

صلى الله عليه وسلم



معاونت پژوهش و فناوری

به نام خدا مشور اخلاق پژوهش

بیاماری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر افعال انسان و به منظور پاس داشتن مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، مادانشجویان و اعضاء هیات علمی و احد های دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

- ۱- اصل برائت: التزام به برائت جویی از هر گونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلائند.
- ۲- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هر گونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
- ۳- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بهکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
- ۴- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از هر گونه حرمت شکنی.
- ۵- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهشگران (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
- ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.
- ۷- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هر گونه پنهان سازی حقیقت.
- ۸- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بهکاران پژوهش.
- ۹- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

تعهدنامه اصالت رساله

اینجانب حسین وثوقی دانش آموخته مقطع دکتری در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۱۳۹۵/۱۱/۲۸ از پایان نامه خود تحت عنوان «مطالعه‌ی درونیابی داده‌های فازی و نقاط سوئیچ» با کسب نمره ۱۸/۵ و درجه بسیار خوب دفاع نموده‌ام بدینوسیله متعهد می‌شوم:

۱. این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه‌های موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست ذکر و درج کرده‌ام.

۲. این پایان نامه قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳. چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴. چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: حسین وثوقی
تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی (Ph.D)

گرایش: کاربردی

عنوان:

مطالعه‌ی درونیابی داده‌های فازی و نقاط سوئیچ

استادان راهنما:

دکتر سعید عباسبندی
دکتر توفیق الهویرنلو

استاد مشاور:

دکتر اسماعیل بابلیان

نگارش:

حسین وثوقی

زمستان ۱۳۹۵

تقدیم بہ پدرزحمکش و مادر فداکارم

و

تقدیم بہ ہمسر صبور و فرزند دلہندم

باسپاس فراوان از استادان بزرگوارم عالیجنابان

آقای دکتر اسماعیل بابلیان

آقای دکتر سعید عباسندی

آقای دکتر توفیق الهویرنلو

فهرست مطالب

ط	فهرست تصاویر
ی	فهرست برنامه‌های نرم‌افزاری
۱	چکیده
۲	۱ مقدمه
۷	۲ تعاریف و مفاهیم اساسی
۸	۱-۲ مقدمه
۸	۲-۲ مجموعه فازی
۹	۳-۲ دستگاه اعداد فازی
۱۱	۱-۳-۲ عدد فازی مثلثی
۱۲	۴-۲ اعمال حسابی
۱۳	۱-۴-۲ جمع
۱۳	۲-۴-۲ تفریق
۱۵	۳-۴-۲ ضرب اسکالر در عدد فازی
۱۶	۵-۲ فضای متریک هاسدورف
۱۷	۶-۲ پیوستگی توابع فازی
۱۹	۷-۲ مشتق‌پذیری توابع فازی
۲۲	۸-۲ درونیاب فازی

۲۵	۹-۲ مفاهیم، تعاریف و قضایای غیرفازی
۳۶	۳ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای فازی
۳۷	۱-۳ مقدمه
۳۷	۲-۳ پدیده‌ی رونگه-مری
۳۸	۳-۳ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت کامل
۴۰	۴-۳ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای
۴۴	۵-۳ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای غیرقطعی
۵۰	۴ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی
۵۱	۱-۴ مقدمه
۵۱	۲-۴ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی فازی
۵۵	۳-۴ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی
۶۴	۴-۴ چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای درجه پنجم فازی
۷۰	۵-۴ مثال‌ها
۷۶	۶-۴ برنامه‌های نرم‌افزاری رسم
۱۰۰	۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۱۰۱	۱-۵ نتیجه‌گیری
۱۰۱	۲-۵ پیشنهادات
۱۰۲	مراجع
۱۰۶	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱.۴	نمایش α - برش های چندجمله ای درونیاب هرمیت قطعه ای خطی فاز $s(x)$ به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در بازه $[1, 4]$	۷۲
۲.۴	نمایش α - برش های چندجمله ای درونیاب هرمیت مکعبی $s(x)$ به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در بازه $[0, 2]$	۷۲
۳.۴	نمایش α - برش های چندجمله ای درونیاب هرمیت قطعه ای مکعبی فاز $s(x)$ به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در بازه $[1, 4]$	۷۳
۴.۴	نمایش α - برش های چندجمله ای درونیاب هرمیت قطعه ای مکعبی فاز $s_3(x)$ به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در بازه $[1, 4]$	۷۴
۵.۴	نمایش α - برش های چندجمله ای درونیاب هرمیت قطعه ای از درجه پنجم فاز $s(x)$ به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در بازه $[0, 6]$	۷۴
۶.۴	نمایش α - برش های چندجمله ای درونیاب هرمیت فاز $s(x)$ به ازای $\alpha = 0, 1$ و در بازه $[1, 4]$	۷۵
۷.۴	مقایسه α - برش های چندجمله ای درونیاب هرمیت فاز و هرمیت قطعه ای مکعبی فاز $s(x)$ به ازای $\alpha = 0, 1$ و در بازه $[1, 4]$	۷۵

فهرست برنامه‌های نرم‌افزاری

۷۴	برنامه مربوط به رسم شکل ۱.۴ در مثال ۱-۵-۴	۱-۶-۴
۷۵	برنامه مربوط به رسم شکل ۲.۴ در مثال ۲-۵-۴	۲-۶-۴
۷۸	برنامه مربوط به رسم شکل ۳.۴ در مثال ۳-۵-۴	۳-۶-۴
۸۴	برنامه مربوط به رسم شکل ۴.۴ در مثال ۴-۵-۴	۴-۶-۴
۸۴	برنامه مربوط به رسم شکل ۵.۴ در مثال ۵-۵-۴	۵-۶-۴
۹۲	برنامه مربوط به رسم شکل ۶.۴ در مثال ۶-۵-۴	۶-۶-۴
۹۴	برنامه مربوط به رسم شکل ۷.۴ در مثال ۷-۵-۴	۷-۶-۴

چکیده

هدف رساله پیش رو معرفی درونیابی از نوع هرمیت قطعه‌ای برای داده‌های فازی در حالت کلی و از درجه $2m - 1$ می‌باشد. ایده این روش براساس مفهوم فضای خطی با بکارگیری کلاسی منحصر بفرد از توابع پایه‌ای اصلی^۱ استوار است و هر یک از پایه‌های موردنظر روی بازه‌های مجزای متوالی از خواصی مشخص و فرار^۲ برخوردارند.

هر یک از روش‌های عددی معمولی و قطعه‌ای معرفی شده، با کلیه جزئیات و فرمول‌هایی صریح بیان شده‌اند و نتایج به راحتی قابل محاسبه می‌باشند.

در این پژوهش به برخی خواص مفید پایه‌های اصلی به‌کار گرفته شده نیاز است که طی قضایایی اثبات می‌شوند. برای درک بهتر موضوع نیز مثال‌هایی در سه حالت پرکاربرد خطی، درجه سه^۳ و درجه پنج^۴ ارائه می‌شود.

به ازای داده‌های فازی مشترک و به ترتیب با فرض $m = 1$ و $m = 2$ دو حالت خاص خطی و مکعبی از حالت کلی روش ارائه شده حاصل می‌شوند. حالت اول مشابه اسپلاین فازی مرتبه دوم است و حالت دوم می‌تواند جایگزینی برای درونیاب فازی هرمیت ساده در مقالات مرجع باشد که بدان‌ها در متن رساله و ارجاعات مقالات منتج از آن اشاره شده است.

کلمات کلیدی: توابع پایه‌ای اصلی، چندجمله‌ای درونیاب قطعه‌ای هرمیت، درونیابی داده‌های فازی.

^۱ Cardinal basis functions

^۲ Vanishing property

^۳ Cubic

^۴ Quintic

فصل اول

مقدمه

رساله‌ی حاضر با نگاهی بر درونیابی هرمیت فازی در دو بخش تنظیم شده است.

بخش اول به معرفی درونیابی هرمیت داده‌های فازی در حالت کلی می‌پردازد و بخش دوم درونیابی قطعه‌ای هرمیت داده‌های فازی از درجه دلخواه را مورد مطالعه قرار می‌دهد.

ریاضیات فازی شاخه‌ای از ریاضیات است که در سال ۱۹۶۵ برای نخستین بار توسط پروفیسور لطفی عسگرزاده مشهور به زاده^۱ با انتشار مقاله‌ای [۲۲] در زمینه نظریه مجموعه‌های فازی ابداع شد و در حال حاضر در بخش‌های گوناگون مهندسی، فن‌آوری و صنعت، اقتصاد و علوم پایه به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته و براساس یک تئوری دقیق پدیده‌های غیرقطعی و نامشخص را توسط سیستم‌های فازی توصیف می‌کند.

مسئله درونیابی فازی که توسط زاده طرح شد چنین است:

فرض کنیم $(n+1)$ نقطه متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ در $\mathbb{R}$ داریم و برای هر یک از آنها مقداری فازی در $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ متناظر است. آیا می‌توانیم تابعی روی $\mathbb{R}$ با بردی که از مقادیر فازی تشکیل شده است بسازیم به‌گونه‌ای که در $(n+1)$ نقطه مفروض، مقدار تابع با مقدار مفروض در مسئله برابر باشد و این تابع برای هموار بودن باید در چه شرایطی صدق کند؟

لوئن^۲ [۲۰] براساس قضیه درونیابی چندجمله‌ای‌های لاگرانژ و با بهره‌گیری از فضاها‌ی هاسدورف، وجود و پیوستگی یک چندجمله‌ای درونیاب فازی تحت متریک هاسدورف را ثابت کرد. کالوا^۳ [۱۷] با ارائه روش‌های محاسباتی برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ فازی و اسپلاین‌های فازی به کار لوئن [۲۰] جنبه کاربردی بخشید.

او یک اسپلاین فازی از درجه l معرفی نمود که مهمترین حالت‌های خاص و پرکاربرد آن با فرض $l = 2$ و $l = 4$ به ترتیب درونیاب قطعه‌ای خطی و اسپلاین مکعبی فازی بودند. در همان مقاله او اسپلاین

^۱ Zadeh

^۲ Lowen

^۳ Kaleva

فازی مکعبی دیگری با شرط «نبود یک گره»^۱ معرفی کرد.

درونیایی داده‌های فازی توسط عباسبندی و همکاران به معرفی درونیاب‌های هرمیتی ساده، اسپلاین‌های

مکعبی $E(3)$ ، اسپلاین‌های فازی طبیعی و کامل [۱۵، ۸، ۳-۱] گسترش یافت.

مقاله‌ای توسط لودویک^۲ و سانتز^۳ [۱۹] در خصوص قسمت دوم مسأله‌ی درونیایی مطرح شده توسط زاده

یعنی شرایط هموار بودن درونیاب فازی نگاشته شد که نشان می‌داد در هر α - برش از نقاط گره درونیایی

لاگرانژ فازی شرط همواری از دست می‌رود همچنین برای هر α - برش در گره‌های مفروض اسپلاین

فازی حاصل از رعایت شرط «نبود یک گره» از درجه k ، مشتق‌های مرتبه اول ناپیوسته‌اند. بنابراین او

برای رفع این ناهمواری، رویه‌های فازی خاصی را معرفی نمود.

زینالی و همکاران^۴ [۳۴] نیز جهت رفع این ناهمواری‌ها در نمودار α - برش درونیاب روشی برای درونیایی

داده‌های فازی توسط چندجمله‌ای‌های هرمیت درجه سوم و قطعه‌ای هرمیت مکعبی معرفی نمودند که در

یک حالت از چهار حالت مشتق تعمیم یافته هاکوهارا با اعمال شرایط بسیار خاص انجام شد.

در حالت قطعی^۵ درجات پائین درونیایی قطعه‌ای هرمیت استفاده بسیاری دارد و با اختیار گره‌های بیشتر

خطا به‌طور یکنواخت به صفر میل می‌کند. بنابراین استفاده از درونیاب‌های چندجمله‌ای قطعه‌ای با درجه

کمتر به‌جای درونیاب‌های چندجمله‌ای از درجات بالاتر برای مفروضات یکسان و به ازای داده‌های مشترک

در جهت کاهش نوسانات منحنی درونیاب و خطا و ارتقاء کیفی درونیاب روشی مناسب به نظر می‌رسد.

این موضوع در کنار دیدگاه به‌کارگیری توابع پایه‌ای اصلی، محرک و انگیزه‌ای برای مؤلف بوده است تا

برای داده‌های فازی، چندجمله‌ای‌های هرمیت را در کنار هم بچیند و یک چندجمله‌ای قطعه‌ای هرمیت

فازی با فرمولی صریح و الگوریتمی مفید و مختصر برای محاسبه درونیاب فازی در حالت کلی و از درجه

^۱ Not-a-knot

^۲ Lodwick

^۳ Santos

^۴ Zeinali

^۵ Crisp

۱ - $2m$ به دست آورد.

در این رساله سعی بر معرفی گوشه‌ای از مبحث وسیع و مهم درونیابی فازی می‌باشد. یک کلاس کلی از چندجمله‌ای‌های درونیاب فازی از درجه $2m - 1$ که تنها حالت خاصی از آن می‌تواند جایگزینی برای درونیاب هرمیت ساده فازی در مرجع [۱۵] شود و چندجمله‌ای درونیاب از کمترین درجه برای این کلاس که با اختیار $m = 1$ به دست می‌آید می‌تواند به‌طور کاملاً مشابه با اسپلاین خطی فازی معرفی شده در مرجع [۱۷] قیاس شود. برای تعیین علامت پایه‌های اصلی چندجمله‌ای‌های درونیاب قطعه‌ای، همچنین تعیین حدودی برای طول α -برش‌های چندجمله‌ای‌های درونیاب فازی که در بررسی صحت رسم آنها مفید می‌باشد، قضایایی ارائه می‌شود.

به‌عنوان بخشی کوچک از این رساله در نظر بود تا با استفاده از مشتقات تعریف شده برای توابع فازی تا حدّ مقدور به مبحثی ورود شود که بجای فرض اعداد فازی به‌عنوان مقادیر مشتقات مرتبه اول و بالاتر، در عمل و در تعریف درونیاب فازی، مشتقات مراتب مختلف به‌کار رود و در صورت امکان به مطالعه رفتار درونیاب در نقاط سوئیچ تابع مجهول f پردازیم، اما این شاخه از مطالعه به نتایج مشخص قابل بیان نرسید که امید است در آینده زمینه چنین پژوهشی فراهم گردیده و به نتیجه برسد.

رساله حاضر از پنج فصل مجزا تشکیل شده است.

● فصل دوم. این فصل به بررسی و معرفی خصوصیات مفید و تعاریف فضای اعداد فازی و بیان

قضایای مورد نیاز در شاکله رساله می‌پردازد و مفهوم توابع پایه‌ای اصلی را بیان می‌نماید.

● فصل سوم. این فصل به بررسی چندجمله‌ای درونیاب قطعه‌ای هرمیت و پایه‌های مورد نیاز برای

ساخت و تولید آنها می‌پردازد. برخی خواص مهم و منحصر بفرد چنین پایه‌هایی بیان و چند

خاصیت از آنها که برای معرفی نوع فازی چنین درونیابی مورد نیازند در قالب قضایایی اثبات

می‌شوند. چندجمله‌ای درونیاب فازی قطعه‌ای هرمیت با تمام جزئیات لازم بیان و چند قضیه برای

معرفی خواصی از آن اثبات شده است.

- فصل چهارم. برای درک بهتر روش کلی ارائه شده، سه حالت پر کاربرد خطی، مکعبی و درجه پنج درونیاب فازی قطعه‌ای هرمیت معرفی می‌شوند و بین حالت‌های درجه پایین و ابتدایی از درونیاب فازی کلی با درونیاب‌های فازی معرفی شده در مراجع [۱۷، ۱۵] مقایسه‌ای صورت می‌گیرد.
- فصل پنجم. در فصل پایانی نتایج حاصل از این پژوهش به‌طور خلاصه بیان شده و پاره‌ای پیشنهادات برای تحقیقات آتی در این حوزه ارائه گردیده است.

مقالات چاپ شده از این پژوهش عبارت است از:

- [1] Vosoughi, H. and Abbasbandy, S., 2016. Cardinal Basis Piecewise Hermite Interpolation on Fuzzy Data. *Advances in Fuzzy Systems*.
- [2] Vosoughi, H. and Abbasbandy, S., 2016. Interpolation of Fuzzy Data by Cubic and Piecewise-Polynomial Cubic Hermite. *Indian Journal of Science and Technology*, 9(8).

فصل دوم

تعاریف و مفاهیم اساسی

۱-۲ مقدمه

این فصل شامل تعاریف اولیه و مفاهیم اساسی فازی به کار رفته در فصول آتی می باشد.

۲-۲ مجموعه فازی

برای شروع و بیان مفاهیم پایه ای نظریه مجموعه های فازی فرض کنید X مجموعه مرجع است.

تعریف ۱-۲-۲ ([۳۲]). فرض کنید A زیرمجموعه ای X باشد ($A \subseteq X$). مجموعه های قطعی معمولاً

به صورت تعدادی عضو با نماد $x \in X$ تعریف می شوند که این اعضاء می توانند شمارا باشند و هر عضو

X می تواند متعلق به مجموعه ی قطعی A باشد یا نباشد. در صورت تعلق به مجموعه ی A درجه ی

عضویت آن یک و در غیر این صورت درجه ی عضویت آن صفر است. بنابراین تابع زیر را تعریف می کنیم

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

که به آن تابع مشخصه^۱ مجموعه A در X می گویند.

تعریف ۲-۲-۲ ([۳۲]). مجموعه فازی A (زیرمجموعه فازی X) به صورت نگاشت $A : X \rightarrow [0, 1]$

تعریف می شود که در آن $A(x)$ نشان دهنده درجه عضویت x در مجموعه فازی A است.

مجموعه فازی با تابع عضویتش شناخته می شود. همچنین برای نشان دادن تابع عضویت^۲ از علامت

$\mu_A(x)$ استفاده می شود. همچنین هر مجموعه قطعی یک مجموعه فازی است. تابع عضویت برای

^۱ Characteristic function

^۲ Membership function

مجموعه‌های قطعی $A \subseteq X$ تابع مشخصه آن است.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

۳-۲-۲ تعریف (۷). فرض کنید $A : X \rightarrow [0, 1]$ یک مجموعه فازی است. مجموعه α -برش‌های

مجموعه‌ای A به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ ، مجموعه‌ای قطعی است و شامل همه عناصری از X است که درجه عضویت این عناصر در A ، بزرگ‌تر یا مساوی مقدار معین α است و آن را با A^α نشان می‌دهند. به عبارت دیگر

$$A^\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

۴-۲-۲ تعریف (۷). تکیه‌گاه^۱ یک مجموعه فازی مجموعه‌ای است که عناصر مجموعه‌ی مرجع در

آن درجه عضویت غیرصفر دارند و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

۳-۲ دستگاه اعداد فازی

یک عدد فازی زیرمجموعه‌ی فازی از خط حقیقی است که دارای خصوصیات بیشتری است. اعداد فازی تعمیم اعداد حقیقی کلاسیک هستند و قادر به مدل‌بندی ابهام و عدم قطعیت می‌باشند. مجموعه‌ی اعداد فازی را با $\mathbb{R}_F$ نشان می‌دهیم.

مفهوم عدد فازی اساس و پایه‌ی آنالیز ریاضی و آنالیز عددی فازی است و ابزاری کاربردی در مجموعه‌های فازی و منطق فازی می‌باشد.

۱-۳-۲ تعریف (۱۳). مجموعه فازی $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ را عدد فازی می‌گویند هرگاه

^۱ Support

i. u نرمال باشد یعنی مقدار $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $u(x_0) = 1$.

ii. u محدب باشد یعنی به ازای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $t \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$u[tx + (1-t)y] > \min[u(x), u(y)].$$

iii. u نیم پیوسته بالایی^۱ در $\mathbb{R}$ باشد، یعنی

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ Such that } u(x) - u(x_0) < \varepsilon, |x - x_0| < \delta.$$

iv. u دارای تکیه‌گاه فشرده باشد، یعنی $\{x \in \mathbb{R}; u(x) > 0\}$ فشرده باشد، که در آن $cl(A)$

بستار^۲ مجموعه A می‌باشد.

۲-۳-۲ تعریف (۷). به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، داریم

$$[u]^\alpha = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq \alpha\},$$

و

$$[u]^\circ = cl\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}.$$

که در آن $[u]^\alpha$ را مجموعه α -برش^۳ عدد فازی u ، مجموعه 1 -برش را هسته^۴ عدد فازی و مجموعه 0 -برش را تکیه‌گاه عدد فازی گویند.

۳-۳-۲ تعریف (۷). فرم پارامتری یک عدد فازی را به ازای هر $0 \leq \alpha \leq 1$ به صورت

$$[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$$
 نشان می‌دهیم که

۱. $u^-(\alpha)$ یک تابع غیرکاهشی کراندار و از راست پیوسته روی بازه $[0, 1]$ است.

^۱ upper semi continuous

^۲ closure

^۳ α -level

^۴ core

۲. $u^+(\alpha)$ یک تابع غیرافزایشی کراندار و از راست پیوسته روی بازه $[0, 1]$ است.

$$\forall \alpha \in [0, 1]; u^-(\alpha) \leq u^+(\alpha) \quad ۳.$$

این تعریف معادل تعاریف دیگر اعداد فازی می باشد.

۲-۳-۱ قضیه (۲۱). فرض کنید $u \in \mathbb{R}_F$ یک عدد فازی و $[u]^\alpha$ نشان دهنده‌ی مجموعه برش آن

باشد^۱. در این صورت

i. $[u]^\alpha$ یک بازه‌ی بسته است. به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم $[u]^\alpha = [u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$.

ii. اگر $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ، آنگاه $[u]^{\alpha_2} \subseteq [u]^{\alpha_1}$.

iii. به ازای هر دنباله‌ی α_n های همگرا از پایین به $\alpha \in [0, 1]$ داریم

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} = [u]^\alpha$$

iv. به ازای هر دنباله از α_n های همگرا به 0 داریم

$$cl \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n} \right] = [u]^0$$

۲-۳-۱ عدد فازی مثلثی

۲-۳-۱-۱ تعریف (۱). عدد $L - R$ فازی $u = (m, l, r)_{LR}$ ، تابعی است از اعداد حقیقی بتوی

بازه $[0, 1]$ که در خاصیت زیر صدق می کند

$$u(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{l}\right), & m-l \leq x \leq m, \\ R\left(\frac{x-m}{r}\right), & m \leq x \leq m+r, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

^۱ Stacking Theorem

در تعریف بالا L و R توابعی پیوسته و کاهشی از $[0, 1]$ به $[0, 1]$ هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$R(0) = L(0) = 1, \quad R(1) = L(1) = 0.$$

۲-۱-۳-۲ تعریف ([۱]). یک عدد $L - L$ فازی مانند $u = (m, l, r)$ ، عددی $L - R$ فازی است

که در آن $x - 1 = L(x) = R(x)$ ، تکیه‌گاه u بازه بسته‌ی $[m - l, m + r]$ می‌باشد.

۲-۱-۳-۳ تعریف ([۸]). عدد فازی مثلثی^۱ $u = (m, l, r)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x-m+l}{l}, & m-l \leq x \leq m, \\ \frac{m+r-x}{r}, & m \leq x \leq m+r, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

که در آن $l, r > 0$.

می‌توان نشان داد که مجموعه اعداد $L - L$ فازی شامل اعداد فازی مثلثی می‌باشند.

۲-۱-۳-۴ تعریف. در صورتی که $u = (m, l, r) \in \mathbb{R}^3$ نمایش دهند. یک عدد فازی مثلثی باشد،

α -برش این عدد برابر است با

$$\underline{u}^\alpha = m + (\alpha - 1)l, \quad \bar{u}^\alpha = m + (1 - \alpha)r$$

۴-۲ اعمال حسابی

از آنجا که اغلب موارد محاسبات با پارامترهای غیرقطعی انجام می‌شود، تعاریف معادلی با عملیات

کلاسیک بین اعداد حقیقی برای اعداد فازی نیز بیان می‌گردد. در این بخش فرض کنید اعداد فازی

$u, v, w \in \mathbb{R}_F$ اعدادی فازی مثلثی باشند که

$$u^\alpha = [\underline{u}^\alpha, \bar{u}^\alpha], \quad v^\alpha = [\underline{v}^\alpha, \bar{v}^\alpha], \quad w^\alpha = [\underline{w}^\alpha, \bar{w}^\alpha].$$

^۱ triangular fuzzy number

۱-۴-۲ جمع

حاصل جمع دو عدد فازی مثلثی، یک عدد فازی مثلثی می باشد و

$$[u + v]^\alpha = \{x + y \mid x \in u^\alpha, y \in v^\alpha\} = u^\alpha + v^\alpha$$

۱.۱-۴-۲ خصوصیات

$$i. u + (v + w) = (u + v) + w$$

ii. مجموعه قطعی $^\circ$ که $\chi_{(^\circ)} \in \mathbb{R}_F$ عضو خنثی عمل جمع فازی است یعنی $u + ^\circ = u$

$$^\circ + u = u$$

$$iii. \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v \text{ اگر } \lambda \in \mathbb{R}$$

۲-۴-۲ تفریق

۱-۲-۴-۲ تعریف ([۶]). تفریق هاکوهارا^۲ (H -تفاضل، $\ominus$) این گونه تعریف می شود

$$u \ominus v = w \iff u = v + w$$

که در آن $+$ نشان دهنده جمع استاندارد بین دو عدد فازی است. اگر $u \ominus v$ وجود داشته باشد، براساس

دیدگاه α -برش رابطه زیر برقرار است

$$[u \ominus v]^\alpha = [\underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha, \bar{u}^\alpha - \bar{v}^\alpha]$$

^۱ Singleton

^۲ Hukuhara difference

۲-۲-۴-۲ تعریف ([۲۶، ۲۷]). تفریق تعمیم یافته‌ی هاکوهارا^۱ (gH -تفاضل) برای دو عدد فازی

$u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u \ominus_{gH} v = w \iff \begin{cases} (i). u = v + w \\ or (ii). v = u + (-1)w. \end{cases}$$

تعریف بالا به صورت α -برش با رابطه‌ی زیر نمایش داده می‌شود

$$[u \ominus_{gH} v]^\alpha = [\min\{\underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha, \bar{u}^\alpha - \bar{v}^\alpha\}, \max\{\underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha, \bar{u}^\alpha - \bar{v}^\alpha\}]$$

شرایط لازم برای آنکه $u \ominus_{gH} v$ عضوی از فضای $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ باشد عبارت‌اند از [۲۶]

✓ در حالت (i) به ازای همه‌ی $\alpha \in [0, 1]$ باید

$$\bar{w}^\alpha = \bar{u}^\alpha - \bar{v}^\alpha, \quad \underline{w}^\alpha = \underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha \bullet$$

• $\underline{w}^\alpha \leq \bar{w}^\alpha$ ؛ تابعی صعودی، $\bar{w}^\alpha$ تابعی نزولی و $\underline{w}^\alpha \leq \bar{w}^\alpha$.

