

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

نشور اخلاق پژوهش

بایاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و بهواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه اُپست جایگاه دانشگاه در اعلامی فرهنگ و تمدن بشری، مادیانجویمان و اعضاء بیات علمی واحد های دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تحطی نکنیم:

- ۱- اصل حقیقت جوی: تلاش در راستای پی جوی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هر گونه پنهان سازی حقیقت،
- ۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق،
- ۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بهکاران پژوهش،
- ۴- اصل منفع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش،
- ۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هر گونه جانت داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار،
- ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهاد های مرتبط با تحقیق
- ۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانت تقد و خودداری از هر گونه حرمت شکنی.
- ۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بهکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
- ۹- اصل برائت: التزام به برائت جوی از هر گونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلائند.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

تعهد اصالت رساله

اینجانب زینب گوینده دانش آموخته دکترای تخصصی در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۱۳۹۳/۱۰/۲۷ از رساله خود تحت عنوان "روش های عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی غیر قطعی" با کسب نمره ۱۸/۸۰ و درجه دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم :

(۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهش دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

(۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پائین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

(۳) چنانچه بعد از فراغت تحصیل، قصد استفاده و هر گونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی :

زینب گوینده

تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

دانشکده علوم پایه ، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

عنوان:

روش های عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و
جزئی غیر قطعی

اساتید راهنما

دکتر توفیق الهویرنلو

دکتر سعید عباسبندی

استاد مشاور

دکتر اسماعیل بابلیان

نگارش

زینب گوینده

زمستان ۱۳۹۳

دستایش خدایند را سزا است هر سزا که شب فرارسد و پرده ندر کی فرو افتد... ستایش مخصوص پروردگار است هر زمان که تاره ای طلوع و غروب کند... پس دوست که هر تنگدستی، هستی بر او
گواهی می دهند و دلهای مکرران را بر آفریده وجودش واداشته است. خدایی که برتر از کلمات تشبیه کننده گان و پندار مکرران است. * اسلاف الغالب، مولا علی (ع)

به حرمت قلم و مقام شیخ استاد

پاس از اساتید ارجمند و کرامتدارم جناب دکتر توفیق الهویرنلو و جناب دکتر سعید عباسبندی که زحمات راهنمایی این پژوهش را بر عهده
داشتند و با تقدیر از جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان که به عنوان استاد مشاور من راد انجام این پژوهش یاری کردند.
از دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات و اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه که وقت و امکانات لازم راد اختیار بنده قرار دادند، صمیمانه
قدردانی می کنم.

تقدیم به عزیزانم

آنان که بر تو مهر و عاطفه‌شان بر تار و پود دنیای من

نور روشنی بخشیده است...

فهرست مطالب

عنوان	شماره صفحه
چکیده	۱
فصل اول: مقدمه	
مقدمه	۲
فصل دوم: تعاریف و مفاهیم اساسی	
۱-۲ مقدمه	۷
۲-۲ مجموعه فازی	۷
۳-۲ دستگاه اعداد فازی	۸
۱-۳-۲ عدد فازی مثلثی	۱۰
۴-۲ اعمال حسابی	۱۰
۱-۴-۲ جمع	۱۱
۲-۴-۲ تفریق	۱۱
۳-۴-۲ ضرب	۱۲
۴-۴-۲ تقسیم	۱۳
۵-۲ روابط ترتیبی	۱۳
۶-۲ فضای متریک	۱۶
۷-۲ تابع فازی و پیوستگی	۱۸
۸-۲ مشتق تابع فازی	۲۰
۹-۲ انتگرال تابع فازی	۲۴

۲۵	 ۱۰-۲ تابع فازی دو متغیره و مشتقات جزئی فازی
	فصل سوم: معادلات دیفرانسیل معمولی غیر قطعی
۲۹	 ۱-۳ مقدمه
۲۹	 ۲-۳ خصوصیات توابع مشتق پذیر تعمیم یافته ی ها کوها را
۳۷	 ۳-۳ خصوصیات توابع فازی ریمان انتگرال پذیر
۴۱	 ۴-۳ قضیه تیلور
۴۷	 ۵-۳ حل معادلات دیفرانسیل با روش اویلر
۴۹	 ۱-۵-۳ حالت اول
۵۰	 ۲-۵-۳ حالت دوم
۵۰	 ۳-۵-۳ حالت سوم
۵۰	 ۴-۵-۳ آنالیز روش اویلر
۵۵	 ۵-۵-۳ مثال ها
۶۱	 ۶-۳ حل معادلات دیفرانسیل فازی خطی مرتبه اول
۶۴	 ۷-۳ حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم مقدار مرزی
۶۶	 ۸-۳ حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم کامل
۶۷	 ۱-۸-۳ حالت اول
۶۷	 ۲-۸-۳ حالت دوم
۶۹	 ۳-۸-۳ مثال ها

فصل چهارم: معادلات دیفرانسیل جزئی غیر قطعی

۷۳	 ۱-۴ مقدمه
۷۳	 ۲-۴ حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع فازی دو متغیره
۷۸	 ۳-۴ معادله ی فازی گرما در میله با طول بی نهایت

۷۸	 ۱-۳-۴ قضیه اصل ماکزیمم
۸۱	 ۲-۳-۴ جواب تحلیلی معادله ی فازی گرما
۸۳	 ۱-۲-۳-۴ حالت اول
۸۳	 ۱-۱-۲-۳-۴ جواب $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر
۸۵	 ۲-۱-۲-۳-۴ جواب $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر
۸۶	 ۲-۲-۳-۴ حالت دوم
۸۶	 ۱-۲-۲-۳-۴ جواب $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر
۸۶	 ۲-۲-۲-۳-۴ جواب $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر
۸۷	 ۳-۳-۴ مثال ها
۹۱	 ۴-۴ معادله ی فازی گرما در سطح فلزی با طول $(0, +\infty)$
۹۲	 ۱-۴-۴ جواب $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر
۹۵	 ۲-۴-۴ جواب $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر
۹۶	 ۳-۴-۴ مثال ها

فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادات

۹۸	 ۱-۵ نتیجه گیری
۹۹	 ۲-۵ پیشنهادات
۱۰۰	 منابع و مآخذ
۱۰۵	 وازه نامه انگلیسی به فارسی
۱۰۶	 نمادهای به کار رفته
۱۰۷	 مقالات مستخرج از پایان نامه
۱۰۸	 چکیده انگلیسی

فهرست شکل ها

شماره صفحه	عنوان
۳۳	۱-۳. نمایش تابع فازی $f(x; \alpha) = [1.1 + 5.2\alpha \quad 9.5 - 3.2\alpha] \sin(x)$
۳۳	۲-۳. نمایش تابع فازی $f'_{gH}(x; \alpha) = [1.1 + 5.2\alpha \quad 9.5 - 3.2\alpha] \cos(x)$
۵۶	۳-۳. نمایش جواب مثال (۱-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0, 1]$
۵۶	۴-۳. نمایش مشتق gH تابع جواب مثال (۱-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0, 1]$
۵۷	۵-۳. نمایش جواب مثال (۲-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0, 1]$
۵۷	۶-۳. نمایش مشتق gH تابع جواب مثال (۲-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0, 1]$
۵۹	۷-۳. نمایش تابع جواب مثال (۳-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0, 1]$
۵۹	۸-۳. نمایش gH -مشتق مرتبه اول مثال (۳-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0, 1]$
۶۲	۹-۳. مدار LR مثال (۱-۶-۳)
۶۳	۱۰-۳. نمایش جواب مثال (۱-۶-۳) به ازای مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۶۳	۱۱-۳. نمایش مشتق gH مرتبه اول تابع جواب مثال (۱-۶-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۶۵	۱۲-۳. نمایش جواب مثال (۱-۷-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۶۹	۱۳-۳. نمایش جواب مثال (۱-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۶۹	۱۴-۳. نمایش gH -مشتق مرتبه اول جواب مثال (۱-۵-۳) به ازای همه $\alpha \in [0, 1]$
۷۰	۱۵-۳. نمایش جواب مثال (۲-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۷۰	۱۶-۳. نمایش gH -مشتق مرتبه اول جواب مثال (۲-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۷۱	۱۷-۳. نمایش gH -مشتق مرتبه دوم جواب مثال (۲-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۷۲	۱۸-۳. نمایش جواب مثال (۳-۳-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۷۲	۱۹-۳. نمایش gH -مشتق مرتبه اول جواب مثال (۳-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۷۲	۲۰-۳. نمایش gH -مشتق مرتبه دوم جواب مثال (۳-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$
۷۵	۱-۴. نمایش $f(x, t)$ مثال (۱-۲-۴) به ازای $\alpha = 0$
۷۵	۲-۴. نمایش $f'_{gH}(x, t)$ مثال (۱-۲-۴) به ازای $\alpha = 0$
۷۸	۳-۴. میله عایق با طول بینهایت

۸۸		۴-۴. نمایش جواب مثال (۱-۳-۴) به ازای $x > 0$ و به ازای برش $\alpha = \frac{1}{2}$.
۸۸		۵-۴. نمایش جواب مثال (۱-۳-۴) به ازای $x < 0$ و به ازای برش $\alpha = \frac{1}{2}$.
۸۹		۶-۴. نمایش جواب مثال (۲-۳-۴) به ازای $x > 0$ و به ازای برش $\alpha = \frac{1}{3}$.
۸۹		۷-۴. نمایش جواب مثال (۲-۳-۴) به ازای $x < 0$ و به ازای برش $\alpha = \frac{1}{3}$.
۸۹		۸-۴. نمایش جواب مثال (۲-۳-۴) به ازای $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $\alpha = \frac{1}{3}$.
۹۰		۹-۴. نمایش جواب مثال (۳-۳-۴) به ازای $x > 0$ و در برش $\alpha = \frac{1}{3}$.
۹۰		۱۰-۴. نمایش جواب مثال (۳-۳-۴) به ازای $x < 0$ و در برش $\alpha = \frac{1}{3}$.
۹۱		۱۱-۴. سطح فلزی با طول $(0, +\infty)$.
۹۶		۱۲-۴. نمایش جواب مثال (۱-۴-۴) به ازای مقدار $\alpha = \frac{1}{4}$.
۹۶		۱۳-۴. نمایش مشتق gH مرتبه اول به ازای مقدار $\alpha = \frac{1}{4}$.
۹۷		۱۴-۴. نمایش جواب مثال (۲-۴-۴) به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$.
۹۷		۱۵-۴. نمایش مشتق $[gH - p]$ جواب مثال (۲-۴-۴) نسبت به t به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$.

فهرست جدول ها

شماره صفحه	عنوان
۵۶	۱-۳. خطای جامع روش اویلر در مثال (۱-۵-۳)
۵۸	۲-۳. خطای جامع روش اویلر در مثال (۲-۵-۳)
۶۰	۳-۳. خطای جامع روش اویلر در مثال (۳-۵-۳)

چکیده

این رساله بر دو موضوع محوری متمرکز است. بخش اول به مطالعه معادلات دیفرانسیل فازی معمولی بر اساس مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا اختصاص دارد. خواصی مانند قاعده‌ی زنجیره‌ای، قضیه‌ی مقدار میانی، آزمون مشتق اول و دوم و همانند آن برای این مفهوم از دیفرانسیل پذیری اثبات می‌شوند. در این رساله روش جدیدی در آنالیز عددی فازی با ارائه بسط تیلور فازی براساس مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا معرفی می‌شود. به منظور تعریف بسط تیلور فازی چند خصوصیت برای توابع فازی ریمان انتگرال پذیر ارائه می‌شود. در نتیجه، روش اویلر برای حل مساله مقدار اولیه‌ی فازی به دست می‌آید و همگرایی این روش با استفاده از مفهوم خطای جامع بیان می‌شود.

در بخش دوم، معادله‌ی فازی گرما براساس مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا معرفی می‌شود. به همین منظور مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا برای توابع دو متغیره معرفی و نوع دیفرانسیل پذیری این مشتق مطالعه می‌شود. علاوه براین برخی از خواص برای مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا بیان می‌شود. این خواص برای اثبات منحصربفردی جواب معادله‌ی فازی گرما و پیدا کردن جواب تحلیلی معادله‌ی فازی گرما استفاده می‌شوند. در انتها جواب تحلیلی معادله‌ی فازی گرما در دو ناحیه بینهایت و نیمه- بینهایت بر اساس نوع دیفرانسیل پذیری $u(x, t)$ نسبت به t به دست می‌آید.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل فازی معمولی، معادله دیفرانسیل فازی جزئی، مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا، معادله‌ی فازی گرما، قاعده‌ی زنجیره‌ای، قضیه‌ی مقدار مرزی، اصل ماکزیمم فازی.

فصل ۱

مقدمه

رساله‌ی حاضر با نگاهی به معادلات دیفرانسیل فازی در دو بخش تنظیم شده است. بخش اول به معادلات دیفرانسیل فازی معمولی بر اساس مشتقات تعمیم یافته‌ی هاکوهارا می‌پردازد. بخش دوم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا را مورد مطالعه قرار می‌دهد.

نظریه مجموعه‌های فازی به صورت رسمی اولین بار توسط پرفسور لطفی زاده^۱ دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه کالیفرنیا در برکلی با انتشار مقاله "مجموعه‌های فازی" [45] در سال ۱۹۶۵ مطرح گردید. این مقاله سرآغاز جهشی نوین در علوم و مهندسی سیستم و کامپیوتر بود. رخداد بزرگ در دهه ۱۹۷۰ تولد کنترل کننده-های فازی برای سیستم‌های واقعی بود. پرفسور لطفی زاده در سال ۱۹۷۳ طی یک مقاله مفهوم استفاده از متغیرهای زبانی را در سیستم‌های کنترل مطرح کرد [46]. این مقاله اساس تکنولوژی کنترل بر مبنای منطق فازی بود که اثرات عمیقی در طراحی سیستم‌های کنترل هوشمند داشت. در سال ۱۹۷۵، ممدانی و آسیلیان چهارچوب اولیه‌ای برای کنترل کننده فازی مشخص کردند و از کنترل کننده فازی در یک موتور بخار استفاده کردند [37]. اولین کنفرانس بین المللی IEEE در زمینه سیستم‌های فازی در فوریه ۱۹۹۲ در سان دیگو برگزار گردید. این یک اقدام سمبلیک در مورد پذیرفتن سیستم‌های فازی به وسیله بزرگ‌ترین سازمان مهندسی یعنی IEEE بود.

گرچه سیستم‌های فازی پدیده‌های غیر قطعی و نا مشخص را توصیف می‌کنند، با این وجود خود تئوری فازی یک تئوری دقیق می‌باشد. در حقیقت تمامی نظریه‌های علوم مهندسی دنیای واقعی را به شکلی تقریبی توصیف می‌کنند. یک تئوری مهندسی خوب از یک طرف باید بتواند مشخصه‌های اصلی و کلیدی دنیای واقعی را توصیف کند و از طرف دیگر قابل تجزیه تحلیل ریاضی باشد. طبیعی‌ترین بیان ریاضی بسیاری از قوانین عمومی طبیعت در علوم مانند فیزیک، شیمی، ستاره شناسی و غیره، زبان معادلات دیفرانسیل است. به دلیل آنکه مقادیر اولیه یا مرزی در معادلات دیفرانسیل دقیق و قطعی نیست، مبحثی به نام معادلات دیفرانسیل فازی

¹ Zadeh

در علوم مهندسی معرفی گردید. معادلات دیفرانسیل فازی در واقع یک ابزار قوی برای مدل بندی مسائل غیر قطعی است.

مقاله هاکوهارا^۱ [30] نقطه‌ی آغازی برای معادلات دیفرانسیل در توابع مجموعه مقدار و توابع فازی بود. پوری^۲ و رالسکو^۳ در سال ۱۹۸۳ [40] با استفاده از تفریق هاکوهارا، مشتق هاکوهارا را برای توابع فازی مقدار تعریف کردند و نویسندگان زیادی از این تعریف برای حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل فازی استفاده کردند [1-3,6,16,17,39]. با توجه به تحقیق انجام شده توسط دایموند^۴ [22] مشتق تعریف شده براساس تفریق هاکوهارا دارای یک نقص بود، به هنگامی که مقدار t افزایش پیدا می‌کرد، مقدار ابهام در جواب افزایش پیدا می‌کرد. علاوه بر این تفریق هاکوهارا همواره وجود نداشت. بد^۵ و گال^۶ با تعریف مشتق تعمیم یافته‌ی قوی براساس مشتق هاکوهارا، این نقص را برطرف کردند [13]. با این حال این امکان همواره وجود داشت که جواب به دست آمده یکتا نباشد. به منظور برطرف کردن اشکال اصلی موجود در تفریق هاکوهارا، بد^۷ و استفانینی^۷، تفریق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا را برای اعداد بازه‌ای و براساس آن مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا برای توابع بازه‌ای تعریف کردند. علاوه بر این ارتباط بین مشتق تعمیم یافته‌ی قوی و مشتق تعمیم یافته‌ی ضعیف را با این مفهوم جدید از دیفرانسیل پذیری مورد بررسی قرار دادند. سپس معادلات دیفرانسیل مقدار اولیه بازه‌ای را تعریف کردند و براساس نوع دیفرانسیل پذیری، جواب‌های این دسته از معادلات را به دست آوردند [42,44].

با این وجود در سال ۲۰۱۰ استفانینی [43] با یک مثال نقض بیان کرد که امکان دارد این مفهوم جدید از تفاضل موجود نباشد و ممکن است حاصل تفریق تعمیم یافته‌ی دوعدد فازی، عدد فازی نباشد. به همین دلیل وی در این مقاله شرایط وجودی تفریق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا را بیان کرد. علاوه بر این مفهوم جدیدی از تفریق با عنوان تفریق تعمیم یافته را بیان کرد که این مفهوم در سال ۲۰۱۳ توسط استفانینی و بد^۷ [14] بیشتر مورد بررسی قرار گرفت و بر اساس آن مشتق تعمیم یافته تعریف شد.

بدست آوردن جواب‌های تحلیلی دقیق معادلات دیفرانسیل فازی اغلب، سخت و بعضی وقت‌ها غیرممکن است، بنابراین روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. روش

¹ Hukuhara

² Puri

³ Ralescu

⁴ Diamond

⁵ Bede

⁶ Gal

⁷ Stefanini

های عددی زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی بیان شده اند و تحقیقات زیادی در این زمینه صورت گرفته است. ([1-3,6,17]). بسط تیلور یک ابزار قوی در تئوری تقریب است. این بسط نقش مهمی در مطالعه رفتار موضعی یک تابع ایفا می کند و پایه و اساس خیلی از روش های عددی است. آناستاسیو¹ [11] قضیه تیلور را برای توابع مشتق پذیر براساس مشتق ها کوهارا بیان کرد.

رساله‌ی حاضر در بخش اول با بررسی و اثبات قضایای اساسی در رابطه با حساب دیفرانسیل و انتگرال تعریف شده براساس مشتق تعمیم یافته‌ی ها کوهارا به دانش موجود در زمینه‌ی معادلات دیفرانسیل فازی معمولی افزوده است. علاوه بر این بسط تیلور بر پایه‌ی مشتق تعمیم یافته‌ی ها کوهارا بیان و در حالات مختلف اثبات می شود. بر همین اساس روش عددی اوایلر فازی برای حل عددی معادله دیفرانسیل فازی مرتبه اول بیان می شود. در قسمت دیگری از این بخش روش های تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی معمولی اثبات می شوند .

بسیاری از مسائل علوم و تکنولوژی با استفاده از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به فرم ریاضی مدل-بندی می شوند و لزوم توجه به این بخش برای تحقیق در زمینه‌ی علوم طبیعی بیشتر احساس می شود. باکلی² و فیورینگ³ [16] بر اساس مفهوم مشتق ها کوهارا، مشتق جزئی را برای توابع فازی تعریف کردند. بر پایه‌ی تعریف مشتق ها کوهارا، الهویرنلو⁴ [4] از روش تفاضلات متناهی و در مقاله [10] از روش آدومیان برای حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی جزئی استفاده کرد. در چند دهه اخیر ، محققین روشهای جدید را برای بدست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل جزئی فازی تعمیم داده اند. [5,15,19,31,39].

با توجه به نواقصی که در تفریق ها کوهارا مشاهده می شود، رساله‌ی حاضر در بخش دوم با معرفی مشتق فازی جزئی بر پایه‌ی تفریق تعمیم یافته‌ی ها کوهارا، گام مثبتی در جهت رفع نواقص فوق برداشته است. در راستای دست یابی به این هدف، ابتدا معادلات دیفرانسیل فازی جزئی بر اساس مشتق تعمیم یافته‌ی ها کوهارا معرفی می شود و انواع مشتق پذیری و نقاط سویچ در این مفهوم مورد بررسی قرار می گیرند. سپس معادله‌ی فازی گرما به عنوان کاربردی از معادلات دیفرانسیل فازی جزئی مورد بررسی قرار می گیرد. یکتایی جواب

¹ Anastassiou

² Buckley

³ Feuring

⁴ Allahviranloo

معادله‌ی فازی گرما اثبات می شود و جواب تحلیلی این معادله با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری به دست می- آید.

رساله حاضر از پنج فصل مجزا تشکیل شده است. در ادامه شرح مختصری از موضوعات محوری و عمده مطرح شده در فصل‌های دیگر ارائه می‌شود.

❖ **فصل دوم.** این فصل عمدتاً به معرفی و بررسی همه جانبه‌ی فضای اعداد فازی، خصوصیات این فضا شامل متر در این فضا، اعمال حسابی، رابطه‌ی ترتیبی و غیره می پردازد. تابع فازی و حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع یک متغیره مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این فصل توابع دو متغیره تعریف می‌شود. مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوها را برای توابع دو متغیره از دیگر مباحث موجود در این فصل است. شایان ذکر است که نتایج حاصل شده در مقاله [8] به چاپ رسیده است.

❖ **فصل سوم.** این فصل به بررسی جامع معادلات دیفرانسیل فازی معمولی بر پایه‌ی مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوها اختصاص یافته است. موضوعات محوری و اساسی مطرح شده در این فصل عبارت است از: اثبات قضایای مربوط به خصوصیات مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوها شامل مشتق حاصلضرب، تفریق و ترکیب دو تابع فازی، لم رول، قضیه مقدار میانی، آزمون اول مشتق و آزمون دوم مشتق. هم- چنین خصوصیات توابع فازی ریمان انتگرال پذیر نیز مورد بررسی قرار خواهد گرفت. علاوه بر این بسط تیلور فازی براساس مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوها در حالات مختلف دیفرانسیل پذیری بیان و اثبات می شود.

در ادامه، به عنوان یکی از نتایج اصلی این فصل روش عددی اوایلر برای حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی معمولی در حالات مختلف دیفرانسیل پذیری بیان و اثبات می شود. هم‌چنین روش هایی تحلیلی برای جواب معادلات دیفرانسیل فازی خطی مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم مقدار مرزی و معادلات دیفرانسیل خطی کامل مرتبه دوم ارائه می‌گردد. شایان ذکر است که نتایج حاصل در مقالات [8]، [9] و [27] به چاپ رسیده است.

❖ **فصل چهارم.** این فصل عمدتاً به بررسی جامع معادلات دیفرانسیل فازی جزئی تعریف شده براساس مشتق تعمیم یافته هاکوها می‌پردازد. موضوعات کلیدی و محوری این فصل عبارت است از: گذری بر برخی از خصوصیات مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوها شامل بررسی نقطه‌ی سویچ برای مشتق یک تابع دو متغیره و مشتق جزئی برای ترکیب دو تابع چند متغیره.

در این فصل معادله‌ی فازی گرما به عنوان کاربردی از مشتقات جزئی فازی تعریف شده بر اساس مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ابتدا یکتایی جواب برای این معادله بر اساس قضیه اصل ماکزیمم ثابت می‌شود. در ادامه جواب تحلیلی این معادله بر اساس نوع مشتق‌پذیری جزئی هاکوهارا تعمیم یافته با ذکر تمام محاسبات و جزئیات، به دست می‌آید. تمامی نتایج این فصل در مقاله‌های [7] و [8] به ثبت رسیده است.

❖ **فصل پنجم.** در این فصل نتایج حاصل از رساله حاضر به صورت خلاصه بررسی می‌شود و پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی در این زمینه ارائه می‌شود.

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۲-۱ مقدمه

این فصل با بیان مفاهیم اولیه و اساسی در فضای فازی می پردازد. ابتدا تعریفی از مجموعه های فازی بیان شده و سپس خصوصیات اساسی لازم برای فصول بعدی را ارائه می شود.

۲-۲ مجموعه فازی

این بخش به بیان مفاهیم اساسی نظریه ی مجموعه های فازی می پردازد. در این بخش فرض کنید X مجموعه مرجع باشد.

تعریف ۲-۲-۱. [45] فرض کنید A زیر مجموعه ی X باشد ($A \subseteq X$). مجموعه های قطعی^۱ معمولاً به صورت تعدادی عضو با نماد $x \in X$ تعریف می شوند که این اعضاء می توانند قابل شمارش باشند و هر عضو X می تواند متعلق به مجموعه ی قطعی A باشد یا نباشد. در صورت تعلق به مجموعه ی A درجه ی عضویت آن یک و در غیر این صورت درجه ی عضویت آن صفر است. بنابراین تابع زیر را تعریف می کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A; \\ 0 & , \quad x \notin A. \end{cases}$$

که به آن تابع مشخصه^۲ مجموعه A در X گویند.

تعریف ۲-۲-۲. [45] مجموعه فازی A (زیر مجموعه فازی X) به صورت نگاشت $A: X \rightarrow [0,1]$ تعریف می شود که در آن $A(x)$ نشان دهنده درجه عضویت x در مجموعه فازی A است.

^۱ Crisp

^۲ Characteristic function

مجموعه فازی با تابع عضویتش شناخته می‌شود. همچنین برای نشان دادن تابع عضویت^۱ از علامت $\mu_A(x)$ استفاده می‌شود. همچنین هر مجموعه قطعی یک مجموعه فازی است. تابع عضویت برای مجموعه قطعی $A \subseteq X$ تابع مشخصه آن است.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A; \\ 0 & , \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

تعریف ۳-۲-۲ ([12]). فرض کنید $A: X \rightarrow [0,1]$ یک مجموعه فازی است. مجموعه α -برش‌های مجموعه A به ازای هر $\alpha \in (0,1]$ ، مجموعه‌ای قطعی است و شامل همه ی عناصری از X است که درجه عضویت این عناصر در A ، بزرگ‌تر یا مساوی مقدار معین α است و آن را با A_α نشان می‌دهند. به عبارت دیگر

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}.$$

تعریف ۴-۲-۲ ([12]). تکیه‌گاه^۲ یک مجموعه فازی مجموعه‌ای است که عناصر مجموعه مرجع در آن درجه عضویت غیر صفر دارند و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$Supp(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}.$$

تعریف ۵-۲-۲ ([12]). مجموعه فازی A را محدب^۳ گوئیم اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم

$$A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] > \min[A(x_1), A(x_2)].$$

۳-۲-۳ دستگاه اعداد فازی

اعداد فازی تعمیم اعداد حقیقی کلاسیک هستند و به طور کلی یک عدد فازی زیر مجموعه فازی از خط حقیقی است که دارای خصوصیات بیشتری است. اعداد فازی قادر به مدل بندی عدم قطعیت و ابهام هستند.

¹ Membership function

² Support

³ convex

مفهوم عدد فازی اساس و پایه‌ی آنالیز ریاضی و معادلات دیفرانسیل فازی است و یک ابزار مفید و کاربردی در مجموعه‌های فازی و منطق فازی است.

تعریف ۲-۳-۱. ([23]) مجموعه فازی $u: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ را عدد فازی گویند هر گاه

i. u نرمال باشد یعنی مقدار $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $u(x_0) = 1$ ؛

ii. u محدب باشد یعنی به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $t \in [0,1]$ داشته باشیم

$$u[tx + (1-t)y] \geq \min[u(x), u(y)].$$

iii. u نیم پیوسته بالایی^۱ در $\mathbb{R}$ باشد، یعنی

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ such that } u(x) - u(x_0) < \varepsilon, |x - x_0| < \delta$$

iv. u دارای تکیه‌گاه فشرده باشد، یعنی $cl\{x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$ فشرده باشد، که در آن $cl(A)$ نشان‌دهنده

بستار^۲ مجموعه A است.

مجموعه‌ی اعداد فازی را با $\mathbb{R}_F$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲-۳-۲. ([12]) به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، داریم

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) \geq \alpha\},$$

و

$$[u]^0 = cl\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x) > 0\}.$$

که در آن $[u]^\alpha$ را مجموعه $-\alpha$ برش^۳ عدد فازی u ، مجموعه -1 برش را هسته^۴ عدد فازی و مجموعه -0 برش را تکیه‌گاه عدد فازی گویند.

تعریف ۲-۳-۳. ([12]) فرم پارامتری یک عدد فازی را به ازای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ به صورت

$$[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$$

۱. $u^-(\alpha)$ یک تابع غیرکاهشی کراندار و از راست پیوسته روی بازه $[0,1]$ است.

۲. $u^+(\alpha)$ یک تابع غیرافزایشی کراندار و از چپ پیوسته روی بازه $[0,1]$ است.

¹ Upper semi continuous

² closure

³ α - level

⁴ core

$$\forall \alpha \in [0,1] ; \quad u^-(\alpha) \leq u^+(\alpha) \quad ۳.$$

که می توان نشان داد این تعریف معادل تعاریف دیگر اعداد فازی است.

قضیه ۱-۳-۲ ([38]) فرض کنید $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ یک عدد فازی و $[u]^{\alpha}$ نشان دهنده ی مجموعه برش آن باشد. در این صورت

$$i. \quad [u]^{\alpha} = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)] \quad \text{داریم } \alpha \in [0,1] \quad \text{به ازای هر}$$

$$ii. \quad \text{اگر } 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1, \text{ آنگاه } [u]^{\alpha_2} \subseteq [u]^{\alpha_1}$$

$$iii. \quad \text{به ازای هر دنباله } \alpha_n \text{ های همگرا از پایین به } \alpha \in (0,1] \text{ داریم}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} = [u]^{\alpha}$$

$$iv. \quad \text{به ازای هر دنباله از } \alpha_n \text{ های همگرا به } 0 \text{ داریم}$$

$$cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}\right) = [u]^0$$

۱-۳-۲ عدد فازی مثلثی

تعریف ۱-۳-۲ ([12]). مقدار $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ، $a \leq b \leq c$ نمایش دهنده ی یک عدد فازی مثلثی^۲ است و $-\alpha$ برش این عدد برابر است با

$$u^-(\alpha) = a + (b-a)\alpha, \quad u^+(\alpha) = c - (c-b)\alpha.$$

۲-۴ اعمال حسابی

در اغلب موارد محاسبات با پارامترهای غیر قطعی انجام می پذیرد. بر همین اساس باید تعریف معادل و مشابهی با عملیات کلاسیک بین اعداد حقیقی برای اعداد فازی نیز بیان گردد. در این بخش فرض کنید $u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ اعداد مثلثی فازی باشد که

$$[u]^{\alpha} = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)], \quad [v]^{\alpha} = [v^-(\alpha), v^+(\alpha)], \quad [w]^{\alpha} = [w^-(\alpha), w^+(\alpha)].$$

¹ Stacking Theorem

² triangular fuzzy number

۲-۴-۱ جمع.

حاصل جمع دو عدد فازی مثلثی، عدد فازی مثلثی است و

$$[u+v]^\alpha = \{x+y \mid x \in [u]^\alpha, y \in [v]^\alpha\} = [u]^\alpha + [v]^\alpha$$

➤ خصوصیات

$$i. \quad u+(v+w)=(u+v)+w$$

$$ii. \quad \text{مجموعه قطعی } 0 = \chi_{\{0\}} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^1 \text{ عضو خشتی برای جمع فازی است یعنی } u+0=0+u=u,$$

$$iii. \quad \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v \text{ اگر } \lambda \in \mathbb{R}$$

۲-۴-۲ تفریق

تعریف ۲-۴-۲. ([30]) تفریق هاگوهارا^۱ (H -تفاضل، $\ominus$) این گونه تعریف می شود

$$u \ominus v = w \Leftrightarrow u = v + w$$

که در آن $+$ نشان دهنده جمع استاندارد بین دو عدد فازی است. اگر $u \ominus v$ وجود داشته باشد، براساس دیدگاه α -برش رابطه‌ی زیر برقرار است

$$[u \ominus v]^\alpha = [u^-(\alpha) - v^-(\alpha), u^+(\alpha) - v^+(\alpha)]$$

تعریف ۲-۴-۳. ([42]، [44]) تفریق تعمیم یافته‌ی هاگوهارا^۲ (gH -تفاضل) برای دو عدد فازی $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow \begin{cases} (i). u = v + w; \\ \text{or } (ii). v = u + (-1)w. \end{cases}$$

تعریف بالا به صورت α -برش با رابطه‌ی زیر نمایش داده می شود

$$[u \ominus_{gH} v]^\alpha = [\min\{u^-(\alpha) - v^-(\alpha), u^+(\alpha) - v^+(\alpha)\}, \max\{u^-(\alpha) - v^-(\alpha), u^+(\alpha) - v^+(\alpha)\}]$$

شرایط لازم برای اینکه $u \ominus_{gH} v$ عضوی از فضای $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ باشد عبارت‌اند از ([43])

✓ در حالت (i) به ازای همه $\alpha \in [0,1]$ باید

$$\bullet \quad w^-(\alpha) = u^-(\alpha) - v^-(\alpha) \text{ و } w^+(\alpha) = u^+(\alpha) - v^+(\alpha)$$

$$\bullet \quad w^-(\alpha) \text{ تابعی صعودی، } w^+(\alpha) \text{ تابعی نزولی و } w^-(\alpha) \leq w^+(\alpha).$$

¹ Singleton

² Hukuhara difference

³ generalized Hukuhara difference

✓ در حالت (ii) به ازای همه $\alpha \in [0,1]$ باید

• $w^+(\alpha) = u^-(\alpha) - v^-(\alpha)$ و $w^-(\alpha) = u^+(\alpha) - v^+(\alpha)$ ؛

• $w^-(\alpha) \leq w^+(\alpha)$ تابعی صعودی، $w^+(\alpha)$ تابعی نزولی و $w^-(\alpha) \leq w^+(\alpha)$.

گزاره ۲-۴-۱. ([44]) فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ دو عدد فازی باشند، در این صورت

i. اگر تفریق gH موجود باشد، یکتا است.

ii. $u \ominus_{gH} v = u \ominus v$ یا $u \ominus_{gH} v = -(v \ominus u)$ با این فرض که عبارات سمت راست موجود باشند. در

حالت خاص $u \ominus_{gH} u = u \ominus u = 0$.

iii. اگر $u \ominus_{gH} v$ در حالت (i) تعریف (۲-۴-۲) موجود باشد، آنگاه $v \ominus_{gH} u$ در حالت (ii) وجود

دارد و برعکس،

iv. $(u+v) \ominus_{gH} v = u$

v. $0 \ominus_{gH} (u \ominus_{gH} v) = v \ominus_{gH} u$

vi. $u \ominus_{gH} v = v \ominus_{gH} u = w$ اگر و تنها اگر $w = -w$ ؛ علاوه بر این $w = 0$ اگر و تنها اگر $u = v$.

