$$

در نظر بگیرید.

۳- ماتریس $2^k(M+1)$ بعدی $A=[a_{ij}]$ را برای مجهول مسئله در نظر بگیرید.

۴- تابع $H(x,t)$ را مطابق ضابطه (۴-۳۶) به دست آورده و ضرایب ماتریسی آن را $H=[h_{ij}]$ با

استفاده از (۴-۱۶) محاسبه کنید.

۵- ماتریس ضرایب موجک $Y_{\hat{m} \times \hat{m}}$ را تشکیل داده و سپس با استفاده از آن و ماتریس عملیاتی انتگرال

کسری بلوک پالس به محاسبه‌ی ماتریس عملیاتی انتگرال کسری P^z به ازاء

$$z = v_1, \mu_1, \mu_2, v_1 - v_2, 1 - v_2, \mu_1 - \mu_2, 1 - \mu_2$$

۶- معادلات (۴-۳۱)، (۴-۳۴)، (۴-۳۵)، (۴-۳۸) و (۴-۳۹) را تشکیل دهید و در (۴-۲۶) جایگذاری

کنید.

۷- با جایگذاری نقاط هم‌محلی $i=1,2,\dots,\hat{m}$ $x_i = t_i = \frac{2i-1}{2\hat{m}}$ در (۴-۲۶) حاصله‌ی بالا، به یک

دستگاه معادلات جبری غیرخطی می‌رسید که می‌توانید آن را با یک روش تکراری مانند نیوتن حل

کنید.

۸- و نهایتاً جواب را به صورت $u(x,t) \approx \Psi(x)^T A \Psi(t)$ به دست خواهید آورد.

۹- برای محاسبه خطا، از شکل گسسته L_∞ در زمان‌های متفاوت $T=1,2,10,50,100$ به صورت زیر

استفاده کنید:

$$L_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x,T) - U(x,T)| \approx \max_{0 \leq j \leq N} |u(x_j,T) - U(x_j,T)|.$$

۴-۶ مثال های عددی

در این بخش، کارایی روش ارائه شده را با ذکر مثال توصیف می‌کنیم.

مثال 1.4 [38] معادله‌ی دیفرانسیل جزئی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^{3/2} u(x,t)}{\partial x^{3/2}} + \frac{\partial^{3/4} u(x,t)}{\partial x^{3/4}} + \frac{\partial^{4/3} u(x,t)}{\partial t^{4/3}} + u(x,t) = f(x,t),$$

با تابع معلوم $f(x,t) = x^2 + t + 4\sqrt{\frac{x}{\pi}} + \frac{16\sqrt{2}\Gamma(3/4)}{5\pi}$ و شرایط اولیه و مرزی

$$u(x,0) = x^2, \quad u(x,1) = x^2 + 1, \quad u(0,t) = t, \quad u(1,t) = 1+t,$$

و جواب دقیق $u(x,t) = x^2 + t$ برای این مسئله است.

جدول (۱-۴) خطای مطلق را برای مقادیر متفاوتی از $\hat{m}$ در نقاط متفاوتی نشان می‌دهد. به منظور مقایسه روش ارائه شده در [38] روش موجک لژاندر، در جدول (۲-۴) مقدار خطای مطلق ارائه شده است، که مقدار دقت جواب را به جواب دقیق نسبت به [38] نشان می‌دهد.

جدول (۱-۴): خطای مطلق برای مقادیر مختلف $\hat{m}$ برای مثال ۱.۴

(x,t)	$\hat{m} = 6$	$\hat{m} = 8$	$\hat{m} = 16$
(0/2,0/2)	$2/77 \times 10^{-17}$	$2/77 \times 10^{-17}$	$2/77 \times 10^{-17}$
(0/4,0/4)	0	$1/11 \times 10^{-16}$	0
(0/6,0/6)	0	$2/22 \times 10^{-16}$	$1/11 \times 10^{-16}$
(0/8,0/8)	$2/22 \times 10^{-16}$	$1/55 \times 10^{-15}$	$1/99 \times 10^{-14}$