✓ در حالت (ii) به ازای همه‌ی $\alpha \in [0, 1]$ باید

$$\bar{w}^\alpha = \underline{u}^\alpha - \underline{v}^\alpha, \quad \underline{w}^\alpha = \bar{u}^\alpha - \bar{v}^\alpha \bullet$$

• $\underline{w}^\alpha \leq \bar{w}^\alpha$ ؛ تابعی صعودی، $\bar{w}^\alpha$ تابعی نزولی و $\underline{w}^\alpha \leq \bar{w}^\alpha$.

۲-۲-۴-۲ گزاره ([۲۸]). فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ دو عدد فازی باشند، در این صورت

i. اگر تفریق gH موجود باشد، یکتاست.

ii. $u \ominus_{gH} v = u \ominus v$ یا $u \ominus_{gH} v = -(v \ominus u)$ با این فرض که عبارت سمت راست موجود

باشند. در حالت خاص $u \ominus_{gH} u = u \ominus u = 0$.

^۱ generalized Hukuhara difference

iii. اگر $u \ominus_{gH} v$ در حالت (i) تعریف (۱-۲-۴-۲) موجود باشد آنگاه $u \ominus_{gH} v$ در حالت (ii)

وجود دارد و برعکس.

$$iv. (u + v) \ominus_{gH} v = u$$

$$v \ominus_{gH} (u \ominus_{gH} v) = v \ominus_{gH} u$$

vi. $u \ominus_{gH} v = v \ominus_{gH} u = w$ اگر و تنها اگر $w = -w$ ؛ علاوه بر این $w = 0$ اگر و تنها اگر $u = v$.

۱-۲-۴-۲ تذکر ([۶]). اگر تفریق ها کوها را موجود باشد، آنگاه $u \ominus v = u \ominus_{gH} v$

۲-۲-۴-۲ تذکر. در این جا فرض بر آنست که $u \ominus v \in \mathbb{R}_F$ و $u \ominus_{gH} v$ همواره موجودند.

تعاریف بالا از منظر α -برش بیان شدند دو تعریف زیر در حالت کلی تر و اعداد $L - L$ فازی بیان می شوند.

۳-۲-۴-۲ تعریف ([۱۳]). تفریق دو عدد $L - L$ فازی $M = (m_1, l_1, r_1)$ و $N = (m_2, l_2, r_2)$

تعریف می شود

$$M \ominus N = (m_1 - m_2, l_1 - r_2, r_1 - l_2)$$

۴-۲-۴-۲ تعریف. جمع دو عدد $L - L$ فازی M و N تعریف می شود

$$M \oplus N = (m_1 + m_2, l_1 + l_2, r_1 + r_2)$$

۳-۴-۲ ضرب اسکالر در عدد فازی

۱-۳-۴-۲ تعریف ([۱۴]). حاصل ضرب عدد $\lambda \in \mathbb{R}$ در عدد $L - L$ فازی $M = (m_1, l_1, r_1)$

تعریف می شود

$$\lambda \odot (m_1, l_1, r_1) = (\lambda m_1, \lambda l_1, \lambda r_1), \quad \lambda \geq 0$$

$$\lambda \odot (m_1, l_1, r_1) = (\lambda m_1, -\lambda r_1, -\lambda l_1), \quad \lambda < 0$$

بر اساس α -برش اعداد فازی می‌توان نوشت

$$[\lambda M]^\alpha = \lambda M^\alpha = \{\lambda x \mid x \in M^\alpha\}$$

۵-۲ فضای متریک هاسدورف

به منظور تعریف فضای متریک هاسدورف^۱ و خواص آن روی مجموعه‌های فازی ابتدا فاصله هاسدورف که کاراترین متر برای زیرمجموعه‌های فازی ناتهی فشرده و محدب $\mathbb{R}$ می‌باشد به همراه چند خصوصیت آن بیان می‌شود.

۵-۲-۱ تعریف (۱۳). فرض کنید K مجموعه تمام زیرمجموعه‌های فشرده، ناتهی و محدب $\mathbb{R}$ باشد.

(i) اگر $A \in K$ آنگاه فاصله نقطه x تا مجموعه A برابر است با

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$$

(ii) اگر $A, B \in K$ آنگاه تفاضل هاسدورف B از A و A از B برابر است با

$$d_H^*(B, A) = \sup\{d(b, A) : b \in B\},$$

$$d_H^*(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}.$$

(iii) فاصله هاسدورف بین $A, B \in K$ برابر است با

$$d(A, B) = \max\{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\}.$$

۵-۲-۲ تعریف (۱۳). اگر d فاصله هاسدورف تعریف شده در K باشد، آنگاه

$D : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی در

^۱ Hausdorff metric space

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ می باشد

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d(u(\alpha), v(\alpha)) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \max \{ |u^-(\alpha) - v^-(\alpha)|, |u^+(\alpha) - v^+(\alpha)| \}.$$

۲-۵-۱ خصوصیات ([۱۸]). فضای متریک $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ کامل، جداشدنی و به صورت موضعی فشرده است. این فضا دارای خواص زیر است:

۱. به ازای هر $u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $D(u, v) = D(v, u)$ و $D(u + w, v + w) = D(u, v)$.

۲. به ازای هر $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ و $D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u, v)$.

براساس خاصیت بالا اگر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ هم علامت باشند داریم $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ که به معنی وجود خاصیت پخش ضرب نسبت به جمع از چپ در $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ است.

خاصیت اول نیز گویای پیوستگی جمع و ضرب اسکالر تحت متریک هاسدورف است.

در ادامه به بیان پیوستگی فازی و ذکر قضایایی در مورد مفهوم پیوستگی برای توابع فازی مقدار می پردازیم.

۲-۶ پیوستگی توابع فازی

اصل گسترش^۱ یکی از کاراترین ابزار است که براساس آن می توان قضایای کلاسیک ریاضی و توابع حقیقی را به طور متناظر به قضایا و توابع فازی مقدار بیان نمود. این اصل همچنین در تعمیم عملگرهای جبری بین اعداد حقیقی و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است.

۲-۶-۱ تعریف ([۳۳]). (اصل گسترش) تابع مفروض $f: X \rightarrow Y$ که در آن X و Y مجموعه های

^۱ Extension principle

قطعی‌اند را می‌توان به تابع فازی $F : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ گسترش داد به طوری که $v = f(u)$ که در آن

$$v(y) = \begin{cases} \sup\{u(x) : x \in X, f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \circ, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

برای توسیع اصل گسترش در حالت کلی یا n بعدی، مجموعه‌های مرجع قطعی $X_1, X_2, \dots, X_n$ و حاصلضرب دکارتی $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ را در نظر می‌گیریم. برای زیرمجموعه‌های فازی $A_1, A_2, \dots, A_n$ از n مجموعه مرجع حاصلضرب دکارتی به صورت یک مجموعه فازی از X می‌باشد که

$$(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_n(x_n)\}$$

با فرض تابع $f : X \rightarrow Y$ که Y مجموعه‌ای قطعی است آنگاه حاصل عمل f بر n مجموعه فازی

$A_1, A_2, \dots, A_n$ به عنوان زیرمجموعه فازی B از Y به صورت زیر تعریف می‌شود

$$B = f(A_1, A_2, \dots, A_n) = \{(y, B(y)) \mid y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}$$

که در آن

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n), y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min\{A_1(x_1), A_2(x_2), \dots, A_n(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \circ, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

به طور خلاصه و ساده‌تر تعریف کلی اصل گسترش را به صورت پایین می‌آوریم.

۲-۶-۲ تعریف (۵). فرض کنید تابع n متغیره $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ را بتوان

به صورت تابع $F : \mathcal{F}(X_1) \times \mathcal{F}(X_2) \times \dots \times \mathcal{F}(X_n) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ گسترش داد به طوری که

$$w = F(A_1, A_2, \dots, A_n) \text{ که در آن}$$

$$w(y) = \begin{cases} \sup\{\min\{A_i(x_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \circ, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

فرض کنید $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ یک بازه‌ی باز باشد. مجموعه α -برش‌های تابع فازی $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به ازای هر

$$x \in \mathbb{I}, \alpha \in [0, 1] \text{ به صورت } f(x; \alpha) = [f^-(x; \alpha), f^+(x; \alpha)] \text{ بیان می‌گردد.}$$

۲-۶-۳ تعریف ([۱۶]). تابع فازی مقدار $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نقطه $x_0 \in \mathbb{I}$ پیوسته است در صورتی

که به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند δ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in \mathbb{I}$ اگر $|x - x_0| < \delta$

آنگاه $D(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. اگر f در تمام نقاط $\mathbb{I}$ پیوسته باشد گوئیم f بر $\mathbb{I}$ پیوسته است.

۷-۲ مشتق‌پذیری توابع فازی

۲-۷-۱ تعریف ([۲۸]). نگاشت $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ را مشتق‌پذیر هاکوهارا^۱ گویند اگر برای هر

$h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، تفاضلات هاکوهارای $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$

و مقدار $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به‌گونه‌ای موجود باشند که

$$\lim_{h \rightarrow +0} D\left(\frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h}, f'(x_0)\right) = \lim_{h \rightarrow +0} D\left(\frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}, f'(x_0)\right) = 0.$$

مقدار فازی $f'(x_0)$ ، مشتق هاکوهارای f در نقطه‌ی $x_0 \in \mathbb{I}$ نامیده می‌شود.

به بیان دیگر

۲-۷-۲ تعریف. نگاشت $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ را مشتق‌پذیر هاکوهارا گویند اگر $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

به گونه‌ای موجود باشد که دو حد

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h}, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}$$

موجود و مساوی $f'(x_0)$ باشند. در این‌جا حدود در فضای متریک $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ گرفته می‌شوند و در نقاط

انتهای $\mathbb{I}$ ، تنها مشتق یک طرفه گرفته می‌شود. بنابراین اگر $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ مشتق‌پذیر باشد،

آنگاه گوئیم $f'(x_0)$ مشتق هاکوهارای f در نقطه‌ی x_0 است.

^۱ Hukuhara differentiable

۲-۷-۱ نتیجه ([۲۵]). (مشتق سیکالا)^۱ فرض کنید $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ مشتق‌پذیر باشد و

$$f(x; \alpha) = [\underline{f}(x; \alpha), \bar{f}(x; \alpha)], \text{ آنگاه } \underline{f}(x; \alpha), \bar{f}(x; \alpha) \text{ مشتق‌پذیر هستند و}$$

$$f'(x; \alpha) = [(\underline{f})'(x; \alpha), (\bar{f})'(x; \alpha)]; \quad \alpha \in [0, 1]$$

$$\text{که } (\underline{f})'(x; \alpha) \leq (\bar{f})'(x; \alpha).$$

۲-۷-۱ گزاره ([۵]). بستار تکیه‌گاه در توابع مشتق‌پذیر سیکالا غیرکاهشی است.

یکی از مشکلات اساسی در مشتق‌ها کوها را تابع f آن است که امکان دارد $f(x_0)$ یک عدد فازی باشد

$$\text{اما } \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(x_0+h) \ominus f(x_0)}{h} \text{ یک عدد فازی نباشد.}$$

۲-۷-۳ تعریف ([۶]). نگاشت $f: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در $x_0 \in \mathbb{I}$ را مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته قوی^۲ $(-gH)$

مشتق‌پذیر) گویند اگر $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به‌گونه‌ای موجود باشد که

۱. به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، مقادیر $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$

و حدود زیر در فضای متریک D موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

یا

۲. به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، مقادیر $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$

و حدود زیر موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

یا

^۱ Seikkala

^۲ strongly generalized differentiable

۳. به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، مقادیر $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$

و حدود زیر موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

یا

۴. به ازای هر $h > 0$ به اندازه‌ی کافی کوچک، مقادیر $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$

و حدود زیر موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

۲-۷-۴ تعریف (۲۸). مشتق تعمیم‌یافته‌ی هاگوارا برای نگاشت فازی مقدار $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در

نقطه‌ی x_0 به صورت زیر تعریف می‌شود

$$f'_{gH}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_{gH} f(x_0)}{h}$$

اگر $f'_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ آنگاه گوییم f مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته‌ی هاگوارا^۱ (gH) -دیفرانسیل‌پذیر در نقطه‌ی x_0 است.

۲-۷-۵ تعریف (۲۸). فرض کنید که $f : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی (gH) -دیفرانسیل‌پذیر باشد. گوییم

• $f(x)$ تابعی $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل‌پذیر در نقطه‌ی x_0 است اگر

$$f'_{i.gH}(x_0; \alpha) = [(\underline{f})'(x_0; \alpha), (\overline{f})'(x_0; \alpha)]. \quad (1-2)$$

• $f(x)$ تابعی $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل‌پذیر در نقطه‌ی x_0 است اگر

$$f'_{ii.gH}(x_0; \alpha) = [(\overline{f})'(x_0; \alpha), (\underline{f})'(x_0; \alpha)]. \quad (2-2)$$

^۱ generalized Hukuhara differentiable

۲-۷-۶ تعریف ([۲۸]). نقطه‌ی $\xi \in \mathbb{I}$ یک نقطه‌ی سوئیچ^۱ برای دیفرانسیل پذیری $f(x)$ است اگر به

ازای هر همسایگی V از ξ نقاط $x_1 < \xi < x_2$ موجود باشد به طوری که

• نوع I. در نقطه‌ی x_1 ، (۱-۲) برقرار باشد و (۲-۲) برقرار نباشد و در نقطه‌ی x_2 (۲-۲) برقرار

باشد و (۱-۲) برقرار نباشد.

• نوع II. در نقطه‌ی x_1 ، (۲-۲) برقرار باشد و (۱-۲) برقرار نباشد و در نقطه‌ی x_2 ، (۱-۲) برقرار

باشد و (۲-۲) برقرار نباشد.

۸-۲ درونیاب فازی

۲-۸-۱ تعریف ([۱۷]). $(n+1)$ نقطه حقیقی $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ را در نظر بگیرید. فرض

کنید به هر نقطه x_i ، عدد فازی $u_i \in \mathbb{R}_F$ متناظر باشد. تابع پیوسته فازی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$ را درونیاب

فازی داده‌های (x_i, u_i) ، $0 \leq i \leq n$ ، می‌نامند در صورتی که به ازای هر $0 \leq i \leq n$ ، تساوی

$$f(x_i) = u_i \text{ برقرار باشد.}$$

۲-۸-۲ تعریف ([۱۷]). (چندجمله‌ای لاگرانژ فازی) فرض کنید $0 \leq i \leq n$ ، داده‌های

فازی تعریف (۱-۸-۲) و $L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$ چندجمله‌ای لاگرانژ باشد، آنگاه

$$p_{d_0, \dots, d_n}(x) = \sum_{i=0}^n d_i L_i(x)$$

درونیاب لاگرانژ نقاط حقیقی $d_0 < d_1 < \dots < d_n$ است که $d_i \in u_i^\alpha$ و با تعریف α -برش

$$p^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) u_i^\alpha \text{ چندجمله‌ای لاگرانژ فازی به صورت } p(x) = \sum_{i=0}^n L_i u_i \text{ نوشته می‌شود.}$$

۲-۸-۳ تعریف. S_ℓ خانواده اسپلاین‌های از مرتبه ℓ به ازای گره‌های x_i ، $0 \leq i \leq n$ ، می‌باشد که در آن

$s \in S_\ell$ در صورتی که

^۱ switching point

$$s \in C^{\ell-2}[x_0, x_n] \quad (i)$$

(ii) s یک چندجمله‌ای از درجه ℓ در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ است به‌ازای $0 \leq i \leq n-1$.

۲-۸-۴ تعریف ([۱۷]). (درونیاب اسپلاین مرتبه ℓ فازی $fs(x)$ در صورتی که $fs^\alpha(x)$ ، α -برش

$fs(x)$ باشد آنگاه $\{y \in \mathbb{R} \mid y = s_{d_0, \dots, d_n}(x), d_i \in u_i^\alpha\}$ که $s_{d_0, \dots, d_n} \in S_\ell$

اسپلاین مرتبه ℓ می‌باشد که داده‌های (x_i, d_i) ، $0 \leq i \leq n$ ، را درونیابی می‌کند. اگر $s_i \in S_\ell$

داده‌های (x_j, f_j) ، $0 \leq j \leq n$ ، را درونیابی کند که $f_j = 1$ هرگاه $j = i$ و در غیراین صورت

$f_j = 0$ ، آنگاه $s_{d_0, \dots, d_n}(x) = \sum_{i=0}^n d_i s_i(x)$ و چندجمله‌ای درونیاب اسپلاین مرتبه ℓ به‌صورت

$$fs(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x) u_i \quad \text{می‌باشد و بنابراین } fs \text{ روی } [x_0, x_n] \text{ پیوسته می‌باشد.}$$

۲-۸-۲ گزاره ([۱۹]). لوئن نشان داد که درونیاب‌های فازی مقدار که بر پایه‌ی چندجمله‌ای‌های لاگرانژ

$$\{l_0, l_1, \dots, l_n\} \text{ با ویژگی } l_i(x_j) = \delta_{ij} \text{ ساخته می‌شوند، پیوسته است.}$$

۲-۸-۵ تعریف ([۱۷]). به‌ازای داده‌های درونیابی $(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2$ ، $0 \leq i \leq n$ ، اسپلاین مکعبی

$s(x)$ با شرط نبود یک گره^۱ یک چندجمله‌ای درجه سه به‌صورت

$$s(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq n-1$$

تعریف می‌شود که در شرایط پیوستگی زیر صدق می‌کند

$$s(x_i) = f_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad ۱.$$

$$s^{(j)}(x_i^+) = s^{(j)}(x_i^-), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad j = 0, 1, 2. \quad ۲.$$

$$s'''(x_1^+) = s'''(x_1^-), \quad s'''(x_{n-1}^+) = s'''(x_{n-1}^-). \quad ۳.$$

گردایه تمام چنین اسپلاین‌هایی را با نماد $s_{nk}(x_0, x_n)$ نمایش می‌دهند.

۲-۸-۶ تعریف ([۱۷]). اگر $s_i \in s_{nk}(x_0, x_n)$ و داده‌های $(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^2$ ، $0 \leq i \leq n$ ، را درونیابی

^۱ not-a-knot

کند به طوری که $f_j = \delta_{ij}$ آنگاه تعریف می‌کنیم $s_{y_0, \dots, y_n}(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x)y_i$ که

$s_{y_0, \dots, y_n} \in S_{nk}(x_0, x_n)$ و داده‌های (x_i, y_i) ، $0 \leq i \leq n$ را درونیابی می‌کند و با فرض

$$F^\alpha(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \prod_{i=0}^n u_i^\alpha : s_{y_0, \dots, y_n}(x) = t\} = \sum_{i=0}^n s_i(x)u_i^\alpha, \quad y_i \in u_i^\alpha$$

آنگاه چندجمله‌ای درونیاب فازی اسپلاین با شرط نبود یک گره برای داده‌های فازی

$\{(x_i, u_i) \mid u_i \in \mathbb{R}_F, 0 \leq i \leq n\}$ به صورت $F(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x)u_i$ بیان می‌شود.

۷-۸-۲ تعریف (۲). تابع $s : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$ یک چندجمله‌ای اسپلاین طبیعی^۱ از درجه فرد

$m \geq 2$ ، $\ell = 2m - 1$ نامیده می‌شود به شرطی که روابط زیر برقرار باشند

$$s \in C^{\ell-1}[x_0, x_n] \quad \bullet$$

$\bullet$ به ازای هر $s(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه ℓ می‌باشد، $0 \leq i \leq n-1, x \in [x_i, x_{i+1})$

$$s^{(v)}(x_0) = s^{(v)}(x_n) = 0; \quad v = m, \dots, 2m-2 \quad \bullet$$

گردایه چنین اسپلاین‌هایی را با $s_\ell(x_0, x_n)$ نمایش می‌دهند.

۸-۸-۲ تعریف (۲). اگر $s_i \in s_\ell(x_0, x_n)$ داده‌های (x_j, f_j) ، $0 \leq i \leq n$ را درونیابی کند که

$f_j = \delta_{ij}$ آنگاه اسپلاین طبیعی $s_{y_0, \dots, y_n} \in s_\ell(x_0, x_n)$ تعریف می‌شود $s_{y_0, \dots, y_n}(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x)y_i$ ،

که داده‌های $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ و $0 \leq i \leq n$ را درونیابی می‌کند.

۹-۸-۲ تعریف (۲). با توجه به α -برش

$$F^\alpha(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists \bar{y} \in \prod_{i=0}^n u_i^\alpha : s_{y_0, \dots, y_n}(x) = t\} = \sum_{i=0}^n s_i(x)u_i^\alpha$$

چندجمله‌ای درونیاب اسپلاین طبیعی فازی درجه ℓ به صورت $F(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x)u_i$ تعریف می‌شود.

۱۰-۸-۲ تعریف (۱۵). (چندجمله‌ای هرمیت فازی) فرض کنید $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ ، $(n+1)$

نقطه در $\mathbb{R}$ و $\{u_i\}_{i=0}^n$ و $\{v_i\}_{i=0}^n$ مقدار فازی در $\mathbb{R}_F$ باشد. چندجمله‌ای هرمیت فازی

^۱ natural spline

$f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در شرایط زیر صدق می‌کند

• به‌ازای هر $0 \leq i \leq n$ ، تساوی‌های $f(x_i) = u_i$ و $f'(x_i) = v_i$ برقرارند که $f'(x)$ مشتق

سیکالای $f(x)$ می‌باشد.

• f مشتق‌پذیر سیکالا از مرتبه اول می‌باشد.

• در صورتی‌که $u_i = y_i$ و $v_i = z_i$ ، $0 \leq i \leq n$ ، اعداد حقیقی در $\mathbb{R}$ باشند، چندجمله‌ای

منحصربفرد هرمیت $py_{0,\dots,y_n}$ از درجه نایبتر از $2n + 1$ وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای هر

$0 \leq i \leq n$ ، تساوی‌های $py_{0,\dots,y_n}'(x_i) = z_i$ ، $py_{0,\dots,y_n}(x_i) = y_i$ برقرارند.

در این صورت چندجمله‌ای هرمیت فازی چنین نمایش داده می‌شود

$$py_{0,\dots,y_n}(x) = \sum_{j=0}^n H_j(x)u_j + \sum_{j=0}^n \hat{H}_j v_j$$

که در آن

$$H_j = [1 - 2(x - x_j)L_j'(x)] L_j''(x) \quad \& \quad \hat{H}_j = (x - x_j)L_j''(x) \quad \& \quad L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}.$$

۹-۲ مفاهیم، تعاریف و قضایای غیرفازی

در این بخش به معرفی تعاریف و قضایای مربوط به تئوری درونیابی و تقریب می‌پردازیم که تا انتهای

رساله بخشی مهم از مفاهیم فازی مورد بحث و بررسی بر آنها استوار گشته و چارچوب انتزاعی^۱ رساله

را شامل می‌شوند.

ابتدا به فضای خطی می‌پردازیم که مجموعه‌ای از اشیاء ریاضی به نام بردار را شامل می‌شود. بردارها طبق

قوانین حساب می‌توانند در اعداد حقیقی ضرب یا با هم جمع شوند که حاصل، برداری از فضای خطی

خواهد بود.

^۱ Abstract framework

۲-۹-۱ تعریف ([۱۲]). فضای خطی X مجموعه‌ای از بردارهای $x, y, \dots$ می‌باشد که هر دو عضو $x, y \in X$ یک عضو منحصر بفرد $x + y \in X$ را مشخص می‌کنند که جمع آن دو نامیده می‌شود. هر عضو $x \in X$ و هر اسکالر α متعلق به یک میدان مفروض مانند F عضو منحصر بفرد $\alpha x \in X$ را مشخص می‌کنند که آن را ضرب اسکالر می‌نامیم. جمع برداری و ضرب اسکالر از قوانین زیر پیروی می‌کنند:

$$x + y = y + x \quad ۱.$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad ۲.$$

۳. عضو منحصر به فرد $\circ \in X$ که آن را بردار صفر می‌نامیم بگونه‌ای وجود دارد که $\forall x \in X$,

$$x + \circ = x$$

۴. به ازای هر $x \in X$ بردار منحصر بفرد $-x$ به گونه‌ای وجود دارد که $x + (-x) = \circ$

۵. به ازای هر $x \in X$ و $\alpha, \beta \in F$ ، $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad ۶.$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad ۷.$$

$$1(x) = x \quad ۸.$$

در رساله حاضر فرض بر این است که F میدان اعداد حقیقی می‌باشد. بنابراین X را فضای خطی حقیقی نیز می‌نامیم.

۲-۹-۲ تعریف ([۱۰]). یک ترکیب خطی از اعضای X را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n; \quad \alpha_i \in F, x_i \in X$$

۲-۹-۳ تعریف ([۲۳]). یک مجموعه متناهی از بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ مستقل خطی اند اگر ضرائب

اسکالر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ که همگی صفر نیستند به گونه‌ای موجود باشند که

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

در صورتی که x_i ها مستقل خطی نباشند، آنها را وابسته خطی می‌نامیم.

۲-۹-۴ تعریف ([۱۲]). فرض کنید n عدد صحیح و مثبت باشد. در صورتی که n بردار $x_1, x_2, \dots, x_n$

متعلق به X و مستقل خطی به گونه‌ای موجود باشند که هر $n+1$ بردار دلخواه وابسته خطی باشند، آنگاه

X را یک فضای خطی از بعد n می‌نامیم. در صورتی که چنین n ای وجود نداشته باشد، X را از بعد

نامتناهی می‌نامیم.

۲-۹-۵ تعریف ([۱۲]). بردارهای $x_1, x_2, \dots, x_n$ یک پایه برای X نامیده می‌شود اگر x_i ها مستقل

خطی بوده و هر بردار x متعلق به X را بتوان به طور منحصر بفرد به صورت ترکیبی خطی از x_i ها نوشت.

