

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مسایل وابسته به زمان

استاد راهنما

دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور

دکتر داود رستمی

پژوهشگر

مادی روحانی قمساره

شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: روحانی قهساره

نام: هادی

عنوان: روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مسایل وابسته به زمان

استاد راهنما: دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور: دکتر داود رستمی

مقطع تحصیلی: دکتری

رشته: ریاضی کاربردی

گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲

تعداد صفحات: ۱۲۳

واژگان کلیدی: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، روش‌های بدون شبکه، توابع پایه‌ای شعاعی، روش‌های هم محلی، روش‌های گالرکین، جواب‌های ویژه، معادله انتشار، معادله شرودینگر، معادله هذلولوی دو بعدی، معادله انتشار تومور

چکیده

در این رساله از روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان و بهبود آن‌ها استفاده شده است. ایده اصلی این روش‌ها تقریب تابع مجهول جواب به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد. هر دو رده اصلی آزمودن جواب‌ها که مبتنی بر فرم قوی معادلات حاکم (روش‌های هم محلی) و فرم ضعیف معادلات حاکم (روش‌های گالرکین) مورد بررسی قرار گرفته‌اند. برای حل معادلات وابسته به زمان، از دو روش برای مواجهه با مشتق زمانی معادلات استفاده شده است، در رده اول از روش‌ها از تکنیک‌های استاندارد تفاضلات متناهی برای گسسته سازی مشتقات زمانی استفاده شده است و سپس معادلات گسسته سازی شده حاصل توسط روش‌های هم محلی یا گالرکین حل شده‌اند. در رده دوم به منظور حذف خطای ناشی از گسسته سازی مشتق زمان، از متغیر زمان به عنوان بعد سوم در دامنه مدل استفاده شده است. در ادامه با توجه به مشکلات ناشی از بد شرطی دستگاه معادلات خطی حاصل از این دسته از روش‌های بدون شبکه، برخی فرم‌های موضعی این روش‌ها معرفی و استفاده شده‌اند. همچنین برای کاهش اطلاعات مورد نیاز برای همواری فضاهای جواب از فرم‌های قوی و ضعیف روش‌های جواب‌های ویژه تقریبی استفاده شده است.

تقدیم بہ مقدس ترین واثرہ مادر لغت نامہ دلم،

پدر، مہربانی مشفق، بردبار و حامی.

مادر مہربانم کہ زندگیم را دیویون مہر و عطوفت
ایشان می دانم.

و خواهران عزیزم، همراهان، همیشگی و

پشتوانه‌های زندگیم.

سپاس‌گزاری...

سپاس ایزد منان که به من این فرصت را داد تا به این مرحله از علم رسیده و از هیچ محبتی دریغ نکرد و در تمام مراحل زندگیم مرا قوت قلب بود.

ابتدا بر خود لازم می‌دانم از زحمات بی دریغ، تلاش‌ها و راهنمایی‌های ارزشمند استاد گرامی جناب آقای پروفیسور سعید عباس بندی در راستای انجام این پروژه تشکر و قدر دانی نمایم.

لازم است از زحمات استاد مشاور جناب آقای دکتر داود رستمی تشکر و قدر دانی نمایم.

از داوران علمی این رساله آقایان دکتر سهرابعلی یوسفی (دانشگاه شهید بهشتی)، دکتر عظیم امین عطایی (دانشگاه خواجه نصیر)، دکتر علی آبکار (دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)) تشکر و سپاس فراوان را دارم.

همچنین شایسته است از زحمات و الطاف دوستان گرامیم آقایان دکتر میر سجاد هاشمی، دکتر محسن علیپور، دکتر الیاس شیوانیان، دکتر احمد شیرزادی، دکتر بابک آذرنوید، دکتر مرتضی لطفی پارسا، دکتر محمد اسلامیان، سید مصطفی طاهریان و خانم دکتر کبری کریمی کمال تشکر و سپاس را داشته باشم و از خداوند متعال موفقیت ایشان را خواستارم.

در پایان و مهمتر از همه از پدر و مادر عزیزم و خواهران گرامیم که همواره مشوق و پناه من در طول این سالیان بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

مادی روحانی قساره
شهریور ۱۳۹۲

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان به طور وسیعی در مدل بندی پدیده های متنوع طبیعی در علوم پایه و علوم مهندسی مورد استفاده قرار گرفته اند. جواب های این رده از مدل های ریاضی برای پیش بینی رفتار پدیده های مختلف به کار می روند، به نحوی که کاملاً بر نتایج حاصل از شرایط تجربی و آزمایشگاهی منطبق می باشند. متأسفانه در اغلب موارد یک روش تحلیلی برای محاسبه جواب های دقیق این مسائل وجود ندارد، لذا بررسی عددی این مسائل دارای اهمیت ویژه ای می باشند. روش های عددی متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی وابسته به زمان ارائه شده اند که از آن جمله می توان به روش های استاندارد تفاضلات متناهی^۱، عناصر متناهی^۲، حجم متناهی^۳ و روش های عناصر مرزی^۴ اشاره کرد.

روش عناصر متناهی یکی از متداول ترین و قوی ترین روش های عددی می باشد که در دهه های اخیر نظریه های تحلیلی، کاربردهای فرگیر در علوم مهندسی و همچنین بسته های نرم افزاری و کاربردی وسیعی بر مبنای آن ارائه شده اند. هر چند روش عناصر متناهی روشی پرکاربرد در علوم مهندسی می باشد ولی متأسفانه دارای دو اشکال اساسی می باشد (این دو اشکال، از معایب اصلی روش های مبتنی بر شبکه بندی می باشند): محدودیت در شبکه بندی مسائل با دامنه هایی با شکل های هندسی پیچیده و همچنین پیچیدگی محاسباتی برای حل مسائل با ابعاد بالا.

به طوری کلی در حل عددی بسیاری از مسائل با استفاده از روش های مبتنی بر شبکه بندی در اغلب موارد به اصلاح کردن شبکه ها در نواحی خاصی از دامنه، به خصوص نزدیک مرزها می باشد که سبب پیچیدگی محاسباتی خواهد شد. به علاوه روش های مبتنی بر شبکه بندی برای حل مسائل با ابعاد بزرگ مناسب نمی باشند، حتی با استفاده از روش های مدرن شبکه بندی، همچنین حل مسائل سه بعدی بسیار پیچیده و دشوار می باشند. در مسائل با ابعاد بالاتر از سه، عملاً به کارگیری روش های معمول مبتنی بر شبکه، مانند تفاضلات متناهی و عناصر متناهی امکان پذیر نمی باشند.

در دهه های اخیر برخی روش های عددی ارائه و توسعه یافته اند که بدون نیاز به شبکه بندی دامنه، برای حل معادلات استفاده می شوند. مهمترین هدف ارائه و توسعه روشهای بدون شبکه، فائق آمدن بر مشکل شبکه بندی و شبکه بندی مجدد کل دامنه باشد. به طور کلی یک تعریف جامع برای روش های بدون شبکه به

^۱ finite differences

^۲ finite elements

^۳ finite volume

^۴ boundary element methods

صورت زیر می‌باشد: روش بدون شبکه، روشی است که بدون استفاده از یک شبکه بندی از قبل تعیین شده برای گسسته سازی دامنه و تنها با استفاده از یک مجموعه نقاط پراکنده در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده، مساله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل نماید. روشهای بدون شبکه، از یک مجموعه نقاطی که در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده برای نمایش دامنه و مرزهای آن (و نه برای گسسته سازی دامنه) استفاده می‌کند. این مجموعه نقاط پخش شده، نقاط میدانی^۵ نامیده می‌شوند، و این نقاط یک شبکه نمی‌سازند، به این معنی که هیچگونه اطلاعات قبلی درباره رابطه بین این گرهمها برای درونیایی یا تقریب تابع مجهول و ... نیاز نیست. اخیراً تکنیک های متنوعی مبتنی بر روش های بدون شبکه معرفی شده‌اند و کاربردهای خوبی در حل عددی مسائل پیچیده مختلفی داشته‌اند و نشان داده شده است که پتانسیل بالایی برای تبدیل شدن به یک وسیله عددی قوی دارند. با این وجود، این روشها هنوز در مرحله توسعه قرار دارند و هنوز سوالات و مسائل تکنیکی وجود دارند که باید پاسخ داده شوند.

در سال های اخیر چندین روش بدون شبکه معرفی شده‌اند که از مهمترین رده آنها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد: روش ذرات هیدرودینامیکی هموار^۶ (SPH) [۶۷] روش عناصر پخش شده (DEM)^۷ [۷۷]، روش افراز یکه (PUM)^۸ [۷۰]، روش اچ-پی کلود^۹ [۴۳]، روش گالرکین با عناصر آزاد (EFG)^{۱۰} [۱۵]، روش بازتولید عناصر هسته (RKPM)^{۱۱} [۶۳]، روش بدون شبکه هم محلی بر اساس توابع پایه‌ای شعاعی (RBF) [۵۹، ۷۳، ۸۶]. روش نودهای مرزی (BNM)^{۱۲} [۷۵]، روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی (LBIE)^{۱۳} [۱۰۵، ۸۸، ۳۳، ۷۲]، روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین (MLPG)^{۱۴} [۹، ۱۰، ۳۴، ۳۲، ۶۸]، روش درونیایی شعاعی نقاط^{۱۵} [۶۶]. به علت کثرت این روشها، بیان همه آنها امکان پذیر نیست اما، مرجع [۷۸] یک بازنگری (تا حدی کلی) از این روشها ارائه داده است.

در سال ۱۹۹۰ برای اولین بار کانسا یک روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه نمود. در حقیقت در این مقاله کانسا یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی را به عنوان تقریب جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی ارائه کرد. توابع پایه‌ای شعاعی برای اولین بار توسط هاردی و برای درونیایی توابع با داده های پراکنده در سال ۱۹۷۰ معرفی شده بود ولی با این وجود به طور مستقیم برای اولین بار توسط کانسا برای حل معادلات مشتقات جزئی مورد استفاده قرار گرفتند. در ادامه این رده از روشهای بدون شبکه به علت توانایی زیاد آنها برای تقریب جواب معادلات

^۵Field nodes^۶Smoothed Particle Hydrodynamic^۷Diffuse element method^۸Partition of unity method^۹Hp-cloud method^{۱۰}Element free Galerkin method^{۱۱}Reproducing kernel particle method^{۱۲}Boundary node method^{۱۳}Meshless local boundary integral equation method^{۱۴}Meshless local Petrov-Galerkin method^{۱۵}Radial point interpolation method

با ابعاد بالا و سادگی اجرا به شدت مورد توجه محققان و مهندسان قرار گرفت. به طور کل مزیت اصلی روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی بر روش‌های مبتنی بر شبکه بندی را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(۱) به طور معمول در روش‌های مبتنی بر شبکه عمده هزینه محاسباتی صرف شبکه بندی دامنه ها می‌شود در حالی که در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی انتخاب نقاط کاملاً آزاد و هیچ وابستگی بین نقاط نیاز نیست.

(۲) همان گونه که اشاره شد عدم وابستگی به بعد فضا در روش‌های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی و امکان به کار گیری آسان آن برای مسایل با ابعاد بالا از عمده مزیت های این روش ها می‌باشد.

این رساله شامل شش فصل می‌باشد. در فصل اول توابع پایه‌ای شعاعی معرفی و خواص آن‌ها بررسی خواهند شد. در فصل دوم برخی روش‌های بدون شبکه معرفی می‌شوند. در فصل سوم یک مدل ریاضی بررسی انتشار مویرگی در رشد یک تومور ارائه و یک روش بدون شبکه برای حل آن ارائه می‌شود. در فصل چهارم یک معادله غیر خطی شرودینگر مکعبی و دو بعدی در نظر گرفته می‌شود، برای جلوگیری از تولید انتشار خطای گسسته سازی زمانی، یک روش بدون شبکه سه بعدی معرفی و استفاده شده است. در فصل پنجم برخی روش‌های بدون شبکه موضعی برای حل معادله تلگراف دو بعدی معرفی و اجرا شده‌اند. در نهایت در فصل ششم یک روش بدون شبکه مبتنی بر روش پتروف - گالرکین با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی برای حل یک مدل گرمای دو بعدی با شرایط مرزی غیر استاندارد ارائه شده است.

فهرست مقالات مستخرج از این پایان نامه به شرح زیر است:

(1) Numerical analysis of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis using a meshfree method based on the radial basis function, Engineering Analysis with Boundary Elements, (36) 2012,1811-1818.

(2) A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear Schrödinger equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, (37) 2013, 885-898.

(3) Meshfree methods based on the radial basis functions for solving the two-dimensional linear hyperbolic telegraph equation: A comparison study, Under revision.

(4) Comparison of meshless local weak and strong forms based on particular solutions for a non-classical 2-D diffusion model, Engineering Analysis with Boundary Elements.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

ز

لیست جداول

ش

۱ توابع پایه‌ای شعاعی

۱

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

۱

۲.۱ توابع درونیاب پایه‌ای شعاعی

۲

۱.۲.۱ توابع معین مثبت

۳

۳.۱ هسته‌های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت و فضاهای محلی

۱۴

۱.۳.۱ هسته‌های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت

۱۴

۲.۳.۱ فضاهای محلی توابع معین مثبت اکید

۱۶

۴.۱ پایداری مسائل درونیاب پایه‌ای شعاعی

۱۹

۲ مروری بر روش‌های بدون شبکه

۲۳

۱.۲ مقدمه

۲۳

۲.۲ تولید نقاط

۲۴

۳.۲ تقریب جواب

۲۶

۴.۲ آزمودن به فرم قوی سراسری (روش هم محلی)

۲۶

۱.۴.۲ روش هم محلی کانس (نا متقارن)

۲۷

۲.۴.۲ روش جواب‌های ویژه تقریبی سراسری

۲۸

۳.۴.۲ آزمودن به فرم قوی موضعی

۳۰

۴.۴.۲ آزمودن به فرم ضعیف سراسری

۳۱

۵.۴.۲ آزمودن به فرم ضعیف محلی

۳۱

۳۲	۳	یک روش بدون شبکه برای بررسی عددی رشد مویرگی در انتشار تومورها
۳۲	۱.۳	مقدمه
۳۳	۲.۳	تکنیک های عددی
۳۴	۱.۲.۳	گسسته سازی زمانی
۳۵	۲.۲.۳	روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی
۳۷	۳.۲.۳	بررسی پایداری
۳۸	۳.۳	نتایج عددی
۳۹	۱.۳.۳	حالت ۱
۴۰	۲.۳.۳	حالت ۲
۴۴	۳.۳.۳	حالت ۳
۴۴	۴.۳.۳	حالت ۴
۴۵	۵.۳.۳	حالت ۵
۴۷	۴.۳	نتیجه گیری
۴۸	۴	بررسی عددی معادله شرودینگر دو بعدی توسط روش بدون شبکه
۴۸	۱.۴	مقدمه
۴۹	۲.۴	فرمول بندی مسئله
۵۰	۱.۲.۴	روش بدون شبکه کانسا
۵۱	۲.۲.۴	الگوریتم نیوتن چند مرحله ای
۵۴	۳.۴	نتایج عددی
۵۴	۱.۳.۴	مثال ۱
۵۷	۲.۳.۴	مثال ۲
۶۱	۳.۳.۴	مثال ۳
۶۴	۴.۳.۴	مثال ۴
۶۹	۴.۴	نتیجه گیری
۷۰	۵	روش های بدون شبکه موضعی برای حل عددی معادله تلگراف دو بعدی
۷۰	۱.۵	مقدمه
۷۱	۲.۵	گسسته سازی زمانی
۷۲	۳.۵	گسسته سازی مکانی
۷۳	۱.۳.۵	روش هم محلی کانسا سراسری
۷۶	۲.۳.۵	روش هم محلی نامتقارن کانسا موضعی



۷۸	۳.۳.۵	روش جواب های ویژه تقریبی
۷۹	۴.۳.۵	یک فرم موضعی از روش جواب های ویژه تقریبی
۸۱	۴.۵	نتایج عددی
۸۱	۱.۴.۵	مثال ۱
۸۴	۲.۴.۵	مثال ۲
۸۴	۳.۴.۵	مثال ۳
۸۶	۴.۴.۵	مثال ۴
۸۹	۵.۵	نتیجه گیری

۶ روش پتروف - گالرکین مبتنی بر توابع جواب های ویژه برای حل معادله انتشار با شرایط مرزی

۹۲	غیر استاندارد
۹۲	۱.۶ مقدمه
۹۳	۲.۶ گسسته سازی زمانی
۹۴	۳.۶ گسسته سازی مکانی
۹۴	۱.۳.۶ روش جواب های ویژه تقریبی
۹۷	۲.۳.۶ روش بدون شبکه مبتنی بر فرم ضعیف بر اساس جواب های ویژه تقریبی
۱۰۰	۴.۶ نتایج عددی
۱۰۱	۱.۴.۶ مثال ۱
۱۰۵	۲.۴.۶ مثال ۲
۱۰۵	۵.۶ نتیجه گیری

۱۰۹ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۱۱۲ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

۱۱۵ مراجع



لیست تصاویر

۸	۱.۱	برخی از توابع گاوسی بر فضای $\mathbb{R}^1$
۸	۲.۱	تابع گاوسی بر فضای $\mathbb{R}^2$
۲۵	۱.۲	داده های تولید شده به صورت یکنواخت در دامنه های آزمون دو بعدی و سه بعدی. . .
۲۵	۲.۲	نقاط چبیشف تولید شده در دامنه های آزمون دو بعدی و سه بعدی.
	۱.۳	گراف نمایش پایداری روش نسبت به تغییرات ε با فرض $N = 375(n = 3750)$
۴۰	۵۰	
۴۲	۲.۳	جواب های تقریبی برای حالت ۱ در زمان های $t = 2, 3, 10, 50, 150, 300, 500, 750$
۴۳	۳.۳	جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۲
۴۴	۴.۳	جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۳
۴۵	۵.۳	جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۴
۴۶	۶.۳	جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۵
۵۵	۱.۴	نمایش نقاط تست (x_k, y_k, t_k) که به طور تصادفی در دامنه پراکنده شده اند
۵۵	۲.۴	نمایش نقاط متساوی الفاصله (x_k, y_k, t_k) در دامنه
	۳.۴	نمایش تابع GCV و پارامتر منظم سازی بهینه برای روش تیخونوف با فرض $c_1 = c_2$
۵۶		$N = 1000, 0.61,$
۵۸	۴.۴	کانتور های خطای نسبی با فرض $c_1 = c_2 = 0.61$ و $N = 1000$ در مثال ۱
	۵.۴	نمایش تابع GCV و پارامتر منظم سازی بهینه با فرض $c_1 = c_2 = 1/0, N = 1331$
۵۹		در مثال ۲.
	۶.۴	نتایج محاسبه شده با استفاده از توابع چند ربعی معکوس با فرض $c_1 = c_2 = 0.8$ و
۶۰		$N = 1331$ در برخی سطوح زمانی برای مثال ۲. خطای مطلق
	۷.۴	توابع عددی و دقیق با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ و $N = 1728$ در زمان $t = 1$
۶۳		برای مثال ۳. شکل (a) - قسمت حقیقی و شکل (b) - قسمت موهومی

- ۸.۴ خطای مطلق با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ و $N = 1728$ برای مثال ۳ در برخی سطوح زمانی. ۶۵
- ۹.۴ گراف های جواب دقیق و جواب تقریبی محاسبه شده با فرض $c_1 = c_2 = 0/69$ و $N = 1000$ در لحظه $t = 1$ برای مثال ۴. - (a) قسمت حقیقی و - (b) قسمت موهومی. ۶۷
- ۱۰.۴ گراف های جواب دقیق و جواب تقریبی محاسبه شده با فرض $c_1 = c_2 = 0/69$ و $N = 1000$ در لحظه $t = 0/1$ برای مثال ۴. - (a) قسمت حقیقی و - (b) قسمت موهومی. ۶۷
- ۱۱.۴ توابع خطا محاسبه شده با فرض $c_1 = c_2 = 0/69$ و $N = 1000$ در برخی سطوح زمانی در مثال ۴. ۶۸
- ۱.۵ گراف توابع خطا نسبت به تغییرات پارامتر شکل با فرض $\delta t = 13, n = 100, N = 1000$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۱. ۸۳
- ۲.۵ گراف توابع خطا نسبت به تغییرات تعداد نقاط با فرض $\delta t = 13, n = 100, c = 0/5$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۱. ۸۳
- ۳.۵ گراف های کانتور توابع خطا با فرض $\delta t = 13, n = 100, N = 400$ در لحظه $t = 2$ در مثال ۲. ۸۵
- ۴.۵ گراف مربوط به تابع خطا نسبت به تغییرات پارامتر شکل با فرض $\delta t = 13, n = 100, N = 1000$ و $\delta t = 0/001$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۳. ۸۷
- ۵.۵ گراف مربوط به تابع خطا نسبت به تغییرات تعداد نقاط با فرض $\delta t = 13, n = 100, c = 0/4$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۳. ۸۷
- ۶.۵ گراف کانتور های توابع خطا با فرض $\delta t = 13, n = 100, N = 400$ و $\delta t = 0/001$ در لحظه $t = 2/5$ برای مثال ۴. ۹۰
- ۱.۶ ناحیه موضعی Ω_Q ، مرز ضروری (دیریکله) (Γ_1, Γ_2) و مرز طبیعی Γ_3 . نقطه I یک نقطه درونی و K یک نقطه روی مرز طبیعی می باشد. ۹۸
- ۲.۶ گراف تابع GCV در روش تیخونوف با فرض $\delta t = 10^{-3}, N = 400, c = 0/65$ در مثال ۱. ۱۰۲
- ۳.۶ گراف های کانتور توابع خطا با مفروضات $\delta t = 0/001, N = 400, c = 0/65$ در برخی سطوح زمانی در مثال ۱. ۱۰۳
- ۴.۶ مقادیر خطای نسبی نسبت به تغییرات طول گام زمانی δt در مثال ۱. ۱۰۴
- ۵.۶ مقادیر خطای نسبی نسبت به تغییرات پارامتر شکل c در مثال ۱. ۱۰۴



- ۶.۶ مقادیر بهینه پارامتر منظم سازی محاسبه شده توسط تابع GCV با فرض $N = ۰/۷۵$, $c = ۱۰^{-۲}$, $\delta t = ۹۰۰$ در مثال ۲. ۱۰۶
- ۷.۶ گراف کانتورهای توابع خطا با فرض $\delta t = ۰/۰۱$, $N = ۹۰۰$ و $c = ۰/۷۵$ در برخی سطوح زمانی در مثال ۲. و ۱۰۷
- ۸.۶ نمایش تغییرات مقدار خطای نسبی نتایج حاصل نسبت به تغییرات تعداد نقاط هم محلی با فرض $\delta t = ۰/۰۱$ و $c = ۰/۷۵$ در مثال ۲. ۱۰۷

لیست جداول

۱.۳	اثر تغییرات پارامتر شکلی ε بر $\ u^{n+1} - n^n\ _\infty$ و $\rho(P)$ با فرض $t = 375(n = 3750)$
۳۹	و $N = 50$ در حالت ۱
۲.۳	خطای نسبی نتایج محاسبه شده در زمان های مختلف در مثال ۱
۴۱	خطای نسبی نتایج محاسبه شده در زمان های مختلف در حالت ۲
۳.۳	خطای نسبی نتایج محاسبه شده در زمان های مختلف در حالت ۵
۴.۳	خطای نسبی نتایج محاسبه شده در زمان های مختلف در حالت ۵
۱.۴	خطای مطلق ε_∞ و نسبی ε_{rel} با فرض $c_1 = c_2 = c$ به ازای مقادیر مختلف N در مثال ۱
۵۶	مقادیر خطای مطلق محاسبه شده برای مثال ۱ با فرض $c_1 = c_2 = 0.61, N = 1000$
۲.۴	مقادیر خطای مطلق محاسبه شده برای مثال ۱ با فرض $c_1 = c_2 = 0.61, N = 1000$
۵۷	در سطوح زمانی مختلف
۳.۴	خطای مطلق و نسبی به ازای مقادیر متفاوت تعداد نقاط هم محلی N در مثال ۲
۵۹	نتایج خطای مطلق با فرض $c_1 = c_2 = 1, N = 1331$ در سطوح زمانی مختلف در
۴.۴	مثال ۲
۶۱	مقادیر محاسبه شده با استفاده از الگوریتم نیوتن استاندارد با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ و انتخاب یک مجموعه نقاط هم محلی ثابت با 1728 نقطه در مثال ۳
۵.۴	مقادیر محاسبه شده با استفاده از الگوریتم نیوتن چند مرحله ای با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ در مثال ۳
۶۲	مقادیر محاسبه شده با استفاده از الگوریتم نیوتن چند مرحله ای با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ در مثال ۳
۶.۴	خطای مطلق محاسبه شده توسط روش بدون شبکه با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$
۷.۴	توسط الگوریتم نیوتن چند مرحله ای در برخی سطوح زمانی در مثال ۳
۶۳	نتایج محاسبه شده توسط الگوریتم نیوتن استاندارد با فرض $c_1 = c_2 = 0.69$ و همچنین در نظر گرفتن یک مجموعه نقاط با 1000 نقطه در مثال ۴
۸.۴	نتایج محاسبه شده توسط الگوریتم نیوتن چند مرحله ای با فرض $c_1 = c_2 = 0.69$ در مثال ۴
۹.۴	مثال ۴
۶۴	خطای مطلق در برخی سطوح زمانی با مفروضات $c_1 = c_2 = 0.69, N = 1000$ در مثال ۴
۱۰.۴	مثال ۴
۶۶	مثال ۴

- ۱۱.۴ مقادیر خطای مطلق و نسبی در مثال ۴ با فرض $c_1 = c_2 = c$ و به ازای مقادیر متفاوت
تعداد نقاط هم محلی N ۶۶
- ۱.۵ مقادیر خطاهای ε_{RMS} و ε_{∞} با فرض $\delta t = 0.001$, $m = 13$, $N = 225$ در مثال ۱. ۸۲
- ۲.۵ مقادیر خطای ε_{RMS} با فرض $\delta t = 0.001$, $m = 13$ به ازای مقادیر مختلف N در مثال ۲. ۸۴
- ۳.۵ مقادیر خطای ε_{RMS} و ε_{∞} در مثال ۳ با فرض $N = 400$ ۸۶
- ۴.۵ مقادیر خطای ε_{∞} با فرض $T = 5$, $\delta t = 0.001$, $n = 13$ به ازای مقادیر متفاوت N
در مثال ۴. ۸۸
- ۵.۵ مقادیر خطاهای ε_{RMS} و ε_{∞} با فرض $\delta t = 10^{-3}$, $N = 400$ در مثال ۴. ۸۹
- ۱.۶ مقادیر خطاهای $\varepsilon_{\infty}(\mu)$ و $\varepsilon_R(u)$ با فرض $\delta t = 0.001$, $N = 400$ و $c = 0.65$ در
مثال ۱. ۱۰۲
- ۲.۶ مقادیر خطای $\varepsilon_{\infty}(\mu)$ و $\varepsilon_R(u)$ با در نظر گرفتن $\delta t = 0.001$ و $N = 900$ و $c = 0.75$
در مثال ۲. ۱۰۶

فصل ۱

توابع پایه‌ای شعاعی

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱. تابع $\Phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع شعاعی^۱ نامیده می‌شود، مشروط بر آن که یک تابع $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(r), \quad r = \|\mathbf{x}\|,$$

که در آن $\|\cdot\|$ یک نرم روی $\mathbb{R}^s$ است.

تعریف ۲.۱.۱. تابع $\Phi : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پایه‌ای شعاعی^۲ نامیده می‌شود، هرگاه $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^s : \quad \|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\| \implies \Phi(\mathbf{x}_1) = \Phi(\mathbf{x}_2).$

به طوری که $\|\cdot\|$ نشان دهنده یک نرم اقلیدسی^۳ روی $\mathbb{R}^s$ است.

مثال: تابع فاصله اقلیدسی $\Phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2$ حالت ساده‌ای از توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد. از آن جا که هسته‌ها^۴ نقش اساسی در تجزیه و تحلیل آنالیز توابع پایه‌ای شعاعی برعهده دارند. در زیر این توابع را معرفی کرده و برخی از خواص آن‌ها بررسی می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید Ω یک زیر مجموعه ناتهی از $\mathbb{C}^s$ ($\mathbb{R}^s$) باشد. آن گاه تابع دو متغیره

$$K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R}), \quad K : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow K(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

را یک هسته مختلط (یا حقیقی) روی Ω می‌نامند. هسته $K(.,.)$ را یک هسته شعاعی روی Ω گویند، هرگاه $\kappa : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$ چنان موجود باشد که:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \kappa(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

^۱Radial function

^۲Radial basis function

^۳Euclidean norm

^۴Kernels

همچنین هسته مختلط $K(.,.)$ را یک هسته هرمیتی^۵ روی $\Omega \subseteq \mathbb{C}^s$ گویند، هرگاه داشته باشیم:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega, \quad K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{K(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$$

در صورتی که $K(.,.)$ یک هسته حقیقی با خاصیت فوق باشد، آن را یک هسته متقارن می‌گویند.

به عنوان مثال هسته گاوسی

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \kappa(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) = e^{-\varepsilon^2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}, \quad \kappa(r) = e^{-\varepsilon^2 r^2},$$

یک هسته حقیقی شعاعی و متقارن می‌باشد.

۲.۱ توابع درونیاب پایه‌ای شعاعی

در دهه های اخیر استفاده از توابع درونیاب پایه‌ای شعاعی به علت انعطاف پذیری زیاد آن‌ها در درونیابی داده های پراکنده و همچنین داده ها در فضاهای با بعد بالا مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است.

فرض کنید $\{(\mathbf{x}_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N, : \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^s, y_i \in \mathbb{R}\}$ یک مجموعه از داده های پراکنده در فضای $\mathbb{R}^s$ می‌باشند. تابع درونیاب این مجموعه از نقاط را به صورت $\mathcal{P}_f$ نشان می‌دهیم به طوری که :

$$\mathcal{P}_f(\mathbf{x}_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

برای این منظور با توجه به درونیابی توابع پایه‌ای شعاعی، یک تابع درونیاب به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathcal{P}_f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + \sum_{k=1}^M \zeta_k p_k(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

به طوری که در آن $\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|)$ یک تابع پایه‌ای شعاعی و مجموعه $\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_M(\mathbf{x})\}$ یک پایه برای فضای چندجمله‌ای های کامل π_q^s از درجه (از پیش تعیین شده) q در فضای $\mathbb{R}^s$ می‌باشد. بعد این فضای چند جمله‌ای برابر است با $M = \binom{q+s}{s}$. به عنوان مثال این پایه ها برای فضای چندجمله‌ای های خطی در $\mathbb{R}^2$ ، عبارتند از $\{1, x, y\}$ و همچنین برای فضای چند جمله‌ای های مربعی π_2^2 عبارتند از $\{1, x, y, x^2, xy, y^2\}$. اکنون با تحمیل شرایط درونیاب (۱.۱) بر تابع درونیاب پیشنهادی (۲.۱) و همچنین تحمیل شرایط زیر که به شرایط لحظه‌ای^۶ معروف می‌باشند،

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j p_k(x_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M. \quad (3.1)$$

^۵ Hermitian Kernel

^۶ Moment conditions

یک دستگاه معادلات خطی با $N \times M$ معادله و $N \times M$ مجهول $(\{\lambda_j\}_{j=1}^N \cup \{\zeta_k\}_{k=1}^M)$ نتیجه خواهد شد. این دستگاه معادلات خطی را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نمایش داد:

$$\begin{pmatrix} \Phi & P \\ P & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \cdot \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

به طوری که در آن $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$, $\zeta = [\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_M]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ ، ماتریس P یک ماتریس $N \times M$ به صورت:

$$P = [p_k(\mathbf{x}_j)]_{N \times M}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, M.$$

و در نهایت Φ یک ماتریس $N \times N$ به صورت

$$\Phi = [\phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)]_{N \times N}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N.$$

می‌باشند. ماتریس ضرایب در دستگاه (۴.۱) را ماتریس درونیاب می‌نامند. بدیهی است که مسئله درونیاب فوق خوش وضع است، یعنی یک تابع درونیاب منحصر به فرد P_f موجود است اگر و تنها اگر ماتریس درونیاب نامنفرد باشد. متأسفانه تاکنون شرایط لازم و کافی برای نامنفرد بودن ماتریس های درونیاب توابع پایه‌ای شعاعی در حالت کلی ارایه نشده است. به منظور بررسی خوش تعریف بودن درونیاب های توابع پایه‌ای شعاعی ابتدا تعریف زیر را ارایه می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، یک ماتریس حقیقی مرتبه n باشد، آن‌گاه:

• A را معین مثبت^۷ گویند، هرگاه $x^T A x > 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$.

• A را نیمه معین مثبت^۸ گویند، هرگاه $x^T A x \geq 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $x \neq 0$.

از آن جایی که ماتریس های معین مثبت دارای مقادیر ویژه مثبت^۹ می‌باشند، لذا نامنفرد می‌باشند. بدین منظور در بخش بعد به بررسی توابع پایه‌ای شعاعی می‌پردازیم که ماتریس های درونیاب متناظر به آن‌ها معین مثبت باشند.