جدول (۲-۴): مقایسه خطای مطلق برای مثال ۱.۴ در $\hat{m} = 12$

t	t=0/1	t=0/3	t=0/5	t=0/7	t=0/9
روش موجک لژاندر [38]	$4/9 \times 10^{-5}$	$1/47 \times 10^{-6}$	$2/28 \times 10^{-6}$	$1/17 \times 10^{-6}$	$6/45 \times 10^{-6}$
روش موجک برنشتاین	$1/11 \times 10^{-16}$	$2/22 \times 10^{-16}$	$2/66 \times 10^{-15}$	$6/66 \times 10^{-16}$	$4/21 \times 10^{-15}$

مثال 2.4 [21,71,64]. معادله دیفرانسیل جزئی کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + x \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t),$$

با تابع $f(x,t) = 2x^2 + 2t^\alpha + 2$ و شرایط اولیه و مرزی زیر:

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}, \quad u(1, t) = 1 + \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$. u(x, t) = x^2 + \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} \quad \text{با جواب دقیق}$$

این مسئله برای $\hat{m} = 6$ در مقادیر مختلف α حل شده است و نتایج در جدول (۴-۳) ارائه شده است. روش پیشنهادی با روش‌های سینک_لژاندر [64] و موجک هار [21] و موجک چبیشف [71] در جدول (۴-۴) مقایسه شده است و همچنین نتایج خطای مطلق در مقادیر $\hat{m} = 8, 10, 12$ و به ازای $\alpha = 0.1$ در شکل (۴-۱) نشان داده شده است.

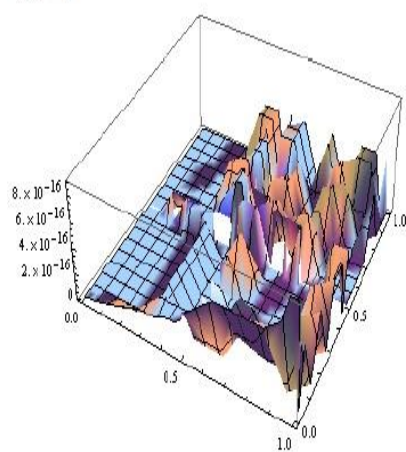
جدول (۴-۳): خطای مطلق به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۲.۴ در $\hat{m} = 6$

(x,t)	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.7$	$\alpha = 0.9$
(0/2, 0/2)	o	o	o	o	$1/39 \times 10^{-17}$
(0/4, 0/4)	o	$2/22 \times 10^{-16}$	o	o	$2/77 \times 10^{-16}$
(0/6, 0/6)	o	$2/22 \times 10^{-16}$	$2/22 \times 10^{-16}$	o	$4/44 \times 10^{-16}$
(0/8, 0/8)	o	$4/44 \times 10^{-16}$	o	o	$1/99 \times 10^{-15}$

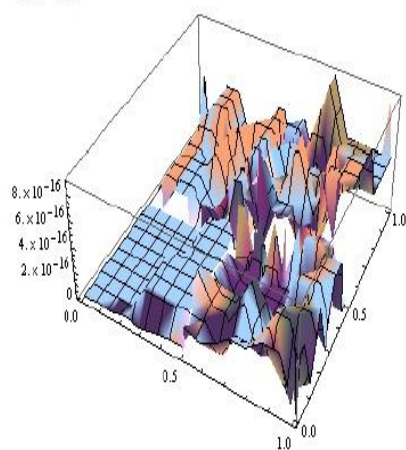
جدول (۴-۴): مقایسه خطای مطلق در $t = 0.5$ برای مثال 2.4

x	روش پیشنهادی	روش سینک- [64]	موجک هار [21]	موجک چبیشف [71]
	$\hat{m} = 6$	لژاندر	$\hat{m} = 64$	نوع سوم
		$\hat{m} = 25$		$\hat{m} = 6$
0/1	o	$6/46 \times 10^{-6}$	$1/21 \times 10^{-3}$	$1/11 \times 10^{-16}$
0/2	$1/11 \times 10^{-16}$	$1/57 \times 10^{-5}$	$1/29 \times 10^{-3}$	$1/11 \times 10^{-16}$
0/3	o	$2/27 \times 10^{-5}$	$1/86 \times 10^{-3}$	$2/22 \times 10^{-16}$
0/4	o	$2/67 \times 10^{-5}$	$7/41 \times 10^{-3}$	$2/22 \times 10^{-16}$
0/5	$2/22 \times 10^{-16}$	$2/75 \times 10^{-5}$	$1/00 \times 10^{-6}$	o
0/6	o	$2/53 \times 10^{-5}$	$7/46 \times 10^{-3}$	o
0/7	o	$2/03 \times 10^{-5}$	$1/72 \times 10^{-3}$	$2/22 \times 10^{-16}$
0/8	o	$1/32 \times 10^{-5}$	$4/99 \times 10^{-3}$	o
0/9	$2/22 \times 10^{-16}$	$4/65 \times 10^{-6}$	$1/67 \times 10^{-2}$	o