تذکر ۲-۴-۱. ([14]) اگر تفریق هاکوهارا موجود باشد، آنگاه $u \ominus v = u \ominus_{gH} v$.

تذکر ۲-۴-۲. در این رساله فرض کنید که $u \ominus_{gH} v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $u \ominus v$ همواره موجود باشند.

۲-۴-۳ ضرب

حاصل ضرب دو عدد فازی u و v ، $w = u \odot v$ اینگونه تعریف می شود:

$$w^-(\alpha) = \inf \{x.y \mid x \in u(\alpha), y \in v(\alpha)\},$$

$$w^+(\alpha) = \sup \{x.y \mid x \in u(\alpha), y \in v(\alpha)\}.$$

در این صورت می توان گفت

$$(u \odot v)^-(\alpha) = \min \{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\},$$

$$(u \odot v)^+(\alpha) = \max \{u^-(\alpha)v^-(\alpha), u^-(\alpha)v^+(\alpha), u^+(\alpha)v^-(\alpha), u^+(\alpha)v^+(\alpha)\}.$$

➤ خصوصیات

i. $((u+v) \odot w)(\alpha) \subseteq (u \odot w)(\alpha) + (v \odot w)(\alpha)$

ii. به ازای همه اعداد u, v, w فازی که دارای صفر در تکیه‌گاه نباشند، می‌توان نوشت

$$u \odot (v \odot w) = (u \odot v) \odot w.$$

۲-۴-۴ تقسیم

تعریف ۲-۴-۲. تقسیم تعمیم یافته‌ی هاکوها را gH برای دو عدد فازی $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ که $[u]^{\alpha} = [u^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)]$ و $[v]^{\alpha} = [v^{-}(\alpha), v^{+}(\alpha)]$ به شرطی که به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، $0 \notin [v]^{\alpha}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u \div_{gH} v = w \iff \begin{cases} (i). u = v \odot w; \\ or (ii). v = u \odot w^{-1}. \end{cases}$$

گزاره ۲-۴-۲. فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. در این صورت به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$

i. اگر $0 \notin [u]^{\alpha}$ آنگاه $u \div_{gH} u = 1$.

ii. اگر $0 \notin [v]^{\alpha}$ آنگاه $uv \div_{gH} v = u$.

iii. اگر $0 \notin [v]^{\alpha}$ آنگاه $1 \div_{gH} v = v^{-1}$ و $1 \div_{gH} v^{-1} = v$.

که در آن 1 نشان دهنده‌ی $\{1\}$ است.

۲-۵ روابط ترتیبی

این بخش در ابتدا با توجه به مقاله [34] به بیان رابطه‌ی ترتیبی در اعداد فازی می‌پردازد و برهمین اساس خصوصیتی برای این مفهوم از ترتیب در اعداد فازی اثبات می‌کند.

تعریف ۲-۵-۱. [34] فرض کنید که $\leq$ نشان دهنده ترتیب^۱ در $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ باشد. به ازای اعداد فازی

$$[u]^{\alpha} = [u^{-}(\alpha), u^{+}(\alpha)] \text{ و } [v]^{\alpha} = [v^{-}(\alpha), v^{+}(\alpha)], \text{ ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شود}$$

$$u \leq v \text{ اگر و تنها اگر } u^{-}(\alpha) \leq v^{-}(\alpha) \text{ و } u^{+}(\alpha) \leq v^{+}(\alpha) \text{ به ازای هر } \alpha \in [0, 1].$$

نابرابری اکید نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u < v \text{ اگر و تنها اگر } u^{-}(\alpha) < v^{-}(\alpha) \text{ و } u^{+}(\alpha) < v^{+}(\alpha) \text{ به ازای هر } \alpha \in [0, 1].$$

¹ partial ordering

لم ۲-۵-۱. فرض کنید که $u, v \in \mathbb{R}_F$ ، در این صورت

۱. اگر $u \leq v$ آنگاه $-v \leq -u$

۲. اگر $u \leq v$ و $v \leq u$ آنگاه $u = v$.

اثبات.

(۱). با توجه به تعریف (۲-۵-۱) به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، داریم

$$u^-(\alpha) \leq v^-(\alpha), \quad u^+(\alpha) \leq v^+(\alpha),$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت

$$-v^-(\alpha) \leq -u^-(\alpha), \quad -v^+(\alpha) \leq -u^+(\alpha),$$

و به معنای این است که $-v \leq -u$.

(۲). مطابق با فرض مساله که $u \leq v$ ، $v \leq u$ و تعریف (۲-۵-۱) به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم

$$v^-(\alpha) \leq u^-(\alpha), \quad v^+(\alpha) \leq u^+(\alpha) \quad \text{و} \quad u^-(\alpha) \leq v^-(\alpha), \quad u^+(\alpha) \leq v^+(\alpha)$$

بنابراین $u^-(\alpha) = v^-(\alpha)$ ، $u^+(\alpha) = v^+(\alpha)$ پس لم اثبات می شود. $\square$

تعریف ۲-۵-۲. ([8]) برای عدد فازی u قدرمطلق ضعیف به صورت زیر تعریف می شود

$$|u| = \begin{cases} u, & u \succeq 0; \\ -u, & u \prec 0. \end{cases}$$

تذکر ۲-۵-۱. ([8]) با توجه به تعریف (۲-۵-۱) و لم (۲-۵-۱)، واضح است که به ازای هر دو عدد فازی u, v

که $v \succeq 0$

i. $-v \leq u \leq v$ اگر و تنها اگر $|u| \leq v$.

ii. $u \leq -v, u \succeq v$ اگر و تنها اگر $|u| \succeq v$.

گزاره ۲-۵-۲. ([8]) اگر $u, v, w \in \mathbb{R}_F$ ، آنگاه

۱. اگر $u \succeq v$ آنگاه $u \ominus_{gH} v \succeq 0$ ،

۲. اگر $u \leq v$ آنگاه $u \ominus_{gH} v \leq 0$ ،

۳. اگر $u \succeq 0$ آنگاه $\ominus_{gH} u \leq 0$.

اثبات. روند اثبات برای قسمت ۱ و ۲ یکسان است. در اینجا ما فقط قسمت ۱ را اثبات می‌کنیم. با توجه به تعریف (۱-۵-۲) داریم

$$u \succeq v \Rightarrow \begin{cases} u^-(\alpha) \geq v^-(\alpha) \Rightarrow u^-(\alpha) - v^-(\alpha) \geq 0, \\ \text{and} \\ u^+(\alpha) \geq v^+(\alpha) \Rightarrow u^+(\alpha) - v^+(\alpha) \geq 0. \end{cases}$$

پس تفریق هاگوهارا وجود دارد و $u \ominus v \succeq 0$. از طرفی با توجه به تذکر (۱-۲-۴-۲)، اگر تفریق هاگوهارا وجود داشته باشد پس $u \ominus v = u \ominus_{gH} v$ و در این صورت داریم $u \ominus_{gH} v \succeq 0$. برای اثبات قسمت ۳، با توجه به تعریف (۱-۵-۲) و اینکه $u \succeq 0$ ، می‌توان نوشت

$$0 \leq u^-(\alpha) \leq u^+(\alpha) \Rightarrow 0 \geq -u^-(\alpha) \geq -u^+(\alpha). \quad (۱.۲)$$

علاوه بر این $[-u^-(\alpha), -u^+(\alpha)] \ominus_{gH} u = 0$ پس باتوجه به معادله (۱.۲) داریم $0 \leq \ominus_{gH} u$. $\square$

تعریف ۲-۵-۳ ([28]). فرض کنید که A یک زیر مجموعه غیر تهی از $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ باشد. گوییم A از بالا کراندار است اگر عددی مانند $M \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq M$. اگر عددی مانند $m \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $a \in A$ داشته باشیم $m \leq a$ ، آنگاه می‌گوییم A از پایین کراندار است. مجموعه A را کراندار می‌نامیم در صورتی که A از بالا و پایین کراندار باشد.

تعریف ۲-۵-۴ ([28]). فرض کنید A مجموعه‌ای غیر تهی از اعداد فازی $(A \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ و $M \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ کران بالا برای آن باشد. M را کوچک‌ترین کران بالا A می‌نامیم و با

$$M = \sup A$$

نشان می‌دهیم در صورتی که

۱. به ازای هر $a \in A$ ، داشته باشیم $a \leq M$.

۲. به ازای هر $\epsilon > 0$ ، حداقل یک مقدار $a \in A$ وجود داشته باشد به طوری که $M \prec a + \epsilon$.

تعریف ۲-۵-۵ ([28]). فرض کنید A مجموعه‌ای غیر تهی از اعداد فازی $(A \subset \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ و $m \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ کران پایین برای آن باشد. m را بزرگ‌ترین کران پایین A می‌نامیم و با

$$m = \inf A$$

نشان می‌دهیم در صورتی که

۱. به ازای هر $a \in A$ ، داشته باشیم $m \leq a$ ،

۲. به ازای هر $\epsilon > 0$ ، حداقل یک عضو مانند a از مجموعه‌ی A موجود باشد به طوری که $m > a - \epsilon$.

۶-۲ فضای متریک

شناخته‌ترین و مهم‌ترین متر کاربردی در فضای اعداد فازی فاصله‌ی هاسدورف^۱ است. فاصله‌ی هاسدورف برای اعداد فازی براساس فاصله هاسدورف-پومپیو^۲ بین دو زیر مجموعه‌ی محدب و فشرده از $\mathbb{R}^n$ است. در این بخش ابتدا تعریف فاصله هاسدورف را برای زیر مجموعه‌های فشرده و محدب $\mathbb{R}^n$ آورده می‌شود و سپس به بیان تعریف فضای متریک و خصوصیات این فضا برای مجموعه‌های فازی می‌پردازد.

تعریف ۶-۲-۱. ([23]) فرض کنید κ نشان دهنده‌ی همه زیر مجموعه‌های فشرده، غیر تهی و محدب $\mathbb{R}^n$ باشد.

i. فرض کنید $A \in \kappa$ در این صورت فاصله نقطه x تا مجموعه A برابر است با

$$d(x, A) = \inf \{ \|x - a\| : a \in A \}.$$

ii. فرض کنید $A, B \in \kappa$ تفاضل هاسدورف B از A و A از B به ترتیب برابر است با

$$d_H^*(B, A) = \sup \{ d(b, A) : b \in B \},$$

$$d_H^*(A, B) = \sup \{ d(a, B) : a \in A \}.$$

iii. فاصله هاسدورف بین $A, B \in \kappa$ برابر است با

$$d(A, B) = \max \{ d_H^*(A, B), d_H^*(B, A) \}.$$

تعریف ۶-۲-۲. ([23]) اگر d فاصله هاسدورف تعریف شده در κ باشد، آنگاه $D: \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

که به صورت زیر تعریف می‌شود، فاصله هاسدورف^۳ بین دو عدد فازی در $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ خواهد بود

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d(u(\alpha), v(\alpha)) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \max \{ |u_-(\alpha) - v_-(\alpha)|, |u_+(\alpha) - v_+(\alpha)| \}.$$

¹ Hausdorff

² Hausdorff-Pompeiu

³ Hausdorff metric

قضیه ۱-۶-۲ ([35]). فضای متریک $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ کامل، جداشدنی و به صورت موضعی فشرده است. این فضا دارای خصوصیات زیر می باشد:

$$۱. \text{ به ازای هر } u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ داریم } D(u+w, v+w) = D(u, v), \quad D(u, v) = D(v, u)$$

$$۲. \text{ به ازای هر } u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u, v)$$

$$۳. \text{ به ازای هر } u, v, w, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D(u+v, w+z) \leq D(u, w) + D(v, z)$$

$$۴. \text{ به ازای هر } u, v, w, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \text{ به شرطی که } u \odot v \text{ و } w \odot z \text{ داریم}$$

$$D(u \odot v, w \odot z) \leq D(u, w) + D(v, z)$$

لم ۱-۶-۲ ([11]). فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n, v_n, u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و هنگامی که $n \rightarrow \infty$ آنگاه $u_n \rightarrow u, v_n \rightarrow v$. در این صورت اگر $n \rightarrow \infty$ داریم $D(u_n, v_n) \rightarrow D(u, v)$. در حالت خاص اگر $n \rightarrow \infty$ آنگاه $D(u_n, v) \rightarrow D(u, v)$. پس می توان گفت

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D(u_n, v_n) = D\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n\right) = D(u, v).$$

لم ۲-۶-۲ ([11]). فرض کنید که $u_n, u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $c_n, c \in \mathbb{R}^+$ به طوری که هنگامی که $n \rightarrow +\infty$ داریم $u_n \rightarrow u$ و $c_n \rightarrow c$. در این صورت

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \odot c_n) = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\right) \odot \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n\right) = u \odot c.$$

گزاره ۱-۶-۲ ([44]). به ازای همه مقادیر $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ داریم

$$D(u \odot_{gH} v, 0) = D(u, v).$$

گزاره ۲-۶-۲ ([27]). فرض کنید $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ به شرطی که $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0$. در این صورت

$$D(\lambda_1 \odot u \odot_{gH} \lambda_2 \odot u, 0) = |\lambda_1 - \lambda_2| D(u, 0).$$

۷-۲ تابع فازی و پیوستگی

توابع فازی یکی از زمینه‌های نظریه مجموعه‌های فازی هستند که در آن اعداد فازی و اعمال حسابی نقشی اساسی بازی می‌کنند. در این توابع ضرایب مقادیر مجهول اعداد فازی هستند و معادله این توابع توسط اعمال حسابی فازی ساخته می‌شوند. در این بخش ابتدا تابع فازی توسط اصل گسترش زاده بیان می‌شود. بر اساس این اصل می‌توان توابع حقیقی مقدار را به تابع فازی متناظر با آن گسترش داد. در ادامه مفهوم پیوستگی برای توابع فازی مقدار بررسی و قضایایی در این رابطه بیان می‌شود.

تعریف ۱-۷-۲ ([47]) (اصل گسترش زاده) تابع مفروض $f: X \rightarrow Y$ که در آن X و Y مجموعه‌های قطعی هستند را می‌توان به تابع $F: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ (تابع فازی) گسترش داد به طوری که $v = F(u)$ که در آن

$$v(y) = \begin{cases} \sup\{u(x) : x \in X, f(x) = y\} & \text{when } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

در این حالت F را گسترش زاده f گویند.

فرض کنید که $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه‌ی باز باشد. مجموعه α -برش‌های تابع فازی $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به ازای هر $x \in \mathbb{I}, \alpha \in [0, 1]$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$f(x; \alpha) = [f_-(x; \alpha), f_+(x; \alpha)].$$

تعریف ۲-۷-۲ ([28]) تابع فازی مقدار $f: \bar{\mathbb{I}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نقطه $x_0 \in \bar{\mathbb{I}}$ پیوسته است در صورتی که به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد مثبتی مانند δ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in \bar{\mathbb{I}}$ اگر $|x - x_0| < \delta$ آنگاه $D(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ اگر f در تمام نقاط $\bar{\mathbb{I}}$ پیوسته باشد گوییم f بر $\bar{\mathbb{I}}$ پیوسته است.

تعریف ۳-۷-۲ ([28]) فرض کنید $f(x)$ یک تابع فازی و $\bar{\mathbb{I}} \subseteq \mathbb{R}$. تابع f را بر $\bar{\mathbb{I}}$ پیوسته یکنواخت می‌نامیم در صورتی که به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد مثبتی مانند $\delta = \delta(x_0, \epsilon)$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x_1, x_2 \in \bar{\mathbb{I}}$ اگر $\|x_1 - x_2\| < \delta$ آن گاه $D(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

قضیه ۱-۷-۲ ([28]) اگر تابع فازی f روی بازه بسته $\bar{\mathbb{I}}$ پیوسته فازی باشد، آنگاه f بر $\bar{\mathbb{I}}$ پیوسته یکنواخت فازی است.

قضیه ۲-۷-۲ ([28]). اگر تابع فازی f روی $[a, b]$ پیوسته فازی باشد، آنگاه f روی بازه $[a, b]$ کرندار است.

قضیه ۳-۷-۲ ([28]). فرض کنید f یک تابع فازی پیوسته در بازه $[a, b]$ باشد و

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad , \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x),$$

در این صورت نقاطی مانند $x_1, x_2 \in [a, b]$ هستند به طوری که $M = f(x_2)$ و $m = f(x_1)$.

همچنین قضیه (۳-۷-۲) را می توان به صورت زیر بیان کرد.

اگر تابع فازی f بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، f ماکزیمم و مینیمم مقادیر خود را در نقاطی از $[a, b]$ می گیرد. به عبارت دیگر نقاطی مانند x_{Max} و x_{Min} در بازه $[a, b]$ وجود دارند به طوری که

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x_{Min}) \leq f(x) \leq f(x_{Max}), \quad (2.2)$$

که در آن $\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_{Min})$ و $\max_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_{Max})$.

تعریف ۴-۷-۲ ([8]). فرض کنید که $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ و $c \in A$. علاوه بر این $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع فازی باشد.

۱. عدد c را یک ماکزیمم موضعی برای f گویند اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر

$$x \in A \quad \text{و} \quad |x - c| < \delta \quad \text{نتیجه بگیریم که} \quad f(x) \leq f(c).$$

۲. عدد c را یک مینیمم موضعی برای f گویند اگر $\delta > 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر

$$x \in A \quad \text{و} \quad |x - c| < \delta \quad \text{نتیجه بگیریم که} \quad f(x) \geq f(c).$$

۳. عدد c را یک اکسترمم موضعی برای f گویند اگر یا ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی باشد.

تعریف ۵-۷-۲ ([8]). تابع فازی $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_F$ را در نظر بگیرید.

۱. f را صعودی گویند اگر به ازای هر $x, y \in \mathbb{I}$ که $x < y$ آنگاه $f(x) \leq f(y)$.

۲. f را نزولی گویند اگر به ازای هر $x, y \in \mathbb{I}$ که $x > y$ آنگاه $f(x) \geq f(y)$.

لم ۱-۷-۲ ([11]). اگر $f, g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_F$ توابع فازی و پیوسته باشند و تفریق هاکوها را دوتابع $f \odot g$ در $\mathbb{I}$

وجود داشته باشد، آنگاه $f \odot g$ تابعی پیوسته روی $\mathbb{I}$ است.

۸-۲ مشتق پذیری توابع فازی

در این بخش مبحث اصلی مشتق توابع فازی است. تعاریف و نتایج ارائه شده در این بخش، نقش عمده و بسزایی در مفهوم معادلات دیفرانسیل فازی معمولی ایفا می کنند.

تعریف ۸-۲-۱. ([40]) نگاشت $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ را مشتق پذیر هاکوهارا^۱ گویند اگر برای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، تفاضلات هاکوهارای $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و مقدار $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به گونه ای موجود باشند که

$$\lim_{h \rightarrow +0} D \left(\frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h}, f'(x_0) \right) = \lim_{h \rightarrow +0} D \left(\frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}, f'(x_0) \right) = 0$$

مقدار فازی $f'(x_0)$ ، مشتق هاکوهارا f در نقطه $x_0 \in \mathbb{I}$ نامیده می شود.

تعریف فوق را به بیان دیگری نیز می توان نوشت.

تعریف ۸-۲-۲. ([41]) نگاشت $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ را مشتق پذیر هاکوهارا گویند اگر $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به گونه ای موجود باشند که دو حد

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}$$

موجود و مساوی $f'(x_0)$ باشند. در این جا حدود در فضای متریک $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ گرفته می شوند و در نقاط انتهایی $\mathbb{I}$ ، تنها مشتق یک طرفه گرفته می شود. بنابراین اگر $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ مشتق پذیر باشد، آنگاه گوئیم $f'(x_0)$ مشتق هاکوهارای f در نقطه x_0 است.

نتیجه ۸-۲-۱. ([41]) (مشتق سیکالا^۲) فرض کنید $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ مشتق پذیر باشد و

$$f(x; \alpha) = [f^-(x; \alpha), f^+(x; \alpha)] \quad \text{، آنگاه } f^-(x; \alpha) \text{ و } f^+(x; \alpha) \text{ مشتق پذیر هستند و}$$

$$f'(x; \alpha) = [(f^-)'(x; \alpha), (f^+)'(x; \alpha)] \quad ; \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{که } (f^-)'(x; \alpha) \leq (f^+)'(x; \alpha)$$

¹ Hukuhara differentiable

² Seikkala

یکی از مشکلات اساسی در مشتق ها کوها را تابع f آن است که امکان دارد $f(x_0)$ یک عدد فازی باشد اما

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h}$$

یک عدد فازی نباشد.

گزاره ۲-۸-۱. ([12]) بستر تکیه گاه در توابع مشتق پذیر سیکالا غیر کاهشی است.

تعریف ۲-۸-۳. ([13]) نگاشت $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_F$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ را مشتق پذیر تعمیم یافته ی قوی $^{(GH)}$ مشتق پذیر گویند اگر $f'(x_0) \in \mathbb{R}_F$ به گونه ای موجود باشد که

۱. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، مقادیر $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و حدود زیر در فضای متریک D موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

یا

۲. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، مقادیر $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ و حدود زیر موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

یا

۳. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، مقادیر $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ و $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و حدود زیر موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

یا

۴. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، مقادیر $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و حدود زیر موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

¹ strongly generalized differentiable

تعریف ۲-۸-۴ ([44]). مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا برای نگاشت فازی مقدار $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در نقطه x_0 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f'_{gH}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_{gH} f(x_0)}{h}$$

اگر $f'_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ، آنگاه گوییم f مشتق‌پذیر تعمیم یافته‌ی هاکوهارا^۱ (gH -دیفرانسیل پذیر) در نقطه x_0 است.

تعریف ۲-۸-۵ ([44]). فرض کنید که $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد. گوییم

- $f(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه x_0 است اگر

$$f'_{i.gH}(x_0; \alpha) = [(f^-)'(x_0; \alpha), (f^+)'(x_0; \alpha)]. \quad (۳.۲)$$
- $f(x)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه x_0 است اگر

$$f'_{ii.gH}(x_0; \alpha) = [(f^+)'(x_0; \alpha), (f^-)'(x_0; \alpha)]. \quad (۴.۲)$$

تعریف ۲-۸-۶ ([44]). گوییم نقطه $\xi_0 \in \mathbb{I}$ یک نقطه سوئیچ^۲ برای دیفرانسیل پذیری $f(x)$ است اگر به ازای

هر همسایگی V از ξ_0 نقاط $x_1 < \xi_0 < x_2$ موجود باشد به طوری که

- نوع I. در نقطه x_1 ، (۳.۲) برقرار باشد و (۴.۲) برقرار نباشد و در نقطه x_2 ، (۴.۲) برقرار باشد و (۳.۲) برقرار نباشد.
- نوع II. در نقطه x_1 ، (۴.۲) برقرار باشد و (۳.۲) برقرار نباشد و در نقطه x_2 ، (۳.۲) برقرار باشد و (۴.۲) برقرار نباشد.

تعریف ۲-۸-۷ ([8]). فرض کنید $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی باشد و $c \in \mathbb{I}$. تابع فازی f در c ، gH -دیفرانسیل پذیر است اگر

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \ominus_{gH} f(c)}{x - c},$$

موجود و متعلق به فضای $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ باشد. در این صورت این مقدار را gH -مشتق تابع f در نقطه c می‌نامیم و آن را با $f'_{gH}(c)$ نشان می‌دهیم.

¹ generalized Hukuhara differentiable

² switchin point

تعریف ۸-۸-۲ ([9]) فرض کنید $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. گوئیم $f(x)$ ، gH -دیفرانسیل پذیر از مرتبه ی n -ام در نقطه $x_0 \in \mathbb{I}$ است اگر $f(x)$ تابعی $[gH]$ -دیفرانسیل پذیر از مرتبه ی i به ازای $k=0,1,\dots,n-1$ در نقطه x_0 باشد. علاوه براین هیچ نقطه‌ی سویچی در بازه $\mathbb{I}$ موجود نباشد. در این صورت اگر $f^{(k-1)}(x_0+h) \ominus_{gH} f^{(k-1)}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ مقدار $f^{(n)}_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ موجود است و داریم

$$f^{(k)}_{gH}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(k-1)}_{gH}(x_0+h) \ominus_{gH} f^{(k-1)}_{gH}(x_0)}{h}, \quad k=1, \dots, n$$

تعریف ۹-۸-۲ ([9]) فرض کنید که $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر از مرتبه k به ازای $k=0,1,\dots,n$ باشد. گوئیم

• $(f)^{(k+1)}(x)$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه x_0 است اگر

$$f^{(k)}_{i.gH}(x_0; \alpha) = [(f^-)^{(k)}(x_0; \alpha), (f^+)^{(k)}(x_0; \alpha)].$$

• $(f)^{(k+1)}(x)$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر در نقطه x_0 است اگر

$$f^{(k)}_{ii.gH}(x_0; \alpha) = [(f^+)^{(k)}(x_0; \alpha), (f^-)^{(k)}(x_0; \alpha)].$$

در حالت خاص بنابر تعریف (۸-۸-۲) اگر $k=2$ ، تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۰-۸-۲ ([8]) فرض کنید $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. گوئیم $f(x)$ ، gH -دیفرانسیل پذیر از مرتبه دوم در نقطه $x_0 \in \mathbb{I}$ است اگر تابع فازی $f(x)$ از مرتبه $i=1,2$ gH -دیفرانسیل پذیر باشد $(f^{(i)}(x_0))_{gH} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و هیچ نقطه‌ی سویچی در بازه $\mathbb{I}$ نداشته باشیم. در این صورت $f''_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ موجود است به طوری که

$$f''_{gH}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_{gH}(x_0+h) \ominus_{gH} f'_{gH}(x_0)}{h},$$

اگر $f'_{gH}(x_0+h) \ominus_{gH} f'_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

با توجه به تعریف (۹-۸-۲) تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱۱-۸-۲ ([8]) فرض کنید که $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $f'_{gH}(x)$ در نقطه $x_0 \in \mathbb{I}$ gH -دیفرانسیل پذیر باشد. علاوه براین هیچ نقطه سویچی در بازه $\mathbb{I}$ موجود نباشد و $(f^-)'(x; \alpha)$ و $(f^+)'(x; \alpha)$ هر دو در نقطه x_0 دیفرانسیل پذیر باشند. در این صورت به ازای تمام مقادیر $0 \leq \alpha \leq 1$ ، گوئیم

• $f'_{gH}(x)$, $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است هر گاه نوع gH -دیفرانسیل پذیری $f(x)$ و $f'_{gH}(x)$ یکسان باشد یعنی

$$f''_{i.gH}(x_0; \alpha) = [(f^-)''(x_0; \alpha), (f^+)''(x_0; \alpha)]. \quad (5.2)$$

• $f'_{gH}(x)$, $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است هر گاه نوع gH -دیفرانسیل پذیری $f(x)$ و $f'_{gH}(x)$ متفاوت باشد یعنی

$$f''_{ii.gH}(x_0; \alpha) = [(f^+)''(x_0; \alpha), (f^-)''(x_0; \alpha)]. \quad (6.2)$$

تعریف ۲-۸-۱۲ ([8]) فرض کنید که $c \in \mathbb{I}, \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ و $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ یک تابع فازی باشد. عدد c را یک نقطه بحرانی برای f گویند اگر تابع $f(x)$ در این نقطه $[gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و $f'_{gH}(c) = 0$ یا اینکه تابع در نقطه c , $[gH]$ -دیفرانسیل پذیر نباشد.

۲-۹-۱ انتگرال تابع فازی

این بخش به بررسی انتگرال ریمان فازی می‌پردازد و برای این مفهوم از انتگرال پذیری خصوصياتی بیان می‌شود.

تعریف ۲-۹-۱ ([20]) فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. گوئیم $f(x)$ فازی ریمان انتگرال پذیر $^1 (FR)$ -انتگرال پذیر (روی $I \in \mathbb{R}_F$) است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$, مقدار $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر افزایش $P = \{[u, v]; \xi\}$ با نرم $\Delta(P) < \delta$ داشته باشیم

$$D\left(\sum_p^* (v-u) \odot f(\xi), I\right) < \varepsilon$$

که در آن $\sum_p^*$ نشان دهنده‌ی جمع فازی است در این صورت می‌نویسیم $I := \int_a^b f(x) dx$

لم ۲-۹-۱ ([41]) فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ پیوسته فازی باشد. بنابراین $\int_a^b f(x) dx$ موجود و متعلق به $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ است. علاوه بر این

¹Fuzzy Riemann integrable

$$\int_a^b f(x; \alpha) dx = \left[\int_a^b f^-(x; \alpha) dx, \int_a^b f^+(x; \alpha) dx \right], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

قضیه ۲-۹-۱. ([43]) اگر $f(x)$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر بدون نقطه سویچ در بازه $[a, b]$ باشد، در این صورت

$$\int_a^b f'_{gH}(x) dx = f(b) \ominus_{gH} f(a).$$

لم ۲-۹-۲. ([11]) اگر $f: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ پیوسته باشد آنگاه $\int_a^x f(x) dx$ به ازای $x \in [a, b]$ تابعی پیوسته است.

لم ۲-۹-۳. ([11]) فرض کنید $f \in C_{\mathcal{F}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ و $r \in \mathbb{N}$ و $s_{r-1}, s_{r-2}, \dots, s \geq a$ مقادیری حقیقی باشند. در این صورت انتگرال های

$$\int_a^{s_{r-1}} f(s_r) ds_r, \quad \int_a^{s_{r-2}} \left(\int_a^{s_{r-1}} f(s_r) ds_r \right) ds_{r-1}, \dots, \quad \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \dots \left(\int_a^{s_{r-2}} \left(\int_a^{s_{r-1}} f(s_r) ds_r \right) ds_{r-1} \right) \dots \right) ds$$

در $s, s_{r-2}, \dots, s_{r-1}$ مقادیری پیوسته هستند.

۲-۱۰ تابع فازی دو متغیره و مشتقات جزئی فازی

اصل گسترش زاده در حالت دو بعدی از اهمیت خاصی برخوردار است. بنابر این اصل می توان عملیات حسابی و توابع حقیقی را به فضای فازی گسترش داد. این بخش ابتدا اصل گسترش زاده را در حالت دو بعدی بیان می کند. سپس به بیان مفهوم توابع فازی دو متغیره بر اساس دیدگاه پارامتری می پردازد و به عنوان مبحث اصلی، مشتق جزئی تعمیم یافته ی ها کوهارا تعریف و انواع مشتق پذیری و نقاط سویچ معرفی می شوند.

تعریف ۲-۱۰-۱. ([12]) فرض کنید تابع دو متغیره $f: X \times Y \rightarrow Z$ را بتوان به صورت تابع $F: \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(Z)$ گسترش داد به طوری که $w = F(u, v)$ که در آن

$$w(y) = \begin{cases} \sup \{ \min \{ u(x), v(x) \}, f(x, y) = z \} & \text{when } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

تعریف ۲-۱۰-۲ ([8]). یک تابع دو متغیره فازی مانند f ، به مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب از اعداد حقیقی، $(x, y) \in \mathbb{D}$ ، عددی فازی و یکتا مانند $f(x, t)$ را نسبت می‌دهد. $\mathbb{D}$ را دامنه گویند و برد مجموعه مقادیری است که تابع به ازای مقادیر دامنه دریافت می‌کند یا به عبارتی $\{f(x, t) | (x, t) \in \mathbb{D}\}$.

تذکر ۲-۱۰-۱ ([8]). تابع فازی $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_F$ به ازای همه مقادیر $(x, t) \in \mathbb{D}$ و $\alpha \in [0, 1]$ به صورت پارامتری به فرم زیر نمایش داده می‌شود

$$f(x, t; \alpha) = [f^-(x, t; \alpha), f^+(x, t; \alpha)].$$

تعریف ۳-۱۰-۲ ([8]). فرض کنید که تابع فازی $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع دو متغیره فازی باشد. $\lim_{(x, t) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}_F$ اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $(x, y) \in \mathbb{D}$ معادله‌ی زیر برقرار باشد

$$\|(x, t) - (a, b)\| < \delta \Rightarrow D(f(x, y), L) < \epsilon$$

که در آن $\|\cdot\|$ نشان دهنده نرم اقلیدسی در فضای $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۴-۱۰-۲ ([8]). فرض کنید که $f(x, t)$ یک تابع دو متغیره فازی باشد که در همسایگی نقطه $(x_0, t_0) \in \mathbb{D}$ تعریف شده است. تابع $f(x, t)$ در (x_0, t_0) پیوسته است اگر $f(x, t)$ در (x_0, t_0) حد داشته باشد و این حد برابر با مقدار $f(x, t)$ در نقطه (x_0, t_0) باشد یعنی $\lim_{(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)} f(x, t) = f(x_0, t_0)$.

تعریف ۵-۱۰-۲ ([8]). فرض کنید که $f(x, t): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_F$ و $(x_0, t_0) \in \mathbb{D}$. مشتقات جزئی تعمیم یافته‌ی f نسبت به متغیرهای x و t در نقطه (x_0, t_0) را به ترتیب با $\partial_{x_{gH}} f(x_0, t_0)$ و $\partial_{t_{gH}} f(x_0, t_0)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\partial_{x_{gH}} f(x_0, t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, t_0) \ominus_{gH} f(x_0, t_0)}{h},$$

$$\partial_{t_{gH}} f(x_0, t_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, t_0 + k) \ominus_{gH} f(x_0, t_0)}{k}.$$

به شرط آنکه $\partial_{x_{gH}} f(x_0, t_0), \partial_{t_{gH}} f(x_0, t_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. به طور خلاصه تابعی که مشتق پذیر جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا باشد را "[gH - p]-دیفرانسیل پذیر" گویند.

تذکر ۲-۱۰-۲ ([8]): تابع $f(x, t): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در نقطه (x_0, t_0) نسبت به متغیرهای x و t ، $[gH - p]$ -دیفرانسیل پذیر است اگر به ترتیب معادلات زیر موجود باشد

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} D \left(\frac{f(x_0 + h, t_0) \ominus_{gH} f(x_0, t_0)}{h}, \partial_{x_{gH}} f(x_0, t_0) \right) &\rightarrow 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} D \left(\frac{f(x_0, t_0 + k) \ominus_{gH} f(x_0, t_0)}{k}, \partial_{t_{gH}} f(x_0, t_0) \right) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

تعریف ۲-۱۰-۶ ([8]): فرض کنید $f(x, t): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $(x_0, t_0) \in \mathbb{D}$ و $f^+(x, t; \alpha)$ و $f^-(x, t; \alpha)$ توابعی حقیقی مقدار و دیفرانسیل پذیر نسبت به x باشند، آنگاه می‌توان گفت

• $f(x, t)$ تابعی $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به x در نقطه (x_0, t_0) است اگر

$$\partial_{x_{i, gH}} f(x_0, t_0; \alpha) = [\partial_x f^-(x_0, t_0; \alpha), \partial_x f^+(x_0, t_0; \alpha)]. \quad (۸.۲)$$

• $f(x, t)$ تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به x در نقطه (x_0, t_0) است اگر

$$\partial_{x_{ii, gH}} f(x_0, t_0; \alpha) = [\partial_x f^+(x_0, t_0; \alpha), \partial_x f^-(x_0, t_0; \alpha)]. \quad (۹.۲)$$

تعریف ۲-۱۰-۷ ([8]): به ازای هر نقطه ثابت ξ_0 ، گوئیم که $(\xi_0, t) \in \mathbb{D}$ یک نقطه سویچ برای دیفرانسیل پذیری $f(x, t)$ نسبت به x است اگر به ازای هر همسایگی V از (ξ_0, t) ، نقاط $(x_1, t) < (\xi_0, t) < (x_2, t)$ وجود داشته باشد به طوری که

• **نوع I.** در نقطه (x_1, t) ، تابع $f(x, t)$ تابعی $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و رابطه (۹.۲) برقرار

نباشد و این تابع در نقطه (x_2, t) ، تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و رابطه (۸.۲) برقرار نباشد.