۱.۲.۱ توابع معین مثبت

در این بخش به معرفی توابع معین مثبت و خواص آن‌ها می‌پردازیم. به کارگیری توابع معین مثبت به عنوان توابع پایه در درونیابی منجر به ظاهر شدن ماتریس های درونیاب معین مثبت خواهند شد. لذا معرفی و بررسی آن‌ها حایز اهمیت می‌باشد.

^۷Positive definite

^۸Semi-positive definite

^۹Eigen value

تعریف ۲.۲.۱. تابع $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع معین مثبت گویند، هرگاه به ازای هر مجموعه از نقاط متمایز

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ و هر بردار $c = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T \in \mathbb{C}^n$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq 0.$$

همچنین تابع φ یک تابع معین مثبت اکید^{۱۰} نامیده می‌شود هرگاه نابرابری در رابطه بالا به صورت اکید باشد.

مثال: تابع $\varphi(\mathbf{x}) = e^{I\varepsilon \mathbf{x}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ یک تابع معین مثبت روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد.

اثبات با توجه به تعریف ۲.۲.۱

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j \varphi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i \bar{c}_j e^{I\varepsilon(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i e^{I\varepsilon \mathbf{x}_i} \sum_{j=1}^n \bar{c}_j e^{-I\varepsilon \mathbf{x}_j} \\ &= \left| \sum_{k=1}^n c_k e^{I\varepsilon \mathbf{x}_k} \right|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

در ادامه تلاش می‌شود برخی از ویژگی‌های توابع معین مثبت و همچنین ارتباط آن‌ها را با توابع پایه‌ای شعاعی بررسی کنیم. از آن جایی که بسیاری از این خواص توصیف انتگرالی دارند. در آغاز به طور خلاصه به معرفی برخی از تبدیلات انتگرالی مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۳.۲.۱. تبدیل فوریه تابع $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۸۲]:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\omega \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (5.1)$$

و تبدیل فوریه معکوس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\check{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\omega) e^{i\omega \mathbf{x}} d\omega, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (6.1)$$

همچنین، تبدیل فوریه یک اندازه متناهی μ روی $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\mu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\omega \mathbf{x}} d\mu(\mathbf{x}), \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \quad (7.1)$$

از آن جایی که هدف ما بررسی خواص توابع پایه‌ای شعاعی است، در زیر یک قضیه اساسی ارائه می‌شود که نشان می‌دهد، تبدیل فوریه هر تابع شعاعی خود یک تابع شعاعی می‌باشد.

^{۱۰} strictly positive definite

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ پیوسته و شعاعی باشد، یعنی $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|)$ آن گاه تبدیل فوریه آن $\hat{\Phi}$ نیز شعاعی است، یعنی $\hat{\Phi}(\omega) = \mathcal{F}_n \varphi(\|\omega\|)$. که در آن:

$$\mathcal{F}_n \varphi(\|\omega\|) = \frac{1}{\sqrt{r^{n-2}}} \int_0^\infty \varphi(t) t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(rt) dt. \quad (۸.۱)$$

به طوری که $J_{\frac{n-2}{2}}$ تابع بسل کلاسیک نوع اول و از مرتبه $\frac{n-2}{2}$ می باشد.

اثبات: به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

تابع بسل کلاسیک نوع اول از مرتبه d به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_d(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (x/2)^{d+2i}}{i! \Gamma(d+i+1)},$$

که در آن تابع گاما $\Gamma(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(\nu) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t} dt.$$

تبدیل انتگرالی (۸.۱) را تبدیل فوریه-بسل^{۱۱} یا تبدیل هنکل^{۱۲} نیز می نامند.

در قضیه زیر یک نتیجه مهم و بسیار معروف از توصیف توابع معین مثبت بر حسب تبدیلات فوریه ارایه می شود.

قضیه ۵.۲.۱. (قضیه بوچنر) تابع (مختلط) $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$ بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت است اگر و تنها اگر تبدیل فوریه‌ای از یک اندازه برل نامنفی متناهی μ روی $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی

$$\Phi(\mathbf{x}) = \hat{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}} d\mu(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (۹.۱)$$

اثبات به مرجع [۹۸، ۱۶] مراجعه شود.

به منظور تضمین خوش تعریف بودن مساله درونیاب، تلاش می شود در صورت امکان یک توسیع از قضیه بوچنر برای توابع معین مثبت اکید ارایه شود. در قضیه زیر یک شرط لازم برای این که تابعی معین مثبت اکید باشد ارایه می شود.

قضیه ۶.۲.۱. فرض کنید μ اندازه برل متناهی نامنفی بر $\mathbb{R}^n$ باشد مشروط بر اینکه محمل آن مجموعه‌ای از اندازه لبگ صفر نباشد. آن گاه تبدیل فوریه μ بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید است.

^{۱۱} Fourier-Bessel transform

^{۱۲} Hankel transform

اثبات: به مرجع [۴۵] مراجعه شود.

در زیر یک قضیه مهم ارائه می‌شود که در حقیقت یک روش صریح برای تولید توابع معین مثبت اکید را مشخص می‌کند.

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید f یک تابع غیرصفر پیوسته و نامنفی بر $L_1(\mathbb{R}^n)$ باشد. آن گاه تبدیل فوریه f روی $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید خواهد بود.

اثبات: به مرجع [۴۵] مراجعه شود.

در قضیه زیر یک محک برای بررسی معین مثبت اکید بودن توابع ارائه می‌شود.

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنید Φ تابعی پیوسته بر $L_1(\mathbb{R}^n)$ باشد. Φ معین مثبت اکید است اگر و تنها اگر Φ کراندار بوده و تبدیل فوریه آن نامنفی و هم ارز صفر نباشد.

اثبات: به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

اکنون با توجه به هدف اصلی این رساله که همانا بررسی توابع پایه‌ای شعاعی است، توجه خود را به توابع شعاعی معین مثبت معطوف خواهیم کرد. همان گونه که قبلاً مشاهده شد، خاصیت معین مثبت (اکید) بودن برای توابع چند گانه بررسی شد. با این حال مناسب تر است هنگام بررسی معین مثبت (اکید) توابع شعاعی $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|)$ معین مثبت (اکید) بودن تابع تک متغیره φ بررسی شود.

لم ۹.۲.۱. اگر تابع $\Phi(\cdot) = \varphi(\|\cdot\|)$ یک تابع معین مثبت (اکید) و شعاعی بر $\mathbb{R}^n$ باشد آن گاه Φ بر $\mathbb{R}^s$, $s \leq n$ نیز معین مثبت (اکید) و شعاعی خواهد بود.

قضیه ۱۰.۲.۱. تابع پیوسته $\varphi: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت و شعاعی است اگر و تنها اگر یک تبدیل فوریه-بسل تحت اندازه برل نامنفی متناهی μ بر $\mathbb{R}^{\geq 0}$ باشد. یعنی

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \Omega_n(rt) d\mu(t),$$

به طوری که در آن

$$\Omega_n = \begin{cases} \cos(r), & n = 1, \\ \Gamma(\frac{n}{2}) (\frac{2}{r})^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(r), & n \geq 2. \end{cases}$$

اثبات: به مرجع [۹۱] مراجعه شود.

اکنون تلاش می‌شود یک توصیف برای توابع معین مثبت اکید شعاعی بر مبنای تبدیلات فوریه ارائه شود.

قضیه ۱۱.۲.۱. (قضیه شوئنبرگ) تابع پیوسته $\varphi: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع معین مثبت اکید شعاعی بر $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر قابل نمایش به فرم زیر باشد:

$$\varphi(r) = \int_0^\infty e^{-r^\gamma t^\gamma} d\mu(t),$$

به طوری که μ یک اندازه برل نامنفی متناهی بر $[0, \infty]$ می‌باشد.

اثبات: به مرجع [۹۱] مراجعه شود.

در قضیه شوئنبرگ، مشاهده شد که یک اندازه برل نامنفی متناهی بر $[0, \infty]$ به نحوی به کارگرفته می‌شود که تابع معین مثبت اکید شعاعی φ به فرم زیر قابل نمایش باشد:

$$\varphi(r) = \int_0^\infty e^{-r^\gamma t^\gamma} d\mu(t),$$

بنابراین r ریشه تابع $\varphi(r)$ است هرگاه داشته باشیم:

$$\varphi(r \cdot) = \int_0^\infty e^{-r^\gamma t^\gamma} d\mu(t) = 0,$$

با توجه به این که تابع نمایی $e^{-r^\gamma t^\gamma}$ مثبت و اندازه برل μ نامنفی است لذا تساوی بالا زمانی برقرار است که μ یک اندازه صفر بر $(0, \infty)$ باشد. در این صورت با توجه به قضیه شوئنبرگ نتیجه می‌شود که تابع φ یک تابع صفر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که یک تابع معین مثبت اکید شعاعی غیر بدیهی بر $\mathbb{R}^n$ نمی‌تواند دارای ریشه باشد. به علاوه از توضیحات بالا می‌توان نتایج جالب زیر را برداشت کرد:

- تابع تک متغیری پیوسته نوسانی به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ موجود نیست که معین مثبت اکید شعاعی باشد.
 - تابع تک متغیری پیوسته و با محمل فشرده به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ موجود نیست که معین مثبت اکید شعاعی باشد.

مثال های از توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید

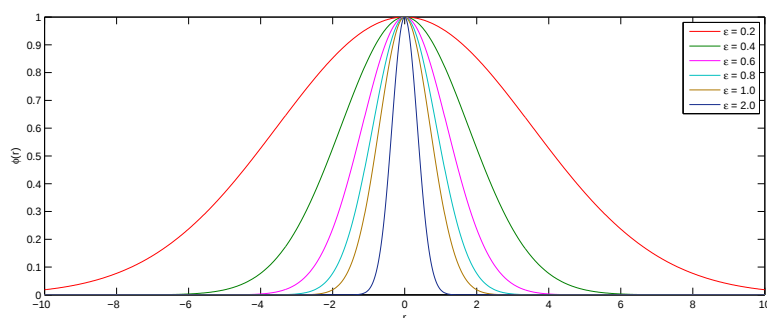
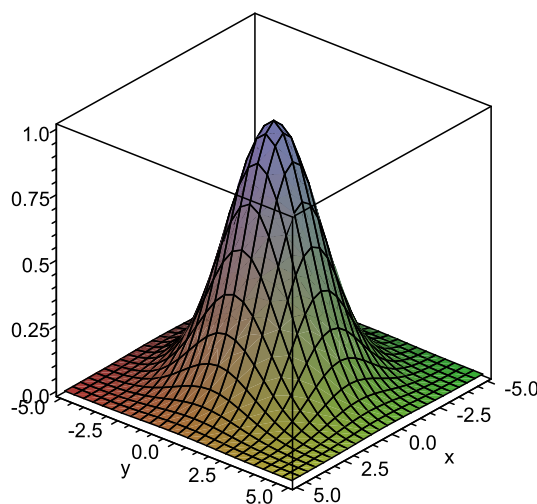
توابع گاوسی: توابع پایه شعاعی گاوسی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varphi(r) = e^{-\varepsilon r^\gamma}, \quad \varepsilon > 0,$$

توابع پایه‌ای شعاعی گاوسی به طور یکنواخت نسبت به فاصله r نزولی بوده، و همچنین $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. همچنین با فرض $\varphi(r) = \Phi(\mathbf{x}) = e^{-\varepsilon \|\mathbf{x}\|^\gamma}$ ، تبدیل فوریه آن به صورت زیر است:

$$\hat{\Phi}(\omega) = \frac{1}{(\sqrt{\gamma} \varepsilon)^n} e^{-\frac{\|\omega\|^\gamma}{\gamma \varepsilon}} > 0,$$

همان گونه که مشاهده می‌شود تبدیلات فوریه یک تابع گاوسی خود یک تابع گاوسی می‌باشد به طور ویژه زمانی که $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ آن گاه $\Phi = \hat{\Phi}$. بنابراین با توجه به محک ارایه شده در قضیه (۸.۲.۱)، نتیجه می‌شود


 شکل ۱.۱: برخی از توابع گاوسی بر فضای $\mathbb{R}^1$

 شکل ۲.۱: تابع گاوسی بر فضای $\mathbb{R}^2$

که توابع گاوسی معین مثبت اکید می‌باشند. به علاوه با فرض اندازه‌های برل μ مناسب، ملاحظه می‌شود که توابع گاوسی در قضیه شوئنبرگ صدق می‌کنند و بنابراین می‌توان معین مثبت اکید بودن توابع گاوسی را با توجه به قضیه شوئنبرگ نیز نتیجه گرفت. لذا به راحتی و به طرق متفاوت با استناد به مطالب ارایه شده در این بخش معین مثبت اکید بودن توابع پایه شعاعی گاوسی را می‌توان نتیجه گرفت. توابع گاوسی از توابع پایه‌ای شعاعی پر کاربرد در درونیاب‌ها و روش‌های عددی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشند. در شکل‌های ۱.۱ و ۲.۱ برخی از توابع گاوسی رسم شده‌اند.

در بخش قبل مشاهده شد که برخی توصیفات انتگرالی بر مبنای تبدیلات فوریه برای بررسی خاصیت معین مثبت (اکید) بودن توابع ارایه شد. متأسفانه محاسبه تبدیلات فوریه بسیاری از توابع به سادگی امکان

پذیر نیست. بنابراین در این قسمت تلاش می‌شود یک توصیف جایگزین بر مبنای خاصیت کاملاً یکنوایی برای تشخیص توابع معین مثبت (اکید) ارایه شود.

تعریف ۱۲.۲.۱. تابع $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ و متعلق به $C[0, \infty) \cap C^\infty(0, \infty)$ که در رابطه زیر صدق کند:

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) \geq 0, \quad r > 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

را کاملاً یکنوا بر $[0, \infty)$ گویند.

به عنوان مثال توابع زیر بر $[0, \infty)$ کاملاً یکنوا می‌باشند.

$$\varphi(r) = \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0 \text{ تابع.}$$

$$\varphi(r) = e^{-\varepsilon r}, \quad \varepsilon \geq 0 \text{ تابع زیرا}$$

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) = \varepsilon^l e^{-\varepsilon r} \geq 0.$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{(1+r)^\beta}, \quad \beta \geq 0 \text{ تابع زیرا}$$

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) = (-1)^l \beta(\beta+1) \dots (\beta+l-1) \frac{1}{(1+r)^{\beta+l}} \geq 0,$$

در این قسمت تلاش می‌شود به بررسی خواص توابع کاملاً یکنوا و ارتباط آن‌ها با توابع معین مثبت پرداخته شود. برای این منظور ابتدا یک توصیف انتگرالی برای توابع کاملاً یکنوا ارایه می‌شود. این توصیفات انتگرالی بر مبنای تبدیلات لاپلاس^{۱۳} می‌باشند.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید f یک تابع تکه‌ای پیوسته و کراندار بر $[0, \infty)$ باشد به نحوی که به ازای برخی مقادیر ثابت M, a داریم $|f(t)| \leq M e^{at}$ ، آن‌گاه تبدیل لاپلاس تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad s > a,$$

به طور مشابه، تبدیل لاپلاس یک اندازه برل بر $[0, \infty)$ به صورت:

$$\mathcal{L}\mu(s) = \int_0^\infty e^{-st} d\mu(t),$$

تعریف می‌شود. تبدیل لاپلاس اخیر در مبدا پیوسته است اگر و تنها اگر μ یک اندازه برل متناهی باشد.

قضیه ۱۴.۲.۱. (قضیه هاسدورف-برنشتاین-وایدر^{۱۴}) تابع $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ بر $[0, \infty)$ کاملاً یکنوا است اگر و تنها اگر φ تبدیل لاپلاس یک اندازه برل نامنفی متناهی بر $[0, \infty)$ باشد. یعنی، φ قابل نمایش به فرم:

$$\varphi(r) = \mathcal{L}\mu(r) = \int_0^\infty e^{-rt} d\mu(t),$$

اثبات: به مرجع [۲۲] مراجعه شود.

^{۱۳}Laplace transform

^{۱۴}Hausdorff-Bernstein-Widder

در ادامه یک قضیه ارایه می‌شود که بیانگر ارتباط بین توابع پایه‌ای شعاعی و توابع کاملاً یکنوا می‌باشد.

قضیه ۱۵.۲.۱. تابع φ بر $[0, \infty)$ کاملاً یکنواست اگر و تنها اگر تابع $\Phi = \varphi(\|\cdot\|^2)$ به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت شعاعی باشد.

اثبات: به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

در قضیه قبل یک ارتباط بین توابع کاملاً یکنوا و توابع معین مثبت شعاعی و نه لزوماً توابع معین مثبت اکید شعاعی ارایه شد. در ادامه یک قضیه ارایه می‌شود که ارتباط بین توابع کاملاً یکنوا و توابع معین مثبت اکید شعاعی را توصیف می‌کند.

قضیه ۱۶.۲.۱. تابع $\varphi: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ کاملاً یکنوای غیر ثابت است اگر و تنها اگر $\varphi(\|\cdot\|^2)$ به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید شعاعی باشد.

اثبات: به مرجع [۹۸] مراجعه شود.

مثال: توابع چند ربعی های تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(\|\mathbf{x}\|^2) = (\|\mathbf{x}\|^2 + \varepsilon^2)^{-\beta}, \quad \beta, \varepsilon > 0,$$

توابع چند ربعی های معکوس تعمیم یافته متعلق به $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ بوده و همچنین به سادگی می‌توان نشان داد که معین مثبت اکید شعاعی می‌باشند. برای این منظور برای تابع $\varphi(r) = (r + \varepsilon^2)^{-\beta}$ داریم:

$$(-1)^l \varphi^{(l)}(r) = (-1)^l \beta(\beta+1)(\beta+2)\dots(\beta+l-1)(r + \varepsilon^2)^{-\beta-l} \geq 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

بنابراین تابع φ کاملاً یکنوا و غیر ثابت می‌باشد. با توجه به قضیه ۱۶.۲.۱ نتیجه می‌شود تابع $\Phi(\mathbf{x})$ به ازای هر n بر $\mathbb{R}^n$ معین مثبت اکید شعاعی است. همان گونه که مشاهده شد بررسی معین مثبت بودن توابع چندربعی های معکوس تعمیم یافته با استفاده از خاصیت کاملاً یکنوا بودن آن بسیار ساده تر از بررسی خواص تبدیل فوریه آن می‌باشد.

در مطالب گذشته به بررسی توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید پرداخته شد. مسایل درونیاب داده های پراکنده ۲.۱ با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید بدون نیاز به پایه های چند جمله‌ای های کامل و به خودی خود مسایل خوش تعریف می‌باشند. در این حالت به کارگیری توابع معین مثبت اکید به عنوان پایه منجر به تولید ماتریس های درونیاب معین مثبت و نامنفرد می‌شوند. لذا به کارگیری توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید در مسایل درونیاب و روش های عددی مورد توجه بسیار قرار دارد. در ادامه به معرفی و بررسی خواص کلاس ویژه‌ای از توابع پایه‌ای شعاعی تحت عنوان توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت مشروط می‌پردازیم.

تعریف ۱۷.۲.۱. تابع پیوسته $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع معین مثبت مشروط مرتبه m روی $\mathbb{R}^n$ گویند، هرگاه به ازای هر N داده پراکنده متمایز $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^n$ و هر بردار $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_N]^T \in \mathbb{C}^N$ که به ازای هر چندجمله‌ای p حداکثر از درجه $m - 1$ در رابطه

$$\sum_{j=1}^N c_j p(\mathbf{x}_j) = 0,$$

صدق می‌کنند، داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j \bar{c}_k \varphi(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) \geq 0,$$

تابع φ را معین مثبت مشروط اکید گویند هرگاه رابطه بالا تنها به ازای $\mathbf{c} = 0$ برابر صفر شود.

قضیه ۱۸.۲.۱. هر تابع معین مثبت مشروط (اکید) مرتبه m بر فضای $\mathbb{R}^n$ یک تابع معین مثبت مشروط (اکید) از مراتب بالاتر نیز می‌باشد. به علاوه هر تابع معین مثبت (اکید) یک تابع معین مثبت مشروط از هر مرتبه می‌باشد.

در ادامه یک محک کاربردی برای تشخیص توابع معین مثبت مشروط و شعاعی در قالب قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۱۹.۲.۱. فرض کنید $\varphi \in C[0, \infty) \cup C^\infty(0, \infty)$. آن گاه تابع $\phi = \varphi(\|\cdot\|^2)$ یک تابع معین مثبت مشروط از مرتبه m و به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می‌باشد، اگر و تنها اگر $(-1)^m \varphi^{(m)}$ بر $(0, \infty)$ کاملاً یکنوا باشد.

برهان. به مرجع [۹۸] مراجعه شود. □

در زیر یک فرم کلی تر از قضیه اخیر ارائه می‌شود که ارتباط بین توابع کاملاً یکنوا و توابع شعاعی معین مثبت مشروط اکید را بیان می‌کند.

قضیه ۲۰.۲.۱. اگر تابع ϕ در شرایط قضیه ۱۹.۲.۱ صدق کند و به علاوه ϕ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه m نباشد، آن گاه تابع ϕ به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ معین مثبت مشروط اکید از مرتبه m و شعاعی می‌باشد.

برهان. به مرجع [۹۸] مراجعه شود. □

قضایای ۱۹.۲.۱ و ۲۰.۲.۱ محک‌های عملی و کاربردی ساده‌ای برای تشخیص توابع شعاعی معین مثبت مشروط و توابع شعاعی معین مثبت مشروط اکید ارائه می‌دهند. در زیر مثال‌هایی از توابع شعاعی معین مثبت مشروط ارائه خواهد شد. مثال‌های از توابع شعاعی معین مثبت مشروط

توابع چند ربعی توسعه یافته^{۱۵}: توابع چند ربعی توسعه یافته به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta \rceil} (\varepsilon + \|\mathbf{x}\|^2)^\beta, \quad \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

از طرفی برای تابع

$$\varphi(r) = (-1)^{\lceil \beta \rceil} (\varepsilon + r)^\beta, \quad \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

داریم:

$$\varphi^{(l)}(r) = (-1)^{\lceil \beta \rceil} \beta(\beta-1) \dots (\beta-l+1)(\varepsilon+r)^{\beta-l},$$

بنابراین بدیهی است که به ازای $l = \lceil \beta \rceil$ داریم:

$$(-1)^{\lceil \beta \rceil} \varphi^{(\lceil \beta \rceil)}(r) = \beta(\beta-1) \dots (\beta - \lceil \beta \rceil + 1)(\varepsilon+r)^{\beta-\lceil \beta \rceil} \geq 0,$$

و در نتیجه تابع φ کاملاً یکنوا می‌باشد. به علاوه $m = \lceil \beta \rceil$ کوچکترین مقدار برای m می‌باشد، به نحوی که تابع $(-1)^m \varphi^{(m)}$ کاملاً یکنوا است. از طرفی چون $\beta \notin \mathbb{N}$ لذا φ یک تابع چندجمله‌ای نمی‌باشد. بنابراین توابع چند ربعی توسعه یافته

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta \rceil} (\varepsilon + \|\mathbf{x}\|^2)^\beta, \quad \varepsilon > 0, \beta > 0, \beta \notin \mathbb{N}.$$

توابع معین مثبت مشروط اکید و از مرتبه $m \geq \lceil \beta \rceil$ بوده و به علاوه به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می‌باشند.

توابع توانی شعاعی^{۱۶}: توابع توانی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \|\mathbf{x}\|^\beta, \quad \beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}.$$

از طرفی به ازای تابع

$$\varphi(r) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} r^{\beta/2}, \quad \beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}.$$

داریم

$$\varphi^{(l)}(r) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\beta}{2} - l + 1\right) r^{\beta/2-l},$$

به وضوح بنا به رابطه بالا داریم:

$$(-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \varphi^{(l)}(r) = \frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{\beta}{2} - \lceil \beta/2 \rceil + 1\right) r^{\beta/2-\lceil \beta/2 \rceil} \geq 0,$$

بنابراین به ازای $l = \lceil \beta/2 \rceil$ تابع فوق کاملاً یکنوا بوده و $l = \lceil \beta/2 \rceil$ کمترین مقدار ممکن است که به ازای آن تابع فوق کاملاً یکنوا می‌باشد. از طرفی چون $\beta \notin 2\mathbb{N}$ لذا φ یک تابع چندجمله‌ای نمی‌باشد و در نتیجه توابع توانی

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \|\mathbf{x}\|^\beta, \quad \beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}.$$

^{۱۵}Generalized multiquadratics

^{۱۶}Radial Powers

توابع معین مثبت مشروط اکید از مرتبه $m \geq \lceil \beta/2 \rceil$ بوده و به علاوه به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می‌باشند.

. توابع چند همسازه ها^{۱۷}: توابع چند همسازه ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\beta+1} \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log(\|\mathbf{x}\|), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

توابع چند همسازه ها، توابعی معین مثبت مشروط اکید و از مرتبه $m \geq \beta + 1$ بوده و به علاوه به ازای هر s بر $\mathbb{R}^s$ شعاعی می‌باشند. برای بررسی این موضوع داریم:

$$2\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\beta+1} \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log(\|\mathbf{x}\|^2), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

بنابراین با فرض

$$\varphi(r) = (-1)^{\beta+1} r^\beta \log(r), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

به وضوح مشاهده می‌شود که $\varphi(r)$ یک چندجمله‌ای نمی‌باشد و از طرفی

$$\varphi^{(l)}(r) = (-1)^{\beta+1} \beta(\beta-1) \dots (\beta-l+1) r^{\beta-l} \log(r) + p_l(r), \quad 1 \leq l \leq \beta,$$

به طوری که p_l یک چندجمله‌ای از درجه $\beta-l$ می‌باشد. بنابراین با فرض $l = \beta$ در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\varphi^{(\beta)}(r) = (-1)^{\beta+1} \beta! \log(r) + C,$$

بنابراین

$$\varphi^{(\beta+1)}(r) = (-1)^{\beta+1} \frac{\beta!}{r},$$

در نتیجه

$$(-1)^{\beta+1} \varphi^{(\beta+1)}(r) = \frac{\beta!}{r} \geq 0,$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود تابع φ کاملاً یکنوا بوده، بنابراین توابع چند همسازه ها معین مثبت مشروط اکید می‌باشند.

در ادامه حل پذیری و خوش تعریف بودن مسأله درونیابی داده های پراکنده ۲.۱، با به کارگیری توابع شعاعی معین مثبت مشروط به عنوان توابع پایه‌ای بررسی می‌شود.

قضیه ۲.۱.۲.۱. فرض کنید در مسأله درونیاب داده های پراکنده ۲.۱، توابع پایه‌ای Φ توابع معین مثبت مشروط اکید مرتبه m بر فضای $\mathbb{R}^s$ باشند و همچنین فرض کنید مجموعه نقاط $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ به طور یکتا یک پایه برای فضای چند جمله‌ای های حداکثر از درجه $m-1$ را مشخص کند. آن گاه ماتریس ضرائب دستگاه معادلات خطی ۴.۱ نامنفرد است و لذا دستگاه معادلات خطی ۴.۱ جواب منحصر به فرد دارد، در نتیجه مسأله درونیابی ۲.۱ خوش تعریف می‌باشد.

^{۱۷}thin plate splines

۳.۱ هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت و فضاهای محلی

در این بخش به بیان مقدماتی برای بررسی و آنالیز کران های خطا در مسایل درونیایی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی پرداخته خواهد شد. برای این منظور ابتدا مفهوم هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت^{۱۸} و همچنین فضاهای محلی^{۱۹} متناظر به توابع معین مثبت اکید (مشروط) معرفی و برخی نتایج مربوط به آنها بررسی می‌شوند.

۱.۳.۱ هسته های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت حقیقی از توابع $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ و مجهز به ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ باشد. آن گاه تابع $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را هسته بازتولیدی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ می‌نامند هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} ۱) \quad & k(\cdot, \mathbf{x}) \in \mathcal{H}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ ۲) \quad & f(\mathbf{x}) = \langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

توجه شود که عنوان هسته های بازتولیدی از خاصیت بازتولید کنندگی (۲) مشتق شده است. برخی از خواص اساسی هسته های باز تولیدی عبارتند از:

- هسته بازتولیدی یک فضای هیلبرت یکتاست.
- وجود یک هسته بازتولیدی برای یک فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ معادل این است که تابع های سنجش نقطه‌ای $\delta_{\mathbf{x}}$ تابع های خطی کران دار روی Ω باشند یعنی مقدار ثابت مثبت $M = M_{\mathbf{x}}$ چنان موجود باشد که

$$|\delta_{\mathbf{x}} f| = |f(\mathbf{x})| \leq M \|f\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

- اگر تابع $k(\cdot, \cdot)$ یک هسته بازتولیدی برای فضای $\mathcal{H}$ باشد، آن گاه

$$\delta_{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) = \langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد تابع $\delta_{\mathbf{x}}$ خطی است و بنابر رابطه کوشی - شوارتز کران دار نیز می‌باشد. زیرا:

$$\begin{aligned} |\delta_{\mathbf{x}} f| = |f(\mathbf{x})| &= |\langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|k(\cdot, \mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

^{۱۸}Reproducing Kernel Hilbert Spaces

^{۱۹}Native Spaces

قضیه ۲.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت از توابع $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ با هسته بازتولیدی k باشد، آن گاه:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle k(\cdot, \mathbf{y}), k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (\text{۱})$$

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (\text{۲})$$

(۳) همگرایی در نرم فضای هیلبرت، همگرایی نقطه‌ای را نتیجه می‌دهد. یعنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |f(\mathbf{x}) - f_n(\mathbf{x})| \rightarrow 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

برهان. به مرجع [۴۵] مراجعه شود. $\square$

نکته: از خاصیت (۱) در قضیه قبل می‌توان مقدار $M_{\mathbf{x}}$ را برای تابع سنجش نقطه‌ای $\delta_{\mathbf{x}} f$ به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} |\delta_{\mathbf{x}} f| &= |\langle f, k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}| \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|k(\cdot, \mathbf{x})\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{\langle k(\cdot, \mathbf{x}), k(\cdot, \mathbf{x}) \rangle_{\mathcal{H}}} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}} \sqrt{k(\mathbf{x}, \mathbf{x})}, \end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌شود

$$M_{\mathbf{x}} = \sqrt{k(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

به طور ویژه در هسته های شعاعی نتیجه می‌شود:

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \kappa(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\|) = \kappa(0),$$

بنابراین $M_{\mathbf{x}} = \sqrt{\kappa(0)}$ که این کران بالا یک مقدار ثابت مثبت و مستقل از $\mathbf{x}$ می‌باشد.

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای توابع هیلبرت هسته های بازتولیدی با هسته $k: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ بوده و همچنین فرض کنید $\mathcal{H}^*$ فضای دوگان آن (در این جا منظور فضای تابع های خطی و کران دار روی $\mathcal{H}$ می‌باشد) باشد. آن گاه k معین مثبت می‌باشد. به علاوه k معین مثبت اکید می‌باشد اگر و تنها اگر تابع های سنجش نقطه‌ای $\delta_{\mathbf{x}}$ بر $\mathcal{H}^*$ مستقل خطی باشند.

برهان. به مرجع [۴۵] مراجعه شود. $\square$

قضیه فوق یک ارتباط مستقیم بین توابع معین مثبت اکید و هسته های بازتولیدی را نشان می‌دهد. از آن جا که توابع پایه‌ای شعاعی مبنای این رساله می‌باشند، در ادامه تلاش خواهد شد تا چگونگی تولید یک فضای هیلبرت هسته های بازتولیدی متناظر به توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید بررسی شود. این فضای هیلبرت هسته های بازتولیدی متناظر به توابع پایه‌ای شعاعی معین مثبت اکید را فضای محلی آن توابع می‌نامند.

۲.۳.۱ فضاهای محلی توابع معین مثبت اکید

در گام اول باید اشاره شود که طبق تعریف ۱.۳.۱ فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ شامل همه توابعی به فرم زیر می‌باشد:

$$f = \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_j \in \Omega.$$

از طرفی با توجه به رابطه فوق و همچنین قضیه ۲.۳.۱ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{H}} = \langle f, f \rangle_{\mathcal{H}} &= \left\langle \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j), \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j c_i \langle k(., \mathbf{x}_j), k(., \mathbf{x}_i) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j c_i k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

بنابراین به راحتی می‌توان نرم فضای هیلبرت تابع f را به صورت فوق محاسبه کرد. در ادامه می‌توانیم یک فضای از ترکیبات خطی متناهی

$$H_k(\Omega) = \text{span}\{k(., \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \Omega\}$$

به همراه یک فرم دوخطی وابسته $\langle ., . \rangle_k$

$$\left\langle \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j), \sum_{i=1}^N d_i k(., \mathbf{y}_i) \right\rangle_k = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j d_i k(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i).$$

را تعریف کنیم. بنابراین هر عضو از فضای $H_k(\Omega)$ را می‌توان به فرم زیر نمایش داد

$$f = \sum_{j=1}^N c_j k(., \mathbf{x}_j).$$

توجه شود که در نمایش فوق نه تنها ضرایب c_j ها، بلکه مقادیر N و نقاط انتخابی $\mathbf{x}_j$ ها نیز با توجه به تغییر f ، تغییر می‌کنند.

قضیه ۴.۳.۱. اگر $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک هسته معین مثبت اکید و متقارن باشد آن گاه فرم دو خطی $\langle ., . \rangle_k$ یک ضرب داخلی روی $H_k(\Omega)$ تعریف می‌کند. به علاوه، فضای $H_k(\Omega)$ یک فضای پیش-هیلبرت^{۲۰} با هسته باز تولیدی k می‌باشد.