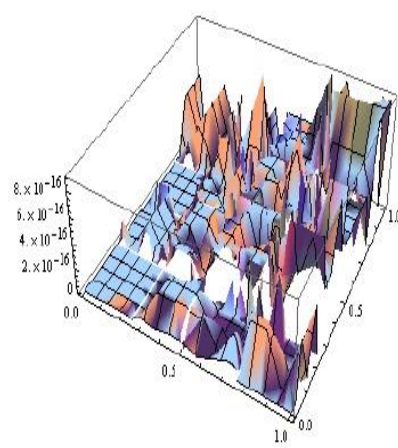
$m = 8$



$m = 10$



$m = 12$



شکل (۴-۱): خطای مطلق برای مثال 2.4 در مقادیر متفاوت $\hat{m}$ و $\alpha = 0.1$

فصل ۵

نتیجه گیری و پیشنهادات

معادلات دیفرانسیل جزئی با مشتقات کسری کاربردهای فراوان دارند. به عنوان مثال، حرکت سیارات، حرکت موشک ها در نزدیکی سطح زمین و در فضا، بسیاری از مسائل فیزیک، همین طور در مواردی چون واپاشی رادیواکتیو و بعد از فرمول بندی به زبان ریاضی به معادلات دیفرانسیل تبدیل می شوند. باتوجه به اهمیت و کاربردهای زیاد آن ها مطالعه، بررسی و به دست آوردن جواب آن ها از اهمیت زیادی برخوردار است.

در این فصل، بر اساس یافته های فصل 2، 3 و 4 به نتیجه گیری و مقایسه یافته های این پژوهش با سایر پژوهشهای مرتبط خواهیم پرداخت و در انتها پیشنهادهایی برای پژوهش های آینده ارائه می شود. آنچه از یافته های این سه فصل بدست می آید این است که:

5-1 نتیجه گیری یافته های پژوهش

در این رساله، با به کار بردن چند جمله ای های چیشف و نظیر گویا شده آن و ترکیب مناسبی از آن به حل معادلات دیفرانسیل کسری انتقال-پخش پرداختیم. برای تخمین خطای تابع باقی مانده، یک کران خطا برای مشتق مرتبه صحیح و یک کران خطا برای مشتق کسری به دست می آید. راحتی و کاربرد روش پیشنهاد شده در نتایج به دست آمده نشان داده شده است. به طور کلی برای تأیید نتایج نظری، مثال های عددی ارائه کردیم و ملاحظه نمودیم که روش ارائه شده در مدت زمان نسبتاً طولانی نسبت به سایر روش ها بهتر عمل کرده است در حالی که ناپایداری سایر روش ها در مدت زمان طولانی نشان داده شده است.

همچنین، روش های عددی موثری برای حل معادله پخش کسری وابسته به زمان و مکان با شرایط اولیه و مرزی ارائه شده است. برای این دسته از مسائل که روی دامنه زمانی نامتناهی تعریف شده اند، ما متوصل به توابع گویا شدیم و روابط جدیدی براساس پایه چند جمله ای های برنشتاین متعامد نرمال شده که توابع گویا شده متناظر آن است، به دست آوردیم. با استفاده از ترکیبی مناسب از عناصر پایه برنشتاین و گویاشده نظیر، روش های گالرکین و هم محلی را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری انتقال-پخش معرفی کردیم. ویژگی های پایه معرفی شده را نیز بررسی کردیم و زمان اجرای دو روش هم محلی و گالرکین را مقایسه نموده که در هنگام اجرای دو روش با تعداد جمله یکسان، روش هم محلی نتایج بهتری در زمان کوتاه تری ارائه می دهد. البته این نکته که این روش نسبت به نقاط انتخابی حساس است را نباید فراموش کرد ولی با این وجود، ویژگی راحتی در اجرا این روش را کارا تر کرده است. به طور کلی، نتایج نشان می دهد

که روش های پیشنهادی دقت تقریبی بیشتری را نسبت به سایر روش ها به خصوص برای دامنه طولانی مدت به دست می آورند.