۲-۹-۱ قضیه ([۱۰]). فضای خطی n بعدی نامیده می‌شود اگر و تنها اگر پایه‌ای با n عضو داشته

باشد. اگر X یک فضای خطی n بعدی باشد، هر n بردار مستقل خطی تشکیل یک پایه می‌دهند.

۲-۹-۱ نتیجه ([۱۰]). (فضای خطی توابع) فرض کنید S مجموعه‌ای از نقاط روی محور اعداد حقیقی

باشد. مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار با دامنه S را T می‌نامند. به ازای $f, g \in T$ جمع دو بردار چنین

تعریف می‌شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in S$$

ضرب اسکالر تعریف می‌شود:

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in S$$

تابع ثابت صفر در T را بردار صفر در نظر بگیرید. تابع $-f \in T$ تعریف می‌شود:

$$(-f)(x) = -f(x), \quad x \in S.$$

با تعاریف بالا، T یک فضای خطی از بردارهایی است که همگی تابع هستند. T را فضای خطی توابع

روی S می‌نامند. اگر تعداد نقاط شامل S نامتناهی باشد، T از بعد نامتناهی می‌باشد.

۲-۹-۶ تعریف (۲۳). فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازه I تعریف شده باشد. $f(x)$ را در نقطه

$x_0 \in I$ مشتق‌پذیر می‌نامیم در صورتی که حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

اگر x_0 یک نقطه انتهایی I باشد، $f'(x_0)$ را یک مشتق یکطرفه می‌نامند. تابع $f(x)$ را مشتق‌پذیر روی

I نامیم هرگاه به ازای هر نقطه I ، مشتق‌پذیر باشد.

برای توابع مشتق‌پذیر قضایای رل^۱ و مقدار میانگین^۲ به صورت زیر بیان می‌شوند.

۲-۹-۲ قضیه (۲۳). (قضیه رل) فرض کنید $f(x) \in C[a, b]$ و در هر نقطه‌ای (a, b) مشتق‌پذیر

باشد. اگر $f(a) = f(b)$ آنگاه نقطه $x = c$ که $a < c < b$ به گونه‌ای وجود دارد که $f'(c) = 0$.

۲-۹-۳ قضیه (۲۳). (قضیه مقدار میانگین) فرض کنید $f(x) \in C[a, b]$ در هر نقطه (a, b)

مشتق‌پذیر باشد. آنگاه نقطه c که $a < c < b$ به گونه‌ای وجود دارد که $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

ممکن است تابع $f'(x)$ روی I مانند $f(x)$ پیوسته باشد. مجموعه توابع که مشتق آنها روی $[a, b]$ پیوسته

است با $C^1[a, b]$ نمایش می‌دهند.

۲-۹-۷ تعریف (۲۳). اگر تابع $f(x)$ روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر برای n بار باشد و اگر $f^{(n)}(x)$ نیز

روی $[a, b]$ پیوسته باشد می‌نویسیم $f(x) \in C^n[a, b]$. یک فضای خطی از توابع می‌باشد.

۲-۹-۲ نتیجه (۱۲). $C^n[a, b]$ یک فضای خطی از توابع می‌باشد.

قضیه زیر که تعمیمی بر قضیه رل ۲-۹-۲ می‌باشد، برای توابع مشتق‌پذیر از مراتب بالا صدق می‌کند.

۲-۹-۴ قضیه (۱۲). فرض کنید $f \in C[a, b]$ ، $n \geq 2$ و $f^{(n-1)}(x)$ در هر نقطه (a, b) موجود

باشد. در صورتی که به ازای $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ داشته باشیم

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = 0$$

^۱ Roll's Theorem

^۲ Mean Value Theorem

آنگاه نقطه c متعلق به (x_1, x_2) به گونه‌ای وجود دارد که $f^{(n-1)}(c) = 0$.

۲-۹-۸ تعریف ([۱۰]). هر چندجمله‌ای از درجه n تابعی است که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0.$$

گردایه تمام چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی n یک فضای خطی با پایه $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ می‌باشد و آن را با P_n نشان می‌دهند.

در بسیاری از مسائل لازم است تا عددی به تابعی که از گردایه‌ای از توابع اختیار شده وابسته شود. برای مثال ممکن است به هر تابع $f(x)$ که روی $[a, b]$ مشتق پیوسته دارد عدد زیر را ربط دهند:

$$\int_a^b (1 + [f'(x)]^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

چنین پیوندی را به عنوان یک تابع می‌شناسند. یک ویژگی مهم تابع آنست که خطی عمل می‌کند.

۲-۹-۹ تعریف ([۱۲]). فرض کنید X یک فضای خطی است و به هر بردار x در آن عدد حقیقی

منحصر بفرد $L(x)$ مرتبط می‌باشد. در صورتی که به ازای $x, y \in X$ و اعداد دلخواه حقیقی α و β داشته باشیم

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

آنگاه L را یک تابع خطی روی X می‌نامند.

$L(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ یک تابع خطی $X = \mathbb{R}_n$ می‌باشد که $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و a_i ها اعدادی ثابت می‌باشند.

نظریه درونیابی متکی ست بر بازسازی توابع مطلوب مجهول براساس اطلاعات تابع‌های معینی که از قبل شناخته شده‌اند.

۲-۹-۱۰ تعریف ([۱۲]). فرض کنید X یک فضای خطی و L_1 و L_2 تابع‌های خطی روی آن باشند.

جمع L_1 و L_2 همچنین ضرب اسکالر α و L_1 چنین تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}(L_1 + L_2)(x) &= L_1(x) + L_2(x), \quad x \in X \\ (\alpha L_1)(x) &= \alpha L_1(x)\end{aligned}\tag{۳-۲}$$

۲-۹-۱۱ تعریف ([۱۲]). فرض کنید X فضای خطی دلخواهی باشد. مجموعه تابع‌های خطی روی X به همراه جمع و ضرب (۳-۲) یک فضای خطی تشکیل می‌دهند که فضای مزدوج جبری^۱ X نامیده می‌شود و با X^* نشان داده می‌شود.

اعضای X^* تابع‌های خطی‌اند. بنابراین می‌توان در خصوص استقلال خطی تابع‌های خطی، ترکیب خطی، مبنا و بعد برای آنها بحث کرد.

۲-۹-۱ مثال ([۲۳]). فرض کنید $X = C[a, b]$ و $x_1, x_2, \dots, x_n$ نقاطی متمایز در $[a, b]$ باشند. اگر تعریف کنیم به ازای هر $f \in X$ ، $L_k(f) = f(x_k)$ ، آنگاه $L_1, L_2, \dots, L_n$ در X^* مستقل خطی‌اند. در صورتی که $X = P_{n-1}[a, b]$ ، مجموعه‌ی n تایی تابع‌های بالا وابسته خطی خواهند بود. ۲-۹-۵ قضیه ([۲۳]). اگر فضای خطی X از بعد n باشد، فضای تابع‌های X^* نیز n بعدی است.

۲-۹-۳ نتیجه. هر تابع خطی روی فضای خطی X را می‌توان به صورت ترکیب خطی از n تابع خطی ثابت مستقل خطی روی X نوشت که پایه‌ای برای X^* هستند.

۲-۹-۶ قضیه ([۱۰]). (قضیه درونیایی) $n+1$ نقطه متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ و $n+1$ مقدار حقیقی $w_0, w_1, \dots, w_n$ مفروضند. چندجمله‌ای منحصر بفرد $p_n(x) \in P_n$ چنان وجود دارد که

$$p_n(x_i) = w_i \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

در قضیه بالا چندجمله‌ای درونیایی متعلق به P_n براساس $n+1$ مقدار معلوم بازسازی شده است.

مسئله عمومی درونیایی متناهی بیان می‌کند آیا می‌توان براساس $n+1$ قطعه دلخواه از معلومات خطی

^۱ Algebraic conjugate space

درونیاب را به دست آورد و اینکه آیا درونیاب می‌تواند تابعی باشد به جز چندجمله‌ای‌ها؟ این سئوالات مسأله عمومی زیر را ارائه می‌کنند.

۱-۹-۲ مسأله (۱۲). (مسأله عمومی درونیابی) فرض کنید X یک فضای خطی n بعدی و $L_1, L_2, \dots, L_n$ تابعک‌های خطی مفروض روی X باشند. آیا به ازای مجموعه مقادیر داده شده $w_1, w_2, \dots, w_n$ می‌توان عضوی از X مانند x به گونه‌ای یافت که

$$L_i(x) = w_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۴-۲)$$

پاسخ مثبت است در صورتی که تابعک‌های L_i در X^* مستقل خطی باشند.

۱-۹-۲ لم (۱۲). فرض کنید X فضای خطی n بعدی و $x_1, x_2, \dots, x_n$ در آن مستقل خطی باشند. در صورتی که $L_1, L_2, \dots, L_n$ در X^* مستقل خطی باشند آنگاه

$$|L_i(x_j)| \neq 0. \quad (۵-۲)$$

و برعکس، اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ یا $L_1, L_2, \dots, L_n$ مستقل خطی باشند و (۵-۲) برقرار باشد آنگاه مجموعه دیگر نیز مستقل خطی است.

۷-۹-۲ قضیه (۱۲). فضای خطی n بعدی X و بردارهای $L_1, L_2, \dots, L_n$ در X^* را در نظر بگیرید. مسأله درونیابی (۴-۲) به ازای مقادیر دلخواه $w_1, w_2, \dots, w_n$ دارای حل است اگر و تنها اگر L_i ها در X^* مستقل خطی باشند. در این صورت حل منحصر بفرد خواهد بود.

۱۲-۹-۲ تعریف (۱۰). (فضای ضرب داخلی) فضای خطی حقیقی X با مؤلفه‌های x یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود در صورتی که به ازای هر دو عضو x_1 و x_2 یک عدد حقیقی که با (x_1, x_2) نشان می‌دهیم با خواص زیر تعریف شود:

$$(x_1 + x_2, x_3) = (x_1, x_3) + (x_2, x_3) \quad ۱. \quad (\text{خطی بودن})$$

$$(x_1, x_2) = (x_2, x_1) \quad ۲. \quad (\text{تقارن})$$

$$(\alpha x_1, x_2) = \alpha(x_1, x_2), \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{همگنی})$$

$$(x, x) \geq 0 \text{ و } (x, x) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0. \quad (\text{مثبت بودن})$$

مقدار (x_1, x_2) ضرب داخلی x_1 و x_2 نامیده می‌شود.

۲-۹-۱۳ تعریف. دنباله‌ی اعضای $x_1, x_2, \dots, x_n$ در یک فضای ضرب داخلی را در نظر بگیرید.

ماتریس $n \times n$

$$G = ((x_i, x_j)) = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \cdots & (x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

ماتریس گرام^۱ برای $x_1, x_2, \dots, x_n$ معرفی می‌شود و دترمینان آن

$$g = g(x_1, x_2, \dots, x_n) = |(x_i, x_j)| = |(x_j, x_i)|$$

به عنوان دترمینان گرام^۲ مؤلفه‌های x_1 تا x_n شناخته می‌شود.

دترمینان $|L_i(x_j)|$ در (۲-۵) یک دترمینان گرام تعمیم یافته است و صفر نشدن آن مترادف است با امکان

حل مسأله درونیایی (۲-۴).

۲-۹-۲ مسأله (۱۲). (مسأله درونیایی هرمیت کامل^۳) یک نمونه از فضای توابع و سیستم‌های مربوط

به تابع‌های مستقل که مسأله درونیایی در مورد آنها به تفصیل حل شده است مسأله درونیایی هرمیت

کامل است که با فرض $X = P_N$ براساس اطلاعات زیر به ازای تابع‌ها بیان می‌شود:

$$L_1(f) = f(x_0), L_2(f) = f'(x_0), \dots, L_{m_0+1}(f) = f^{(m_0)}(x_0)$$

$$L_{m_0+2}(f) = f(x_1), L_{m_0+3}(f) = f'(x_1), \dots, L_{m_0+m_1+2}(f) = f^{(m_1)}(x_0)$$

^۱ Gram matrix

^۲ Gram determinant

^۳ Full Hermite Interpolation

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$L_{N-m_n-1}(f) = f(x_n), L_{N-m_n}(f) = f'(x_n), \dots, L_N(f) = f^{(m_n)}(x_0)$$

$$(x_i \neq x_j, N = m_0 + m_1 + \dots + m_n + n).$$

بنابر قضیه ۷-۹-۲، مسأله ۲-۹-۲ در فضای خطی $X = P_N$ دارای خطی منحصر بفرد است که با $p_N(x) \in X$ نشان داده می‌شود.

۲-۹-۸ قضیه ([۱۰]). (قضیه وجود و منحصر بفردی حل) فرض کنید $n+1, x_0, x_1, \dots, x_n$ گره

متمایز، $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ اعداد صحیح مثبت، $N = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n + n$ و $k = 0, 1, \dots, \alpha_i$

باشند. در صورتی که $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^{\alpha_i+1}$ و

$$l_{ik}(x) = w(x) \frac{(x - x_i)^{k-\alpha_i}}{k!(x - x_i)^{\alpha_i+1-k}} \cdot \frac{d^{(\alpha_i-k)}}{dx^{(\alpha_i-k)}} \left[\frac{(x - x_i)^{\alpha_i+1}}{w(x)} \right]_{x=x_i}$$

آنگاه چند جمله‌ای

$$p_N(x) = \sum_{i=0}^n r_i l_{i0}(x) + \sum_{i=0}^n r'_i l_{i1}(x) + \dots + \sum_{i=0}^n r_i^{(\alpha_i)} l_{i\alpha_i}(x) \quad (۶-۲)$$

متعلق به فضای خطی P_N یک حل منحصر بفردی برای مسأله ۲-۹-۲ می‌باشد که در آن

$$p_N(x_0) = r_0, p'_N(x_0) = r'_0, \dots, p_N^{(\alpha_0-1)}(x_0) = r_0^{(\alpha_0)}$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$p_N(x_n) = r_n, p'_N(x_n) = r'_n, \dots, p_N^{(\alpha_n-1)}(x_n) = r_n^{(\alpha_n)}.$$

۲-۹-۱۴ تعریف. مجموعه‌ای از اعضای یک فضای ضرب داخلی مانند S متعامد یکه^۱ نامیده می‌شود

اگر

$$(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ 1 & x = y \end{cases} \quad x, y \in S$$

^۱ Orthonormal

در صورتی که صرفاً داشته باشیم $x \neq y$ ، $(x, y) = 0$ ، آنگاه S را متعامد^۱ می‌نامیم.

یک حل برای قضیه درونیایی ۲-۹-۶ که به قضیه درونیایی لاگرانژ مشهور است به شکل زیر است:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n w_i l_i(x) \quad (۷-۲)$$

$$l_i(x) = \frac{w(x)}{(x - x_i)w'(x_i)} = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}$$

که در آن

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad 0 \leq i, j \leq n. \quad (۸-۲)$$

δ_{ij} را دلتای کرونکر^۲ می‌نامند.

۲-۹-۴ نتیجه ([۲۳]). (روش پایه‌ی اصلی^۳)

بنابه (۷-۲) مجموعه $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)\}$ یک پایه برای فضای خطی P_n می‌باشد. محاسبه

چندجمله‌ای‌های P_n براساس این پایه بسیار آسان‌تر از محاسبه براساس $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ می‌باشد.

انتخاب پایه‌ای برای فضای خطی حل مسأله درونیایی با ویژگی‌های (۷-۲) را روش پایه‌ی اصلی می‌نامند.

۲-۹-۱۵ تعریف. گره‌های متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ و $f_0, f_1, \dots, f_n$ مقادیر متناظر تابع f در x_i ها

مفروضند. اگر Φ فضای خطی تولید شده توسط توابع پیوسته پایه‌ای اصلی ϕ_j باشد که

$(j = 0, 1, \dots, n)$ ، $\phi_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$ ، $(i = 0, 1, \dots, n)$ ، آنگاه $F \in \Phi$ که

به صورت $F(x) = \sum_{j=0}^n f_j \phi_j(x)$ بیان می‌شود یک درونیاب داده‌های مسأله براساس پایه‌های اصلی Φ

است و چنین روندی در محاسبه درونیاب را روش توابع پایه‌ای اصلی می‌نامند.

مثال‌هایی از جمله تابع رونگه^۴ در درونیایی نقاط متساوی‌فاصله وجود دارند که نشان می‌دهند لزوماً

خطای درونیایی با دقت تقریب با افزایش تعداد نقاط درونیاب کاهش نمی‌یابد.

^۱ Orthogonal

^۲ Kroneker's delta

^۳ Cardinal basis method

^۴ Runge's function

در واقع درونیابی توسط چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی بالا و روی گره‌های متساوی‌فاصله به‌خصوص در نقاط انتهایی بازه درونیابی به شکل بارزی نامناسب است و برای ارتقاء دقت درونیاب در چنین مواردی می‌توان از درونیاب‌های چندجمله‌ای قطعه‌ای با درجه کم^۱ بهره برد یا از گره‌های متساوی‌فاصله استفاده نکرد.

توابع چندجمله‌ای قطعه‌ای مانند توابع اسپلاین از جمله درونیاب‌هایی هستند که به روش‌های مختلف در نظریه تقریب^۲، مشتق و انتگرال‌گیری عددی و حل عددی معادله دیفرانسیل معمولی و جزئی کاربرد دارند. در رساله پیش‌رو تنها از منظر تئوری درونیابی توابع چندجمله‌ای قطعه‌ای مورد بحث قرار می‌گیرند. بار دیگر توجه کنیم که در درونیابی با گره‌های متساوی‌فاصله مشکل همگرایی زمانی بروز می‌کند که از درونیاب مرتبه بالا و تعداد زیادی گره‌های هم فاصله استفاده شود.

در مواقعی که تعداد گره‌ها زیاد است، همواره بکار بردن درونیاب قطعه‌ای خطا را به طور یکنواخت به صفر نزدیک می‌کند، حتی زمانی که از درونیاب با درجه کم استفاده شود. این امر از آنجا اهمیت می‌یابد که درونیابی با نقاط متساوی‌فاصله به طور قابل توجهی کاربردی می‌باشد.

در فصل سوم، دو پیشنهاد پیش گفته در مورد به‌کارگیری چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای درجه پایین و عدم استفاده از نقاط متساوی‌فاصله را به عنوان جایگزینی برای درونیاب‌های مرتبه بالا به کار برده و چندجمله‌ای‌های درونیاب قطعه‌ای هرمیت روی گره‌های متمایز دلخواه معرفی و بررسی می‌شوند. پایه‌هایی خاص برای ساخت آنها ارائه می‌شود که به دلیل ویژگی منحصر بفردشان می‌توان رده چندجمله‌ای‌های درونیاب فازی قطعه‌ای هرمیت کلی را براساس اصل گسترش بر آنها بنا نهاده و تولید نمود.

^۱ low order piecewise polynomial

^۲ Approximation theory

فصل سوم

چند جمله‌ای درون‌یاب هر میت قطعه‌ای فازی

۱-۳ مقدمه

این فصل به معرفی چندجمله‌ای‌های درونیاب فازی از نوع هرमित قطعه‌ای می‌پردازد. برای این منظور قضایا و خصوصیات از چندجمله‌ای‌های درونیاب هرमित و قطعه‌ای هرमित قطعی بیان می‌شوند. حالت غیرقطعی یا فازی مساله درونیابی نیز بر همین مفروضات بنا شده و معرفی می‌شود. در ابتدا پاسخ به این سوال از لحاظ نظری بسیار با اهمیت است که آیا دنباله‌ی $\{P_n\}$ شامل چندجمله‌ای‌های درونیاب تابع پیوسته f در صورتی که $n \rightarrow \infty$ به f همگرا می‌باشد یا خیر؟

۲-۳ پدیده‌ی رونگه-مری

۱-۲-۳ تعریف ([۲۹]). فرض کنید $n = 0, 1, 2, \dots$ درجه چندجمله‌ای درونیاب p_n در نقاط درونیاب متساوی الفاصله $x_i = -5 + i$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$ روی $[-5, 5]$ و برای تابع پیوسته

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5],$$

باشد. بیشترین خطا یا بیشترین مقدار قدرمطلق تفاضل بین $f(x)$ و $p_n(x)$ به ازای $-5 \leq x \leq 5$ زمانی به طور نمایی افزایش می‌یابد که n افزایش یابد. به ویژه این خطا با افزایش تعداد نقاط درونیاب در بازه $[-5, 5]$ در نزدیکی ± 5 یا نقاط انتهایی بازه به طور نمایی جهش یافته و رشد می‌کند. این رفتار چندجمله‌ای‌های درونیاب p_n در شرایط گفته شده را پدیده‌ی رونگه-مری^۱ می‌نامند.

^۱ Runge- Meray Phenomenon

۳-۳ چندجمله‌ای درونیاب هریت کامل

این قسمت به معرفی مساله درونیابی هریت کامل و وجود و منحصر بفردی حل چنین مساله‌ای می‌پردازد. درواقع درونیاب هریت، تعمیمی بر درونیاب لاگرانژ (۷-۲) می‌باشد، بدین صورت که به گونه‌ای یک چندجمله‌ای بر تابع f برازش می‌نماید که چندجمله‌ای علاوه بر تابع f در هر گره، تعداد مفروضی مشتقات متوالی f را نیز درونیابی نماید.

۱-۳-۳ تعریف (۲۳). فرض کنید $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ اعدادی حقیقی و $m_1, m_2, \dots, m_k$ اعداد صحیح بزرگتر از صفر باشند. اگر چندجمله‌ای منحصر بفرد $p(x)$ از درجه $m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1$ را بتوان به گونه‌ای یافت که یک جواب برای مساله درونیابی

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad 1 \leq i \leq k, \quad 0 \leq j \leq m_i - 1 \quad (1-3)$$

باشد، آنگاه می‌گویند $p(x) - f(x)$ در x_i یک صفر از مرتبه m_i دارد و $p(x)$ را چندجمله‌ای درونیاب هریت تابع f در نقاط گره x_i می‌نامند.

۱-۳-۳ قضیه (۲۳). (وجود و منحصر بفردی) اعداد حقیقی $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ و اعداد صحیح مثبت $m_1, m_2, \dots, m_k$ مفروضند. چندجمله‌ای منحصر بفرد $p(x)$ از درجه مساوی یا کمتر از $m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1 = N$ به گونه‌ای وجود دارد که در هر گره $x_i, i = 1, 2, \dots, k$ ، مساله درونیابی (۱-۳) را حل می‌کند که f تابعی مشتق پذیر از مرتبه $m_i - 1$ در هر گره x_i می‌باشد.

اثبات. فرض کنید $N = m_1 + m_2 + \dots + m_k - 1$. چندجمله‌ای $p(x) = \sum_{i=0}^N a_i x^i$ را به گونه‌ای می‌یابیم که در هر نقطه‌ی $x_i, 1 \leq i \leq k$ ، داشته باشیم

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad 0 \leq j \leq m_i - 1. \quad (2-3)$$

بنابراین $N + 1$ مجهول a_i را که $0 \leq i \leq N$ می‌یابیم. i را اختیار نموده و بعد از این ثابت فرض می‌کنیم. به ازای هر یک از مجهولات مساله، بنابه شرایط (۲-۳)، تعداد m_i معادله خطی برقرار می‌شود.

فصل ۳. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای فازی

به عنوان مثال $p''(x_2) = f''(x_2)$ نتیجه می‌دهد:

$$N(N-1)x_2^{N-2}a_N + (N-1)(N-2)x_2^{N-3}a_{N-1} + \dots + a_2 = f''(x_2)$$

حال در هر یک از گره‌های x_i ، به تعداد m_i معادله داریم که برای $N+1$ مجهول $a_0, a_1, \dots, a_N$ در

کل $m_1 + m_2 + \dots + m_k = N+1$ طرفی می‌شود. از طرفی

بنابراین به تعداد مجهولات، معادله خطی موجود است. برای وجود جواب منحصر بفرد مساله، بایستی

ثابت شود که ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی حاصل نامنفرد است. برای ساده نگاری دستگاه

معادلات را به شکل ماتریسی می‌نویسیم، $AY = b$ که $Y = (a_N, a_{N-1}, \dots, a_0)^T$ و

$$b = (f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(m_1-1)}(x_1), f(x_2), \dots, f^{(m_k-1)}(x_k))^T.$$

کافیست نشان دهیم معادله ماتریسی $AY = 0$ دارای جواب بدیهی $a_N = a_{N-1} = \dots = a_0 = 0$ است.

می‌باشد تا نتیجه شود که ماتریس A نامنفرد است. برای این منظور بدون خلل در کلیت مساله فرض

کنید $f(x) \equiv 0$. این فرض به معنی آن است که در جستجوی چندجمله‌ای $p(x)$ هستیم به طوری که به

ازای هر گره x_i ،

$$p^{(j)}(x_i) = 0, \quad 0 \leq j \leq m_i - 1.$$

می‌دانیم اگر یک چندجمله‌ای از درجه N ، صفری مانند $x = r$ داشته باشد که در آن مشتقات چندجمله‌ای

تا مرتبه ℓ ام صفرند آنگاه یا $x = r$ یک ریشه‌ی تکراری از مرتبه $\ell + 1$ است یا چندجمله‌ای معادل صفر

می‌باشد. به ویژه در مورد $p(x) = \alpha(x - r)^{\ell+1}q(x)$ که $q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر یا

مساوی $N - (\ell + 1)$ و α عددی ثابت است، ممکن است $p(x)$ معادل صفر باشد. بنابراین هر x_i یک

ریشه تکراری از مرتبه m_i می‌باشد و $p(x)$ را می‌توان چنین نوشت

$$p(x) = \alpha(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$$

اگر $\alpha \neq 0$ ، $p(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $N+1$ خواهد بود در حالیکه بنابه فرض یک چندجمله‌ای

از درجه N می‌باشد. لذا $\alpha = 0$ و از آنجا نتیجه می‌شود هرگاه $f(x) \equiv 0$ آنگاه $p(x) \equiv 0$. حال

$a_N = a_{N-1} = \dots = a_0 = 0$ و لذا دستگاه معادلات $AY = 0$ تنها یک جواب بدیهی دارد. بنابراین

ماتریس A نامنفرد است و حکم مساله برقرار می‌باشد. $\square$

۴-۳ چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای

افزودن بر تعداد نقاط درونیابی و بالا بردن درجه چندجمله‌ای درونیاب یا استفاده از گره‌های متساوی الفاصله دلیلی بر دقت بالای درونیابی نمی‌باشد. درواقع مثالی مانند پدیده‌ی رونگه-مری (۲-۳) نشان می‌دهد درونیابی توسط چندجمله‌ای‌های از درجه بالا و بر روی تعداد زیادی نقاط متساوی الفاصله دارای خطایی قابل توجه است، به ویژه در نقاط انتهایی دو سر فاصله درونیابی. از طرف دیگر استفاده از درونیاب‌هایی مانند هرमित کامل (۳-۳) بسیار وقت‌گیر بوده و محاسبات فراوانی را می‌طلبد. بنابراین برای ارتقاء درونیابی دو راه پیشنهاد می‌شود، یکی استفاده از چندجمله‌ای‌های درونیاب قطعه‌ای با درجه کم و دیگری استفاده از نقاط درونیابی که متساوی الفاصله نباشند.