• **نوع II.** در نقطه (x_1, t) ، تابع $f(x, t)$ تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و رابطه (۸.۲) برقرار

نباشد و این تابع در نقطه (x_2, t) ، تابعی $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و رابطه (۹.۲) برقرار نباشد.

تعریف ۲-۱۰-۸ ([8]) فرض کنید که $f(x, t): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی و $\partial_x f(x, t)$ تابعی $[gH-p]$ -

دیفرانسیل پذیر در $(x_0, t_0) \in \mathbb{D}$ نسبت به x باشد. علاوه بر این نقطه‌ی سویچ در $\mathbb{D}$ موجود نباشد. آنگاه

• $\partial_{x_{gH}} f(x, t)$ تابعی $[(i)-p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به x است اگر نوع $[gH-p]$ -دیفرانسیل پذیری $f(x, t)$ و $\partial_{x_{gH}} f(x, t)$ یکسان باشد:

$$\partial_{xx_{i.gH}} f(x_0, t_0; \alpha) = [\partial_{xx} f^-(x_0, t_0; \alpha), \partial_{xx} f^+(x_0, t_0; \alpha)].$$

• $\partial_{x_{gH}} f(x, t)$ تابعی $[(ii)-p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به x است اگر نوع $[gH-p]$ -دیفرانسیل پذیری $f(x, t)$ و $\partial_{x_{gH}} f(x, t)$ متفاوت باشد:

$$\partial_{xx_{i.gH}} f(x_0, t_0; \alpha) = [\partial_{xx} f^+(x_0, t_0; \alpha), \partial_{xx} f^-(x_0, t_0; \alpha)].$$

فصل ۳

معادلات دیفرانسیل معمولی غیر قطعی

۳-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا خصوصیات برای توابع مشتق پذیر تعمیم یافته‌ی هاگوهارا و توابع فازی ریمان انتگرال پذیر بیان و اثبات می‌شود. بسط تیلور به عنوان یک سری مهم و اساسی در مبحث روش‌های عددی بیان و در حالات مختلف دیفرانسیل پذیری اثبات می‌شود. روش عددی اویلر بر اساس بسط تیلور برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول بیان می‌شود و مفاهیمی مانند خطای برشی موضعی، خطای جامع و همگرایی این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس معادلات دیفرانسیلی مانند معادلات دیفرانسیل فازی خطی مرتبه اول، معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم مقدار مرزی و معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کامل به صورت جامع و کامل بررسی می‌شود و جواب آنها براساس نوع دیفرانسیل پذیری به دست می‌آید.

۳-۲ خصوصیات توابع مشتق پذیر تعمیم یافته‌ی هاگوهارا

این بخش به بررسی خصوصیات توابع تک متغیره‌ی مشتق پذیر می‌پردازد. خصوصیات مانند مشتق حاصل-جمع، مشتق حاصل تفریق، مشتق حاصل ضرب، قاعده‌ی زنجیره‌ای بر اساس نوع دیفرانسیل پذیری بیان و اثبات می‌شوند. علاوه بر این قضایای اساسی از حساب دیفرانسیل مانند لم رول، قضیه‌ی مقدار میانی، آزمون مشتق اول و دوم اثبات می‌شوند. در این بخش فرض کنید که $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه باز زیر مجموعه اعداد حقیقی و $\bar{\mathbb{I}}$ بستار این بازه، نشان‌دهنده یک بازه بسته در مجموعه اعداد حقیقی باشد.

قضیه ۳-۲-۱ ([14]). فرض کنید که $f, g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ توابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشند. در این صورت

$$(f(x) + g(x))'_{i.gH} = f'_{i.gH}(x) + g'_{i.gH}(x) \quad ۱.$$

$$۲. \quad (f(x) + g(x))'_{ii.gH} = f'_{ii.gH}(x) + g'_{ii.gH}(x)$$

قضیه ۲-۲-۳. فرض کنید $x \in \mathbb{I}$ و توابع $f, g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ توابعی $[gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند و نوع دیفرانسیل پذیری هر دو تابع یکسان باشد. در این صورت $f(x) \ominus_{gH} g(x)$ ، $[gH]$ -دیفرانسیل پذیر است و

$$(f \ominus_{gH} g)'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) \ominus_{gH} g'_{gH}(x).$$

اثبات. فرض کنید $h(x) = f(x) \ominus_{gH} g(x)$. باتوجه به تعریف (۲-۲-۴-۲) می توان نوشت

$$f(x) \ominus_{gH} g(x) = h(x) \iff \begin{cases} (i) & f(x) = g(x) + h(x), \\ or & (ii) & g(x) = f(x) + (-1)h(x). \end{cases} \quad (۱.۴)$$

حالت (i) را در معادله (۱.۴) در نظر بگیرید. باتوجه به قضیه (۱-۲-۳) می توان نوشت:

$$f'_{gH}(x) = g'_{gH}(x) + h'_{gH}(x) \Rightarrow h'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) \ominus g'_{gH}(x), \quad (۲.۴)$$

و حالت (ii) در معادله (۱.۴) به صورت مشابه می توان نتیجه گرفت که

$$g'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) + (-1)h'_{gH}(x) \Rightarrow h'_{gH}(x) = (-1)g'_{gH}(x) \ominus (-1)f'_{gH}(x). \quad (۳.۴)$$

در این صورت توابع $f'_{gH}(x), g'_{gH}(x)$ و $h'_{gH}(x)$ در تعریف (۲-۲-۴-۲) صدق می کنند. بنابراین از معادله (۲.۴)

$$\square. (f \ominus_{gH} g)'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) \ominus_{gH} g'_{gH}(x) \text{ که می توان نتیجه گرفت}$$

قضیه ۳-۲-۳. فرض کنید $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ، $g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ و $x \in \mathbb{I}$. علاوه بر این $g(x)$ تابعی دیفرانسیل پذیر در نقطه x و تابع فازی $f(x)$ تابعی $[gH]$ -دیفرانسیل پذیر در x باشد و این تابع در بازه $\mathbb{I}$ هیچ نقطه‌ی سویچی نداشته باشد. در این صورت

$$(f \odot g)'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x).$$

اثبات. با توجه به خصوصیات فاصله هاسدورف D و گزاره (۲-۶-۲) می توان نوشت

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f(x+h) \odot g(x+h) \ominus_{gH} f(x) \odot g(x)}{h}, f'_{gH}(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x)\right) &= \\ &= D\left(\frac{f(x+h) \odot g(x+h) \ominus_{gH} f(x) \odot g(x+h) + f(x) \odot g(x+h) \ominus_{gH} f(x) \odot g(x)}{h}, \right. \\ &\quad \left. f'_{gH}(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x)\right) \\ &= D\left(\frac{(f(x+h) \ominus_{gH} f(x)) \odot g(x+h) + f(x) \odot (g(x+h) - g(x))}{h}, f'_{gH}(x) \odot g(x) \oplus f(x) \odot g'(x)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq D\left(\frac{(f(x+h) \odot_{gH} f(x)) \odot g(x+h)}{h}, f'_{gH}(x) \odot g(x)\right) + D\left(\frac{f(x) \odot (g(x+h) - g(x))}{h}, f(x) \odot g'(x)\right) \\ &= D\left(\frac{(f(x+h) \odot_{gH} f(x))}{h} \odot g(x+h), f'_{gH}(x) \odot g(x)\right) + D\left(f(x) \odot \frac{(g(x+h) - g(x))}{h}, f(x) \odot g'(x)\right). \end{aligned}$$

که وقتی $h \rightarrow 0$ نتیجه مناسب به دست می آید. $\square$

تذکر ۱-۲-۳ ([7]). اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

- i. اگر $f(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر، $g(x) > 0$ و $g'(x) > 0$ آنگاه $(f \odot g)'_{gH}(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.
- ii. اگر $f(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر، $g(x) < 0$ و $g'(x) < 0$ آنگاه $(f \odot g)'_{gH}(x)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.
- iii. اگر $f(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر، $g(x) > 0$ و $g'(x) < 0$ آنگاه $(f \odot g)'_{gH}(x)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.
- iv. اگر $f(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر، $g(x) < 0$ و $g'(x) > 0$ آنگاه $(f \odot g)'_{gH}(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.

قضیه ۲-۳-۴. فرض کنید که $g: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} := \mathbb{C} = g(\mathbb{I})$ تابعی دیفرانسیل پذیر در x باشد. از طرفی $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی و gH -دیفرانسیل پذیر در هر نقطه از $g(x)$ باشد. در این صورت وقتی که $g'(x) > 0$

$$\begin{aligned} (fog)'_{i.gH}(x) &= g'(x) \odot f'_{i.gH}(g(x)), \\ (fog)'_{ii.gH}(x) &= g'(x) \odot f'_{ii.gH}(g(x)). \end{aligned}$$

و به ازای $g'(x) < 0$

$$\begin{aligned} (fog)'_{i.gH}(x) &= g'(x) \odot f'_{ii.gH}(g(x)), \\ (fog)'_{ii.gH}(x) &= g'(x) \odot f'_{i.gH}(g(x)). \end{aligned}$$

اثبات. فرض کنید که $(fog)(x; \alpha)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ باشد و $g'(x) > 0$ در این صورت داریم

$$\begin{aligned}(fog)'(x;\alpha) &= [(f^-(g(x;\alpha)))', (f^+(g(x;\alpha)))'] = [g'(x)(f^-)'(g(x;\alpha)), g'(x)(f^+)'(g(x;\alpha))] \\ &= g'(x)[(f^-)'(x;\alpha), (f^+)'(x;\alpha)] = g'(x)f'_{i.gH}(g(x;\alpha)).\end{aligned}$$

پس قضیه در حالت $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر برقرار است. اثبات برای حالتی که تابع $f(x)$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است و $g'(x) > 0$ ، مشابه است.

حال فرض کنید که $(fog)(x;\alpha)$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و $g'(x) < 0$. در این حالت داریم

$$\begin{aligned}(fog)'(x;\alpha) &= [(f^-(g(x;\alpha)))', (f^+(g(x;\alpha)))'] = [g'(x)(f^-)'(g(x;\alpha)), g'(x)(f^+)'(g(x;\alpha))] \\ &= g'(x)[(f^+)'(x;\alpha), (f^-)'(x;\alpha)] = g'(x)f'_{ii.gH}(g(x;\alpha)).\end{aligned}$$

اثبات برای حالت بعدی به صورت مشابه است. $\square$

قضیه ۳-۲-۵. فرض کنید که $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع فازی باشد. هرگاه $f(x)$ در نقطه‌ی $c \in (a;b)$ ماکزیمم موضعی (مینیمم موضعی) داشته و $f(x)$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه $f'_{gH}(c) = 0$.
اثبات. فرض کنید که c نقطه‌ی ماکزیمم موضعی باشد (اثبات برای حالتی که c مینیمم موضعی است به صورت مشابه است). تابع فازی f در نقطه‌ی c ، gH -دیفرانسیل پذیر است. بنابراین با توجه به تعریف (۲-۷-۸) می‌توان نوشت

$$f'_{gH}(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \ominus_{gH} f(c)}{x - c}.$$

هرگاه $x \in (a,c)$ آنگاه با توجه به تعریف (۲-۷-۸) و گزاره (۲-۵-۲) اگر

$$f(x) \ominus_{gH} f(c) \leq 0 \quad \text{و} \quad x - c < 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) \ominus_{gH} f(c)}{x - c} \geq 0,$$

پس $f'_{gH}(c) \geq 0$. به صورت مشابه با فرض $x \in (c,b)$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{f(x) \ominus_{gH} f(c)}{x - c} \leq 0, \quad \Rightarrow \quad f'_{gH}(c) \leq 0$$

و با توجه به آنچه که بیان شد در نهایت داریم $f'_{gH}(c) = 0$. $\square$

لم ۳-۲-۱. (لم رول) فرض کنید که f تابعی پیوسته فازی در $[a,b]$ و gH -دیفرانسیل پذیر روی (a,b) تابعی باشد. اگر $f(a) = f(b)$ در این صورت $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری $f'_{gH}(c) = 0$.
اثبات. داریم $f(a) = f(b)$ ، پس باتوجه به معادله ی (۲.۲) مقادیر $x_{Min}, x_{Max} \in [a,b]$ وجود دارند به طوری که به ازای همه مقادیر $x \in [a,b]$ داریم $f(x_{Min}) \leq f(x) \leq f(x_{Max})$.

حالتی را در نظر بگیرید که $f(x_{Min}) = f(x_{Max})$ ، پس f باید تابع ثابت باشد. بنابراین به ازای همه مقادیر $x \in (a, b)$ داریم $f'_{gH}(x) = 0$ در این صورت c می تواند هر مقداری در بازه (a, b) باشد.

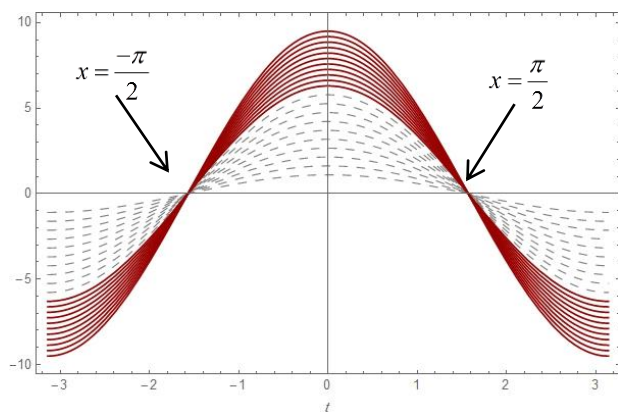
حال فرض کنید که $f(x_{Min}) < f(x_{Max})$. در این حالت حداقل یکی از مقادیر $f(x_{min})$ ، $f(x_{Max})$ برابر با $f(a) = f(b)$ نیست. بدون از دست دادن کلیت مساله، فرض می کنیم که $f(x_{Max}) \neq f(a) = f(b)$. حالت دیگر نیز به روشی یکسان اثبات می شود که از اثبات آن صرفه نظر می کنیم.

فرض کنید که $c = x_{Max}$ مشخص است که در این صورت $c \in (a, b)$ ، با توجه به قضیه (۳-۲-۵) می توان نتیجه گرفت که $f'_{gH}(c) = 0$. □

مثال ۳-۲-۱. فرض کنید $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_F$ و $f(x) = (1.1, 6.3, 9.5) \sin(x)$. این تابع در $[-\pi, \pi]$ پیوسته و $f(-\pi) = f(\pi) = 0$ از طرفی مشتق gH این تابع نیز در بازه $(-\pi, \pi)$ وجود دارد. پس با توجه به لم (۳-۲-۱)، برای یافتن مقدار مناسب برای c باید $f'_{gH}(x)$ را برابر با صفر قرار دهیم. داریم

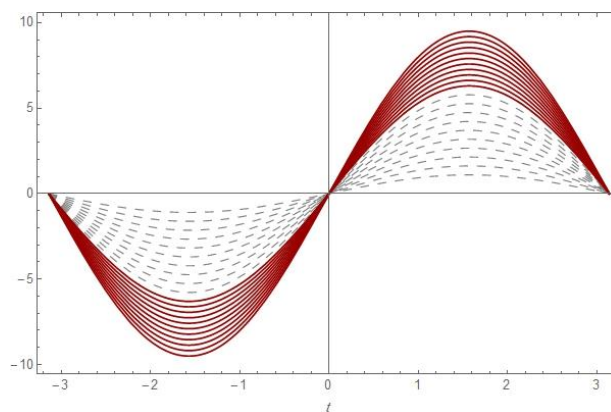
$$f'_{gH}(x) = (1.1, 6.3, 9.5) \cos(x) = 0,$$

پس در بازه $[-\pi, \pi]$ دو مقدار مناسب وجود دارد: $c_1 = -\frac{\pi}{2}$ ، $c_2 = \frac{\pi}{2}$. در شکل های (۳-۱) و (۳-۲) این نکته به صورت هندسی نشان داده شده است.



شکل ۳-۲. نمایش تابع فازی

$$f'_{gH}(x; \alpha) = [1.1 + 5.2\alpha \quad 9.5 - 3.2\alpha] \cos(x)$$



شکل ۳-۱. نمایش تابع فازی

$$f(x; \alpha) = [1.1 + 5.2\alpha \quad 9.5 - 3.2\alpha] \sin(x)$$

با استفاده از لم رول، یکی از مهم‌ترین قضایای مربوط به حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان اثبات کرد. این قضیه به قضیه مقدار میانی مشهور است. از قضیه‌ی مقدار میانی برای اثبات قضایای زیادی در حساب دیفرانسیل و انتگرال و موضوعات دیگری نظیر آنالیز عددی استفاده می‌شود.

قضیه ۶-۲-۳. (قضیه مقدار میانی فازی کوشی) فرض کنید $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی و پیوسته بر $[a,b]$ که در (a,b) gH -دیفرانسیل پذیر است. علاوه بر این $g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی و پیوسته در $[a,b]$ و دیفرانسیل پذیر در بازه (a,b) است. در این صورت $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که

$$[f(b) \ominus_{gH} f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'_{gH}(c). \quad (۴.۴)$$

اثبات. قرار می‌دهیم

$$\varphi(x) = [f(b) \ominus_{gH} f(a)]g(x) \ominus_{gH} [g(b) - g(a)]f(x).$$

با توجه به لم (۱-۷-۲) و قضیه (۲-۲-۳) نتیجه می‌گیریم که φ تابعی پیوسته فازی روی $[a,b]$ و gH -دیفرانسیل پذیر روی (a,b) است و $\varphi(a) = f(b)g(a) \ominus_{gH} f(a)g(b) = \varphi(b)$ با توجه به قضیه (۲-۲-۳) می‌توان برای معادله (۴.۴) نوشت

$$\varphi'_{gH}(x) = [f(b) \ominus_{gH} f(a)]g'(x) \ominus_{gH} [g(b) - g(a)]f'_{gH}(x).$$

با توجه به لم (۱-۲-۳)، مقداری مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد به طوری که $\varphi'_{gH}(c) = 0$. واضح است که نقطه c در معادله (۴.۴) صدق می‌کند. $\square$

قضیه ۷-۲-۳. (قضیه مقدار میانی فازی) فرض کنید $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی پیوسته فازی در بازه $[a,b]$ باشد که در (a,b) gH -دیفرانسیل پذیر است، آنگاه نقطه‌ای مانند $c \in (a,b)$ وجود دارد که در آن

$$f'_{gH}(c) = \frac{f(b) \ominus_{gH} f(a)}{b-a}.$$

اثبات. کافی است در قضیه (۶-۲-۳) قرار دهید $g(x) = x$. $\square$

مثال ۲-۲-۳. فرض کنید $f:[0,3] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $f(x) = (1, 6.5, 8)x^3$. تابع داده شده در بازه $[0,3]$ پیوسته است و در بازه $(0,3)$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر است. پس با توجه به قضیه مقدار میانی $c \in (0,3)$ وجود دارد به طوری که

$$3(1,6.5,8)c^2 = \frac{(1,6.5,8)9 \ominus_{gH} (1,6.5,8)(0)}{3},$$

پس بنابر قسمت (i) در گزاره (۱-۴-۴-۲) داریم $c=1$.

لم ۳-۲-۲. فرض کنید که $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ در (a,b) ، تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد.

۱. هر گاه به ازای هر $x \in (a,b)$ ، $f'_{gH}(x) \geq 0$ ، آنگاه f تابعی صعودی است.

۲. هر گاه به ازای هر $x \in (a,b)$ ، $f'_{gH}(x) \leq 0$ ، آنگاه f تابعی نزولی است.

۳. هر گاه به ازای هر $x \in (a,b)$ ، $f'_{gH}(x) = 0$ ، آنگاه f تابع ثابت است.

اثبات.

۱. فرض کنید به ازای همه مقادیر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'_{gH}(x) \geq 0$ و $p, q \in [a,b]$ و $p < q$. در این

صورت $[p,q] \in [a,b]$ و با توجه به قضیه (۷-۲-۳) می توان گفت که حداقل یک $c \in (p,q)$ وجود

دارد به طوری که $f'_{gH}(c) = \frac{f(q) \ominus_{gH} f(p)}{q-p}$. چون $c \in (p,q)$ پس $c \in (a,b)$ و این نشان می دهد

که

$$f(q) \ominus_{gH} f(p) = f'_{gH}(c)(q-p) \geq 0,$$

پس $f(p) \leq f(q)$ ، بنابراین f تابعی صعودی است.

۲. این بخش از قضیه به صورت مشابه با حالت ۱ اثبات می شود.

۳. به ازای هر $x \in (a,b)$ داریم $f'_{gH}(x) = 0$. قضیه (۷-۲-۳) نشان می دهد که

$$f'_{gH}(c)(q-p) = f(q) \ominus_{gH} f(p)$$

$$f(q) \ominus_{gH} f(p) = 0 \Rightarrow f(q) = f(p).$$

رابطه فوق بیان می کند که f در بازه $[a,b]$ یک ثابت است. $\square$

لم ۳-۲-۳. فرض کنید که $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ یک تابع فازی و $c \in (a,b)$ باشد. در این صورت

۱. هر گاه به ازای $\delta > 0$ ، تابع f روی $(c-\delta)$ صعودی و روی $(c, c+\delta)$ نزولی باشد، آنگاه c یک

ماکزیمم موضعی برای f است.

۲. هر گاه به ازای $\delta > 0$ ، تابع f روی $(c-\delta)$ نزولی و روی $(c, c+\delta)$ صعودی باشد، آنگاه c یک

مینیمم موضعی برای f است.

اثبات. با توجه به تعاریف (۲-۷-۴) و (۲-۷-۵)، اثبات واضح است. □

قضیه ۳-۲-۸. (آزمون اول مشتق) فرض کنید تابع فازی f بر تمام نقاط بازه‌ی باز (a, b) که شامل عددی مانند c است، پیوسته باشد و فرض کنید $f'_{gH}(x)$ بر تمام نقاط (a, b) به جز احتمالاً در عدد c وجود داشته باشد.

۱. اگر به ازای هر x واقع در بازه‌ی باز c نقطه‌ی انتهایی سمت راست آن باشد، $f'_{gH}(x) < 0$ و اگر به ازای هر x واقع در بازه‌ی باز c نقطه‌ی انتهایی سمت چپ آن باشد، $f'_{gH}(x) > 0$ ، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

۲. اگر به ازای هر x واقع در بازه‌ی باز c نقطه‌ی انتهایی سمت راست آن باشد، $f'_{gH}(x) > 0$ و اگر به ازای هر x واقع در بازه‌ی باز c نقطه‌ی انتهایی سمت چپ آن باشد، $f'_{gH}(x) < 0$ ، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

۳. اگر $f'_{gH}(x)$ در هر دو طرف c تغییر علامت ندهد، در این صورت $f(c)$ نه ماکزیمم موضعی و نه مینیمم موضعی است

اثبات. ما قسمت ۱ را اثبات می‌کنیم. سایر حالات به صورت مشابه اثبات می‌شود.

با توجه به فرض مساله، به ازای هر $c \in [a, b]$ می‌توان نوشت

$$\forall x \in (c, b): f'_{gH}(x) > 0 \quad \text{و} \quad \forall x \in (a, c): f'_{gH}(x) < 0.$$

بنا به لم (۳-۲-۲) تابع f در بازه $[a, c]$ نزولی و در بازه $[c, b]$ تابعی صعودی است. از لم (۳-۲-۳) نتیجه می‌شود که f در c دارای یک مینیمم موضعی است. □

آزمون مشتق اول برای اکسترمم‌های موضعی اساساً چنین می‌گوید که چنانچه f در c پیوسته باشد و اگر هنگامی که x در حوالی عدد c افزایش می‌یابد، علامت جبری $f'_{gH}(x)$ از مثبت به منفی تغییر کند، آنگاه f در c دارای یک ماکزیمم موضعی است و اگر هنگامی که x در حوالی c افزایش می‌یابد، علامت جبری $f'_{gH}(x)$ از منفی به مثبت تغییر کند، آنگاه f در c دارای یک مقدار مینیمم موضعی است.

قضیه ۳-۲-۹. (آزمون دوم مشتق) فرض کنید c یک عدد بحرانی تابع فازی f باشد و $f'_{gH}(c) = 0$. هم‌چنین فرض کنید به ازای هر x در بازه‌ی باز شامل c ، $f'_{gH}(x)$ وجود داشته باشد. علاوه بر این مشتق gH مرتبه دوم تابع f در نقطه c وجود دارد. آنگاه داریم

۱. اگر $f''_{gH}(c) > 0$ ، آنگاه f در c یک مقدار مینیمم موضعی دارد.
 ۲. اگر $f''_{gH}(c) < 0$ ، آنگاه f در c یک مقدار ماکزیمم موضعی دارد.
 ۳. اگر $0 \in \text{supp}(f''_{gH}(c))$ در این صورت نمی توان نوع نقطه‌ی c را با توجه به این قضیه به دست آورد.
- اثبات.

۱. با توجه به فرض $f''_{gH}(c)$ وجود دارد و $f''_{gH}(c) > 0$ ، در این صورت بازه‌ی بازی مانند I حاوی c وجود دارد به طوری که

$$0 < f''_{gH}(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_{gH}(c+h) \ominus_{gH} f'_{gH}(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_{gH}(c+h)}{h}.$$

پس به ازای h به اندازه کافی کوچک داریم $\frac{f'_{gH}(c+h)}{h} > 0$. این به معنی آن است که اگر $h < 0$ ، آنگاه $f'_{gH}(c+h) < 0$ و اگر $h > 0$ ، آنگاه $f'_{gH}(c+h) > 0$. بنابراین $f'_{gH}(x)$ از منفی به مثبت در c تغییر می کند لذا بنابر قضیه (۳-۲-۸) f در c دارای یک مقدار مینیمم موضعی است. اثبات بقیه حالات نیز به صورت مشابه است. $\square$

۳-۳ خصوصیات توابع فازی ریمان انتگرال پذیر

انتگرال یکی از مفاهیم اساسی در ریاضیات است که همراه با مشتق دو عملگر اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال را تشکیل می دهند. این بخش به بررسی خصوصیات توابع فازی ریمان انتگرال پذیر (FR-انتگرال پذیر) می پردازد و قضایایی اساسی مانند قضیه‌ی انتگرال گیری جزء به جزء اثبات می شوند.

لم ۳-۳-۱. فرض کنید که $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد. $f'_{gH}(x)$ تابعی پیوسته فازی روی $[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\int_s^a f'_{i.gH}(x) dx = (-1) \int_a^s f'_{ii.gH}(x) dx.$$

اثبات. با توجه به فرض قضیه، تابع f تابعی (FR)-انتگرال پذیر است و

$$\begin{aligned} \int_s^a f'_{i.gH}(x; \alpha) dx &= \left[\int_s^a (f^-)'(x; \alpha) dx, \int_s^a (f^+)'(x; \alpha) dx \right] \\ &= [f^-(a; \alpha) - f^-(s; \alpha), f^+(a; \alpha) - f^+(s; \alpha)] = f(a; \alpha) \ominus f(s; \alpha), \end{aligned} \quad (5.4)$$

علاوه براین

$$\int_a^s f'_{ii.gH}(x; \alpha) dx = \left[\int_a^s (f^+)'(x; \alpha) dx, \int_a^s (f^-)'(x; \alpha) dx \right] \quad (6.4)$$

$$= [f^+(s; \alpha) - f^+(a; \alpha), f^-(s; \alpha) - f^-(a; \alpha)] = (-1)f(a; \alpha) \ominus (-1)f(s; \alpha),$$

با توجه به معادلات (5.4) و (6.4) حکم قضیه به دست می آید. $\square$

قضیه ۳-۳-۱. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد به طوری که نوع دیفرانسیل پذیری روی $[a, b]$ تغییر نکند.

i. اگر $f(x)$ یک تابع $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه $f'_{i.gH}(x)$ تابعی (FR) -انتگرال پذیر روی $[a, b]$ است و

$$f(s) = f(a) + \int_a^s f'_{i.gH}(x) dx, \quad a < s \leq b.$$

ii. اگر $f(x)$ یک تابع $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه $f'_{ii.gH}(x)$ تابعی (FR) -انتگرال پذیر روی $[a, b]$ است و

$$f(a) = f(s) + (-1) \int_a^s f'_{ii.gH}(x) dx, \quad a < s \leq b.$$

اثبات. به دلیل اینکه تابع f تابعی gH -دیفرانسیل پذیر است، بنابراین پیوسته فازی است. در این صورت می-توان گفت که f یک تابع (FR) -انتگرال پذیر روی $[a, b]$ است.

i. فرض کنید که $f(x)$ یک تابع $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. داریم

$$\begin{aligned} \int_a^s f'_{i.gH}(x; \alpha) dx &= \left[\int_a^s (f^-)'(x; \alpha) dx, \int_a^s (f^+)'(x; \alpha) dx \right] \\ &= [f^-(s; \alpha) - f^-(a; \alpha), f^+(s; \alpha) - f^+(a; \alpha)] \\ &= [f^-(s; \alpha), f^+(s; \alpha)] \ominus [f^-(a; \alpha) - f^+(a; \alpha)], \end{aligned}$$

پس می توان نوشت

$$\int_a^s f'_{i.gH}(x; \alpha) dx = f(s; \alpha) \ominus f(a; \alpha) \Rightarrow f(s; \alpha) = f(a; \alpha) + \int_a^s f'_{i.gH}(x; \alpha) dx.$$

اثبات در این حالت برقرار است.

ii. فرض کنید که $f(x)$ یک تابع $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
(-1) \int_a^s f'_{ii.gH}(x; \alpha) dx &= \left[(-1) \int_a^s (f^-)'(x; \alpha) dx, (-1) \int_a^s (f^+)'(x; \alpha) dx \right] \\
&= \left[f^-(a; \alpha) - f^-(s; \alpha), f^+(a; \alpha) - f^+(s; \alpha) \right] \\
&= \left[f^-(a; \alpha), f^+(a; \alpha) \right] \odot \left[f^-(s; \alpha) - f^+(s; \alpha) \right].
\end{aligned}$$

بنابراین حکم برقرار است. $\square$

قضیه ۳-۳-۲. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $f \in \mathcal{C}_{gH}^n([a, b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$. به ازای هر $s \in [a, b]$

i. اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k=1, \dots, n$ توابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند و نوع دیفرانسیل پذیری روی $[a, b]$ تغییری نکند، آنگاه

$$f_{i.gH}^{(k-1)}(s) = f_{i.gH}^{(k-1)}(a) + \int_a^s f_{i.gH}^{(k)}(x) dx.$$

ii. اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k=1, \dots, n$ توابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند و نوع دیفرانسیل پذیری روی $[a, b]$ تغییری نکند، در این صورت

$$f_{ii.gH}^{(k-1)}(s) = f_{ii.gH}^{(k-1)}(a) + \int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x) dx.$$

iii. اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k=2m-1, m \in \mathbb{N}$ توابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند، $f(x)$ و $f^{(k)}, k=2m, m \in \mathbb{N}$ توابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند. داریم

$$f_{i.gH}^{(k-1)}(s) = f_{i.gH}^{(k-1)}(a) \odot (-1) \int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x) dx.$$

iv. اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k=2m-1, m \in \mathbb{N}$ توابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند. همچنین $f(x)$ و توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k=2m, m \in \mathbb{N}$ توابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند، می توان گفت

$$f_{ii.gH}^{(k-1)}(s) = f_{ii.gH}^{(k-1)}(a) \odot (-1) \int_a^s f_{i.gH}^{(k)}(x) dx.$$

اثبات. از آنجا که $f \in \mathcal{C}_{gH}^k([a, b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ بنابراین تابع f تابعی (FR) -دیفرانسیل پذیر است. چون اثبات قسمت (i) و (ii) مشابه است، تنها قسمت (ii) در اینجا اثبات می شود. بنابر فرض قضیه در این حالت به ازای

همه مقادیر $k=1, 2, \dots, n$ توابع $f_{gH}^{(k)}$ ، توابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر هستند، پس

$$\begin{aligned}
\int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x; \alpha) dx &= \left[\int_a^s (f^+)^{(k)}(x; \alpha) dx, \int_a^s (f^-)^{(k)}(x; \alpha) dx \right] \\
&= \left[(f^+)^{(k-1)}(s; \alpha) - (f^+)^{(k-1)}(a; \alpha), (f^-)^{(k-1)}(s; \alpha) - (f^-)^{(k-1)}(a; \alpha) \right] \\
&= \left[(f^+)^{(k-1)}(s; \alpha), (f^-)^{(k-1)}(s; \alpha) \right] \odot \left[(f^+)^{(k-1)}(a; \alpha), (f^-)^{(k-1)}(a; \alpha) \right],
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x)dx = f_{ii.gH}^{(k-1)}(s) \ominus f_{ii.gH}^{(k-1)}(a) \quad \Rightarrow \quad f_{ii.gH}^{(k-1)}(s) = f_{ii.gH}^{(k-1)}(a) + \int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x)dx.$$

قضیه در این حالت برقرار است.

اثبات قسمت (iii). (قسمت (iv) به صورت مشابه اثبات می شود). بر اساس این فرض که $f_{gH}^{(k)}$ به ازای مقادیر

$k = 2m-1, m \in \mathbb{N}$ تابعی $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر و به ازای مقادیر $k = 2m, m \in \mathbb{N}$ تابعی

$[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر هستند، می توان نوشت

$$\begin{aligned} & f_{i.gH}^{(k-1)}(s; \alpha) + (-1) \int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x; \alpha) dx \\ &= \left[(f^-)^{(k-1)}(s; \alpha), (f^+)^{(k-1)}(s; \alpha) \right] + (-1) \left[\int_a^s (f^+)^{(k)}(x; \alpha) dx, \int_a^s (f^-)^{(k)}(x; \alpha) dx \right] \\ &= \left[(f^-)^{(k-1)}(s; \alpha), (f^+)^{(k-1)}(s; \alpha) \right] + (-1) \left[(f^+)^{(k-1)}(s; \alpha) - (f^+)^{(k-1)}(a; \alpha), (f^-)^{(k-1)}(s; \alpha) - (f^-)^{(k-1)}(a; \alpha) \right] \\ &= \left[(f^-)^{(k-1)}(s; \alpha), (f^+)^{(k-1)}(s; \alpha) \right] + \left[(f^-)^{(k-1)}(a; \alpha) - (f^-)^{(k-1)}(s; \alpha), (f^+)^{(k-1)}(a; \alpha) - (f^+)^{(k-1)}(s; \alpha) \right] \\ &= \left[(f^-)^{(k-1)}(a; \alpha), (f^+)^{(k-1)}(a; \alpha) \right]. \end{aligned}$$

در این صورت

$$f_{i.gH}^{(k-1)}(s) + (-1) \int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x) dx = f_{i.gH}^{(k-1)}(a) \quad \Rightarrow \quad f_{i.gH}^{(k-1)}(s) = f_{i.gH}^{(k-1)}(a) \ominus (-1) \int_a^s f_{ii.gH}^{(k)}(x) dx.$$

قضیه در حالت (iii) اثبات می شود. $\square$.