در انتها ضمن معرفی موجک جدید برنشتاین از چندجمله ای های برنشتاین متعامد نرمال شده با استفاده از ویژگی های آن ها، به محاسبه ی ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان_لیوویل پرداختیم و به کمک آن حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری مورد بررسی قرار گرفت. نتایج عددی برای مثال های ارائه شده در مقایسه با روش های دیگر ارائه شده نشان می دهد که روش پیشنهادی ما در این مورد بهتر عمل کرده است.

۲-۵ پیشنهادهایی برای پژوهش های آینده

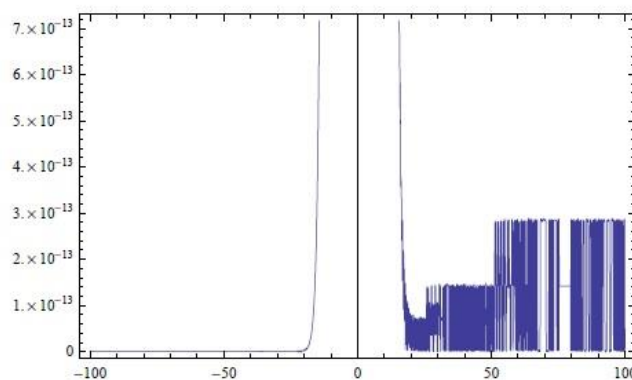
در پژوهش های آتی خویش در نظر داریم به حل معادلات دیفرانسیل معمولی و کسری با تغییر نگاشت در برنشتاین ها متناسب با بازه خواسته شده پردازیم که برای دستیابی به این هدف اگر حل معادلات در بازه بی نهایت را در نظر داشته باشیم، می توان با تغییر نگاشت نمایی $\frac{\exp(x)}{\exp(x)+1}$ بازه $(-\infty, +\infty)$ را به $[0,1]$ تبدیل کرد. در این راستا توابعی به نام توابع برنشتاین نمایی به صورت زیر پیشنهاد می دهیم:

$$E_{i,n}(x) = B_{i,n}\left(\frac{\exp(x)}{\exp(x)+1}\right) \quad (۱-۵)$$

که با استفاده از ماتریس های عملیاتی می توان به حل معادله دیفرانسیل معمولی و جزئی پرداخت. به عنوان نمونه به دو مثال زیر اشاره می کنیم که جواب به دست آمده از آن با استفاده از این توابع دقیق بوده است. مثال 1.5. [61] معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\left(\frac{d^3}{dx^3} - 1\right)y(x) = g(x) \quad y(x) \rightarrow 0 \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (۲-۵)$$

با جواب دقیق $y(x) = \sec(x)$. شکل (۱-۵) در بازه $[-100, 100]$ مقدار خطای این روش را نشان می دهد.



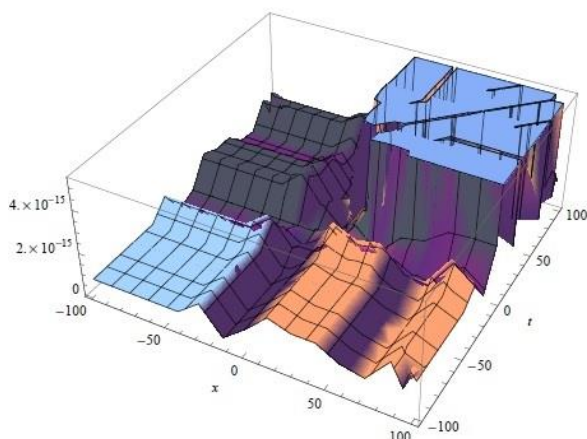
شکل (۱-۵): خطای مطلق برای مثال ۵.۱

مثال 2.5. [44] معادله دیفرانسیل جزئی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{2}{1+\exp(x)} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{4\exp(t)}{(1+\exp(x))^2(1+\exp(t))^2}, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial t} = u(x,0) = 0 \quad x, t \in (-\infty, +\infty),$$

(۲-۵)

با جواب دقیق $u(x,t) = \frac{\exp(x+t) - \exp(x) - \exp(t) + 1}{(\exp(x)+1)(\exp(t)+1)}$ شکل (۲-۵) مقدار خطای مطلق را برای این روش نشان می‌دهد.