□

برهان. به مرجع [۴۵] مراجعه شود.

^{۲۰}Pre-Hilbert space

نکته: فضای پیش - هیلبرت یک فضای ضرب داخلی می‌باشد که کامل ساز آن یک فضای هیلبرت باشد.

همان گونه که اشاره شد فضای $H_k(\Omega)$ یک فضای پیش - هیلبرت می‌باشد یعنی لزوماً کامل نمی‌باشد بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که کامل ساز فضای $H_k(\Omega)$ متناظر به نرم $\|\cdot\|_k$ ، بدیهی ترین فضای هیلبرت متناظر به هسته بازتولیدی k می‌باشد.

تعریف ۵.۳.۱. فضای محلی $\mathcal{N}_k(\Omega)$ متناظر به هسته باز تولیدی k یک فضای هیلبرت کامل ساز فضای پیش - هیلبرت $H_k(\Omega)$ است که شامل همه توابع پیوسته روی Ω بوده و از طرفی

$$\|f\|_k = \|f\|_{\mathcal{N}_k(\Omega)}, \quad \forall f \in \mathcal{H}_k(\Omega).$$

به طور ویژه زمانی که با توابع معین مثبت اکید $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ به عنوان هسته های بازتولیدی سروکار داریم و به علاوه $\Omega = \mathbb{R}^s$ ، آن گاه نمایش متداولی را از فضاهای محلی و بر حسب تبدیلات فوریه به صورت زیر می‌توان نشان داد.

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنید $\Phi \in C(\mathbb{R}^s) \cap L_1(\mathbb{R}^s)$ یک تابع معین مثبت اکید و حقیقی باشد و

$$\mathfrak{S} = \{f \in L_2(\mathbb{R}^s) \cap C(\mathbb{R}^s) : \frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\Phi}}} \in L_2(\mathbb{R}^s)\}$$

به طوری که $\hat{f}$ و $\hat{\Phi}$ به ترتیب تبدیلات فوریه توابع f و Φ می‌باشند. همچنین فرض کنید فضای $\mathfrak{S}$ مجهز به نرم دوخطی

$$\langle f, g \rangle_{\mathfrak{S}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \left\langle \frac{\hat{f}}{\sqrt{\hat{\Phi}}}, \frac{\hat{g}}{\sqrt{\hat{\Phi}}} \right\rangle_{L_2(\mathbb{R}^s)} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^s}} \int_{\mathbb{R}^s} \frac{\hat{f}(\omega) \bar{\hat{g}}(\omega)}{\hat{\Phi}(\omega)} d\omega.$$

باشد. در این صورت $\mathfrak{S}$ یک فضای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{S}}$ و هسته باز تولیدی $\Phi(\cdot - \cdot)$ می‌باشد. بنابراین $\mathfrak{S}$ یک فضای محلی از Φ روی $\mathbb{R}^s$ می‌باشد یعنی $\mathfrak{S} = \mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^s)$. به طور ویژه هر تابع $f \in \mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^s)$ را می‌توان توسط تبدیل فوریه متناظر به آن $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^s) \cap L_2(\mathbb{R}^s)$ بازیابی کرد.

□

برهان. به مرجع [۴۵] مراجعه شود.

قضیه فوق نشان می‌دهد که فضاهای محلی برای هسته های بازتولیدی روی $\mathbb{R}^s$ را می‌توان به صورت تعمیم فضاهای سوبولف استاندارد^{۲۱} در نظر گرفت. فضاهای سوبولف استاندارد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

^{۲۱}Standard Sobolev Spaces.

$$W_{\Psi}^m(\Omega) = \{f \in L_{\Psi}(\Omega) \cap C(\Omega) : D^{\alpha} f \in L_{\Psi}(\Omega), \forall |\alpha| \leq m, \alpha \in \mathbb{N}^s\}$$

به طور متناظر به ازای هر $m > s/2$ فضای سوبولف W_{Ψ}^m را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$W_{\Psi}^m(\mathbb{R}^s) = \{f \in L_{\Psi}(\mathbb{R}^s) \cap C(\mathbb{R}^s) : \hat{f}(\cdot)(1 + \|\cdot\|_{\Psi}^2)^{m/2} \in L_{\Psi}(\mathbb{R}^s)\}$$

به علاوه نرم فضای سوبولف $W_{\Psi}^m(\mathbb{R}^s)$ به صورت

$$\|f\|_{W_{\Psi}^m(\mathbb{R}^s)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} f\|_{L_{\Psi}(\mathbb{R}^s)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

یا به طور متناظر به فرم

$$\|f\|_{W_{\Psi}^m(\mathbb{R}^s)} = \left\{ \int_{\mathbb{R}^s} |\hat{f}(\omega)|^2 (1 + \|\omega\|_{\Psi}^2)^m d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}$$

تعریف می‌شود.

نتیجه ۷.۳.۱. فرض کنید $\Phi \in L_{\Psi}(\mathbb{R}^s) \cap C(\mathbb{R}^s)$ یک هسته معین مثبت اکید بوده و در شرایط زیر صدق کند:

$$c_1 (1 + \|\omega\|_{\Psi}^2)^{-m} \leq \hat{\Phi}(\omega) \leq c_2 (1 + \|\omega\|_{\Psi}^2)^{-m}, \quad \omega \in \mathbb{R}^s$$

به طوری که $m > s/2$ و c_1, c_2 مقادیر مثبت و همچنین $c_1 \leq c_2$ ، یعنی تبدیل فوریه هسته Φ به صورت جبری کاهش یابد. آن گاه فضای محلی $\mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^s)$ متناظر به هسته بازتولیدی Φ دقیقاً با فضای سوبولف $W_{\Psi}^m(\mathbb{R}^s)$ یکسان بوده و به علاوه نرم فضای محلی با نرم فضای سوبولف یکسان می‌باشند.

مثال

توابع مترن ^{۲۲} به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi_{\beta}(\mathbf{x}) = \frac{K_{\beta - \frac{s}{2}}(\|\mathbf{x}\|) \|\mathbf{x}\|^{\beta - \frac{s}{2}}}{2^{\beta-1} \Gamma(\beta)}$$

به طوری K_{ν} تابع بسل توسعه یافته نوع دوم و از مرتبه ν می‌باشد. تابع Φ_{β} تابعی شعاعی و تکه‌ای هموار می‌باشد. از طرفی تبدیل فوریه توابع مترن به صورت زیر می‌باشند:

$$\hat{\Phi}_{\beta}(\omega) = (1 + \|\omega\|_{\Psi}^2)^{-\beta} > 0$$

^{۲۲}Matérn functions

بنابراین توابع مترن بر فضای $\mathbb{R}^s$ و به ازای هر $\beta > \frac{s}{4}$ معین مثبت اکید می‌باشد و همچنین با توجه به نتیجه قبل مشاهده می‌شود که فضای محلی برای توابع مترن به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{N}_{\Phi}(\mathbb{R}^s) = W_{\frac{1}{4}}^{\beta}(\mathbb{R}^s) \quad \beta > \frac{s}{4}.$$

خوانندگان علاقمند، برای مطالعه جزئیات بیشتر در رابطه با فضاهای محلی انواع متفاوت توابع پایه‌ای شعاعی می‌توانند به مراجع [۴۵، ۹۸] مراجعه فرمایند.

۴.۱ پایداری مسائل درونیاب پایه‌ای شعاعی

در بسیاری از روش‌های عددی دقت نتایج و پایداری روش وابسته به مقدار عدد شرطی^{۲۳} روش عددی می‌باشد. به طور ویژه در یک مسئله درونیاب داده‌های پراکنده با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی، عدد شرطی ماتریس درونیاب پایداری مسئله را مشخص می‌کند. برای ماتریس A ، L_2 - عدد شرطی ماتریس A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{cond}(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}},$$

به طوری که در آن $\sigma_{\min}$ و $\sigma_{\max}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر تکین ماتریس A می‌باشند. اگر ماتریس A معین مثبت باشد، آن گاه

$$\text{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

به طوری که $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A می‌باشند. در اغلب موارد ماتریس ضرائب مسائل درونیابی داده‌های پراکنده ۲.۱ ماتریس‌های با عدد شرطی بزرگ می‌باشند. متأسفانه در حل این گونه از دستگاه معادلات خطی بروز یک خطای کوچک در داده‌های ورودی مانند خطاهای ذخیره سازی اعداد سبب بروز و انتشار خطای زیادی در مدل خواهد شد. در دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ داریم:

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

به طوری که $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ بیانگر خطای نسبی بردار سمت می‌باشد که می‌تواند ناشی از خطای ذخیره سازی در ماشین باشد و در اغلب موارد اجتناب ناپذیر است. در این صورت از رابطه بالا مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر بزرگ عدد شرطی ماتریس ضرائب، خطای نسبی $\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ اطلاعات دقیقی در رابطه با خطای نسبی جواب‌های تقریبی نمی‌دهد. لذا با توجه به اهمیت و تأثیر عدد شرطی ماتریس ضرائب در میزان دقت و پایداری روش‌های عددی در این بخش تلاش می‌شود عدد شرطی ماتریس‌های حاصل از مسائل درونیابی با استفاده از انواع توابع پایه‌ای

^{۲۳}Condition Number

شعاعی بررسی شود. برای این منظور با توجه به قضیه گرشگورین^{۲۴} (مرجع [۶۹] مشاهده شود) داریم:

$$|\lambda_{\max} - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}|$$

بنابراین داریم:

$$\lambda_{\max} \leq N \max |a_{ij}|, i, j = 1, \dots, N$$

از طرفی در ماتریس ضرائب مسائل درونیایی، $a_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ است، بنابراین:

$$\lambda_{\max} \leq N \max\{|a_{ij}|, i, j = 1, \dots, N\} = N \max\{|\phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)|, i, j = 1, 2, \dots, N\},$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که اگر مجموعه نقاط خیلی بد پراکنده نشده باشند، آن گاه مقدار N متناظر به فاصله تراکم مجموعه نقاط $(h_{\chi, \Omega}^{-s})$ رشد می‌کند و لذا یک کران بالای قابل قبول برای مقادیر ویژه ماتریس ضرائب ایجاد می‌شود مخصوصاً اگر بعد فضا (s) زیاد نباشد. بنابراین برای محاسبه یک کران بالا برای عدد شرطی ماتریس ضرائب، کافی است یک کران بالا برای $\|A^{-1}\|$ یا متناظراً یک کران پایین برای $\lambda_{\min}$ محاسبه شود. برای بررسی موارد فوق، توجه خود را بر ماتریس های معین مثبت متمرکز خواهیم کرد. با توجه به خارج قسمت ریلی^{۲۵} نتیجه می‌شود که همواره برای کوچکترین مقدار ویژه ماتریس های معین مثبت رابطه زیر برقرار است:

$$\lambda_{\min} = \inf_{c \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{c^T A c}{c^T c},$$

لم ۱.۴.۱. فرض کنید $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ مجموعه‌ای از نقاط متمایز بر فضای $\mathbb{R}^s$ باشد و همچنین $\phi: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع معین مثبت اکید یا تابع معین منفی اکید مشروط از مرتبه یک و خاصیت $\phi(0) \leq 0$ باشد. همچنین فرض کنید ماتریس A یک ماتریس درونیاب با درایه های $a_{ij} = \phi(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ باشد. در این صورت اگر به ازای هر بردار $\mathbf{c}$ با فرض $\sum_{j=1}^N c_j = 0$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j a_{ij} \geq \theta \|\mathbf{c}\|^2,$$

آن گاه

$$\|A^{-1}\|_2 \leq \theta^{-1}.$$

توجه شود که به ازای ماتریس های معین مثبت، با توجه به خارج قسمت ریلی نتیجه می‌شود که $\theta = \lambda_{\min}$. بنابراین لم فوق نشان می‌دهد که چگونه کوچکترین مقدار ویژه ماتریس A یک کران بالا برای نرم ماتریس A^{-1} ارائه می‌دهد.

^{۲۴} Gershgorin's theorem

^{۲۵} Rayleigh quotient

در این قسمت از بیان چگونگی محاسبه کران برای نرم ماتریس A^{-1} اجتناب می‌شود. برای مطالعه بیشتر در رابطه با تکنیک های محاسبه این کران های برای نرم ماتریس A^{-1} ، علاقمندان می‌توانند به مراجع [۹۸، ۷۶، ۹۰] مراجعه کنند. در ادامه برخی کران ها محاسبه شده از مرجع [۹۸] گزارش می‌شوند. در مثال های زیر از ثابت های مشخص زیر استفاده شده است:

$$M_s = 12 \left(\frac{\pi \Gamma^2(\frac{s+2}{2})}{9} \right)^{\frac{1}{s+2}} \leq 6.38s, \quad C_s = \frac{1}{2\Gamma(\frac{s+2}{2})} \left(\frac{M_s}{\sqrt{8}} \right)^s.$$

در روابط بالا کران بالای ارائه شده برای M_s با به کارگیری فرمول استرلینگ^{۲۶} محاسبه شده است [۹۸].
مثال ها

۱- توابع گاوسی برای توابع گاوسی $\phi(\mathbf{x}) = e^{-\varepsilon \|\mathbf{x}\|^2}$ داریم:

$$\lambda_{\min} \geq C_s(2\varepsilon)^{-\frac{s}{2}} e^{-4.071s^2/(q_X^2\varepsilon)} q_X^{-s},$$

۲- توابع چند ربعی های معکوس تعمیم یافته برای توابع چند ربعی های معکوس تعمیم یافته

$$\phi(\mathbf{x}) = (\|\mathbf{x}\|^2 + \varepsilon^2)^\beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

داریم:

$$\lambda_{\min} \geq C(\varepsilon, \beta, s) q_X^{\beta - \frac{s}{2} + \frac{1}{2}} e^{-2\varepsilon M_s / q_X}$$

که در آن $C(\varepsilon, \beta, s)$ یک ثابت مشخص می‌باشد.

همان گونه که از کران های محاسبه شده برای توابع گاوسی و چند ربعی های معکوس تعمیم یافته مشاهده می‌شود، در یک مسأله درونیایی با فرض ثابت بودن مقدار ε ، در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک نقاط q_X (افزایش تعداد نقاط درونیایی) کران پایین $\lambda_{\min}$ به طور نمایی به صفر میل می‌کند، در نتیجه انتظار می‌رود عدد شرطی ماتریس درونیاب به طور نمایی افزایش یابد. لذا در اغلب موارد افزودن نقاط درونیایی در دامنه مورد نظر به منظور بهبود دقت درونیایی، سبب بد شرطی بیشتر مسأله خواهد شد. در برخی موارد می‌توان از این افزایش بد شرطی جلوگیری کرد زیرا همانگونه که مشاهده می‌شود بد شرطی در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک رخ می‌دهد و نه لزوماً در اثر افزایش نقاط درونیایی. به علاوه، همانگونه که از کران های محاسبه شده مشاهده می‌شود، با فرض ثابت بودن تعداد نقاط درونیایی (یا به طور ویژه ثابت بودن فاصله تفکیک نقاط)، در اثر کاهش مقدار ε ، ماتریس درونیاب به طور صعودی بد شرط می‌شود. بنابراین انتظار می‌رود با کاهش مقدار ε ، بد شرطی مسأله کاهش یابد.

۳- توابع اسپلاین های صفحه‌ای باریک برای توابع اسپلاین های صفحه‌ای باریک داریم:

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\beta+1} \|\mathbf{x}\|^{2\beta} \log(\|\mathbf{x}\|), \quad \beta \in \mathbb{N}.$$

^{۲۶}Stirling's formula

خواهیم داشت:

$$\lambda_{\min} \geq C(\varepsilon, \beta, s) c_{\beta} (2M_s)^{-s-2\beta} (q_X)^{2\beta},$$

به طوری که c_{β} یک ثابت مشخص می‌باشد.

همان گونه که از رابطه بالا مشاهده می‌شود برای توابع اسپلاین های صفحه‌ای باریک، در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک نقاط q_X در مسأله درونیایی مقدار کران پایین $\lambda_{\min}$ کاهش می‌یابد و در نتیجه مقدار عدد شرطی ماتریس درونیاب افزایش می‌یابد. هرچند این افزایش بد شرطی مسأله از مرتبه چندجمله‌ای می‌باشد.

۴- توابع توانی شعاعی برای توابع توانی شعاعی :

$$\phi(\mathbf{x}) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \|\mathbf{x}\|^{\beta}, \quad 0 < \beta \notin 2\mathbb{N}.$$

خواهیم داشت:

$$\lambda_{\min} \geq C(\varepsilon, \beta, s) c_{\beta} (2M_s)^{-s-\beta} (q_X)^{\beta},$$

به طوری که c_{β} (متفاوت با ثابت c_{β} در توابع اسپلاین صفحه‌ای باریک) یک ثابت مشخص می‌باشد. همان گونه که از رابطه بالا مشاهده می‌شود در این حالت مشابه توابع اسپلاین های صفحه‌ای باریک، در اثر کاهش میزان فاصله تفکیک نقاط q_X در مسأله درونیایی مقدار کران پایین $\lambda_{\min}$ کاهش می‌یابد و در نتیجه مقدار عدد شرطی ماتریس درونیاب افزایش می‌یابد. هرچند این افزایش بد شرطی مسأله از مرتبه چندجمله‌ای می‌باشد.

فصل ۲

مروری بر روش‌های بدون شبکه

۱.۲ مقدمه

مدل سازی ریاضی بسیاری از پدیده های طبیعی و فیزیکی در صنعت، علوم مهندسی و علوم پایه منجر به معادلات با مشتقات جزئی وابسته به زمان می‌شوند. لذا برای توصیف این پدیده ها نیاز به محاسبه جواب های این دسته از معادلات می‌باشد. از آن جا که محاسبه جواب دقیق برای اغلب این معادلات امکان پذیر نیست سبب شده است که روش‌ها و الگوریتم های عددی متنوعی برای حل معادلات با مشتقات جزئی ارائه شوند. از روش‌های عددی پر کاربرد و استاندارد برای حل معادلات با مشتقات جزئی می‌توان به روش‌های تفاضلات تقسیم شده، تفاضلات متناهی و حجم متناهی اشاره کرد. این رده از روش‌ها را روش‌های عددی مبتنی بر شبکه بندی ناحیه جواب می‌نامند. از معایب عمده این روش‌ها می‌توان به هزینه محاسباتی بالای شبکه بندی در این روش‌ها اشاره کرد. از طرفی در صورت نیاز به شبکه بندی های ظریف تر نمی‌توان از اطلاعات شبکه های قبلی استفاده کرد و کلیه محاسبات باید از اول انجام شود. به علاوه به کارگیری این روش‌ها برای مسایل با ابعاد بالا و یا دامنه های با اشکال هندسی نا متعارف در اغلب موارد بسیار دشوار و یا انجام پذیر نمی‌باشند. لذا برای محاسبه سریع و آسان جواب های تقریبی مسایل پیچیده مهندسی روش‌های بدون شبکه معرفی شده اند. در این روش‌ها برای اجتناب از شبکه بندی ناحیه از مجموعه ای از نقاط پراکنده در داخل ناحیه و روی مرز آن به جای شبکه بندی استفاده می‌شود. هر چند روش‌های بدون شبکه متعددی ارائه شده اند ولی در همه این روش‌ها، اجرای روش بر سه گام اساسی و معمول استوار می‌باشد:

۱- تولید نقاط^۱:

اولین گام مشترک و اساسی در اجرای روش‌های بدون شبکه تولید نقاط می‌باشد، به این صورت که دامنه و مرز مسأله توسط یک مجموعه پراکنده از نقاط پوشش داده می‌شوند. این نقاط پوششی می‌توانند به صورت داده های پراکنده منظم یا نامنظم (تصادفی) باشند.

^۱Node generation

۲- تقریب جواب:^۲

در گام دوم اجرای روش‌های بدون شبکه، تابع مجهول به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای مشخص از اعضای جواب تقریب زده می‌شوند. این عمل را تقریب جواب می‌نامیم.

۳- آزمودن:^۳

در گام آخر اجرای روش‌های بدون شبکه، برای محاسبه ضرائب مجهول در تقریب جواب پیشنهادی در گام دوم، باید آن جواب در معادلات حاکم صدق کند. این گام را آزمودن جواب می‌نامند. این آزمون می‌تواند به فرم ضعیف یا قوی و محلی یا کلی باشد. روشهای متفاوت تقریب جواب و آزمودن منجر به روشهای بدون شبکه متفاوتی شده اند. در این رساله هدف بررسی و توسعه یک روش بدون شبکه بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد. در ادامه اجزاء سه گانه اجرای روش‌های بدون شبکه به طور ویژه بررسی خواهند شد.

۲.۲ تولید نقاط

همان گونه که اشاره شد، در گام اول اجرای روش‌های بدون شبکه نیاز به تولید نقاط میدانی در ناحیه مسأله مورد نظر می‌باشد. یکی از مزیت‌های اصلی روش‌های بدون شبکه آزادی عمل در انتخاب داده‌های پراکنده در داخل دامنه و روی مرزها می‌باشد. در ادامه برخی از فرم‌های متداول در انتخاب داده‌های پراکنده در دامنه‌های آزمون $\Omega \in \mathbb{R}^2$ و همچنین $\Omega \in \mathbb{R}^3$ ارائه می‌شوند:

- داده‌های یکنواخت: یکی از متداول‌ترین نوع انتخاب نقاط در روش‌های بدون شبکه، انتخاب نقاط با پراکندگی یکنواخت در دامنه می‌باشد. به این صورت که:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

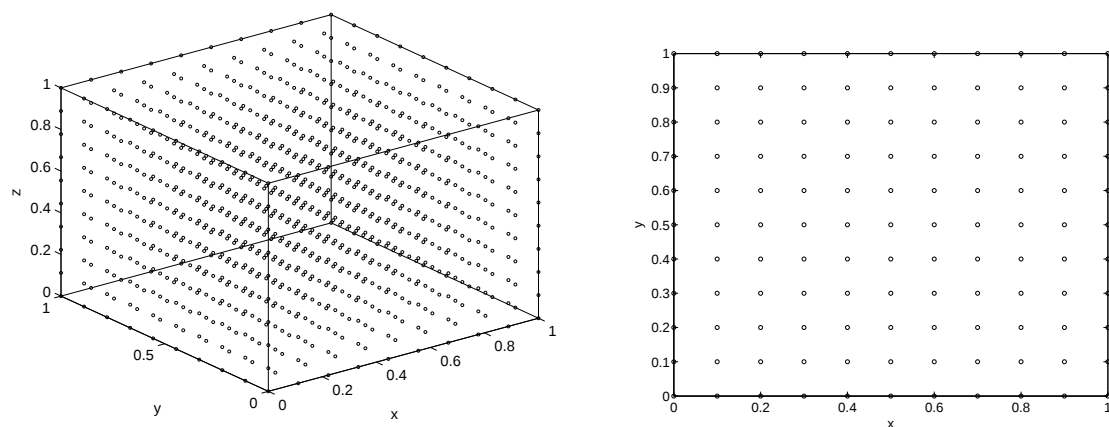
در شکل (۱.۲) داده‌های یکنواخت در فضا‌های آزمون دو بعدی و سه بعدی رسم شده اند.

- نقاط چبیشف^۴: مجموعه نقاط چبیشف، رده معمول دیگری از نقاط انتخابی در روش‌های بدون شبکه می‌باشد. این مجموعه از نقاط اغلب برای حل مسائلی که حساسیت جواب در نقاط نزدیک به مرز بیشتر است، استفاده می‌شوند. در حقیقت این نقاط ریشه‌های چند جمله‌ای‌های چبیشف واقع در دامنه می‌باشند. در شکل (۲.۲) این مجموعه از نقاط در دامنه‌های آزمون دو و سه بعدی رسم شده اند.

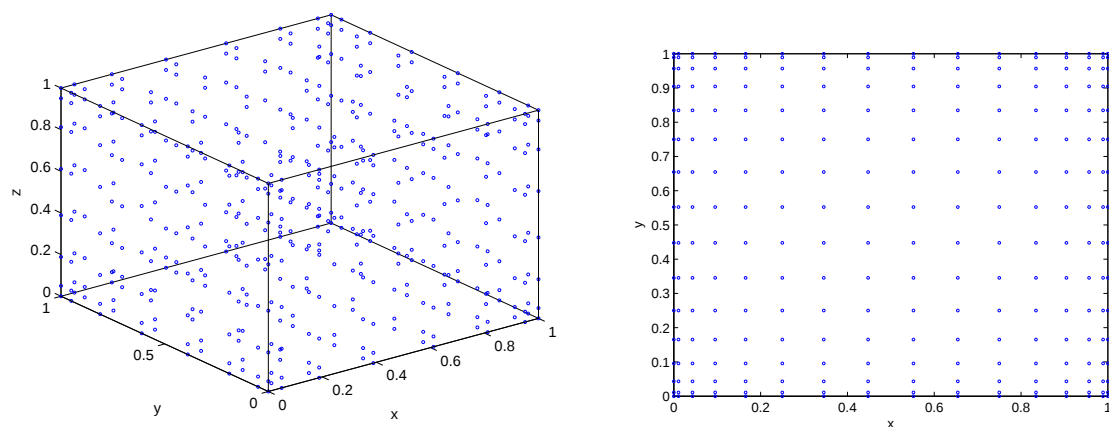
^۲ Trial approximation

^۳ Testing

^۴ Chebyshev data



شکل ۱.۲: داده های تولید شده به صورت یکنواخت در دامنه های آزمون دو بعدی و سه بعدی.



شکل ۲.۲: نقاط چبیشف تولید شده در دامنه های آزمون دو بعدی و سه بعدی.

همچنین رده‌های متفاوت دیگری از نقاط پراکنده در دامنه موجود می‌باشند که به عنوان نقاط میدانی در روش‌های بدون شبکه استفاده خواهند شد.

۳.۲ تقریب جواب

همان گونه که قبلاً اشاره شد، دومین گام اساسی و مشترک در روش‌های بدون شبکه، تقریب جواب می‌باشد. در این گام جواب مسأله به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi_j(\mathbf{x}),$$

به طوری که در رابطه فوق، $\Phi_j(\cdot)$ توابع پایه‌ای مشخص و λ ضرائب مجهول می‌باشند که در گام سوم روش‌های بدون شبکه محاسبه می‌شوند. در فصل قبل دو رده از توابع پایه‌ای، توابع پایه‌ای شعاعی و توابع جواب‌های ویژه معرفی شدند و قضایای مربوط به آن‌ها در مسائل درونیایی داده‌های پراکنده به طور جامع بررسی شدند. به طور کلی در این رساله از توابع پایه‌ای شعاعی و همچنین توابع جواب‌های ویژه به عنوان توابع پایه‌ای در گام تقریب جواب‌ها استفاده می‌شود. باید توجه داشت که در مواجهه با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بسیاری از نتایج و قضایای معتبر در مسائل درونیایی فاقد اعتبار می‌باشند و یا با اعمال برخی تغییرات قابل استفاده می‌باشند. در ادامه و هنگام بررسی روش‌های بدون شبکه، این نتایج و قضایا بررسی خواهند شد.

در گام سوم روش‌های بدون شبکه، جواب‌های پیشنهادی در فرم ضعیف یا قوی معادلات حاکم صدق داده می‌شود و سپس ضرائب مجهول محاسبه می‌شوند. چندین روش‌آزمودن تا به حال ارائه گردیده اند که می‌توان آنها را در گروه‌های زیر دسته بندی کرد:

۴.۲ آزمودن به فرم قوی سراسری (روش هم محلی)

این روش به طور گسترده در تقریب توابع پایه‌ای شعاعی و همچنین روش‌ذرات هیدرودینامیکی هموار به کار می‌رود. در این روش، تابع تقریب باید در یک مجموعه از نقاط (نقاط هم محلی) در فرم اصلی و قوی معادلات حاکم صدق کند. تعداد این نقاط نباید از تعداد ضرایب مجهول کمتر باشد و این نقاط باید مجزا باشند. در نتیجه مسأله تبدیل به یک دستگاه معادلات می‌شود که ضرایب تقریب مجهول هستند. به وضوح این روش یک روش ساده و سریع می‌باشد، اما مشکل اصلی آن ناپایداری است.

۱.۴.۲ روش هم محلی کانسا (نا متقارن)

روش کانسا^۵ [۵۸، ۵۹] یکی از معروفترین روش‌های بدون شبکه می‌باشد. در این روش از توابع پایه‌ای شعاعی برای تقریب جواب استفاده می‌شود، لذا در اغلب موارد این روش را روش هم محلی توابع پایه‌ای شعاعی نیز می‌نامند. این روش مبتنی بر فرم قوی معادلات حاکم بر مسأله و برای اولین بار در سال ۱۹۹۰ توسط کانسا معرفی و برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی مورد استفاده قرار گرفت [۵۸]. به علت سادگی در اجرا و کارایی بالای روش کانسا، این روش به سرعت مورد توجه مهندسان و دانشمندان قرار گرفت و به طور وسیعی در حل مسائل مهندسی و علوم پایه استفاده شد. در سال‌های اخیر توسعه‌های زیادی برای افزایش کارایی و دقت این روش داده شده است و به علاوه نتایج تحلیلی جالبی در رابطه با کران خطا و همگرایی این روش اثبات شده‌اند. مزیت اصلی روش کانسا در دقت بالا و انعطاف پذیری آن در مواجهه با مسائل با دامنه‌های هندسی نامنظم می‌باشد. باید متذکر شد که تنها اطلاعات هندسی مورد نیاز در روش کانسا فاصله بین نقاط میدانی انتخاب شده در دامنه می‌باشد و لذا به راحتی می‌توان آن را برای مسائل با ابعاد بالا تعمیم داد.

برای توضیح روش کانسا، مسأله مقدار مرزی کلی زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$Bu(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.2)$$

به طوری که در رابطه فوق $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیلی، B عملگر دیفرانسیلی مرزی، f ، g توابع معلوم و به اندازه کافی هموار، $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ناحیه داخلی دامنه مدل، Γ مرز Ω و در نهایت $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. فرض کنید $\mathcal{N}_i$ ، $\{(\mathbf{x}_j, f(\mathbf{x}_j))\}_{j=1}^{\mathcal{N}_i}$ نقطه میدانی و متمایز در داخل دامنه Ω و $\{(\mathbf{x}_j, g(\mathbf{x}_j))\}_{j=\mathcal{N}_i+1}^{\mathcal{N}}$ ، نقاط میدانی متمایز مرزی باشند. در ادامه این بخش از نماد $\mathcal{N}_i$ برای نشان دادن تعداد نقاط داخلی و از نماد $\mathcal{N}_b$ برای نشان دادن تعداد نقاط مرزی استفاده خواهد شد.

روش‌های هم محلی، مدل ۱.۲ را با انتخاب نقاط هم محلی $\{\xi_k\}_{k=1}^{\mathcal{N}}$ به صورت دستگاه معادلات خطی زیر تبدیل می‌کنند:

$$\mathcal{L}u(\xi_k) = f(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_i, \quad (3.2)$$

$$Bu(\xi_k) = g(\xi_k), \quad k = \mathcal{N}_i + 1, \dots, \mathcal{N}, \quad (4.2)$$

ایده اساسی روش کانسا، تقریب تابع جواب u به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی می‌باشد:

$$u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|), \quad (5.2)$$

^۵Kansa's method

به طوری که $\mathbf{x}_j$ ها نقاط مرکزی و λ_j ها ضرائب مجهول می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۵.۲) در مدل ارائه شده (۱.۲) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{L}\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۶.۲)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{B}\phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (۷.۲)$$

و در ادامه با استفاده از دستگاه هم محلی، نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{L}\phi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|) = f(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, N_i, \quad (۸.۲)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathcal{B}\phi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|) = g(\xi_k), \quad k = N_i + 1, \dots, N, \quad (۹.۲)$$

معمولاً در اجرای روش کانسا نقاط مرکزی و نقاط هم محلی یکسان در نظر گرفته می‌شوند، ولی در این بخش فرض می‌شود مراکز توابع پایه‌ای شعاعی و نقاط هم محلی یکسان نباشند. در ادامه با حل دستگاه معادلات (۸.۲) یک جواب تقریبی برای مدل ارائه شده محاسبه می‌شود. کارایی و اعتبار روش کانسا در مقالات متنوعی بررسی شده است. کانسا در مقاله [۵۹] مجموعه‌ای از روش‌ها که از روش هم محلی توابع پایه‌ای شعاعی استفاده می‌کنند را شرح داده و کارایی این روش با استفاده از توابع چند ربعی‌ها به عنوان توابع پایه‌ای را از دید پیچیدگی محاسباتی و دقت مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و نتایج حاصل را با روش تفاضلات متناهی مقایسه کرده است. متأسفانه مشکل اساسی روش کانسا این است که دستگاه حاصل از گسسته سازی هم محلی برای آرایش خاصی از نقاط می‌تواند منفرد باشد. در مقاله [۵۵] نویسندگان به طور مفصل به بررسی این موضوع پرداخته اند.

۲.۴.۲ روش جواب های ویژه تقریبی سراسری

در سال ۱۹۸۵ اتکینسون^۶ در مقاله [۸] برای اولین بار ایده جواب های ویژه^۷ را مطرح کرده و سه روش عددی برای محاسبه جواب های ویژه معادله پواسون^۸ ارائه کرد. اخیراً چن و همکارانش در مقاله [۲۱] روش جواب های ویژه تقریبی^۹ را معرفی کرده اند. روش جواب های ویژه تقریبی یک روش بدون شبکه و مبتنی بر فرم قوی

^۶ Atkinson

^۷ Particular Solutions

^۸ Poisson's equation.