یک مزیت استفاده از درونیاب قطعه‌ای آنست که خطا همواره با افزایش تعداد نقاط درونیابی به طور یکنواخت به صفر میل می‌کند [۲۳] حتی برای درونیاب‌های با درجه کم. از طرفی دیگر استفاده از نقاط درونیاب متساوی الفاصله در عمل بسیار مورد توجه است و در اندازه‌گیری خطای درونیابی بکار می‌رود. بنابراین راه حل اول یعنی استفاده از چندجمله‌ای‌های درونیاب قطعه‌ای بخصوص با درجه کم بر روی تعداد زیادی از نقاط درونیاب، جایگزینی مناسب برای استفاده از درونیاب‌های با درجه بالا بر روی همان نقاط می‌باشد.

۳-۴-۱ تعریف (۲۳). افراز $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ برای بازه $I = [a, b]$ و عدد

صحیح مثبت m را درنظر بگیرید. در صورتی که در هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، $1 \leq i \leq n$ ، چندجمله‌ای

هرमित $p_i(x)$ از درجه $2m - 1$ به گونه‌ای ساخته شود که یک حل برای مساله درونیابی

$$p^{(j)}(x_{i-1}) = f^{(j)}(x_{i-1})$$

فصل ۳. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای فازی

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad , \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad (3-3)$$

باشد، آنگاه چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای از درجه $2m-1$ برای تابع f با $s(x)$ نشان داده و تعریف می‌شود:

$$s(x) = p_i(x) \quad , \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4-3)$$

چون مشتقات متوالی p_{i-1}, p_i تا مرتبه $(m-1)$ ام در x_i ، $1 < i < n$ ، با هم برابرند بنابراین از قیود (۳-۳) واضح است که $s \in C^{m-1}[a, b]$.

۳-۴-۱ قضیه (۲۳). چندجمله‌ای قطعه‌ای $s(x)$ و مشتقات متوالی آن تا مرتبه $2m-2$ در $I = [a, b]$ به طور یکنواخت به تابع f همگرا می‌باشند.

پایه‌های نظری روشی که برای ساختن چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای بکار می‌بریم مبتنی بر مفهوم فضای خطی و استوار بر پایه‌های اصلی مربوط به آن فضا می‌باشد.

اگر m عدد دلخواه مثبت و $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ افزای برای بازه $I = [a, b]$ باشد، مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های هرमित قطعه‌ای از درجه حداکثر $2m-1$ بر I یک فضای خطی تشکیل می‌دهند که با $H_{2m-1}(\Delta; I)$ نشان می‌دهیم و فضای $m(n+1)$ بعدی می‌باشد.

۳-۴-۲ تعریف (۳۰). فضای خطی $H_{2m-1}(\Delta; I)$ مجموعه‌ای شامل تمام توابع چندجمله‌ای قطعه‌ای حقیقی $s(x)$ روی I از درجه حداکثر $2m-1$ می‌باشد به طوری که $s \in C^{m-1}(I)$. تابع مرتبط با $s(x)$ روی بازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، $1 \leq i \leq n$ با $s_i(x)$ نشان داده می‌شود که یک چندجمله‌ای هرमित قطعه‌ای از درجه $2m-1$ و به طور پیوسته مشتق‌پذیر تا مرتبه $m-1$ می‌باشد.

۳-۴-۳ قضیه (۲۳). فرض کنید $N = m(n+1)$ ، $\phi_N, \dots, \phi_2, \phi_1$ یک مبنا برای $H_{2m-1}(\Delta; I)$ باشد. چندجمله‌ای درونیاب

$$s(x) = \sum_{i=0}^N c_i \phi_i(x) \quad (5-3)$$

به طور منحصر بفرد وجود دارد به طوری که

$$D^k s(x_i) = D^k f(x_i), \quad 0 \leq K \leq m-1, \quad 0 \leq i \leq n, \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k} \quad (۶-۳)$$

چندجمله‌ای درونیاب $s(x)$ ، درونیاب هرmit قطعه‌ای تابع f در نقاط درونیاب x_i و با قیود (۶-۳) می‌باشد.

وجود و منحصر بفردی درونیاب هرmit کامل در مرجع [۱۲] ارائه شده است. از آنجا که قیود (۶-۳)

براساس افراز Δ روی بازه I حالت خاصی از درونیاب هرmit کامل اند بنابراین هر تابع متعلق به فضای

خطی $C^{m-1}(I)$ مانند f دارای درونیاب منحصر بفردی متعلق به فضای $H_{2m-1}(\Delta; I)$ می‌باشد [۳۰]

مجموعه $B = \{\phi_{ik}(x)\}_{i=0, k=0}^{n, m-1}$ یک پایه اصلی ویژه برای $H_{2m-1}(\Delta; I)$ است [۳۰] و تابع پایه‌ی

$\phi_{ik}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^\ell \phi_{ik}(x_j) = \delta_{k\ell} \delta_{ij}, \quad 0 \leq \ell \leq m-1, \quad 0 \leq j \leq m-1, \quad D^\ell = \frac{d^\ell}{dx^\ell} \quad (۷-۳)$$

از مساله درونیابی (۷-۳) می‌توان دید که $\phi_{i0}(x_i) = 1$ ، $\phi_{i0}(x_j) = 0$ به ازای تمامی گره‌های x_j

برقرار است و همچنین خارج بازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، $1 \leq i \leq n$ همواره $s(x)$ مقدار صفر اختیار می‌کند لذا به

ازای تمامی x هایی که $x_0 \leq x \leq x_{i-1}$ ، $x_0 \leq x \leq x_n$ داریم، $\phi_{i0} \equiv 0$. برای چندجمله‌ای درجه

$(2m-1)$ ام $\phi_{i1}(x)$ ، مشتق اول در x_i برابر یک است ($\phi'_{i1}(x_i) = 1$) ولی در تمام گره‌های دیگر بجز

x_i داریم $\phi'_{i1}(x_j) = 0$ ، $i \neq j$. بعلاوه، بدلیل اینکه تابع $\phi_{i1}(x)$ در خارج از بازه $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ مقادیر

صفر اختیار می‌کند بنابراین بایستی این تابع به ازای تمامی x هایی که $x \leq x_{i-1}$ ، $x \geq x_{i+1}$ برابر

صفر باشد. برای اطلاعات بیشتر می‌توان به مراجع [۱۱، ۲۳، ۳۱] مراجعه نمود. به دلایل مشابه می‌توان

$\phi_{i\setminus}$ را چنین نشان داد:

$$\phi_{i\setminus}(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})^m (x - x_i) \sum_{j=0}^{m-2} a_j x^j & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ (x - x_{i+1})^m (x - x_i) \sum_{j=0}^{m-2} b_j x^j & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{در سایر نقاط} \end{cases} \quad (۸-۳)$$

برای ساختن چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای فازی براساس توابع پایه‌ای اصلی به چند ویژگی از اعضای B نیاز داریم که در زیر اثبات می‌کنیم.

۳-۴-۳ قضیه. فرض کنید $\phi_{ik} \in B$ و در قیود (۶-۳) صدق کند. بنابراین داریم:

$$\forall x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad \phi_{i0}(x) + \phi_{i+10}(x) \geq 1 \quad (i)$$

ii) در هر گره x_i ، علامت $\phi_{i\setminus}$ تغییر می‌کند. در هر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، مقادیر $\phi_{i\setminus}$ منفی یا صفر و

در هر زیربازه $[x_i, x_{i+1}]$ ، مثبت یا صفر می‌باشد که $i = 1, 2, \dots, n-1$.

iii) سایر اعضای B در فاصله I مقادیر نامنفی اختیار می‌کنند.

اثبات. با توجه به قیود (۷-۳)، چندجمله‌ای $\phi_{i0}(x) + \phi_{i+10}(x)$ در بازه $[x_{i-1}, x_{i+2}]$ از درجه

$2m-1$ می‌باشد و داده‌های (x_j, f_j) را که به ازای $j = i, i+1$ داریم $f_j = 1$ ، درونیابی می‌کند و در

سایر گره‌های افزاز Δ مقدار صفر می‌گیرد. فرض کنیم $0 < i < n-1$ و به ازای $x \in (x_i, x_{i+1})$ ،

$\phi_{i0}(x) + \phi_{i+10}(x) < 1$. با استفاده از قضیه مقدار میانگین (قضیه ۳-۹-۲) مشتق اول این تابع

یک صفر در (x_i, x_{i+1}) دارد. همچنین گره‌های x_{i+1}, x_i هریک صفرهای مرتبه‌ی $(m-2)$ ام و هر

یک از گره‌های x_{i+2}, x_{i-1} نیز یک صفر $\phi_{i0}(x) + \phi_{i+10}(x)$ می‌باشند، بنابراین در بازه $[x_{i-1}, x_{i+2}]$

حداقل $2m-1$ صفر دارد که یک تناقض می‌باشد. حالت‌های $i = 0$ ، $i = n-1$ نیز اثباتی مشابه

دارند.

براساس نمایش (۸-۳) و قیود (۷-۳) چندجمله‌ای $\phi_{i\setminus}$ از درجه $2m-1$ می‌باشد و تنها یک نقطه‌ی

مینیم روی $[x_{i-1}, x_i]$ و یک نقطه ماکزیمم روی $[x_i, x_{i+1}]$ دارد.

فرض کنیم هریک از دو نقطه مینیمم و ماکزیمم بیش از یکی باشند، بنابراین از قضیه مقدار میانگین، مشتق اول $\phi_{i1}(x)$ در (x_{i-1}, x_i) حداقل سه صفر و در (x_i, x_{i+1}) نیز حداقل سه صفر دیگر دارد. همچنین مشتق دوم آن دو صفر از مرتبه $(m-2)$ ام در x_{i+1}, x_{i-1} دارد. وجود حداقل $2m+2$ صفر برای مشتق $\phi_{i1}(x)$ یک تناقض است. لذا $\phi'_{i1}(x)$ تنها یک صفر در هر یک از بازه‌های $(x_{i-1}, x_i), (x_i, x_{i+1})$ دارد. از طرفی می‌دانیم $\phi'_{i1}(x_i) = 1$ یعنی $\phi_{i1}(x)$ در $[x_{i-1}, x_i]$ منفی یا صفر و در $[x_i, x_{i+1}]$ نامنفی است که این حکم (ii) را نتیجه می‌دهد.

اثباتی مشابه براساس تعریف توابع پایه‌ای (۷-۳) و (۸-۳) حکم (iii) را اثبات می‌کند. $\square$

با مراجعه به [۲۳، ۳۱] می‌توان دید که به ازای تابع دلخواه $f(x)$ متعلق به $C^{m-1}(I)$ ، درونیاب هرमित

قطعه‌ای آن $s(x) \in H_{2m-1}(\Delta; I)$ به طور صریح به صورت زیر بیان می‌شود:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n f^{(k)}(x_i) \phi_{ik}(x) \quad (9-3)$$

۵-۳ چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای غیرقطعی

۱-۵-۳ تعریف. برای داده‌های درونیابی فازی

$$\left\{ \left(x_i, f_i, f'_i, \dots, f_i^{(m-1)} \right) \mid f_i^{(k)} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, 0 \leq k \leq m-1, 0 \leq i \leq n \right\}$$

تابع فازی مقدار $s: I \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را که در شرایط زیر صدق کند:

$$s^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) = u_{ki} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, 0 \leq k \leq m-1, 0 \leq i \leq n$$

چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای فازی روی داده‌های مفروض می‌نامند.

۳-۵-۲ تعریف (۲۰). در صورتی که $u_{ki} = y_i^{(k)}$, $0 \leq k \leq m-1$, $0 \leq i \leq n$ اعداد حقیقی

قطعی باشند و $f^{(k)}(x_i) = \chi_{y_i^{(k)}}$, آنگاه در بازه‌های متوالی $[x_{i-1}, x_i]$, $0 \leq i \leq n$ یک چندجمله‌ای

از درجه $2m-1$ وجود دارد که در شرط $0 \leq k \leq m-1$, $0 \leq i \leq n$ صدق $s^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$

می‌کند به طوری که $s(x) = \chi_{f(x)} \forall x \in \mathbb{R}$.

درواقع در صورتی که چنین تابع فازی موجود باشد مایلیم آن را براساس چندجمله‌ای درونیاب فازی بیان

شده توسط لوئن [۲۰] ساخته و محاسبه نمائیم.

با رجوع و بررسی مراجع [۲۲، ۱۷] فرض می‌کنیم به ازای هر x متعلق به $[x_0, x_n]$ چندجمله‌ای

هرمیت قطعه‌ای فازی و $\Lambda = \{y_i^{(k)}\}_{i=0, k=0}^{n, m-1}$ باشد. آنگاه $-\alpha$ - برش‌های $s(x)$ به شکل زیر بدست

می‌آید:

$$\begin{aligned} s^\alpha(x) &= \{t \in \mathbb{R} \mid \mu_{s(x)}^{(t)} \geq \alpha\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid \exists y_i^{(k)} : \mu_{u_{ki}}^{y_i^{(k)}} \geq \alpha, 0 \leq k \leq m-1, 0 \leq i \leq n \text{ \& } s_\Lambda(x) = t\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid t = s_\Lambda(x), y_i^{(k)} \in u_{ki}^\alpha, 0 \leq k \leq m-1, 0 \leq i \leq n\} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n u_{ki}^\alpha \phi_{ik}(x). \end{aligned}$$

که در رابطه بالا

$$s_\Lambda(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n y_i^{(k)} \phi_{ik}(x)$$

چندجمله‌ای هرमित قطعه‌ای در حالت قطعی می‌باشد.

به ازای هر $[\alpha, 1]$, $0 \leq k \leq m-1$, $0 \leq i \leq n$, $\alpha \in (0, 1]$ $u_{ki}^\alpha = \mu_{ki}^{-1}[\alpha, 1]$

۳-۵-۳ تعریف. مجموعه $-\alpha$ - برش‌های $s(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$s^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n u_{ki}^\alpha \phi_{ik}(x) \quad (۱۰-۳)$$

و از آنجا فرمولی کارا برای محاسبه $s(x)$ حاصل می‌شود که برابر است با

$$s(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n u_{ki} \phi_{ik}(x). \quad (11-3)$$

اکنون برای به کارگیری چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای فازی $s(x)$ ، به روشی نیازمندیم تا هر u_{ki}^α را به ازای $\alpha \in (0, 1]$ ، $0 \leq i \leq n$ ، $0 \leq k \leq m-1$ به سادگی محاسبه کنیم. از آنجا که بازه‌ای بسته و کراندار است آن را به صورت $u_{ki}^\alpha = [\underline{u}_{ki}^\alpha, \bar{u}_{ki}^\alpha]$ نمایش می‌دهند و $\bar{u}_{ki}^\alpha$ را نقطه انتهایی بالایی و $\underline{u}_{ki}^\alpha$ را نقطه انتهایی پایینی می‌نامند. $s^\alpha(x)$ نیز به ازای هر x بازه بسته و کراندار است، بنابراین دارای نقاط انتهایی بالا و پایین می‌باشد. برای تعیین نقاط انتهایی از دو مساله بهینه‌سازی زیر بهره می‌گیریم که حل آنها نقاط انتهایی یا کرانهای بالا و پایین $s^\alpha(x)$ را مشخص می‌کند:

$$3-5-1 \text{ مسائل بهینه‌سازی. } \max \& \min \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n y_i^{(k)} \phi_{ik}(x)$$

$$\text{به‌طوری‌که } \underline{u}_{ki}^\alpha \leq y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad 0 \leq i \leq n$$

3-5-1-1 نقطه انتهایی بالایی. با استفاده از علامت ϕ_{ij} ها در قضیه 3-4-3 نقطه انتهایی بالایی برای $s^\alpha(x)$ جواب مساله زیر است:

$$\max s(x)$$

$$s.t. \quad \underline{u}_{ki}^\alpha \leq y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad 0 \leq i \leq n.$$

که جواب عبارتست از

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \bar{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik}(x) \geq 0 \\ \underline{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik}(x) < 0 \end{cases} \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad 0 \leq i \leq n$$

3-5-1-2 نقطه انتهایی پایینی. این نقطه برای $s^\alpha(x)$ جواب مساله زیر است:

$$\min s(x)$$

$$s.t. \quad \underline{u}_{ki}^\alpha \leq y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad 0 \leq i \leq n$$

جواب مساله مینیمم سازی عبارتست از

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \underline{u}_{k_i}^\alpha, & \phi_{ik}(x) \geq \circ \\ \bar{u}_{k_i}^\alpha, & \phi_{ik}(x) < \circ \end{cases} \quad \circ \leq k \leq m, \circ \leq i \leq n$$

در ادامه طی قضیه‌ای، حدودی برای طول فاصله‌ی $s^\alpha(x)$ تعیین می‌کنیم که در مطالعه نوسان نمودارها و رسم آنها مفید است.

۳-۵-۱ قضیه. فرض کنید $s(x) = \sum_{k=\circ}^{m-1} \sum_{i=\circ}^n u_{k_i} \phi_{ik}(x)$ چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای

فازی باشد، آنگاه به ازای هر $\alpha \in [\circ, 1]$ ، $x \in [x_i, x_{i+1}]$ و $i \in \{\circ, 1, \dots, n-1\}$ نامساوی زیر

برقرار است

$$\text{len } s^\alpha(x) \geq \min \{ \text{len } s^\alpha(x_i), \text{len } s^\alpha(x_{i+1}) \}$$

که در آن

$$s^\alpha(x) = [\underline{s}^\alpha(x), \bar{s}^\alpha(x)], \quad \text{len } s^\alpha(x) = \bar{s}^\alpha(x) - \underline{s}^\alpha(x).$$

اثبات. طبق قضیه ۳-۴-۳ و نمایش (۳-۱۰) برای $\alpha -$ برش‌های $s(x)$ می‌توان نوشت:

$$s^\alpha(x_i) = u_{\circ_i}^\alpha, \quad s^\alpha(x_{i+1}) = u_{\circ_{i+1}}^\alpha,$$

و بنابراین

$$\text{len } s^\alpha(x_i) = \text{len } u_{\circ_i}^\alpha, \quad \text{len } s^\alpha(x_{i+1}) = \text{len } u_{\circ_{i+1}}^\alpha.$$

چون جمع نمودن بازه‌ها، باعث کم شدن طول بازه حاصل نمی‌گردد از (۳-۱۰) می‌نویسیم:

$$s^\alpha(x) = \sum_{k=\circ}^{m-1} \sum_{i=\circ}^n u_{k_i}^\alpha \phi_{ik}(x)$$

و از آنجا داریم

$$\text{len } s^\alpha(x) = \text{len } \sum_{k=\circ}^{m-1} \sum_{j=\circ}^n u_{k_j}^\alpha \phi_{jk}(x) \geq \sum_{k=\circ}^{m-1} \sum_{j=\circ}^n |\phi_{jk}(x)| \text{len } u_{k_j}^\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \sum_{j=0}^n |\phi_{j^*}(x)| \text{len } u_{j^*}^\alpha \\
 &\geq |\phi_{i^*}(x)| \text{len } u_{i^*}^\alpha + |\phi_{(i+1)^*}(x)| \text{len } u_{(i+1)^*}^\alpha \\
 &\geq \min \{ \text{len } u_{i^*}^\alpha, \text{len } u_{(i+1)^*}^\alpha \} (|\phi_{i^*}(x)| + |\phi_{(i+1)^*}(x)|) \\
 &\geq \min \{ \text{len } u_{i^*}^\alpha, \text{len } u_{(i+1)^*}^\alpha \} \\
 &= \min \{ \text{len } s^\alpha(x_i), \text{len } s^\alpha(x_{i+1}) \}.
 \end{aligned}$$

□

طبق حکم این قضیه، در نمودار $s^\alpha(x)$ و بین هر دو گره x_i, x_{i+1} ، طول فاصله بین دو پهنا انتهایی باید از طول بازه‌ها $u_{i^*}^\alpha, u_{(i+1)^*}^\alpha$ ناکمتر باشد و این آزمون بر صحت محاسبات می‌باشد.

برای ساده شدن استفاده از روابط (۳-۱۰) و (۳-۱۱) و اینکه نیازی به محاسبات پیچیده در بکار گرفتن پی در پی اصل گسترش نداشته باشیم، اعداد فازی u_{ki} را به صورت اعداد $L-L$ فازی مثلی در تعریف ۳-۱-۳-۲ در نظر می‌گیریم.

در صورتی که به ازای $0 \leq i \leq n$ ، $0 \leq k \leq m-1$ ، $u_{ki} = (m_{ki}, \ell_{ki}, r_{ki})$ عددی $L-L$ فازی باشد آنگاه $s(x)$ در (۳-۱۱) نیز به ازای هر x ، عددی $L-L$ فازی و به صورت $s(x) = (m(x), \ell(x), r(x))$ خواهد بود.

۳-۵-۲ قضیه. فرض کنید $0 \leq i \leq n$ ، $0 \leq k \leq m-1$ ، $u_{ki} = (m_{ki}, \ell_{ki}, r_{ki})$ اعداد $L-L$ فازی مثلی باشند. در این صورت $s(x)$ ، چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای فازی نیز به ازای هر x یک عدد $L-L$ فازی مثلی می‌باشد.

اثبات. تکیه‌گاه عدد $L-L$ فازی مثلی $u = (m, \ell, r)$ ، بازه بسته $[m-\ell, m+r]$ می‌باشد. بنابراین به ازای هر x, u_{ki} را در رابطه (۳-۱۱) چنین می‌توان نوشت:

$$s(x) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n u_{ki} \phi_{ik}(x) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sum_{\phi_{ik} \geq \circ} \sum (m_{ki} - l_{ki}) \phi_{ik}(x) + \sum_{\phi_{ik} < \circ} \sum (m_{ki} + r_{ki}) \phi_{ik}(x), \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\phi_{ik} \geq \circ} \sum (m_{ki} + r_{ki}) \phi_{ik}(x) + \sum_{\phi_{ik} < \circ} \sum (m_{ki} - l_{ki}) \phi_{ik}(x) \right] \\
 &= \left[\sum_{k=\circ}^{m-\setminus} \sum_{i=\circ}^n m_{ki} \phi_{ik}(x) - \left(\sum_{\phi_{ik} \geq \circ} \sum l_{ki} \phi_{ik}(x) - \sum_{\phi_{ik} < \circ} \sum r_{ki} \phi_{ik}(x) \right) \right. \\
 &\quad \left. , \sum_{k=\circ}^{m-\setminus} \sum_{i=\circ}^n m_{ki} \phi_{ik}(x) + \left(\sum_{\phi_{ik} \geq \circ} \sum r_{ki} \phi_{ik}(x) - \sum_{\phi_{ik} < \circ} \sum l_{ki} \phi_{ik}(x) \right) \right] \\
 &= (m(x) - l(x), m(x) + r(x)). \quad (۱۲-۳)
 \end{aligned}$$

□

به بیان معادل تساوی (۱۲-۳) یعنی به ازای هر x ، هرکدام از سه مولفه عدد $L - L$ فازی مثلثی

$s(x) = (m(x), l(x), r(x))$ برابر است با:

$$\begin{aligned}
 m(x) &= \sum_{k=\circ}^{m-\setminus} \sum_{i=\circ}^n m_{ki} \phi_{ki}(x), \\
 l(x) &= \sum_{\phi_{ik} \geq \circ} \sum l_{ki} \phi_{ik}(x) - \sum_{\phi_{ik} < \circ} \sum r_{ki} \phi_{ik}(x), \\
 r(x) &= \sum_{\phi_{ik} \geq \circ} \sum r_{ki} \phi_{ik}(x) - \sum_{\phi_{ik} < \circ} \sum l_{ki} \phi_{ik}(x).
 \end{aligned}$$

فصل چهارم

چند جمله‌ای درون‌یاب هر میت قطعه‌ای خطی، مکعبی و
درجه پنجم فازی

۱-۴ مقدمه

در فصل قبل پاره‌ای خواص چندجمله‌ای‌های درونیاب هرमित قطعه‌ای از درجه دلخواه بررسی شدند. از آنجا که داده بیشتری برای بیان چندجمله‌ای‌های درجه بالا نیاز است این چندجمله‌ای‌ها انعطاف‌پذیری بیشتری نسبت به چندجمله‌ای‌های درجات پایین‌تر دارند اما هزینه استفاده از چندجمله‌ای‌های درجه بالا پیچیدگی محاسبات است.

این فصل خصوصیات از چندجمله‌ای‌های درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم بیان می‌کند. چندجمله‌ای‌های درجه دوم اساساً تنها به شکل سهمی ظاهر می‌شوند. و نیز خطوط مستقیم هم تنوعی در خم و شکل خود ندارند. چندجمله‌ای‌های درجه سوم خم‌هایی با تنوع ترسیمی بیشتر نسبت به درجات اول و دوم می‌باشند و حالاتی از سهمی و خط راست نیز در آنها وجود دارد که بیشتر در حل عددی معادلات انتگرال و مشتقات جزئی، نظریه تقریب و مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با افزایش دادن درجه چندجمله‌ای درونیاب به درجه پنجم و فراتر رفتن از حالت مکعبی ساختن خم‌های تکه‌ای مسیر می‌شود که مراتب بالاتری از هموار بودن را دارا می‌باشند. بعد از بیان حالت فازی هر یک از سه درونیاب یاد شده، در انتهای فصل مثال‌هایی برای تشریح هر یک از حالات ارائه می‌شود.