قضیه ۳-۳-۳. انتگرال گیری جزء به جزء) اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر بدون هیچ

نقطه‌ی سویچ در بازه (a, b) و $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی حقیقی و مشتق پذیر در (a, b) باشد، آنگاه

$$\int_a^b f'_{gH}(x) \odot g(x) dx = (f(b) \odot g(b)) \ominus_{gH} (f(a) \odot g(a)) \ominus_{gH} \int_a^b f(x) \odot g'(x) dx.$$

اثبات. با توجه به قضیه (۳-۲-۳) داریم

$$(f(x) \odot g(x))'_{gH} = f'_{gH}(x) \odot g(x) + f(x) \odot g'(x). \quad (7.4)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۷.۴) نسبت به x و با توجه به این فرض که تفریق تعمیم یافته‌ی هاکوها را

موجود است و قضیه (۲-۹-۱) داریم

$$f(b) \odot g(b) \ominus_{gH} f(a) \odot g(a) = \int_a^b f'_{gH}(x) \odot g(x) dx + \int_a^b f(x) \odot g'(x) dx.$$

بنابراین اثبات تمام است. $\square$.

۳-۴ قضیه تیلور فازی

مبحث اصلی این بخش قضیه تیلور فازی است. این قضیه برای بررسی رفتار یک تابع مشتق پذیر از مرتبه n -ام حول یک نقطه مورد استفاده قرار می گیرد و چند جمله ای حاصل از این بسط مقدار تقریبی تابع را در همسایگی نقطه به دست می دهد. با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته ی ها کوها را قضیه ی تیلور اثبات می شود. دقت کنید که بسط تیلور برای تقریب رفتار یک تابع حول یک نقطه است. برای همین منظور در حالتی که نقطه ی سویچ در بازه وجود دارد بسط تیلور در ε -همسایگی نقطه ی سویچ نوشته می شود تا نقطه ی سویچ نیز در بازه قرار گیرد.

قضیه ۳-۴-۱. فرض کنید $T = [a, a + \beta] \subset \mathbb{R}$ که در آن $\beta > 0$ و $f \in C_{gH}^n([a, b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ به ازای هر $s \in T$

داریم

i. اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n-1$ توابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند و نوع $-gH$ -دیفرانسیل پذیری تغییری نکند. در این صورت

$$f(s) = f(a) + f'_{i.gH}(a) \odot (s-a) + f''_{i.gH}(a) \odot \frac{(s-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n-1)}_{i.gH}(a) \odot \frac{(s-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(a, s),$$

که در آن

$$R_n(a, s) := \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \dots \left(\int_a^{s_{n-1}} f^{(n)}_{i.gH}(s_n) ds_n \right) ds_{n-1} \dots \right) ds_1.$$

ii. اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n-1$ توابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند و نوع $-gH$ -دیفرانسیل پذیری تغییری نکند، آنگاه

$$f(s) = f(a) \ominus (-1) f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) \ominus (-1) f''_{ii.gH}(a) \odot \frac{(a-s)^2}{2!} \ominus (-1) \dots \ominus (-1) f^{(n-1)}_{ii.gH}(a) \odot \frac{(a-s)^{n-1}}{(n-1)!} \ominus (-1) R_n(a, s),$$

که در آن

$$R_n(a, s) := \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \dots \left(\int_a^{s_{n-1}} f^{(n)}_{ii.gH}(s_n) ds_n \right) ds_{n-1} \dots \right) ds_1.$$

iii. اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 2m-1, m \in \mathbb{N}$ توابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر و به ازای $k = 2m, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ توابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند، آنگاه

$$f(s) = f(a) \odot (-1) f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) + f''_{i.gH}(a) \odot \frac{(a-s)^2}{2!} \odot (-1) \dots \odot (-1) f^{(\frac{k-1}{2})}_{ii.gH}(a) \odot \frac{(a-s)^{\frac{k}{2}-1}}{(\frac{k}{2}-1)!} \\ + f^{(\frac{k}{2})}_{i.gH}(a) \odot \frac{(a-s)^{\frac{k}{2}}}{(\frac{i}{2})!} \odot (-1) \dots \odot (-1) R_n(a, s)$$

که در آن

$$R_n(a, s) := \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \dots \left(\int_a^{s_{n-1}} f^{(n)}_{i.gH}(s_n) ds_n \right) ds_{n-1} \dots \right) ds_1.$$

iv. فرض کنید $f \in \mathcal{C}_{gH}^k([a, b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$, $k \geq 3$. همچنین فرض کنید f در بازه $[a, \xi]$, $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر و در بازه $[\xi, b]$, $-(ii) - gH$ دیفرانسیل پذیر باشد (این به معنای آن است که نقطه ξ نقطه سوپچ نوع I برای مشتق مرتبه اول f است) و نقطه $x_0 \in [a, \xi]$ را به گونه ای در نظر بگیرید که در ε -همسایگی از ξ قرار داشته باشد و مشتق مرتبه اول تابع f در نقطه ξ_1 از بازه $[x_0, \xi]$ دارای نقطه سوپچ نوع II باشد. علاوه براین فرض کنید که نوع دیفرانسیل پذیری $f^{(k)}_{gH}$ در بازه $[\xi, b]$ تغییری نکند. در این صورت

$$f(s) = f(x_0) + f'_{i.gH}(x_0) \odot (\xi - x_0) \odot f''_{ii.gH}(x_0) \odot (x_0 - \xi_1) \odot (\xi - x_0) + f''_{i.gH}(\xi_1) \odot \left(\frac{(\xi - \xi_1)^2}{2} - \frac{(x_0 - \xi_1)^2}{2} \right) \\ \odot (-1) f'_{ii.gH}(\xi) \odot (s - \xi) \odot (-1) f''_{ii.gH}(\xi) \odot \frac{(s - \xi)^2}{2!} \odot (-1) \int_{x_0}^{\xi} \left(\int_{x_0}^{\xi_1} \left(\int_{x_0}^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_4) ds_4 \right) ds_2 \right) ds_1 \\ + \int_{x_0}^{\xi} \left(\int_{\xi_1}^{s_1} \left(\int_{\xi_1}^{s_3} f'''_{i.gH}(s_5) ds_5 \right) ds_3 \right) ds_1 \odot (-1) \int_{\xi}^s \left(\int_{\xi}^{t_1} \left(\int_{x_0}^{t_2} f'''_{ii.gH}(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1.$$

اثبات. چون $f \in \mathcal{C}_{gH}^n([a, b], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ پس $f^{(k)}_{gH}$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n$ توابعی (FR) -انتگرال پذیر روی T هستند.

i. فرض کنید که f تابعی $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر باشد. f تابع فازی پیوسته است، بنابراین طبق قضیه (۳-۳-۱) داریم

$$f(s) = f(a) + \int_a^s f'_{i.gH}(s_1) ds_1,$$

و بنابر قضیه (۳-۳-۲) می توان نوشت

$$f'_{i.gH}(s_1) = f'_{i.gH}(a) + \int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2) ds_2,$$

در این صورت

$$\begin{aligned}\int_a^s f'_{i.gH}(s_1)ds_1 &= \int_a^s f'_{i.gH}(a)ds_1 + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1 \\ &= f'_{i.gH}(a) \odot (s-a) + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1.\end{aligned}$$

انتگرال دوگانه آخر با توجه به لم های (۲-۹-۲) و (۳-۹-۲) متعلق به فضای $\mathbb{R}_F$ است. بنابراین

$$f(s) = f(a) + f'_{i.gH}(a) \odot (s-a) + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1.$$

به صورت مشابه

$$f''_{i.gH}(s_2) = f''_{i.gH}(a) + \int_a^{s_2} f'''_{i.gH}(s_3)ds_3.$$

با انتگرال گیری از مقدار $f''_{i.gH}(s_2)$ در رابطه بالا داریم

$$\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2 = f''_{i.gH}(a) \odot (s_1-a) + \int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{i.gH}(s_3)ds_3 \right) ds_2$$

علاوه براین

$$\int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1 = f''_{i.gH}(a) \odot \int_a^s (s_1-a)ds_1 + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{i.gH}(s_3)ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1, \quad (۸.۴)$$

باتوجه به لم (۳-۹-۲)، انتگرال سه گانه موجود در معادله (۸.۴) متعلق به فضای توابع فازی است. در این

صورت داریم

$$f(s) = f(a) + f'_{i.gH}(a) \odot (s-a) + f''_{i.gH}(a) \odot \frac{(s-a)^2}{2!} + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{i.gH}(s_3)ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1.$$

فرمول بسط تیلور برای این نوع از دیفرانسیل پذیری مشابه با روند توضیح داده شده به دست می آید.

ii. فرض کنید که f تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. بر اساس قضیه (۳-۳-۱) داریم

$$f(a) = f(s) + (-1) \int_a^s f'_{ii.gH}(s_1)ds_1,$$

در این صورت

$$f(s) = f(a) \ominus (-1) \int_a^s f'_{ii.gH}(s_1)ds_1.$$

از آنجا که نوع دیفرانسیل پذیری تغییری نمی کند، بنابر قضیه (۳-۳-۲) و (FR)-انتگرال پذیری $f'_{ii.gH}$ روی T

می توان گفت

$$f'_{ii.gH}(s_1) = f'_{ii.gH}(a) + \int_a^{s_1} f''_{ii.gH}(s_2)ds_2. \quad (۹.۴)$$

از طرفین معادله (۹.۴) انتگرال می گیریم، در این صورت

$$\begin{aligned}\int_a^s f'_{ii.gH}(s_1)ds_1 &= \int_a^s f'_{ii.gH}(a)ds_1 + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{ii.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1 \\ &= f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{ii.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1,\end{aligned}$$

بنابراین

$$f(s) = f(a) \odot (-1) f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) \odot (-1) \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{ii.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1 \quad (۱۰.۴)$$

از طرفی

$$f''_{ii.gH}(s_2) = f''_{ii.gH}(a) + \int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3)ds_3 \quad (۱۱.۴)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله ی (۱۱.۴) در بازه $[a, s_1]$ ، داریم

$$\int_a^{s_1} f''_{ii.gH}(s_2)ds_2 = f''_{ii.gH}(a) \odot (s_1-a) + \int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3)ds_3 \right) ds_2.$$

از طرفین معادله ی بالا بار دیگر در بازه $[a, s]$ انتگرال می گیریم. بنابراین

$$\int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{ii.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1 = f''_{ii.gH}(a) \odot \int_a^s (s_1-a)ds_1 + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3)ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1, \quad (۱۲.۴)$$

انتگرال سه گانه موجود در معادله ی (۱۲.۴) بنابر لم (۲-۹-۳) پیوسته است و با توجه به لم (۲-۹-۲) این انتگرال

متعلق به فضای اعداد فازی است. با جایگذاری معادله ی (۱۲.۴) در معادله ی (۱۰.۴) داریم

$$f(s) = f(a) \odot (-1) f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) \odot (-1) f''_{ii.gH}(a) \odot \frac{(s-a)^2}{2!} \odot (-1) \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3)ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1$$

با ادامه روند به صورت مشابه، حکم قضیه در این حالت نیز به دست می آید.

iii. با توجه به فرض قضیه، f تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است. بنابر قضیه (۱-۳-۳) داریم

$$f(s) = f(a) \odot (-1) \int_a^s f'_{ii.gH}(s_1)ds_1.$$

با توجه به این فرض که f'_{gH} تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است و قضیه (۲-۳-۳) می توان گفت

$$f'_{ii.gH}(s_1) = f'_{ii.gH}(a) \odot (-1) \int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2.$$

از طرفین رابطه ی بالا انتگرال می گیریم. بنابراین

$$\begin{aligned}\int_a^s f'_{ii.gH}(s_1)ds_1 &= \int_a^s f'_{ii.gH}(a)ds_1 \odot (-1) \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1 \\ &= f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) \odot (-1) \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2)ds_2 \right) ds_1.\end{aligned}$$

با مد نظر قرار دادن دو لم (۲-۹-۲) و (۳-۹-۲) انتگرال دو گانه در معادله بالا متعلق به فضای $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ است. در این صورت

$$f(s) = f(a) \odot (-1) f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) + \int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2) ds_2 \right) ds_1, \quad (۱۳.۴)$$

از طرفی با توجه به فرض قضیه، f'' تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است. بنابر قضیه (۲-۳-۳) داریم

$$f''_{i.gH}(s_2) = f''_{i.gH}(a) \odot (-1) \int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3) ds_3,$$

سپس با انتگرال گیری از طرفین معادله‌ی بالا می‌توان نوشت

$$\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2) ds_2 = f''_{i.gH}(a) \odot (s_1 - a) \odot (-1) \int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3) ds_3 \right) ds_2.$$

هم‌چنین

$$\int_a^s \left(\int_a^{s_1} f''_{i.gH}(s_2) ds_2 \right) ds_1 = f''_{i.gH}(a) \odot \int_a^s (s_1 - a) ds_1 \odot (-1) \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3) ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1, \quad (۱۴.۴)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱۴.۴) در معادله‌ی (۱۳.۴) داریم

$$f(s) = f(a) \odot (-1) f'_{ii.gH}(a) \odot (s-a) + f''_{i.gH}(a) \odot \frac{(s-a)^2}{2!} \odot (-1) \int_a^s \left(\int_a^{s_1} \left(\int_a^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_3) ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1$$

با توجه به لم‌های (۲-۹-۲) و (۳-۹-۲) انتگرال سه گانه موجود در معادله‌ی بالا متعلق به فضای فازی است. با ادامه همین روند اثبات در این حالت نیز برقرار است.

iv. بر اساس فرض قضیه در این حالت، f در بازه $[a, \xi]$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است و

$x_0 \in [a, \xi]$ و در $\mathcal{E}$ -همسایگی ξ قرار دارد. بنابر بر قضیه (۱-۳-۳) می‌توان نوشت

$$f(\xi) = f(x_0) + \int_{x_0}^{\xi} f'_{i.gH}(s_1) ds_1, \quad (۱۵.۴)$$

هم‌چنین f در بازه $[\xi, b]$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است پس به ازای $s \in [\xi, b]$ داریم

$$f(s) = f(\xi) \odot (-1) \int_{\xi}^s f'_{ii.gH}(t_1) dt_1, \quad (۱۶.۴)$$

از معادلات (۱۵.۴) و (۱۶.۴) نتیجه می‌شود

$$f(s) = f(x_0) + \int_{x_0}^{\xi} f'_{i.gH}(s_1) ds_1 \odot (-1) \int_{\xi}^s f'_{ii.gH}(t_1) dt_1, \quad (۱۷.۴)$$

انتگرال اول در سمت راست معادله‌ی (۱۷.۴) را در نظر بگیرید. با توجه به فرض مساله، نقطه‌ی ξ_1 یک نقطه‌ی

سویچ برای gH -مشتق مرتبه اول تابع f است. بنابراین f'_{gH} در بازه $[x_0, \xi_1]$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل

پذیر و در بازه $[\xi_1, \xi]$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است. لذا بنابر قضیه (۲-۳-۳) داریم

$$f'_{i.gH}(\zeta_1) = f'_{i.gH}(\zeta_1) \ominus (-1) \int_{x_0}^{\zeta_1} f''_{ii.gH}(s_2) ds_2, \quad (۱۸.۴)$$

به دلیل اینکه تابع f'_{gH} در بازه $[\zeta_1, \xi]$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است با روند مشابه می توان نوشت

$$f'_{i.gH}(s_1) = f'_{i.gH}(\zeta_1) + \int_{\zeta_1}^{s_1} f''_{i.gH}(s_3) ds_3, \quad (۱۹.۴)$$

معادله (۱۸.۴) را در معادله (۱۹.۴) جایگذاری کنید پس

$$f'_{i.gH}(s_1) = f'_{i.gH}(\zeta_1) \ominus (-1) \int_{x_0}^{\zeta_1} f''_{ii.gH}(s_2) ds_2 + \int_{\zeta_1}^{s_1} f''_{i.gH}(s_3) ds_3, \quad (۲۰.۴)$$

در معادله (۲۰.۴) با توجه به قضیه (۲-۳-۳) داریم

$$f''_{ii.gH}(s_2) = f''_{ii.gH}(x_0) + \int_{x_0}^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_4) ds_4 \quad (۲۱.۴)$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{\zeta_1} f''_{ii.gH}(s_2) ds_2 = f''_{ii.gH}(x_0) \odot (\zeta_1 - x_0) + \int_{x_0}^{\zeta_1} \left(\int_{x_0}^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_4) ds_4 \right) ds_2.$$

و

$$f''_{i.gH}(s_3) = f''_{i.gH}(\zeta_1) + \int_{\zeta_1}^{s_3} f'''_{i.gH}(s_5) ds_5 \quad (۲۲.۴)$$

$$\Rightarrow \int_{\zeta_1}^{s_1} f''_{i.gH}(s_3) ds_3 = f''_{i.gH}(\zeta_1) \odot (s_1 - \zeta_1) + \int_{\zeta_1}^{s_1} \left(\int_{\zeta_1}^{s_3} f'''_{i.gH}(s_5) ds_5 \right) ds_3.$$

با جایگذاری معادلات (۲۱.۴) و (۲۲.۴) را در معادله (۲۰.۴) داریم

$$\begin{aligned} f'_{i.gH}(s_1) &= f'_{i.gH}(x_0) \ominus f''_{ii.gH}(x_0) \odot (x_0 - \zeta_1) + f''_{i.gH}(\zeta_1) \odot (s_1 - \zeta_1) \\ &\ominus (-1) \int_{x_0}^{\zeta_1} \left(\int_{x_0}^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_4) ds_4 \right) ds_2 + \int_{\zeta_1}^{s_1} \left(\int_{\zeta_1}^{s_3} f'''_{i.gH}(s_5) ds_5 \right) ds_3. \end{aligned} \quad (۲۳.۴)$$

از طرفین معادله (۲۳.۴) انتگرال بگیرید. بنابراین انتگرال اول در سمت راست معادله (۱۷.۴) برابر است با

$$\int_{x_0}^{\xi} f'_{i.gH}(s_1) ds_1 = f'_{i.gH}(x_0) \odot (\xi - x_0) \ominus f''_{ii.gH}(x_0) \odot (x_0 - \zeta_1) \odot (\xi - x_0) + f''_{i.gH}(\zeta_1) \odot \left(\frac{(\xi - \zeta_1)^2}{2} - \frac{(x_0 - \zeta_1)^2}{2} \right) \quad (۲۴.۴)$$

$$\ominus (-1) \int_{x_0}^{\xi} \left(\int_{x_0}^{\zeta_1} \left(\int_{x_0}^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_4) ds_4 \right) ds_2 \right) ds_1 + \int_{x_0}^{\xi} \left(\int_{\zeta_1}^{s_1} \left(\int_{\zeta_1}^{s_3} f'''_{i.gH}(s_5) ds_5 \right) ds_3 \right) ds_1.$$

اکنون انتگرال دوم سمت راست معادله (۱۷.۴) را در نظر بگیرید. با توجه به فرض قضیه در این حالت $f^{(i)}$ به

ازای $i=2,3$ توابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر هستند و نوع دیفرانسیل پذیری در بازه $[\xi, b]$ تغییری نمی-

کند. بنابر قضیه (۲-۳-۳) داریم

$$f'_{ii.gH}(t_1) = f'_{ii.gH}(\xi) + \int_{\xi}^{t_1} f''_{ii.gH}(t_2) dt_2, \quad (۲۵.۴)$$

و

$$f''_{ii.gH}(t_2) = f''_{ii.gH}(\xi) + \int_{\xi}^{t_2} f'''_{ii.gH}(t_3) dt_3 \quad (26.4)$$

$$\Rightarrow \int_{\xi}^{t_1} f''_{ii.gH}(t_2) dt_2 = f''_{ii.gH}(\xi) \odot (t_1 - \xi) + \int_{\xi}^{t_1} \left(\int_a^{t_2} f'''_{ii.gH}(t_3) dt_3 \right) dt_2,$$

با جایگذاری معادله‌ی (26.4) در معادله‌ی (25.4) داریم

$$f'_{ii.gH}(t_1) = f'_{ii.gH}(\xi) + f''_{ii.gH}(\xi) \odot (t_1 - \xi) + \int_{\xi}^{t_1} \left(\int_a^{t_2} f'''_{ii.gH}(t_3) dt_3 \right) dt_2, \quad (27.4)$$

پس انتگرال دوم در معادله‌ی (17.4) برابر است با

$$\int_{\xi}^s f'_{ii.gH}(t_1) dt_1 = f'_{ii.gH}(\xi) \odot (s - \xi) + f''_{ii.gH}(\xi) \odot \frac{(s - \xi)^2}{2!} + \int_{\xi}^s \left(\int_{\xi}^{t_1} \left(\int_a^{t_2} f'''_{ii.gH}(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1. \quad (28.4)$$

معادلات (28.4) و (24.4) را در معادله‌ی (17.4) جایگذاری کنید. بنابراین

$$\begin{aligned} f(s) = & f(x_0) + f'_{i.gH}(x_0) \odot (\xi - x_0) \odot f''_{ii.gH}(x_0) \odot (x_0 - \xi_1) \odot (\xi - x_0) + f''_{i.gH}(\xi_1) \odot \left(\frac{(\xi - \xi_1)^2}{2} - \frac{(x_0 - \xi_1)^2}{2} \right) \\ & \odot (-1) f'_{ii.gH}(\xi) \odot (s - \xi) \odot (-1) f''_{ii.gH}(\xi) \odot \frac{(s - \xi)^2}{2!} \odot (-1) \int_{x_0}^{\xi} \left(\int_{x_0}^{\xi_1} \left(\int_{x_0}^{s_2} f'''_{ii.gH}(s_4) ds_4 \right) ds_2 \right) ds_1 \\ & + \int_{x_0}^{\xi} \left(\int_{\xi_1}^{s_1} \left(\int_{\xi_1}^{s_3} f'''_{i.gH}(s_5) ds_5 \right) ds_3 \right) ds_1 \odot (-1) \int_{\xi}^s \left(\int_{\xi}^{t_1} \left(\int_{x_0}^{t_2} f'''_{ii.gH}(t_3) dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 \end{aligned}$$

پس اثبات تمام است. $\square$

۳-۵ حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول با روش اوایلر

در این بخش ابتدا یکتایی و وجود جواب معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول بر اساس مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا اثبات می‌شود. سپس روش اوایلر برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول را مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش اوایلر روشی بسیار ساده اما تقریباً فاقد دقت است. بررسی این روش از این جهت ارزشمند است که راه را برای فهم روش‌های دقیق‌تر و در عین حال پیچیده‌تر هموار می‌کند.

مساله فازی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'_{gH}(x) = f(x, y(x)) & , \quad x \in [0, T]. \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \quad (29.4)$$

که در آن $f: [0, T] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی پیوسته است. فرض کنید که تعداد نقاط سویچ در بازه $[0, T]$ متناهی باشد.

قضیه ۳-۵-۱. شرایط زیر را در نظر بگیرید

i. فرض کنید $R_0 = [0, p] \times \bar{B}(y_0, q)$ ، $p, q > 0$ و $y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ که در آن

$\bar{B}(y_0, q) = \{y \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} : D(y, y_0) \leq q\}$ نشان دهنده‌ی یک گوی بسته در فضای $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ است. هم-

چنین $f: R_0 \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ یک تابع پیوسته فازی است به طوری که به ازای تمام مقادیر $(x, y) \in R_0$

داریم $D(f(x, y), 0) \leq M$ و این تابع در شرط لیپ شیتس نیز صدق کند، به عبارت دیگر $L > 0$

وجود داشته باشد به طوری که

$$D(f(x, y), f(x, z)) \leq L D(y, z), \quad \forall (x, y), (x, z) \in R_0$$

ii. $y(x)$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد و تعداد نقاط سویچ متناهی باشند.

آنگاه مسئله‌ی مقدار اولیه (۲۹.۴) دارای جواب یکتای $y(., \alpha): [0, p] \rightarrow \bar{B}(y_0, q)$ خواهد بود و دنباله‌ی

تکراری

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y_{n+1}(x) \ominus_g y_0 = \int_0^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

به این جواب همگرا خواهد بود.

اثبات. با توجه به فرضیات قضیه، بنابر قضیه ۲۵ در مقاله [13] و قضیه ۲۸ در مقاله [44] اثبات واضح

است. $\square$

روش اوایلر یک تقریب پیوسته برای جواب در $0 \leq x \leq T$ به دست نمی‌دهد بلکه در برخی از نقاط $[0, T]$

تقریبی از جواب $y(x)$ را به دست می‌آورد. این روش بر اساس قضیه تیلور فرمول بندی می‌شود.

برای به دست آوردن جواب تقریبی معادله‌ی (۲۹.۴) با استفاده از روش اوایلر، بازه $[0, T]$ را به N زیر بازه افراز

کنید. به عبارت دیگر افراز $I_N = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = T\}$ را از بازه $[0, T]$ در نظر بگیرید که در آن

$$x_k = kh, \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

مقدار $h = \frac{T}{N}$ طول گام نامیده می‌شود. جواب معادله‌ی (۲۹.۴) با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری $y(x)$ به دست

می‌آید.

۳-۵-۱ حالت اول. جواب $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر

فرض کنید $y(x)$ ، جواب یکتای معادله (۲۹.۴)، تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر و متعلق به $C_{gH}^2([0, T], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ باشد به طوری که نوع دیفرانسیل پذیری در بازه $[0, T]$ تغییری نکند. بنابراین قسمت (i) در قضیه ی تیلور (۳-۴-۱) بسط تیلور تابع $y(x)$ حول نقطه ی x_k به ازای $k = 0, 1, \dots, N$ به صورت زیر است

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + (x_{k+1} - x_k) \odot y'_{i.gH}(x_k) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \odot y''_{i.gH}(\eta_k),$$

که در آن η_k مقداری بین x_k و x_{k+1} است. چون $h = x_{k+1} - x_k$ پس

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \odot y'_{i.gH}(x_k) + \frac{h^2}{2} \odot y''_{i.gH}(\eta_k).$$

$y(x)$ جواب معادله ی (۲۹.۴) است، بنابراین

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \odot f(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} \odot y''_{i.gH}(\eta_k).$$

از طرفی

$$\begin{aligned} & D\left(y(x_{k+1}), y(x_k) + h \odot f(x_k, y(x_k)) + \frac{h^2}{2} \odot y''_{i.gH}(\eta_k)\right) \\ & \leq D(y(x_{k+1}), y(x_k) + h \odot f(x_k, y(x_k))) + D\left(0, \frac{h^2}{2} \odot y''_{i.gH}(\eta_k)\right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

زیرا وقتی که $h \rightarrow 0$ داریم

$$D(y(x_{k+1}), y(x_k) + h \odot f(x_k, y(x_k))) \rightarrow 0, \quad D\left(0, \frac{h^2}{2} \odot y''_{i.gH}(\eta_k)\right) \rightarrow 0.$$

بنابراین به ازای مقدار h به اندازه کافی کوچک

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + h \odot f(x_k, y(x_k)).$$

حال اگر y_{k+1} نشان دهنده ی مقدار تقریبی $y(x_{k+1})$ باشد، آنگاه روش اوایلر به صورت زیر است

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_{k+1} = y_k + h \odot f(x_k, y_k), \end{cases}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (۳۰.۴)$$

۳-۵-۲ حالت دوم. جواب $[gH]-(ii)$ دیفرانسیل پذیر

فرض کنید که $y(x)$ تابعی $[gH]-(ii)$ دیفرانسیل پذیر و متعلق به $C_{gH}^2([0, T], \mathbb{R}_{\mathcal{F}})$ باشد به طوری که نوع دیفرانسیل پذیری در بازه $[0, T]$ تغییری نکند.

در این حالت بسط تیلور تابع $y(x)$ حول نقطه‌ی x_k در نقطه‌ی x_{k+1} برابر است با

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) \odot (-1)h \odot f(x_k, y(x_k)) \odot (-1)\frac{h^2}{2} \odot y''_{ii.gH}(\eta_k).$$

با توجه به روند انجام شده در قسمت (۳-۵-۱) فرمول اویلر در این حالت برابر است با

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_{k+1} = y_k \odot (-1)h \odot f(x_k, y_k), \end{cases}, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (۳۱.۴)$$

۳-۵-۳ حالت سوم

فرض کنید $y(x)$ دارای نقطه سوپچ نوع I در نقطه $\xi \in [0, T]$ باشد به طوری که $x_0, x_1, \dots, x_j, \xi, x_{j+1}, \dots, x_N$. روش اویلر با توجه به معادلات (۳۰.۴) و (۳۱.۴) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_{k+1} = y_k + h \odot f(x_k, y_k), & k = 0, 1, \dots, j, \\ y_{k+1} = y_k \odot (-1)h \odot f(x_k, y_k), & k = j+1, j+2, \dots, N-1, \end{cases} \quad (۳۲.۴)$$

و اگر ξ نقطه سوپچ نوع II باشد، بنابراین معادله‌ی اویلر به صورت زیر است

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_{k+1} = y_k \odot (-1)h \odot f(x_k, y_k), & k = 0, 1, \dots, j \\ y_{k+1} = y_k + h \odot f(x_k, y_k), & k = j+1, j+2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (۳۳.۴)$$

۳-۵-۴ آنالیز روش اویلر

از آنجا که خطا در روش عددی اجتناب ناپذیر است، پس مفاهیمی مانند خطای برش موضعی و خطای جامع در این قسمت مورد بررسی قرار می‌گیرند و همگرایی جواب روش اویلر در حالات مختلف دیفرانسیل پذیری اثبات می‌شود. فرض کنید y_{k+1} نشان دهنده‌ی مقدار تقریبی حاصل از روش اویلر برای مقدار $y(x_{k+1})$ باشد.

تعریف ۳-۵-۱. فرض کنید $y(x)$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت باقیمانده، $\mathcal{R}_k$ ، برای روش اوایلر برابر است با

$$\mathcal{R}_k = y(x_{k+1}) \ominus_{gH} (y(x_k) + f(x_k, y(x_k))).$$

و اگر $y(x)$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، باقیمانده روش اوایلر به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathcal{R}_k = y(x_{k+1}) \ominus_{gH} (y(x_k) \ominus (-1)f(x_k, y(x_k))).$$

تعریف ۳-۵-۲. خطای برش موضعی برای روش اوایلر به صورت زیر تعریف می شود

$$\tau_k = \frac{1}{h} \mathcal{R}_k.$$

- اگر $y(x)$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه $\tau_k = \frac{h}{2} \odot y''_{i.gH}(\eta_k)$
- اگر $y(x)$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه $\tau_k = \odot(-1) \frac{h}{2} \odot y''_{ii.gH}(\eta_k)$

تعریف ۳-۵-۳. در روش اوایلر خطای جامع، e_{k+1} ، در لحظه x_{k+1} برابر است با

- اگر $y(x)$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y(x_{k+1}) \ominus_{gH} y_{k+1} \\ &= y(x_{k+1}) \ominus_{gH} (y_0 + h \odot f(x_0, y_0) + h \odot f(x_1, y_1) + \dots + h \odot f(x_k, y_k)). \end{aligned}$$

- اگر $y(x)$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y(x_{k+1}) \ominus_{gH} y_{k+1} \\ &= y(x_{k+1}) \ominus_{gH} (y_0 \ominus (-1)h \odot f(x_0, y_0) \ominus (-1)h \odot f(x_1, y_1) \ominus (-1) \dots \ominus (-1)h \odot f(x_k, y_k)). \end{aligned}$$

تعریف ۳-۵-۴. روش عددی را همگرا گویند در صورتی که اگر طول گام در آن به سمت صفر میل کند، آنگاه خطای جامع نیز به صفر میل کند.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_k D(e_{k+1}, 0) = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \max_k D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) = 0$$

لم ۳-۵-۱. [24] به ازای تمام مقادیر حقیقی z داریم

$$1+z \leq e^z.$$

قضیه ۳-۵-۲. فرض کنید $D = \{(x, y) | x \in [0, p], y \in \bar{B}(y_0, q), p, q > 0\}$ ، جواب منحصر بفرد مسالهی مقدار اولیه

$$\begin{cases} y'_{gH}(x) = f(x, y(x)) & , x \in [0, T]. \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}. \end{cases} \quad (34.4)$$

باشد، y_{k+1} تقریب‌های حاصل از روش اویلر باشند، $y''_{gH}(x)$ موجود باشد و $f(x, y)$ در شرط لیب شیتس در مجموعه D صدق کند. در این صورت روش عددی اویلر به ازای هر دو نوع دیفرانسیل پذیری همگرا به جواب مساله مقدار اولیه‌ی فازی (34.4) است.

اثبات.

i. فرض کنید که $y(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.