^۹ Method of Approximate Particular Solutions

معادلات حاکم می‌باشد. برای توصیف این روش، معادله ۱.۲ را در نظر بگیرید. در روش جواب های ویژه تقریبی *MAPS* ابتدا یک معادله دیفرانسیل وابسته به صورت :

$$\mathcal{L}\Psi(r) = \phi(r), \quad (10.2)$$

در نظر گرفته می‌شود، به طوری که $\phi(r)$ یک تابع پایه‌ای شعاعی و معلوم می‌باشد. از حل معادله فوق تابع $\Psi(r)$ محاسبه می‌شود که این تابع را جواب ویژه عملگر $\mathcal{L}$ وابسته به تابع $\phi(r)$ می‌نامند. در ادامه تابع $f(\mathbf{x})$ را به صورت ترکیب خطی از یک تابع پایه‌ای شعاعی مشخص مانند $\phi(r)$ و به صورت زیر در نظر می‌گیرند:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \\ &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|), \end{aligned} \quad (11.2)$$

بنابراین باتوجه به رابطه (۱۱.۲) و همچنین رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|), \quad (12.2)$$

در ادامه با جایگذاری $u_{\mathcal{N}}$ در معادلات حاکم (۱.۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_{\mathcal{N}} &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathcal{B}u_{\mathcal{N}} &= \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \mathcal{B}\Psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \end{aligned} \quad (13.2)$$

در نهایت بر اساس روش‌های هم محلی، با انتخاب نقاط هم محلی $\{\xi_k\}_{k=1}^{\mathcal{N}}$ و جایگذاری آن‌ها در رابطه فوق دستگاه معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \phi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|) &= f(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N}_i, \\ \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} \lambda_j \mathcal{B}\Psi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|) &= g(\xi_k), \quad k = \mathcal{N}_i + 1, \dots, \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (14.2)$$

دستگاه معادلات خطی فوق را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\mathcal{M}\lambda = \mathbf{b}, \quad (15.2)$$

به طوری که در رابطه فوق $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T$, $\mathbf{b} = [f(\xi_1), \dots, f(\xi_{N_i}), g(\xi_{N_i+1}), \dots, g(\xi_N)]^T$ و $\mathcal{M}$ یک ماتریس $N \times N$ با عناصر $\mathcal{M}_{kj}$ زیر می‌باشند:

$$\mathcal{M}_{kj} = \begin{cases} \phi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|), & k = 1, 2, \dots, N_i, \quad j = 1, \dots, N, \\ B\Psi(\|\xi_k - \mathbf{x}_j\|), & k = N_i + 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N, \end{cases}$$

اکنون فرض کنید ماتریس $\mathcal{M}$ معکوس پذیر باشد، در نتیجه بردار ضرائب مجهول λ را می‌توان از حل دستگاه (15.2) محاسبه کرد. در نهایت جواب تقریبی معادله مفروض از رابطه (12.2) حاصل می‌شود. همان گونه که مشاهده شد یافتن یک جواب ویژه برای معادله (10.2) یک مرحله اساسی در روش MAPS می‌باشد. متأسفانه در اغلب موارد یافتن یک جواب ویژه برای معادله (10.2) و به ازای هر عملگر دیفرانسیلی $\mathcal{L}$ دشوار و حتی غیر ممکن است. لذا برای رفع این ایراد تلاش می‌شود رابطه (10.2) به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\tilde{\mathcal{L}}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + (\tilde{\mathcal{L}} - \mathcal{L})u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

به طوری که $\tilde{\mathcal{L}}$ یک عملگر دیفرانسیلی می‌باشد که به ازای تابع پایه‌ای شعاعی معلوم $\phi(r)$ ، جواب ویژه معادله

$$\tilde{\mathcal{L}}(r) = \phi(r),$$

به راحتی قابل محاسبه باشد. به عنوان مثال فرض کنید $\gamma(\mathbf{x})$ یک تابع معلوم باشد، آن گاه

$$\begin{aligned} (\Delta \pm \gamma(\mathbf{x}))u &= f(\mathbf{x}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \Delta, \\ (\Delta - \frac{\partial}{\partial n})u &= f(\mathbf{x}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \Delta, \\ (\Delta^2 + \Delta + \gamma(\mathbf{x}))u &= f(\mathbf{x}) \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \Delta^2. \end{aligned}$$

به طوری که در آن $\Delta = (\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_d})$ عملگر لاپلاسین می‌باشد.

۳.۴.۲ آزمودن به فرم قوی موضعی

این روش یک توسعه جالب و کارا از روش‌های مبتنی بر آزمودن به فرم قوی می‌باشد که در سال‌های اخیر معرفی و استفاده شده است. در این روش بر خلاف روش‌های آزمودن به فرم قوی سراسری که جواب‌های

تقریبی در یک مجموعه از نقاط پراکنده در دامنه اصلی برای آزمودن جواب استفاده می‌کرد، از مجموعه نقاط پراکنده در نواحی موضعی در دامنه اصلی استفاده می‌کند. این نوع آزمودن سبب افزایش پایداری روش و کاهش حساسیت روش به تغییرات پارامترهای روش می‌شود.

۴.۴.۲ آزمودن به فرم ضعیف سراسری

جهت اجرای روش گالرکین نیازمند استفاده از فرم ضعیف یا تغییراتی مساله است. روش گالرکین با عناصر آزاد،^{۱۰} روش افراز یکه، روش بازتولید اجزای هسته از روش گالرکین و برای محاسبه انتگرالهای حاصل از روشهای انتگرال گیری عددی استفاده می‌کنند. در نتایج به دست آمده از اجرای این روش، چنین بیان کرده اند که این روش در هیچ جا به بن بست نمی‌رسد^{۱۱} و سرعت همگرایی می‌تواند از روش عناصر متناهی بیشتر شود. از معایب این روش می‌توان به هزینه بالای اجرای این روش (انتگرالگیری در کل دامنه) اشاره کرد.

۵.۴.۲ آزمودن به فرم ضعیف محلی

ژو (۱۹۹۹)^{۱۲} و اتلوری و ژو (۲۰۰۰)^{۱۳} دو نوع روش بدون شبکه ارائه نمودند: روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی^{۱۴} و روش بدون شبکه پتروف- گالرکین محلی.^{۱۵} هر دو روش از تقریب کمترین مربعات محلی استفاده می‌کنند. اما برای به دست آوردن مجهولات (که در اینجا مقادیر تابع هستند) روش MLPG از معادلات انتگرال محلی و روش LBIE از معادلات انتگرال مرزی محلی استفاده می‌کنند. معادلات باید روی زیردامنه‌های با شکل منظم برقرار باشند و انتگرال‌ها روی این زیردامنه‌ها و مرز آنها محاسبه می‌شوند. در این رساله از روش‌های یاد شده در بالا برای آزمودن جواب‌ها استفاده می‌شود که در زیر به طور ویژه بررسی خواهند شد.

^{۱۰}Element Free Galerkin(EFG)

^{۱۱}do not exhibit any volumetric locking

^{۱۲}Zhu

^{۱۳}Atluri and Zhu

^{۱۴}meshless local boundary integral equation (LBIE)

^{۱۵}meshless local Petrov-Galerkin (MLPG)

فصل ۳

یک روش بدون شبکه برای بررسی عددی رشد مویرگی در انتشار تومورها

۱.۳ مقدمه

فرآیند پیچیده رگ زایی به عنوان عروق جدید حاصل از رشد و توسعه عروق قدیمی اساس درک بسیاری از پدیده های فیزیولوژیک و پاتولوژیک می باشد. در شرایط طبیعی، رگ زایی فرآیندی است که در آن عروق خونی جدید در وجود جنین تشکیل شده و سبب رشد جنین می شود. در حالت کلی و بر مبنای اصول پاتولوژی، رگ زایی اساسی برای درمان زخم ها، بیماری روماتوئید و ترومبوز است. به طور خاص فرآیند رگ زایی یک نقش کلیدی در ایجاد و رشد بسیاری از انواع تومورهای جامد بر عهده دارد. نقش اخیر فرآیند رگ زایی در تولید و انتشار تومورها در این بخش از رساله بررسی خواهد شد. هر چند در سال های اخیر فرآیند رگ زایی طبیعی در توسعه و رشد جنین ها به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته اند، با این حال بررسی فرآیند رگ زایی در دو حالت ویژه مورد علاقه محققان قرار دارد. در حالت اول بررسی فرآیند رگ زایی در بهبود زخم ها و دیگر بررسی فرآیند رگ زایی در انتشار تومورها. در حالت اخیر مشاهده می شود که شبکه های عروقی جدید از طریق جوانه های جدید عروق شکل می گیرند. به منظور توضیح فرآیند منجر به رگ زایی تومورها، ابتدا با شرح مختصری از اهمیت سلول های مرکزی اندوتلیال عروق خونی ارائه می شود. سلول های اندوتلیال پوشش همه عروق خونی را تشکیل می دهند. در داخل مویرگ ها، آنها یک تک لایه از سلول های مسطح و توسعه یافته را تشکیل می دهند. چگونه انتشار عامل رگ زایی القا شده به طور کامل شناسایی نشده است هر چند عدم تعادل انرژی به علت هیپوکسی ممکن است یک عامل اصلی در تولید و انتشار آن باشد. اخیراً لوین^۱ و همکارانش یک مدل ریاضی برای فرآیند شکل گیری و رشد مویرگی در انتشار تومورها ارائه کرده اند [۶۱]. در این مدل ارائه شده، نویسندگان یک مدل ریاضی اولیه از رفتارهای حاکم بر حرکت سلول های اندوتلیال^۲

^۱Levine

^۲endothelial cells

را به صورت یک معادله مشتقات جزئی سهموی زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{u}{f(x)} \right) \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \tau, \quad (1.3)$$

با شرایط اولیه و مرزی

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 1, \quad 0 < x < 1, \\ Du \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{u}{f(x)} \right) \Big|_{x=0} &= 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ Du \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{u}{f(x)} \right) \Big|_{x=1} &= 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ارائه کردند، به طوری که تابع $f(x)$ تابع احتمال انتقال می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \left(\frac{a + Ax^s(1-x)^s}{b + Ax^s(1-x)^s} \right)^{\beta_1} \left(\frac{e + 1 - Bx^s(1-x)^s}{d + 1 - Bx^s(1-x)^s} \right)^{\beta_2}$$

به علاوه $u(x, t)$ غلظت سلول‌های اندوتلیال را توصیف کرده، D ثابت انتشار سلول و همچنین پارامترهای $a, b, d, e, A, B, s, \beta_1, \beta_2$ ثابت‌های مشخص می‌باشند. تاکنون روش تحلیلی برای حل مدل ریاضی فوق ارائه نشده است. بنابراین به علت عدم وجود یک جواب تحلیلی و دقیق برای این مدل، در سال‌های اخیر بررسی جواب‌های عددی این مدل مورد توجه واقع شده است. در ابتدا یک روش عددی مبتنی بر روش تفاضلات متناهی برای حل عددی این مدل ارائه شد [۷۹]. در ادامه سعادت‌مندی و همکارانش یک تکنیک عددی مبتنی بر روش طیفی با استفاده از پایه‌های لژاندر شیفت داده شده برای تجزیه و تحلیل عددی این مدل ارائه کردند [۸۳]. اخیراً نیز یک روش عددی کارا مبتنی بر روش تقسیم عملگر تکرار شونده^۳ برای حل این مدل به کار گرفته شده است [۵۱]. ذکر این نکته دارای حائز اهمیت است که در هر سه مقاله اشاره شده در بالا، روش‌های عددی تنها به ازای مقادیر بسیار کوچک ثابت انتشار سلولی ($D = 0.00025$) مورد استفاده قرار گرفته‌اند و برای جلوگیری از انتشار خطا، این مدل به ازای مقادیر بزرگتر ثابت انتشار سلولی تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. در این بخش تلاش می‌شود یک روش عددی کارا مبتنی بر روش هم محلی و فرم قوی مدل ریاضی حاکم و با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی ارائه شود.

۲.۳ تکنیک‌های عددی

در این بخش یک روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی برای حل مدل ارائه شده در معادله (۱.۳) با شرایط مرزی و اولیه (۲.۳) ارائه خواهد شد. برای این منظور با فرض $F(x) = f(x)/f'(x)$ معادله (۱.۳) به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

^۳Iterative operator splitting method

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial(uF)}{\partial x} \right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq \tau, \quad (3.3)$$

و همچنین شرایط اولیه و مرزی (۲.۳) به صورت زیر بازنویسی خواهند شد:

$$u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1, \quad (4.3)$$

$$D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} - u(0, t)F(0) \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad (5.3)$$

$$D \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} - u(1, t)F(1) \right) = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (6.3)$$

در ادامه مسئله معادل (۳.۳) با شرایط اولیه (۴.۳) و شرایط مرزی (۵.۳) و (۶.۳) مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱.۲.۳ گسسته سازی زمانی

در این بخش ابتدا یک روش تفاضلات متناهی- θ وزن دار ($0 \leq \theta \leq 1$) برای گسسته سازی مشتق وابسته به زمان در معادله (۳.۳) در دو سطح زمانی متوالی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} = D\theta(u_{xx}^{n+1} - u_x^{n+1}F - u^{n+1}F_x) + D(1-\theta)(u_{xx}^n - u_x^nF - u^nF_x),$$

به طوری که $\delta t = t^{n+1} - t^n$ اندازه گام زمانی و $u^n = u(x, t^n)$ با ساده سازی معادله فوق به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$u^{n+1} - \delta t D\theta(u_{xx}^{n+1} - u_x^{n+1}F - u^{n+1}F_x) = u^n + \delta t D(1-\theta)(u_{xx}^n - u_x^nF - u^nF_x). \quad (7.3)$$

همان گونه که مشاهده می‌شود در رابطه گسسته شده (۷.۳) با به کارگیری شرط اولیه (۴.۳) به صورت $u^0 = u(x, 0)$ ، تابع جواب وابسته به زمان در سطح زمانی n ، u^n به مقدار تابع جواب بر روی سطح زمانی قبلی آن وابسته است. در رابطه (۷.۳) با در نظر گرفتن $\theta = 0, 0.5, 1$ ، معادلات حاصل به ترتیب معادل روش های تفاضلات پیشرو، کرانک نیکلسون^۴ و تفاضلات پسرو می‌باشند. در ادامه اثر مقادیر مختلف θ بر پایداری روش عددی ارائه شده نیز بررسی خواهد شد.

^۴Crank-Nicolson

۲.۲.۳ روش هم محلی مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی

در این بخش یک روش بدون شبکه، مبتنی بر روش کانسا برای تقریب جواب های مسئله استفاده می‌شود. برای این منظور، جواب های مسئله در هر سطح زمانی به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی و به فرم زیر پیشنهاد می‌شود:

$$u^n(x) \approx \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(r_j),$$

به طوری که φ تابع پایه‌ای شعاعی و $r_j = \|x - x_j\|$ فاصله اقلیدسی بین نقاط x_j و x می‌باشد و x_j ها نقاط مرکزی می‌باشند. به علاوه $\{\lambda_j^n\}_{j=1}^N$ ، مجموعه ضرائب در سطح زمانی n ام و مجهول می‌باشند. بنابراین با توجه به روش کانسا با انتخاب N نقطه هم محلی x_i در دامنه $[0, 1]$ به نحوی که $x_1 = 0$ و $x_N = 1$ ، تابع جواب u^n در سطح زمان n ام به صورت زیر درونیایی می‌شود:

$$u^n(x_i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(r_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.3)$$

به طوری که $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$. توجه شود برای اختصار، رابطه (۸.۳) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نشان داد:

$$\mathbf{u}^n = \Phi \lambda^n, \quad (9.3)$$

به طوری که

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi(r_{11}) & \varphi(r_{12}) & \dots & \varphi(r_{1N}) \\ \varphi(r_{21}) & \varphi(r_{22}) & \dots & \varphi(r_{2N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi(r_{N1}) & \varphi(r_{N2}) & \dots & \varphi(r_{NN}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^n = \begin{pmatrix} u^n(x_1) \\ u^n(x_2) \\ \vdots \\ u^n(x_N) \end{pmatrix}, \quad \lambda^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \\ \vdots \\ \lambda_N^n \end{pmatrix},$$

در رابطه فوق Φ ماتریس ضرائب هم محلی می‌باشد. همان گونه به سادگی مشاهده می‌شود ماتریس ضرائب هم محلی Φ یک ماتریس متقارن ($\varphi(r_{ij}) = \varphi(r_{ji})$) و پر^۵ می‌باشد.

همان گونه که در فصل اول اشاره شد انواع متنوعی از توابع پایه‌ای شعاعی معرفی شده را می‌توان به عنوان پایه در نظر گرفت. در این بخش با توجه به اهمیت توابع چند ربعی ها، به طور ویژه از آن ها به عنوان توابع پایه‌ایدر تقریب جواب استفاده می‌شود. همان گونه که قبلاً اشاره شد، توابع چند ربعی دارای همواری (C^∞) و همچنین دارای مرتبه همگرایی نمایی در مسائل درونیایی می‌باشند. از آن جا که توابع چند ربعی و مشتقات

^۵ Dense matrix

مکانی آن‌ها از هر مرتبه در نقاط هم محلی x_i معلوم می‌باشند با جای گذاری (۸.۳) در رابطه (۷.۳) و با استفاده از نقاط هم محلی واقع در داخل دامنه، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) - \delta t D \theta \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi''(r_{ij}) - \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi'(r_{ij}) F(x_i) - \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(r_{ij}) F_x(x_i) \right] \\ & = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(r_{ij}) + \delta t D (1 - \theta) \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi''(r_{ij}) - \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi'(r_{ij}) F(x_i) - \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(r_{ij}) F_x(x_i) \right] \\ & \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (10.3)$$

همچنین با جای گذاری جواب تقریبی پیشنهادی (۸.۳) در شرایط مرزی (۵.۳-۶.۳)، دسته معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} D \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi'(r_{1j}) - \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(r_{1j}) F(x_1) \right] &= 0, \\ D \left[\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi'(r_{Nj}) - \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(r_{Nj}) F(x_N) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

دستگاه معادلات خطی ارائه شده در روابط (۱۰.۳-۱۱.۳) را می‌توان برای اختصار به فرم ماتریسی زیر باز نویسی کرد:

$$[\Phi_d + \tilde{\Phi} - D\delta t\theta(C - \mathcal{A} - B)]\lambda^{n+1} = [\Phi_d + D\delta t(1 - \theta)(C - \mathcal{A} - B)]\lambda^n, \quad (12.3)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} \Phi_d &= [\varphi(r_{ij}) : 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N], \\ \tilde{\Phi} &= [\varphi'(r_{ij}) - \varphi(r_{ij})F(x_i) : i = 1, N, 1 \leq j \leq N], \\ C &= [\varphi''(r_{ij}) : 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N], \\ \mathcal{A} &= [\varphi'(r_{ij})F(x_i) : 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N], \\ B &= [\varphi(r_{ij})F_x(x_i) : 2 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N]. \end{aligned}$$

توجه شود که درایه های دیگر ماتریس های فوق برابر صفر می باشند. بنابراین با توجه به رابطه (۱۲.۳) نتیجه می‌شود:

$$\lambda^{n+1} = [\Phi_d + \tilde{\Phi} - D\delta t\theta(C - \mathcal{A} - B)]^{-1} [\Phi_d + D\delta t(1 - \theta)(C - \mathcal{A} - B)]\lambda^n,$$

لذا یک فرآیند صریح برای تقریب جواب‌ها در هر سطح زمانی به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{u}^n \quad (13.3)$$

به طوری که

$$\mathbf{P} = \Phi [\Phi_d + \tilde{\Phi} - D\delta t\theta(C - \mathcal{A} - B)]^{-1} [\Phi_d + D\delta t(1 - \theta)(C - \mathcal{A} - B)] \Phi^{-1}$$

از روابط بالا به وضوح مشاهده می‌شود که بردار جواب تقریبی $\mathbf{u}^{n+1}$ در هر سطح زمانی به طور منحصر به فرد قابل محاسبه است، مشروط بر این که ماتریس های $[\Phi_d + \tilde{\Phi} - D\delta t\theta(C - A - B)]$ و Φ نامنفرد و در نتیجه معکوس پذیر باشند. اثبات معکوس پذیری این ماتریس ها در حالت کلی و به راحتی امکان پذیر نیست ولی باید متذکر شد که منفرد بودن این ماتریس ها به ندرت در برخی مسائل مشاهده می‌شود.

اکنون با توجه به رابطه (۱۲.۳) یک دستگاه N معادله و N مجهول λ_j^{n+1} حاصل می‌شود. این دستگاه معادلات خطی را می‌توان به صورت مستقیم یا روش حذفی گاوس^۶ برای مسائل با بعد کم و برخی روش های تکراری برای مسائل با بعد بزرگتر حل کرد. پس از محاسبه مقادیر مجهول λ_j^{n+1} یک جواب تقریبی در سطح زمانی $n + 1$ مشخص می‌شود. در این روش بدون شبکه ارائه شده دقت و پایداری روش به مقادیر پارامتر وزن θ ، پارامتر شکلی ε و همچنین فاصله بین نقاط هم محلی وابسته می‌باشد. در ادامه تلاش می‌شود اثر تغییرات این عوامل بر پایداری روش بررسی شود.

۳.۲.۳ بررسی پایداری

در این بخش تلاش می‌شود اثر پارامتر وزن θ بر پایداری روش بررسی شود. همان گونه که قبلاً اشاره شده پایداری و در نتیجه دقت روش تا حد زیادی به مقادیر پارامتر وزن $\theta \in [0, 1]$ وابسته می‌باشد. برای این منظور یک روش تحلیل پایداری براساس مقادیر ویژه ماتریس ضرائب دستگاه حاصل از روش بدون شبکه (۱۳.۳) ارائه می‌شود. فرض کنید $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{*n}$ یک بردار خطا در سطح زمانی n ام می‌باشد به طوری که $\mathbf{u}^n$ و $\mathbf{u}^{*n}$ به ترتیب بیان گر جواب های دقیق و تقریبی در سطح زمانی n ام می‌باشند. بنابراین از رابطه (۱۳.۳) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{e}^{n+1} = \mathbf{P}\mathbf{e}^n.$$

اکنون برای پایداری روش باید داشته باشیم، $\rho(\mathbf{P}) \leq 1$ و در نتیجه $\|\mathbf{e}^n\| \rightarrow 0$ هر وقت $n \rightarrow \infty$ ، به طوری که $\rho(\mathbf{P})$ نشان دهنده شعاع طیفی ماتریس $\mathbf{P}$ می‌باشد. بنابراین با توجه به روابط ((۵.۳)، ((۶.۳)، ((۱۳.۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{n+1} &= [\mathbf{Q} - D\delta t\theta\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{Q} + D\delta t(1 - \theta)\mathbf{T}]\mathbf{e}^n, \\ &= [\mathbf{I} - D\delta t\theta\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{I} + D\delta t(1 - \theta)\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}]\mathbf{e}^n, \end{aligned} \quad (14.3)$$

به طوری که

$$\mathbf{Q} = (\Phi_d + \tilde{\Phi})\Phi^{-1}$$

^۶ Gaussian eliminations

$$\mathbf{T} = (\mathcal{C} - \mathcal{A} - \mathcal{B})\Phi^{-1} \text{ و}$$

بنابراین به منظور پایداری روش شرط زیر باید برقرار باشد:

$$\left| \frac{1 + D\delta t(1 - \theta)\lambda_{Q^{-1}T}}{1 - D\delta t\theta\lambda_{Q^{-1}T}} \right| \leq 1, \quad (15.3)$$

به طوری که $\lambda_{Q^{-1}T}$ مقدار ویژه ماتریس $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{T}$ می‌باشد. همچنین فرض کنید $\lambda_{Q^{-1}T} = a + ib$ به طوری که a و b مقادیر حقیقی باشند. بنابراین رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left| \frac{(1 + D\delta t(1 - \theta)a) + i(D\delta t(1 - \theta)b)}{(1 - D\delta t\theta a) + i(-D\delta t\theta b)} \right| \leq 1,$$

لذا برای پایداری روش، شرط زیر باید برقرار باشد:

$$D\delta t(1 - 2\theta)(a^2 + b^2) + 2a \leq 0. \quad (16.3)$$

از رابطه (۱۶.۳) مشاهده می‌شود که روش به ازای $(\theta \geq \frac{1}{2})$ مشروط بر اینکه $(a < 0)$ پایدار می‌باشد. به ازای مقادیر $\theta < \frac{1}{2}$ پایداری روش به مقادیر پارامترهای D و δt وابسته می‌باشد. همان گونه که مشاهده شد پایداری روش فوق به مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{P}$ وابسته است و از طرفی این مقادیر ویژه به میزان زیادی به پارامتر شکلی ε وابسته می‌باشند. در فصل بعد اثر تغییرات پارامتر شکلی بر پایداری روش به صورت عددی بررسی خواهد شد.

۳.۳ نتایج عددی

در این بخش نتایج عددی محاسبه شده برای مسئله (۳.۳) توسط روش بدون شبکه و به ازای پارامترهای مدل که در مقالات قبلی مورد استفاده قرار گرفته اند [۷۹، ۸۳]، ارائه می‌شود. لذا تلاش می‌شود نتایج عددی مدل را با در نظر گرفتن مقادیر پارامترهای $a = 0.1$, $b = 2$, $e = 10$, $d = 0.1$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $A = 28 \times 10^7$, $B = 0.22 \times 10^9$, $s = 16$ ، و به ازای مقادیر مختلف ثابت انتشار سلول (D) محاسبه کرد. توجه شود به علت عدم وجود جواب دقیق مسئله (۱.۳) و همچنین عدم وجود جواب های عددی برای این مدل، برای بررسی دقت و کارایی روش ارایه شده یک خطای نسبی تقریبی نقطه ای^۷ به صورت زیر تعریف و مورد استفاده قرار خواهد گرفت:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (u^{\tilde{N}}(x_j, t^n) - u^N(x_j, t^n))^2}{\sum_{j=1}^N (u^{\tilde{N}}(x_j, t^n))^2}},$$

به طوری که $0 \leq t^n \leq \tau$ و $\tilde{N} = 2N, 4N$.

^۷ Pointwise approximate relative error

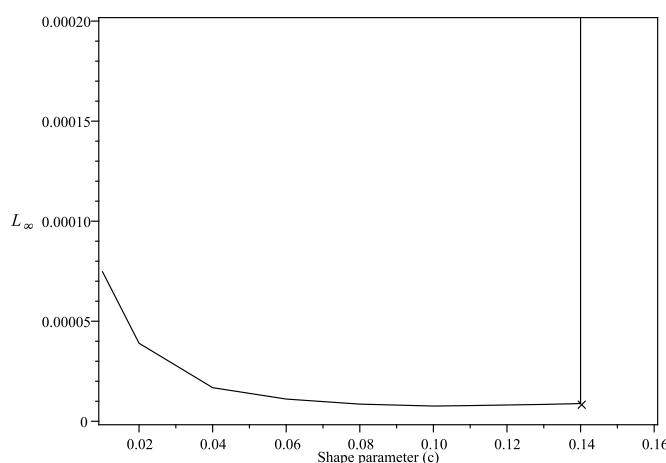
جدول ۱.۳: اثر تغییرات پارامتر شکلی ε بر $\|u^{n+1} - n^n\|_\infty$ و $\rho(P)$ با فرض $t = 375$ ($n = 3750$) و $N = 50$ در حالت ۱.

c	$\ u^{n+1} - n^n\ _\infty$	$\rho(P)$
۰/۰۱	$7/50 \times 10^{-5}$	۰/۹۹۹۹۳۱۲۴
۰/۰۲	$3/90 \times 10^{-5}$	۰/۹۹۹۹۶۵۵۲
۰/۰۴	$1/68 \times 10^{-5}$	۰/۹۹۹۹۸۷۲۵
۰/۰۶	$1/11 \times 10^{-5}$	۰/۹۹۹۹۹۴۸۲
۰/۰۸	$8/57 \times 10^{-6}$	۰/۹۹۹۹۹۷۸۳
۰/۱۰	$7/61 \times 10^{-6}$	۰/۹۹۹۹۹۹۰۶
۰/۱۱	$7/84 \times 10^{-6}$	۰/۹۹۹۹۹۹۲۹
۰/۱۳	$8/43 \times 10^{-6}$	۰/۹۹۹۹۹۵۹۴
۰/۱۴	$8/85 \times 10^{-6}$	۰/۹۹۹۰۵۷۵۹
۰/۱۵	$2/04 \times 10^{-124}$	۱/۰۸۳۴۰۶۵۵

۱.۳.۳ حالت ۱

به عنوان اولین حالت، مسئله (۱.۳) را با ثابت انتشار سلول $D = 0/00025$ و $\tau = 750$ که در مقالات [۷۹، ۸۳] مورد استفاده قرار گرفته اند، در نظر بگیرید. در ادامه روش بدون شبکه ارائه شده در این فصل، با انتخاب توابع چند ربعی به عنوان توابع پایه‌ایو همچنین با فرض $\delta t = 0/1$ و $\theta = 1/2$ ، روش تفاضلات متناهی کرانک- نیکلسون، که یک گسسته سازی پایدار و از مرتبه خطای $O(\delta t^2)$ می‌باشد، برای محاسبه جواب های تقریبی استفاده خواهد شد. همان گونه که قبلاً اشاره شد، پایداری روش بدون شبکه معرفی شده وابسته به مقادیر پارامتر شکلی ε می‌باشد. بدین دلیل در اولین گام یک مقدار مناسب برای پارامتر شکلی محاسبه می‌شود. برای این منظور در هر سطح زمانی مقادیر $L_\infty = \|u^{n+1} - u^n\|_\infty$ به ازای مقدار های مختلف پارامتری شکلی محاسبه می‌شود. در جدول ۱.۳ ارتباط بین مقادیر مختلف پارامتر شکلی در توابع چند ربعی ها با مقادیر L_∞ و همچنین $\rho(P)$ در $t = \tau/2 = 375$ و با فرض $N = 50$ گزارش شده است. با توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۱.۳، مشاهده می‌شود که روش عددی استفاده شده به ازای مقادیر پارامتر شکل در بازه $[0/1, 0/14]$ پایدار می‌باشد. در شکل ۱.۳ گراف نمایش پایداری روش به ازای مقادیر مختلف پارامتر شکل رسم شده است، همان گونه که از شکل مشاهده می‌شود روش به ازای مقادیر پارامتر شکل بزرگتر از $0/14$ ناپایدار می‌باشد. لذا در این حالت $\varepsilon \in [0/01, 0/14]$ یک بازه معتبر برای مقادیر پارامتر شکل می‌باشد.

همان گونه که مشاهده شد، روش پیشنهادی برای تعیین مقادیر معتبر برای پارامتر شکل یک روش کاربردی و موثر می‌باشد. پس از محاسبه مقادیر معتبر برای پارامتر شکل، از آن در توابع پایه‌ای شعاعی استفاده خواهد شد. در جدول ۲.۳ خطای نسبی تقریبی نتایج عددی محاسبه شده در برخی زمان ها با فرض $\tilde{N} = 100$ گزارش شده اند. از نتایج ارائه شده در جدول ۲.۳ مشاهده می‌شود که پایداری روش به ازای بازه های زمانی



شکل ۱.۳: گراف نمایش پایداری روش نسبت به تغییرات ε با فرض $N = 50$, $t = 375$ ($n = 3750$).

زیاد حفظ می‌شود. در شکل ۲.۳ مقادیر محاسبه شده برای تابع غلظت سلول‌های اندوتلیال $(u(x, t))$ در برخی زمان‌ها رسم شده‌اند. نتایج رسم شده در شکل ۲.۳ بر نتایج عددی گزارش شده در مقالات [۷۹، ۸۳] منطبق می‌باشند. توجه شود در مثال ۱، مدل (۱.۳) با مقدار بسیار کوچک برای ثابت انتشار ($D = 0.00025$) در نظر گرفته شده است، شبیه مدل در نظر گرفته شده در مقالات [۷۹، ۸۳]. ذکر این نکته ضروری است که بسیاری از روش‌های عددی برای حل این مدل با مقادیر بزرگتر ثابت انتشار ناپایدار می‌باشند.