۲-۴ چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی فازی

۱-۲-۴ تعریف. فرض کنید $\{(x_i, f_i) \mid f_i \in \mathbb{R}_F, 0 \leq i \leq n\}$ داده‌های فازی باشند و $I = [a, b]$,

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ تابع فازی مقدار $s : I \rightarrow \mathbb{R}_F$ را که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$s(x_i) = f(x_i) = u_i \in \mathbb{R}_F, \quad 0 \leq i \leq n$$

چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی فازی می‌نامند.

۲-۲-۴ تعریف. فرض کنید $u_i = y_i$ اعداد حقیقی قطعی باشند و $f(x_i) = \chi_{y_i}$ تابع

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هر میت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

در بازه‌های متوالی $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$ یک چندجمله‌ای خطی است

$$s(x) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n$$

۴-۲-۳ تعریف. طبق اصل گسترش (تعریف ۲-۶-۱) تابع عضویت $s(x)$ در تعریف ۴-۲-۱ به

ازای هر x متعلق به $I = [a, b]$ چنین است:

$$\mu_{s(x)}^t = \begin{cases} \sup \min \{ \mu_{u_0}^{y_0}, \dots, \mu_{u_n}^{y_n} \} & , s_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x) = t \\ 0 & , s_{y_0, y_1, \dots, y_n}^{-1}(x) = \emptyset \end{cases}$$

۴-۲-۴ تعریف. α -برش‌های تابع فازی $s(x)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} s^\alpha(x) &= \{ t \in \mathbb{R} \mid \mu_{s(x)}^{(t)} \geq \alpha \} \\ &= \{ t \in \mathbb{R} \mid \exists y_i : \mu_{u_i}^{y_i} \geq \alpha, i = 0, 1, \dots, n, s(x) = t \} \\ &= \{ t \in \mathbb{R} \mid t = s(x) = s_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x), y_i \in u_i^\alpha, i = 0, 1, \dots, n \} \\ &= \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = s_{y_0, y_1, \dots, y_n}(x) = \sum_{i=0}^n y_i \phi_i(x), y_i \in u_i^\alpha, i = 0, 1, \dots, n \right\} \\ &= \sum_{i=0}^n u_i^\alpha \phi_i(x) \end{aligned}$$

درواقع در رابطه (۱۱-۳) با قرار دادن $m = 1$ و محاسبه درونیاب قطعه‌ای خطی فازی به عنوان اولین

حالت از روش ارائه شده براساس (۱۱-۳) و به ازای مجموعه‌ی مفروض داده‌های فازی

$$\{(x_i, f_i) \mid f_i \in \mathbb{R}_F, 0 \leq i \leq n\}$$

بدست می‌آید

$$s(x) = \sum_{i=0}^n u_{0i} \phi_{i0}(x) \quad (1-4)$$

که در آن $u_{0i} = f_i, 0 \leq i \leq n$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

۴-۲-۱ قضیه (۳۰). یک مجموعه از پایه‌های اصلی برای فضای خطی $(n+1)$ بعدی $H_1(\Delta; I)$

عبارتست از $B = \{\phi_{i\circ}(x)\}_{i=\circ}^n$ که هریک از پایه‌های $\phi_{i\circ}(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_{i\circ}(x_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \circ \leq i, j \leq n. \quad (۲-۴)$$

۴-۲-۵ تعریف. از رابطه (۲-۴)، پایه‌های فضای خطی $(n+1)$ بعدی $H_1(\Delta; I)$ به صورت زیر

بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi_{\circ\circ}(x) &= \begin{cases} \circ, & x \geq x_1 \\ \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_\circ}\right), & x_\circ \leq x \leq x_1 \end{cases} \\ \phi_{i\circ}(x) &= \begin{cases} \circ, & x \leq x_{i-1}, x \geq x_{i+1} \\ \left(\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right), & x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}\right), & x_i \leq x \leq x_{i+1} \end{cases} \\ \phi_{n\circ}(x) &= \begin{cases} \circ, & x \geq x_{n-1} \\ \left(\frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right), & x_{n-1} \leq x \leq x_n. \end{cases} \end{aligned}$$

چندجمله‌ای بدست آمده در (۴-۱) مشابه اسپلاین فازی از مرتبه $\ell = 2$ می‌باشد که کالوا [۱۷] معرفی

نمود زیرا اسپلاین‌های پایه و پایه‌های اصلی در (۴-۲) توابعی یکسانند.

۴-۲-۶ تعریف (۱۷). درونیاب اسپلاین فازی fs از مرتبه ℓ به صورت زیر تعریف می‌شود. در

صورتی که $fs^\alpha(x)$ -برش درونیاب fs باشد آنگاه

$$fs^\alpha(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = s_{d_\circ, \dots, d_n}(x) \quad , \quad d_j \in u_i^\alpha = [a_i^\alpha, b_i^\alpha]\}$$

که در آن $s_{d_\circ, \dots, d_n} \in S_\ell$ اسپلاین قطعی است که داده‌های $n, \dots, \circ$ و i و (x_i, d_i) را درونیابی می‌کند.

اگر $s_i \in S_\ell$ داده‌های $n, \dots, 1, \circ$ ، j ، (x_j, f_j) را درونیابی کند که هرگاه $i = j$ ، $f_j = 1$ و در

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

غیراینصورت $f_j = 0$ آنگاه $s_{d, \dots, d_n}(x) = \sum_{i=0}^n d_i s_i(x)$ نتیجه می‌دهد $f_s^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x) u_i^\alpha$

و بنابراین بدست می‌آید

$$f_s(x) = \sum_{i=0}^n s_i(x) u_i. \quad (3-4)$$

از رابطه (۳-۴) تابع f_s در $[x_0, x_n]$ پیوسته است و اگر u_i ها اعداد $L - L$ فازی باشند، $f_s(x)$ نیز به ازای هر x متعلق به $[x_0, x_n]$ عددی $L - L$ فازی است.

در صورتی که $\ell = 2$ فرض شود، درونیاب خطی قطعه‌ای یا اسپلاین خطی بدست می‌آید.

به ازای x متعلق به (x_{i-1}, x_{i+1}) ، $s_i(x) > 0$ و به ازای x هایی که متعلق به $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ نیستند،

$s_i(x) = 0$ لذا به ازای هر x در فاصله $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ و $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$f_s(x) = \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} u_i + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} u_{i+1} \quad (4-4)$$

حال براساس α - برش‌ها می‌توان نوشت:

$$\underline{s}^\alpha(x) = \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} a_i^\alpha + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} a_{i+1}^\alpha \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

و

$$\bar{s}^\alpha(x) = \frac{(x_{i+1} - x)}{(x_{i+1} - x_i)} b_i^\alpha + \frac{(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} b_{i+1}^\alpha \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

که $f_s^\alpha(x) = [\underline{s}^\alpha(x), \bar{s}^\alpha(x)]$ ، $\forall \alpha \in [0, 1]$

۴-۲-۲ قضیه. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی فازی و اسپلاین فازی مرتبه $l = 2$ روی

داده‌های فازی مقدار $\{(x_i, f_i) \mid f_i \in \mathbb{R}_F, i = 0, 1, \dots, n\}$ توابعی یکسانند.

اثبات. با توجه به پایه‌های بکار رفته در دو درونیاب، رابطه (۴-۴) و تعریف ۴-۲-۵ حکم اثبات

□

می‌شود.

مثال مربوط به چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی فازی به همراه رسم نمودار مربوط در مثال

۴-۵-۱ آمده است.

۳-۴ چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای مکعبی فازی

در بخش قبل چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی فازی براساس چندجمله‌ای‌های لاگرانژ قطعه‌ای خطی ساخته شدند. اما در حالت قطعی، وصل شدن چندجمله‌ای‌های لاگرانژ درجه اول و تشکیل چندجمله‌ای لاگرانژ قطعه‌ای خطی حاوی زوایا و گوشه‌های تیز در گره‌های محل اتصال می‌باشد. یک راه برای ارتقاء هموار بودن چندجمله‌ای قطعه‌ای و غلبه بر مشکل، استفاده از چندجمله‌ای‌های درونیاب هرमित قطعه‌ای می‌باشد که از اتصال چندجمله‌ای‌های هرमित در محل گره‌ها به دست می‌آیند.

۳-۴-۱ قضیه. چندجمله‌ای درجه سوم حقیقی $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ وجود دارد که

مسئله درونیابی

$$p(a) = f(a) \quad , \quad p'(a) = f'(a)$$

$$p(b) = f(b) \quad , \quad p'(b) = f'(b)$$

را به طور یکتا حل می‌کند.

اثبات. یک روش ساده برای اثبات وجود $p(x)$ ساختن آن می‌باشد

$$p(x) = p(a)\phi_1(x) + p(b)\phi_2(x) + p'(a)\psi_1(x) + p'(b)\psi_2(x)$$

که در آن

$$\phi_1(x) = \frac{(x - x_2)^2[(x_1 - x_2) + 2(x_1 - x)]}{(x_1 - x_2)^3}$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x - x_1)^2[(x_2 - x_1) + 2(x_2 - x)]}{(x_2 - x_1)^3}$$

(۴-۵)

$$\psi_1(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2}$$

$$\psi_2(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)}{(x_1 - x_2)^2}$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

و $x_1 = a$ و $x_2 = b$. باید توجه نمود که

$$\begin{aligned}\phi_i(x_j) &= \delta_{ij} & 1 \leq i, j \leq 2 \\ \phi'_i(x_j) &= 0,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\psi_i(x_j) &= 0 \\ \psi'_i(x_j) &= \delta_{ij}, & 1 \leq i, j \leq 2.\end{aligned}$$

منحصربفرد بودن $p(x)$ از قضیه رُل به دست می‌آید. در صورتی که چندجمله‌ای درجه سوم درونیاب

دیگری به جز $p(x)$ موجود باشد تفاضل دو درونیاب را $s(x)$ نامیده و از قضیه ۲-۹-۲ مشتق اول

$s(x)$ دارای سه صفر می‌باشد که یک تناقض است و بنابراین $p(x)$ منحصربفرد می‌باشد. $\square$

۴-۳-۱ تعریف. فرض کنید $f \in C^1[a, b]$ و اعداد حقیقی $x_1 < x_2$ متعلق به $[a, b]$ باشند، آنگاه

چندجمله‌ای $p(x)$ که به صورت

$$p(x) = \sum_{i=1}^2 \phi_i(x)f(x_i) + \sum_{i=1}^2 \psi_i(x)f'(x_i)$$

تعریف می‌شود، چندجمله‌ای درونیاب هرमित مکعبی با نقاط درونیاب x_1 و x_2 برای f می‌باشد و در

شرایط زیر صدق می‌کند

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 1, 2.$$

۴-۳-۲ قضیه. فرض کنید $i = 1, 2$ ، $\phi_i(x)$ و $\psi_i(x)$ توابع تعریف شده در روابط (۴-۵) باشند. در

این صورت

$$\forall x \in [x_1, x_2], \quad \phi_1(x) + \phi_2(x) = 1 \quad (i)$$

$$\forall x \in (x_1, x_2), \quad \phi_i(x), \psi_1(x) > 0, \quad i = 1, 2, \quad \psi_2(x) < 0 \quad (ii)$$

اثبات. با رجوع به روابط (۴-۵) اثبات بدیهی می‌باشد. $\square$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

۴-۳-۲ تعریف. فرض کنید $I = [x_1, x_2]$ که $x_1 < x_2$ اعدادی حقیقی‌اند. به ازای داده‌های

$$\{(x_i, f_i, f'_i) \mid f_i^{(k)} \in \mathbb{R}_F, k = 0, 1, i = 1, 2\},$$

تابع فازی مقدار $s : I \rightarrow \mathbb{R}_F$ که در رابطه $s^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) = u_{ki} \in \mathbb{R}_F$ صدق می‌کند،

چندجمله‌ای مکعبی فازی روی I نامیده می‌شود که در آن اگر $u_{ki} = y_i^{(k)}$ اعداد حقیقی بوده و

$$s(x) = \chi_{f(x)}, \mathbb{R} \text{ به } x \text{ متعلق به } s^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, f^{(k)}(x_i) = \chi_{y_i^{(k)}}.$$

۴-۳-۳ تعریف. به ازای هر x متعلق به $[x_1, x_2]$ ، تابع عضویت چندجمله‌ای مکعبی فازی $s(x)$ تعریف

می‌شود

$$\mu_{s(x)}^t = \begin{cases} \sup \min \{\mu_{u_{\circ 1}}^{y_1}, \mu_{u_{\circ 2}}^{y_2}, \mu_{u_{11}}^{y'_1}, \mu_{u_{12}}^{y'_2}\} & , t = s_{y_1, y_2, y'_1, y'_2}(x) \\ 0 & , s_{y_1, y_2, y'_1, y'_2}^{-1}(t) = \emptyset. \end{cases}$$

اگر فرض شود چندجمله‌ای فازی تعریف شده در ۴-۳-۳ وجود دارد آنگاه براساس مراجع [۱۷، ۲۲]،

چندجمله‌ای با استفاده از α -برش‌ها شکل می‌گیرد.

۴-۳-۴ تعریف. α -برش‌های چندجمله‌ای فازی $s(x)$ در تعریف ۴-۳-۲ به صورت زیر است

$$\begin{aligned} s^\alpha(x) &= \{t \in \mathbb{R} \mid \mu_{s(x)}^t \geq \alpha\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid \exists y_i^{(k)} : \mu_{u_{ki}}^{y_i^{(k)}} \geq \alpha, k = 0, 1, i = 1, 2, s(x) = t\} \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid t = s(x) = s_{y_1, y_2, y'_1, y'_2}(x), y_i^{(k)} \in u_{ki}^\alpha, k = 0, 1, i = 1, 2\} \\ &= \sum_{i=1}^2 (u_{\circ i}^\alpha \phi_i(x) + u_{1i}^\alpha \psi_i(x)) \end{aligned} \quad (۴-۶)$$

که در آن $s_{y_1, y_2, y'_1, y'_2}(x) = \sum_{i=1}^2 (y_i \phi_i(x) + y'_i \psi_i(x))$ چندجمله‌ای هرमित مکعبی در تعریف ۴-۳-۱

می‌باشد.

براساس آنچه گفته شد و از رابطه (۴-۶) نتیجه می‌شود یک روش کارای ساده برای نمایش $s(x)$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

چندجمله‌ای درونیاب مکعبی فازی به صورت زیر است

$$s(x) = \sum_{i=1}^2 (u_{\circ i} \phi_i(x) + u_{1i} \psi_i(x)). \quad (۷-۴)$$

۲-۳-۴ مسائل بهینه‌سازی. برای تعیین $s^\alpha(x)$ در رابطه (۶-۴) و با توجه به $u_{ki}^\alpha = [\underline{u}_{ki}^\alpha, \bar{u}_{ki}^\alpha]$ مسائل

بهینه‌سازی زیر حل می‌شوند

$$\begin{aligned} \max \ \& \ \min \quad \sum_{i=1}^2 (y_i \phi_i(x) + y'_i \psi_i(x)) \\ \text{s.t.} \quad & \underline{u}_{ki}^\alpha < y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad k = \circ, 1, i = 1, 2. \end{aligned}$$

که با استفاده از قضیه ۲-۳-۴ دو مسأله بهینه‌سازی دارای جواب‌های زیر است.

۱-۲-۳-۴ نقطه انتهایی بالایی. این نقطه از حل مسأله بیشینه‌سازی بنابر قضیه ۲-۳-۴ برابر مقدار

زیر به دست آمده است

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \bar{u}_{ki}^\alpha, & (k, i) \neq (1, 2), \\ \underline{u}_{ki}^\alpha, & (k, i) = (1, 2), \end{cases} \quad k = \circ, 1, i = 1, 2$$

۲-۲-۳-۴ نقطه انتهایی پایینی. این نقطه با حل مسأله کمینه‌سازی برابر است با

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \underline{u}_{ki}^\alpha, & (k, i) = (1, 2), \\ \bar{u}_{ki}^\alpha, & (k, i) \neq (1, 2), \end{cases} \quad k = \circ, 1, i = 1, 2$$

۳-۳-۴ قضیه. فرض کنید $s(x)$ چندجمله‌ای هرमित مکعبی فازی باشد. به ازای هر α متعلق به بازه

$[\circ, 1]$ رابطه زیر برقرار است

$$\text{len } s^\alpha(x) \geq \min\{\text{len } s^\alpha(x_1), \text{len } s^\alpha(x_2)\}$$

که در آن $x \in [x_1, x_2]$.

اثبات. با استفاده از تعریف $s^\alpha(x)$ در (۶-۴) و توابع پایه‌ای در (۵-۴) داریم:

$$s^\alpha(x_1) = u_{\circ 1}^\alpha, \quad s^\alpha(x_2) = u_{\circ 2}^\alpha$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

بنابراین

$$\text{len } s^\alpha(x_1) = \text{len } u_{\circ 1}^\alpha, \quad \text{len } s^\alpha(x_2) = \text{len } u_{\circ 2}^\alpha$$

از آنجا که جمع زدن بازه‌ها، طول بازه را کاهش نمی‌دهد می‌توان از تعریف α -برش‌های $s(x)$ در (۴-۶)

نوشت

$$\begin{aligned} \text{len } s^\alpha(x) &= \text{len } \sum_{i=1}^2 u_{\circ i}^\alpha \phi_i(x) + u_{\circ i}^\alpha \psi_i(x) = \sum_{i=1}^2 (|\phi_i(x)| \text{len } u_{\circ i}^\alpha + |\psi_i(x)| \text{len } u_{\circ i}^\alpha) \\ &\geq \sum_{i=1}^2 |\phi_i(x)| \text{len } u_{\circ i}^\alpha \geq \phi_1(x) \text{len } u_{\circ 1}^\alpha + \phi_2(x) \text{len } u_{\circ 2}^\alpha \\ &\geq \min \{ \text{len } u_{\circ 1}^\alpha, \text{len } u_{\circ 2}^\alpha \} (\phi_1(x) + \phi_2(x)) = \min \{ \text{len } s^\alpha(x_1), \text{len } s^\alpha(x_2) \}. \end{aligned}$$

□

۴-۳-۵ تعریف. فرض کنید $\Delta : a = x_\circ < x_1 < \dots < x_n = b$ ، افزایی برای بازه $I = [a, b]$

باشد. $H_3(\Delta; I)$ مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای حداکثر از درجه سه با ضرائب حقیقی بر روی فاصله I می‌باشد.

۴-۳-۶ تعریف. فرض کنید $f(x)$ تابع حقیقی مقدار متعلق به $C(I)$ باشد، چندجمله‌ای قطعه‌ای متعلق

به $H_3(\Delta; I)$ که $f(x)$ را درونیابی می‌کند با $s_3(x)$ نشان داده تعریف می‌شود

$$D^k f(x_i) = D^k s_3(x_i), \quad k = \circ, 1, \quad \circ \leq i \leq n, \quad D = \frac{d}{dx} \quad (۴-۸)$$

چون (۴-۸) حالت خاصی از درونیاب هرمیت است بنابر [۱۲، ۲۳] هر تابع حقیقی مقدار متعلق به

$C^1(I)$ دارای یک درونیاب منحصر بفرد متعلق به $H_3(\Delta; I)$ می‌باشد.

۴-۳-۴ قضیه. مجموعه‌ای از پایه‌های اصلی فضای خطی $2(n+1)$ بعدی $H_3(\Delta; I)$ مانند

$\mathcal{B} = \{ \phi_{ik}(x) \}_{i=\circ, k=\circ}^{n, 1}$ وجود دارد که چندجمله‌ای $s_3(x)$ به صورت ترکیب خطی منحصر بفردی

از اعضای آن نوشته می‌شود

$$s_3(x) = \sum_{i=\circ}^n \sum_{k=\circ}^1 f^{(k)}(x_i) \phi_{ik}(x) \quad (۴-۹)$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

$$f(x) \in C^1(I).$$

اثبات. یکی از راه‌های اثبات چنین قضیه‌ای معرفی پایه‌های لازم برای ساخت چندجمله‌ای درونیاب

می‌باشد که با توجه به افراز Δ روی I و $f \in C^1(I)$ و تعریف پایه‌های ϕ_{ik} به ازای $1 \leq i \leq n-1$

به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\phi_{i\circ}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})^r}{(x_i-x_{i-1})^r} [\Psi(x_i-x) + (x_i-x_{i-1})], & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{(x_{i+1}-x)^r}{(x_{i+1}-x_i)^r} [\Psi(x_{i+1}-x) - (x_{i+1}-x_i)], & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \circ, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$\phi_{i\backslash}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})^r(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^r}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{(x-x_{i+1})^r(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^r}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ \circ, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

که هر یک در خارج از بازه (x_i, x_{i+1}) برابر صفر می‌باشند، همچنین تعریف $\phi_{n\circ}, \phi_{n\backslash}, \phi_{\circ\circ}, \phi_{\circ\backslash}$ به

صورت زیر است

$$\phi_{\circ\circ}(x) = \begin{cases} \frac{(x_{\backslash}-x)^r}{(x_{\backslash}-x_{\circ})^r} [\Psi(x_{\backslash}-x) + (x_{\backslash}-x_{\circ})], & x_{\circ} \leq x \leq x_{\backslash} \\ \circ, & x_{\backslash} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$\phi_{n\circ}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{n-1})^r}{(x_n-x_{n-1})^r} [\Psi(x_{n-1}-x) + (x_n-x_{n-1})], & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \circ, & x_{\circ} \leq x \leq x_{n-1} \end{cases}$$

$$\phi_{\circ\backslash}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{\backslash})^r(x-x_{\circ})}{(x_{\backslash}-x_{\circ})^r}, & x_{\circ} \leq x \leq x_{\backslash} \\ \circ, & x_{\backslash} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$\phi_{n\backslash}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{n-1})^r(x-x_n)}{(x_n-x_{n-1})^r}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \circ, & x_{\circ} \leq x \leq x_{n-1} \end{cases}$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

چندجمله‌ای درونیاب $s_3(x)$ به صورت منحصر بفرد زیر به دست می‌آید:

$$s_3(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \phi_{i\circ}(x) + \sum_{i=0}^n f'(x_i) \phi_{i\backslash}(x).$$

□

۴-۳-۷ تعریف ([۲۳]). تمامی $2(n+1)$ عضو مجموعه B در قضیه ۴-۳-۴ که به طور منحصر بفرد

بر افراز Δ روی بازه I ساخته شدند را توابع پایه‌ای اصلی مکعبی می‌نامند.

۴-۳-۵ قضیه ([۲۳]). کلیه توابع پایه‌ای $\phi_{ij}(x)$ در B به طور منحصر بفرد با قیود زیر مشخص می‌شوند

$$\begin{cases} \phi_{i\circ}(x_j) = \delta_{ij} \\ \phi'_{i\circ}(x_j) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n \end{cases} \quad (i)$$

$$\begin{cases} \phi_{i\backslash}(x_j) = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n \\ \phi'_{i\backslash}(x_j) = \delta_{ij} \end{cases} \quad (ii)$$

۴-۳-۶ قضیه. فرض کنید $\phi_{ik}(x)$ پایه‌های اصلی فضای خطی $H_3(\Delta; I)$ باشند. آنگاه

$$\phi_{i\circ}(x) + \phi_{i+1\circ}(x) = 1, \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (i)$$

$$\phi_{i\backslash}(x) < 0, \quad \forall x \in (x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (ii)$$

$$\phi_{ik}(x) > 0, \quad \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \quad k = 0, 1, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (iii)$$

□

اثبات. با رجوع به ساختار $\phi_{ik}(x)$ ها در اثبات قضیه ۴-۳-۴ حکم برقرار است.

۴-۳-۸ تعریف. تابع فازی مقدار $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow I$ که در آن

$$s^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) = u_{ki} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \quad k = 0, 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای مکعبی فازی نامیده می‌شود اگر به ازای اعداد حقیقی $u_{ki} = y_i^{(k)}$

و مقادیر $f^{(k)}(x_i) = \chi_{y_i^{(k)}}$ و مجموعه داده‌های درونیابی $0 \leq f_i, f'_i \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ، $\{ (x_i, f_i, f'_i) \mid$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

$\{i \leq n\}$ چندجمله‌ای درجه سوم روی $[x_{i-1}, x_i]$ ، $0 \leq i \leq n$ وجود داشته باشد به طوری که

$$s^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}, \quad k = 0, 1, \quad 0 \leq i \leq n \quad \text{که در آن } s(x) = \chi_{f(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

اگر فرض شود چنین تابع فازی وجود دارد، آن را براساس α -برش‌ها تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹-۳-۴. α -برش‌های تابع فازی $s(x)$ در تعریف ۸-۳-۴ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$s^\alpha(x) = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid t = sy_0, \dots, y_n(x), y_i^{(k)} \in u_{ki}^{(\alpha)}, \quad k = 0, 1, \quad 0 \leq i \leq n \right\}$$

که در آن $s(x) = sy_0, \dots, y_n(x)$ طبق تعریف ۶-۳-۴ می‌باشد و به طور مشخص بنابر رابطه (۹-۴)

نوشته می‌شود

$$s^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^1 u_{ki}^\alpha \phi_{ik}(x). \quad (10-4)$$

چندجمله‌ای درونیاب هرमित مکعبی قطعه‌ای فازی $s(x)$ در تعریف ۸-۳-۴ در صورت وجود به شکل

زیر بیان می‌شود

$$s(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^1 u_{ki} \phi_{ik}(x).$$

۷-۳-۴ قضیه. فرض کنید $u_{ki}^\alpha = [\underline{u}_{ki}^\alpha, \bar{u}_{ki}^\alpha]$ ، $k = 0, 1$ ، $0 \leq i \leq n$ در رابطه (۱۰-۴)

مسائل بهینه‌سازی را حل می‌کند

$$\begin{aligned} \max \& \min \quad & \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^1 y_i^{(k)} \phi_k(x) \\ \text{s.t.} \quad & \underline{u}_{ki}^\alpha \leq y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad k = 0, 1, \quad 0 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

اثبات. جواب بهینه مساله ماکزیم‌سازی بنابر قضیه ۶-۳-۴ به صورت زیر می‌باشد

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \bar{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} \geq 0 \\ \underline{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} < 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \quad 0 \leq i \leq n,$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

و برای مساله مینیمم‌سازی عبارتست از

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \underline{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} \geq 0 \\ \bar{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} < 0 \end{cases}, \quad k = 0, 1, \quad 0 \leq i \leq n.$$

□

۴-۳-۸ قضیه. فرض کنید $s(x)$ تابع درونیابی که در شرایط چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای

مکعبی فازی صدق می‌کند آنگاه

$$\text{len } s^\alpha(x) \geq \min \{ \text{len } s^\alpha(x_i), \text{len } s^\alpha(x_{i+1}) \}, \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad x \in (x_i, x_{i+1}).$$

اثبات. طبق قسمت اول قضیه (۴-۳-۶) و نمایش α -برش‌های $s(x)$ در رابطه (۴-۱۰) و اینکه تجمیع

بازه‌ها باعث کم شدن طول بازه حاصل نمی‌شود می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \text{len } s^\alpha(x) &= \text{len } \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^1 u_{kj}^\alpha \phi_{jk}(x) \geq \sum_{j=0}^n \phi_{j0}(x) \text{len } u_{0j}^\alpha \\ &\geq (\phi_{i0}(x) + \phi_{i+1,0}(x)) \min \{ \text{len } u_{0i}, \text{len } u_{0, i+1} \} \\ &= \min \{ \text{len } u_{0i}^\alpha, \text{len } u_{0, i+1}^\alpha \} = \min \{ \text{len } s^\alpha(x_i), \text{len } s^\alpha(x_{i+1}) \}. \end{aligned}$$

□

۴-۳-۹ قضیه. به ازای هر عدد حقیقی x ، چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای مکعبی فازی $s(x)$

عدی $L - L$ فازی مثلثی است در صورتی که $u_{ki} = (m_{ki}, l_{ki}, u_{ki})$, $k = 0, 1, \dots, 0 \leq i \leq n$ نیز

هر یک عددی $L - L$ فازی مثلثی باشد.