با توجه به معادله‌ی (30.4) و فرض این که $d_k = \frac{h^2}{2} y''_{i.gH}(x_k)$ ، جواب دقیق معادله‌ی (34.4) در معادله‌ی زیر صدق می‌کند

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + h \odot f(x_k, y(x_k)) + d_k$$

با کم کردن این معادله از معادله‌ی (30.4) داریم

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) = D(y(x_k), y_k) + h [D(f(x_k, y(x_k)), f(x_k, y_k))] + D(d_k, 0)$$

چون $f(x, y)$ در شرط لیب شیتس صدق می‌کند

$$D(f(x_k, y(x_k)), f(x_k, y_k)) \leq L_k D(y(x_k), y_k)$$

با استفاده از نامساوی مثلثی و شرط لیب شیتس می‌توان نتیجه گرفت که

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1 + hL_k) D(y(x_k), y_k) + D(d_k, 0) \quad (35.4)$$

فرض کنید

$$L = \max_{0 \leq k \leq N} L_k, \quad d = \max_{0 \leq k \leq N} D(d_k, 0)$$

بنابراین معادله‌ی (35.4) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1 + hL) D(y(x_k), y_k) + d$$

چون این نامساوی به ازای همه‌ی مقادیر k برقرار است پس

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1 + hL) [(1 + hL) D(y(x_{k-1}), y_{k-1}) + d] + d = (1 + hL)^2 D(y(x_{k-1}), y_{k-1}) + d[1 + (1 + hL)]$$

با ادامه دادن همین روند داریم

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1 + hL)^{k+1} D(y(x_0), y_0) + d[1 + (1 + hL) + \dots + (1 + hL)^k]$$

با استفاده از فرمول سری هندسی

$$\sum_{i=0}^k (1+hL)^i = \frac{(1+hL)^{k+1} - 1}{hL}$$

بنابراین

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1+hL)^{k+1} D(y(x_0), y_0) + \frac{d}{hL} [(1+hL)^{k+1} - 1]$$

با استفاده از لم (۳-۵-۴) و اینکه به ازای مقادیر $(k+1) \leq (N-1)$ داریم $0 \leq (k+1)h \leq T$ نتیجه می گیریم که

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq e^{LT} D(y(x_0), y_0) + \frac{d}{hL} [e^{LT} - 1]$$

علاوه براین

$$d = \max_{0 \leq k \leq N-1} D(d_k, 0) = \frac{h^2}{2} \max_{0 \leq x \leq T} D(y''_{i.gH}(x), 0)$$

واضح است که $D(y(x_0), y_0) = 0$. بنابراین

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq \frac{h}{2L} [e^{LT} - 1] \max_{0 \leq x \leq T} D(y''_{i.gH}(x), 0)$$

بنابراین $\lim_{h \rightarrow 0} D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \rightarrow 0$. در این حالت روش اوایلر همگرا است.

ii. حال فرض کنید که $y(x)$ تابعی $[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد و $d_k = \ominus(-1) \frac{h^2}{2} y''_{ii.gH}(x_k)$

جواب دقیق معادله (۲۹.۴) در معادله (۳۱.۴) صدق می کند پس

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) \ominus (-1)h \odot f(x_k, y(x_k)) + d_k$$

بنابراین

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) = D(y(x_k), y_k) + h [D(f(x_k, y_k) \ominus_g f(x_k, y(x_k)), 0)] + D(d_k, 0)$$

$f(x, y)$ در شرط لیپ شیتس صدق می کند بنابراین

$$D(f(x_k, y_k) \ominus_g f(x_k, y(x_k)), 0) = D(f(x_k, y_k), f(x_k, y(x_k))) \leq L_k D(y(x_k), y_k)$$

با استفاده از نامساوی مثلثی و شرط لیپ شیتس می توان نتیجه گرفت

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1 - hL_k) D(y(x_k), y_k) + D(d_k, 0) \quad (۳۶.۴)$$

فرض کنید

$$L = \max_{0 \leq k \leq N-1} L_k, \quad d = \max_{0 \leq k \leq N-1} D(d_k, 0)$$

پس معادله (۳۶.۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1-hL)D(y(x_k), y_k) + d$$

چون این نامساوی به ازای تمام مقادیر k برقرار است، بنابراین

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1-hL)[(1-hL)D(y(x_{k-1}), y_{k-1}) + d] + d = (1-hL)^2 D(y(x_{k-1}), y_{k-1}) + d[1 + (1-hL)]$$

با تکرار روند فوق، داریم

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1-hL)^{k+1} D(y(x_0), y_0) + d[1 + (1-hL) + \dots + (1-hL)^k]$$

با توجه به سری هندسی $\sum_{i=0}^k (1-hL)^i = \frac{1-(1-hL)^{k+1}}{hL}$ معادله‌ی بالا را می‌توان به فرم زیر نوشت

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq (1-hL)^{k+1} D(y(x_0), y_0) + \frac{d}{hL} [1 - (1-hL)^{k+1}] \quad (37.4)$$

حال در لم (3-5-4-1) قرار دهید $z = -hL$ ، بنابراین

$$(1-hL)^{k+1} \leq e^{-hL(k+1)} \leq \frac{1}{e^{LT}}$$

داریم $(k+1)h \leq T$ به ازای همه مقادیر $k+1 \leq N-1$. بنابراین با توجه به رابطه‌ی بالا معادله‌ی (37.4) را می-

توان به صورت زیر نوشت

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq \frac{1}{e^{LT}} D(y(x_0), y_0) + \frac{d}{hL} \left[1 - \frac{1}{e^{LT}} \right]$$

فرض کنید

$$d = \max_{0 \leq k \leq N-1} D(d_k, 0) = -\frac{h^2}{2} \max_{0 \leq x \leq T} D(y''_{ii.g}(x), 0)$$

با توجه به اینکه $D(y(x_0), y_0) = 0$ می‌توان نتیجه گرفت

$$D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \leq -\frac{h}{2L} \left[1 - \frac{1}{e^{LT}} \right] \max_{0 \leq x \leq T} D(y''_{ii.g}(x), 0)$$

پس $\lim_{h \rightarrow 0} D(y(x_{k+1}), y_{k+1}) \rightarrow 0$. در اینحالت نیز روش اوایلر همگرا است. $\square$

۳-۵-۵ مثال‌ها

این قسمت مثال‌هایی برای نشان دادن کارایی روش اویلر در حالات مختلف دیفرانسیل پذیری بیان می‌کند و مقدار خطای جامع نشان داده می‌شود. کلیه محاسبات با نرم افزار Matlab انجام گرفته است.

مثال ۳-۵-۱. معادله‌ی دیفرانسیل مقدار اولیه‌ی فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'_{i.gH}(x) = y(x) + (1.3, 2, 2.1), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = (0.82, 1, 1.2) \end{cases}$$

چون $y(x)$ تابعی $[i-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است، جواب واقعی این مساله با حل دستگاه زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} (y^-)'(x; \alpha) = y^-(x; \alpha) + 1.3 + 0.7\alpha, & 0 \leq x \leq 1, \\ (y^+)'(x; \alpha) = y^+(x; \alpha) + 2.1 - 0.1\alpha, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0; \alpha) = [0.82 + 0.18\alpha, 1.2 - 0.2\alpha]. \end{cases}$$

این جواب دقیق برابر است با

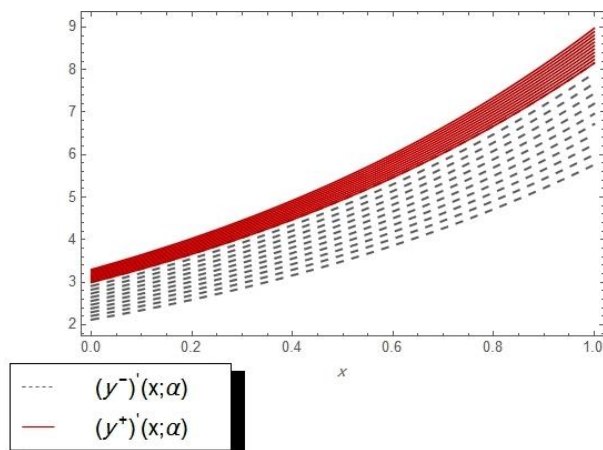
$$\begin{cases} y^-(x; \alpha) = 2.12e^x - 1.3 - 0.7\alpha + 0.88\alpha e^x, & \forall \alpha \in [0, 1] \\ y^+(x; \alpha) = 3.3e^x - 2.1 + 0.1\alpha - 0.3\alpha e^x, & \forall \alpha \in [0, 1] \end{cases}$$

با توجه به روندی که در قسمت (۳-۵-۱) بیان شد، جواب عددی برای این معادله بر اساس روش اویلر فازی از روش زیر حاصل می‌شود

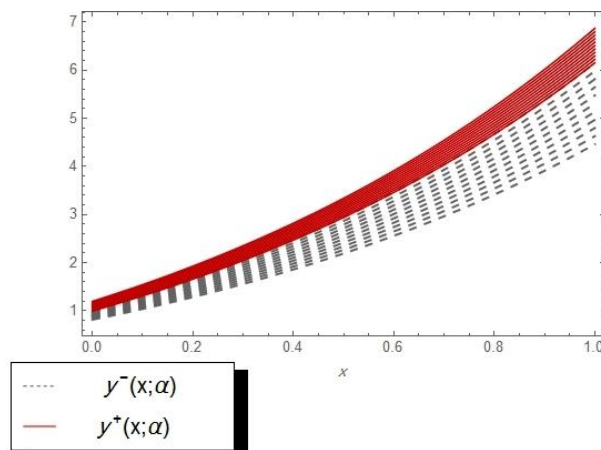
$$\begin{cases} y_0 = (0.82, 1, 1.2), \\ y_{k+1} = y_k + h \odot (y_k + (1.3, 2, 2.1)), & k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

جواب واقعی این معادله دیفرانسیل در شکل (۳-۳) رسم شده است. همان‌گونه که در شکل (۳-۴) مشاهده می‌شود تابع در نظر گرفته شده تابعی $[i-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.

مقادیر جدول (۳-۱) نشان‌دهنده‌ی خطای جامع به ازای $h = 0.025$ ، $h = 0.005$ و مقادیر $x \in [0, 1]$ است.



شکل ۳-۴. نمایش مشتق gH تابع جواب مثال (۳-۵-۱) به ازای $\alpha \in [0,1]$



شکل ۳-۳. نمایش جواب مثال (۳-۵-۱) به ازای $\alpha \in [0,1]$

جدول ۳-۱. خطای جامع روش اویلر در مثال (۳-۵-۱)

x	$h = 0.025$	$h = 0.005$
	خطا	خطا
0.0	0.0	0.0
0.1	4.48149×10^{-3}	4.44089×10^{-4}
0.2	9.89954×10^{-3}	2.00812×10^{-3}
0.3	1.64009×10^{-2}	3.32856×10^{-3}
0.4	2.41529×10^{-2}	4.90422×10^{-3}
0.5	3.33459×10^{-2}	6.77416×10^{-3}
0.6	4.41964×10^{-2}	8.98281×10^{-3}
0.7	5.69503×10^{-2}	1.15806×10^{-2}
0.8	7.18871×10^{-2}	1.46252×10^{-2}
0.9	8.93237×10^{-2}	1.81815×10^{-2}
1.0	1.09619×10^{-1}	2.23235×10^{-2}

مثال ۳-۵-۲. معادله دیفرانسیل مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'_{ii.gH}(x) = -y(x) + x \odot (0.7, 1, 1.8), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = (0, 1, 2.2). \end{cases}$$

جواب دقیق این مساله با حل دستگاه زیر به دست می آید

$$\begin{cases} (y^-)'(x; \alpha) = -y^-(x; \alpha) + x [1.8 - 0.8\alpha], & 0 \leq x \leq 1, \\ (y^+)'(x; \alpha) = -y^+(x; \alpha) + x[0.7 + 0.3\alpha], & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0; \alpha) = [\alpha, 2.2 - 1.2\alpha]. \end{cases}$$

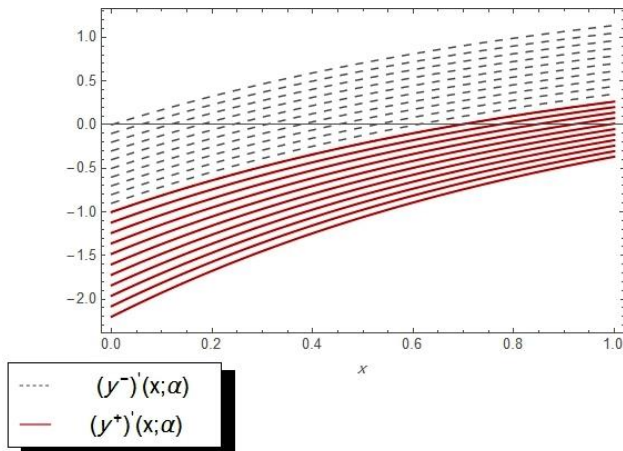
این جواب برابر است با

$$\begin{cases} y^-(x; \alpha) = e^{-x} (1.8 - 1.8e^x + 1.8xe^x + 0.2\alpha + 0.8\alpha e^x - 0.8\alpha xe^x) & , \quad \forall \alpha \in [0, 1] \\ y^+(x; \alpha) = e^{-x} (2.9 - 0.7e^x + 0.7xe^x - 0.9\alpha - 0.3\alpha e^x + 0.3\alpha xe^x) & , \quad \forall \alpha \in [0, 1] \end{cases}$$

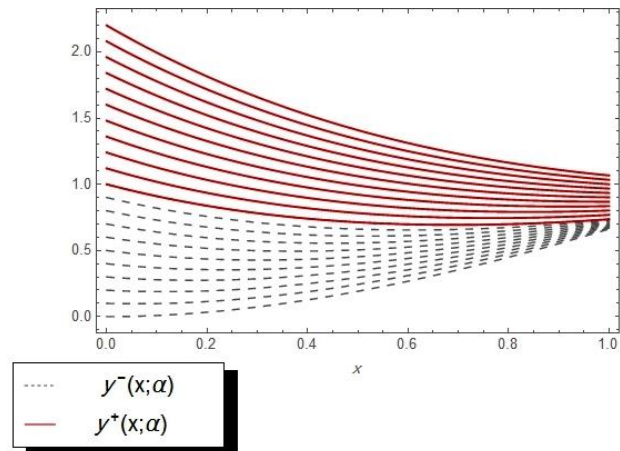
و بر اساس روش اوایلر بیان شده در قسمت (۳-۵-۲) می توان نوشت

$$\begin{cases} y_0 = (0, 1, 2.2), \\ y_{k+1} = y_k \ominus (-1)h \odot (-y_k + x_k \odot (0.7, 1, 1.8)), & k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

شکل (۳-۵) تابع جواب دقیق این معادله دیفرانسیل است. در شکل (۳-۶) مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوها را جواب دقیق رسم شده است. این شکل نشان می دهد که تابع جواب این مثال $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.



شکل ۳-۶. نمایش مشتق gH تابع جواب مثال (۳-۵-۲) به ازای $\alpha \in [0, 1]$



شکل ۳-۵. نمایش جواب مثال (۳-۵-۲) به ازای $\alpha \in [0, 1]$

جدول ۳-۲. خطای جامع روش اویلر در مثال (۳-۵-۲)

x	$h = 0.025$	$h = 0.005$
	خطا	خطا
0.0	0.0	0.0
0.1	3.33362×10^{-3}	6.58119×10^{-4}
0.2	6.02895×10^{-3}	1.19083×10^{-3}
0.3	8.17763×10^{-3}	1.61606×10^{-3}
0.4	9.85964×10^{-3}	1.94945×10^{-3}
0.5	1.11446×10^{-2}	2.20464×10^{-3}
0.6	1.20932×10^{-2}	2.39351×10^{-3}
0.7	1.27580×10^{-2}	2.52638×10^{-3}
0.8	1.31847×10^{-2}	2.61220×10^{-3}
0.9	1.34127×10^{-2}	2.65874×10^{-3}
1.0	1.34763×10^{-2}	2.67269×10^{-3}

مثال ۳-۵-۳. مساله‌ی مقدار اولیه‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'_{gH}(x) = (1-x)y(x), & 0 \leq x \leq 2, \\ y(0) = (0, 1, 2). \end{cases} \quad (38.4)$$

جواب دقیق $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر مساله‌ی (۳۸.۴) با حل دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} (y^-)'(x; \alpha) = \begin{cases} (1-x)y^-(x; \alpha), & 0 \leq x \leq 1, \\ (1-x)y^+(x; \alpha), & 1 < x \leq 2, \end{cases} \\ (y^+)'(x; \alpha) = \begin{cases} (1-x)y^+(x; \alpha), & 0 \leq x \leq 1, \\ (1-x)y^-(x; \alpha), & 1 < x \leq 2, \end{cases} \\ y(0; \alpha) = [\alpha, 2 - \alpha] \end{cases}$$

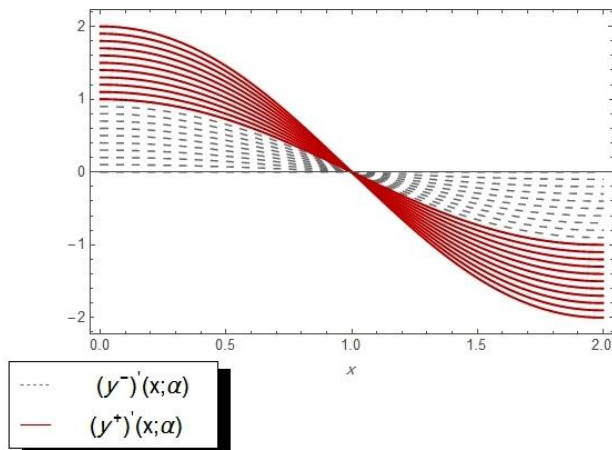
و جواب دقیق $[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر معادله‌ی (۳۸.۴) با حل دستگاه زیر به دست می‌آید

$$\begin{cases} (y^-)'(x; \alpha) = \begin{cases} (1-x)y^+(x; \alpha), & 0 \leq x \leq 1, \\ (1-x)y^-(x; \alpha), & 1 < x \leq 2, \end{cases} \\ (y^+)'(x; \alpha) = \begin{cases} (1-x)y^-(x; \alpha), & 0 \leq x \leq 1, \\ (1-x)y^+(x; \alpha), & 1 < x \leq 2, \end{cases} \\ y(0; \alpha) = [\alpha, 2-\alpha] \end{cases}$$

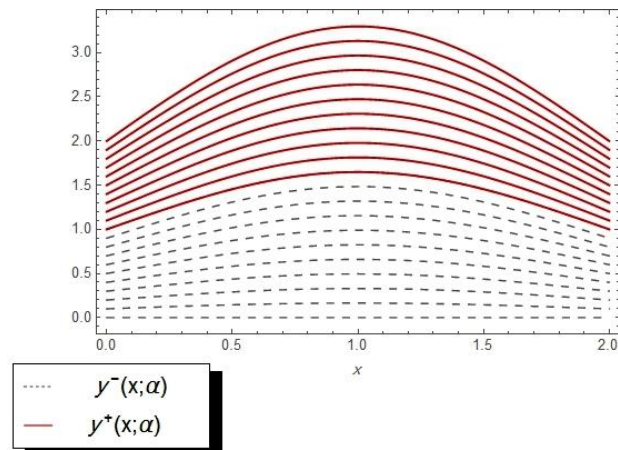
واضح است که تابع جواب در بازه $[0,1]$ تابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است و نقطه‌ی $x=1$ یک نقطه‌ی سویچ نوع I است و تابع جواب در بازه $(1,2]$ تابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است. روش اوایلر در این حالت به صورت زیر فرمول بندی می‌شود

$$\begin{cases} y_0 = (0,1,2), \\ y_{k+1} = y_k + h \odot ((1-x_k) \odot y_k) & , 0 \leq x_k \leq 1, \quad k=0,1,\dots,\frac{N}{2}-1, \\ y_{k+1} = y_k \ominus (-1)h \odot ((1-x_k) \odot y_k) & , 1 < x_k \leq 2, \quad k=\frac{N}{2},\dots,N. \end{cases}$$

شکل (۷-۳) نشان دهنده‌ی شکل جواب واقعی این مثال است. همان‌گونه که در شکل (۸-۳) مشاهده می‌کنید مشتق مرتبه اول این تابع در نقطه‌ی $x=1$ سویچ کرده است. پس نقطه‌ی $x=1$ نقطه‌ی سویچ نوع I برای تابع $y(x)$ است. خطای برش جامع به دست آمده از روش عددی اوایلر در جدول (۳-۳) نمایش داده شده است.



شکل ۸-۳ نمایش $-gH$ -مشتق مرتبه اول مثال (۳-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0,1]$



شکل ۷-۳ نمایش تابع جواب مثال (۳-۵-۳) به ازای $\alpha \in [0,1]$

جدول ۳-۳. خطای جامع روش اویلر در مثال (۳-۵-۳)

x	$h = 0.025$	$h = 0.005$
	خطا	خطا
0.0	0.0	0.0
0.2	1.05772×10^{-3}	2.21057×10^{-4}
0.4	4.62954×10^{-3}	9.48966×10^{-4}
0.6	1.07346×10^{-2}	2.18262×10^{-3}
0.8	1.87015×10^{-2}	3.78194×10^{-3}
1.0	2.72488×10^{-2}	5.48657×10^{-3}
1.2	1.84424×10^{-2}	3.73717×10^{-3}
1.4	8.95003×10^{-3}	1.85160×10^{-3}
1.6	6.46455×10^{-4}	5.51592×10^{-5}
1.8	9.62457×10^{-3}	1.84070×10^{-3}
2.0	1.72255×10^{-2}	3.35558×10^{-3}

۳-۶ حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول

این بخش جواب معادله دیفرانسیل فازی مرتبه اول را با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته‌ی هاکوها را به دست می‌آورد. این روش حل در همین فصل در بخش (۳-۸) برای به دست آوردن جواب معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم کامل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معادله خطی مرتبه اول فازی زیر را در نظر بگیرید

$$y'_{gH}(x) + P(x)y(x) = Q(x). \quad (39.4)$$

که در آن $P(x): [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع حقیقی پیوسته و $Q(x): [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_F$ تابعی پیوسته فازی هستند. مقدار اولیه فازی $y(a) = \gamma_0$ را در نظر بگیرید. هدف آن است که تابع فازی $y(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$ را به گونه‌ای به دست آورد که در معادله (۳۹.۴) صدق کند.

برای حل معادله (۳۹.۴)، فرض کنید که $y(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ یا $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد به شرطی که نوع $-gH$ -دیفرانسیل پذیری در بازه $[a, +\infty)$ تغییری نکند. تابع $u(x) = e^{\int_a^x P(t)dt}$ را در بگیرید. به این تابع فاکتور انتگرال گیری گوئیم. طرفین معادله (۳۹.۴) را در تابع فاکتور انتگرال گیری ضرب کنید

$$y'_{gH}(x)e^{\int_a^x P(t)dt} + P(x)e^{\int_a^x P(t)dt}y(x) = Q(x)e^{\int_a^x P(t)dt}, \quad (40.4)$$

با استفاده از قضیه (۳-۲-۳) می‌توان نوشت

$$y'_{gH}(x)e^{\int_a^x P(t)dt} + P(x)e^{\int_a^x P(t)dt}y(x) = \left(y(x)e^{\int_a^x P(t)dt} \right)'_{gH},$$

بنابراین معادله (۴۰.۴) به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\left(y(x)e^{\int_a^x P(t)dt} \right)'_{gH} = Q(x)e^{\int_a^x P(t)dt}. \quad (41.4)$$

اگر از طرفین معادله (۴۱.۴) انتگرال بگیریم، با توجه به قضیه (۲-۹-۱) داریم

$$y(x)e^{\int_a^x P(t)dt} \ominus_{gH} y(a)e^{\int_a^a P(t)dt} = \int_a^x Q(x)e^{\int_a^x P(t)dt} dx,$$

در این صورت

$$e^{\int_a^x P(t)dt} y(x) \ominus_{gH} y(a) = \int_a^x Q(x)e^{\int_a^x P(t)dt} dx,$$

پس به طور کلی داریم

- جواب $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله فازی خطی مرتبه اول برابر است با

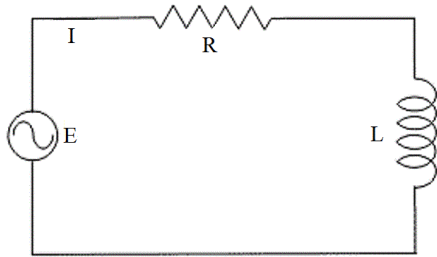
$$y(x) = e^{-\int_a^x P(t) dt} \left[\gamma_0 + \int_a^x Q(x) e^{\int_a^x P(t) dt} dx \right].$$

- جواب $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله خطی مرتبه اول برابر است با

$$y(x) = e^{-\int_a^x P(t) dt} \left[\gamma_0 \ominus (-1) \int_a^x Q(x) e^{\int_a^x P(t) dt} dx \right].$$

مثال ۳-۶-۱. مدار LR زیر را در نظر بگیرید. مولد برق با میزان نیروی محرکه‌ی الکتریکی $E(t)$ ، مقاومت R و خود القایی با ضریب خود القایی L مدار LR را تشکیل می‌دهند (شکل (۳-۹)).

مقدار ولتاژ I در لحظه‌ی t را می‌توان با استفاده از حل معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول (۲.۴) محاسبه کرد



$$L(I'_{gH}(t)) + R(I(t)) = E(t) \quad (2.4)$$

در معادله‌ی (۲.۴) فرض کنید

$$1. \quad L=1, R=2 \text{ و } E = (0.2, 1.5, 3.5)t^2 \in \mathbb{R}_F$$

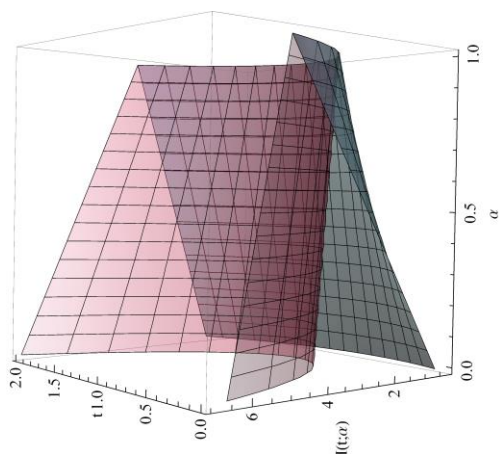
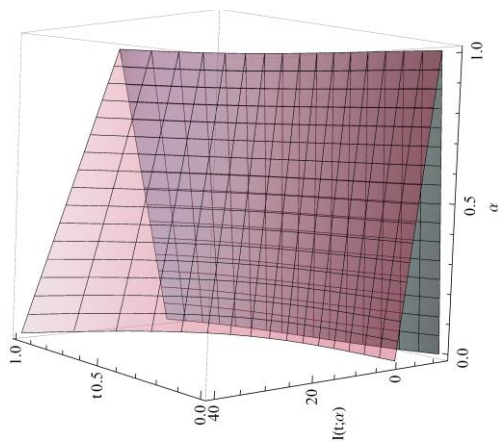
$$2. \quad \text{مقدار ولتاژ اولیه برابر } I(0) = (0.4, 2.5, 5) \in \mathbb{R}_F \text{ است.}$$

$$3. \quad I(t) \text{ تابعی } [(i) - gH] \text{ -دیفرانسیل پذیر است.}$$

با توجه به روش توضیح داده شده در بخش (۳-۶) و فرضیات مثال، جواب معادله داده شده را به صورت زیر داریم

$$I(t) = \left[e^{-2t} \left((0.4 + 2.1\alpha) + \frac{1}{4}(0.2 + 1.3\alpha)(e^{2t}(1 - 2t^2 - 2t) - 1) \right), e^{-2t} \left((5 - 2.5\alpha) + \frac{1}{4}(3.5 - 2\alpha)(e^{2t}(1 - 2t^2 - 2t) - 1) \right) \right].$$

جواب به دست آمده در شکل (۳-۱۰) نشان داده شده است. همانگونه که در شکل (۳-۱۱) مشاهده می‌کنید این جواب $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.



شکل ۳-۱۰. نمایش جواب مثال (۳-۶-۱) به ازای مقادیر $\alpha \in [0,1]$ شکل ۳-۱۱. نمایش مشتق gH مرتبه اول تابع جواب مثال (۳-۶-۱) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0,1]$

۷-۳ حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم مقدار مرزی

معادله ی دیفرانسیل فازی مرتبه دوم مقدار مرزی در این بخش با استفاده از روش فاکتور انتگرال گیری با در نظر گرفتن حل می شود. این روش حل در فصل بعدی برای به دست آوردن جواب معادله ی فازی گرما مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

معادله فازی مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y''_{gH}(x) + p(x)y'_{gH}(x) = 0, \\ y(a) = C_0, \quad y(b) = C_1. \end{cases} \quad (۴۳.۴)$$

که در آن $C_0, C_1 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $p(x) \in \mathbb{R}$.

برای به دست آوردن جواب معادله ی (۴۳.۴)، طرفین این معادله را در فاکتور انتگرال گیری $e^{\int p(t)dt}$ ضرب کنید. در این صورت داریم

$$e^{\int p(t)dt} \odot y''_{gH}(x) + p(x)e^{\int p(t)dt} \odot y'_{gH}(x) = 0, \quad (۴۴.۴)$$

با توجه به قضیه (۳-۲-۳)، می توان معادله (۴۴.۴) را به صورت زیر نوشت

$$\left(e^{\int p(t)dt} \odot y'_{gH}(x) \right)'_{gH} = 0,$$

بنا بر قسمت (۳) در لم (۲-۲-۳) نتیجه می گیریم که مقدار ثابت فازی λ_0 وجود دارد به طوری که

$$e^{\int p(t)dt} \odot y'_{gH}(x) = \lambda_0, \quad (۴۵.۴)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله ی (۴۵.۴)، معادله زیر به دست می آید

$$\int_a^x y'_{gH}(t) dt = \lambda_0 \int_a^x e^{-\int p(t)dt} dt,$$

بنابر قضیه (۲-۹-۱)

$$y(x) \ominus_{gH} C_0 = \lambda_0 \int_a^x e^{-\int p(t)dt} dt,$$

پس با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری $y(x)$ دو جواب برای معادله ی (۴۳.۴) به دست می آید

• اگر $y(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$$y(x) = C_0 + \frac{C_1 \ominus_{gH} C_0}{\int_a^b e^{-\int p(t)dt} dt} \int_a^x e^{-\int p(t)dt} dt. \quad (۴۶.۴)$$

• اگر $y(x)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$$y(x) = C_0 \ominus (-1) \frac{C_1 \ominus_{gH} C_0}{\int_a^b e^{-\int p(t) dt} dt} \int_a^x e^{-\int p(t) dt} dt. \quad (47.4)$$

مثال ۳-۷-۱. معادله دیفرانسیل مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

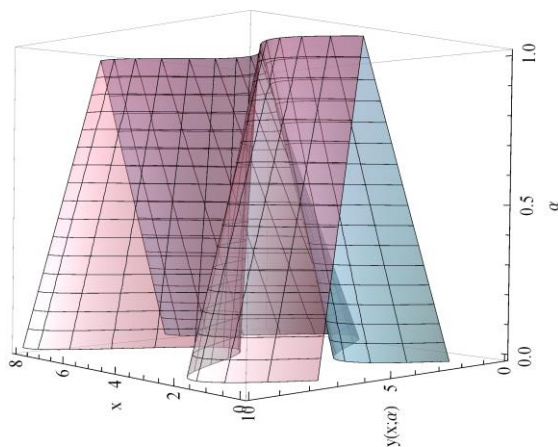
$$\begin{cases} y''_{gH}(x) + \tan(x)y'_{gH}(x) = 0, \\ y(0) = (2.3, 6, 7.5), \quad y(1) = (4.2, 7, 9.5). \end{cases}$$

فرض کنید $y(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد. با توجه به روند بیان شده در قسمت (۳-۷) و معادله (۴۶.۴)، جواب معادله‌ی داده شده برابر است با

$$y(x) = [2.3 + 3.7\alpha; \quad 7.5 - 1.5\alpha] + \frac{[4.2 + 2.8\alpha; \quad 9.5 - 2.5\alpha] \ominus_{gH} [2.3 + 3.7\alpha; \quad 7.5 - 1.5\alpha]}{\int_0^1 e^{-\int \tan(t) dt} dt} \int_0^x e^{-\int \tan(t) dt} dt.$$

$$\Rightarrow y(x) = \left[2.3 + 3.7\alpha + \frac{(1.9 - 0.9\alpha)\sin(x)}{\sin(1)}; \quad 7.5 - 1.5\alpha + \frac{(2 - \alpha)\sin(x)}{\sin(1)} \right].$$

شکل (۳-۱۲) تابع جواب را نمایش می‌دهد.



شکل ۳-۱۲. نمایش جواب مثال (۳-۷-۱) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$

۳-۸ حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم کامل

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کامل نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم هستند. این معادلات در این بخش مورد بررسی قرار می‌گیرند و جواب‌های فازی این معادلات با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری محاسبه می‌شوند.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فازی زیر را در نظر بگیرید

$$a_2(x)y''_{gH}(x) + a_1(x)y'_{gH}(x) + a_0(x)y(x) = f(x). \quad (۴۸.۴)$$

که در آن $a_2(x), a_1(x), a_0(x) \in \mathbb{R}$ توابعی حقیقی و $f(x)$ تابعی فازی است.

تعریف ۳-۸-۱. معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم (۴۸.۴) را کامل گویند اگر توابع دیفرانسیل پذیر $p(x)$ و $q(x)$ موجود باشند به طوری که معادله (۴۸.۴) را بتوان به صورت زیر نوشت

$$\left(p(x)y'_{gH}(x) + q(x)y(x) \right)'_{gH} = f(x).$$

قضیه ۳-۸-۱. معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم

$$a_2(x)y''_{gH}(x) + a_1(x)y'_{gH}(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad (۴۹.۴)$$

کامل است اگر $a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x) = 0$. با فرض کامل بودن معادله (۴۹.۴)، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\left(a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a_2'(x)]y(x) \right)'_{gH} = f(x).$$

اثبات. برای اثبات این قضیه باید نشان داد که

$$\left(a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a_2'(x)]y(x) \right)'_{gH} = a_2(x)y''_{gH}(x) + a_1(x)y'_{gH}(x) + a_0(x)y(x) \quad (۵۰.۴)$$

با توجه به قضایای (۳-۲-۱) و (۳-۲-۳) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \left(a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a_2'(x)]y(x) \right)'_{gH} &= a_2'(x)y'_{gH}(x) + a_2(x)y''_{gH}(x) + [a_1'(x) - a_2''(x)]y(x) + [a_1(x) - a_2'(x)]y'_{gH}(x) \\ &= a_2(x)y''_{gH}(x) + a_1(x)y'_{gH}(x) + [a_1'(x) - a_2''(x)]y(x) \\ &= a_2(x)y''_{gH}(x) + a_1(x)y'_{gH}(x) + a_0(x)y(x). \end{aligned}$$

بنابراین معادله (۵۰.۴) را داریم و اثبات کامل است. $\square$

معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم کامل زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} a_2(x)y''_{gH}(x) + a_1(x)y'_{gH}(x) + a_0(x)y(x) = f(x); \\ y(a) = \gamma_0, \quad y'_{gH}(a) = \gamma_1. \end{cases} \quad (51.4)$$

که در آن $\gamma_0, \gamma_1 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $a_2(x), a_1(x), a_0(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در اینجا فرض کنید $f(x) = \beta \odot s(x)$ که در این معادله $\beta \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $s(x)$ تابعی حقیقی مقدار است. با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری $y(x)$ و $y'_{gH}(x)$ ، جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کامل (51.4) بررسی می‌شود.

۳-۸-۱ حالت اول.