۲.۳.۳ حالت ۲

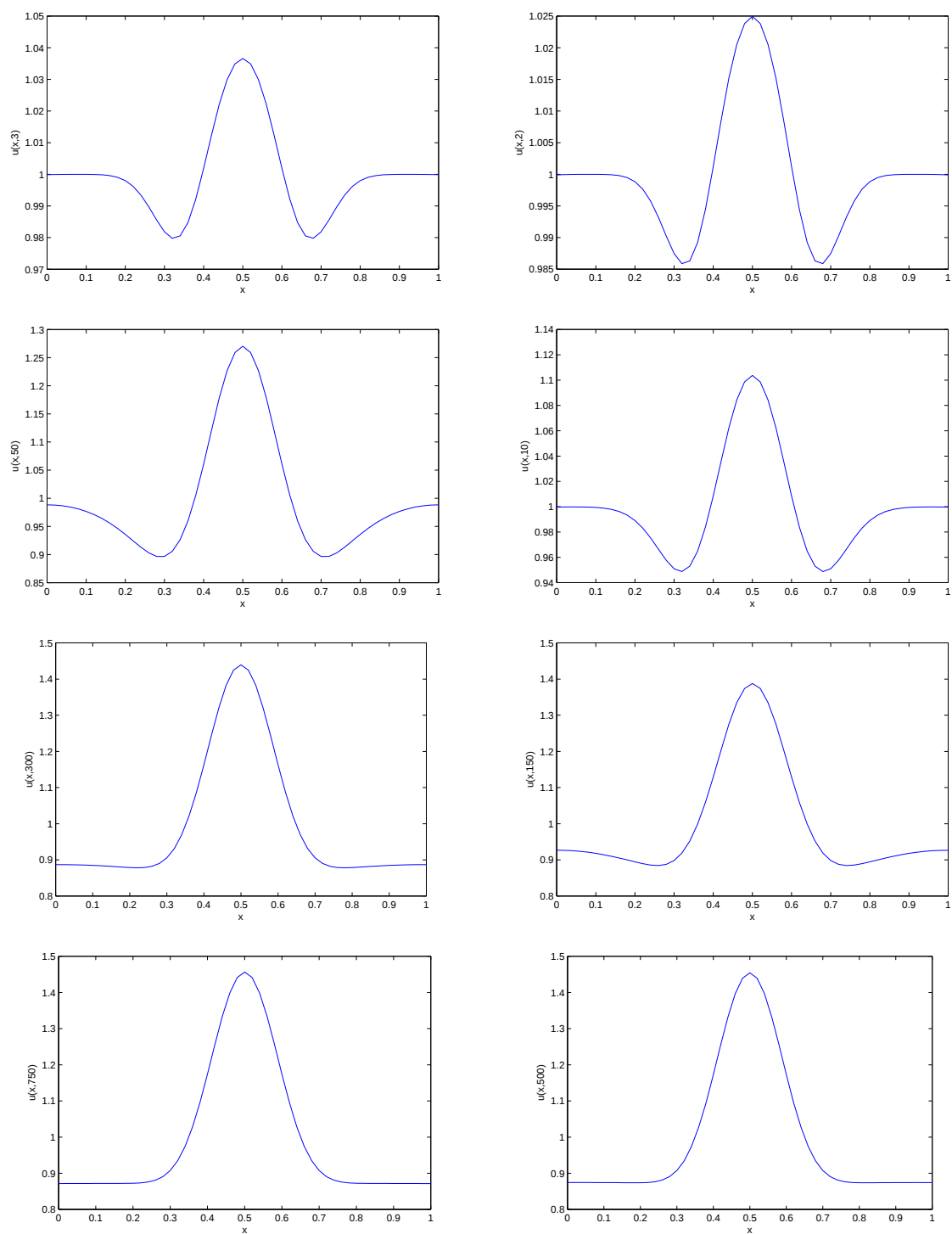
در حالت دوم، مسئله (۱.۳) با پارامترهای مدل حالت ۱ و همچنین با فرض $\tau = 100$ و مقدار ثابت انتشار سلولی $D = 0.005$ در نظر گرفته می‌شود. برای بررسی عددی این حالت، روش بدون شبکه ارائه شده با فرض $\theta = 1/2$ ، $\delta t = 0.1$ و توابع چند ربعی به عنوان توابع پایه‌ای، به کار گرفته می‌شود. شبیه حالت قبل در این حالت نیز در ابتدا یک بازه منطقی و مورد اطمینان برای مقادیر پارامتر شکل که به ازای آن پایداری روش تضمین شود، محاسبه می‌شود. برای این منظور با فرض $N = 100$ یک بازه معتبر و مورد اطمینان برای پارامتر شکل به صورت $\varepsilon \in [0.01, 0.07]$ تخمین زده شده است. در جدول ۳.۳ مقادیر محاسبه شده برای خطای نسبی تقریبی در زمان‌های مختلف و با فرض $\tilde{N} = 100$ گزارش شده‌اند. نتایج ارائه شده در این جدول به وضوح دقت و پایداری روش را نشان می‌دهد. همچنین در شکل ۳.۳ گراف‌های مقادیر تقریبی محاسبه شده برای تابع غلظت سلول‌های اندوتلیال $u(x, t)$ در سطوح زمانی مختلف رسم شده‌اند. این نتایج با استفاده از روش بدون شبکه معرفی شده و با فرض $\varepsilon = 0.07$ و $N = 100$ محاسبه شده‌اند.

جدول ۲.۳: خطای نسبی نتایج محاسبه شده در زمان های مختلف در مثال ۱.

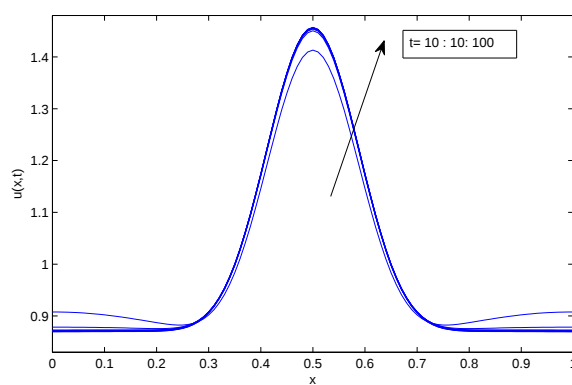
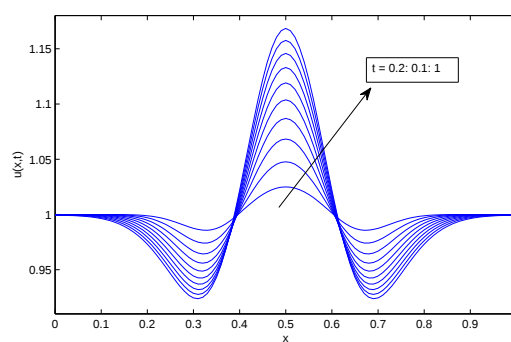
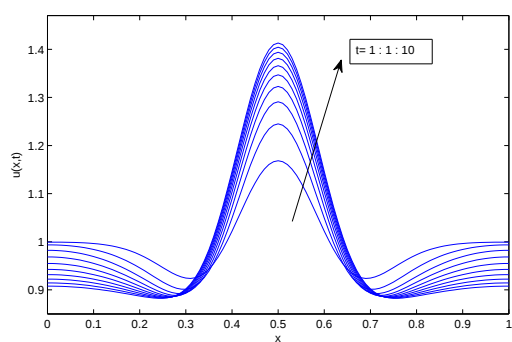
t	خطای نسبی $N = 25$ $\varepsilon = 0.271$	خطای نسبی $N = 50$ $\varepsilon = 0.14$
۱	8.99609×10^{-6}	2.08935×10^{-6}
۲	1.43559×10^{-5}	2.60719×10^{-6}
۱۰	2.56315×10^{-5}	4.59409×10^{-6}
۵۰	3.00326×10^{-5}	3.58331×10^{-6}
۱۰۰	8.31044×10^{-5}	1.18338×10^{-5}
۲۰۰	1.02007×10^{-4}	1.10151×10^{-5}
۳۷۵	7.47322×10^{-5}	1.61422×10^{-5}
۵۰۰	7.73013×10^{-5}	3.36188×10^{-5}
۶۰۰	9.97456×10^{-5}	4.84751×10^{-5}
۷۵۰	1.51002×10^{-4}	7.12505×10^{-5}

جدول ۳.۳: خطای نسبی نتایج محاسبه شده در زمان های مختلف در حالت ۲

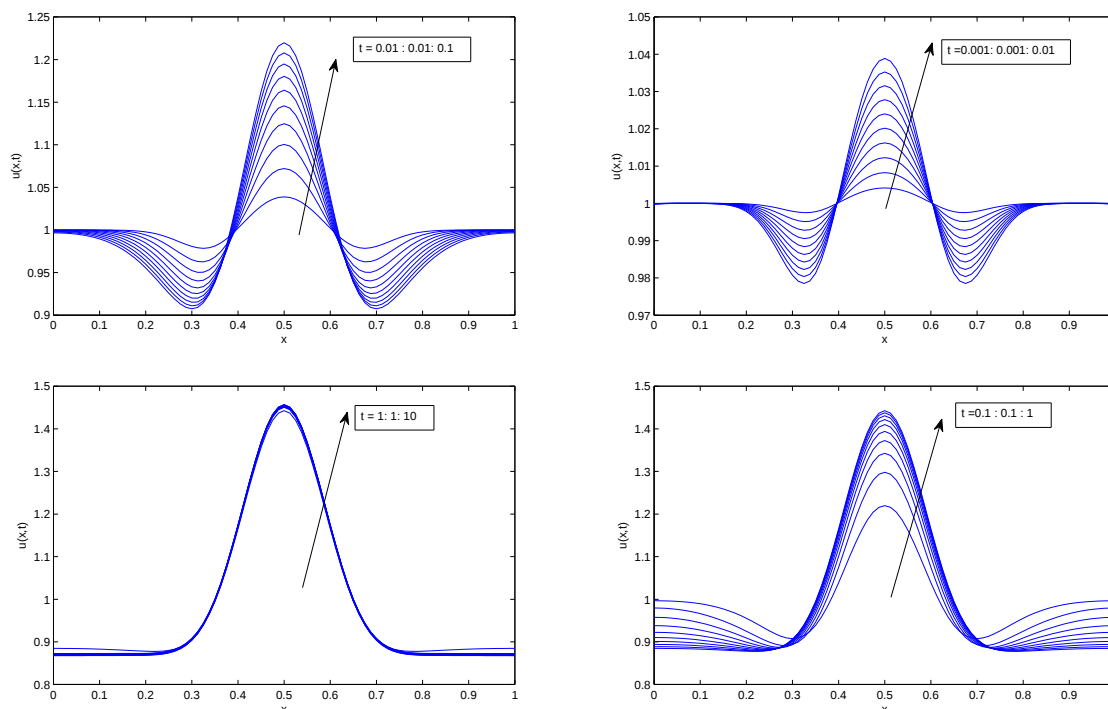
t	$N = 25$ error relative $\varepsilon = 0.3$	$N = 50$ error relative $\varepsilon = 0.14$
۰.۵	6.25937×10^{-5}	1.17248×10^{-5}
۱	8.18492×10^{-5}	1.71632×10^{-5}
۵	1.28878×10^{-4}	2.77192×10^{-5}
۱۰	2.05408×10^{-4}	4.91014×10^{-5}
۳۰	5.44267×10^{-4}	1.71224×10^{-4}
۵۰	9.03363×10^{-4}	3.02802×10^{-4}
۶۰	1.08565×10^{-3}	3.69938×10^{-4}
۷۵	1.36055×10^{-3}	4.71327×10^{-4}
۹۰	1.63644×10^{-3}	5.73130×10^{-4}
۱۰۰	1.82074×10^{-3}	6.41151×10^{-4}



شکل ۲.۳: جواب های تقریبی برای حالت ۱ در زمان های ۲, ۳, ۱۰, ۵۰, ۱۵۰, ۳۰۰, ۵۰۰, ۷۵۰



شکل ۳.۳: جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۲



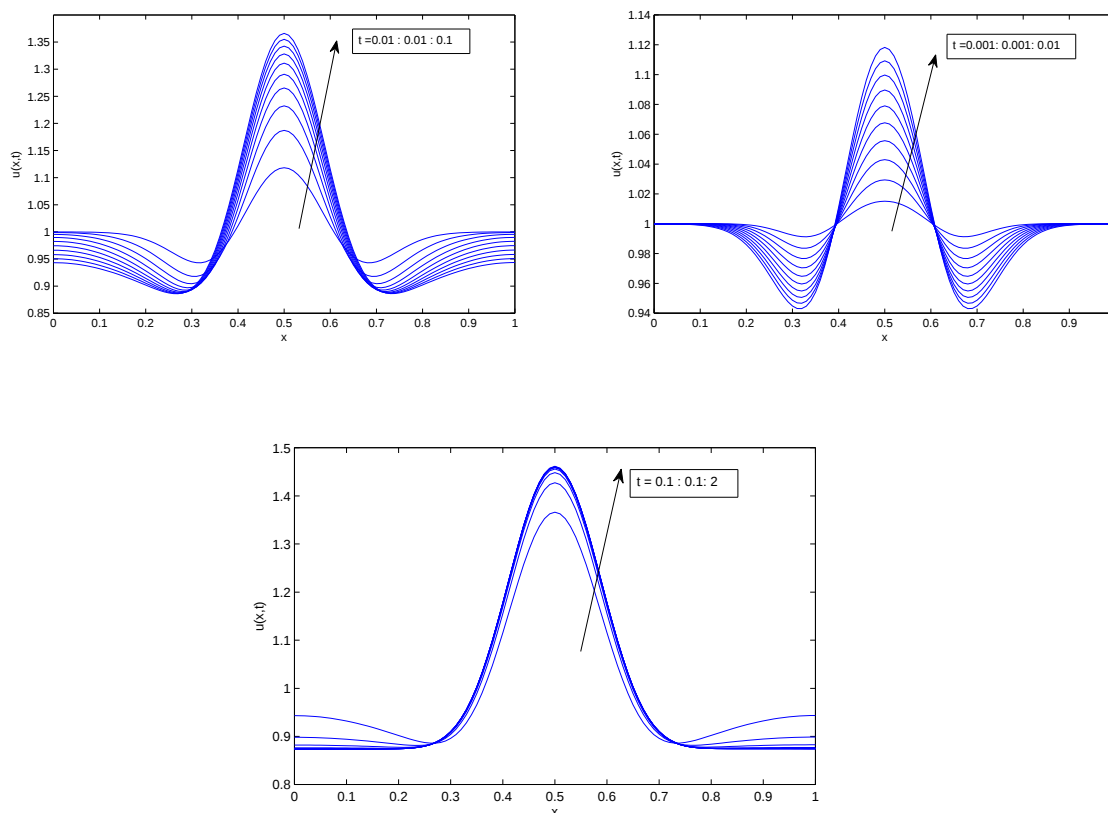
شکل ۴.۳: جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۳

۳.۳.۳ حالت ۳

برای حالت ۳ مسئله را با پارامترهای مدل ارائه شده در حالت ۱ و این بار با در نظر گرفتن ثابت انتشار سلول $D = 0.08$ و همچنین $\tau = 10$ بررسی می‌کنیم. برای این حالت روش بدون شبکه معرفی شده با فرض $N = 80$, $\delta t = 0.001$, $\theta = 1/2$ و استفاده از توابع چند ربعی به عنوان توابع پایه ای، به کار گرفته شده است. برای این حالت یک بازه معتبر برای پارامتر شکل به صورت $\varepsilon \in [0.01, 0.088]$ تخمین زده شده است. به طوری که روش به ازای مقادیر این بازه پایدار خود را حفظ می‌کند. در شکل ۴.۳ گراف های متناظر به مقادیر محاسبه شده برای تابع غلظت سلول های اندوتلیال $u(x, t)$ در برخی سطوح زمانی رسم شده اند، این نتایج توسط روش بدون شبکه و با فرض $\varepsilon = 0.088$ محاسبه شده اند. در این شکل نمو غلظت سلول های اندوتلیال در اثر گذشت زمان به وضوح مشاهده می‌شود.

۴.۳.۳ حالت ۴

در این حالت مسئله با فرض $D = 0.3$ و همچنین $\tau = 2$ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. روش بدون شبکه معرفی شده در این فصل با فرض $N = 100$, $\delta t = 0.001$, $\theta = 2/3$ و همچنین در نظر گرفتن توابع چند ربعی با پارامتر شکل $\varepsilon = 0.078$ به عنوان تابع پایه‌ای مورد استفاده قرار گرفته شده است. نتایج



شکل ۵.۳: جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۴

عددی محاسبه شده در سطوح زمانی مختلف از طریق شکل ۵.۳ گزارش شده اند.

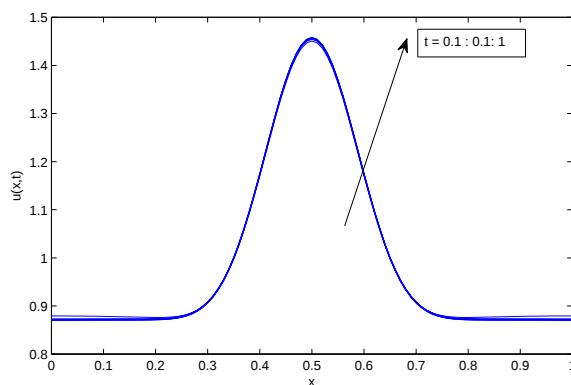
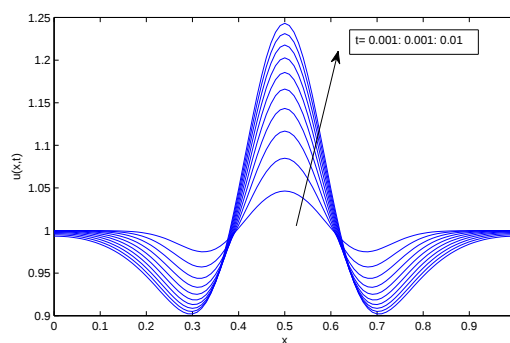
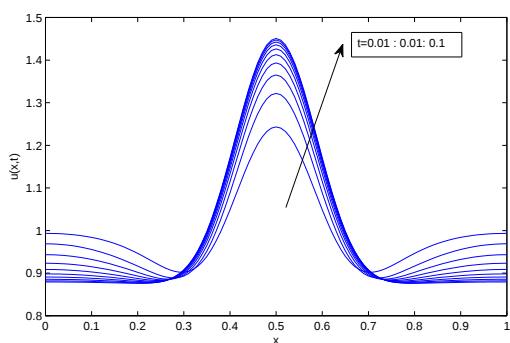
۵.۳.۳ حالت ۵

در نهایت به عنوان آخرین حالت، مسئله با فرض ثابت انتشار سلول $D = 1$ و همچنین $\tau = 1$ بررسی می‌شود. دیگر پارامتر های مدل همانند حالت های قبل در نظر گرفته شده اند. در این حالت نیز روش بدون شبکه با مفروضات $\theta = 2/3$, $N = 100$, $\delta t = 0.001$ و همچنین $\varepsilon = 0.078$ به عنوان پارامتر شکل در تابع پایه‌ای شعاعی استفاده شده است. در جدول ۴.۳ مقادیر خطای نسبی تقریبی در این حالت گزارش شده اند. همچنین در شکل ۶.۳ جواب های عددی و تقریبی محاسبه شده برای تابع غلظت سلول های اندوتلیال $u(x, t)$ در برخی سطوح زمانی رسم شده اند.



جدول ۴.۳: خطای نسبی نتایج محاسبه شده در زمان های مختلف در حالت ۵

t	خطای نسبی $N = 50$ $\varepsilon = 0.15$
۰/۰۰۵	$6/37888 \times 10^{-6}$
۰/۰۱	$1/54293 \times 10^{-5}$
۰/۰۲۵	$4/18852 \times 10^{-5}$
۰/۰۵	$6/30752 \times 10^{-5}$
۰/۰۷۵	$7/41994 \times 10^{-5}$
۰/۱	$8/40468 \times 10^{-5}$
۰/۲۵	$1/42247 \times 10^{-4}$
۰/۵	$2/39039 \times 10^{-4}$
۰/۷۵	$3/36074 \times 10^{-4}$
۱	$4/3305 \times 10^{-4}$



شکل ۶.۳: جواب های تقریبی محاسبه شده برای حالت ۵

۴.۳ نتیجه گیری

در این فصل یک روش بدون شبکه مبتنی بر فرم قوی مدل و بر مبنای توابع پایه‌ای شعاعی برای حل عددی یک مدل ریاضی توصیف کننده فرآیند شکل گیری و رشد مویرگی در انتشار تومورها، با موفقیت فرمول بندی و مورد استفاده قرار گرفت. در این تکنیک، ابتدا یک روش گسسته سازی زمانی بر اساس روش تفاضلات متناهی برای مشتق زمان استفاده شد و سپس از توابع چند ربعی، رده خاصی از توابع پایه‌ای شعاعی، برای گسسته سازی بعد مکان در روش هم محلی استفاده شد. پایداری روش عددی ارائه شده به صورت ترکیبی از استدلال های تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار گرفت. با معرفی یک روش عددی مقادیر معتبر پارامتر شکل مورد استفاده در فرآیند تخمین زده شد و در نهایت با به کارگیری پارامتر های اشاره شده تابع غلظت سلول های اندوتلیال $u(x, t)$ به طور تقریبی محاسبه شد و همچنین نمو آن در اثر گذشت زمان بررسی شد. در این فآیند نتایج عددی مدل به ازای مقادیر مختلف ثابت انتشار سلول D محاسبه شده است که بسیاری از روش های موجود به ازای آن ناپایدار و غیر قابل استفاده می باشند.

فصل ۴

بررسی عددی معادله شرودینگر دو بعدی توسط روش بدون شبکه

۱.۴ مقدمه

همان گونه که قبلاً اشاره شد بسیاری از پدیده ها و فرآیندهای فیزیکی را می توان به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل بندی ریاضی کرد. معادلات غیر خطی شرودینگر مکعبی^۱ یکی از این دسته معادلات دیفرانسیل می باشد که اهمیت ویژه و پایه ای در نظریه فیزیک نوین دارد. این معادله در توصیف موارد مختلفی از پدیده های طبیعی و فیزیکی در فیزیک کوانتوم، اپتیک و انتشار موج ها مورد استفاده قرار می گیرد. از جمله آن ها می توان به کاربرد وسیع آن در مکانیک کوانتوم [۷]، نظریه اپتیک غیر خطی [۵، ۸۵]، انتشار موج الکترومغناطیسی [۶۲] و همچنین طراحی دستگاههای ویژه الکترونیک نوری [۵۴] اشاره کرد. در این فصل یک فرم کلی از معادلات غیر خطی شرودینگر مکعبی با تابع موج $\Psi(x, y, t)$ به صورت:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + q |\Psi|^2 \Psi + \omega(x, y) \Psi = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

و با شرایط آغازین و مرزی دیریکله

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, 0) &= \Psi_0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ \Psi(x, y, t) &= g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

در نظر گرفته خواهد شد، به طوری که در این روابط $\Psi(x, y, t)$ تابع موج مختلط و مجهول، $i = \sqrt{-1}$ و همچنین $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ یک دامنه مستطیلی، $\partial\Omega$ مرز دامنه Ω ، $\Psi_0(x, y)$ و $g(x, y, t)$ توابع مشخص و

^۱Cubic nonlinear Schrödinger (CNS) equation

هموار و در نهایت $\omega(x, y)$ یک تابع پتانسیل مشخص است. همان گونه که اشاره شد معادلات شرودینگر نقش اساسی در توصیف پدیده های متنوع فیزیکی و مهندسی بر عهده دارد. از آن جا که در اغلب موارد جواب های دقیق و تحلیلی این رده از معادلات وجود ندارد یا تاکنون ارائه نشده اند، لذا بررسی عددی جواب های این معادله بسیار مورد توجه است. بدین منظور نویسندگان در مجموعه مقالات [۹۴، ۶، ۲۹، ۴۰، ۱۰۰]، از فرم های متفاوت روش تفاضلات متناهی برای حل انواع مختلف معادلات شرودینگر خطی و غیر خطی استفاده کرده اند. همچنین برخی روش های عددی بدون شبکه نیز برای حل این مسائل مدل بندی و به کار برده شده اند [۳۲، ۳۵، ۷۴، ۳۶، ۴، ۴۱]. در این فصل، یک روش عددی کارا که ترکیبی از روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی و الگوریتم نیوتن می باشد، برای حل عددی معادله شرودینگر ارائه می شود.

۲.۴ فرمول بندی مسئله

در این فصل یک روش عددی بدون شبکه بر اساس الگوریتم کانسا برای حل معادله شرودینگر (۱.۴) با شرایط آغازین و مرزی (۲.۴) ارائه خواهد شد. در گام اول فرمول بندی تکنیک فوق، ابتدا تابع مختلط Ψ در معادله (۱.۴) توسط یک ترکیب از قسمت حقیقی و موهومی آن و به صورت :

$$\Psi(x, y, t) = u(x, y, t) + iv(x, y, t), \quad (1.4)$$

تجزیه می شود، به طوری که توابع $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ توابع حقیقی و مجهول می باشند. با جایگذاری رابطه (۱.۴) در معادلات حاکم (۱.۴) - (۲.۴) دستگاه معادلات غیر خطی زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q(u^2 + v^2)u + \omega u &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + q(u^2 + v^2)v + \omega v &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

با شرایط آغازین و مرزی

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \text{Re}(\Psi_0(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega, \\ v(x, y, 0) &= \text{Im}(\Psi_0(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) &= \text{Re}(g(x, y, t)), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \\ v(x, y, t) &= \text{Im}(g(x, y, t)), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

به وضوح برای سادگی دستگاه فوق را می توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \Delta \mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U})\mathbf{U} + \mathbf{A}_2 \mathbf{U} &= 0, \\ \mathbf{U}(x, y, 0) &= \mathbf{C}_1(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t = 0, \\ \mathbf{U}(x, y, t) &= \mathbf{C}_2(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

به طوری که در آن

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \cdot & a \\ -a & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \cdot & \mathbf{z} \\ -\mathbf{z} & \cdot \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} \cdot & \omega \\ -\omega & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_{xx} + \mathbf{U}_{yy}, \quad \mathbf{z} = q(u^2 + v^2), \quad \mathbf{C}_2(x, y) = \begin{pmatrix} \text{Re}(\Psi) \\ \text{Im}(\Psi) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_2(x, y, t) = \begin{pmatrix} \text{Re}(g) \\ \text{Im}(g) \end{pmatrix}.$$

در بخش بعدی یک روش بدون شبکه مبتنی بر روش کانسا برای حل دستگاه (۴.۴) به کار گرفته می شود.

۱.۲.۴ روش بدون شبکه کانسا

در این بخش تلاش می شود یک حل عددی برای مسئله (۴.۴) با به کارگیری روش هم محلی نامتقارن مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی (روش کانسا) [۵۹] ارائه شود. بدین منظور بردار توابع مجهول $\mathbf{U}$ که شامل توابع حقیقی و مجهول $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ می باشد، باید توسط یک ترکیب خطی از توابع پایه‌ای شعاعی سه بعدی تقریب زده شود:

$$\mathbf{U}(x, y, t) \simeq \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(r_i) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{(1)} \varphi^{(1)}(r_i) \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i^{(2)} \varphi^{(2)}(r_i) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

به طوری که $\varphi^{(2)}(.)$ و $\varphi^{(3)}(.)$ بیانگر توابع پایه‌ای شعاعی سه بعدی می باشند. و به علاوه

$$r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (t - t_k)^2}, \quad (x, y, t) \in \Omega \times [0, T],$$

بیانگر فاصله اقلیدسی بین نقاط گره ای (x, y, t) و (x_k, y_k, t_k) می باشد. نقاط $\{(x_k, y_k, t_k), k = 0, \dots, N\}$

نقاط هم محلی در دامنه مسئله $(\Omega \times [0, T])$ می باشند. همچنین بردار $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ یک مجموعه از $2N$ ضریب مجهول می باشد که باید در روند فرآیند محاسبه شوند. بنابراین بر اساس روش کانسا با جایگذاری عبارت های (۵.۴) در معادلات (۴.۴) و سپس انتخاب N گره هم از دامنه مسئله $\bar{\Omega} = \Omega \times [0, T]$ ، به طوری که N_I نقطه در درون دامنه و N_B بر روی مرز دامنه $\partial\bar{\Omega}$ قرار گرفته باشند و در نهایت با جایگذاری این نقاط در رابطه حاصل، دستگاه غیر خطی زیر نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(r_{ij}) \right) + \mathbf{A}_2 \Delta \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(r_{ij}) \right) + \mathbf{F} \left(\left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(r_{ij}) \right) \right) \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(r_{ij}) \right) \\ + \mathbf{A}_2 \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(r_{ij}) \right) = 0, \quad j = 1, \dots, N_I, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_i \varphi(r_{ij}) = C_k(\mathbf{x}_j), \quad j = N_I + 1, \dots, N_I + N_B = N, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

توجه شود که نقاط مرکزی و نقاط هم محلی لزوماً یکسان نیستند و می توانند به فرم دلخواهی انتخاب شوند. به وضوح دستگاه (۶.۴) یک دستگاه معادلات بلوکی و غیر خطی با $2N$ معادله و $2N$ مجهول $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ می باشد. این دستگاه را می توان توسط روش نیوتن حل کرد. در بخش بعد یک الگوریتم کارا بر مبنای روش نیوتن برای حل دستگاه اخیر ارائه می شود.

۲.۲.۴ الگوریتم نیوتن چند مرحله ای

الگوریتم های متنوعی براساس روش های تکراری نیوتن چند مرحله ای توسط محققان ابداع و در روش های عددی برای حل دستگاه های معادلات غیر خطی مانند $Lu = f$ ، مورد استفاده قرار گرفته اند (برای مطالعه در این زمینه مراجع [۴۶، ۴۷، ۴۸] پیشنهاد می شوند). در این بخش یک الگوریتم بر مبنای الگوریتم های نیوتن چند مرحله ای برای حل معادله غیر خطی شرودینگر به فرم زیر پیشنهاد می شود:

Algorithm 1:

- 1) Create collocation point sets $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots, \mathcal{X}_K \subset \Omega$, and choose an initial guess u_0 .
- 2) For $k = 1, 2, \dots, K$.
 - a) Solve the linearized problem: $L_{u_{k-1}}v = f - Lu_{k-1}$, on $\mathcal{X}_k$.
 - b) Perform the Newton update of the k -th iterate $u_k = u_{k-1} + v$.