شکل (۲-۵): خطای مطلق برای مثال ۲,۵

که البته بحث پایداری و همگرایی آن از لحاظ آنالیز خطا باید به طور مفصل انجام شود. از طرفی آنالیز خطا برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری با استفاده از موجک برنشتاین نرمال شده مبحثی پیرامون صحت و تایید برتری این روش نسبت به سایر روش‌هاست که باید مورد بررسی قرار گیرد.

و نهایتاً حل دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی و همچنین دستگاه معادلات انتگرال_دیفرانسیل کسری با روش‌های پیشنهادی را می‌توان ارائه کرد که گام موثری در کامل نمودن بحث و کارایی آن دارد.

1. M. H. T. Alshbool, A.S. Bataineh, I. Hashim, Osman Rasit Isik, Solution of fractional- order differential equations based on the operational matrices of new fractional Bernstein functions, Volume 29, Issue 1, January 2017, 1-18.
2. M. H. T. Alshbool, I. Hashim, Multistage Bernstein polynomials for the solutions of the Fractional Order Stiff Systems, Volume 28, Issue 4, October 2016, 280-285.
3. A. Ahmadian, M. Suleiman, S. Salahshour, An operational matrix based on Legendre polynomials for solving fuzzy fractional order differential equations, Abstr. Appl. Anal. 29 (2013) 505-903.
4. G. A. Anastassiou, I. K. Argyros, Sunil Kumar, Monotone Convergence of Extended Iterative Methods and Fractional Calculus with Applications, Fundamenta Informaticae 151 (2017) 241-253.
5. K. E. Atkinson, W. Han, Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework, vol. 39, Springer, 2009.
6. M. Alipour, D. Rostamy, D. Baleanu, Solving multi-dimensional FOCs with inequality constraint by BPs operational matrices, J. of Vibration and Control 19(16), 2523-2540 (2013).
7. S. R. Alavizadeh, F. M. Maalek Ghaini, Numerical solution of fractional diffusion equation over a long time domain, Applied Mathematics and Computation 263 (2015) 240-250.
8. M. A. Akinlar, A. Secer, M. Bayram, Numerical Solution of Fractional Benney Equation, Applied Mathematics and Information Sciences, An International Journal, 8 (2014) 1-5.
9. H. Azizi, G.B. Loghmani, Numerical approximation for space fractional diffusion equations via Chebyshev finite difference method, J. Fract. Calc. Appl. 4 (2013) 303-311.

10. S. R. Alavizadeh, F.M. Ghaini, An efficient operational matrix method for solving telegraph equations in a long time period, Indian J. Fundame. Appl. Life Sci. 5 (2015) 5178-5188.
11. R. F. Bass, Real analysis for graduate students, Second edition, 2011.
12. F. Ben Adda, Geometric interpretation of the fractional derivative, J. Fract Calc, 11:21- 51, 1997.
13. A.H. Bhrawy, M.A. Zaky, A method based on the Jacobi Tau approximation for solving multi-term time space fractional partial differential equations, J. Comput. Phys. 281(2015) 876-895.
14. A. H. Bhrawy, M. A. Zaky, R. A. Van Gorder, A space-time Legendre spectral Tau method for the two-sided space-time Caputo fractional diffusion-wave equation, Springer Science Business Media, New York, 2015.
15. J. Boyd, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, 2nd Edition, Dover, New York, 2000.
16. M. A. Bellucci, On the explicit representation of orthonormal Bernstein polynomials, Department of Chemical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, U.S.A.
17. J.P. Boyd, The optimization of convergence for Chebyshev polynomials methods in an unbounded domain, J. Comput. Phys. 45(1982)43-79, 10,11,14.
18. M. A. Bellucci, On the explicit representation of orthonormal Bernstein polynomials, Department of Chemical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, U.S.A.
19. C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral methods in fluid dynamic, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
20. W. Chen, L. Ye, H. Su, Fractional diffusion equations by the Kansa method, Comput. Math. Appl. 59(2010) 1614-1620.
21. Y. Chen, Y. Wu, Y. Cui, Z. Wang, D. Jin, Wavelet method for a class of fractional convection - diffusion equation with variable coefficients, J. Comput. Sci. 1 (2010) 146-149.