فرض کنید که نوع دیفرانسیل پذیری برای توابع $y(x)$ و $y'_{gH}(x)$ یکسان باشد و در بازه $[a, x]$ هیچ نقطه‌ی سویچی وجود نداشته باشد. با توجه به تعریف (۲-۸-۱۱) و قضیه (۳-۸-۱) می‌توان نوشت

$$(a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a'_2(x)]y(x))'_{gH} = f(x). \quad (52.4)$$

اگر براساس قضیه (۲-۹-۱) از طرفین رابطه (52.4) انتگرال بگیریم، آنگاه

$$a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a'_2(x)]y(x) \ominus_{gH} C_1 = \beta \int_a^x s(t)dt,$$

که در آن مقدار C_1 با توجه به مقدار اولیه $y'_{gH}(a) = \gamma_1$ به دست می‌آید. به این دلیل که $y'_{gH}(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است، بنابراین

$$a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a'_2(x)]y(x) = C_1 + \beta \int_a^x s(t)dt,$$

با فرض اینکه

$$p(x) = \frac{[a_1(x) - a'_2(x)]}{a_2(x)}, \quad q_1(x) = \frac{1}{a_2(x)}, \quad q_2(x) = \frac{\int_a^x s(t)dt}{a_2(x)},$$

معادله دیفرانسیل فازی مرتبه اول خطی زیر حاصل می‌شود

$$y'_{gH}(x) + p(x)y(x) = C_1 q_1(x) + \beta q_2(x),$$

همانطور که در بخش (۳-۶) بیان شد، با مد نظر قراردادن نوع دیفرانسیل پذیری $y(x)$ ، این معادله ی فازی مرتبه اول خطی جواب‌هایی به صورت زیر دارد

• اگر $y(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد پس

$$y(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt} \left[\gamma_0 + C_1 \int_a^x q_1(t) e^{\int_a^t p(t)dt} dx + \beta \int_a^x q_2(x) e^{\int_a^x p(t)dt} dx \right].$$

• اگر $y(x)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت

$$y(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt} \left[\gamma_0 \ominus (-1)C_1 \int_a^x q_1(x)e^{\int_a^x p(t)dt} dx \ominus (-1)\beta \int_a^x q_2(x)e^{\int_a^x p(t)dt} dx \right].$$

۳-۸-۲ حالت دوم

فرض کنید که نوع gH -دیفرانسیل پذیری توابع $y(x)$ و $y'_{gH}(x)$ متفاوت باشد و در بازه $[a, x]$ هیچ نقطه‌ی سویچی موجود نباشد. از تعریف (۲-۸-۱۱) و قضیه (۳-۸-۱) نتیجه می‌شود که

$$(a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a'_2(x)]y(x))'_{gH} = f(x) \quad (۵۳.۴)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه‌ی (۵۳.۴) معادله زیر به دست می‌آید

$$a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a'_2(x)]y(x) \ominus_{gH} C_1 = \beta \int_a^x s(t)dt,$$

دراین معادله، C_1 ثابتی است که با استفاده از مقدار اولیه $y'_{gH}(a) = \gamma_1$ به دست می‌آید. از آنجایی که $y'_{gH}(x)$

تابعی $[gH] - (ii)$ -دیفرانسیل پذیر است، معادله زیر را می‌توان نوشت

$$a_2(x)y'_{gH}(x) + [a_1(x) - a'_2(x)]y(x) = C_1 \ominus (-1)\beta \int_a^x s(t)dt,$$

با فرض اینکه

$$p(x) = \frac{[a_1(x) - a'_2(x)]}{a_2(x)}, \quad q_1(x) = \frac{1}{a_2(x)}, \quad q_2(x) = \frac{\int_a^x s(t)dt}{a_2(x)},$$

و روند توضیح داده شده در بخش (۳-۶)، دو حالت زیر برای جواب معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم کامل

(۵۱.۴) به دست می‌آید

• اگر $y(x)$ تابعی $[gH] - (i)$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$$y(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt} \left[\gamma_0 + C_1 \int_a^x q_1(x)e^{\int_a^x p(t)dt} dx \ominus (-1)\beta \int_a^x q_2(x)e^{\int_a^x p(t)dt} dx \right].$$

• اگر $y(x)$ تابعی $[gH] - (ii)$ -دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$$y(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt} \left[\gamma_0 \ominus (-1)C_1 \int_a^x q_1(x)e^{\int_a^x p(t)dt} dx + \beta \int_a^x q_2(x)e^{\int_a^x p(t)dt} dx \right].$$

۳-۸-۳ مثال‌ها

مثال ۳-۸-۱. فرض کنید $y(x): [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_F$. معادله‌ی دیفرانسیل فازی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} (x^3 + 3)y''_{gH}(x) + 6x^2 y'_{gH}(x) + 6xy(x) = (10, 12, 13.5)x, \\ y(0) = (0.82, 1, 1.2), \\ y'_{gH}(0) = (3.1, 4, 5.3). \end{cases} \quad (54.4)$$

از آنجا که در این معادله $a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x) = 0$ ، بنابراین معادله داده شده یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کامل است. اکنون فرض کنید که $y(x)$ و $y'_{gH}(x)$ توابعی $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند. بنابر قضیه (۱-۸-۳) و روند بیان شده در قسمت (۱-۸-۳)، حاصل معادله دیفرانسیل فازی مرتبه اول خطی زیر است

$$(x^3 + 3)y'_{ii, gH}(x) + 3x^2 y(x) \ominus_{gH} C_1 = (10, 12, 13.5) \int_0^x t dt.$$

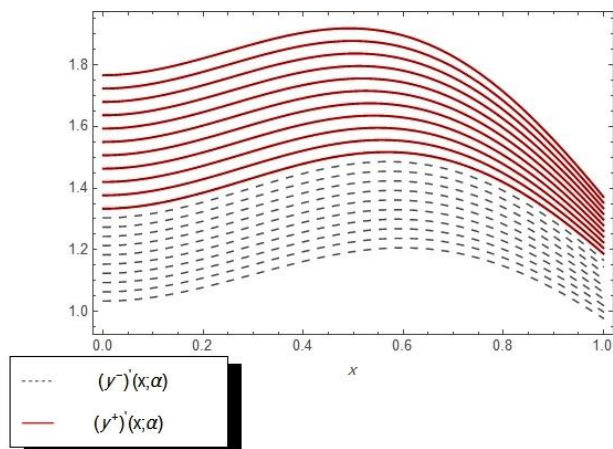
در این معادله $y'_{gH}(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر است و $y'_{gH}(0) = (3.1, 4, 5.3)$ ، پس

$$y'_{ii, gH}(x) + \frac{3x^2}{x^3 + 3} y(x) = (3.1, 4, 5.3) \frac{1}{x^3 + 1} + (10, 12, 13.5) \frac{x^2}{2(x^3 + 1)},$$

با توجه به روند گفته شده برای حل معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول خطی در بخش (۶-۳) و اینکه $y(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر است، جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کامل (۵۴.۴) به صورت زیر به دست می‌آید

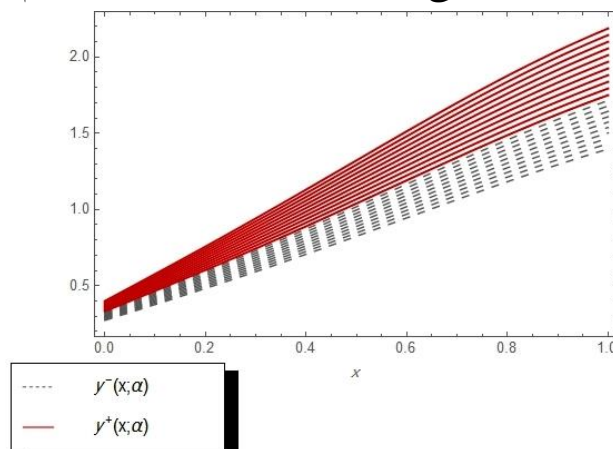
$$y(x) = \frac{1}{x^3 + 3} \left([0.82 + 0.18\alpha; 1.2 - 0.2\alpha] + [3.1 + 0.9\alpha; 5.3 - 1.3\alpha]x + [10 + 2\alpha; 13.5 - 1.5\alpha] \frac{x^3}{6} \right)$$

شکل (۱۳-۳) تابع جواب و شکل (۱۴-۳) مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوها را برای این جواب را نشان می‌دهند.



شکل ۱۴-۳. نمایش $-gH$ مشتق مرتبه اول جواب مثال (۱-۵-۳) به

ازای همه $\alpha \in [0,1]$



شکل ۱۳-۳. نمایش جواب مثال (۱-۸-۳) به ازای همه مقادیر

$\alpha \in [0,1]$

مثال ۳-۸-۲. فرض کنید $y(x):[1, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_F$ در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کامل زیر صدق کند

$$\begin{cases} \sinh(x)y''_{gH}(x) + 2\cosh(x)y'_{gH}(x) + \sinh(x)y(x) = 0, \\ y(1) = (0.5, 2, 4.5), \\ y'_{gH}(1) = (4.8, 5, 6.2). \end{cases}$$

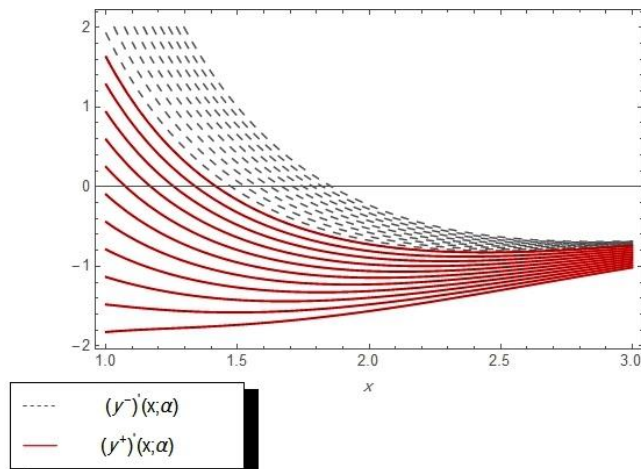
و توابع $y(x)$ و $y'_{gH}(x)$ هر دو $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند. براساس روند موجود در بخش (۳-۸)، می توان نوشت

$$y(x) = e^{-\int_1^x \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} dt} \left((0.5, 2, 4.5) \ominus (-1)(4.8, 5, 6.2) \int_1^x \frac{1}{\sinh(t)} e^{\int_1^t \frac{\cosh(t)}{\sinh(t)} dt} dx \right),$$

در این صورت جواب تحلیلی معادله داده شده برابر است با

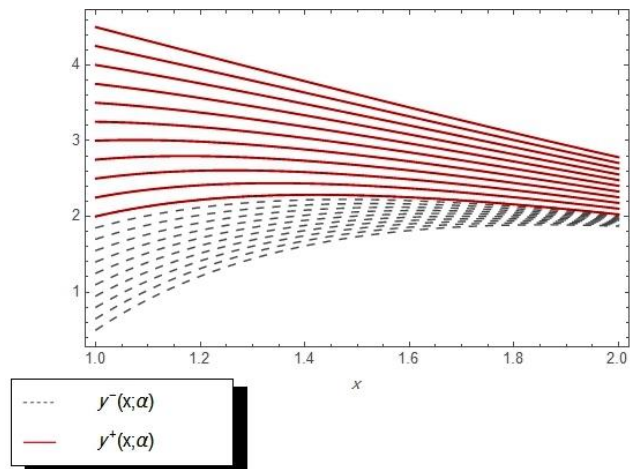
$$y(x) = \frac{(e^2 - 1)\operatorname{csch}(x)}{2e} \left[(0.5 + 1.5\alpha) + (6.2 - 1.2\alpha) \frac{2e(x-1)}{e^2 - 1} ; (4.5 - 2.5\alpha) + (4.8 + 0.2\alpha) \frac{2e(x-1)}{e^2 - 1} \right].$$

همانگونه که در شکل های (۳-۱۶) و (۳-۱۷) مشاهده می کنید $y(x)$ و $y'_{gH}(x)$ توابعی $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر هستند.



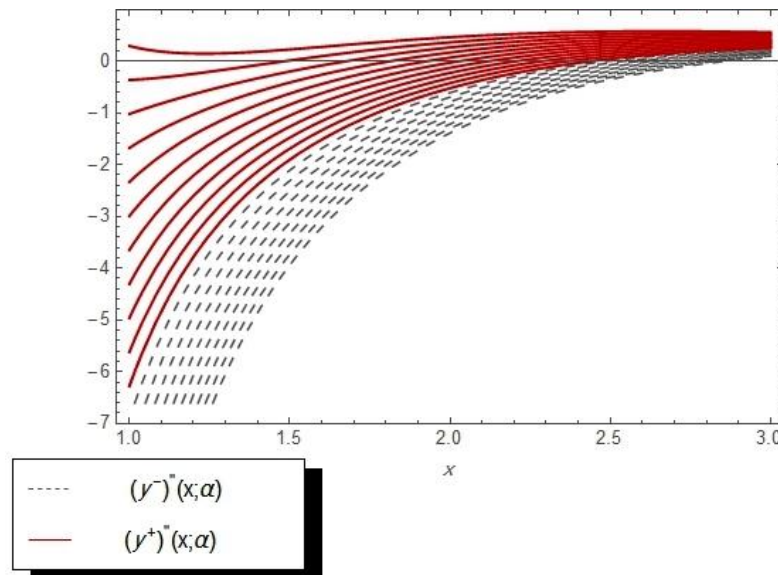
شکل ۳-۱۶. نمایش $-gH$ -مشتق مرتبه اول جواب مثال (۳-۸-۲) به

ازای همه مقادیر $\alpha \in [0, 1]$



شکل ۳-۱۵. نمایش جواب مثال (۳-۸-۲) به ازای همه مقادیر

$\alpha \in [0, 1]$



شکل ۳-۱۷. نمایش $-gH$ مشتق مرتبه دوم جواب مثال (۳-۸-۲) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0,1]$

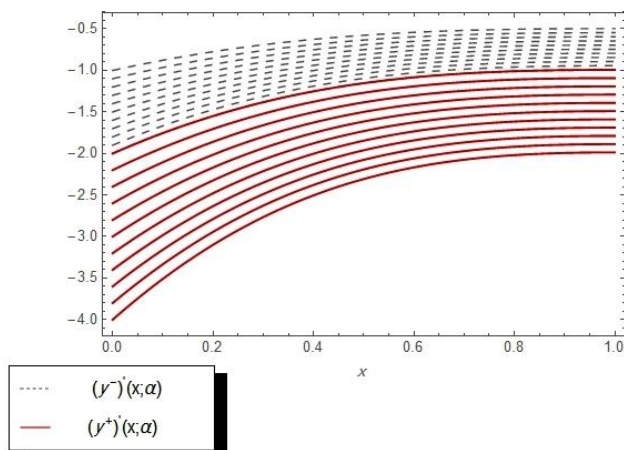
مثال ۳-۸-۳. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم کامل زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} (2e^{-x} + e^x)y''_{gH}(x) + 2e^x y'_{gH}(x) - e^x y(x) = 0, \\ y(0) = (2, 4, 8), \\ y'_{gH}(0) = (3, 6, 12). \end{cases}$$

فرض کنید $y(x)$ تابعی $[(ii)-gH]$ دیفرانسیل و تابع $y'_{gH}(x)$ تابعی $[(i)-gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد. پس جواب تحلیلی معادله‌ی داده شده برابر است با

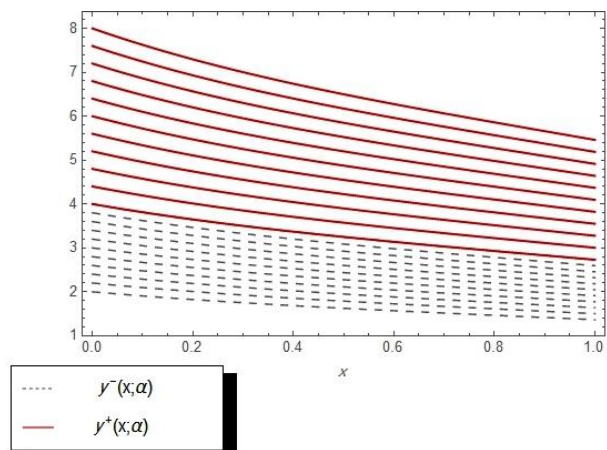
$$y(x) = e^{-x} \left[(2 + 2\alpha) + (12 - 6\alpha) \left(\frac{1}{2} (-\ln(3) + \ln(2 + e^{2x})) \right) \right] ; (8 - 4\alpha) + (3 + 3\alpha) \left(\frac{1}{2} (-\ln(3) + \ln(2 + e^{2x})) \right) \right].$$

شکل‌های (۳-۱۳) و (۳-۱۴) نشان می‌دهند که تابع $y(x)$ تابعی $[(i)-gH]$ دیفرانسیل پذیر و $y'_{gH}(x)$ تابعی $[(ii)-gH]$ دیفرانسیل پذیر است.



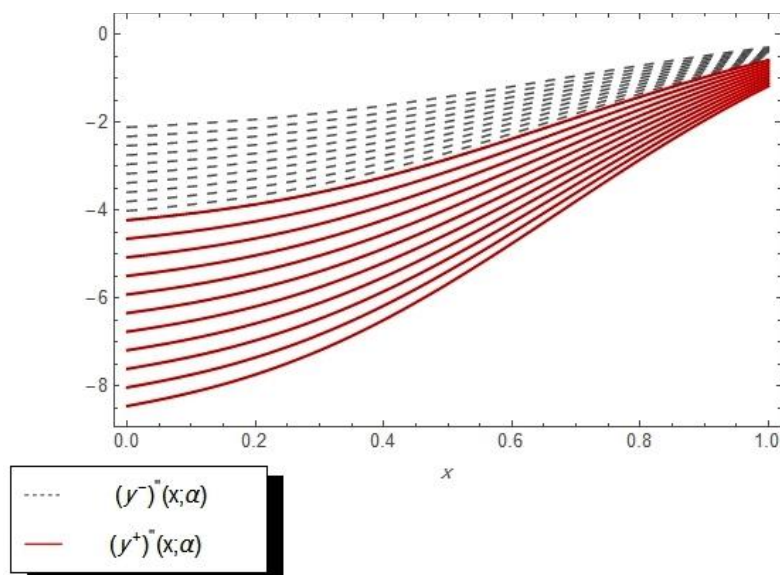
شکل ۳-۱۹. نمایش $-gH$ مشتق مرتبه اول جواب مثال (۳-۸-۳) به

ازای همه مقادیر $\alpha \in [0,1]$



شکل ۳-۱۸. نمایش جواب مثال (۳-۸-۳) به ازای همه مقادیر

$\alpha \in [0,1]$



شکل ۳-۲۰. نمایش $-gH$ مشتق مرتبه دوم جواب مثال (۳-۸-۳) به ازای همه مقادیر $\alpha \in [0,1]$

فصل ۴

معادلات دیفرانسیل جزئی غیرقطعی

۴-۱ مقدمه

این فصل ابتدا خصوصیات مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا برای توابع دو متغیره فازی بررسی می‌کند. آنگاه با توجه به این خصوصیات و تعاریف بیان شده در فصل‌های قبل، معادله‌ی فازی گرما را تشریح و یکتایی جواب برای این معادله را اثبات می‌کند. سپس با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری، جواب تحلیلی معادله‌ی گرما در سیمی به طول بی نهایت و سطحی به طول $(0, +\infty)$ را مورد بررسی قرار می‌دهد. در انتها مثال‌هایی جهت تشریح هر یک از حالات بیان شده ارائه می‌نماید.

۴-۲ حساب دیفرانسیل و انتگرال در توابع فازی دو متغیره

لم ۴-۲-۱. فرض کنید $p(x, t)$ یک تابع حقیقی مثبت صعودی و $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ عددی فازی باشد. بنابراین $[gH - p]$ -مشتق برای تابع $g(x, t) = p(x, t) \odot u$ نسبت به متغیر t برابر است با

$$\partial_{t_{gH}} g(x, t) = \partial_t p(x, t) \odot u$$

اثبات. داریم

$$g(x, t+k) \ominus_{gH} g(x, t) = p(x, t+k) \odot u \ominus_{gH} p(x, t) \odot u = (p(x, t+k) - p(x, t)) \odot u,$$

با استفاده از خصوصیات فاصله هاسدورف (۲-۶-۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} D \left(\frac{g(x, t+k) \ominus_{gH} g(x, t)}{k}, \partial_t p(x, t) \odot u \right) &= \lim_{k \rightarrow 0} D \left(\frac{(p(x, t+k) - p(x, t)) \odot u}{k}, \partial_t p(x, t) \odot u \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} D \left(\frac{p(x, t+k) - p(x, t)}{k} \odot u, \partial_t p(x, t) \odot u \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

پس با توجه به تذکر (۲-۱۰-۲)، داریم $\square. g(x, t) = p(x, t) \odot u$

قضیه ۱-۲-۴. فرض کنید $f(x, t): \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی $[gH - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t باشد و $c \in \mathbb{R}^+$. در این صورت $\partial_{t_{gH}}(c \odot f)(x, t)$ وجود دارد و

$$\partial_{t_{gH}}(c \odot f)(x, t) = c \odot \partial_{t_{gH}} f(x, t).$$

اثبات. با توجه به این فرض که $f(x, t)$ تابعی $[gH - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t است

$$\begin{aligned} D\left(\frac{(c \odot f)(x, t+k) \ominus_{gH} (c \odot f)(x, t)}{k}, c \odot \partial_{t_{gH}} f(x, t)\right) &= \\ &= D\left(\frac{c \odot f(x, t+k) \ominus_{gH} c \odot f(x, t)}{k}, c \odot \partial_{t_{gH}} f(x, t)\right) \\ &= cD\left(\frac{f(x, t+k) \ominus_{gH} f(x, t)}{k}, \partial_{t_{gH}} f(x, t)\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

وقتی که $k \rightarrow 0$. در این صورت اثبات تمام است. $\square$

۱-۲-۴ مثال. فرض کنید $f(x, t): [0, \pi] \times [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و

$$f(x, t; \alpha) = [0.7 + 0.3\alpha, 1.8 - 0.8\alpha]t \sin(x).$$

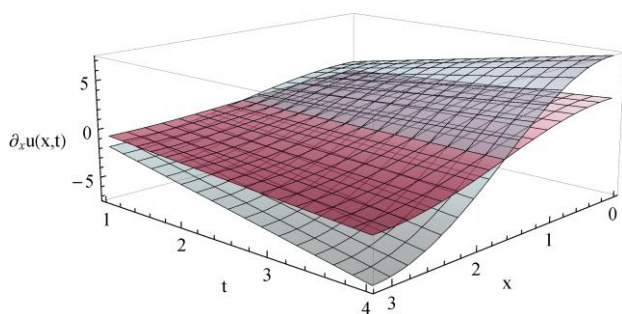
بر اساس قضیه (۱-۲-۴)، $[gH - p]$ -مشق این تابع نسبت به x به صورت زیر است

$$\left\{ \begin{aligned} (\partial_x f^-)(x, t; \alpha) &= \begin{cases} (0.7 + 0.3\alpha)t \cos(x), & t \in [1, 4], x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ (1.8 - 0.8\alpha)t \cos(x), & t \in [1, 4], x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \\ (\partial_x f^+)(x, t; \alpha) &= \begin{cases} (1.8 - 0.8\alpha)t \cos(x), & t \in [1, 4], x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ (0.7 + 0.3\alpha)t \cos(x), & t \in [1, 4], x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases} \end{aligned} \right.$$

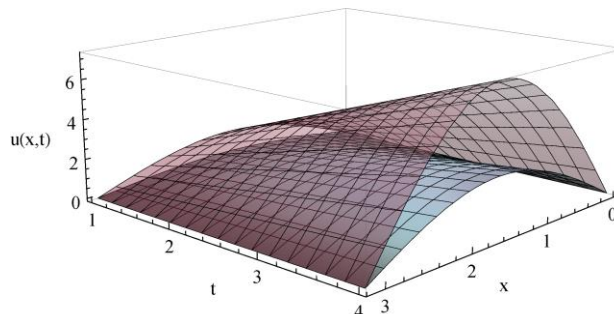
واضح است که تابع فازی $f(x, t)$ در بازه $[1, 4] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ ، $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر است. این تابع به ازای

همه $t \in [1, 4]$ در نقاط $(\frac{\pi}{2}, t)$ به تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر سوچ می کند. بنابراین نقاط $(\frac{\pi}{2}, t)$ به

ازای همه مقادیر $t \in [1, 4]$ نقاط سویچ هستند. همانگونه که در شکل (۲-۴) مشاهده می کنید تابع $f(x, t)$ در نقاط $(\frac{\pi}{2}, t)$ به ازای همه $t \in [1, 4]$ دارای سویچ نوع I است.



شکل ۲-۴. نمایش $f'_{gH}(x, t)$ مثال (۱-۲-۴) به ازای $\alpha = 0$



شکل ۱-۴. نمایش $f(x, t)$ مثال (۱-۲-۴) به ازای $\alpha = 0$

لم ۲-۲-۴. فرض کنید $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی پیوسته فازی و $[gH - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به x باشد و تابع f در بازه $[a, s]$ هیچ نقطه‌ی سویچی نداشته باشد. در این صورت

$$\int_a^s \partial_{t_{gH}} f(x, t) dt = f(x, s) \ominus_{gH} f(x, a).$$

اثبات. اگر هیچ نقطه‌ی سویچی در بازه $[a, s]$ وجود نداشته باشد، آنگاه با توجه به تعریف (۲-۱۰-۶)، تابع $f(x, t)$ یا $[(i) - p]$ یا $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر است. فرض کنید که این تابع $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} \int_a^s \partial_{t_{ii, gH}} f(x, t; \alpha) dt &= \int_a^s [\partial_t f^+(x, t; \alpha), \partial_t f^-(x, t; \alpha)] dt \\ &= [f^+(x, s; \alpha) - f^+(x, a; \alpha), f^-(x, s; \alpha) - f^-(x, a; \alpha)] \\ &= f(x, s) \ominus_{gH} f(x, a). \end{aligned}$$

اثبات حالت $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر به صورت مشابه است. $\square$

قضیه ۲-۲-۴. فرض کنید $x_i(t): [a, b] \rightarrow x_i([a, b]) := \mathbb{I}_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ توابعی اکیدا صعودی و پیوسته باشند، U زیر مجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^3$ باشد به طوری که $\prod_{i=1}^3 U \subseteq U$ و $f: U \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی پیوسته باشد. علاوه بر این $\partial_{x_{i_{gH}}} f: U \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, $i = 1, 2, 3$ موجود و پیوسته فازی هستند. در نظر بگیرید $x_i := x_i(t)$ و $z := z(t) := f(x_1, x_2, x_3)$ در این صورت $\partial_{t_{gH}} z$ موجود است و

$$\partial_{t_{gH}} z = \partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_1(t) + \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_2(t) + \partial_{x_{3gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_3(t).$$

که در آن $i=1,2,3, \partial_t x_i(t)$ نشان دهنده مشتق تابع $x_i(t)$ نسبت به t است.

اثبات. فرض کنید $t \in (a, b)$. مقدار ثابت $(x_1, x_2, x_3) \in U$ را در نظر بگیرید و $i=1,2,3, \Delta x_i > 0$ مقداری کوچک باشد. حال قرار دهید

$$\alpha_1 = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

$$\alpha_2 = f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

$$\alpha_3 = f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

در این صورت

$$f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

در این معادله $\sum$ نشان دهنده جمع فازی است. به دلیل اینکه مشتق $[gH - p]$ برای توابع $\partial_{x_{igH}} f$ وجود دارد، پس تفاضل تعمیم یافته‌ی هاکوها را برای $i=1,2,3, \alpha_i$ به ازای مقادیر کوچک $\Delta x_i > 0$ در فضای $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ موجود است. حال تعریف می‌کنیم

$$\Delta x_i := \phi_i(t + \Delta t) - \phi_i(t) \Rightarrow \phi_i(t + \Delta t) = x_i + \Delta x_i, \quad x_i := \phi_i(t), \quad \Delta t > 0, \quad i=1,2,3.$$

از آنجایی که $i=1,2,3, \phi_i$ مقادیری اکیدا صعودی هستند می‌توان گفت $\Delta x_i > 0$. پس با توجه به پیوستگی توابع $\phi_i, i=1,2,3$ ، وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ داریم $\Delta x_i \rightarrow 0$. بنابراین

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{f(\phi_1(t + \Delta t), \phi_2(t + \Delta t), \phi_3(t + \Delta t)) \ominus_{gH} f(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t))}{\Delta t}, \sum_{i=1}^3 \partial_{x_{igH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_i(t) \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2, x_3)}{\Delta t}, \sum_{i=1}^3 \partial_{x_{igH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_i(t) \right) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{\sum_{i=1}^3 \alpha_i}{\Delta t}, \sum_{i=1}^3 \partial_{x_{igH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_i(t) \right) \\ &\leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\Delta x_1} \odot \frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \right. \\ &\quad \left. \partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_n) \odot \partial_t x_1(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\Delta x_2} \odot \frac{\Delta x_2}{\Delta t}, \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_2(t) \right) \\
& + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{f(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) \ominus_{gH} f(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \odot \frac{\Delta x_3}{\Delta t}, \partial_{x_{3gH}} f(x_1, \dots, x_n) \odot \partial_t x_3(t) \right) \\
& \leq \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} \partial_{x_{1gH}} f(t, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) dt}{\Delta x_1} \odot \frac{\Delta x_1}{\Delta t}, \partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_1(t) \right) \\
& + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D \left(\frac{\int_{x_2}^{x_2 + \Delta x_2} \partial_{x_{2gH}} f(x_1, t, x_3 + \Delta x_3) dt}{\Delta x_2} \odot \frac{\Delta x_2}{\Delta t}, \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_2(t) \right) \\
& + D \left(\partial_{x_{3gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot x_3'(t), \partial_{x_{3gH}} f(x_1, x_2, x_3) \odot \partial_t x_3(t) \right) = **
\end{aligned}$$

با توجه به لم (۲-۶-۱) و لم (۲-۶-۲) داریم

$$\begin{aligned}
** & = \partial_t x_1(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1} D \left(\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} \partial_{x_{1gH}} f(t, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) dt, \Delta x_1 \odot \partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) \\
& + \partial_t x_2(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_2} D \left(\int_{x_2}^{x_2 + \Delta x_2} \partial_{x_{2gH}} f(x_1, t, x_3 + \Delta x_3) dt, \Delta x_2 \odot \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) \\
& + \partial_t x_2(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_2} D \left(\int_{x_2}^{x_2 + \Delta x_2} \partial_{x_{2gH}} f(x_1, t, x_3 + \Delta x_3) dt, \Delta x_2 \odot \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) \\
& \leq \frac{\partial_t x_1(t)}{\Delta x_1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} D \left(\partial_{x_{1gH}} f(t, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) dt, \partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) dt \right) \\
& + \frac{\partial_t x_2(t)}{\Delta x_2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\int_{x_2}^{x_2 + \Delta x_2} D \left(\partial_{x_{2gH}} f(x_1, t, x_3 + \Delta x_3) dt, \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) dt \right) \\
& \leq \frac{\partial_t x_1(t)}{\Delta x_1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sup_{\tau \in [x_1, x_1 + \Delta x_1]} D \left(\partial_{x_{1gH}} f(\tau, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) \partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right) \Delta x_1 \\
& + \frac{\partial_t x_2(t)}{\Delta x_2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\sup_{\tau \in [x_2, x_2 + \Delta x_2]} D \left(\partial_{x_{2gH}} f(x_1, \tau, x_3 + \Delta x_3) \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) \right) \Delta x_2 = **
\end{aligned}$$

وقتی که $\Delta t \rightarrow 0$ پس $\Delta x_i \rightarrow 0$. در این صورت به ازای $i=1, 2$ داریم $\tau_i \rightarrow x_i$ و

$$** = \partial_t x_1(t) D \left(\partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_3), \partial_{x_{1gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) + \partial_t x_2(t) D \left(\partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3), \partial_{x_{2gH}} f(x_1, x_2, x_3) \right) = 0.$$

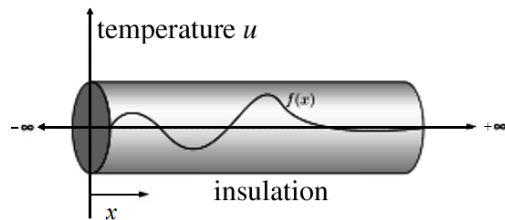
با توجه به پیوستگی $\partial_{x_{igH}} f, i=1, 2, 3$ ، اثبات کامل است. $\square$

۳-۴ معادله‌ی فازی گرما در میله‌ای با طول بینهایت

میله‌ای فلزی را در نظر بگیرید که به گونه‌ای عایق بندی شده باشد که گرما در طول میله به صورت یکنواخت پخش شود، از سطح میله به بیرون منتقل نشود و دوانتهای میله فاقد عایق بندی باشد. فرض کنید که طول میله بینهایت باشد $(-\infty < x < \infty)$ و گرما اولیه‌ی فازی $f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به ابتدای میله وارد شود (شکل (۳-۴)). میزان انتقال گرما در میله‌ی فوق به صورت زیر فرمول بندی می‌شود

$$\partial_{t_{gH}} u(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} u(x, t) = F(x, t),$$

که در آن $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$ و $\kappa \in \mathbb{R}^+$ ضریب نفوذ گرما است. تابع $u(x, t): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ نشان دهنده میزان گرمای موجود در میله فلزی در مکان x در لحظه‌ی t است. در این بخش ابتدا یکتایی جواب معادله‌ی فازی گرمای بیان شده بررسی می‌شود. سپس با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری $u(x, t)$ نسبت به متغیرهای x و t ، جواب تحلیلی معادله‌ی فازی گرما به دست می‌آید.



شکل ۳-۴. میله عایق با طول بینهایت

۱-۳-۴ قضیه اصل ماکزیمم

این بخش یکتایی جواب برای معادله فازی گرما را اثبات می‌کند. به همین منظور اصل ماکزیمم استفاده می‌شود. نظریه‌ی اصل ماکزیمم بر این اساس است که اگر یک میله عایق به طول L داشته باشیم که فقط بتواند از ابتدا یا انتها گرما دریافت کند، آنگاه گرمای موجود در طول میله نمی‌تواند بیشتر از گرمای ابتدا یا انتها میله شود.

قضیه ۱-۳-۴. (اصل ماکزیمم فازی) فرض کنید که $u(x, t)$ جواب معادله‌ی فازی گرما

$$\partial_{t_{gH}} u(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} u(x, t) \leq 0. \quad (1.5)$$

در مجموعه $R = \{(x, t) \mid 0 < x < L, 0 < t \leq T\}$ باشد و در مجموعه $\bar{R} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T\}$ پیوسته فازی باشد. بنابراین $u(x, t)$ ماکزیمم مقدار خود را در مجموعه $\Gamma = \{(x, t) \mid x = 0, 0 \leq t \leq T; x = L, 0 \leq t \leq T; 0 < x < L, t = 0\}$ دریافت می کند.

اثبات. ابتدا اثبات می کنیم که اگر $v(x, t)$ تابعی پیوسته فازی در مجموعه $\bar{R}$ باشد و در نامساوی

$$\partial_{t_{gH}} v(x, t) \ominus_{gH} \partial_{xx_{gH}} v(x, t) < 0, \quad (2.5)$$

در R صدق کند، آنگاه ماکزیمم مقدار خود را در Γ دریافت می کند. فرض کنید که v دارای ماکزیمم موضعی در $P = (x_0, t_0) \in R$ باشد. با توجه به قضایای (۳-۲-۵) و (۳-۲-۹) داریم

$$\partial_{t_{gH}} v(x_0, t_0) = 0, \quad \partial_{xx_{gH}} v(x_0, t_0) \leq 0.$$

چون $\kappa > 0$ ، براساس قسمت (۳) در گزاره (۲-۵-۲)، در نقطه P داریم

$$\partial_{t_{gH}} v(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} v(x, t) \geq 0,$$

معادله ی فوق در تناقض با این اصل است که باید معادله $v(x, t)$ در معادله (۲.۵) صدق کند.

با توجه به پیوسته بودن $v(x, t)$ در $\bar{R}$ و قضیه (۳-۷-۲)، $v(x, t)$ مقدار ماکزیمم خود را در Γ اختیار می کند.