در این الگوریتم $L_{u_{k-1}}$ عملگر خطی شده از عملگر اصلی $\mathcal{L}$ و به ازای u_{k-1} بوده و $\mathcal{K}, \{\mathcal{X}_k\}_{k=1}^{\mathcal{K}}$ مجموعه نقاط هم محلی

$$\mathcal{X}_k = \{\mathbf{x}_1^{(k)}, \mathbf{x}_2^{(k)}, \dots, \mathbf{x}_{N(k)}^{(k)}\} \subset \Omega,$$

می باشند به طوری که $(N^{(1)} \leq N^{(2)} \leq \dots \leq N^{(K)})$. در بکارگیری الگوریتم ۱ برای حل معادله غیر خطی شرودینگر، در گام اول حدس اولیه $\mathbf{U}_0 = \{C_1(\mathbf{x}_j)\}_{j=1}^{N^{(1)}}$ بر روی مجموعه نقاط $\mathcal{X}_1$ در نظر گرفته می شود. همچنین عملگر غیر خطی $\mathcal{L}$ متناظر به مسئله مورد بحث برابر است با:

$$\mathcal{L}\mathbf{U} := \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{U} + \mathbf{F}(\mathbf{U})\mathbf{U} + \mathbf{A}_3 \mathbf{U}.$$

در فرآیند ارائه شده عملگر خطی شده $L_{\mathbf{U}_{k-1}}$ متناظر به عملگر غیر خطی $\mathcal{L}\mathbf{U}$ به صورت :

$$L_{\mathbf{U}_{k-1}}\mathbf{V} := \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{V} + \mathbf{J}_{\mathbf{U}_{k-2}}\mathbf{V} + \mathbf{A}_3 \mathbf{V},$$

محاسبه شده است به طوری که در آن

$$\mathbf{J}_{\mathbf{U}_{k-2}} = q \begin{pmatrix} 3u_{k-1}^2 + v_{k-1}^2 & 2u_{k-1}v_{k-1} \\ 2u_{k-1}v_{k-1} & 3v_{k-1}^2 + u_{k-1}^2 \end{pmatrix}$$

بیانگر ماتریس ژاکوبین عملگر غیر خطی است که در حقیقت شامل مشتقات جزئی عملگر $\mathbf{F}(\mathbf{U})\mathbf{U}$ می باشد. متناظر به مدل مورد بحث در سطر ۲a از الگوریتم ۱، در هر گام باید دستگاه معادلات خطی شده

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{V} + \mathbf{J}_{\mathbf{U}_{k-2}}\mathbf{V} + \mathbf{A}_3 \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{U}_{k-1}}{\partial t} + \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{U}_{k-1} + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{k-2})\mathbf{U}_{k-2} + \mathbf{A}_3 \mathbf{U}_{k-1}.$$

حل شود. لذا برای دستگاه معادلات غیر خطی (۶.۴) روابط بالا به صورت زیر مشخص می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N^{(k)}} \lambda_j^{(k)} L_{U_{k-1}}(\varphi(r_{ij})) &= \mathcal{L}U_{k-2}(\mathbf{x}_i^{(k)}), \quad i = 1, \dots, N_I^{(k)}, \\ \sum_{j=1}^{N^{(k)}} \lambda_j^{(k)} \varphi(r_{ij}) &= C_l(\mathbf{x}_i^{(k)}), \quad i = N_I^{(k)} + 1, \dots, N^{(k)}. \end{aligned} \quad (۷.۴)$$

به وضوح دستگاه (۷.۴) را می‌توان به فرم ماتریس زیر باز نویسی کرد:

$$\left[\begin{pmatrix} \Upsilon_{11} & \Upsilon_{12} \\ \Upsilon_{21} & \Upsilon_{22} \\ \Upsilon_{31} & O \\ O & \Upsilon_{42} \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \\ O & O \\ O & O \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \lambda^{(1),(k)} \\ \lambda^{(2),(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^{(k-1)} \\ \Gamma_{21}^{(k-1)} \\ \Gamma_{31}^{(k-1)} \\ \Gamma_{41}^{(k-1)} \end{pmatrix}, \quad (۸.۴)$$

که در آن $\Upsilon_{11}, \Upsilon_{12}, \Upsilon_{21}, \Upsilon_{22}, J_{11}, J_{12}, J_{21}, J_{22}$ ماتریس‌های حقیقی $N_I^{(k)}$ در $N^{(k)}$ می‌باشند، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} [\Upsilon_{11}]_{ij} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \phi^{(1)}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^{(k)}}, \quad [\Upsilon_{12}]_{ij} = [a\Delta + \omega] \phi^{(2)}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^{(k)}}, \\ [\Upsilon_{21}]_{ij} &= [a\Delta + \omega] \phi^{(1)}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^{(k)}}, \quad [\Upsilon_{22}]_{ij} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \phi^{(2)}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^{(k)}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [J_{11}]_{ij} &= (\mathfrak{U}u_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)}) + v_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)})) \phi^{(1)}(\|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|), \\ [J_{12}]_{ij} &= (\mathfrak{V}u_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)})v_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)})) \phi^{(2)}(\|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|), \\ [J_{21}]_{ij} &= (\mathfrak{V}u_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)})v_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)})) \phi^{(1)}(\|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|), \\ [J_{22}]_{ij} &= (\mathfrak{U}u_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)}) + v_{k-1}^{(k)}(\mathbf{x}_i^{(k)})) \phi^{(2)}(\|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|), \quad i = 1, \dots, N_I^{(k)}, \quad j = 1, \dots, N^{(k)}. \end{aligned}$$

همچنین $\Upsilon_{31}, \Upsilon_{42}$ ماتریس‌های حقیقی $(N^{(k)} - N_I^{(k)})$ در $N^{(k)}$ و O ماتریس صفر $(N^{(k)} - N_I^{(k)})$ در $N^{(k)}$ می‌باشد.

$$\begin{aligned} [\Upsilon_{31}]_{ij} &= \phi^{(1)}(\|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|), \\ [\Upsilon_{42}]_{ij} &= \phi^{(2)}(\|\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_j^{(k)}\|), \quad i = N_I^{(k)} + 1, \dots, N^{(k)}, \quad j = 1, \dots, N^{(k)}. \end{aligned}$$

در نهایت بردارهای $\Gamma_1^{k-1}, \Gamma_2^{k-1}, \Gamma_3^{k-1}, \Gamma_4^{k-1}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} [\Gamma_1^{k-1}]_i &= [(u_{k-1})_t + a\Delta v_{k-1} + q(u_{k-1}^{(k)} + v_{k-1}^{(k)})v_{k-1} + \omega v_{k-1}]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^{(k)}}, \\ [\Gamma_2^{k-1}]_i &= [-(v_{k-1})_t + a\Delta u_{k-1} + q(u_{k-1}^{(k)} + v_{k-1}^{(k)})u_{k-1} + \omega u_{k-1}]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i^{(k)}}, \quad i = 1, \dots, N_I^{(k)}, \\ [\Gamma_3^{k-1}]_i &= u_{k-1}(\mathbf{x}_i^{(k)}), \quad [\Gamma_4^{k-1}]_i = v_{k-1}(\mathbf{x}_i^{(k)}), \quad i = 1, \dots, (N^{(k)} - N_I^{(k)}), \quad \hat{i} = N_I^{(k)} + i, \dots, N^{(k)}. \end{aligned}$$

در اینجا ذکر این نکته ضروری است که، نامنفرد بودن ماتریس ضرائب ایجاد شده در فرآیند الگوریتم نیوتن (۷.۴)، وابسته به توابع پایه‌ای شعاعی و همچنین مقادیر پارامتر شکل می‌باشد و لذا در حالت کلی بررسی نامنفرد بودن امکان پذیر نیست. با این وجود در اغلب فرآیند های عددی بروز دستگاه ها با ماتریس های ضرائب منفرد به ندرت ظاهر می‌شوند [۵۵]. به علاوه همان گونه که قبلاً نیز اشاره شد ماتریس های ضرابی حاصل از روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی اغلب ماتریس های بد شرط و با عدد های حالت بسیار بزرگ می‌باشند. لذا در مواجهه با این رده از دستگاه معادلات بسیاری از روش های عددی معمول بلا استفاده خواهند بود و نیاز به استفاده از برخی روش های عددی پیشرفته می‌باشد. در این بخش از روش منظم سازی تیخونوف^۲ [۹۵] برای حل دستگاه معادلات خطی بد شرط حاصل استفاده شده است. در روش منظم سازی تیخونوف برای حل یک دستگاه بد شرط $AC = b$ ، روش یک بردار جواب C_α را چنان محاسبه می‌کند که در آن C_α تابع مربعی

$$\|AC - b\| + \alpha \|C\|^2, \quad (9.4)$$

را می‌نیمد. در این رابطه $\alpha > 0$ پارامتر منظم سازی نامیده می‌شود که در حقیقت درجه همواری مسئله را کنترل می‌کند. حل این مسئله می‌نیمد سازی منجر به جواب هایی به فرم

$$C_\alpha = (A^T A + \alpha I)^{-1} A^T b, \quad (10.4)$$

می‌شود که در آن I ماتریس همانی می‌باشد. به وضوح زمانی که $\alpha = 0$ جواب های منظم شده رابطه (۱۰.۴) ناپایدار می‌باشد. انتخاب یک مقدار معتبر و ایده آل برای پارامتر منظم سازی، اصلی ترین عامل در روش های منظم سازی می‌باشد. روش های متنوعی برای انتخاب مقدار بهینه α ارائه شده است. در این بخش از روش GCV ^۳ برای محاسبه مقدار بهینه پارامتر منظم سازی استفاده می‌شود. روش GCV برای اولین بار توسط گولاب^۴ و همکارانش برای تخمین مقدار بهینه پارامتر منظم سازی، معرفی و استفاده شد [۵۰]. این روش را به طور خلاصه می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

در حقیقت در روش GCV پارامتر منظم سازی به عنوان یک پارامتر می‌نیمد کننده تابع GCV

$$G(\alpha) = \frac{\|I - A(A^T A + \alpha I)^{-1} A^T b\|^2}{\text{trace}(I - A(A^T A + \alpha I)^{-1} A^T)}. \quad (11.4)$$

تخمین زده می‌شود. در سال های اخیر هانسن یک الگوریتم کارا برای تخمین پارامتر منظم سازی بر اساس می‌نیمد سازی تابع GCV ارائه کرده است (برای مطالعه بیشتر مراجع [۵۳، ۹۷، ۵۰] پیشنهاد می‌شود).

^۲ Tikhonov regularization method

^۳ Generalized cross-validation method

^۴ G. H. Golub

در تکنیک ارائه شده در این فصل دستگاه‌های بد شرط حاصل از الگوریتم توسط روش منظم سازی تیخونوف با استفاده از توابع GCV حل شده اند.

همان گونه که اشاره شد در روند ارائه شده توسط الگوریتم ۱، از گام $2b$ الگوریتم در هر گام یک جواب به روز شده U_k محاسبه می‌شود. سپس از این جواب‌ها به عنوان حدس اولیه در گام بعدی الگوریتم استفاده می‌شود. لازم به ذکر است در فرآیند ارائه شده زمانی که از یک مجموعه نقاط ثابت $(= \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \dots)$ در الگوریتم استفاده می‌شود، گام‌های الگوریتم تا برقراری شرط توقف

$$\|U_k - U_{k-1}\| \leq \epsilon,$$

تکرار می‌شوند، به طوری که در آن ϵ معیار توقف الگوریتم می‌باشد. در بخش بعدی برخی نتایج عددی ارائه شده اند که کارایی و دقت روش معرفی شده را نشان می‌دهد.

۳.۴ نتایج عددی

در این بخش برای نشان دادن دقت و کارایی روش بدون شبکه معرفی شده، برخی نتایج عددی ارائه خواهند شد. برخی مدل‌های ویژه از معادله شرودینگر مکعبی در نظر گرفته شده است. این مدل‌ها شامل فرم‌های خطی و غیر خطی معادله شرودینگر خواهند بود. در مثال‌های ۱ و ۲ دو مدل خطی و سپس در مثال‌های ۳ و ۴ دو مدل غیر خطی در نظر گرفته می‌شوند. در سراسر این فصل، برای بررسی دقت نتایج محاسبه شده از خطاهای مطلق (ϵ_∞) و نسبی (ϵ_{rel}) که به صورت زیر معرفی می‌شوند، استفاده خواهد شد.

$$\epsilon_\infty = \max\{\|\tilde{u}_j - u_j\|, \quad 1 \leq j \leq M\},$$

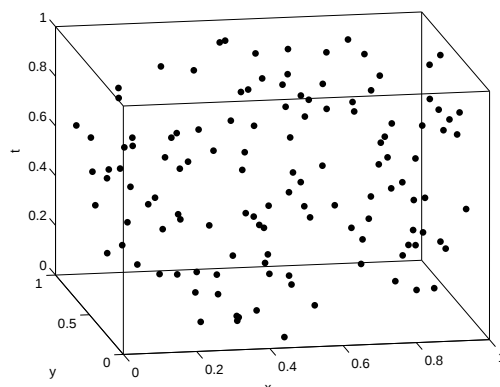
$$\epsilon_{rel} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (\tilde{u}_j - u_j)^2}{\sum_{j=1}^M (u_j)^2}}.$$

در روابط بالا، M تعداد نقاط تست می‌باشد که به طور تصادفی در دامنه انتخاب می‌شوند. $\tilde{u}_j$ و u_j به ترتیب مقادیر دقیق و تقریبی تابع در نقطه j ام می‌باشند. در کلیه مثال‌های عددی ارائه شده در این فصل مجموعه نقاط تصادفی در فضای سه بعدی به عنوان نقاط تست در محاسبه مقادیر خطاهای ϵ_∞ و ϵ_{rel} استفاده شده است. شکل ۱.۴ این مجموعه نقاط را نشان می‌دهد.

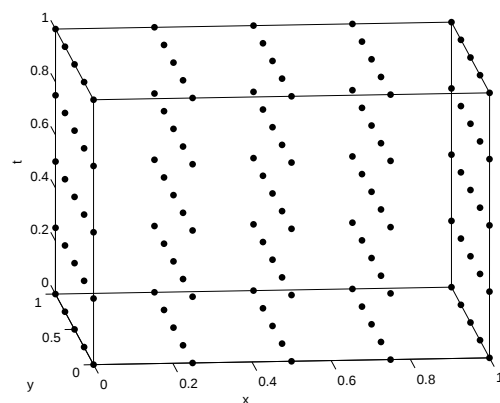
۱.۳.۴ مثال ۱

به عنوان اولین مثال، معادله شرودینگر مکعبی (۱.۴) با شرایط (۲.۴) در بازه $0 \leq t \leq 2$ ، $(x, y) \in [0, 1]^2$ ، با پارامترهای مدل $a = 1$ ، $q = 0$ و همچنین تابع پتانسیل

$$\omega(x, y) = 3 - 2 \tanh^2 x - 2 \tanh^2 y.$$



شکل ۱.۴: نمایش نقاط تست (x_k, y_k, t_k) که به طور تصادفی در دامنه پراکنده شده اند.



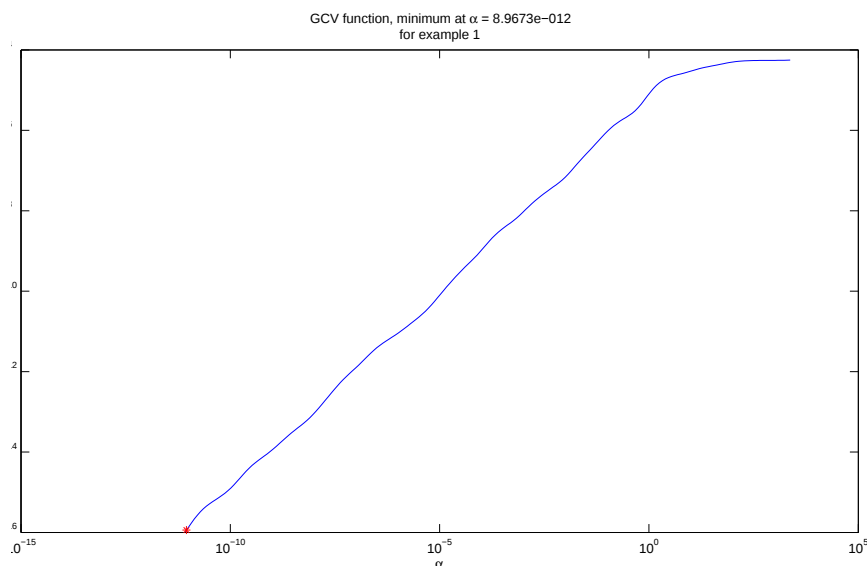
شکل ۲.۴: نمایش نقاط متساوی الفاصله (x_k, y_k, t_k) در دامنه

در نظر گرفته می‌شود. جواب دقیق این معادله به صورت زیر می‌باشد [۳۶، ۴، ۳۲]:

$$\Psi(x, y, t) = \frac{i \exp(it)}{\cosh x \cosh y}.$$

برای حل این مدل، روش بدون شبکه معرفی شده با استفاده از توابع چند ربعی به عنوان توابع پایه‌ای مورد استفاده قرار گرفته است. یک مجموعه از نقاط متساوی الفاصله در کل دامنه $([0, 1]^2 \times [0, 2])$ به عنوان نقاط مرکزی و هم محلی استفاده شده اند (این مجموعه نقاط در شکل ۲.۴ نشان داده شده اند).

به علت خطی بودن مسئله به کارگیری الگوریتم نیوتن لازم نیست. دستگاه معادلات خطی بد شرط حاصل توسط ترکیب روش منظم سازی تیخونوف و GCV حل شده است. برای توصیف روش منظم سازی فوق در شکل ۳.۴، مقدار بهینه محاسبه شده برای پارامتر منظم سازی توسط روش GCV مشخص شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که مقدار بهینه پارامتر منظم سازی محاسبه شده توسط روش GCV برابر است با $(\alpha = 8.987 \times 10^{-12})$.



شکل ۳.۴: نمایش تابع GCV و پارامتر منظم سازی بهینه برای روش تیخونوف با فرض $c_1 = c_2 = 0.61$, $N = 1000$

جدول ۱.۴: خطای مطلق ε_∞ و نسبی ε_{rel} با فرض $c_1 = c_2 = c$ به ازای مقادیر مختلف N در مثال ۱.

N	c	قسمت موهومی		قسمت حقیقی	
		ε_{rel}	ε_∞	ε_{rel}	ε_∞
۲۱۶	۰/۳۸	$4/659 \times 10^{-5}$	$6/922 \times 10^{-5}$	$5/033 \times 10^{-5}$	$8/182 \times 10^{-5}$
۳۴۳	۰/۴۰	$2/885 \times 10^{-6}$	$6/211 \times 10^{-6}$	$2/883 \times 10^{-6}$	$5/479 \times 10^{-6}$
۵۱۲	۰/۵۱	$2/697 \times 10^{-6}$	$4/844 \times 10^{-6}$	$2/181 \times 10^{-6}$	$5/150 \times 10^{-6}$
۷۲۹	۰/۵۵	$1/128 \times 10^{-6}$	$3/255 \times 10^{-6}$	$1/419 \times 10^{-6}$	$4/463 \times 10^{-6}$
۱۰۰۰	۰/۶۱	$6/670 \times 10^{-7}$	$9/573 \times 10^{-7}$	$7/627 \times 10^{-7}$	$1/021 \times 10^{-6}$

در جدول ۱.۴ مقادیر خطای مطلق ε_∞ و خطای نسبی ε_{rel} نتایج تقریبی محاسبه شده برای قسمت های حقیقی و موهومی جواب گزارش شده اند. این نتایج توسط روش بدون شبکه ارائه شده و با فرض $M = 9261$ نقطه تست و تعداد متفاوت نقاط هم محلی محاسبه شده اند. به وضوح از نتایج گزارش شده در این جدول مشاهده می شود که با افزایش تعداد نقاط هم محلی، خطا کاهش می یابند.

همچنین در جدول ۲.۴ مقادیر خطای مطلق برای قسمت های حقیقی و موهومی جواب های تقریبی محاسبه شده در سطوح زمانی مختلف ارائه شده اند و همچنین این نتایج با مقادیر تقریبی محاسبه شده برای این مسئله و توسط روش های دیگر مقایسه شده اند. به وضوح این نتایج کارایی و دقت روش بدون شبکه پیشنهادی را نشان می دهند.

در شکل ۴.۴ کانتور های خطای مطلق نتایج حاصل در برخی سطوح زمانی رسم شده اند. که پراکندگی خطای نتایج محاسبه شده را در کل دامنه نشان می دهند. نتایج ارائه شده از طریق جدول ها و شکل ها برای

جدول ۲.۴: مقادیر خطای مطلق محاسبه شده برای مثال ۱ با فرض $N = 1000$, $c_1 = c_2 = 0.61$ در سطوح زمانی مختلف

زمان	روش حاضر	موهومی	حقیقی	موهومی	حقیقی	[۳۶]
۰/۱	$9/89e-7$	$8/96e-7$	$3/55e-6$	$3/01e-6$	$2/44e-5$	$3/00e-5$
۰/۳	$8/20e-7$	$7/24e-7$	$3/06e-6$	$3/50e-6$	$2/95e-5$	$2/39e-5$
۰/۵	$2/28e-7$	$5/80e-7$	$3/86e-6$	$4/22e-6$	$2/75e-5$	$3/40 \times 10^{-5}$
۰/۷	$6/97e-7$	$3/54e-7$	$3/65e-6$	$2/97e-6$	$2/55e-5$	$1/87 \times 10^{-5}$
۱	$5/83e-7$	$3/94e-7$	$3/06e-6$	$3/53e-6$	$2/94e-5$	$2/42 \times 10^{-5}$
۱/۲	$5/33e-7$	$2/33e-7$	—	—	—	—
۱/۵	$5/67e-7$	$1/59e-7$	—	—	—	—
۱/۷	$5/48e-7$	$4/78e-7$	—	—	—	—
۲	$9/92e-7$	$8/39e-7$	—	—	—	—

این مثال کارایی و دقت بالای این روش را تایید می‌کند.

۲.۳.۴ مثال ۲

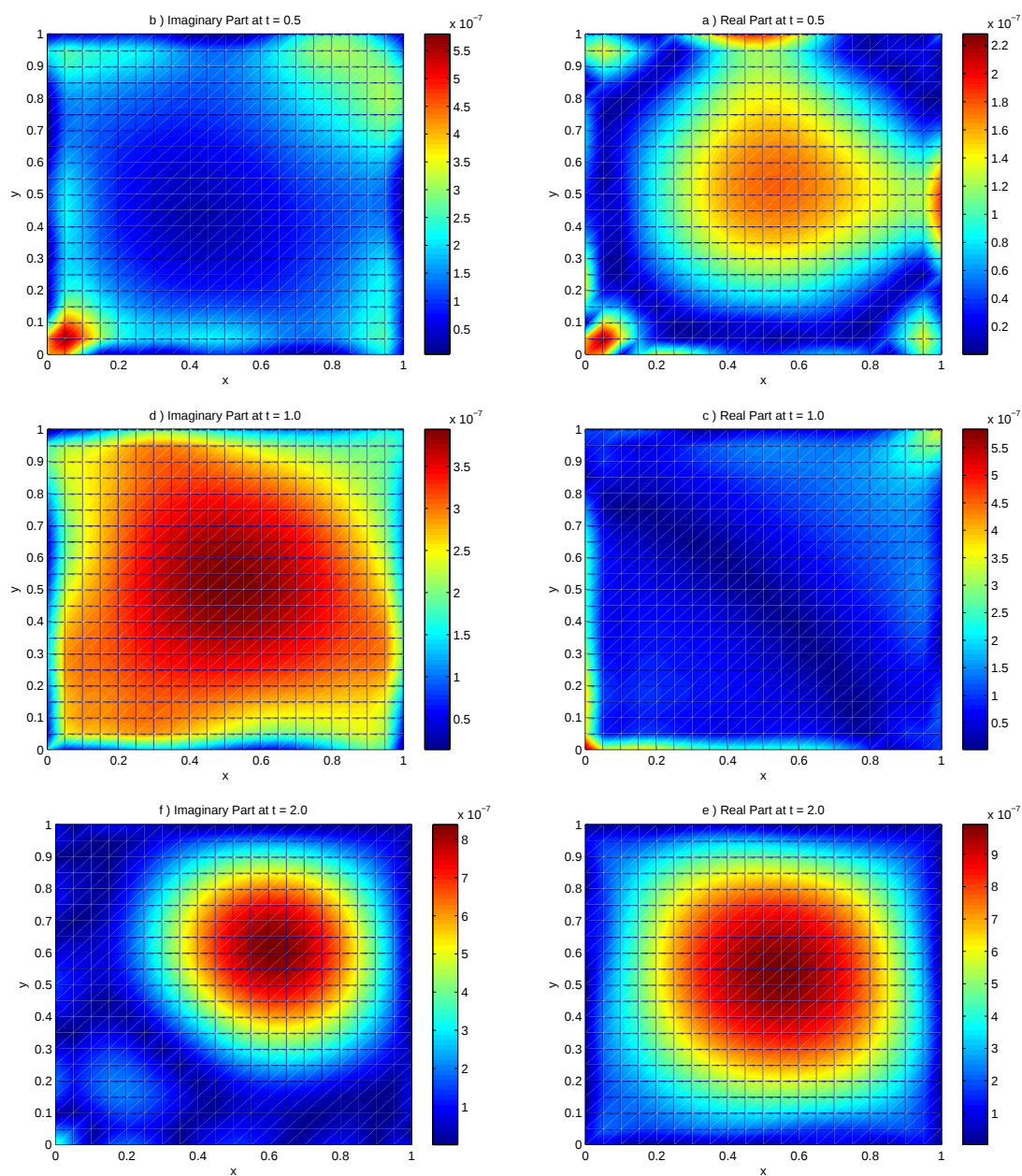
به عنوان مثال دوم، یک مدل خطی از معادله شرودینگر مکعبی (۱.۴)–(۲.۴) در دامنه $(x, y) \in [0, 1]^2$ و $t \in [0, 5]$ و با پارامترهای مدل $a = 1$, $q = 0$ و همچنین تابع پتانسیل $\omega(x, y) = 1 - 2/x^2 - 2/y^2$ در نظر گرفته می‌شود. جواب دقیق این مسئله به صورت زیر است [۴، ۳۲]:

$$\Psi(x, y, t) = x^2 y^2 \exp(it),$$

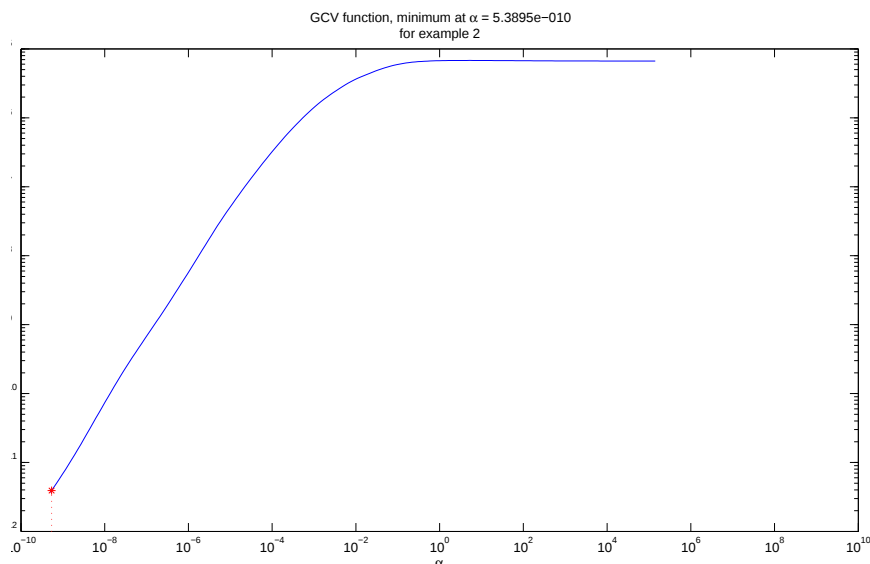
همانند مثال قبل، برای حل عددی این مثال نیز روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی با انتخاب توابع چند ربعی به عنوان توابع پایه‌ای به کار گرفته شده است. از ترکیب روش های منظم سازی تیخونوف و GCV برای حل دستگاه معادلات خطی بد شرط حاصل استفاده شده است. در شکل ۵.۴ تابع GCV برای این مثال رسم شده است. همان گونه که از این شکل مشاهده می‌شود پارامتر منظم سازی بهینه در این حالت برابر است با $(\alpha = 5/3895 \times 10^{-10})$.

نتایج محاسبه شده برای خطای مطلق و نسبی به ازای مقادیر متفاوت تعداد نقاط هم محلی (N) در جدول ۳.۵ گزارش شده اند. در جدول ۴.۴ مقادیر خطای مطلق در برخی سطوح زمانی ارائه شده اند. این نتایج با فرض $c_1 = c_2 = 1$ به عنوان پارامتر شکل در توابع چند ربعی و $N = 1331$, $M = 9261$ به عنوان نقاط هم محلی و نقاط تست، در روش بدون شبکه معرفی شده محاسبه شده اند.

همچنین در شکل ۶.۴ کانتورهای خطای مطلق نتایج محاسبه شده رسم شده اند. این کانتورها به وضوح پراکندگی خطا بر کل دامنه و در برخی سطوح زمانی را نمایش می‌دهند. نتایج گزارش شده از طریق جدول ها و شکل ها دقت بالای روش را نشان می‌دهند.



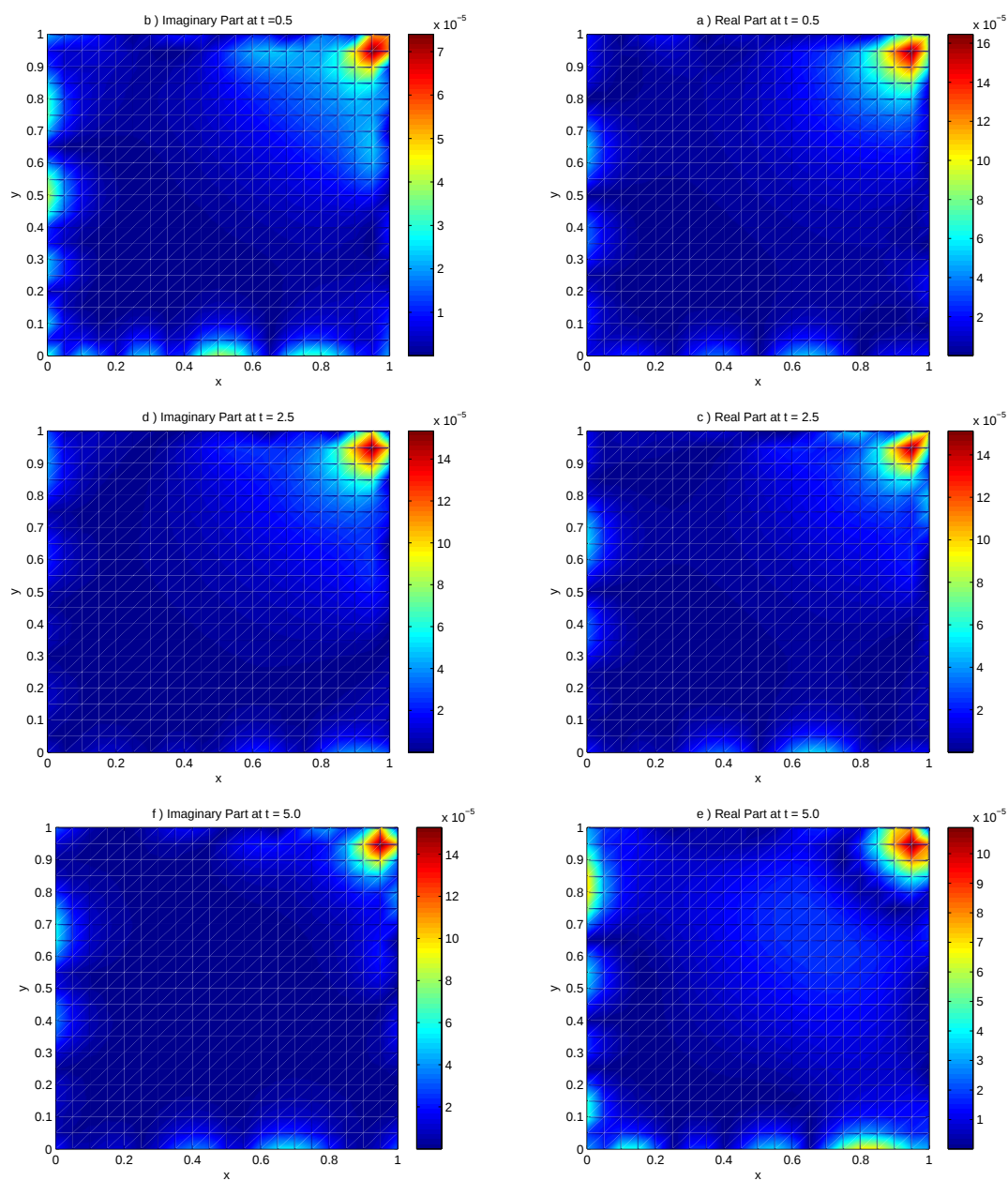
شکل ۴.۴: کانتورهای خطای نسبی با فرض $c_1 = c_2 = 0.61$ و $N = 1000$ در مثال ۱



شکل ۵.۴: نمایش تابع GCV و پارامتر منظم سازی بهینه با فرض $N = 1331$, $c_1 = c_2 = 1/0$ در مثال ۲.

جدول ۳.۴: خطای مطلق و نسبی به ازای مقادیر متفاوت تعداد نقاط هم محلی N در مثال ۲.

N		$c_1 = c_2 = 0.8 \text{ IMQ}$		$c_1 = c_2 = 1 \text{ MQ}$	
		موهومی	حقیقی	موهومی	حقیقی
۳۴۳	ε_∞	$4/433 \times 10^{-3}$	$3/516 \times 10^{-3}$	$5/514 \times 10^{-3}$	$4/827 \times 10^{-3}$
	ε_{rel}	$3/668 \times 10^{-3}$	$3/226 \times 10^{-3}$	$4/812 \times 10^{-3}$	$4/312 \times 10^{-3}$
۵۱۲	ε_∞	$1/630 \times 10^{-3}$	$1/672 \times 10^{-3}$	$2/181 \times 10^{-3}$	$2/247 \times 10^{-3}$
	ε_{rel}	$1/451 \times 10^{-3}$	$1/337 \times 10^{-3}$	$1/929 \times 10^{-3}$	$1/814 \times 10^{-3}$
۷۲۹	ε_∞	$9/524 \times 10^{-4}$	$9/006 \times 10^{-4}$	$1/324 \times 10^{-3}$	$1/291 \times 10^{-3}$
	ε_{rel}	$6/230 \times 10^{-4}$	$5/701 \times 10^{-4}$	$9/257 \times 10^{-4}$	$8/495 \times 10^{-4}$
۱۰۰۰	ε_∞	$5/585 \times 10^{-4}$	$5/384 \times 10^{-4}$	$8/184 \times 10^{-4}$	$8/378 \times 10^{-4}$
	ε_{rel}	$3/255 \times 10^{-4}$	$3/022 \times 10^{-4}$	$5/050 \times 10^{-4}$	$4/798 \times 10^{-4}$
۱۳۳۱	ε_∞	$2/857 \times 10^{-4}$	$3/785 \times 10^{-4}$	$4/274 \times 10^{-4}$	$5/486 \times 10^{-4}$
	ε_{rel}	$1/567 \times 10^{-4}$	$1/623 \times 10^{-4}$	$2/518 \times 10^{-4}$	$2/656 \times 10^{-4}$



شکل ۶.۴: نتایج محاسبه شده با استفاده از توابع چند ربعی معکوس با فرض $c_1 = c_2 = 0.8$ و $N = 1331$ در برخی سطوح زمانی برای مثال ۲. خطای مطلق

جدول ۴.۴: نتایج خطای مطلق با فرض $c_1 = c_2 = 1$ ، $N = 1331$ در سطوح زمانی مختلف در مثال ۲.