22. E. F. Doungmo Goufo, Sunil Kumar, Shallow Water Wave Models with and without Singular Kernel: Existence, Uniqueness, and Similarities, *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, Article ID 4609834, 9.
23. E.H. Doha, A.H. Bhrawy, M. A. Saker, On the derivatives of Bernstein polynomials, An application for the solution of high even-order differential equations, *Boundary Value Problems*, 1-16, doi:10.1155/2011/829543, 2011.
24. E. H. Doha, A. H. Bhrawy, S. S. Ezz-Eldien, Numerical approximations for fractional diffusion equations via a Chebyshev spectral-Tau method, *Cent. Eur. J. Phys.* DOI: 10.2478/s11534-013-0264-7.
25. K. Diethelm, *The analysis of fractional differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
26. A. S. Elwakil, Fractional-order circuits and systems: an emerging interdisciplinary research area, *IEEE Circuits and Systems Magazine*. 10 (4)(2010) 40-50.
27. G. E. Farin, J. Hoschek, M.S. Kim, *Handbook of computer aided geometric design*, Elsevier, Amsterdam, 2002.
28. R.T. Farouki, V.T. Rajan, Algorithms for polynomials in Bernstein form, *Comput. Aided Geom. Des.* 5 (1988) 1-26.
29. R.T. Farouki, T.N.T. Goodman, On the optimal stability of the Bernstein basis, *Math. Comput.* 64 (1996) 1553-1566.
30. R. T. Farouki, On the stability of transformations between power and Bernstein polynomial forms, *Comput. Aided Geom. Des.* 8, 29-36, 1991.
31. R. A. Frazer, W. P. Jones, S.W. Skan, Approximations to functions and to the solutions of differential equations, *ARC R&M*, 1799,1937. 4-6.

32. B.Y. Guo, J. Shen, Z.Q. Wang, A rational approximation and its applications to differential equations on the half line, *J. Sci. Comput.* 15(2)(2000) 117-147.
33. B.Y. Guo, J. Shen, Z.Q. Wang, Chebyshev rational spectral and pseudospectral methods on a semi-infinite interval. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2000.
34. B. Y. Guo, *Spectral Methods and their Applications*, World Scientific Publishing Co, Singapore, 1998.1.
35. D. Gottlieb, M.Y. Hussaini, S. Orszag, in: R. Voigt, D. Gottlieb, M. Y. Hussaini(Eds.), *Theory and applications of spectral methods in spectral methods for partial differential equations*, SIAM, Philadelphia, 1984.
36. H. F. Harmuth, *Transmission of Information by Orthogonal Functions*, Second ed., Springer-Verlag, New York, Heidelberg, 1972.
37. J. He, Approximate an analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media, *Comput. Methods, Appl. Mech. Eng.* 167(1998) 57-68.
38. M. H. Heydari, M. R. Hooshmandasl, F. Mohammadir, Legendre wavelets method for solving fractional partial differential equations with Dirichlet boundary conditions, *Appl. Math. Comput.* 234 (2014) 267-276.
39. M. Jani, E. Babolian, S. Javadi, D. Bhatta, Banded operational matrices for Bernstein polynomials and application to the fractional advection-dispersion equation, *Numer. Algor*, 75(4), 1041–1063, 2017.
40. S. Javadi, M. Jani, E. Babolian, A numerical scheme for space time fractional advection- dispersion equation, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* 7, 331-343, 2016.
41. M. Kurulay, M. Bayram, Comparison of numerical solutions of time-fractional reaction- diffusion equations, *Malays. J. Math. Sci.* 6 (2012) 49-59.