فرض کنید که $M = \max_{\Gamma} u(x, t)$ ($M \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$) که در آن $u(x, t)$ مقداری است که در معادله (۱.۵) صدق می کند. تابع کمکی $v(x, t)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2, \quad \epsilon > 0.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \partial_{t_{gH}} v(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} v(x, t) &= \partial_{t_{gH}} u(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} (u(x, t) + \epsilon x^2) \\ &= \partial_{t_{gH}} u(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} u(x, t) - 2\epsilon \kappa = -2\epsilon \kappa < 0. \end{aligned}$$

که از آن نتیجه می شود

$$\partial_{t_{gH}} v(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} v(x, t) < 0 \quad (3.5)$$

معادله (۳.۵) در معادله (۲.۵) صدق می کند و بر اساس نتایج به دست آمده $v(x, t)$ مقدار ماکزیمم خود را در Γ

دریافت می کند. پس به ازای هر نقطه $(x, t) \in \bar{R}$ باید $v(x, t) = u(x, t) + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon L^2$ و با توجه به اینکه ϵ

مقداری دلخواه و بسیار کوچک است، داریم $u(x, t) \leq v(x, t) \leq M$ بنابراین $u(x, t) \leq M$. □

قضیه ۴-۳-۲. معادله گرما فازی زیر

$$\begin{cases} \partial_{t_{gH}} u(x,t) \ominus_{gH} \partial_{xx_{gH}} u(x,t) = F(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0; \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (۴.۵)$$

حداکثر یک جواب دارد که در ناحیه $R = \{(x,t) | -\infty < x < \infty, t \geq 0\}$ پیوسته و کراندار است.

اثبات. فرض کنید که v و w دوجواب معادله (۴.۵) باشند. علاوه بر این $M \in \mathbb{R}_F$ ، $M \geq 0$ وجود داشته باشد

به طوری که $|w| \leq M$ و $|v| \leq M$. فرض کنید $v = w \ominus_{gH} u$. در این صورت u در معادله گرما فازی

$$u(x,0) = 0, \quad \partial_{t_{gH}} u(x,t) \ominus_{gH} \partial_{xx_{gH}} u(x,t) = 0, \quad |u| \leq 2M \quad \text{در } R.$$

فرض کنید S مستطیل $S = \{(x,t) | -L \leq x \leq L, 0 < t \leq T\}$ باشد که در آن L و T دو مقدار مثبت دلخواه

است. حال تابع زیر را تعریف می کنیم

$$g(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + \kappa t \right). \quad (۵.۵)$$

با توجه به لم (۴-۲-۱)، داریم

$$\partial_{t_{gH}} g(x,t) = \frac{4M\kappa}{L^2}, \quad \partial_{xx_{gH}} g(x,t) = \frac{4M}{L^2},$$

و $\partial_{t_{gH}} g(x,t) \ominus_{gH} \partial_{xx_{gH}} g(x,t) = 0$ در S . همچنین با توجه به معادله (۵.۵) داریم

$$g(x,0) = \frac{2Mx^2}{L^2} \geq 0 = u(x,0), \quad g(\pm L, t) = 2M + \frac{4M\kappa t}{L^2} \geq 2M \geq u(\pm L, t).$$

با توجه به قضیه (۴-۳-۱) در مجموعه $\bar{S}$ ، داریم $g(x,t) \geq u(x,t)$.

به طریق مشابه رابطه $u(x,t) \geq -g(x,t)$ را می توان به دست آورد. بنابر تعریف (۲-۵-۲) و تذکر (۲-۵-۱) به

ازای هر نقطه ای (x,t) ، $t > 0$ ، ثابت های L و T وجود دارند به طوری که $(x,t) \in \bar{S}$ و

$$|u(x,t)| \leq g(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + \kappa t \right). \quad |u(x,t)| = 0, L \rightarrow \infty. \quad \text{در این صورت به ازای هر به ازای}$$

$-\infty < x < \infty$ و $0 < t \leq T$ داریم $v(x,t) = w(x,t)$. چون T مقداری دلخواه است پس در مجموعه R می-

توان نتیجه گرفت $v = w$. بنابراین معادله فازی گرما دارای جواب یکتا به ازای هر مقدار اولیه داده شده است. $\square$

۴-۳-۲ جواب تحلیلی معادله فازی گرما

معادله فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \partial_{t_{gH}} u(x, t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{gH}} u(x, t) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (6.5)$$

که در آن 0 نشان دهنده مجموعه حقیقی $\{0\}$ است. فرض کنید که تابع فازی $u(x, t): \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ جواب معادله (6.5) باشد.

برای یافتن جواب تحلیلی معادله فازی گرما (6.5) نگاشت تجانس زیر را در نظر بگیرید

$$\xi(x) = \varepsilon^a x, \quad \tau(t) = \varepsilon^b t, \quad a, b > 0,$$

و

$$w(\xi, \tau) = \varepsilon^c u(\varepsilon^{-a} \xi, \varepsilon^{-b} \tau), \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad c > 0.$$

با توجه به اینکه $\tau(t)$ و $\xi(x)$ توابعی اکیدا صعودی هستند، پس با این تغییر متغیر و با توجه به قضیه (۴-۲-۲) می توان نوشت

$$\begin{aligned} \partial_{t_{gH}} u(x, t) &= \varepsilon^{-c} \partial_{\tau_{gH}} w(\xi, \tau) \odot \partial_{t_{gH}} \tau = \varepsilon^{b-c} \partial_{\tau_{gH}} w(\xi, \tau), \\ \partial_{x_{gH}} u(x, t) &= \varepsilon^{-c} \partial_{\xi_{gH}} w(\xi, \tau) \odot \partial_{x_{gH}} \xi = \varepsilon^{a-c} \partial_{\xi_{gH}} w(\xi, \tau), \\ \partial_{xx_{gH}} u(x, t) &= \varepsilon^{a-c} \partial_{\xi_{gH}} \left(\partial_{\xi_{gH}} w(\xi, \tau) \right) \odot \partial_{x_{gH}} \xi = \varepsilon^{2a-c} \partial_{\xi_{gH}}^2 w(\xi, \tau). \end{aligned}$$

آنگاه معادله فازی گرما به معادله زیر تبدیل می شود

$$\varepsilon^{b-c} \partial_{\tau_{gH}} w(\xi, \tau) - \varepsilon^{2a-c} \kappa \partial_{\xi_{gH}}^2 w(\xi, \tau) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon^{b-c} \left(\partial_{\tau_{gH}} w(\xi, \tau) - \varepsilon^{2a-b} \kappa \partial_{\xi_{gH}}^2 w(\xi, \tau) \right) = 0.$$

حال اگر به ازای هر ε داشته باشیم $b = 2a$ ، آنگاه مقدار به دست آمده تحت این نگاشت یکتا است. پس اگر u جواب به دست آمده در x, t باشد، آنگاه $w = \varepsilon^{-c} u$ جواب معادله را در $\xi = \varepsilon^{-a} x$ و $\tau = \varepsilon^{-b} t$ به دست می آورد.

متغیرهای مستقل زیر را با توجه به نگاشت داده شده، در نظر بگیرید

$$\frac{\xi}{\tau^{\frac{a}{b}}} = \frac{x}{t^{\frac{a}{b}}} = \frac{\varepsilon^a x}{(\varepsilon^b t)^{\frac{a}{b}}}$$

با توجه به اینکه $b = 2a$ ، متغیر $\eta(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}$ را داریم. در این صورت

$$\frac{w}{\tau^{\frac{c}{b}}} = \frac{u}{t^{\frac{c}{b}}} = \frac{\varepsilon^c}{(\varepsilon^b t)^{\frac{c}{b}}} = v(\eta).$$

هدف پیدا کردن جواب معادله فازی گرما (۶.۵) به صورت $u(x, t) = t^{\frac{c}{2a}} \odot v(\eta)$ است که در آن $v(\eta) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ با توجه به نوع مشتق پذیری تابع $u(x, t)$ نسبت به متغیرهای x و t ، جواب معادله فازی گرما (۶.۵) بررسی می شود. برای این منظور ابتدا با توجه به مشتق تابع η نسبت به متغیرهای x و t ، تغییر نوع مشتق پذیری $u(x, t)$ مورد بررسی قرار می گیرد.

بنابر قضیه (۳-۲-۴) می توان گفت

$$\bullet \text{ اگر } x > 0 : \partial_t \eta = \frac{-x}{(2t\sqrt{2\kappa t})} = \frac{-\eta}{2t} < 0 \text{ آنگاه}$$

$$\partial_{t_i, gH} u(x, t) = \frac{c}{2a} t^{\frac{c}{2a}-1} \odot v(\eta) + t^{\frac{c}{2a}} \odot \partial_t \eta v'_{ii, gH}(\eta) = \frac{1}{2} t^{\frac{c}{2a}-1} \left(\frac{c}{a} v(\eta) \ominus_{gH} \eta \odot v'_{ii, gH}(\eta) \right), \quad (۷.۵)$$

$$\partial_{t_{ii}, gH} u(x, t) = \frac{c}{2a} t^{\frac{c}{2a}-1} \odot v(\eta) + t^{\frac{c}{2a}} \odot \partial_t \eta v'_{i, gH}(\eta) = \frac{1}{2} t^{\frac{c}{2a}-1} \left(\frac{c}{a} v(\eta) \ominus_{gH} \eta \odot v'_{i, gH}(\eta) \right). \quad (۸.۵)$$

$$\bullet \text{ اگر } x < 0 : \partial_t \eta = \frac{-x}{2t\sqrt{2\kappa t}} = \frac{-\eta}{2t} > 0 \text{ در این صورت}$$

$$\partial_{t_i, gH} u(x, t) = \frac{c}{2a} t^{\frac{c}{2a}-1} \odot v(\eta) + t^{\frac{c}{2a}} \odot \partial_t \eta v'_{i, gH}(\eta) = \frac{1}{2} t^{\frac{c}{2a}-1} \left(\frac{c}{a} v(\eta) \ominus_{gH} \eta \odot v'_{i, gH}(\eta) \right), \quad (۹.۵)$$

$$\partial_{t_{ii}, gH} u(x, t) = \frac{c}{2a} t^{\frac{c}{2a}-1} \odot v(\eta) + t^{\frac{c}{2a}} \odot \partial_t \eta v'_{ii, gH}(\eta) = \frac{1}{2} t^{\frac{c}{2a}-1} \left(\frac{c}{a} v(\eta) \ominus_{gH} \eta \odot v'_{ii, gH}(\eta) \right) \quad (۱۰.۵)$$

$$\text{علاوه بر این با توجه به اینکه } \partial_x \eta = \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} > 0 \text{ داریم}$$

$$\partial_{x_{gH}} u(x, t) = t^{\frac{c}{2a}} v'_{gH}(\eta) \partial_x \eta = \frac{t^{\frac{c}{2a}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\kappa}} v'_{gH}(\eta),$$

و

$$\partial_{xx_{gH}} u(x, t) = \frac{t^{\frac{c}{2a}-1}}{2\kappa} v''_{gH}(\eta) \quad (۱۱.۵)$$

بنابراین $\partial_x \eta$ نوع دیفرانسیل پذیری $u(x, t)$ را نسبت به x را تغییر نمی دهد.

بر اساس نوع دیفرانسیل پذیری $u(x, t)$ نسبت به متغیرهای x و t و آنچه که بیان شد، حالات زیر را داریم.

۴-۳-۲-۱ حالت اول

فرض کنید که نوع $[gH-p]$ -دیفرانسیل پذیری برای $u(x,t)$ و $\partial_x u(x,t)$ نسبت به x تغییری نکند)
 $\partial_x u(x,t)$ تابعی $[(i)-p]$ -دیفرانسیل باشد). در این صورت با توجه به معادله (۱۱.۵) و تعاریف (۲-۸-۱۱) و (۲-۱۰-۸) داریم

۴-۳-۲-۱-۱ جواب $[(i)-p]$ -دیفرانسیل پذیر

فرض کنید $u(x,t)$ نسبت به t $[(i)-p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. با توجه به معادلات (۷.۵)، (۹.۵) و (۱۱.۵) و تغییر متغیرهای اعمال شده، معادله‌ی فازی گرما (۶.۵) به معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{cases} t^{\frac{\gamma}{2}-1} (v''_{i.gH}(\eta) + \eta v'_{ii.gH}(\eta) \ominus_{gH} \gamma v(\eta)) = 0, & \text{if } x > 0; \\ t^{\frac{\gamma}{2}-1} (v''_{i.gH}(\eta) + \eta v'_{i.gH}(\eta) \ominus_{gH} \gamma v(\eta)) = 0, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

که در آن $\gamma = \frac{c}{a}$ به طوری که $u(x,t) = t^{\frac{\gamma}{2}} v(\eta)$ و $\eta = \frac{x}{\sqrt{2kt}}$.

با توجه به شرایط اولیه مساله‌ی فازی گرما (۶.۵)، اگر $\eta \rightarrow +\infty$ ، آنگاه باید $u = t^{\frac{\gamma}{2}} v(\eta) \rightarrow u_0$ که در آن مقدار u_0 به t وابسته نیست پس γ باید صفر باشد و اگر $\eta \rightarrow -\infty$ ، آنگاه باید $v \rightarrow 0$. بنابراین $v(\eta)$ جواب معادلات دیفرانسیل فازی مقدار مرزی زیر است

$$\begin{cases} \begin{cases} v''_{i.gH}(\eta) + \eta v'_{ii.gH}(\eta) = 0, & \text{if } x > 0; \\ v(+\infty) = u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases} \\ \begin{cases} v''_{i.gH}(\eta) + \eta v'_{i.gH}(\eta) = 0, & \text{if } x < 0. \\ v(-\infty) = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (12.5)$$

با توجه به روند بیان شده در قسمت (۳-۴)، معادلات به دست آمده به صورت زیر حل می‌شود.

• اگر $x > 0$: از قضیه (۳-۲-۳) نتیجه می‌شود

$$e^{\frac{\eta^2}{2}} v''_{i.gH}(\eta) + \eta e^{\frac{\eta^2}{2}} v'_{ii.gH}(\eta) = 0 \Rightarrow \left(e^{\frac{\eta^2}{2}} v'_{ii.gH}(\eta) \right)'_{i.gH} = 0.$$

بنابر قسمت (۳) در لم (۳-۲-۳) نتیجه می‌گیریم که مقدار ثابت فازی λ_0 وجود دارد به طوری که

$$e^{\frac{\eta^2}{2}} v'_{ii.gH}(\eta) = \lambda_0 \Rightarrow v'_{ii.gH}(\eta) = \lambda_0 e^{-\frac{\eta^2}{2}},$$

از رابطه بالا در فاصله $[\eta, +\infty)$ انتگرال می گیریم

$$\int_{\eta}^{+\infty} v'_{ii.gH}(y) dy = \lambda_0 \int_{\eta}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

بنابر قضیه (۲-۹-۱) داریم

$$v(+\infty) \ominus_{gH} v(\eta) = \lambda_2 \int_{\frac{\eta}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds. \quad (۱۳.۵)$$

با توجه به فرض اولیه در این حالت، $v(\eta)$ تابعی $[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر است.

• اگر $x < 0$: در این حالت داریم

$$e^{\frac{\eta^2}{2}} v''_{i.gH}(\eta) + \eta e^{\frac{\eta^2}{2}} v'_{i.gH}(\eta) = \left(e^{\frac{\eta^2}{2}} v'_{i.gH}(\eta) \right)'_{i.gH} = 0.$$

با توجه به لم (۳-۲-۳) می توان گفت

$$e^{\frac{\eta^2}{2}} v'_{i.gH}(\eta) = \lambda_0 \Rightarrow v'_{i.gH}(\eta) = \lambda_0 e^{-\frac{\eta^2}{2}},$$

با انتگرال گیری از رابطه ی بالا داریم

$$\int_{-\infty}^{\eta} v'_{i.gH}(y) dy = \lambda_0 \int_{-\infty}^{\eta} e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

پس

$$v(\eta) \ominus_{gH} v(-\infty) = \lambda_2 \int_{-\infty}^{\frac{\eta}{\sqrt{2}}} e^{-s^2} ds. \quad (۱۴.۵)$$

در این حالت $v(\eta)$ تابعی $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر است.

برای به دست آوردن مقدار ثابت λ_2 ، دو معادله (۱۳.۵) و (۱۴.۵) را جمع می کنیم که در این صورت

$$v(+\infty) \ominus_{gH} v(-\infty) = \lambda_2 \left(\int_{-\infty}^{\frac{\eta}{\sqrt{2}}} e^{-s^2} ds + \int_{\frac{\eta}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right).$$

با توجه به اینکه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$ ، پس

$$u_0 \ominus_{gH} 0 = \lambda_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}}. \quad (۱۵.۵)$$

در نهایت به ازای $x > 0$ ، اگر $v(\eta)$ تابعی $[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه جواب معادله ی

دیفرانسیل فازی مقدار مرزی (۱۲.۵) برابر است با

$$v(\eta) = u_0 + (-1) \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\eta}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

و با توجه به معادلات (۱۴.۵) و (۱۵.۵) در حالتی که $v(\eta)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر و $x < 0$ است، جواب معادله دیفرانسیل فازی مقدار مرزی برابر است با

$$v(\eta) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\eta}{\sqrt{2}}} e^{-s^2} ds$$

با در نظر گرفتن تمام توضیحات و فرضیات بالا جواب معادله ی گرما (۶.۵) برابر است با

$$u(x, t) = u_0 + (-1) \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds, \quad \text{if } x > 0;$$

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-s^2} ds, \quad \text{if } x < 0.$$

۴-۳-۲-۱-۲ جواب $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر

فرض کنید $u(x, t)$ تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t باشد. در این صورت با توجه به روند توضیح داده شده در بخش (۴-۳-۲-۱-۲)، معادلات دیفرانسیل فازی مقدار مرزی زیر را دست می آیند

$$\begin{cases} \begin{cases} v''_{i.gH}(\eta) + \eta v'_{i.gH}(\eta) = 0, \\ v(+\infty) = u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases}, & \text{if } x > 0; \\ \begin{cases} v''_{i.gH}(\eta) + \eta v'_{ii.gH}(\eta) = 0, \\ v(-\infty) = 0 \end{cases}, & \text{if } x < 0; \end{cases}$$

در نهایت جواب معادله دیفرانسیل گرما (۶.۵) در این حالت برابر است با

$$u(x, t) = u_0 \ominus_{gH} \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds, \quad \text{if } x > 0;$$

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-s^2} ds, \quad \text{if } x < 0.$$

۴-۳-۲-۲ حالت دوم

فرض کنید که نوع $[gH - p]$ -دیفرانسیل پذیری توابع $u(x, t)$ و $\partial_x u(x, t)$ نسبت به x تغییر کند، در این صورت بر اساس تعریف (۲-۱۰-۸) و معادله (۱۱.۵) حالات زیر را می توان در نظر گرفت

۴-۳-۲-۱ جواب $[i] - p$ -دیفرانسیل پذیر

اگر $u(x, t)$ تابعی $[i] - p$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t باشد. براساس آنچه که در بخش (۴-۳-۲-۱-۱) اثبات گردید و معادلات (۷.۵) و (۹.۵)، معادلات دیفرانسیل فازي مقدار مرزی زیر به دست می آید

$$\begin{cases} \begin{cases} v''_{ii.gH}(\eta) + \eta v'_{ii.gH}(\eta) = 0, \\ v(+\infty) = u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases}, & \text{if } x > 0; \\ \begin{cases} v''_{ii.gH}(\eta) + \eta v'_{i.gH}(\eta) = 0, \\ v(-\infty) = 0 \end{cases}, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

در این حالت جواب تحلیلی معادله ی فازي گرما (۶.۵) برابر است با

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 + (-1) \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds, & \text{if } x > 0; \\ u(x, t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-s^2} ds, & \text{if } x < 0. \end{aligned}$$

۴-۳-۲-۲ جواب $[ii] - p$ -دیفرانسیل پذیر

در این حالت فرض کنید که $u(x, t)$ تابعی $[ii] - p$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t باشد، پس با توجه به معادلات (۸.۵) و (۱۰.۵) می توان نوشت

$$\begin{cases} \begin{cases} v''_{ii.gH}(\eta) + \eta v'_{i.gH}(\eta) = 0, \\ v(+\infty) = u_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \end{cases}, & \text{if } x > 0; \\ \begin{cases} v''_{ii.gH}(\eta) + \eta v'_{ii.gH}(\eta) = 0, \\ v(-\infty) = 0 \end{cases}, & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

جواب معادله گرما فازي به صورت زیر است

$$u(x,t) = u_0 \ominus_{gH} \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds, \quad \text{if } x > 0;$$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-s^2} ds, \quad \text{if } x < 0.$$

با توجه به تمام حالات توضیح داده شده در بالا، جواب معادله‌ی فازی گرما براساس نوع دیفرانسیل پذیری تابع $u(x,t)$ نسبت به متغیر t به دست می‌آید و به نوع دیفرانسیل پذیری تابع $u(x,t)$ نسبت به متغیر x بستگی ندارد. در مجموع داریم

• اگر $u(x,t)$ تابعی $[(i)-p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t باشد، آنگاه

$$\begin{cases} u(x,t) = u_0 + (-1) \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds, & \text{for } x > 0; \\ u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-s^2} ds, & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

• اگر $u(x,t)$ تابعی $[(ii)-p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t باشد، آنگاه

$$\begin{cases} u(x,t) = u_0 \ominus_{gH} \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{+\infty} e^{-s^2} ds, & \text{for } x > 0; \\ u(x,t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-s^2} ds, & \text{for } x < 0. \end{cases}$$

۴-۳-۳ مثال‌ها

این بخش مثال‌هایی برای نشان دادن روش بیان شده در بخش (۴-۳-۲) ارائه می‌کند. کلیه محاسبات با استفاده از برنامه نویسی در محیط Mathematica 8 انجام شده است. فرض کنید

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$$

مثال ۴-۳-۱. معادله فازی گرما زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \partial_{t_i, gH} u(x,t) \ominus_{gH} \odot \partial_{xx_{ii, gH}} u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} (1,3,5), & \text{if } x > 0; \\ 0, & \text{if } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

با توجه به اینکه تابع $u(x,t)$ نسبت به t تابعی $[(i)-p]$ -دیفرانسیل پذیر است، داریم

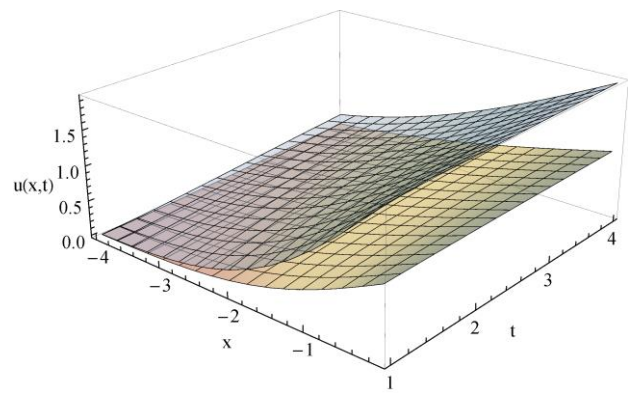
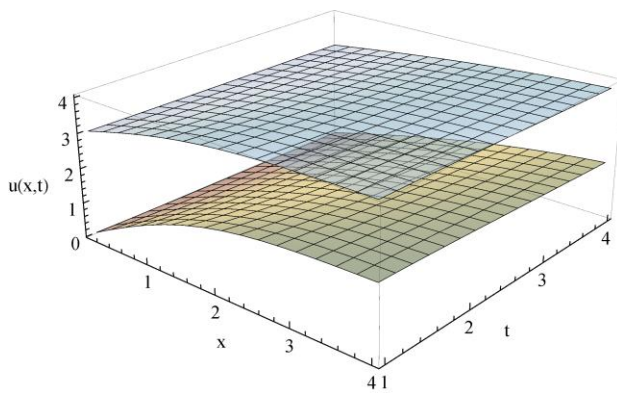
• به ازای $x > 0$:

$$u(x,t;\alpha) = \left[(2\alpha+1) + \frac{1}{2}(-2\alpha+5) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - 1 \right), (-2\alpha+5) + \frac{1}{2}(2\alpha+1) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - 1 \right) \right].$$

• به ازای $x < 0$:

$$u(x,t;\alpha) = \left[\frac{1}{2}(2\alpha+1) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + 1 \right), \frac{1}{2}(-2\alpha+5) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) + 1 \right) \right].$$

جواب به دست آمده به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$, $t \in [1, 4]$, و $x > 0$ و $x < 0$ در شکل های (۴-۴) و (۴-۵) نمایش داده شده است.



شکل ۴-۴. نمایش جواب مثال (۴-۳-۱) به ازای $x > 0$ و به ازای برش $\alpha = \frac{1}{2}$.
شکل ۴-۵. نمایش جواب مثال (۴-۳-۱) به ازای $x < 0$ و به ازای برش $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

مثال ۴-۳-۲. معادله گرما با شرایط اولیه ی فازی داده شده را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \partial_{t_{ii, gH}} u(x,t) \ominus_{gH} 2 \ominus \partial_{xx_{i, gH}} u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} (-3.5, -2, -1), & \text{if } x < 0; \\ 0, & \text{if } x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (۱۶.۵)$$

در این حالت $u(x,t)$ نسبت به t تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر است. بنابراین با استفاده از توضیحات قسمت (۴-۳-۲)، جواب معادله ی گرما (۱۶.۵) برابر است با

• به ازای $x > 0$:

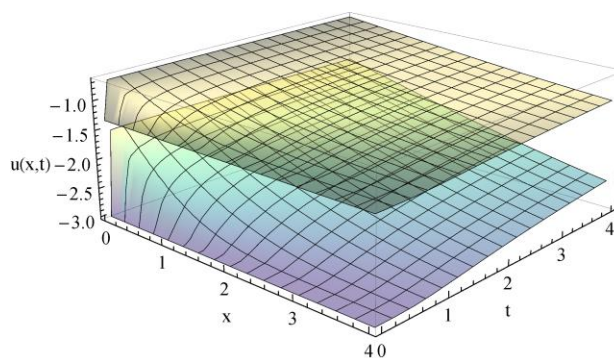
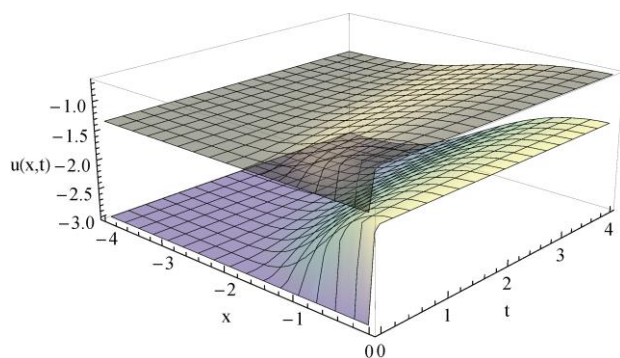
$$u(x,t;\alpha) = \left[\left(\frac{3}{2}\alpha - 3.5 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\alpha - 3.5 \right) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}x}{4\sqrt{t}}\right) - 1 \right), (-\alpha - 1) + \frac{1}{2}(-\alpha - 1) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}x}{4\sqrt{t}}\right) - 1 \right) \right].$$

• به ازای $x < 0$:

$$u(x, t; \alpha) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \alpha - 3.5 \right) \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}x}{4\sqrt{t}} \right) + 1 \right), \frac{1}{2} (-\alpha - 1) \left(\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}x}{4\sqrt{t}} \right) + 1 \right) \right].$$

شکل (۶-۴) جواب معادله‌ی داده شده را به ازای $x > 0$ و شکل (۷-۴) جواب را به ازای $x < 0$ نشان می‌دهد.

جواب کلی معادله‌ی داده شده به ازای تمام $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $\alpha = \frac{1}{3}$ در شکل (۸-۴) نشان داده شده است.

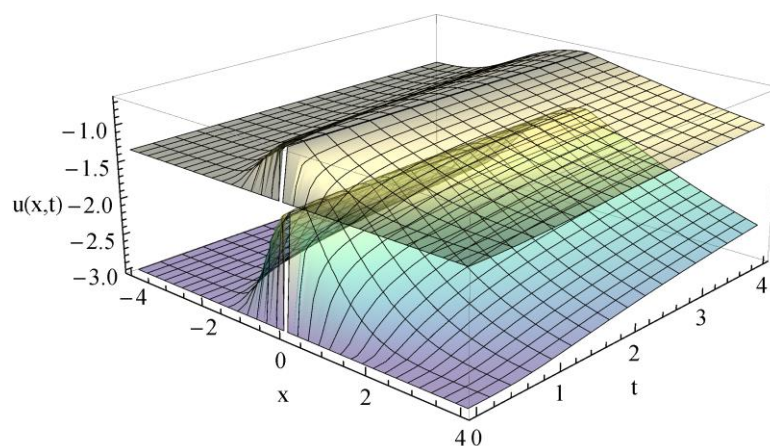


شکل ۷-۴. نمایش جواب مثال (۲-۳-۴) به ازای $x < 0$ و به ازای

شکل ۶-۴. نمایش جواب مثال (۲-۳-۴) به ازای $x > 0$ و به ازای

برش $\alpha = \frac{1}{3}$.

برش $\alpha = \frac{1}{3}$.



شکل ۸-۴. نمایش جواب مثال (۲-۳-۴) به ازای $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $\alpha = \frac{1}{3}$

مثال ۳-۳-۴. معادله گرما را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \partial_{t_i.gH} u(x,t) \ominus_{gH} 0.76 \odot \partial_{xx_i.gH} u(x,t) = 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} (0.6, 2.2, 4.7), & \text{if } x > 0; \\ 0, & \text{if } x < 0. \end{cases} \end{cases}$$

با توجه به توضیحات بخش (۲-۳-۴) جواب معادله گرما داده شده در دو حالت زیر به دست می آید

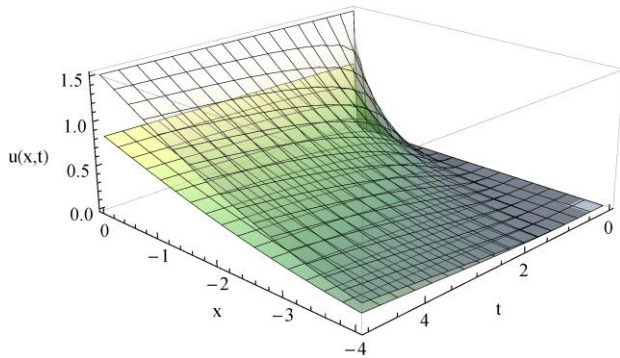
• به ازای $x > 0$:

$$u(x,t;\alpha) = \left[(1.6\alpha + 0.6) + \frac{1}{2}(-2.5\alpha + 4.7) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{19}{25}}t}\right) - 1 \right), (-2.5\alpha + 4.7) + \frac{1}{2}(1.6\alpha + 0.6) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{19}{25}}t}\right) - 1 \right) \right]$$

• به ازای $x < 0$:

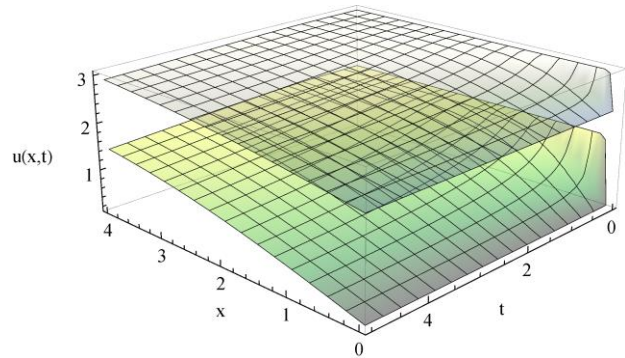
$$u(x,t;\alpha) = \left[\frac{1}{2}(1.6\alpha + 0.6) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{19}{25}}t}\right) + 1 \right), \frac{1}{2}(-2.5\alpha + 4.7) \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{19}{25}}t}\right) + 1 \right) \right]$$

شکل های (۴-۹) و (۴-۱۰) نشان دهنده ی جواب به دست آمده به ازای $x > 0$ و $x < 0$ هستند.



شکل ۴-۱۰. نمایش جواب مثال (۳-۳-۴) به ازای $x < 0$ و در برش

$$\alpha = \frac{1}{3}$$



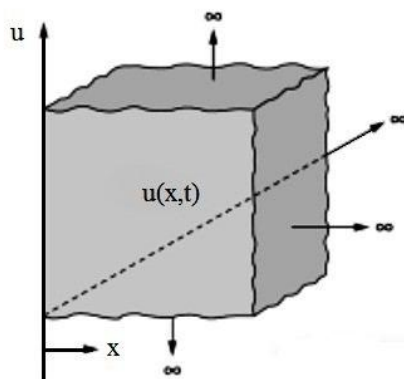
شکل ۴-۹. نمایش جواب مثال (۳-۳-۴) به ازای $x > 0$ و در برش

$$\alpha = \frac{1}{3}$$

۴-۴ معادله فازی گرما در سطح فلزی با طول $(0, +\infty)$

سطح فلزی را در نظر بگیرید که گرما در آن به صورت یکنواخت منتقل می‌شود. گرمای اولیه در این سطح برابر صفر و طول این سطح $(0, +\infty)$ است. مقدار گرمای ثابت q به طور ناگهانی به ابتدای سطح وارد می‌شود (یا ابتدای سطح به اندازه $q(-1)$ سرد می‌شود) و این گرما به ازای تمام $t > 0$ به طور مداوم وجود دارد. از طرفی با افزایش طول سطح $(x \rightarrow \infty)$ گرما در این سطح به صفر میل می‌کند (شکل ۴-۱۱).

$$\begin{cases} \partial_{t_{gH}} u(x, t) - \kappa \partial_{xx_{gH}} u(x, t) = 0, & \forall x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, \quad \partial_{x_{gH}} u(0, t) = q, & \forall x > 0, t > 0; \\ u(x, t) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (۱۷.۵)$$



شکل ۴-۱۱. سطح فلزی با طول $(0, +\infty)$

هدف پیدا کردن جواب معادله‌ی گرما (۱۷.۵) است. همانگونه که در بخش (۴-۳) توضیح داده شد، برای تغییر معادله فازی گرما به معادله دیفرانسیل فازی درجه دوم، نگاشت تجانس به کار می‌رود. مطابق با روند توضیح داده شده در بخش (۴-۳)، فرم جواب معادله‌ی گرما را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u(x, t) = t^{\frac{\gamma}{2}} \odot v(\eta) \quad (۱۸.۵)$$

که در آن $\gamma = \frac{c}{a}$ و $\eta(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2\kappa t}}$ ، $v(\eta) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

چون $x > 0$ و $t > 0$ پس $\partial_{\eta} \eta = \frac{-x}{2t\sqrt{2\kappa t}} = \frac{-\eta}{2t} < 0$. بنا بر قضیه (۳-۲-۴) و معادله (۱۸.۵) داریم

$$\partial_{t_i.gH} u(x,t) = t^{\frac{\gamma}{2}} \partial_t \eta v'_{ii.gH}(\eta) + \frac{\gamma}{2} t^{\frac{\gamma-1}{2}} v(\eta) = \frac{1}{2} t^{\frac{\gamma-1}{2}} \left((-1) \eta v'_{ii.gH}(\eta) + \gamma v(\eta) \right), \quad (۱۹.۵)$$

$$\partial_{t_{ii.gH}} u(x,t) = t^{\frac{\gamma}{2}} \partial_t \eta v'_{i.gH}(\eta) + \frac{\gamma}{2} t^{\frac{\gamma-1}{2}} v(\eta) = \frac{1}{2} t^{\frac{\gamma-1}{2}} \left((-1) \eta v'_{i.gH}(\eta) + \gamma v(\eta) \right), \quad (۲۰.۵)$$

همچنین با توجه به اینکه $\partial_x \eta = \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} > 0$ می توان نوشت

$$\partial_{x_{ii.gH}} u(x,t) = t^{\frac{\gamma}{2}} v'_{gH}(\eta) \partial_x \eta = \frac{t^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\sqrt{2\kappa}} v'_{ii.gH}(\eta) \Rightarrow \partial_{xx_{i.gH}} u(x,t) = \frac{t^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2\kappa} v''_{i.gH}(\eta), \quad (۲۱.۵)$$

$$\partial_{x_{i.gH}} u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} v'_{i.gH}(\eta) \Rightarrow \partial_{xx_{i.gH}} u(x,t) = \frac{t^{\frac{\gamma-1}{2}}}{2\kappa} v''_{i.gH}(\eta), \quad (۲۲.۵)$$

پس $\partial_x \eta$ نوع دیفرانسیل پذیری $u(x,t)$ را نسبت به x تغییر نمی دهد.