زمان	$c_1 = c_2 = 0.8$, IMQ		$c_1 = c_2 = 1$, MQ	
	موهومی	حقیقی	موهومی	حقیقی
۰.۵	$7/399 \times 10^{-5}$	$1/646 \times 10^{-4}$	$1/550 \times 10^{-4}$	$2/776 \times 10^{-4}$
۱.۰	$1/496 \times 10^{-4}$	$1/219 \times 10^{-4}$	$2/666 \times 10^{-4}$	$2/097 \times 10^{-4}$
۱.۵	$2/392 \times 10^{-4}$	$2/889 \times 10^{-4}$	$4/274 \times 10^{-4}$	$3/289 \times 10^{-4}$
۲.۰	$1/883 \times 10^{-4}$	$9/519 \times 10^{-5}$	$3/274 \times 10^{-4}$	$1/965 \times 10^{-4}$
۲.۵	$1/534 \times 10^{-4}$	$1/512 \times 10^{-4}$	$2/402 \times 10^{-4}$	$2/761 \times 10^{-4}$
۳.۰	$5/680 \times 10^{-5}$	$2/611 \times 10^{-4}$	$1/082 \times 10^{-4}$	$4/194 \times 10^{-4}$
۳.۵	$1/226 \times 10^{-4}$	$2/599 \times 10^{-4}$	$1/692 \times 10^{-4}$	$4/554 \times 10^{-4}$
۴.۰	$1/546 \times 10^{-4}$	$1/852 \times 10^{-4}$	$2/916 \times 10^{-4}$	$2/578 \times 10^{-4}$
۴.۵	$1/907 \times 10^{-4}$	$1/172 \times 10^{-4}$	$3/205 \times 10^{-4}$	$1/590 \times 10^{-4}$
۵.۰	$1/527 \times 10^{-4}$	$1/088 \times 10^{-4}$	$2/808 \times 10^{-4}$	$1/465 \times 10^{-4}$

۳.۳.۴ مثال ۳

در مثال سوم، یک مدل غیر خطی از معادله شرودینگر (۱.۴) - (۲.۴) بر ناحیه $(x, y) \in [0, 1]^2$ ، $t \in [0, 5]$ با فرض $a = 1$ ، $q = 2\pi^2 - 1$ و تابع پتانسیل $\omega(x, y) = (2\pi^2 - 1)(1 - \cos^2 \pi x \cos^2 \pi y)$ در نظر گرفته می‌شود. جواب دقیق این مسئله به صورت

$$\Psi(x, y, t) = \exp(-it) \cos \pi x \cos \pi y,$$

می‌باشد [۳۲]. برای این مثال روش بدون شبکه معرفی شده در این فصل به همراه الگوریتم نیوتن استفاده شده است. در هر گام تکرار الگوریتم دستگاه معادلات خطی بد شرط حاصل توسط روش منظم سازی تیخونوف و ترکیب با روش GCV حل می‌شود. نتایج عددی محاسبه شده با استفاده از توابع چند ربعی های معکوس سه بعدی به عنوان توابع پایه‌ای در روش بدون شبکه محاسبه شده اند. در فرآیند عددی ارائه شده دو اجرای متفاوت از الگوریتم نیوتن آزمایش شده است. در روش اول یک الگوریتم تکراری بر مبنای روش نیوتن و با در نظر گرفتن یک مجموعه نقاط ثابت $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \dots = \mathcal{X}_K$ بررسی شده است. همچنین به عنوان یک روش متفاوت، الگوریتم چند مرحله ای نیوتن نیز برای حل مسئله مورد استفاده قرار گرفته و در نهایت نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شده اند. در گام اول الگوریتم نیوتن یک مجموعه نقاط ثابت $\mathcal{X}$ با ۱۷۲۸ نقطه هم محلی در نظر گرفته شده است. در جدول ۵.۴ خطای مطلق مقادیر محاسبه شده در هر تکرار الگوریتم نیوتن و با فرض $c_1 = c_2 = 1/18$ ارائه شده اند.

در حالت دوم یک الگوریتم چند مرحله ای نیوتن به کار گرفته شده است که مجموعه نقاط در هر گام الگوریتم تغییر می‌کنند. در جدول ۶.۴ نتایج محاسبه شده برای خطای مطلق توسط الگوریتم نیوتن چند مرحله ای گزارش شده اند. مقایسه نتایج ارائه شده در جدول های ۵.۴ و ۶.۴ نشان می‌دهد که الگوریتم چند مرحله ای نیوتن از الگوریتم استاندارد نیوتن کاراتر می‌باشد. به علاوه نتایج محاسبه شده توسط الگوریتم چند مرحله

جدول ۵.۴: مقادیر محاسبه شده با استفاده از الگوریتم نیوتن استاندارد با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ و انتخاب یک مجموعه نقاط هم محلی ثابت با ۱۷۲۸ نقطه در مثال ۳.

k	$N^{(k)}$	قسمت موهومی	قسمت حقیقی
۱	۱۷۲۸	$1/261 \times 10^{-1}$	$4/526 \times 10^{-1}$
۲	۱۷۲۸	$2/324 \times 10^{-2}$	$2/694 \times 10^{-1}$
۳	۱۷۲۸	$3/645 \times 10^{-3}$	$1/883 \times 10^{-2}$
۴	۱۷۲۸	$3/476 \times 10^{-3}$	$6/025 \times 10^{-3}$
۵	۱۷۲۸	$3/654 \times 10^{-3}$	$6/197 \times 10^{-3}$
۶	۱۷۲۸	$3/654 \times 10^{-3}$	$6/197 \times 10^{-3}$
۷	۱۷۲۸	$3/654 \times 10^{-3}$	$6/197 \times 10^{-3}$
۸	۱۷۲۸	$3/654 \times 10^{-3}$	$6/197 \times 10^{-3}$

جدول ۶.۴: مقادیر محاسبه شده با استفاده از الگوریتم نیوتن چند مرحله‌ای با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ در مثال ۳.

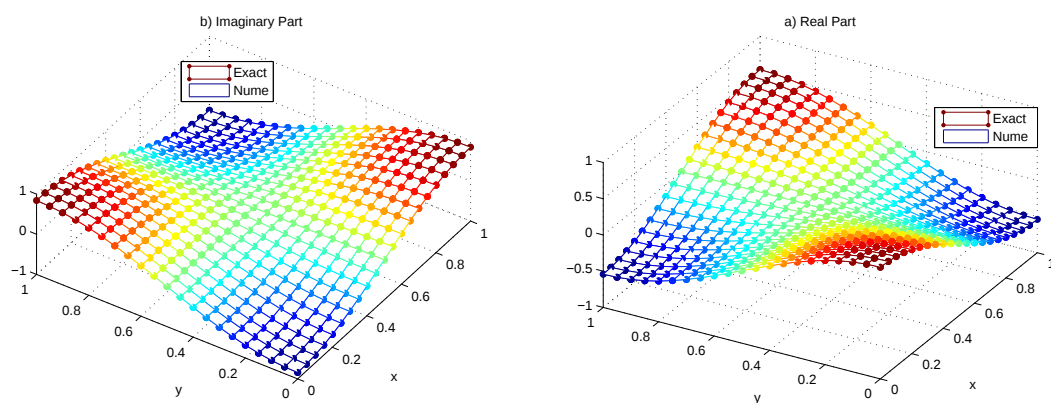
k	$N^{(k)}$	قسمت موهومی	قسمت حقیقی
۱	۱۲۵	$6/566 \times 10^{-2}$	$1/688 \times 10^{-1}$
۲	۲۱۶	$1/482 \times 10^{-2}$	$2/446 \times 10^{-2}$
۳	۳۴۳	$6/632 \times 10^{-3}$	$5/511 \times 10^{-3}$
۴	۵۱۲	$2/483 \times 10^{-3}$	$2/173 \times 10^{-3}$
۵	۷۲۹	$1/282 \times 10^{-3}$	$1/098 \times 10^{-3}$
۶	۱۰۰۰	$5/311 \times 10^{-4}$	$5/286 \times 10^{-4}$
۷	۱۳۳۱	$3/403 \times 10^{-4}$	$3/372 \times 10^{-4}$
۸	۱۷۲۸	$1/667 \times 10^{-4}$	$1/791 \times 10^{-4}$

ای دقیق تر از نتایج حاصل از الگوریتم نیوتن استاندارد می‌باشد.

در جدول ۷.۴ خطای مطلق نتایج محاسبه شده توسط روش بدون شبکه معرفی شده با فرض $c_1 = c_2 = 1/18$ و $N = 1728$ و به کارگیری الگوریتم نیوتن چند مرحله‌ای در برخی سطوح زمانی گزارش شده‌اند. برای مقایسه نتایج عددی و دقیق مسئله، در شکل ۷.۴ توابع جواب دقیق و تقریبی در زمان $t = 1$ رسم شده‌اند. نتایج ارائه شده در این شکل نشان می‌دهد که نتایج عددی بر نتایج واقعی بسیار نزدیک می‌باشند. در ادامه برای توصیف و نمایش نحوه پراکندگی خطای نتایج محاسبه شده در دامنه، کانتورهای تابع خطا در برخی سطوح زمانی در شکل ۸.۴ رسم شده‌اند. به وضوح نتایج عددی گزارش شده در این بخش نشان می‌دهند که روش بدون شبکه معرفی شده، یک ابزار کارا و دقیق برای حل معادلات غیر خطی می‌باشد.

جدول ۷.۴: خطای مطلق محاسبه شده توسط روش بدون شبکه با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ ، $N = 1728$ توسط الگوریتم نیوتن چند مرحله‌ای در برخی سطوح زمانی در مثال ۳.

t	قسمت موهومی	قسمت حقیقی
۰/۵	$7/525 \times 10^{-5}$	$1/387 \times 10^{-4}$
۱/۰	$1/379 \times 10^{-4}$	$9/681 \times 10^{-5}$
۱/۵	$1/667 \times 10^{-4}$	$5/811 \times 10^{-5}$
۲/۰	$1/572 \times 10^{-4}$	$7/677 \times 10^{-5}$
۲/۵	$1/116 \times 10^{-4}$	$1/400 \times 10^{-4}$
۳/۰	$1/121 \times 10^{-4}$	$1/655 \times 10^{-4}$
۳/۵	$1/171 \times 10^{-4}$	$1/670 \times 10^{-4}$
۴/۰	$1/374 \times 10^{-4}$	$1/237 \times 10^{-4}$
۴/۵	$1/542 \times 10^{-4}$	$1/699 \times 10^{-4}$
۵/۰	$1/445 \times 10^{-4}$	$1/791 \times 10^{-4}$



شکل ۷.۴: توابع عددی و دقیق با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ و $N = 1728$ در زمان $t = 1$ برای مثال ۳. شکل (a) - قسمت حقیقی و شکل (b) - قسمت موهومی

جدول ۸.۴: نتایج محاسبه شده توسط الگوریتم نیوتن استاندارد با فرض $c_1 = c_2 = ۰/۶۹$ و همچنین در نظر گرفتن یک مجموعه نقاط با ۱۰۰۰ نقطه در مثال ۴.

k	$N^{(k)}$	قسمت موهومی	قسمت حقیقی
۱	۱۰۰۰	$۳/۶۵۴ \times ۱۰^{-۱}$	$۶/۱۳۸ \times ۱۰^{-۱}$
۲	۱۰۰۰	$۳/۷۳۵ \times ۱۰^{-۱}$	$۴/۰۰۸ \times ۱۰^{-۱}$
۳	۱۰۰۰	$۹/۴۷۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۶۸۱ \times ۱۰^{-۲}$
۴	۱۰۰۰	$۲/۴۰۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۳۷۶ \times ۱۰^{-۳}$
۵	۱۰۰۰	$۸/۷۳۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۲۴۵ \times ۱۰^{-۴}$
۶	۱۰۰۰	$۸/۷۳۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۲۴۵ \times ۱۰^{-۴}$
۷	۱۰۰۰	$۸/۷۳۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۲۴۵ \times ۱۰^{-۴}$

۴.۳.۴ مثال ۴

به عنوان آخرین مثال، یک مدل غیر خطی از معادله شرودینگر به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + q |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (x, y) \in [0, \pi]^2, \quad t \in [0, 3], \quad (۱۲.۴)$$

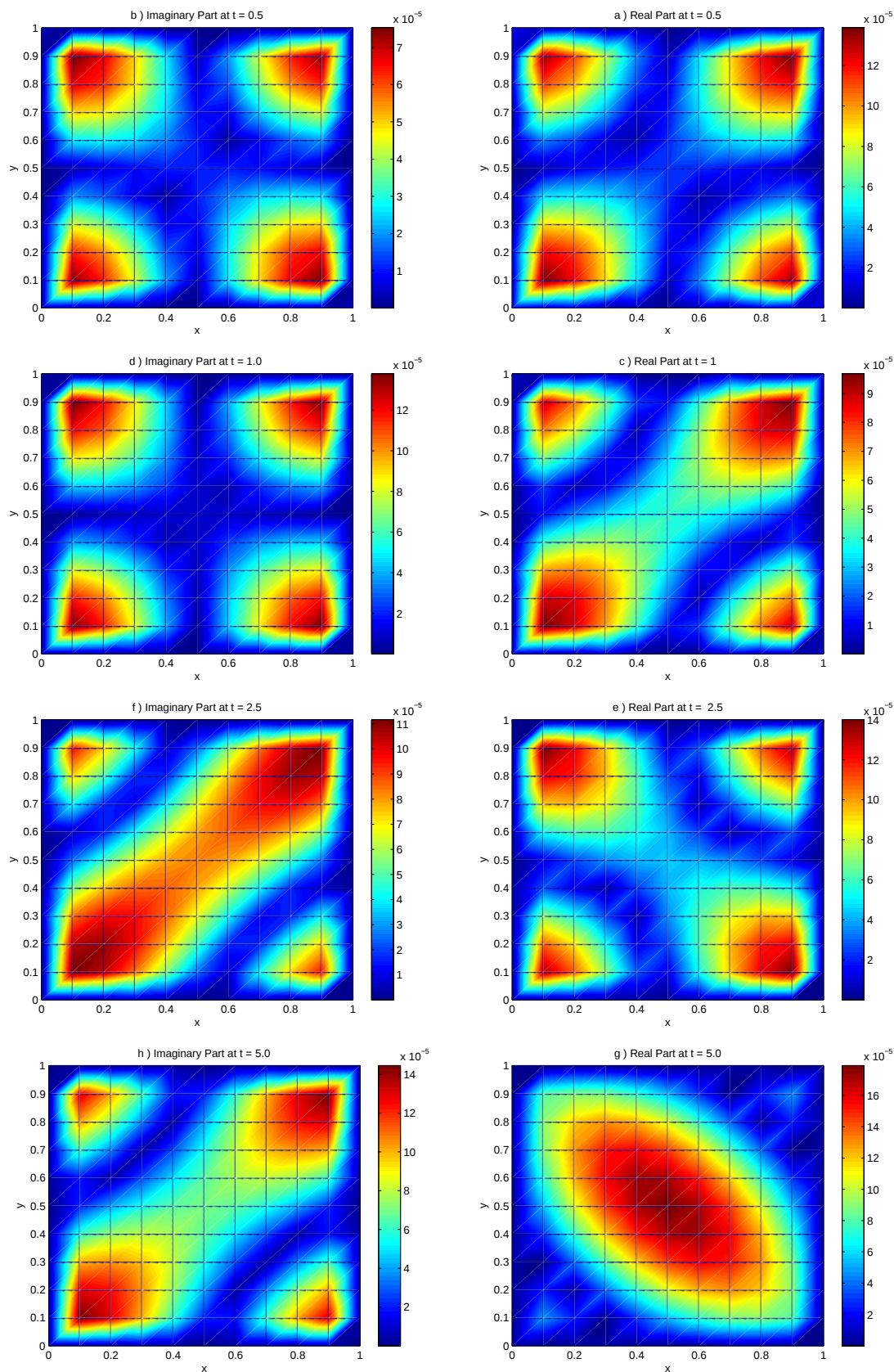
جواب دقیق این مدل برابر است با [۴۹، ۱۰۱]:

$$\Psi(x, y, t) = A \exp(i(k_1 x + k_2 y - \beta t)),$$

$$\beta = k_1^2 + k_2^2 - q|A|^2.$$

این مدل توصیف کننده انتشار موج ناشی از پرواز هواپیماهای مدرن می‌باشد [۴۹]. در این بخش مدل فوق با مفروضات $A = \frac{1}{4}$, $k_1 = k_2 = q = 1$ مورد بررسی قرار خواهد گرفت. روش بدون شبکه ارائه شده در این فصل برای حل این مدل به کار گرفته شده و از توابع چند ربعی معکوس سه بعدی به عنوان تابع پایه‌ای استفاده شده است. همچنین الگوریتم نیوتن برای حل مدل غیر خطی فوق به کار گرفته شده است. در جدول ۸.۴ مقادیر خطای مطلق نتایج محاسبه شده با استفاده از الگوریتم نیوتن استاندارد و با در نظر گرفتن یک مجموعه نقاط ثابت $\mathcal{X}$ با ۱۰۰۰ نقطه هم محلی گزارش شده است. این نتایج با در نظر گرفتن پارامترهای شکل $c_1 = c_2 = ۰/۶۹$ در توابع چند ربعی معکوس و انتخاب ۲۷۰۰۰ نقطه تست محاسبه شده اند. همچنین الگوریتم نیوتن چند مرحله ای برای حل عددی مدل فوق با در نظر گرفتن مجموعه نقاط $\{\mathcal{X}_k\}_{k=1}^V \subset \Omega$ و مقادیر پارامتر شکل $c_1 = c_2 = ۰/۶۹$ استفاده شده است، نتایج حاصل در جدول ۹.۴ ارائه شده اند.

در جدول ۱۰.۴ مقادیر خطای مطلق در برخی سطوح زمانی گزارش شده اند. در نهایت در جدول ۱۱.۴ مقادیر خطای مطلق و نسبی به ازای مقادیر مختلف تعداد نقاط هم محلی ارائه شده اند. در شکل های ۹.۴ و ۱۰.۴ گراف جواب های دقیق و تقریبی در سطوح زمانی $t = 1$ و $t = ۰/۱$ رسم شده اند. همچنین کانتور وابسته به تابع خطا در برخی سطوح زمانی در شکل ۱۱.۴ رسم شده اند.



شکل ۸.۴: خطای مطلق با مفروضات $c_1 = c_2 = 1/18$ و $N = 1728$ برای مثال ۳ در برخی سطوح زمانی.

جدول ۹.۴: نتایج محاسبه شده توسط الگوریتم نیوتن چند مرحله ای با فرض $c_1 = c_2 = ۰/۶۹$ در مثال ۴.

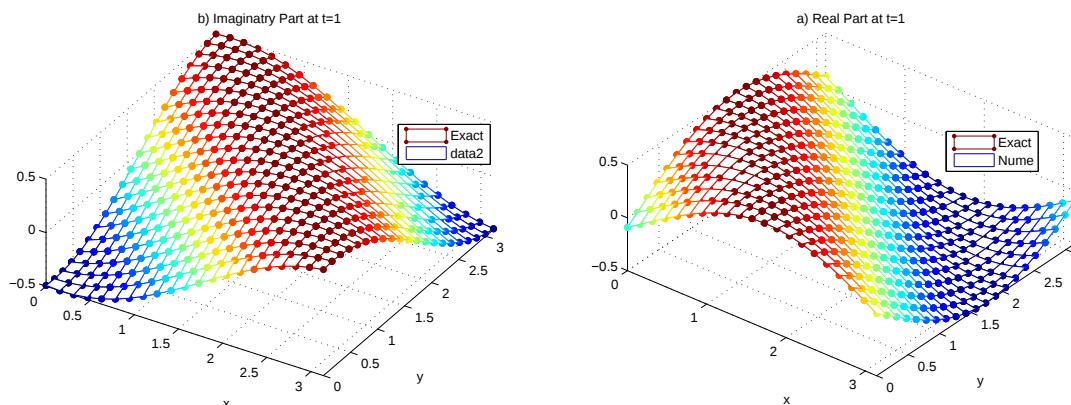
k	$N^{(k)}$	قسمت موهومی	قسمت حقیقی
۱	۶۴	$۳/۰۵۲ \times ۱۰^{-۱}$	$۴/۳۵۸ \times ۱۰^{-۱}$
۲	۱۲۵	$۶/۱۹۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۸/۴۶۱ \times ۱۰^{-۲}$
۳	۲۱۶	$۶/۰۵۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۶/۳۴۴ \times ۱۰^{-۲}$
۴	۳۴۳	$۱/۷۴۹ \times ۱۰^{-۲}$	$۱/۸۲۶ \times ۱۰^{-۲}$
۵	۵۱۲	$۴/۶۹۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۱۸۱ \times ۱۰^{-۳}$
۶	۷۲۹	۳۳۷۷×۱۰^{-۳}	$۳/۲۴۱ \times ۱۰^{-۳}$
۷	۱۰۰۰	$۲/۸۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۳۰ \times ۱۰^{-۴}$

جدول ۱۰.۴: خطای مطلق در برخی سطوح زمانی با مفروضات $c_1 = c_2 = ۰/۶۹$ ، $N = ۱۰۰۰$ در مثال ۴.

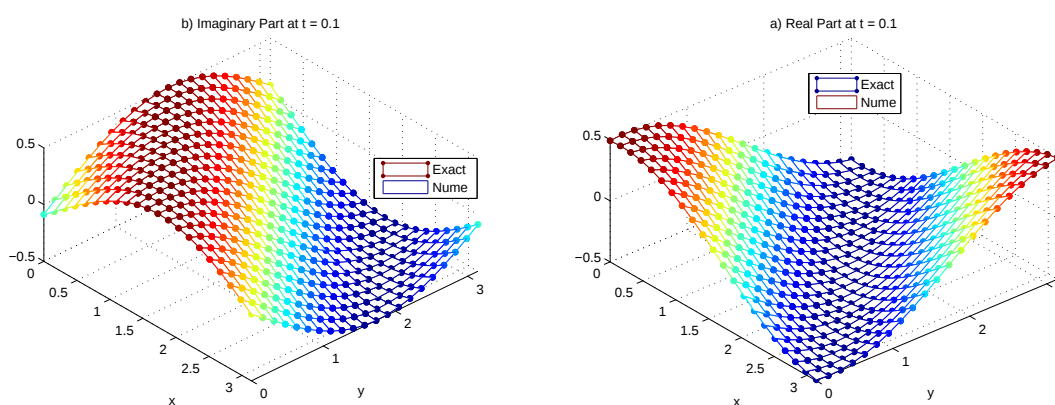
	قسمت موهومی	قسمت حقیقی
t	ε_{∞}	ε_{∞}
۰/۲	$۸/۶۶۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۰۷۶ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۵	$۱/۳۶۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۳۷۶ \times ۱۰^{-۴}$
۱/۰	$۷/۰۴۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۷۵۷ \times ۱۰^{-۴}$
۱/۵	$۲/۸۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۸۰۳ \times ۱۰^{-۵}$
۲/۰	$۲/۰۵۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۳۸۱ \times ۱۰^{-۴}$
۲/۵	$۹/۳۷۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۲۷۱ \times ۱۰^{-۴}$
۳/۰	$۹/۴۷۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۷۳۶ \times ۱۰^{-۴}$

جدول ۱۱.۴: مقادیر خطای مطلق و نسبی در مثال ۴ با فرض $c_1 = c_2 = c$ و به ازای مقادیر متفاوت تعداد نقاط هم محلی N .

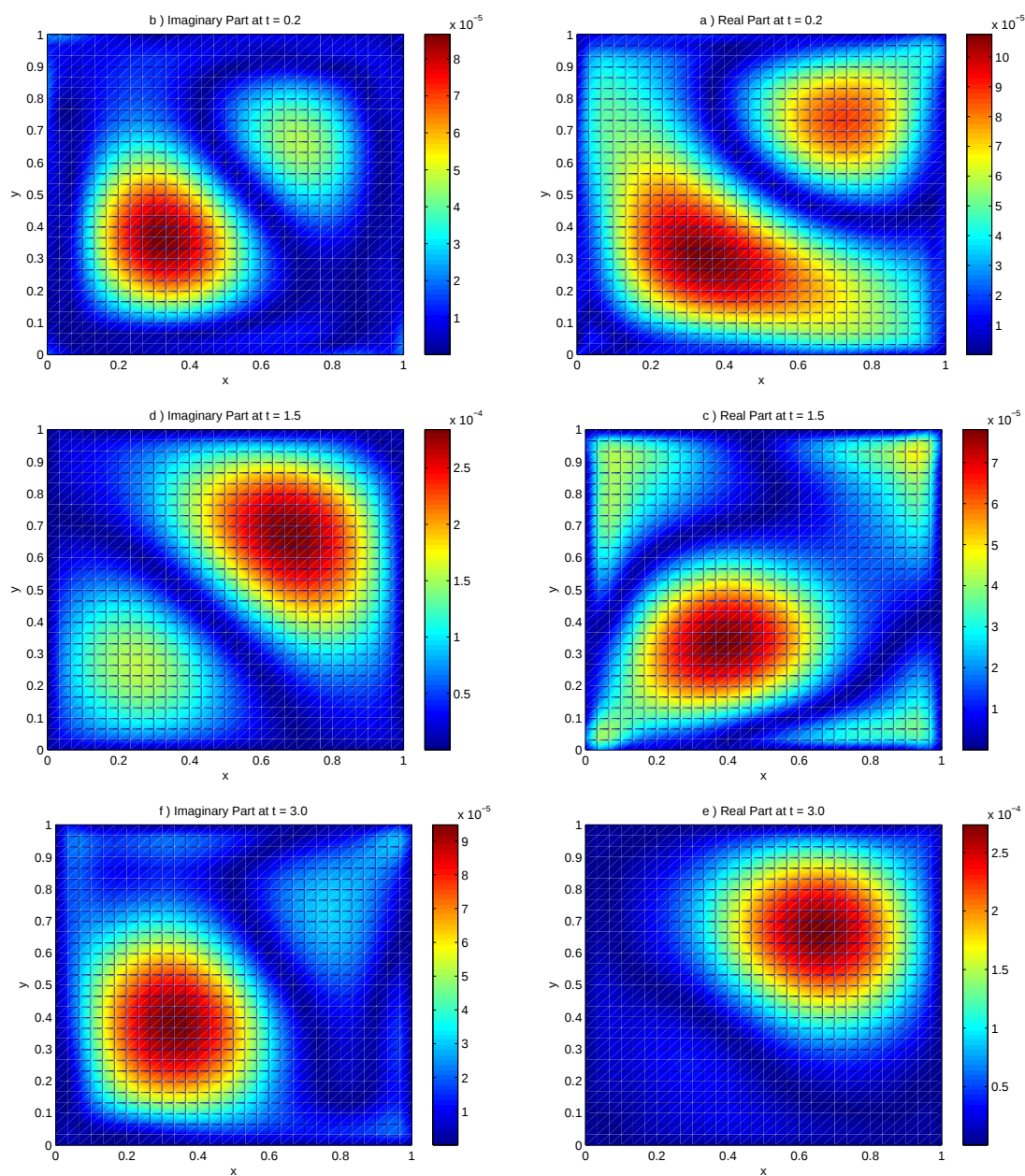
N	c	قسمت موهومی		قسمت حقیقی	
		ε_{rel}	ε_{∞}	ε_{rel}	ε_{∞}
۳۴۳	۰/۴۹	$۸/۰۴۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۸/۶۴۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۶۳۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۷۵۴ \times ۱۰^{-۳}$
۵۱۲	۰/۳۳	$۶/۳۸۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۷/۲۸۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۵۹۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۶/۵۰۷ \times ۱۰^{-۳}$
۷۲۹	۰/۴۰	$۱/۱۴۴ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۸۸۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۳۰۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۲/۶۲۷ \times ۱۰^{-۳}$
۱۰۰۰	۰/۶۹	$۱/۹۳۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰۱۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۳۰ \times ۱۰^{-۴}$



شکل ۹.۴: گراف های جواب دقیق و جواب تقریبی محاسبه شده با فرض $c_1 = c_2 = ۰/۶۹$ و $N = ۱۰۰۰$ در لحظه $t = ۱$ برای مثال ۴. - (a) قسمت حقیقی و - (b) قسمت موهومی.



شکل ۱۰.۴: گراف های جواب دقیق و جواب تقریبی محاسبه شده با فرض $c_1 = c_2 = ۰/۶۹$ و $N = ۱۰۰۰$ در لحظه $t = ۰/۱$ برای مثال ۴. - (a) قسمت حقیقی و - (b) قسمت موهومی.



شکل ۱۱.۴: توابع خطا محاسبه شده با فرض $c_1 = c_2 = 0.69$ و $N = 1000$ در برخی سطوح زمانی در مثال ۴.

۴.۴ نتیجه گیری

در این فصل یک روش بدون شبکه بر اساس فرم قوی معادلات حاکم ارائه شد. از توابع پایه‌ای شعاعی سه بعدی به عنوان توابع پایه‌ای برای تقریب جواب استفاده شد که نیاز به گسسته سازی زمانی را رفع کرده و لذا انتشار خطای ناشی از روش های گسسته سازی حذف شده اند. این روش به طور کاملاً موفق برای حل عددی فرم کلی معادلات شرودینگر مکعبی به کار گرفته شده است. برای حل معادلات غیر خطی یک روش ترکیبی کارا با استفاده از الگوریتم نیوتن ارائه و به خوبی مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین ملاحظه شد که برای حل دستگاه های معادلات خطی با ماتریس های ضرائب بد شرط از روش های منظم سازی استفاده گردیده است. نتایج عددی حاصل گزارش شده از طریق جدول ها و شکل ها کارایی و دقت بالای روش را به خوبی توصیف می کند.

فصل ۵

روش های بدون شبکه موضعی برای حل عددی معادله تلگراف دو بعدی

۱.۵ مقدمه

انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل هذلولوی برای مدل سازی و توصیف پدیده های فیزیکی و طبیعی معرفی شده اند. یکی از انواع مهم معادلات هذلولوی، معادله تلگراف می باشد. معادلات تلگراف کاربرد وسیعی در توصیف پدیده های طبیعی در شاخه های مختلف علوم از قبیل، تجزیه سیگنال ها، نظریه قدم زدن تصادفی، انتشار موج و غیره دارد [۵۷، ۱۴، ۹۹]. در این فصل یک رده از معادلات تلگراف خطی دو بعدی به فرم:

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) + 2\alpha u_t(\mathbf{x}, t) + \gamma u(\mathbf{x}, t) = \beta \Delta u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

با شرایط آغازین و مرزی زیر

$$u(\mathbf{x}, 0) = f_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u_t(\mathbf{x}, 0) = f_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

$$u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t) \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0,$$

بررسی خواهد شد، به طوری که در روابط فوق، $u(x, y, t)$ تابع مجهول، α, γ, β پارامترهای ثابت و مثبت، $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}, t)$ و $h(\mathbf{x}, t)$ توابع معلوم و به اندازه کافی هموار می باشند. همچنین $\Omega \subseteq \mathcal{R}^2$ نشان دهنده دامنه و Γ مرز دامنه Ω می باشد.

در سال های اخیر روش های عددی متعددی برای حل انواع مختلف معادلات تلگراف یک بعدی و دو بعدی ارائه شده اند. نویسندگان در مقالات [۳۷، ۳۱، ۷۳، ۸۹، ۱] انواع مختلف معادلات تلگراف یک بعدی را با شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک بررسی و روش های عددی متنوعی را برای حل آن ها به کار گرفته

اند. اخیراً برخی روش‌های عددی توسعه یافته برای حل معادلات تلگراف دو بعدی استفاده شده‌اند. دهقان و همکارانش برخی روش‌های بدون شبکه توسعه یافته را برای حل عددی معادلات تلگراف دو بعدی ارائه کرده‌اند [۳۹، ۳۸، ۳۰].

در این فصل دو نوع متفاوت از روش‌های بدون شبکه مستقیم و غیر مستقیم مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی همچنین فرم‌های موضعی آن‌ها برای حل معادله تلگراف فرمول بندی می‌شوند، و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه خواهند شد.

۲.۵ گسسته سازی زمانی

قبل از به کارگیری روش بدون شبکه برای حل معادله تلگراف، یک تکنیک مبتنی بر تفاضلات متناهی برای گسسته سازی مشتق زمان معادله تلگراف به کار گرفته می‌شود. روش‌های گسسته سازی زمانی یک روش معمول در حل عددی مسائل وابسته به زمان می‌باشند. در این فصل یک روش گسسته سازی θ -وزن دار که در آن $(0 \leq \theta \leq 1)$ برای گسسته سازی مشتق زمان معادله (۱.۵) در سه سطح زمانی متوالی $n-1$ ، n و $n+1$ به فرم زیر استفاده شده است:

$$\theta \mathbf{u}_{tt}^{n+1} + (1 - 2\theta) \mathbf{u}_{tt}^n + \theta \mathbf{u}_{tt}^{n-1} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{(\delta t)^2} + O((\delta t)^2),$$

به طوری که در رابطه فوق $\delta t = t^{n+1} - t^n$ گام گسسته سازی زمانی و همچنین $\mathbf{u}^n = u(\mathbf{x}, t^n)$. بنابراین با توجه به رابطه فوق و معادله (۱.۵) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{(\delta t)^2} &= \theta(-2\alpha \mathbf{u}_t^{n+1} - \gamma \mathbf{u}^{n+1} + \beta \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x})) \\ &+ (1 - 2\theta)(-2\alpha \mathbf{u}_t^n - \gamma \mathbf{u}^n + \beta \Delta \mathbf{u}^n + \mathbf{f}^n(\mathbf{x})) \\ &+ \theta(-2\alpha \mathbf{u}_t^{n-1} - \gamma \mathbf{u}^{n-1} + \beta \Delta \mathbf{u}^{n-1} + \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

با بازنویسی رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$\theta \mathbf{u}_t^{n+1} + (1 - 2\theta) \mathbf{u}_t^n + \theta \mathbf{u}_t^{n-1} = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}}{2\delta t} + O(\delta t),$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - 2\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}}{(\delta t)^2} &= -2\alpha \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n-1}}{2\delta t} \right) + \theta(-\gamma\mathbf{u}^{n+1} + \beta\Delta\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x})) \\ &+ (1 - 2\theta)(-\gamma\mathbf{u}^n + \beta\Delta\mathbf{u}^n + \mathbf{f}^n(\mathbf{x})) \\ &+ \theta(-\gamma\mathbf{u}^{n-1} + \beta\Delta\mathbf{u}^{n-1} + \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{f}^n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, t^n)$. اکنون از رابطه فوق، معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} [1 + \alpha\delta t + \delta t^2\theta\gamma]\mathbf{u}^{n+1} - \delta t^2\theta\beta\Delta\mathbf{u}^{n+1} &= [2 - \delta t^2(1 - 2\theta)\gamma]\mathbf{u}^n \\ &+ \delta t^2(1 - 2\theta)\beta\Delta\mathbf{u}^n \\ &+ [-1 + \alpha\delta t - \delta t^2\theta\gamma]\mathbf{u}^{n-1} \\ &+ \delta t^2\theta\beta\Delta\mathbf{u}^{n-1} + \delta t^2(\theta\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}) \\ &+ (1 - 2\theta)\mathbf{f}^n(\mathbf{x}) + \theta\mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x})). \quad (1.5) \end{aligned}$$

در رابطه گسسته سازی شده (۱.۵) با استفاده از شرایط آغازین :

$$u^* = u(\mathbf{x}, 0)$$

و همچنین گسسته سازی شرط آغازین

$$\frac{\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^*}{\delta t} = f_2(\mathbf{x}),$$

مقادیر وابسته به زمان در هر سطح زمانی $\mathbf{u}^n$, $n \geq 2$ وابسته به مقادیر تابع در دو سطح زمانی ماقبل آن $\mathbf{u}^{n-1}$ و $\mathbf{u}^{n-2}$ می‌باشند.