اثبات. تکیه‌گاه عدد $L - L$ فازی مثلثی $u = (m, l, r)$ فاصله بسته $[m - l, m + r]$ می‌باشد. به ازای

هر x و u_{ki} مفروض می‌توان نوشت:

$$s(x) = \left(\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^1 u_{ki} \phi_{ik}(x) \right)$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sum_{\phi_{ik} \geq 0} \sum (m_{ki} - l_{ki}) \phi_{ik}(x) + \sum_{\phi_{ik} < 0} \sum (m_{ki} + r_{ki}) \phi_{ik}(x), \right. \\
 &\quad \left. \sum_{\phi_{ik} \geq 0} \sum (m_{ki} + r_{ki}) \phi_{ik}(x) + \sum_{\phi_{ik} < 0} \sum (m_{ki} - l_{ki}) \phi_{ik}(x) \right] \\
 &= \left[\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^1 m_{ki} \phi_{ik}(x) - \left(\sum_{\phi_{ik} \geq 0} \sum l_{ki} \phi_{ik}(x) - \sum_{\phi_{ik} < 0} \sum r_{ki} \phi_{ik}(x) \right), \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^1 m_{ki} \phi_{ik}(x) + \left(\sum_{\phi_{ik} \geq 0} \sum r_{ki}(x) \phi_{ik}(x) - \sum_{\phi_{ik} < 0} \sum l_{ki} \phi_{ik}(x) \right) \right] \\
 &= (m(x) - l(x), m(x) + r(x))
 \end{aligned}$$

□

مثال مربوط به چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای مکعبی فازی به همراه رسم نمودار در مثال ۴-۵-۳ آمده است.

۴-۴ چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای درجه پنجم فازی

به عنوان سومین عضو از خانواده درونیاب‌های هرमित قطعه‌ای چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای درجه پنجم^۱ در نظر گرفته می‌شود. مساله درونیابی هرमित درجه پنجم عبارت از یافتن یک منحنی بین دو نقطه معلوم است که مقادیر تا مشتقات مرتبه دوم منحنی در هر دو نقطه معلوم باشد. ساده‌ترین حل مساله یک منحنی چندجمله‌ای درجه پنج می‌باشد که به جای محاسبات ماتریسی از روش جایگزین یعنی نمایش منحنی موردنظر براساس توابع پایه‌ای اصلی درجه پنج استفاده شده است. همین روش در مورد درونیاب قطعه‌ای نیز تعمیم می‌یابد.

۴-۴-۱ قضیه. فرض کنید $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ و $x_1 < x_2$. به ازای تابع مفروض f متعلق به $C^4[x_1, x_2]$,

^۱ Quintic

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هر میت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

چندجمله‌ای منحصر بفرد درجه پنجم $q(x)$ وجود دارد که مساله درونیابی زیر را حل می‌کند

$$q^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, 2.$$

اثبات. برای اثبات وجود چنین چندجمله‌ای، آن را با استفاده از توابع پایه‌ای اصلی می‌سازیم

$$q(x) = \sum_{i=1}^2 f(x_i) \phi_i(x) + \sum_{i=1}^2 f'(x_i) \psi_i(x) + \sum_{i=1}^2 f''(x_i) \chi_i(x)$$

که در آن

$$\phi_1(x) = \frac{(x_2 - x)^3}{(x_2 - x_1)^5} [(x_2 + 3x)(x_2 - 5x_1) + 6x^2 + 1 \cdot x_1^3]$$

$$\phi_2(x) = \frac{(x_1 - x)^3}{(x_1 - x_2)^5} [(x_1 + 3x)(x_1 - 5x_2) + 6x^2 + 1 \cdot x_2^3]$$

$$\psi_1(x) = \frac{(x_2 - x)^3}{(x_1 - x_2)} (x_1 - x) \left[1 + 3 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \right]$$

(۱۱-۴)

$$\psi_2(x) = \frac{(x_1 - x)^3}{(x_1 - x_2)} (x - x_2) \left[1 + 3 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right]$$

$$\chi_1(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right)^3 \frac{(x_1 - x)^2}{2}$$

$$\chi_2(x) = \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \right)^3 \frac{(x_2 - x)^2}{2}$$

در صورتی که چندجمله‌ای درجه پنج درونیاب $p(x)$ که در شرایط قضیه صدق کرده و f را در نقاط داده

شده درونیابی نماید مجزا از $q(x)$ موجود باشد، تفاضل دو درونیاب یک چندجمله‌ای از درجه حداکثر

پنج می‌باشد. آن را $s(x)$ می‌نامیم. از قضیه ۲-۹-۲ چندجمله‌ای $s'(x)$ از درجه چهار، ریشه‌ای مانند

$c \in (x_1, x_2)$ دارد به طوری که $s'(c) = 0$. از طرفی $s'(x_1) = s'(x_2) = 0$ ، بنابراین از همان قضیه

چندجمله‌ای درجه سوم $s''(x)$ در فواصل (x_1, c) و (c, x_2) به ترتیب دارای دو ریشه ζ_1 و ζ_2 می‌باشد

یعنی تاکنون ریشه‌های x_1, x_2, ζ_1 و ζ_2 برای چندجمله‌ای درجه سوم $s''(x)$ شمارش شده‌اند که تناقض

است. لذا درونیاب $q(x)$ منحصر بفرد می‌باشد. □

۴-۴-۲ قضیه. توابع پایه‌ای رابطه (۱۱-۴) در روابط زیر صدق می‌کنند که در آن $1 \leq i, j \leq 2$ می‌باشد

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هریت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

$$\phi_i(x_j) = \psi'_i(x_j) = \chi''_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i)$$

$$\phi'_i(x_j) = \phi''_i(x_j) = \psi_i(x_j) = \psi''_i(x_j) = \chi_i(x_j) = \chi'_i(x_j) = 0 \quad (ii)$$

۴-۴-۳ قضیه. توابع پایه‌ای رابطه (۴-۱۱) را در نظر بگیرید.

(i) به ازای هر x متعلق به (x_1, x_2) ، علامت $\phi_i(x)$ و $\chi_i(x)$ ، $i = 1, 2$ و $\psi_1(x)$ مثبت و علامت

$\psi_2(x)$ منفی می‌باشد.

(ii) به ازای هر x متعلق به $[x_1, x_2]$ داریم، $\phi_1(x) + \phi_2(x) = 1$

اثبات. با بررسی روابط (۴-۱۱) حکم به سادگی برقرار می‌باشد. $\square$

۴-۴-۱ تعریف. فرض کنید $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ افزایش از $I = [a, b]$ باشد.

مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های هریت قطعه‌ای از درجه پنج را با $H_5(\Delta; I)$ نشان می‌دهند که یک فضای

بردار از بعد $3(n+1)$ می‌باشد.

۴-۴-۲ تعریف. فرض کنید $f \in C^2(I)$. چندجمله‌ای قطعه‌ای متعلق به $H_5(\Delta; I)$ که f را در نقاط

متعلق به Δ درونیابی می‌کند با $q_5(x)$ نمایش داده تعریف می‌کنند

$$D^{(k)} q_5(x_i) = D^{(k)} f(x_i), \quad k = 0, 1, 2, \quad 0 \leq i \leq n, \quad D^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{dx^{(k)}}$$

۴-۴-۳ قضیه (۲۳). مجموعه پایه‌های $\phi_{ik}(x)$ که با $\mathcal{B} = \{\phi_{ik}(x)\}_{i=0, k=0}^{n, 2}$ نمایش می‌دهند یک

مبنای برای فضای $H_5(\Delta; I)$ تشکیل می‌دهد که در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$D^l \phi_{ik}(x_j) = \delta_{kl} \delta_{ij}, \quad 0 \leq k, l \leq 2, \quad 0 \leq i, j \leq n, \quad D^l = \frac{d^l}{dx^l} \quad (۴-۱۲)$$

۴-۴-۵ قضیه. فرض کنید $\phi_{ik}(x)$ در رابطه (۴-۱۲) صدق کند، آنگاه

(i) به ازای هر x متعلق به (x_i, x_{i+1}) و $0 \leq i \leq n-1$ ، $\phi_{i0}(x) + \phi_{i+1,0}(x) \geq 1$

(ii) علامت $\phi_{i1}(x)$ ، $0 \leq i \leq n$ ، روی (x_{i-1}, x_i) منفی است.

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

iii) علامت $\phi_{ik}(x)$ ، $0 \leq i \leq n-1$ ، $k = 0, 1, 2$ ، روی (x_i, x_{i+1}) مثبت است.

اثبات. در صورتی که اعضای مجموعه B را به شکل زیر بسازیم، اثبات قضیه بدیهی خواهد بود. تمامی

$3(n+1)$ عضو B در رابطه (۴-۱۲) به ازای $1 \leq i \leq n-1$ عبارتند از

$$\begin{aligned} \phi_{i0}(x) &= \begin{cases} \frac{(x_{i-1}-x)^2}{(x_{i-1}-x_i)^3} [(x_{i-1} + 3x)(x_{i-1} - 5x_i) + 6x^2 + 1 \circ x_i^3], & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^3} [(x_{i+1} + 3x)(x_{i+1} - 5x_i) + 6x^2 + 1 \circ x_i^3], & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \phi_{i1}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{x_{i-1}-x}{x_{i-1}-x_i} \right)^2 (x - x_i) \left[1 + 3 \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i} \right], & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 (x_i - x) \left[1 + 3 \frac{x_i-x}{x_{i+1}-x_i} \right], & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \phi_{i2}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{x_{i-1}-x}{x_{i-1}-x_i} \right)^2 \frac{(x_i-x)^2}{2}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \left(\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} \right)^2 \frac{(x_i-x)^2}{2}, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \phi_{n0}(x) &= \begin{cases} \frac{(x_1-x)^2}{(x_1-x_0)^3} [(x_1 + 3x)(x_1 - 5x_0) + 6x^2 + 1 \circ x_0^3], & x_0 \leq x \leq x_1 \\ 0, & x_1 \leq x \leq x_n, \end{cases} \\ \phi_{n1}(x) &= \begin{cases} \frac{(x_{n-1}-x)^2}{(x_{n-1}-x_n)^3} [(x_{n-1} + 3x)(x_{n-1} - 5x_n) + 6x^2 + 1 \circ x_n^3], & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & x_0 \leq x \leq x_{n-1}, \end{cases} \\ \phi_{n2}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{x_1-x}{x_0-x_1} \right)^2 (x_0 - x) \left[1 + 3 \frac{x_0-x}{x_0-x_1} \right], & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & x_1 \leq x \leq x_n, \end{cases} \end{aligned}$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

$$\begin{aligned}\phi_{n1}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{x_{n-1}-x}{x_{n-1}-x_n}\right)^3 (x-x_n) \left[1 + 3\frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}\right], & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & x_0 \leq x \leq x_{n-1}, \end{cases} \\ \phi_{n2}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^3 \frac{(x_0-x)^2}{2}, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & x_1 \leq x \leq x_n, \end{cases} \\ \phi_{n3}(x) &= \begin{cases} \left(\frac{x_{n-1}-x}{x_{n-1}-x_n}\right)^3 \frac{(x_n-x)^2}{2}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & x_0 \leq x \leq x_{n-1}. \end{cases}\end{aligned}$$

□

۴-۴-۶ قضیه. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای از درجه پنج براساس توابع پایه‌ای اصلی در رابطه

(۴-۱۲) به صورت زیر بیان می‌شود

$$q_\Delta(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 f^{(k)}(x_i) \phi_{ik}(x) \quad (4-13)$$

۴-۴-۳ تعریف. تابع فازی مقدار $q : I \rightarrow \mathbb{R}_F$ که به ازای $0 \leq i \leq n$ و $k = 0, 1, 2$ ،

$q^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) = u_{ki} \in \mathbb{R}_F$ تابع فازی قطعه‌ای مرتبه پنج نامیده می‌شود اگر برای داده‌های

فازی درونیابی $\{(x_i, f_i^{(k)}) \mid f_i^{(k)} \in \mathbb{R}_F, k = 0, 1, 2, 0 \leq i \leq n\}$ و اعداد حقیقی $u_{ki} = y_i^{(k)}$

و مقادیر $f^{(k)}(x_i) = \chi_{y_i^{(k)}}(x)$ ، چندجمله‌ای درجه سوم روی $[x_{i-1}, x_i]$ ، $1 \leq i \leq n$ وجود داشته باشد

به‌طوری‌که به ازای هر $q(x) = \chi_{f(x)}$ ، $x \in \mathbb{R}$ که در آن $s^{(k)}(x_i) = y_i^{(k)}$ و $0 \leq i \leq n$ و $k = 0, 1, 2$.

۴-۴-۴ تعریف. α -برش‌های تابع فازی قطعه‌ای مرتبه پنج $q(x)$ در تعریف ۴-۴-۳ در صورت وجود

به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$q^\alpha(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 u_{ki}^\alpha \phi_{ik}(x) \quad (4-14)$$

و تابع فازی مقدار قطعه‌ای $q(x)$ تعریف می‌شود:

$$q(x) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 u_{ki} \phi_{ik}(x) \quad (4-15)$$

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هر میت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

۷-۴-۴ قضیه. با فرض $q^\alpha(x)$ ، $u_{ki}^\alpha = [\underline{u}_{ki}^\alpha, \bar{u}_{ki}^\alpha]$ ، $k = 0, 1, 2$ ، $0 \leq i \leq n$ در رابطه (۱۴-۴)

مسائل بهینه‌سازی زیر را حل می‌کند

$$\begin{aligned} \max \& \min \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^2 y_i^{(k)} \phi_{ik}(x) \\ \text{s.t. } \underline{u}_{ki}^\alpha &\leq y_i^{(k)} \leq \bar{u}_{ki}^\alpha, \quad 0 \leq k \leq 2, \quad 0 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

اثبات. با استفاده از علامت توابع پایه‌ای $\phi_{ik}(x)$ در قضیه ۵-۴-۴ برای مساله بیشینه‌سازی جواب

عبارتست از

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \bar{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} \geq 0 \\ \underline{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} < 0 \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq 2, \quad 0 \leq i \leq n$$

و جواب مساله کمینه‌سازی عبارتست از

$$y_i^{(k)} = \begin{cases} \underline{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} \geq 0 \\ \bar{u}_{ki}^\alpha, & \phi_{ik} < 0 \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq 2, \quad 0 \leq i \leq n.$$

□

۸-۴-۴ قضیه. فرض کنید $q(x)$ تابع درونیابی است که در شرایط چندجمله‌ای درونیاب هر میت قطعه‌ای

درجه پنجم فازی صدق می‌کند آنگاه در هر نقطه x واقع در بازه‌های درونیابی (x_i, x_{i+1}) و به ازای هر

$\alpha \in [0, 1]$ رابطه زیر برقرار است

$$\text{len } q^\alpha(x) \geq \min \{q^\alpha(x_i), \text{len } q^\alpha(x_{i+1})\}$$

که در آن $q^\alpha(x) = [\underline{q}^\alpha(x), \bar{q}^\alpha(x)]$ و $\text{len } q^\alpha(x) = \bar{q}^\alpha(x) - \underline{q}^\alpha(x)$

□

اثبات. با استفاده از قسمت اول قضیه ۵-۴-۴ و خواص قدرمطلق اثبات بدیهی است.

۵-۴ مثال‌ها

این قسمت مثال‌هایی برای نشان دادن روش بیان شده در بخش‌های (۲-۴)، (۳-۴) و (۴-۴) ارائه می‌کند. تمامی محاسبات مربوطه با بهره‌گیری از نرم‌افزار برنامه‌نویسی Mathematica 8 انجام گرفته است.

یادآوری می‌شود بنابه تعریف ۲-۱-۳-۲ تکیه‌گاه عدد $L - L$ فازی مثلثی $u = (m, l, r)$ بازه بسته

$[m - l, m + r]$ می‌باشد و طبق تعریف ۴-۱-۳-۲ هر α -برش u به صورت

$u^\alpha = [m - (1 - \alpha)l, m + (1 - \alpha)r]$ است که برای نمونه طرز محاسبه تکیه‌گاه درونیاب هرمیت

قطعه‌ای خطی فازی (یا طبق قضیه ۲-۲-۴، اسپلاین فازی مرتبه $l = ۲$ در مرجع [۱۷]) نیز $\frac{1}{4} - \alpha =$

برش آن با استفاده از رابطه (۱-۴) و براساس داده‌های مثال ۱-۵-۴ به صورت زیر می‌باشد:

$$s^\circ(x) = \sum_{i=0}^5 u_{\circ,i}^\circ \phi_i^\circ(x) = \phi_\circ^\circ(x)[-۲, ۱] + \phi_۱^\circ(x)[۴, ۷] + \phi_۲^\circ(x)[۱, ۴] + \phi_۳^\circ(x)[\circ, ۷]$$

$$+ \phi_۴^\circ(x)[-۳, ۲] + \phi_۵^\circ(x)[\circ, ۲]$$

$$s^{\frac{1}{4}}(x) = \sum_{i=0}^5 u_{\circ,i}^{\frac{1}{4}} \phi_i^{\frac{1}{4}}(x) = \phi_\circ^{\frac{1}{4}}(x)[-۱, \circ/۵] + \phi_۱^{\frac{1}{4}}(x)[۴/۵, ۶] + \phi_۲^{\frac{1}{4}}(x)[۱, ۲/۵]$$

$$+ \phi_۳^{\frac{1}{4}}(x)[۲, ۵/۵] + \phi_۴^{\frac{1}{4}}(x)[-۱/۵, ۱] + \phi_۵^{\frac{1}{4}}(x)[\circ/۵, ۱/۵]$$

در حقیقت همان‌طور که در برنامه (۱-۶-۴) نیز آمده برای رسم این درونیاب خطی ابتدا رئوس خطوط

شکسته‌ای که طول رئوس نقاط گره x_i و عرض آنها به ترتیب پهنای پائینی تکیه‌گاه یا $\underline{u}_i^\circ$ هستند به هم

وصل می‌کنیم. سپس رئوس خطوط شکسته‌ای که طول رئوس x_i ها و عرض آنها هسته یا m_i ها می‌باشند

و در مرحله سوم رئوس خطوط شکسته‌ای که طول آنها x_i ها و عرضشان پهنای بالای تکیه‌گاه یعنی $\overline{u}_i^\circ$

می‌باشند به هم متصل می‌نمائیم و خطوط توپر شکل ۱.۴ به دست می‌آید. در صورتی که همین روند را با

عرض‌های $\underline{u}_i^{\frac{1}{4}}$ و $\overline{u}_i^{\frac{1}{4}}$ در گره‌های x_i ادامه دهیم، خطوط خطچین یا $\frac{1}{4}$ -برش درونیاب هرمیت قطعه‌ای

خطی فازی مثال مورد نظر حاصل می‌شود سپس دو نمودار حاصل را در یک نمودار که همان شکل ۱.۴

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

می‌باشد یکجا نمایش می‌دهیم.

برای رسم چندجمله‌ای درونیاب هرمیت مکعبی فازی در مثال ۴-۵-۲ نیز همین روش را با به‌کارگیری توابع پایه‌ای $\phi_i(x)$ و $\psi_i(x)$ در رابطه (۴-۵) انجام می‌دهیم که برنامه شماره ۴-۶-۲ مربوط به این درونیاب است.

سه مثال بعدی نیز طبق توضیحات بالا و برنامه‌های ارائه شده درونیاب‌های هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی و هرمیت درجه پنجم قطعه‌ای فازی رسم می‌شوند.

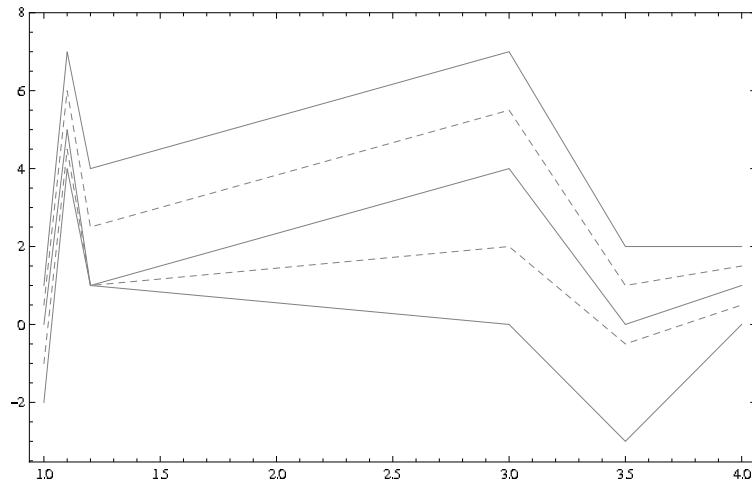
لازم به توضیح است که برنامه آخر مربوط به مثال (۴-۵-۷) و به منظور مقایسه دو درونیاب هرمیت فازی [۱۵] و هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی ارائه شده در این رساله می‌باشد که مثال از مرجع یاد شده انتخاب گردیده و شکل ۷.۴ برتری روش ارائه شده این رساله به روش هرمیت فازی را به‌ازای داده‌های درونیابی مثال ذکر شده نشان می‌دهد. ملاک برتری، کمتر بودن پهنای α -برش‌های هرمیت قطعه‌ای فازی ارائه شده در رساله می‌باشد.

۴-۵-۱ مثال. فرض کنید $((1, (0, 2, 1)), (1/1, (5, 1, 2)), (1/2, (1, 0, 3)), (3, (4, 4, 3)))$ ، $((3/5, (0, 3, 2))$ و $((4, (1, 1, 1)))$ داده‌های درونیابی می‌باشند. در شکل (۱.۴) به ازای هر x متعلق به بازه $[1, 4]$ ، خط چین‌ها مجموعه $\frac{1}{p}$ -برش درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی فازی $s(x)$ و خطوط توپر تکیه‌گاه و هسته $s(x)$ را نشان می‌دهند.

۴-۵-۲ مثال. داده‌های درونیابی $((0, (-1, 0/5, 1)), (-3, 1, 2))$ و $((0/5, 2, 2/5))$ ، $((2, (-6/7, 2, 8/7))$ را در نظر بگیرید. در شکل (۲.۴) به ازای هر x متعلق به بازه $[0, 2]$ ، خطوط توپر تکیه‌گاه، خط پررنگ هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت مکعبی فازی $s(x)$ و خط چین‌ها مجموعه $\frac{1}{p}$ -برش $s(x)$ را نشان می‌دهند.

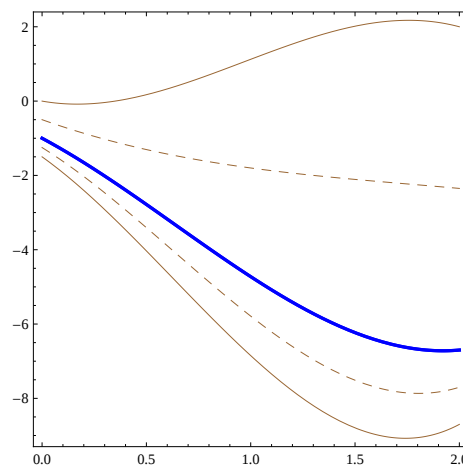
۴-۵-۳ مثال. فرض کنید $((1, (0, 2, 1)), (1, (0, 3)), (1/3, (5, 1, 2)), (0, 2, 1))$ ، $((3/5, (0, 3, 2)), (1, 1, 1))$ ، $((3, (4, 4, 3)), (5, 1, 2))$ ، $((2/2, (1, 0, 3)), (4, 4, 3))$ و $((4, (1, 1, 1)), (0, 3, 2))$ داده‌های درونیابی باشند. خط چین‌ها، مجموعه $\frac{1}{p}$ -برش، خطوط توپر

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی



شکل ۱.۴: نمایش α -برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی فازی $s(x)$ به ازای $\alpha =$

$1, \frac{1}{4}, 0$ و در بازه $[1, 4]$.

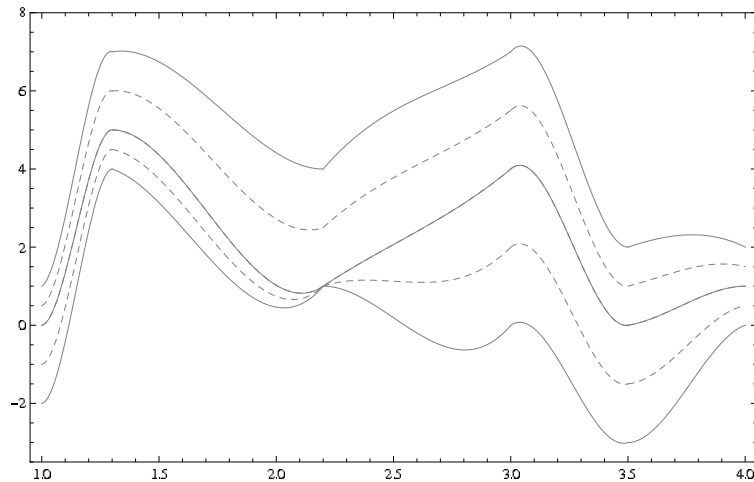


شکل ۲.۴: نمایش α -برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت مکعبی $s(x)$ به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در

بازه $[0, 2]$.

تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی $s_3(x)$ روی بازه $[1, 4]$ می‌باشند.

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی



شکل ۳.۴: نمایش α - برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی به ازای $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0$ و در بازه $[1, 4]$.

۴-۵-۴ مثال. داده‌های $((1, (0, 2, 1)), (1, (0, 3)), (0, (0, 2, 1)), (0, 2, 1)), ((1/5, (5, 1, 2)), (0, 2, 1))$

و $((3/7, (0, 3, 2)), (1, 1, 1)), ((3, (4, 4, 3)), (5, 1, 2)), ((2/7, (1, 0, 3)), (4, 4, 3))$

$(4, (1, 1, 1)), (0, 3, 2))$ مفروضند. در شکل (۴.۴) مجموعه $\frac{1}{4}$ - برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت

قطعه‌ای مکعبی فازی $s_3(x)$ با خط‌چین‌ها و هسته و تکیه‌گاه $s_3(x)$ با خطوط توپر همگی در بازه $[1, 4]$ نشان داده شده است.

۴-۵-۵ مثال. فرض کنید $((1, 4, 4)), (0, 2, 2), (0, (0, 1, 3)), (0, (0, 1, 3))$

$((1, 3/1, 3)), (0, 3, 3/2, 0/8), (0/3, 3/2, 0/8), (1/3, (0/5, 1/9, 3/5)), (1, 2/6, 2/4)), (2, 0/5, 3/5), (2, (2, 6/7, 5/3)), (2, (2, 6/7, 5/3))$

و $((1, 0/6, 0/5)), (4, 4, 0), (4, (8, 10/1, 9/9)), (4, (8, 10/1, 9/9)), (1, 1/5, 1/7)), (5/3, 0/2, 3/8), (5/3, (14, 13, 12)), (5/3, (14, 13, 12))$

$((1, 3/4, 3/2)), (6, 0/9, 3), (6, (18, 13/2, 14/8)), (6, (18, 13/2, 14/8))$ داده‌های درونیابی باشند. در شکل (۵.۴) به ازای

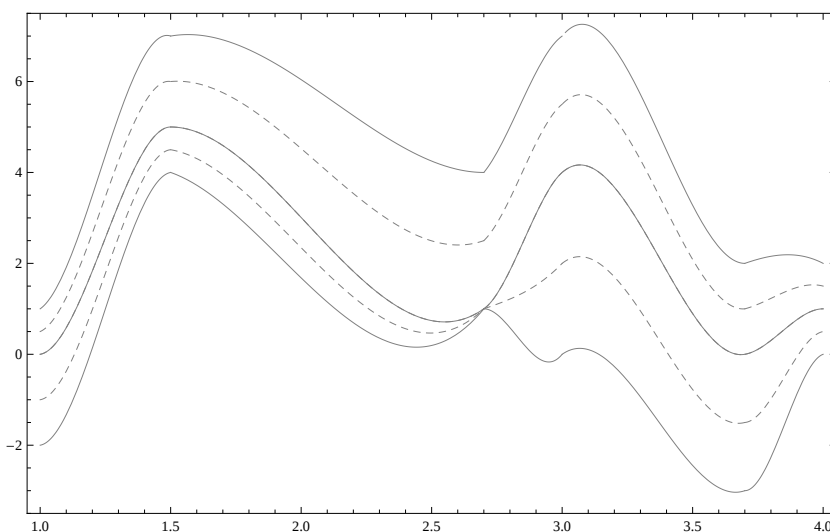
x های بازه $[0, 6]$ ، خطوط توپر تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای از درجه پنجم فازی

$q_5(x)$ و خط چین‌ها مجموعه $\frac{1}{4}$ - برش $q_5(x)$ را نمایش می‌دهند.

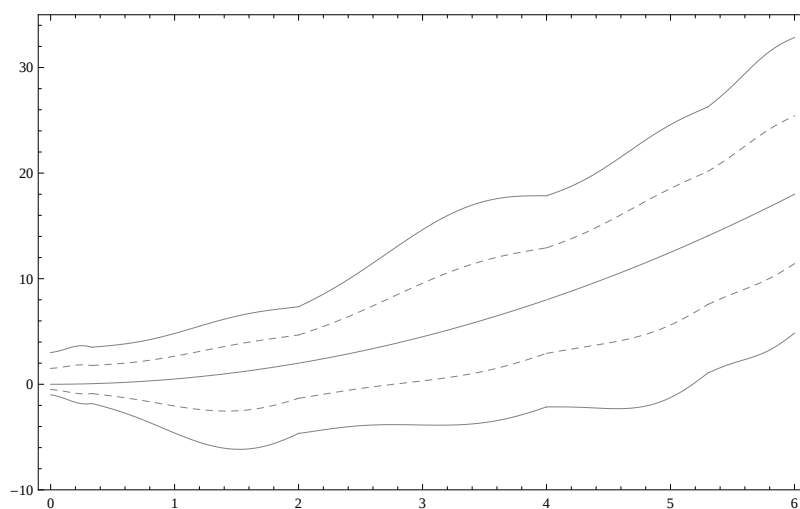
۴-۵-۶ مثال. داده‌های فازی مثال ۳-۵-۴ را در نظر بگیرید. به ازای x های بازه $[1, 4]$ ، تکیه‌گاه و هسته

درونیاب هرمیت فازی در شکل ۶.۴ نمایش داده شده است.

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی



شکل ۴.۴: نمایش α -برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی $s_3(x)$ به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در بازه $[1, 4]$.

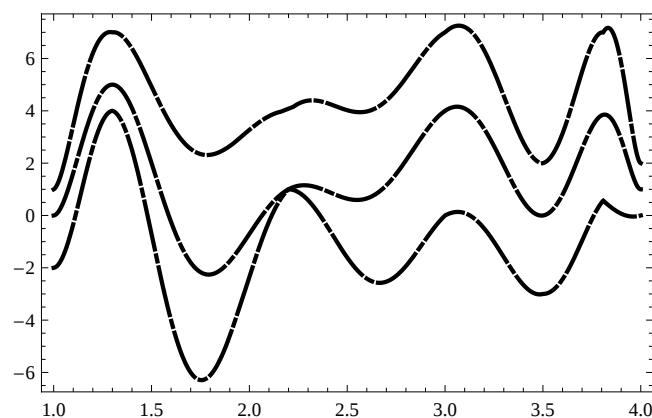


شکل ۵.۴: نمایش α -برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای از درجه پنجم فازی به ازای $\alpha = 0, \frac{1}{4}, 1$ و در بازه $[0, 6]$.

۷-۵-۴ مثال. داده‌های فازی مثال ۳-۵-۴ را در نظر بگیرید. در شکل ۷.۴ به ازای x های بازه $[1, 4]$ ،

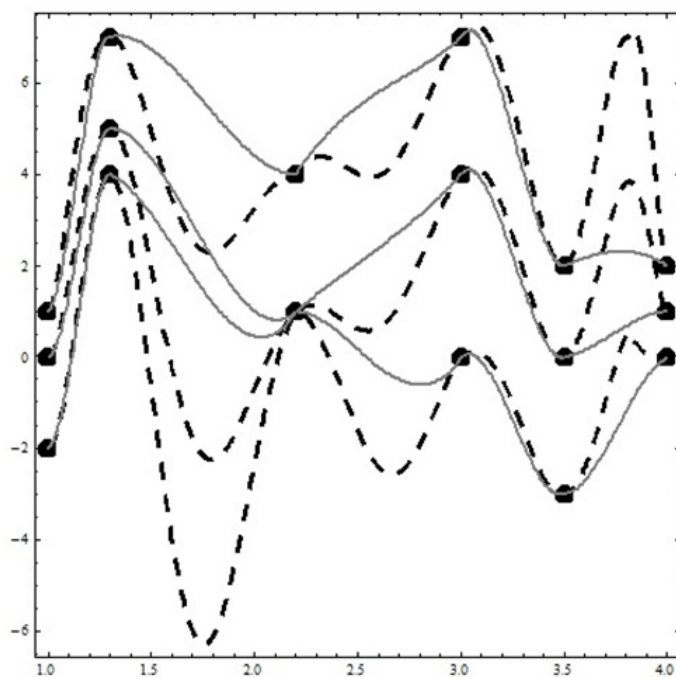
خطوط توپر تکیه‌گاه و هسته چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی و خطچین‌ها همان α -

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی



شکل ۴.۶: نمایش α -برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت فازی به ازای $\alpha = 0$ و در بازه $[1, 4]$.

برش‌ها برای درونیاب هرمیت فازی تعریف ۲-۸-۱۰ می‌باشند. در این مثال برتری درونیاب قطعه‌ای فازی بر درونیاب هرمیت فازی به دلیل کمتر بودن پهنای تکیه‌گاه و نوسانات کمتر هسته بین گره‌ها مشهود است.



شکل ۴.۷: مقایسه α -برش‌های چندجمله‌ای درونیاب هرمیت فازی و هرمیت قطعه‌ای مکعبی فازی به ازای $\alpha = 0$ و در بازه $[1, 4]$.

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

۶-۴ برنامه‌های نرم‌افزاری رسم

۴-۶-۱. برنامه مربوط به رسم شکل ۱.۴ در مثال ۴-۵-۱

```
(1, (-2, 0, 1)), (1.1, (4, 5, 7)), (1.2, (1, 1, 4)), (3, (0, 4, 7)),  
(3.5, (-3, 0, 2)), (4, (0, 1, 2))
```

```
a1 = {{1, -2}, {1.1, 4}, {1.2, 1}, {3, 0}, {3.5, -3}, {4, 0}};
```

```
a2 = {{1, 0}, {1.1, 5}, {1.2, 1}, {3, 4}, {3.5, 0}, {4, 1}};
```

```
a3 = {{1, 1}, {1.1, 7}, {1.2, 4}, {3, 7}, {3.5, 2}, {4, 2}};
```

```
gh1 = ListLinePlot[{a1, a2, a3}, PlotStyle -> Gray]
```

```
b1 = {{1, -1}, {1.1, 4.5}, {1.2, 1}, {3, 2}, {3.5, -.5}, {4, .5}};
```

```
b2 = {{1, .5}, {1.1, 6}, {1.2, 2.5}, {3, 5.5}, {3.5, 1}, {4, 1.5}};
```

```
gh2 = ListLinePlot[{b1, b2}, PlotStyle -> {{Gray, Dashed}} ]
```

```
Show[gh1, gh2, Ticks -> {{1, 1.1, 1.2, 3, 3.5, 4}, Automatic}, Axes -> False,
```

```
Frame -> True, PlotRange -> {{1, 4.00}, {-3.1, 7}}, ImageSize -> {500, 400}]
```

۴-۶-۲. برنامه مربوط به رسم شکل ۲.۴ در مثال ۴-۵-۲

```
x = {0, 2}
```

```
y = {g[-1, -1, 0], g[-8.7, -6.7, 3.4]}
```

```
yp = {g[-3, -3, -1], g[-1.5, 2, 4.5]}
```

```
y1 = Apply[#1 &, y, 1];
```

```
y2 = Apply[#2 &, y, 1];
```

```
y3 = Apply[#3 &, y, 1];
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

yp1 = Apply[#1 &, yp, 1];
yp2 = Apply[#2 &, yp, 1];
yp3 = Apply[#3 &, yp, 1];

Clear[s1, s2];

n = Length[x] - 1;

s1[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i + 1]], {i, 1, n}];

s2[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i + 1]], {i, 1, n}];

s3[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i + 1]], {i, 1, n}];

p1 = Transpose[{x, y1}];
p2 = Transpose[{x, y2}];
p3 = Transpose[{x, y3}];

gs1 = Plot[{s1[t], s2[t], s3[t]}, {t, 0, 2}, (*Prolog->{PointSize[.02],
  Black, Point[p2], Point[p1], Point[p3]}, PlotPoints->300, *)

PlotStyle -> {{Brown}, {Blue, Thick}, {Brown}}, PlotRange -> All, Axes -> False, Frame -> True]

= 1/2;

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

x = {0, 2}

y = {g[-1, -1, -1/2], g[(-8.7 - 6.7)/2, -6.7, (-6.7 + 3.4)/2]}

yp = {g[-3, -3, -2], g[(-1.5 + 2)/2, 2, (2 + 4.5)/2]}

y1 = Apply[#1 &, y, 1];
y2 = Apply[#2 &, y, 1];
y3 = Apply[#3 &, y, 1];

yp1 = Apply[#1 &, yp, 1];
yp2 = Apply[#2 &, yp, 1];
yp3 = Apply[#3 &, yp, 1];

Clear[s1, s2];

n = Length[x] - 1;

s1[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i + 1]], {i, 1, n}];

s2[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i + 1]], {i, 1, n}];

s3[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i + 1]], {i, 1, n}];

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
p1 = Transpose[{x, y1}];
p2 = Transpose[{x, y2}];
p3 = Transpose[{x, y3}];
gs2 = Plot[{s1[t], s2[t], s3[t]}, {t, 0, 2}, (*Prolog->{PointSize[.02],
    Black, Point[p2], Point[p1], Point[p3]}, PlotPoints->300, *)
    PlotStyle -> {{Dashing[.02], Brown}, {Blue, Thick}, {Dashing[.02], Brown}},
    PlotRange -> All, Axes -> False, Frame -> True]

Show[gs1, gs2, AspectRatio -> 1]
```

۳-۶-۴. برنامه مربوط به رسم شکل ۳.۴ در مثال ۳-۵-۴

```
Clear[g]
Clear[g,a,b,c,x,z];
g[a_,b_,c_][x_]:=0;/;x<=a||x>=c;
g[a_,b_,c_][x_]:= (x-a)/(b-a)/;a<=x<=b;
g[a_,b_,c_][x_]:= (c-x)/(c-b)/;b<=x<=c;
(*g[a_,b_,c_][x_]:=0;/;x>=c;*)
Times[t_,g[a_,b_,c_]]^:=g[t a,t b , t c]/;t>=0;
Times[t_,g[a_,b_,c_]]^:=g[t c,t b , t a]/;t<0;
g[a_,b_,c_]+g[a1_,b1_,c1_]:=g[a+a1,b+b1,c+c1];
(*g[a_,b_,c_]*g[a1_,b1_,c1_]:=g[Min[a a1,a c1,c b1,c c1],b b1,
    Max[a a1,a c1,c b1,c c1]];*);
```

```
Clear[sph];
sph[t_, p_] := Module[{p0 = p, u, v, vp, s, sp, sz, n, a, b, c, d, mo1,
    mo2, i, x, mo, mt, so},
    {u, v, vp} = Transpose[p0];
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

s[i_, x_] = a[i] x^3 + b[i] x^2 + c[i] x + d[i];
sp[i_, x_] = D[s[i, x], x];
n = Length[p];
mo1 = Flatten[{Table[{s[i, u[[i]]] == v[[i]], s[i, u[[i + 1]]] == v[[i + 1]]}, {i, 1, n - 1}],
               Table[{sp[i, u[[i]]] == vp[[i]], sp[i, u[[i + 1]]] == vp[[i + 1]]}, {i, 1, n - 1}]}];

mt = Flatten[Table[{a[i], b[i], c[i], d[i]}, {i, 1, n - 1}]];
so = Solve[mo1, mt];

Piecewise[ Table[ {s[i, t] /. so[[1]], u[[i]] <= t < u[[i + 1]]},
                 {i, n - 1} ] ,
           0]
]

x = {a, b};
(*xiha betartib*)
y = {1, 0};(*yiha betartib*)
yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)
p1 = Transpose[{x, y, yp}];
h1[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify
x = {a, b};
(*xiha betartib*)
y = {0, 1};(*yiha betartib*)
yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)
p1 = Transpose[{x, y, yp}];
h2[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify
x = {a, b};
(*xiha betartib*)
y = {0, 0};(*yiha betartib*)

```

```
yp = {1, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)
```

```
p1 = Transpose[{x, y, yp}];
```

```
h3[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify
```

```
x = {a, b};
```

```
(*xiha betartib*)
```

```
y = {0, 0};(*yiha betartib*)
```

```
yp = {0, 1};(*y prim-ha betartib vared con *)
```

```
p1 = Transpose[{x, y, yp}];
```

```
h4[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify
```

```
\[Piecewise] ((3 a-b-2 t) (b-t)^2)/(a-b)^3 a<=t<b
```

```
0 True
```

```
\[Piecewise] ((a-t)^2 (a-3 b+2 t))/(a-b)^3 a<=t<b
```

```
0 True
```

```
\[Piecewise] -(((a-t) (b-t)^2)/(a-b)^2) a<=t<b
```

```
0 True
```

```
\[Piecewise] ((a-t)^2 (-b+t))/(a-b)^2 a<=t<b
```

```
0 True
```

```
q1 = {{1, {-2, 0, 1}, {1, 1, 4}}, {1.3, {4, 5, 7}, {-2, 0, 1}}, {2.2, {1, 1,
4}, {0, 4, 7}}, {3, {0, 4, 7}, {4, 5, 7}}, {3.5, {-3, 0, 2}, {0, 1,
2}}, {4, {0, 1, 2}, {-3, 0, 2}}}
```

```
{{1, {-2, 0, 1}, {1, 1, 4}}, {1.3, {4, 5, 7}, {-2, 0, 1}}, {2.2, {1, 1,
4}, {0, 4, 7}}, {3, {0, 4, 7}, {4, 5, 7}}, {3.5, {-3, 0, 2}, {0, 1,
2}}, {4, {0, 1, 2}, {-3, 0, 2}}}
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
x = Table[q1[[i, 1]], {i, 6}]
```

```
{1, 1.3, 2.2, 3, 3.5, 4}
```

```
y1 = Table[q1[[i, 2, 1]], {i, 6}]
```

```
{-2, 4, 1, 0, -3, 0}
```

```
y2 = Table[q1[[i, 2, 2]], {i, 6}]
```

```
{0, 5, 1, 4, 0, 1}
```

```
y3 = Table[q1[[i, 2, 3]], {i, 6}]
```

```
{1, 7, 4, 7, 2, 2}
```

```
yp1 = Table[q1[[i, 3, 1]], {i, 6}]
```

```
{1, -2, 0, 4, 0, -3}
```

```
yp2 = Table[q1[[i, 3, 2]], {i, 6}]
```

```
{1, 0, 4, 5, 1, 0}
```

```
yp3 = Table[q1[[i, 3, 3]], {i, 6}]
```

```
{4, 1, 7, 7, 2, 2}
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

Clear[s1, s2];

n = Length[x] - 1;

s1[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i + 1]], {i, 1, n}];

s2[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i + 1]], {i, 1, n}];

s3[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i + 1]], {i, 1, n}];

p1 = Transpose[{x, y1}];
p2 = Transpose[{x, y2}];
p3 = Transpose[{x, y3}];

gs2 = Plot[{s1[t], s2[t], s3[t]}, {t, 1, 4}, (*Prolog->{PointSize[.02],Black,
  Point[p2],Point[p1],Point[p3]},PlotPoints->300,*)PlotPoints -> 150,
  Axes -> False, Frame -> True, PlotRange -> {{0.9, 4.1}, {-4, 8}},
  PlotStyle -> Gray]

Clear[q1, x, y1, y2, y3, yp1, yp2, yp3];

q1 = {{1, {-1, 0, .5}, {1, 1, 2.5}}, {1.3, {4.5, 5, 6}, {-1,
  0, .5}}, {2.2, {1, 1, 2.5}, {2, 4, 5.5}}, {3, {2, 4, 5.5}, {4.5,
  5, 6}}, {3.5, {-1.5, 0, 1}, {1.5, 1, 1.5}}, {4, {1.5, 1,
  1.5}, {-1.5, 0, 1}}}

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
{1, {-1, 0, 0.5}, {1, 1, 2.5}}, {1.3, {4.5, 5, 6}, {-1, 0,
0.5}}, {2.2, {1, 1, 2.5}, {2, 4, 5.5}}, {3, {2, 4, 5.5}, {4.5, 5,
6}}, {3.5, {-1.5, 0, 1}, {0.5, 1, 1.5}}, {4, {0.5, 1, 1.5}, {-1.5,
0, 1}}}
```

```
x = Table[q1[[i, 1]], {i, 6}]
```

```
{1, 1.3, 2.2, 3, 3.5, 4}
```

```
y1 = Table[q1[[i, 2, 1]], {i, 6}]
```

```
{-1, 4.5, 1, 2, -1.5, 0.5}
```

```
y2 = Table[q1[[i, 2, 2]], {i, 6}]
```

```
{0, 5, 1, 4, 0, 1}
```

```
y3 = Table[q1[[i, 2, 3]], {i, 6}]
```

```
{0.5, 6, 2.5, 5.5, 1, 1.5}
```

```
yp1 = Table[q1[[i, 3, 1]], {i, 6}]
```

```
{1, -1, 2, 4.5, 0.5, -1.5}
```

```
yp2 = Table[q1[[i, 3, 2]], {i, 6}]
```

```
{1, 0, 4, 5, 1, 0}
```

```
yp3 = Table[q1[[i, 3, 3]], {i, 6}]
```

```
{2.5, 0.5, 5.5, 6, 1.5, 1}
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

Clear[s1, s2];

n = Length[x] - 1;

s1[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i + 1]], {i, 1, n}];

s2[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i + 1]], {i, 1, n}];

s3[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i]] +
  h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i + 1]], {i, 1, n}];

p1 = Transpose[{x, y1}];
p2 = Transpose[{x, y2}];
p3 = Transpose[{x, y3}];

gs1 = Plot[{s1[t], s2[t], s3[t]}, {t, 1, 4}, (*Prolog->{PointSize[.02],
  Black, Point[p2], Point[p1], Point[p3]}, PlotPoints->300, *)
  PlotPoints -> 150, Axes -> False, Frame -> True,
  PlotRange -> {{0.9, 4.1}, {-4, 8}}, PlotStyle -> {{Gray, Dashed}}]

Show[gs1, gs2, ImageSize -> {500, 400}]

```

۴-۶-۴. برنامه مربوط به رسم شکل ۴.۴ در مثال ۴-۵-۴

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

در برنامه قبل کافیت به جای نقاط گره (۱, ۱/۳, ۲/۳, ۳, ۳/۵, ۴)، نقاط گره مثال ۴-۵-۴ یعنی (۱, ۱/۵, ۲/۷, ۳, ۳/۷, ۴) جاگذاری شوند. سایر داده‌ها بابت مقدار تابع فازی و مقادیر مشتق اول فازی در هر دو مثال مشترکند.