همانگونه که در بخش (۳-۴) بیان شد، جواب به دست آمده برای معادله ی فازی گرما به نوع دیفرانسیل پذیری تابع $u(x,t)$ نسبت به متغیر t وابسته است. در این قسمت نیز با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری $u(x,t)$ در معادله (۱۷.۵) نسبت به متغیر t ، جواب معادله ی فازی گرما در حالات مختلف دیفرانسیل پذیری به دست می آید.

۴-۱-۴ جواب $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر

فرض کنید که $u(x,t)$ نسبت به t تابعی $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر، نسبت به x تابعی $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و نوع دیفرانسیل پذیری $u(x,t)$ نسبت به x, t تغییری نکند. مقدار سرمای اولیه $q(-1)$ به ابتدای سطح فلزی به طور ناگهانی و مداوم وارد می شود. در این صورت معادله ی فازی گرما را به صورت زیر داریم

$$\begin{cases} \partial_{t_i.gH} u(x,t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{i.gH}} u(x,t) = 0, & \forall x > 0, t > 0; \\ u(x,0) = 0, & \forall x > 0, t > 0; \\ \partial_{x_{ii.gH}} u(0,t) = (-1)q, & \\ u(x,t) \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty. & \end{cases} \quad (۲۳.۵)$$

که در آن 0 نشان دهنده مجموعه قطعی $\{0\}$ است و $q \in \mathbb{R}_F$.

با توجه به معادله (۲۱.۵) و شرایط اولیه ی بیان شده در معادله (۲۳.۵) می توان نتیجه گرفت

$$\partial_{x_{ii.gH}} u(0,t) = \frac{t^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\sqrt{2\kappa}} v'_{ii.gH}(0) = (-1)q, \quad (۲۴.۵)$$

به دلیل اینکه q به t وابسته نیست، پس در معادله (۲۴.۵) باید $\gamma - 1$ برابر با صفر باشد. در این صورت

$$v'_{ii.gH}(0) = (-1)q\sqrt{2\kappa}. \quad (25.5)$$

با توجه به معادلات (23.5)، (19.5) و (21.5) معادله زیر حاصل می شود

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \left[(-1)\eta v'_{ii.gH}(\eta) + v(\eta) \ominus_{gH} v''_{i.gH}(\eta) \right] = 0 \Rightarrow \eta v'_{ii.gH}(\eta) \ominus_{gH} v(\eta) + v''_{i.gH}(\eta) = 0. \quad (26.5)$$

و براساس معادلات (25.5) و (26.5)، تابع v جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی فازی خواهد بود

$$\begin{cases} v''_{i.gH}(\eta) + \eta v'_{ii.gH}(\eta) \ominus_{gH} v(\eta) = 0 \\ v'_{ii.gH}(0) = (-1)q\sqrt{2\kappa} \quad \text{and} \quad v \rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (27.5)$$

که در آن $q \in \mathbb{R}_F$.

در معادله (27.5) هدف پیدا کردن جواب هایی به صورت $v(\eta) = (-1)\eta z(\eta)$ است به طوری که $z(\eta) \in \mathbb{R}_F$ و

$v(\eta)$ تابعی $[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر و $v'_{gH}(\eta)$ تابعی $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد.

پس بنابر تذکر (3-2-1) توابع $z(\eta)$ و $z'_{i.gH}(\eta)$ باید $[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند. پس با در نظر گرفتن

قضیه (3-2-3) و تذکر (3-2-1) می توان نوشت

$$\begin{aligned} v'_{ii.gH}(\eta) &= (-1)z(\eta) + (-1)\eta z'_{i.gH}(\eta), \\ v''_{i.gH}(\eta) &= (-2)z'_{i.gH}(\eta) + (-1)\eta z''_{ii.gH}(\eta). \end{aligned}$$

و هنگامی که $\eta \rightarrow +\infty$ داریم $v \rightarrow 0$ پس $z(+\infty) = 0$. با جای گذاری تمام این موارد در معادله (27.5)،

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی زیر به دست می آید

$$z''_{ii.gH}(\eta) + \frac{(2+\eta^2)}{\eta} z'_{i.gH}(\eta) = 0.$$

مطابق با روش بیان شده در قسمت (3-3) معادله دیفرانسیل داده شده به روش فاکتور انتگرال گیری حل می -

شود. در این صورت داریم

$$\eta^2 e^{\frac{\eta^2}{2}} z''_{ii.gH}(\eta) + \left(\frac{2+\eta^2}{\eta} \right) \eta^2 e^{\frac{\eta^2}{2}} z'_{i.gH}(\eta) = 0 \Rightarrow \left(\eta^2 e^{\frac{\eta^2}{2}} z'_{i.gH}(\eta) \right)'_{ii.gH} = 0$$

بنا بر قسمت (3) در لم (3-2-2) نتیجه می گیریم که مقدار ثابت فازی λ_0 وجود دارد به طوری که

$$\eta^2 e^{\frac{\eta^2}{2}} z'_{i.gH}(\eta) = \lambda_0 \Rightarrow z'_{i.gH}(\eta) = \lambda_0 \frac{e^{-\frac{\eta^2}{2}}}{\eta^2}.$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا و با توجه به قضیه (2-9-1) رابطه ی زیر حاصل می شود

$$z(\eta) \ominus_{gH} \lambda_1 = \lambda_0 \int_{\eta}^{\frac{s^2}{2}} \frac{e^{-\frac{s^2}{2}}}{s^2} ds.$$

در این حالت $z(\eta)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است. با توجه به قضیه انتگرال گیری جزء به جزء (۳-۳) می توان نوشت

$$z(\eta) = \lambda_3 + \lambda_2 \left(\frac{e^{-\frac{\eta^2}{2}}}{\eta} + \int_0^\eta e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right),$$

در این صورت جواب برابر است با

$$v(\eta) = (-1)\lambda_3\eta + (-1)\lambda_2 \left(e^{-\frac{\eta^2}{2}} + \eta \int_0^\eta e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right),$$

که در آن λ_3 و λ_2 مقادیری هستند که با توجه به شرایط اولیه به دست می آیند

$$v'_{ii.gH}(\eta) = (-1)\lambda_3 + (-1)\lambda_2 \left(\int_0^\eta e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right),$$

در این صورت

$$v'_{ii.gH}(0) = (-1)\lambda_3 = (-1)q\sqrt{2\kappa}.$$

پس $\lambda_3 = q\sqrt{2\kappa}$. هم چنین وقتی که $\eta \rightarrow +\infty$ داریم $v \sim \eta \left((-1)\lambda_3 + (-1)\lambda_2 \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds \right) = 0$ پس با توجه

$$\lambda_2 = \ominus_{gH} q \sqrt{\frac{4\kappa}{\pi}} \quad \text{به اینکه} \quad \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

پس جواب معادله (۲۷.۵) برابر است با

$$v(\eta) = (-1)\eta q \sqrt{2\kappa} \ominus_{gH} (-1)q \sqrt{\frac{4\kappa}{\pi}} \left(e^{-\frac{\eta^2}{2}} + \eta \sqrt{2} \int_0^\eta e^{-h^2} dh \right),$$

در نهایت جواب $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر $u(x, t)$ برابر است با

$$u(x, t) = (-1) \frac{x}{\sqrt{t}} q \ominus_{gH} (-1)q \sqrt{\frac{4\kappa}{\pi}} \left(e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} + \frac{x}{\sqrt{\kappa t}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-h^2} dh \right).$$

۴-۴-۲ جواب $[(ii)-p]$ -دیفرانسیل پذیر

برای به دست آوردن جواب $[(ii)-p]$ -دیفرانسیل پذیر معادله گرما، فرض کنید که $u(x,t)$ و $\partial_{x_i, gH} u(x,t)$ نسبت به x توابعی $[(i)-p]$ -دیفرانسیل پذیر باشند و $u(x,t)$ نسبت به t تابعی $[(i)-p]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. در این حالت معادله‌ی فازی گرما را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} \partial_{t_{ii, gH}} u(x,t) \ominus_{gH} \kappa \partial_{xx_{i, gH}} u(x,t) = 0, & \forall x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & \forall x > 0; \\ \partial_{x_i, gH} u(0, t) = q, & \forall t > 0; \\ u \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty & \forall t > 0. \end{cases} \quad (28.5)$$

که در آن 0 نشان دهنده‌ی مجموعه قطعی $\{0\}$ است و $q \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

همانگونه که قبلاً بیان کردیم جواب معادله‌ی فازی گرما (28.5) را به صورت $u(x,t) = \frac{1}{t^2} v(\eta)$ در نظر می‌گیریم. بر اساس روند توضیح داده در حالت قبلی و معادلات (20.5) و (22.5)، معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم زیر را داریم

$$\begin{cases} v''_{i, gH}(\eta) + \eta v'_{i, gH}(\eta) \ominus_{gH} v(\eta) = 0 \\ v'_{i, gH}(0) = q\sqrt{2\kappa} \quad \text{and} \quad v \rightarrow 0 \text{ as } \eta \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (29.5)$$

فرض کنید که معادله دیفرانسیل فازی مرتبه دوم (29.5) دارای جوابی به فرم $v(\eta) = \eta z(\eta)$ باشد که در آن $z(\eta) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. این جواب را به گونه‌ای پیدا می‌کنیم که $v(\eta)$ و $v'_{gH}(\eta)$ توابعی $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند. در این صورت داریم

$$v(\eta) = \lambda_3 \eta + \lambda_2 \left(e^{\frac{\eta^2}{2}} + \eta \int_0^\eta e^{\frac{s^2}{2}} ds \right).$$

برای پیدا کردن مقادیر ثابت λ_2 و λ_3 ، داریم

$$v'_{i, gH}(\eta) = \lambda_3 + \lambda_2 \left(\int_0^\eta e^{\frac{s^2}{2}} ds \right) \Rightarrow v'_{i, gH}(0) = q\sqrt{2\kappa},$$

پس $\lambda_3 = q\sqrt{4\kappa}$. علاوه بر این وقتی که $\eta \rightarrow +\infty$ داریم $\eta \left(\lambda_3 + \lambda_2 \int_0^\infty e^{\frac{s^2}{2}} ds \right) = 0$ بنابراین

$$\lambda_2 = \ominus_{gH} \lambda_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{در این صورت جواب معادله‌ی (29.5) برابر است با}$$

$$v(\eta) = \eta q \sqrt{4\kappa} \ominus_{gH} q \sqrt{\frac{8\kappa}{\pi}} \left(e^{\frac{\eta^2}{2}} + \eta \sqrt{2} \int_0^{\frac{\eta}{\sqrt{2}}} e^{-h^2} dh \right).$$

در نهایت جواب $[(ii) - p]$ -دیفرانسیل پذیر معادله‌ی گرما (۲۸.۵) در این حالت برابر است با

$$u(x,t) = x\sqrt{\frac{2\pi}{t}} q_{\ominus_{gH}} q \sqrt{\frac{8\kappa}{\pi}} \left(e^{\frac{-x^2}{4\kappa t}} + \frac{x}{\sqrt{\kappa t}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}} e^{-h^2} dh \right)$$

۴-۳-مثال‌ها

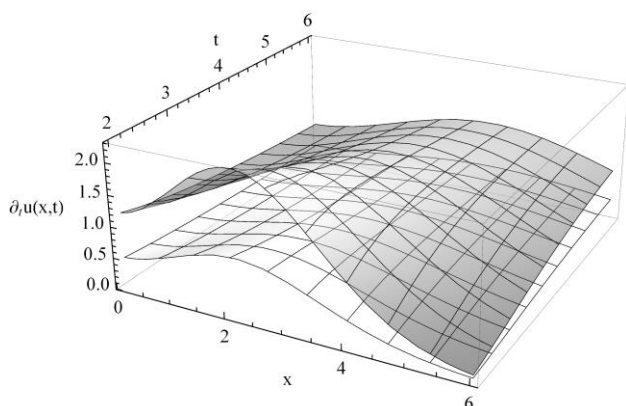
مثال ۴-۴-۱. سطحی فلزی را در نظر بگیرید که ثابت هدایت گرما در آن برابر 0.76 است و مقدار سرمای $(0.6, 2.2, 4.7)$ (-1) به ابتدای آن وارد می‌شود. معادله‌ی هدایت گرما برای این مدل به صورت زیر است

$$\begin{cases} \partial_{t_i, gH} u(x,t) \ominus_{gH} 0.76 \partial_{xx_{i, gH}} u(x,t) = 0, & \forall x > 0, t > 0; \\ u(x, 0) = 0; \\ \partial_{x_{ii, gH}} u(0, t) = (-1)(0.6, 2.2, 4.7); \\ u \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

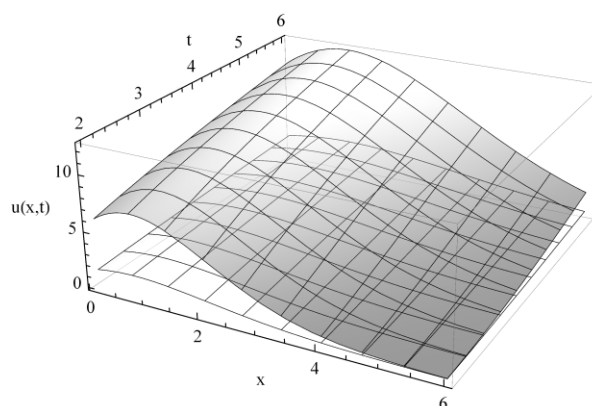
همانگونه که مشاهده می‌کنید $u(x,t)$ و $\partial_{x_{gH}} u(x,t)$ هر دو $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر هستند. با توجه به روش بیان شده در قسمت (۴-۱)، جواب $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر برای این معادله برابر است با

$$u(x,t; \alpha) = -x[(2.5\alpha - 4.7), (-0.6 - 1.6\alpha)] + [(4.7 - 2.5\alpha), (0.6 + 1.6\alpha)] \left[2\sqrt{\frac{0.76t}{\pi}} e^{\frac{-x^2}{3.04t}} - x \operatorname{erf} \left[\frac{x}{2\sqrt{0.76t}} \right] \right].$$

شکل (۴-۱۲) جواب به دست آمده برای این مثال و شکل (۴-۱۳) مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوها را نسبت به t را نمایش می‌دهند. همانگونه که مشاهده می‌شود $u(x,t)$ تابعی $[(i) - p]$ -دیفرانسیل پذیر نسبت به t است.



شکل ۴-۱۳. نمایش مشتق gH مرتبه اول به ازای مقدار $\alpha = \frac{1}{4}$



شکل ۴-۱۲. نمایش جواب مثال (۴-۳) به ازای مقدار $\alpha = \frac{1}{4}$

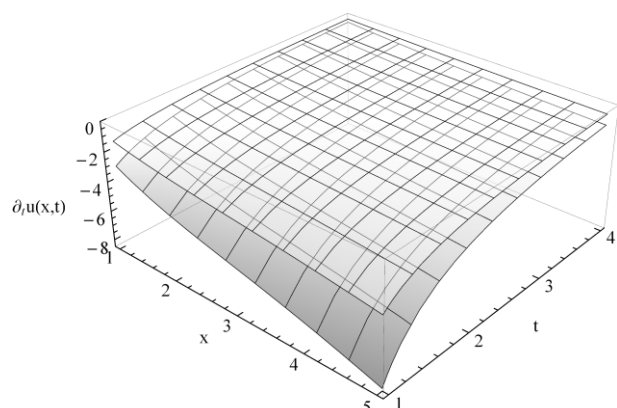
مثال ۲-۴-۴. معادله‌ی فازی گرما را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \partial_{t_{ii.gH}} u(x,t) \ominus_{gH} 2\partial_{xx_{i.gH}} u(x,t) = 0, & x > 0, t > 0; \\ u(x,0) = 0; \\ \partial_{x_{i.gH}} u(0,t) = (1,2,3,5); \\ u \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

با توجه به معادله‌ی بالا $u(x,t)$ و $\partial_{x_{gH}} u(x,t)$ هر دو نسبت به x ، p - (ii) - دیفرانسیل پذیر هستند و $u(x,t)$ نسبت به t تابعی p - (i) - دیفرانسیل پذیر است. بنابراین با توجه به قسمت (۲-۴-۴) جواب معادله فوق به صورت زیر است

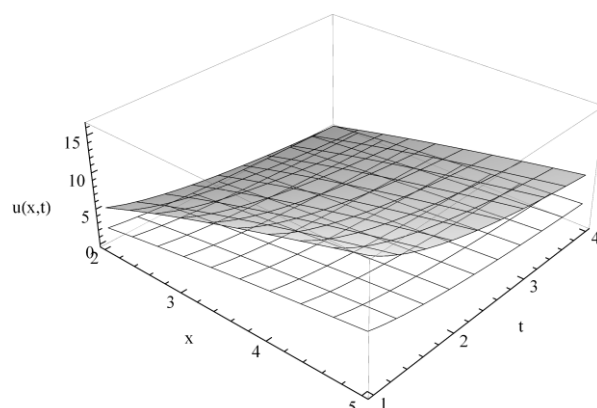
$$u(x,t) = \left[x(1+\alpha)\sqrt{\frac{2\pi}{t}} - (1+\alpha)\sqrt{\frac{16}{\pi}} \left(e^{\frac{-x^2}{8t}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2t}} \operatorname{erf} \left[\frac{x}{2\sqrt{2t}} \right] \right) \right], \quad x(3.5-1.5\alpha)\sqrt{\frac{2\pi}{t}} - (3.5-1.5\alpha)\sqrt{\frac{16}{\pi}} \left(e^{\frac{-x^2}{8t}} + \frac{x}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2t}} \operatorname{erf} \left[\frac{x}{2\sqrt{2t}} \right] \right) \right].$$

شکل (۴-۱۴) این جواب را نشان می دهد. همانگونه که در شکل (۴-۱۵) مشاهده می شود این جواب p - (ii) - دیفرانسیل پذیر است.



شکل ۴-۱۵. نمایش مشتق $[gH-p]$ جواب مثال (۲-۴-۴) نسبت

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{ به } t \text{ به ازای}$$



شکل ۴-۱۴. نمایش جواب مثال (۲-۴-۴) به ازای $\alpha = \frac{1}{3}$

فصل ۵

نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ نتیجه گیری

مطالعه‌ی معادلات دیفرانسیل فازی یکی از مباحث پرطرفدار علمی است که زمینه‌ی مناسبی برای مدل‌بندی عدم قطعیت در مسائل دنیای واقعی فراهم می‌کند. این رساله معادلات دیفرانسیل فازی معمولی و معادلات دیفرانسیل فازی جزئی را مورد بررسی قرار داد. در مبحث مربوط به معادلات دیفرانسیل فازی معمولی برای اولین بار قضایای اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره را بررسی کرد و قضایایی مانند مشتق ترکیب دو تابع یک متغیره، قضیه‌ی مقدار میانی، آزمون مشتق اول، آزمون مشتق دوم، انتگرال گیری جزء به جزء و قضایایی مانند آن را اثبات کرد. در ادامه بسط تیلور فازی بر اساس مشتق پذیری تعمیم یافته‌ی هاکوهارا در چهار حالت مختلف بیان و اثبات شد. با استفاده از این بسط روش اویلر فازی برای توابع دیفرانسیل پذیر در حالات مختلف با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری و بدون تبدیل به فرم پارامتری بیان و با استفاده از مفهوم خطای مطلق، همگرایی روش اویلر اثبات شد. علاوه بر این جواب تحلیلی با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری برای معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه اول خطی، معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه دوم مقدار مرزی و معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کامل براساس مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا به دست آمد.

در مبحث مربوط به معادلات دیفرانسیل فازی جزئی ابتدا مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا برای توابع دو متغیره بیان و در ادامه در مورد انواع مشتق پذیری هاکوهارا در توابع دو متغیره بحث شد و بر این اساس نقطه‌ی سویچ برای مشتق این توابع تعریف گردید.

به منظور ارائه مثالی کاربردی از معادلات دیفرانسیل فازی جزئی، معادله‌ی فازی گرما تعریف شد و برای پیدا کردن جواب تحلیلی معادله‌ی فازی گرما در دو حالت مختلف (میل‌های با طول بینهایت و سطحی فلزی با طول $(0, +\infty)$) روش جدیدی ارائه کرد که برای اثبات آن از قضایایی مانند مشتق ترکیب توابع چند متغیره، انتگرال توابع چند متغیره و روش ارائه شده برای حل معادله دیفرانسیل فازی معمولی مقدار مرزی استفاده شد.

در روش فوق جواب تحلیلی معادله‌ی فازی گرما به نوع دیفرانسیل پذیری $u(x,t)$ نسبت به t وابسته است. روش ارائه شده روشی کارآمد و مناسب برای پیدا کردن جواب تحلیلی معادله‌ی فازی گرما است.

این رساله تنها جوابی از معادله‌ی فازی گرما را در نظر گرفته است که به فرم $u(x,t) = t^a \odot v(\eta)$ است. این نکته یکی از محدودیت‌های موجود در این رساله است. علاوه بر این تحقیق حاضر با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری تنها ۴ حالت از حالت‌های متعدد بسط تیلور را در نظر گرفته است که می‌توان آن را به عنوان محدودیت دیگری از تحقیق نگریست.

۵-۲ پیشنهادات

با توجه به توضیحاتی که در ابتدای رساله داده شد، تفریق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا همواره وجود ندارد و باید شرایط وجودی برای این تفریق برقرار باشد تا مشتق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا موجود باشد. بر همین اساس بدو استفان نی نی تفریق تعمیم یافته را تعریف کردند که به نظر می‌رسد همواره وجود دارد. بنابراین پیشنهاد می‌گردد

۱. در خصوص معادلات دیفرانسیل فازی معمولی تعریف شده براساس تفریق تعمیم یافته تحقیق شود.
۲. مشتق توابع دو متغیره بر اساس مشتق تعمیم یافته تعریف و قضایا اساسی در این نوع مشتق پذیری اثبات شوند.

معادلات دیفرانسیل فازی جزئی کاربردهای فراوانی در مدل سازی مسائل دنیای واقعی دارند. با این وجود این‌گونه معادلات در مباحث فازی کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند و روش‌های زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی جزئی ارائه نشده‌اند. بنابراین تعمیم روش ارائه شده در این رساله در جهت حل معادله‌ی فازی گرما، برای حل دیگر مسائل فازی جزئی پیشنهاد می‌گردد. روش ارائه شده برای حل معادله‌ی فازی گرما را می‌توان برای حل معادلاتی مانند معادله‌ی فازی موج، معادله فازی پتانسیل به کار برد. پیشنهاد می‌گردد ابتدا این معادلات براساس مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاکوهارا بیان شوند سپس جواب هر معادله براساس نوع مشتق پذیری هاکوهارا به دست آید.

- [1] Abbasbandy, S. (2007). Newton's method for solving a system of dual fuzzy nonlinear equations. *Mathematical Sciences*, 1(1):71 – 82.
- [2] Abbasbandy, S. and Allahviranloo, T. (2004). Numerical solution of fuzzy differential equation by runge-kutta method. *Nonlinear studies*, 11:117-129.
- [3] Abbasbandy, S., T.Allahviranloo, L'opez-Pouso, o., and Nieto, J. (2004). Numerical methods for fuzzy differential inclusions. *Computers and Mathematics with Applications*, 48(1011):1633 – 1641.
- [4] Allahviranloo, T. (2006). Difference methods for fuzzy partial differential equations. *Computational Methods in Applied Mathematics Comput. Methods Appl. Math*, 2(3):233 – 242.
- [5] Allahviranloo, T., Abbasbandy, S., and Rouhparvar, H. (2011). The exact solutions of fuzzy wave-like equations with variable coefficients by a variational iteration method. *Appl. Soft Comput.*, 11(2):2186–2192.
- [6] Allahviranloo, T., Ahmady, N., and Ahmady, E. (2007). Numerical solution of fuzzy differential equations by predictorcorrector method. *Information Sciences*, 177(7):1633 – 1647.
- [7] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., and Armand, A. (2015). Analytical solution for fuzzy heat equation based on generalized hukuara differentiability. *Informatics, Networking and Intelligent Computing – Zhang (Ed.)© 2015 Taylor & Francis Group, London, ISBN: 978-1-138-02678-0*
- [8] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A., and Hasanoglu, A. (2015). On fuzzy solutions for heat equation based on generalized hukuara differentiability. *Fuzzy Sets and Systems.*, 265(1) : 1–23
- [9] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z. and Armand, A.,(2015). A full fuzzy method for solving differential equation based on Taylor expansion. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems .*, 29 :1039–1055

- [10] Allahviranloo, T. and Taheri, N. (2009). An analytic approximation to the solution of fuzzy heat equation by adomian decomposition method. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 4(3):105 – 114.
- [11] Anastassiou, G. A. (2010). Fuzzy Mathematics: Approximation Theory. Studies in Fuzziness and Soft Computing. *Springer Berlin Heidelberg*.
- [12] Bede, B. (2013). Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. *Springer Berlin Heidelberg*.
- [13] Bede, B. and Gal, S. G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 151(3):581 – 599.
- [14] Bede, B. and Stefanini, L. (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 230:119 – 141.
- [15] Bertone, A. M., Jafelice, R. M., de Barros, L. C., and Bassanezi, R. C. (2013). On fuzzy solutions for partial differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 219(0):68 – 80.
- [16] Buckley, J. J. and Feuring, T. (1999). Introduction to fuzzy partial differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 105(2):241 – 248.
- [17] Chalco-Cano, Y., Romn-Flores, H., and Jimnez-Gamero, M. (2011). Generalized derivative and π -derivative for set-valued functions. *Information Sciences*, 181(11):2177 – 2188.
- [18] Chang, S. S. L. and Zadeh, L. (1972). On fuzzy mapping and control. Systems, Man and Cybernetics, *IEEE Transactions on*, SMC-2(1):30–34.
- [19] Chen, Y.-Y., Chang, Y.-T., and Chen, B.-S. (2009). Fuzzy solutions to partial differential equations: Adaptive approach. Fuzzy Systems, *IEEE Transactions on*, 17(1):116–127.
- [20] Congxin, W. and Ming, M. (1992). Embedding problem of fuzzy number space: Part III. *Fuzzy Sets and Systems*, 46(2):281 – 286.

- [21] Cooper, J. (1998). Introduction to Partial Differential Equations with MATLAB. Applied and Numerical Harmonic Analysis. *Birkhäuser Boston*.
- [22] Diamond, P. (2000). Stability and periodicity in fuzzy differential equations. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(5):583–590.
- [23] Diamond, P. and Kloeden, P. (2000). Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. In Dubois, D. and Prade, H., editors, Fundamentals of Fuzzy Sets, volume 7 of The Handbooks of Fuzzy Sets Series, pages 583–641. *Springer US*.
- [24] Epperson, J.F. (2007). An Introduction to Numerical Methods and Analysis, *John Wiley and Sons*.
- [25] Faybishenko, B. A. (2004). Introduction to modeling of hydrogeologic systems using fuzzy partial differential equation. In Nikraves, M., Zadeh, L., and Korotkikh, V., editors, Fuzzy Partial Differential Equations and Relational Equations: Reservoir Characterization and Modeling. *Springer*.
- [26] Fortemps, P. and Roubens, M. (1996). Ranking and defuzzification methods based on area compensation. *Fuzzy Sets and Systems*, 82(3):319–330.
- [27] Gouyandeh, Z. (2015). On fuzzy solution for exact second order fuzzy differential equation. *Int. J. Industrial Mathematics*.(In Press)
- [28] Guang-Quan, Z. (1991). Fuzzy continuous function and its properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(2):159 – 171.
- [29] Holmes, M. (2007). Introduction to Numerical Methods in Differential Equations. Texts in Applied Mathematics. *Springer*.
- [30] Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, 10:205 – 223.
- [31] Jafelice, R. M., Almeida, C., Meyer, J., and Vasconcelos, H. (2011). Fuzzy parameters in a partial differential equation model for population dispersal

of leaf-cutting ants. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12(6):3397 – 3412.

- [32] Jost, J. (2012). Partial Differential Equations. Graduate Texts in Mathematics. *Springer*.
- [33] Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):301 – 317.
- [34] Kaleva, O. and Seikkala, S. (1984). On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 12(3):215 – 229.
- [35] Lakshmikantham, V., Bhaskar, T., and Devi, J. (2006). Theory of Set Differential Equations in Metric Spaces. *Cambridge Scientific Publishers*.
- [36] Lo, C. Y. C. Y. (2000). Boundary value problems. Singapore ; River Edge, NJ : *World Scientific*.
- [37] Mamdani, E. and Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1):1 – 13.
- [38] Negoita, C. V. and Ralescu, D. A. (2000). Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. *Birkhuser Basel*.
- [39] Oberguggenberger, M. (2004). Fuzzy and weak solutions to differential equations. *In Proceedings of the 10 th International IPMU Conference*.
- [40] Puri, M. L. and Ralescu, D. A. (1983). Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91(2):552 – 558.
- [41] Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):319 – 330.
- [42] Stefanini, L. (2008). A generalization of hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic. *Working Papers 0801*, University of Urbino Carlo Bo, Department of Economics, Society and Politics - Scientific Committee - L. Stefanini and G. Travaglini.

- [43] Stefanini, L. (2010). A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(11):1564 – 1584.
- [44] Stefanini, L. and Bede, B. (2009). Generalized hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71(34):1311 – 1328.
- [45] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353.
- [46] Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, SMC-3(1):28–44.
- [47] Zadeh, L. A. (1975) The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information Sciences* 8, 199–249.

واژه نامه انگلیسی به فارسی

Analytical	تحلیلی
Characteristic function	تابع مشخصه
Closure	بستار
Compact	فشرده
Convex	محدب
Core	هسته
Crisp	قطعی
Generalized Hukuhara difference	تفریق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا
Greatest lower bound	بزرگترین کران پایین
Hukuhara difference	تفریق هاکوهارا
Least upper bound	کوچکترین کران بالا
Level	برش
Membership function	تابع عضویت
Partial ordering	ترتیب جزئی
Singleton	قطعی
Support	تکیه گاه
Switching point	نقطه‌ی سوئیچ
Trapezoidal fuzzy number	عدد فازی ذوزنقه‌ای
Triangular fuzzy number	عدد فازی مثلثی
Upper semi continuous	نیم پیوسته بالایی
Weak absolute value	قدر مطلق ضعیف

نمادهای به کار رفته

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$	فضای اعداد فازی
D	فضای هاسدورف
$\odot$	ضرب فازی
$\div_{gH}$	تقسیم تعمیم یافته‌ی هاگوهارا
$\ominus$	تفریق هاگوهارا
$+$	جمع فازی
$\ominus_{gH}$	تفریق تعمیم یافته‌ی هاگوهارا
$-H$	تفریق هاگوهارا
$\leq$	کوچکترو مساوی
$<$	کوچکتر
$-gH$	مشتق تعمیم یافته‌ی هاگوهارا
$-(i) - gH$	مشتق نوع اول تعمیم یافته‌ی هاگوهارا
$-(ii) - gH$	مشتق نوع دوم تعمیم یافته‌ی هاگوهارا
$\partial_{x_{gH}}$	مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاگوهارا نسبت به x
$\partial_{t_{gH}}$	مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاگوهارا نسبت به t
$\partial_{x_{i,gH}}$	مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاگوهارا نوع اول نسبت به x
$\partial_{x_{ii,gH}}$	مشتق جزئی تعمیم یافته‌ی هاگوهارا نوع دوم نسبت به x

1. T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand, A. Hasanoglu
On fuzzy solutions for heat equation based on generalized Hukuhara differentiability.
Fuzzy Sets and Systems 265 (2015) 1–23 (ISI)
2. T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand
A full fuzzy method for solving differential equation based on Taylor expansion
Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 29(2015) 1039–1055 (ISI)
3. Z. Gouyandeh, A. Armand
On fuzzy solution for exact second order fuzzy differential equation.
Int. J. Industrial Mathematics, 2015
4. T. Allahviranloo, Z. Gouyandeh, A. Armand
Analytical solution for fuzzy heat equation based on generalized Hukuhara differentiability
Informatics, Networking and Intelligent Computing – Zhang (Ed.)© 2015
Taylor & Francis Group, London, ISBN: 978-1-138-02678-0

Abstract

This thesis focuses on two central topics. The first part is devoted to studying the ordinary fuzzy differential equation based on the generalized Hukuhara differentiability ($[gH]$ -differentiability). Several properties of this concept of differentiability are obtained on the topic, such as the univariate fuzzy chain rules, fuzzy mean value theorem and first and second derivative test, among others.

In this thesis a new approach is introduced in the fuzzy numerical analysis by presenting fuzzy Taylor expansion based on $[gH]$ -differentiability. Therewith the Euler method for solving fuzzy initial value problems is obtained and the convergence of this method is asserted by the concept of global truncation error. In addition, based on the type of differentiability the analytical solutions of some fuzzy ordinary differential equation are obtained.

In the second part, a fuzzy heat equation under generalized Hukuhara partial differentiability is considered. To introduce a fuzzy heat equation, generalized Hukuhara partial derivative ($[gH - p]$ -derivative) is introduced for two variable fuzzy functions and the type of differentiability of $[gH - p]$ -derivative is studied in detail. Moreover, some properties are demonstrated for $[gH - p]$ -derivative. These properties are used to prove the uniqueness of the solution of a fuzzy heat equation and to find the analytical solution for a fuzzy heat equation. Analytical solution for a fuzzy heat equation in the infinite and semi-infinite Region based on the type of $[gH - p]$ -differentiability of the function $u(x, t)$ with respect to t is derived.

Keywords: Fuzzy ordinary differential equation, Fuzzy partial differential equation, generalized Hukuhara differentiability, Fuzzy heat equation, fuzzy chain rule; Mean value theorem, the fuzzy maximum principle.

Zienab Gouyandeh