42. M. Khader, On the numerical solutions for the fractional diffusion equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 16 (6) (2011) 2535-2542.
43. M. M. Khader, N.H. Sweilam, A.M.S. Mahdy, An efficient numerical method for solving the fractional diffusion equation, *J. Appl. Math. Bioinform.* 1 (2011) 1-12.
44. A. B. Koc and A. Kurnaz, A new kind of double Chebyshev polynomial approximation on unbounded domains, *Boundary value problems*, (2013) 10.
45. A. Kumar, S. Kumar, S.P. Yan, Residual Power Series Method for Fractional Diffusion Equations, *Fundamenta Informaticae* 151 (2017) 213- 230.
46. J. Kemppainen, Existence and uniqueness of the solution for time fractional diffusion equation with Robin boundary condition, *Abstr. Appl. Anal.* Article ID 321903(2011)11.
47. S. Kumar, A. Kumar, I. K. Argyros, A new analysis for the Keller Segel model of fractional order, *Numerical Algorithms*, DOI: 10.1007/s11075- 016 0202 z(2016), 1-16.
48. S. Kumar, A. Kumar, Z. Odibat, A nonlinear fractional model to describe the population dynamics of two interacting species, *Mathematical Methods in Applied Sciences*, DOI: 10.1002/mma.4293.
49. Y. Luchko, R. Gorneo, The initial value problem for some fractional differential equations with the Caputo derivative. Preprint series A0898, Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, 1998.
50. Y. Li, N. Sun, Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix, *Comput. Math. Appl.* 62 (2011) 1046-1054.
51. F. Mainardi, Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics, in: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer- Verlag, New York, 1997, 291-348.

52. K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, R. Ezzati, A new approach to the numerical solution of Volterra integral equations by using Bernstein approximation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16, 647-655, 2011.
53. K. Maleknejad, B. Basirat, E. Hashemizadeh, A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra - Fredholm integro-differential equations, *Math. Comput. Modelling.* 55 (2012) 1363-1372.
54. S. Mashayekhi, M. Razzaghi, Numerical solution of distributed order fractional differential equations by hybrid functions, *J. Comput. Phys.* 315 (2016) 169 -181.
55. K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, with an Annotated Chronological Bibliography by Bertram Ross, Mathematics in Science and Engineering Vol. 111, Academic Press [a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York London, 1974.*
56. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations, Academic Press, SanDiego, 1999.*
57. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198, Academic Press, 1998.*
58. R. Pandey, A. Bhaedwaj, M. I. Syam, An efficient method for solving fractional differential equations using Bernstein polynomials, *J. Fract. Calc. Appl.* 5 (1) (2014) 129-145.
59. R. K. Pandey, N. Kumar, Solution of Lane-Emden type equations using Bernstein operational matrix of differentiation, *New Astronomy* 17, 303-308, 2012.
60. D. Rostamy, K. Karimi, Bernstein polynomials for solving fractional heat-and wave-like equations, *Fractional calculus and applied analysis*, 15 (4) (2012) 556 -571.

61. M.A. Ramadan, K.R. Raslan, T.S. El Danaf and M.A. Abd El Salam, On the exponential Chebyshev approximation in unbounded domains: A comparison study for solving high-order ordinary differential equations, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 105(3) (2015) 399-413.
62. R. Ren, H. Li , W. Jiang, M. Song, An efficient Chebyshev-Tau method for solving the space fractional diffusion equations, *Applied Mathematics and Computation* 224 (2013) 259-267.
63. A. Saadatmandi, M. Dehghan, A new operational matrix for solving fractional order differential equations, *Comput. Math. Appl.* 59, 1326-1336, 2010.
64. A. Saadatmandi, M. Dehghan, M. R. Azizi, The Sinc Legendre collocation method for a class of fractional convection - diffusion equations with variable coefficients, *Commun. Nonlinear Sci.* 17 (2012) 4125-4136.
65. J. C. Slater, Electronic energy bands in metals, *Phys. Rev.* 45 (1934) 794-801. 4,6.
66. J. Shen, T. Tang, L. Wang, *Spectral methods, algorithms, analysis and applications*, Springer, 2010.
67. S. Saha Ray, A. K. Gupta, Numerical Solution of Fractional Partial Differential Equation of Parabolic Type With Dirichlet Boundary Conditions Using Two-Dimensional Legendre Wavelets Method, *J. Comput. Nonlinear Dynam* 11 (2015) 011-012.
68. C. Tadjeran, M. M. Meerschaert, H. P. Scheffer, A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, *J. Comput. Phys.* 213 (1) (2006) 205-213.
69. V.V. Uchaikin (2118) *Fractional derivatives for physicists and engineers, Volume I. Background and theory*, Springer (Berlin), Higher Education Press (Beijing).
70. Y. Xing, X. Wu, Z. Xu, Multiclass least squares auto-correlation wavelet support vector machines, *ICIC Express Letters.* 2 (4) (2008) 345-350.

71. F. Zhou, X. Xu, The third kind Chebyshev wavelets collocation method for solving the time - fractional convection diffusion equations with variable coefficients, Appl. Math. Comput. 280 (2016) 11-29.