۵-۶-۴. برنامه مربوط به رسم شکل ۵.۴ در مثال ۵-۵-۴

```
Clear[g, a, b, c, x, z];

g[a_, b_, c_][x_] := 0 /; x <= a || x >= c;

g[a_, b_, c_][x_] := (x - a)/(b - a) /; a <= x <= b;

g[a_, b_, c_][x_] := (c - x)/(c - b) /; b <= x <= c;

(*g[a_,b_,c_][x_]:=0/x>=c;*)

Times[t_, g[a_, b_, c_]] ^= g[t a, t b, t c] /; t >= 0;

Times[t_, g[a_, b_, c_]] ^= g[t c, t b, t a] /; t < 0;

g[a_, b_, c_] + g[a1_, b1_, c1_] ^= g[a + a1, b + b1, c + c1];

g[a_, b_, c_] * g[a1_, b1_, c1_] ^=

  g[Min[a a1, a c1, c b1, c c1], b b1, Max[a a1, a c1, c b1, c c1]];

Clear[sph5];

sph5[t_, p_] :=

Module[{p0 = p, u, v, vp, vz, e, f, s, sp, sz, n, a, b, c, d, mo1, mo2, i, x,
  mo, mt, so},

{u, v, vp, vz} = Transpose[p0];

s[i_, x_] = a[i] x^5 + b[i] x^4 + c[i] x^3 + d[i] x^2 + e[i] x + f[i];

sp[i_, x_] = D[s[i, x], x];

sz[i_, x_] = D[s[i, x], x, x];

n = Length[p];

mo1 = Flatten[{Table[{s[i, u[[i]]] == v[[i]],
  s[i, u[[i + 1]]] == v[[i + 1]]}, {i, 1, n - 1}],

Table[{sp[i, u[[i]]] == vp[[i]], sp[i, u[[i + 1]]] == vp[[i + 1]]}, {i,
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

1, n - 1}],

Table[{sz[i, u[[i]]] == vz[[i]], sz[i, u[[i + 1]]] == vz[[i + 1]]}, {i,
1, n - 1}]    }];

mt = Flatten[Table[{a[i], b[i], c[i], d[i], e[i], f[i]}, {i, 1, n - 1}]];
so = Solve[mol, mt];

Piecewise[ Table[ {s[i, t] /. so[[1]], u[[i]] <= t <= u[[i + 1]]},
{i, n - 1}]  ,

0]

]

x = {a, b};

(*xiha betartib*)

y = {1, 0};(*yiha betartib*)

yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)

yz = {0, 0};

p1 = Transpose[{x, y, yp, yz}];

h1[t_, a_, b_] = sph5[t, p1] // Simplify

x = {a, b};

(*xiha betartib*)

y = {1, 0};(*yiha betartib*)

yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)

yz = {0, 0}

p1 = Transpose[{x, y, yp, yz}];

h1[t_, a_, b_] = sph5[t, p1] // Simplify

x = {a, b};

```

```

(*xiha betartib*)

y = {0, 1};(*yiha betartib*)

yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)

yz = {0, 0};

p1 = Transpose[{x, y, yp, yz}];

h2[t_, a_, b_] = sph5[t, p1] // Simplify

x = {a, b};

(*xiha betartib*)

y = {0, 0};(*yiha betartib*)

yp = {1, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)

yz = {0, 0};

p1 = Transpose[{x, y, yp, yz}];

h3[t_, a_, b_] = sph5[t, p1] // Simplify

x = {a, b};

(*xiha betartib*)

y = {0, 0};(*yiha betartib*)

yp = {0, 1};(*y prim-ha betartib vared con *)

yz = {0, 0};

p1 = Transpose[{x, y, yp, yz}];

h4[t_, a_, b_] = sph5[t, p1] // Simplify

x = {a, b};

(*xiha betartib*)

y = {0, 0};(*yiha betartib*)

yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)

yz = {1, 0};

p1 = Transpose[{x, y, yp, yz}];

h5[t_, a_, b_] = sph5[t, p1] // Simplify

x = {a, b};

(*xiha betartib*)

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

y = {0, 0};(*yiha betartib*)
yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)
yz = {0, 1};
p1 = Transpose[{x, y, yp, yz}];
h6[t_, a_, b_] = sph5[t, p1] // Simplify

{0, 0}

D[{-1 + 2 t + t^2/2 + 2 Sin[t]^2}, t, t]

{1 + 4 Cos[t]^2 - 4 Sin[t]^2}

NSolve[1 + 4 Cos[t]^2 - 4 Sin[t]^2 == 0]

{{t -> ConditionalExpression[1. (-0.911738 + 6.28319 C[1]), C[1] \[Element] Integers]}},
 {t -> ConditionalExpression[1. (2.22985\[VeryThinSpace]+ 6.28319 C[1]), C[1]
 \[Element] Integers]}},
 {t -> ConditionalExpression[1. (0.911738\[VeryThinSpace]+ 6.28319 C[1]), C[1]
 \[Element] Integers]}},
 {t -> ConditionalExpression[1. (-2.22985 + 6.28319 C[1]), C[1] \[Element] Integers]}}

x = {0, 1/3, 2, 4, 5.3, 6};
y = ( = g[-1 - 2 t + t^2/2 - 2 Sin[t]^2, t^2/2, 1 + 2 t + t^2/2 + 2 Cos[t]^2])
 /. ({t -> #1} & /@ x) // N
yp = (D[#1, t] & /@ ) /. ({t -> #1} & /@ x) // N
yz = (D[#1, t, t] & /@ ) /. ({t -> #1} & /@ x) // N
y1 = Apply[#1 &, y, 1];
y2 = Apply[#2 &, y, 1];
y3 = Apply[#3 &, y, 1];

```

```

yp1 = Apply[#1 &, yp, 1];
yp2 = Apply[#2 &, yp, 1];
yp3 = Apply[#3 &, yp, 1];

yz1 = Apply[#1 &, yz, 1];
yz2 = Apply[#2 &, yz, 1];
yz3 = Apply[#3 &, yz, 1];

Clear[s1, s2];
n = Length[x] - 1;
s1[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i + 1]] +
  h5[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz1[[i]] +
  h6[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz1[[i + 1]], {i, 1, n}];
s2[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i + 1]] +
  h5[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz2[[i]] +
  h6[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz2[[i + 1]], {i, 1, n}];
s3[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i + 1]] +
  h5[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz3[[i]] +
  h6[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz3[[i + 1]], {i, 1, n}];

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

p1 = Transpose[{x, y1}];
p2 = Transpose[{x, y2}];
p3 = Transpose[{x, y3}];
gsh = Plot[{s1[t], s2[t], s3[t]}, {t, 0, 6}, (*Prolog->{PointSize[.02],Black,
    Point[p2],Point[p1],Point[p3]},PlotPoints->300,*)PlotPoints -> 150,
    Axes -> False, Frame -> True, PlotRange -> {{0, 7}, {-10, 35}}]

{g[-1., 0., 3.], g[-1.82522, 0.0555556, 3.50811], g[-4.65364, 2., 7.34636],
    g[-2.1455, 8., 17.8545], g[1.05966, 14.045, 26.2597],
    g[4.84385, 18., 32.8439]}

{g[-2., 0., 2.], g[-2.90341, 0.333333, 1.09659], g[1.5136, 2., 5.5136],
    g[0.0212835, 4., 4.02128], g[5.14555, 5.3, 9.14555], g[5.07315, 6., 9.07315]}

{g[-3., 1., -3.], g[-2.14355, 1., -2.14355], g[3.61457, 1., 3.61457],
    g[1.582, 1., 1.582], g[2.54135, 1., 2.54135], g[-2.37542, 1., -2.37542]}

= 1/2

x = {0, 1/3, 2, 4, 5.3, 6};
y = ( =
    g[-1 - 2 t + t^2/2 - 2 Sin[t]^2, t^2/2,
    1 + 2 t + t^2/2 + 2 Cos[t]^2]) /. ({t -> #1} & /@ x);
yp = (D[#1, t] & /@ ) /. ({t -> #1} & /@ x) // N
yz = (D[#1, t, t] & /@ ) /. ({t -> #1} & /@ x) // N

{g[-2., 0., 2.], g[-2.90341, 0.333333, 1.09659], g[1.5136, 2., 5.5136],

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
g[0.0212835, 4., 4.02128], g[5.14555, 5.3, 9.14555], g[5.07315, 6., 9.07315]}
```

```
{g[-3., 1., -3.], g[-2.14355, 1., -2.14355], g[3.61457, 1., 3.61457],  
g[1.582, 1., 1.582], g[2.54135, 1., 2.54135], g[-2.37542, 1., -2.37542]}
```

```
z1 = Apply[#1 &, y, 1];
```

```
z2 = Apply[#2 &, y, 1];
```

```
z3 = Apply[#3 &, y, 1];
```

```
y1 = (z1 + z2)/2;
```

```
y2 = z2;
```

```
y3 = (z2 + z3)/2;
```

```
zp1 = Apply[#1 &, yp, 1];
```

```
zp2 = Apply[#2 &, yp, 1];
```

```
zp3 = Apply[#3 &, yp, 1];
```

```
yp1 = (zp1 + zp2)/2;
```

```
yp2 = zp2;
```

```
yp3 = (zp2 + zp3)/2
```

```
zz1 = Apply[#1 &, yz, 1];
```

```
zz2 = Apply[#2 &, yz, 1];
```

```
zz3 = Apply[#3 &, yz, 1];
```

```
yz1 = (zz1 + zz2)/2;
```

```
yz2 = zz2;
```

```
yz3 = (zz2 + zz3)/2;
```

```
{1., 0.714964, 3.7568, 4.01064, 7.22278, 7.53657}
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

Clear[s1, s2];

n = Length[x] - 1;

s1[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i + 1]] +
  h5[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz1[[i]] +
  h6[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz1[[i + 1]], {i, 1, n}];

s2[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i + 1]] +
  h5[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz2[[i]] +
  h6[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz2[[i + 1]], {i, 1, n}];

s3[t_] = Sum[
  h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i + 1]] +
  h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i]] +
  h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i + 1]] +
  h5[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz3[[i]] +
  h6[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yz3[[i + 1]], {i, 1, n}];

p1 = Transpose[{x, y1}];
p2 = Transpose[{x, y2}];
p3 = Transpose[{x, y3}];

g2 = Plot[{s1[t], s2[t], s3[t]}, {t, 0, 6}, (*Prolog->{PointSize[.02],Black,
  Point[p2],Point[p1],Point[p3]},PlotPoints->300,*)PlotStyle -> {Dashed},
  Axes -> False, Frame -> True, PlotRange -> {{0, 7}, {-10, 35}}]

Show[gsh, g2]

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

۶-۶-۴. برنامه مربوط به رسم شکل ۶.۴ در مثال ۶-۵-۴

```

Clear[l, x, lp, lag, p, h, j, hh];

l[i_, x_, t_] := Product[t - x[[j]], {j, i - 1}] Product[t - x[[j]], {j, i + 1, Length[x]}/
    (Product[x[[i]] - x[[j]], {j, i - 1}] Product[x[[i]] - x[[j]], {j, i + 1, Length[x]}]);

lag[x_, y_, t_] := Sum[y[[i]] l[i, x, t], {i, Length[x]}];

lp[i_, x_, t_] := D[l[i, x, t], t];

h[j_, x_, t_] := (1 - 2 (t - x[[j]]) (lp[j, x, t] /. t -> x[[j]])) l[j, x, t]^2;

hh[j_, x_, t_] := (t - x[[j]]) l[j, x, t]^2;

p[t_, x_, u_, up_] := Sum[h[j, x, t] u[[j]], {j, Length[x]}] + Sum[hh[j, x, t] up[[j]],
    {j, Length[x]}]

x = {0, 1}
y = {0, 5}
yp = {4, 7}

p[t, x, y, yp] // Simplify

t (4 + t^2)

Clear[x, y, yp];

x = {1, 1.3, 2.2, 3, 3.5, 4};

y = {g[-2, 0, 1], g[4, 5, 7], g[1, 1, 4], g[0, 4, 7], g[-3, 0, 2], g[0, 1, 2]};

yp = {g[1, 1, 4], g[-2, 0, 1], g[0, 4, 7], g[4, 5, 7], g[0, 1, 2], g[-3, 0, 2]};

qq[t_] = p[t, x, y, yp] // Simplify;

Clear[g]

Clear[g, a, b, c, x, z];

g[a_, b_, c_][x_] := 0 /; x <= a || x >= c;

g[a_, b_, c_][x_] := (x - a)/(b - a) /; a <= x <= b;

g[a_, b_, c_][x_] := (c - x)/(c - b) /; b <= x <= c;

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
(*g[a_,b_,c_][x_]:=0/x>=c;*)

Times[t_, g[a_, b_, c_]] ^= g[t a, t b , t c] /; t >= 0;
Times[t_, g[a_, b_, c_]] ^= g[t c, t b , t a] /; t < 0;
g[a_, b_, c_] + g[a1_, b1_, c1_] ^= g[a + a1, b + b1, c + c1];
g[a_, b_, c_]*g[a1_, b1_, c1_] ^= g[Min[a a1, a c1, c b1, c c1], b b1, Max[a a1, a c1, c b1, c c1]];

ghs2 = Plot[{(qq[t])[[1]], qq[t] [[2]], (qq[t])[[3]]}, {t, 1, 4},
  PlotStyle -> {{Black, Dashing[{.08, .01, .01, .01}], Thick}},
  PlotRange -> All, Axes -> False, Frame -> True]
```

۷-۶-۴. برنامه مربوط به رسم شکل ۷.۴ در مثال ۷-۵-۴

```
Clear[g]

Clear[g, a, b, c, x, z];

g[a_, b_, c_][x_] := 0 /; x <= a || x >= c;
g[a_, b_, c_][x_] := (x - a)/(b - a) /; a <= x <= b;
g[a_, b_, c_][x_] := (c - x)/(c - b) /; b <= x <= c;

(*g[a_,b_,c_][x_]:=0/x>=c;*)

Times[t_, g[a_, b_, c_]] ^= g[t a, t b , t c] /; t >= 0;
Times[t_, g[a_, b_, c_]] ^= g[t c, t b , t a] /; t < 0;
g[a_, b_, c_] + g[a1_, b1_, c1_] ^= g[a + a1, b + b1, c + c1];
g[a_, b_, c_]*g[a1_, b1_, c1_] ^=
  g[Min[a a1, a c1, c b1, c c1], b b1, Max[a a1, a c1, c b1, c c1]];

Clear[sph];

sph[t_, p_] := Module[{p0 = p, u, v, vp, s, sp, sz, n, a, b, c, d, mo1, mo2, i, x,
  mo, mt, so}, {u, v, vp} =Transpose[p0];

  s[i_, x_] = a[i] x^3 + b[i] x^2 + c[i] x + d[i];

  sp[i_, x_] = D[s[i, x], x];
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```

n = Length[p];
mo1 = Flatten[{Table[{s[i, u[[i]]] == v[[i]],
    s[i, u[[i + 1]]] == v[[i + 1]]}, {i, 1, n - 1}],
    Table[{sp[i, u[[i]]] == vp[[i]], sp[i, u[[i + 1]]] == vp[[i + 1]]}, {i, 1, n - 1}]]];

mt = Flatten[Table[{a[i], b[i], c[i], d[i]}, {i, 1, n - 1}]];
so = Solve[mo1, mt];

Piecewise[ Table[ {s[i, t] /. so[[1]], u[[i]] <= t < u[[i + 1]]}, {i, n - 1} ] ,
    0]

]

x = {a, b};
(*xiha betartib*)
y = {1, 0};(*yiha betartib*)
yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)
p1 = Transpose[{x, y, yp}];
h1[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify
x = {a, b};
(*xiha betartib*)
y = {0, 1};(*yiha betartib*)
yp = {0, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)
p1 = Transpose[{x, y, yp}];
h2[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify
x = {a, b};
(*xiha betartib*)
y = {0, 0};(*yiha betartib*)
yp = {1, 0};(*y prim-ha betartib vared con *)
p1 = Transpose[{x, y, yp}];
h3[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify
x = {a, b};

```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرमित قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
(*xiha betartib*)

y = {0, 0};(*yiha betartib*)

yp = {0, 1};(*y prim-ha betartib vared con *)

p1 = Transpose[{x, y, yp}];

h4[t_, a_, b_] = sph[t, p1] // Simplify

\[Piecewise] {{{((3 a - b - 2 t) (b - t)^2)/(a - b)^3), a <= t < b}, {0, \!\(\(*
    TagBox["True", "PiecewiseDefault", AutoDelete->False, DeletionWarning->True]\)}}}

\[Piecewise] { {((a - t)^2 (a - 3 b + 2 t))/(a - b)^3), a <= t < b}, {0, \!\(\(* TagBox["True",
    "PiecewiseDefault", AutoDelete->False, DeletionWarning->True]\)}}}

\[Piecewise] {-((a - t) (b - t)^2)/(a - b)^2), a <= t < b}, {0, \!\(\(* TagBox["True",
    "PiecewiseDefault", AutoDelete->False, DeletionWarning->True]\)}}}

\[Piecewise] { {((a - t)^2 (-b + t))/(a - b)^2), a <= t < b}, {0, \!\(\(* TagBox["True",
    "PiecewiseDefault",
    AutoDelete->False, DeletionWarning->True]\)}}}

y1 = Apply[#1 &, y, 1];
y2 = Apply[#2 &, y, 1];
y3 = Apply[#3 &, y, 1];

yp1 = Apply[#1 &, yp, 1];
yp2 = Apply[#2 &, yp, 1];
yp3 = Apply[#3 &, yp, 1];

(1, (-2, 0, 1), (1, 1, 4)),
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
(1.3, (4, 5, 7), (-2, 0, 1)),
(2.2, (4, 1, 4), (2, 4, 7)),
(3, (0, 4, 7), (4, 5, 7)),
(3.5, (-3, 0, 2), (0, 1, 2))
(4, (0, 1, 2), (-3, 0, 2))

Clear[x, y1, y2, y3];

x = {1,      1.3, 2.2, 3,   3.5,   4};
y1 = {-2,    4,    1,    0,   -3,    0};
y2 = {0,     5,    1,    4,    0,    1};
y3 = {1,     7,    4,    7,    2,    2};
yp1 = {1,   -2,   0,   4,   0,   -3};
yp2 = {1,    0,   4,   5,   1,   0};
yp3 = {4,    1,   7,   7,   2,   2};

Clear[s1, s2];

n = Length[x] - 1;

s1[t_] = Sum[ h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y1[[i + 1]] +
             h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i]] + h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i + 1]], {i, 1, n}];
s2[t_] = Sum[ h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y2[[i + 1]] +
             h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i]] + h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp2[[i + 1]], {i, 1, n}];
s3[t_] = Sum[ h1[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i]] + h2[t, x[[i]], x[[i + 1]]] y3[[i + 1]] +
             h3[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp3[[i]] + h4[t, x[[i]], x[[i + 1]]] yp1[[i + 1]], {i, 1, n}];

p1 = Transpose[{x, y1}];
p2 = Transpose[{x, y2}];
p3 = Transpose[{x, y3}];

gsh2 = Plot[{s1[t], s2[t], s3[t]}, {t, x[[1]], x[[-1]]}, PlotStyle -> {{Gray, Thick}},
            Prolog -> {PointSize[.02], Black, Point[p2], Point[p1], Point[p3]},
            PlotPoints -> 300, Axes -> False, Frame -> True]
```

فصل ۴. چندجمله‌ای درونیاب هرمیت قطعه‌ای خطی، مکعبی و درجه پنجم فازی

```
ClearAll[PlotLegends]
```

```
Needs["PlotLegends`"]
```

```
ShowLegend[{Show[ghs2, gsh2, AspectRatio -> 1, Axes -> False, Frame -> True,  
    ImageSize -> {700, 500},  
    Prolog -> {PointSize[.03], Black, Point[p2], Point[p1], Point[p3]}},  
    {{{Graphics[{Black, Thick, Line[{{0, 0}, {1, 0}}]}]},  
    Graphics[{Black, PointSize[.009],  
    Point[{{1/2, 0.2}, {1/2, 1/2}, {1/2, .8}}]}]}, {Graphics[{Black, PointSize[.2],  
    Thick, Line[{{0, 0}, {.3, 0}], Line[{{1, 0}, {.7, 0}}]}]}], LegendSize -> {1, .5},  
    LegendPosition -> {1, .4}}]
```

فصل پنجم

نتیجہ گیری و پیشہادات

۱-۵ نتیجه‌گیری

مطالعه حاضر درونیابی داده‌های فازی توسط چندجمله‌ای هرمیت قطعه‌ای فازی براساس مبنای متشکل از توابع پایه‌ای اصلی برای فضای خطی $m(n+1)$ بعدی $H_{2m-1}(\Delta; I)$ را مورد بررسی قرار می‌دهد و آن را به عنوان یک تعمیم کلی برای درونیاب داده‌های فازی به وسیله چندجمله‌ای‌های هرمیت از درجه کم و مبتنی بر مفهوم فضای خطی معرفی می‌نماید و یک رابطه موجز به منظور محاسبه درونیاب‌های معرفی شده و از درجات دلخواه $(2m-1)$ ارائه می‌دهد. به علاوه به ازای دو حالت ابتدایی روش که به ترتیب با اختیار $m=1$ و $m=2$ حاصل می‌شوند، چندجمله‌ای‌های درونیاب به دست آمده می‌توانند جایگزین اسپلاین فازی از مرتبه $l=2$ و درونیاب هرمیت ساده فازی گردند. در اینجا درونیاب هرمیت قطعه‌ای از درجه پنجم فازی در نقش زیر حالتی ویژه از چندجمله‌ای درونیاب کلی با اختیار $m=3$ و براساس اصل گسترش به سادگی و با فرمولی صریح به دست می‌آید و کلیه چندجمله‌ای‌های درونیاب هرمیت قطعه‌ای فازی از درجه فرد قابل محاسبه و کاربردی می‌شوند.

۲-۵ پیشنهادات

قدم بعدی جهت ارتقاء این پژوهش معرفی یک برآورد خطا برای درونیاب کلی، همچنین وارد کردن مشتق تعمیم‌یافته‌ی هاکوها را و نقاط سوئیچ در مطالعه می‌باشد. از منظری دیگر می‌توان درونیاب‌های داده‌های فازی را براساس پایه‌های متعامد فضاهای خطی نیز بررسی نمود که در این صورت نیاز به بکارگیری نرم‌های فازی می‌باشد. به دلیل استفاده از توابع پایه‌ای اصلی در ساختار پاره‌ای از توابع، به‌ویژه توابع چندمتغیره، ادامه پژوهش می‌تواند برای درونیابی فازی این توابع انجام گیرد. به‌طور مشخص درونیابی فازی هرمیت-بیرخوف مثالی بر پیشنهاد بالا می‌باشد.

مراجع

- [1] Abbasbandy, S., 2001. Interpolation of fuzzy data by complete splines. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 8(3), pp.587-594.
- [2] Abbasbandy, S. and Babolian, E., 1998. Interpolation of fuzzy data by natural splines. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 5(2), pp.457-463.
- [3] Abbasbandy, S., Ezzati, R. and Behforooz, H., 2008. Interpolation of fuzzy data by using fuzzy splines. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 16(01), pp.107-115.
- [4] Allasia, G. and Bracco, C., 2012. Multivariate Hermite–Birkhoff interpolation by a class of cardinal basis functions. *Applied Mathematics and Computation*, 218(18), pp.9248-9260.
- [5] Bede, B. 2013 . Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. *Springer*, Berlin Heidelberg.
- [6] Bede, B. and Gal, S.G., 2005. Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. *Fuzzy sets and systems*, 151(3), pp.581-599.
- [7] Bede, B. and Stefanini, L., 2013. Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 230, pp.119-141.
- [8] Behforooz, H., Ezzati, R. and Abbasbandy, S., 2010. Interpolation of fuzzy data by using E (3) cubic splines. *International Journal of Pure and Applied Mathe-*

- matics*, 60(4), pp.383-392.
- [9] Birkhoff, G., Schultz, M.H. and Varga, R.S., 1968. Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations. *Numerische Mathematik*, 11(3), pp.232-256.
- [10] Cheney, E.W., 1982. Introduction to Approximation Theory. *American Mathematical Society*.
- [11] Ciarlet, P.G., Schultz, M.H. and Varga, R.S., 1967. Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. *Numerische Mathematik*, 9(5), pp.394-430.
- [12] Davis, P. J., 1975. Interpolation and approximation, Second edition, *Dover*, New York, NY.
- [13] Diamond, P. and Kloeden, P., 2000. Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. In Fundamentals of Fuzzy Sets (pp. 583-641). *Springer US*.
- [14] Dubois, D. and Prade, H., 1980. Theory and applications, *fuzzy sets and systems*. New York: Academic.
- [15] Goghary, H. Sadeghi, and Saeid Abbasbandy, 2005. Interpolation of fuzzy data by Hermite polynomial. *International Journal of Computer Mathematics* 82.12: 1541-1545.
- [16] Guang-Quan, Z., 1991. Fuzzy continuous function and its properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(2), pp.159-171.
- [17] Kaleva, O., 1994. Interpolation of fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 61(1), pp.63-70.
- [18] Lakshmikantham, V., Bhaskar, T.G. and Devi, J.V., 2006. Theory of set differential equations in metric spaces (Vol. 2, No. 006). Cambridge: *Cambridge Scientific Publishers*.

- [19] Lodwick, W.A. and Santos, J., 2003. Constructing consistent fuzzy surfaces from fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, 135(2), pp.259-277.
- [20] Lowen, R., 1990. A fuzzy Lagrange interpolation theorem. *Fuzzy Sets and Systems*, 34(1), pp.33-38.
- [21] Negoita, C. V. and Ralescu, D. A., 2000. Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis. *Birkhuser Basel*.
- [22] Nguyen, H.T., 1978. A note on the extension principle for fuzzy sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 64(2), pp.369-380.
- [23] Prenter, P.M., 2008. Splines and variational methods. *Courier Corporation*.
- [24] Puri, M.L. and Ralescu, D.A., 1983. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91(2), pp.552-558.
- [25] Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24(3):319 – 330.
- [26] Stefanini, L., 2010. A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy sets and systems*, 161(11), pp.1564-1584.
- [27] Stefanini, L., 2008. A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic. Soft Methods for Handling Variability and Imprecision, in: *Series on Advances in Soft Computing*, 48.
- [28] Stefanini, L. and Bede, B., 2009. Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(3), pp.1311-1328.
- [29] Süli, E. and Mayers, D.F., 2003. An introduction to numerical analysis. *Cambridge university press*.
- [30] Varga, R.S., 1966. Hermite interpolation-type Ritz methods for two-point boundary value problems. In *Numerical Solution of Partial Differential Equations* (pp. 365-373). *Academic Press Englewood Cliffs, NJ*.

- [31] Wendroff, B., 2014. Theoretical numerical analysis. *Elsevier*.
- [32] Zadeh, L.A., 1965. Information and control. *Fuzzy sets*, 8(3), pp.338-353.
- [33] Zadeh, L.A., 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information sciences*, 8(3), pp.199-249.
- [34] Zeinali, M., Shahmorad, S. and Mirnia, K., 2014. Hermite and piecewise cubic Hermite interpolation of fuzzy data. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, 26(6), pp.2889-2898.

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abstract framework	چارچوب انتزاعی
Algebraic conjugate space	فضای مزدوج جبری
Approximation theory	نظریه تقریب
Cardinal basis method	روش پایه‌ی اصلی
Characteristic function	تابع مشخصه
Closure	بستار
Core	هسته
Crisp	قطعی
Extension prenciple	اصل گسترش
Full Hermite Interpolation	درونیابی هرमित کامل
Generalized Hukuhara difference	تفریق تعمیم‌یافته‌ی هاکوهارا
Gram determinant	دترمینان گرام
Gram matrix	ماتریس گرام
Hausdorff metric space	فضای متریک هاسدورف
Hukuhara difference	تفریق هاکوهارا

Hukuhara differentiable	مشتق‌پذیر هاکوهارا
Kroneker's delta	دلتای کرونکر
Low order piecewise polynomial	چندجمله‌ای قطعه‌ای با درجه کم
Membership function	تابع عضویت
Natural spline	اسپلاین طبیعی
Not-a-knot	نبود یک گره
Orthogonal	متعامد
Orthonormal	متعامد یکه
Runge- Meray Phenomenon	پدیده‌ی رونگه- مری
Runge's function	تابع رونگه
Strongly generalized differentiable	مشتق‌پذیر تعمیم‌یافته‌ی قوی
Support	تکیه‌گاه
Switching point	نقطه‌ی سوئیچ
Triangular fuzzy number	عدد فازی مثلثی
Upper semi continuous	نیم‌پیوسته بالایی
α -level	α -برش

A b s t r a c t

This thesis focuses on introduce interpolation of fuzzy data by the fuzzy-valued piecewise Hermite polynomial in general case of $2m - 1$ degree, based on the cardinal basis functions, which satisfy a vanishing property on the successive intervals.

In this thesis a numerical method in full detail using the linear space notions for calculating the presented interpolant is provided. In order to illustrate the method in computational examples, we take recourse to three prime cases: linear, cubic and quintic.

An outstanding feature of this thesis is that, by exactly the same data and with assume $m = 1$ and $m = 2$ two linear and cubic cases have produced, first case is as same as fuzzy spline of order $\ell = 2$ and second case is an alternative to simple fuzzy Hermite polynomial interpolation.

Keywords: Cardinal basis functions, Fuzzy data interpolation, Piecewise Hermite interpolation.



Islamic Azad University

Science and research Branch

Faculty of Sciences-Department of Mathematics

Ph.D Thesis for the degree of Doctor of philosophy

Subject:

On the interpolation of fuzzy data and switching points

Supervisors:

Dr. S. Abbasbandy
Dr. T. Allahviranlo

Advisor:

Dr. E. Babolian

By:

Hossein Vosoughi

Winter 2017