واژه نامه

Accuracy	دقت
Advection	انتقال
Adomian decomposition method.....	روش تجزیه آدومیان
Approximate solution.....	جواب تقریبی
Basis free	مستقل از پایه
Bernstein polynomials.....	چند جمله ای های برنشتاین
Boundary value problems	مسائل مقدار مرزی
Classic calculus.....	حسابان کلاسیک
Comparison.....	مقایسه
Caputo derivative	مشتق کاپوچو
Cauchy integral formula	فرمول انتگرال کوشی
Chebyshev-Gauss-Ruda.....	چبیشف_گوس_رادو
Condition of matrix	عدد وضعیت ماتریس
Diffusion	پخش
Diffusion fractional differential equation	معادله دیفرانسیل کسری پخش
Dilation.....	اتساع
Exact solution	جواب دقیق
Finite Difference Method.....	روش تفاضلات متناهی
Finite Elements Method.....	روش عناصر متناهی
Fractional calculus	حسابان کسری
Fractional partial differential equation	معادله دیفرانسیل جزئی کسری
Galerkin method	روش گالرکین
Gram-Schmidt orthogonalization process	فرایند متعامدسازی گرام اشمیت
Homogemeous.....	همگن
Homotopy.....	هموتوپ
Inner product	ضرب داخلی
Iterative method.....	روش تکراری
Kronecker delta.....	دلتای کرونگر

Laplace Transformation.....	تبدیلات لاپلاس
Legendre.....	لژاندر
Local method	روش های موضعی
Mother wavelet.....	موجک مادر
Orthogonal polynomials.....	چندجمله ای های متعامد
Orthonormal.....	متعامد نرمال
Rational.....	گویا
Recurrence.....	بازگشتی
Riemann-Liouville fractional integral	انتگرال کسری ریمان_لیوویل
Riemann-Liouville fractional derivative.....	مشتق کسری ریمان_لیوویل
Semidiscrete problem	مسئله نیم گسسته
Shifted.....	انتقال یافته
Sobolev space	فضای سوبولف
Sutrm-Liouville.....	شتروم_لیوویل
Spectral methods	روش های طیفی
The fundamental theorem of calculus	قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال
Tau Method.....	روش تاو
Test function.....	توابع آزمون
Trial-function	توابع پایه
Translation.....	انتقال
Weierstrass theorem.....	قضیه وایراشتراس

Solution of fractional partial differential equations using orthogonal basis

Abstract

Fractional calculus allows mathematical and engineers a better modeling of a wide class of systems with anomalous dynamic behavior and a better understanding of the facets of both physical phenomena and artificial processes. Hence the mathematical models derived from differential equations with noninteger/fractional order derivatives or integrals are becoming a fundamental research issue for scientists and engineers .

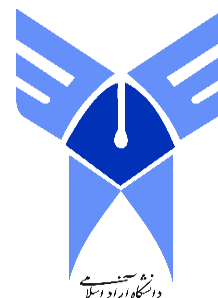
The fractional advection-diffusion equation is presented as a useful approach for the description of transport dynamics in complex systems.

In this thesis, we make a new class of orthonormal Bernstein polynomials that called rational orthonormal functions and also derived features of associated it. We present spectral Galerkin and Collocation methods for time-space fractional advection-diffusion equation using Bernstein and Chebyshev basis with offering error analysis. Also we define the new Bernstein wavelet to obtain a solution for fractional partial equations. Numerical examples are provided to show accuracy and efficiency of the proposed methods and to support the theoretical claims.

Keywords. Fractional advection-diffusion equation, Caputo derivative, Orthonormal Bernstein polynomials, Chebyshev polynomials, Galerkin method, Collocation methd, Bernstein wavelet, Error analysis.

Asma Baseri Baghsiyah

ISLAMIC AZAD UNIVERSITY
SCIENCE AND RESEARCH BRANCH
Faculty of Science
Department of Math



Ph.D. Thesis on Applied Mathematics
Orientation: Numerical Analysis

Subject:
**Solution of fractional partial differential equations
using orthogonal basis**

Thesis Advisors:
Prof. Esmail Babolian
Prof. Saeid Abbasbandy

Consulting Advisor:
Prof. Tofiq Allahviranloo

By
Asma Baseri Baghsiyah

Winter 2018