۳.۵ گسسته سازی مکانی

در این بخش چهار نوع روش بدون شبکه مبتنی بر فرم قوی معادله حاکم بر مسئله برای حل عددی معادله گسسته سازی شده (۱.۵) ارائه و سپس نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه خواهد شد. همان گونه که قبلاً نیز اشاره شد یک رده مهم از توابع پایه‌ای شعاعی توابع چند ربعی‌ها می‌باشند. در این فصل از توابع چند ربعی و همچنین توابع ویژه حاصل از این توابع به عنوان پایه در تقریب جواب‌ها استفاده می‌شود.

۱.۳.۵ روش هم محلی کانسا سراسری

در این بخش یک روش بدون شبکه بر اساس روش هم محلی کانسا سراسری و مبتنی بر توابع چند ربعی برای حل معادلات (۱.۵) با شرایط آغازین و مرزی (۲.۵) فرمول بندی و استفاده خواهد شد. برای این منظور تابع مجهول u در هر سطح زمانی در معادله (۱.۵) باید توسط یک ترکیب خطی از توابع پایه ای شعاعی و به صورت زیر تقریب زده شود:

$$u^n(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(\mathbf{r}_j), \quad (1.5)$$

به طوری که در این بخش توابع پایه ای، توابع چند ربعی $(\varphi(\mathbf{r}) = \sqrt{\mathbf{r}^2 + c^2})$ می‌باشند. همچنین $\mathbf{r}_j = \{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, \mathbf{x}_j \in \Omega \cup \Gamma\}$ فاصله اقلیدسی بین نقاط $\mathbf{x}$ و نقاط مرکزی $\mathbf{x}_j$ بوده و c پارامتر شکل در تابع چند ربعی می‌باشد. مجموعه مقادیر $\{\lambda_j^n\}_{j=1}^N$ ضرائب مجهول در سطح زمانی n ام می‌باشند که در طول فرآیند محاسبه خواهند شد. با توجه به روش هم محلی غیر متقارن کانسا با جایگذاری فرم پیشنهادی (۱.۵) در معادله (۱.۵) و همچنین شرایط مرزی (۲.۵) و انتخاب $N = N_d + N_b$ نقطه هم محلی $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \in \Omega \cup \Gamma$ به طوری که N_d نقطه در داخل دامنه و N_b نقطه بر روی مرز واقع باشند، یک دستگاه معادلات خطی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & [1 + \alpha\delta t + \delta t^\gamma \theta \gamma] \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(\mathbf{r}_{ij}) - \delta t^\gamma \theta \beta \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) = \\ & [2 - \delta t^\gamma (1 - 2\theta)\gamma] \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \delta t^\gamma (1 - 2\theta)\beta \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) \quad i = 1, \dots, N_d \\ & + [-1 + \alpha\delta t - \delta t^\gamma \theta \gamma] \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n-1} \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \delta t^\gamma \theta \beta \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n-1} \Delta \varphi(\mathbf{r}_{ij}) \quad (2.5) \\ & + \delta t^\gamma (\theta \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}_i) + (1 - 2\theta) \mathbf{f}^n(\mathbf{x}_i) + \theta \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x}_i)), \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(\mathbf{r}_{kj}) = h(\mathbf{x}_k, t^n), \quad k = 1, \dots, N_b,$$

به طوری که در روابط فوق داریم

$$\mathbf{r}_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$$

توجه شود که ضرائب λ_j^1 و λ_j^2 ، $j = 1, \dots, N$ به طور صریح با درونیایی توسط توابع چند ربعی و به فرم زیر محاسبه خواهند شد:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^1 \varphi(\mathbf{r}_{ij}) &= f_1(\mathbf{x}_i), \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^1 \varphi(\mathbf{r}_{ij}) &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 \varphi(\mathbf{r}_{ij}) + \delta t f_2(\mathbf{x}_i) \\ &= f_1(\mathbf{x}_i) + \delta t f_2(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

روابط اخیر را می‌توان برای سادگی به فرم ماتریسی زیر نیز باز نویسی کرد:

$$\Phi \lambda^1 = \mathbf{F}_1, \quad (3.5)$$

$$\Phi \lambda^2 = \mathbf{F}_2, \quad (4.5)$$

به طوری که

$$\lambda^1 = [\lambda_1^1, \lambda_2^1, \dots, \lambda_N^1]^T,$$

$$\lambda^2 = [\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_N^2]^T,$$

$$\mathbf{F}_1 = [f_1(\mathbf{x}_1), f_1(\mathbf{x}_2), \dots, f_1(\mathbf{x}_N)]^T,$$

$$\mathbf{F}_2 = [f_1(\mathbf{x}_1) + \delta t f_2(\mathbf{x}_1), f_1(\mathbf{x}_2) + \delta t f_2(\mathbf{x}_2), \dots, f_1(\mathbf{x}_N) + \delta t f_2(\mathbf{x}_N)]^T,$$

و همچنین $\Phi_{sk} = \varphi(\mathbf{r}_{sk})$ ماتریس ضرائب و N در N می‌باشد. به وضوح مشاهده می‌شود که ماتریس ضرائب Φ یک ماتریس متقارن ($\varphi(\mathbf{r}_{sk}) = \varphi(\mathbf{r}_{ks})$) و پر می‌باشد، نامنفرد بودن ماتریس Φ در فصل ۱ بررسی شد.

دستگاه معادلات خطی معرفی شده در رابطه (۲.۵) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$\Psi \lambda^{n+1} = \Psi_1 \lambda^n + \Psi_2 \lambda^{n-1} + \mathbf{F}, \quad (5.5)$$

به طوری که در این رابطه

$$\Psi = (\mathbf{1} + \alpha \delta t + \delta t^\gamma \theta \gamma) \Phi_1 - \delta t^\gamma \theta \beta \tilde{\Phi} + \Phi_2,$$

$$\Psi_1 = (\mathbf{2} - \delta t^\gamma (\mathbf{1} - \mathbf{2} \theta) \gamma) \Phi_1 + \delta t^\gamma (\mathbf{1} - \mathbf{2} \theta) \beta \tilde{\Phi} + \Phi_2,$$

$$\Psi_2 = (-\mathbf{1} + \alpha \delta t - \delta t^\gamma \theta \gamma) \Phi_1 + \delta t^\gamma \theta \beta \tilde{\Phi} + \Phi_2,$$

$$\mathbf{F} = \delta t^\gamma (\theta \mathbf{F}^{n+1} + (\mathbf{1} - \mathbf{2} \theta) \mathbf{F}^n + \theta \mathbf{F}^{n-1}),$$

و همچنین

$$\Phi_1 = [\varphi(r_{ij}) : \mathbf{1} \leq i \leq N_d, \mathbf{1} \leq j \leq N \text{ and } \bullet \text{ elsewhere}],$$

$$\tilde{\Phi} = [\Delta \varphi(r_{ij}) : \mathbf{1} \leq i \leq N_d, \mathbf{1} \leq j \leq N \text{ and } \bullet \text{ elsewhere}],$$

$$\Phi_2 = [\varphi(r_{ij}) : N_d + \mathbf{1} \leq i \leq N, \mathbf{1} \leq j \leq N \text{ and } \bullet \text{ elsewhere}],$$

$$\mathbf{F}^n = [f(x_i, t^n) : \mathbf{1} \leq i \leq N_d \text{ and } h(x_i, t^n) : N_d + \mathbf{1} \leq i \leq N].$$

اکنون از روابط (۵.۵) و $u^n = \Phi \lambda^n$ ، یک روند صریح برای محاسبه جواب های تقریبی در هر سطح زمانی $(n = 1, 2, \dots)$ به صورت زیر قابل ارائه می‌باشد:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \Phi \Psi^{-1} \Psi_1 \Phi^{-1} \mathbf{u}^n + \Phi \Psi^{-1} \Psi_2 \Phi^{-1} \mathbf{u}^{n-1} + \Phi \Psi^{-1} \mathbf{F}.$$

به وضوح مشاهده می‌شود که تابع جواب u^{n+1} در هر سطح زمانی قابل محاسبه است مشروط بر این که ماتریس ضرائب Ψ معکوس پذیر باشد. هر چند اثبات معکوس پذیری ماتریس Ψ در حالت کلی امکان پذیر نیست ولی تجربه نشان داده است که ماتریس های ضرائب منفرد به ندرت در این نوع فرایندهای عددی ظاهر می‌شوند. در بخش بعد برخی نتایج عددی محاسبه شده توسط این روند ارائه خواهد شد.

۲.۳.۵ روش هم محلی نامتقارن کانسا موضعی

همانگونه که قبلاً اشاره شد، ماتریس ضرائب حاصل از روش هم محلی کانسا سراسری Ψ یک ماتریس بد شرط می‌باشد و این بد شرطی با افزایش تعداد نقاط هم محلی به شدت افزایش می‌یابد. برای کاهش اندازه ماتریس ضرائب در روش های کانسا یک روند توسعه یافته از روش کانسا که به روش کانسا موضعی معروف است، ارائه شده است [۶۰، ۸۷، ۹۳، ۹۶، ۹۲، ۱۰۳، ۱۰۴]. در این بخش این روش توسعه یافته برای حل معادله تلگراف استفاده خواهد شد. در این روش به ازای هر نقطه مرکزی $m, \mathbf{x}_j \in \Omega \cup \Gamma, j = 1, \dots, N$ نقطه که در یک همسایگی مفروض از آن قرار دارند انتخاب می‌شوند. این ناحیه موضعی را با $\Omega_j = \{\mathbf{x}_k^j\}_{k=1}^m$ نشان می‌دهند که در آن اندیس های هر نقطه هم محلی موضعی $\mathbf{x}_j$ می‌باشد که در ناحیه موضعی Ω_j قرار دارند. در این روش های بدون شبکه موضعی تابع مجهول u به ازای هر نقطه مرکزی $\mathbf{x}_j \in \Omega \cup \Gamma$ به صورت یک ترکیب خطی از توابع پایه ای در ناحیه موضعی $\Omega_j, j = 1, \dots, N$ و به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^j, t^n) = \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^n, \quad \mathbf{x}^j \in \Omega_j, \quad (۶.۵)$$

به طوری که ضرائب $j \lambda_k^n, n = 1, 2, \dots$ مقادیر حقیقی و ثابت می‌باشند که توسط روش هم محلی و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} \left([1 + \alpha \delta t + \delta t^\gamma \theta \gamma] \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1} - \delta t^\gamma \theta \beta \sum_{k=1}^m \Delta \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1} \right) \\ & + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1} = \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} \left([2 - \delta t^\gamma (1 - \gamma \theta)] \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^n \right. \\ & + \delta t^\gamma (1 - \gamma \theta) \beta \sum_{k=1}^m \Delta \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^n + [-1 + \alpha \delta t - \delta t^\gamma \theta \gamma] \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n-1} \\ & + \delta t^\gamma \theta \beta \sum_{k=1}^m \Delta \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n-1} + \delta t^\gamma (\theta \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}_s^j) + (1 - \gamma \theta) \mathbf{f}^n(\mathbf{x}_s^j) + \theta \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x}_s^j)) \\ & \left. + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} h(\mathbf{x}_s^j, t^{n+1}) \right). \end{aligned} \quad (۷.۵)$$

در رابطه بالا $s = 1, \dots, m$ و نماد های $\zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j}$ و $\zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j}$ به ترتیب شاخص های دامنه و مرز می‌باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_s^j \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{x}_s^j \notin \Omega, \end{cases}, \quad \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} = \begin{cases} 1, & \mathbf{x}_s^j \in \Gamma, \\ 0, & \mathbf{x}_s^j \notin \Gamma. \end{cases} \quad (۸.۵)$$

دستگاه معادلات خطی موضعی (۷.۵) را می‌توان برای سادگی به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$${}_j\Upsilon_j \lambda^{n+1} = {}_j\mathbf{r},$$

به طوری که ماتریس‌های ${}_j\Upsilon \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و ${}_j\lambda^{n+1} \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب ماتریس ضرائب، بردار معلوم سمت راست و بردار مجهول می‌باشند. این ماتریس و بردارها به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} {}_j\Upsilon_{sk} &= \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} ([1 + \alpha\delta t + \delta t^{\Upsilon} \theta \gamma] \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) - \delta t^{\Upsilon} \theta \beta \Delta \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|)) + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|), \\ {}_j\mathbf{r}_s &= \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} ([\Upsilon - \delta t^{\Upsilon} (1 - \Upsilon \theta) \gamma] \mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^n) + \delta t^{\Upsilon} (1 - \Upsilon \theta) \beta \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^n) + \delta t^{\Upsilon} \theta \beta \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^{n-1}) \\ &+ [-1 + \alpha\delta t - \delta t^{\Upsilon} \theta \gamma] \mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^{n-1}) + \delta t^{\Upsilon} (\theta \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}_s^j) + (1 - \Upsilon \theta) \mathbf{f}^n(\mathbf{x}_s^j) + \theta \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x}_s^j))) \\ &+ \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} h(\mathbf{x}_s^j, t^{n+1})]. \end{aligned} \quad (۹.۵)$$

به وضوح بردار مجهول ${}_j\lambda^{n+1}$ را می‌توان به سادگی از رابطه:

$${}_j\lambda^{n+1} = {}_j\Upsilon^{-1} {}_j\mathbf{r},$$

یا به طور معادل از رابطه:

$${}_j\lambda_s^{n+1} = \sum_{k=1}^m {}_j\Upsilon_{sk}^{-1} {}_j\mathbf{r}_k, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

محاسبه کرد. بنابراین جواب تقریبی مسئله در سطح زمانی $n+1$ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^j, t^{n+1}) = \sum_{s=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_s^j\|) \sum_{k=1}^m {}_j\Upsilon_{sk}^{-1} {}_j\mathbf{r}_k,$$

در این جا فرمول بندی روش کانسا موضعی تکمیل می شود. همان گونه که مشاهده می شود فرمول بندی روش کانسا موضعی بسیار شبیه به روش کانسا سراسری می باشد با این تفاوت که در روش کانسا سراسری نیاز به حل یک دستگاه معادلات خطی بد شرط و با اندازه بسیار بزرگ N است در حالی که در روش کانسا موضعی N بار دستگاه معادلات خطی با اندازه های بسیار کوچک حل می شوند. لذا همان گونه که در بخش نتایج عددی مشاهده خواهد شد، انتظار می رود روش کانسا موضعی پایدار تر از نوع سراسری آن باشد.

۳.۳.۵ روش جواب های ویژه تقریبی

در این بخش، روش بدون شبکه هم محلی مبتنی بر فرم سراسری روش جواب های ویژه تقریبی برای حل عددی معادله تلگراف (۱.۵) - (۲.۵) ارائه و مدل بندی خواهد شد. در روش جواب های ویژه تقریبی، لاپلاسین تابع مجهول u در سطح زمانی $n+1$ در رابطه (۱.۵) توسط یک ترکیب خطی از توابع چند ربعی و به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\Delta u^{n+1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(\mathbf{r}_j), \quad (10.5)$$

برای متغیر دو بعدی $\mathbf{r}$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$\Delta = \frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right)$$

لذا یک جواب ویژه تقریبی برای تابع مجهول u^{n+1} را می توان به سادگی با دوبار انتگرال گیری از رابطه (۵.۶) محاسبه کرد [۱۰۲، ۱۰۴، ۱۰۳]. بنابراین نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \int \frac{1}{r} \int r \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(\mathbf{r}) \right) d\mathbf{r} dr, \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \left(\int \frac{1}{r} \int r \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} dr \right), \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(\mathbf{r}), \end{aligned}$$

به طوری که برای توابع چند ربعی $\varphi(\mathbf{r})$ ، تابع جواب های ویژه تقریبی به فرم زیر می باشند:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} (4c^2 + \mathbf{r}^2) \sqrt{c^2 + \mathbf{r}^2} - \frac{c^3}{3} \ln(c + \sqrt{c^2 + \mathbf{r}^2}). \quad (11.5)$$

اکنون با جای گذاری معادلات (۵.۶) و (۶.۶) در رابطه (۱.۵) و همچنین به کار گیری شرایط مرزی داده شده، ضرائب مجهول $\{\lambda_j^{n+1}\}_{j=1}^N$ را می توان با استفاده از روش هم محلی محاسبه کرد. با توجه به موارد فوق یک دستگاه معادلات خطی با N معادله و N مجهول به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_i} \left([1 + \alpha \delta t + \delta t^{\mathbf{y}} \theta \gamma] \sum_{k=1}^N \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) \lambda_k^{n+1} - \delta t^{\mathbf{y}} \theta \beta \sum_{k=1}^N \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) \lambda_k^{n+1} \right) \\ & + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_i} \sum_{k=1}^N \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) \lambda_k^{n+1} = \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_i} \left([2 - \delta t^{\mathbf{y}} (1 - \mathbf{y} \theta) \gamma] \sum_{k=1}^N \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) \lambda_k^n \right. \\ & + \delta t^{\mathbf{y}} (1 - \mathbf{y} \theta) \beta \sum_{k=1}^N \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) \lambda_k^n + [-1 + \alpha \delta t - \delta t^{\mathbf{y}} \theta \gamma] \sum_{k=1}^N \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) \lambda_k^{n-1} \\ & + \delta t^{\mathbf{y}} \theta \beta \sum_{k=1}^N \varphi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k\|) \lambda_k^{n-1} + \delta t^{\mathbf{y}} (\theta \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}_i) + (1 - \mathbf{y} \theta) \mathbf{f}^n(\mathbf{x}_i) + \theta \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x}_i)) \\ & \left. + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_i} h(\mathbf{x}_i, t^{n+1}) \right), \end{aligned} \quad (12.5)$$

به طوری که روابط فوق به ازای هر $i = 1, \dots, N$ و $n = 1, 2, 3, \dots$ برقرار می باشند. به وضوح دستگاه معادلات خطی فوق برای شروع نیازمند دو حدس اولیه λ^0 و λ^1 می باشد. این بردارهای آغازین را می توان توسط درونیایی شرایط آغازین با استفاده از توابع جواب های ویژه به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\psi \lambda^0 = \mathbf{F}_1,$$

$$\psi \lambda^1 = \mathbf{F}_2,$$

به طوری که $\psi_{ij} = \psi(\mathbf{r}_{ij})$, $i, j = 1, \dots, N$ و همچنین $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_1$ در رابطه (۱۰.۶) مشخص شده اند.

از حل دستگاه معادلات فوق، جواب های تقریبی معادله تلگراف محاسبه خواهند شد. نتایج عددی حاصل از این روش برای برخی مثال ها در بخش نتایج عددی ارائه شده اند.

۴.۳.۵ یک فرم موضعی از روش جواب های ویژه تقریبی

در این بخش یک فرم موضعی از روش عددی بدون شبکه مبتنی بر جواب های ویژه تقریبی ارائه خواهد شد. شبه روند ارائه شده برای فرم موضعی روش کانسای در این روش نیز به جای تقریب جواب به صورت ترکیب خطی از توابع پایه ای بر کل دامنه اصلی، تلاش می شود که جواب را به صورت یک ترکیب خطی از توابع جواب های ویژه و دامنه های موضعی تقریب زد. لذا برای این منظور تابع مجهول u^{n+1} و تابع لاپلاسیان آن در سطح زمانی $n + 1$ و در رابطه (۱.۵) در نواحی موضعی و زیر دامنه $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$ ، از دامنه به صورت زیر تقریب زده می شوند:

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x}^j, t^{n+1}) &= \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1}, \quad \mathbf{x}_k^j \in \Omega_j, \\ u(\mathbf{x}^j, t^{n+1}) &= \sum_{k=1}^m \psi(\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1}, \quad \mathbf{x}_k^j \in \Omega_j.\end{aligned}\quad (13.5)$$

لذا در هر زیر دامنه $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$ ، ضرائب مجهول λ_k^{n+1} ، $n = 1, 2, \dots$ توسط روش هم محلی و به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\begin{aligned}& \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} \left([1 + \alpha \delta t + \delta t^\gamma \theta \gamma] \sum_{k=1}^m \psi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1} - \delta t^\gamma \theta \beta \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1} \right) \\ & + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} \sum_{k=1}^m \psi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n+1} = \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} \left([2 - \delta t^\gamma (1 - \gamma \theta)] \sum_{k=1}^m \psi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^n \right. \\ & + \delta t^\gamma (1 - \gamma \theta) \beta \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^n + [-1 + \alpha \delta t - \delta t^\gamma \theta \gamma] \sum_{k=1}^m \psi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n-1} \\ & + \delta t^\gamma \theta \beta \sum_{k=1}^m \varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) \lambda_k^{n-1} + \delta t^\gamma (\theta \mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}_s^j) + (1 - \gamma \theta) \mathbf{f}^n(\mathbf{x}_s^j) + \theta \mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x}_s^j)) \\ & \left. + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} h(\mathbf{x}_s^j, t^{n+1}) \right), \quad s = 1, 2, \dots, m.\end{aligned}\quad (14.5)$$

به وضوح برای هر نقطه مرکزی $\mathbf{x}_s^j \in \Omega \cup \Gamma$ از زیر دامنه Ω_j ، رابطه ((۱۴.۵)) یک دستگاه معادلات خطی با m معادله و m مجهول را مشخص می کند. بنابراین طبق فرم موضعی روش ارائه شده، جواب های مجهول در هر سطح زمانی به صورت زیر ارائه می شوند:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}^j, t^{n+1}) = \sum_{s=1}^m \psi(\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}_s^j\|) \sum_{k=1}^m {}_j\Xi_{sk}^{-1} {}_j\xi_k,$$

به طوری که

$${}_j\Xi_{sk} = \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} ([1 + \alpha\delta t + \delta t^{\gamma}\theta\gamma]\psi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|) - \delta t^{\gamma}\theta\beta\varphi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|)) + \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j}\psi(\|\mathbf{x}_s^j - \mathbf{x}_k^j\|),$$

$${}_j\xi_s = \zeta_{\Omega}^{\mathbf{x}_s^j} ([\gamma - \delta t^{\gamma}(\gamma - \gamma\theta)]\mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^n) + \delta t^{\gamma}(\gamma - \gamma\theta)\beta\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^n) + \delta t^{\gamma}\theta\beta\Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^{n-1})$$

$$+ [-1 + \alpha\delta t - \delta t^{\gamma}\theta\gamma]\mathbf{u}(\mathbf{x}_s^j, t^{n-1}) + \delta t^{\gamma}(\theta\mathbf{f}^{n+1}(\mathbf{x}_s^j) + (\gamma - \gamma\theta)\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_s^j) + \theta\mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x}_s^j)))$$

$$+ \zeta_{\Gamma}^{\mathbf{x}_s^j} h(\mathbf{x}_s^j, t^{n+1}), \quad s, k = 1, 2, \dots, m,$$

به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ با توجه به روند فوق یک روش بدون شبکه با پایداری بیشتر ارائه شده است.

۴.۵ نتایج عددی

در این بخش کارایی و دقت روش های بدون شبکه معرفی شده، برای حل معادله تلگراف دو بعدی در مثال های مختلف بررسی می شود. در روند روش های عددی از نقاط متساوی الفاصله در ناحیه به عنوان نقاط مرکزی و هم محلی استفاده شده است. در فرم های موضعی زیر دامنه هایی با $m = 13$ از دامنه اصلی انتخاب شده اند. برای بررسی دقت روش ها و نتایج حاصل از آن ها دو نوع خطا، خطای مطلق ε_{∞} و خطای ریشه مربع میانگین ε_{RMS} استفاده شده است:

$$\varepsilon_{\infty} = \max\{|\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_j, t)|, \quad j = 1, 2, \dots, N\},$$

$$\varepsilon_{RMS} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{j=1}^N |\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_j, t)|^2},$$

به طوری که در روابط فوق $\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t)$ و $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_j, t)$ به ترتیب بیانگر جواب های واقعی و تقریبی می باشند.

جدول ۱.۵: مقادیر خطاهای ε_{RMS} و ε_{∞} با فرض $\delta t = 0.001$, $m = 13$, $N = 225$ در مثال ۱.

$c = 0.49 \text{ GKM},$			$c = 2.5 \text{ LKM},$		
t	ε_{RMS}	ε_{∞}	ε_{RMS}	ε_{∞}	
0.5	7.815×10^{-6}	3.105×10^{-5}	8.003×10^{-6}	2.982×10^{-5}	
1.0	1.009×10^{-5}	2.071×10^{-5}	1.522×10^{-5}	2.915×10^{-5}	
2.0	3.009×10^{-6}	8.252×10^{-6}	4.350×10^{-6}	1.055×10^{-5}	
3.0	6.151×10^{-6}	1.697×10^{-5}	1.193×10^{-5}	2.572×10^{-5}	
4.0	4.265×10^{-5}	1.181×10^{-5}	7.792×10^{-6}	1.652×10^{-5}	
5.0	2.203×10^{-6}	6.418×10^{-6}	2.260×10^{-6}	5.043×10^{-6}	
$c = 0.35 \text{ GMAPS},$			$c = 2 \text{ LMAPS},$		
t	ε_{RMS}	ε_{∞}	ε_{RMS}	ε_{∞}	
0.5	9.747×10^{-6}	2.966×10^{-5}	5.889×10^{-6}	1.636×10^{-5}	
1.0	6.866×10^{-6}	1.499×10^{-5}	1.071×10^{-5}	2.119×10^{-5}	
2.0	1.749×10^{-6}	3.509×10^{-6}	2.932×10^{-6}	7.110×10^{-6}	
3.0	8.787×10^{-7}	3.683×10^{-6}	5.915×10^{-6}	1.301×10^{-5}	
4.0	6.016×10^{-7}	2.353×10^{-6}	3.477×10^{-6}	7.445×10^{-6}	
5.0	1.699×10^{-7}	9.549×10^{-7}	1.072×10^{-6}	2.428×10^{-6}	

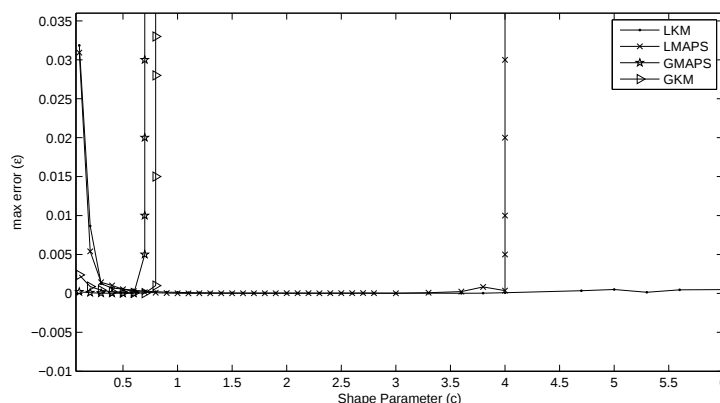
۱.۴.۵ مثال ۱

به عنوان اولین مثال، معادله تلگراف (۱.۵) به همراه شرایط آغازین و مرزی (۲.۵) در دامنه $(x, y) \in [0, 1]^2$ و $t \geq 0$ با فرض پارامترهای مدل $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ و $\beta = 1$ در نظر گرفته می شود. جواب دقیق برای این مسئله به صورت زیر است [۳۰، ۵۶]:

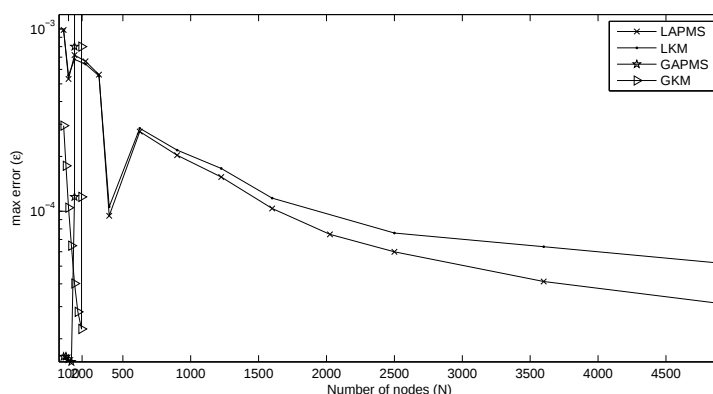
$$u(x, y, t) = \cos(t) \sin(x) \sin(y).$$

تابع منبع $f(x, t)$ و شرایط آغازین و مرزی به سادگی از جایگذاری تابع جواب در معادله قابل محاسبه می باشند. روش های بدون شبکه فرمول بندی و ارائه شده در این فصل، برای حل عددی این مثال به کار گرفته شده است. در جدول ۱.۵، نتایج حاصل توسط روش های بدون شبکه معرفی شده و با فرض $\delta t = 10^{-3}$ و انتخاب پارامترهای شکل مناسب در سطوح زمانی متفاوت گزارش و با یکدیگر مقایسه شده اند.

برای مقایسه پایداری روش های معرفی شده در شکل ۱.۶، گراف های تابع خطا نسبت به تغییرات پارامتر شکل c و با فرض $\delta t = 10^{-3}$, $m = 13$, $N = 100$ در سطح زمانی $t = 1$ رسم شده اند. به وضوح از این شکل نتیجه می شود که فرم های موضعی روش های بدون شبکه معرفی شده، نسبت به تغییرات پارامتر شکل دارای پایداری بیشتری می باشند. از طرفی مشاهده می شود که نتایج حاصل از همه روش ها بسیار نزدیک به یکدیگر می باشند در حالی که فرم های سراسری تنها برای بازه بسیار کوچک از تغییرات پارامتر شکل پایدار می ماند در حالی که برقرار ماندن پایداری روش های بدون شبکه مبتنی بر فرم های موضعی بیشتر می باشد. همچنین در شکل ۲.۵، گراف توابع خطای حاصل از روش های ارائه شده و نسبت به تغییرات N



شکل ۱۰.۵: گراف توابع خطا نسبت به تغییرات پارامتر شکل با فرض $N = 100$, $n = 13$, $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۱.



شکل ۲۰.۵: گراف توابع خطا نسبت به تغییرات تعداد نقاط با فرض $c = 0.5$, $n = 13$, $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۱.

با فرض $c = 0.5$, $m = 13$, $\delta t = 10^{-3}$ در زمان $t = 1$ رسم شده اند. از نتایج رسم شده در این جدول مشاهده می شود که با ثابت بودن مقدار پارامتر شکل، هرچند فرم های سراسری دارای دقت بیشتری می باشند ولی پایداری فرم های سراسری با افزایش تعداد نقاط هم محلی هم چنان بر قرار می باشد.

۲.۴.۵ مثال ۲

به عنوان دومین مثال، معادله (۱.۵) با شرایط (۲.۵) در دامنه $(x, y) \in [0, 1]^2$, $t \geq 0$ و به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$u_{tt} + 4\pi u_t + 2\pi^2 u = \Delta u + 2\pi t \sin \pi(x+y) e^{-(x+y)t} + ((x+y-2\pi)^2 - 2t^2) \sin(\pi x) \sin(\pi y) e^{-(x+y)t}.$$

جدول ۲.۵: مقادیر خطای ε_{RMS} با فرض $m = 13$, $\delta t = 0.001$ به ازای مقادیر مختلف N در مثال ۲.
 $c = 1/6$ LKM, $c = 0.22$ GKM, $c = 0.54$ LMAPS, $c = 0.16$ GMAPS.

N	ε_{RMS}	ε_{RMS}	ε_{RMS}	ε_{RMS}
۶۴	1.063×10^{-3}	4.320×10^{-3}	1.443×10^{-3}	2.483×10^{-3}
۱۰۰	6.317×10^{-4}	2.363×10^{-3}	7.483×10^{-4}	1.263×10^{-3}
۱۴۴	2.789×10^{-4}	1.389×10^{-3}	3.387×10^{-4}	7.157×10^{-4}
۲۲۵	2.681×10^{-4}	6.636×10^{-4}	3.026×10^{-4}	3.436×10^{-4}
۳۲۴	2.481×10^{-4}	3.309×10^{-4}	2.535×10^{-4}	1.745×10^{-4}
۴۰۰	2.805×10^{-5}	2.117×10^{-4}	5.350×10^{-5}	9.351×10^{-5}
۶۲۵	1.493×10^{-4}	7.413×10^{-5}	8.052×10^{-5}	4.122×10^{-5}
۹۰۰	8.316×10^{-5}	3.174×10^{-5}	9.451×10^{-5}	2.124×10^{-5}

جواب دقیق این معادله به صورت زیر می باشد [۴۲، ۵۶، ۳۲]:

$$u(x, y, t) = e^{-(x+y)t} \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

شرایط آغازین و مرزی را می توان به سادگی از جواب دقیق مسئله مشخص کرد. در این بخش نیز روش های بدون شبکه معرفی شده در این فصل برای حل عددی این مدل به کارگرفته شده است. در جدول ۲.۶ نتایج محاسبه شده برای خطای ε_{RMS} با در نظر گرفتن پارامترهای $m = 13$, $\delta t = 10^{-3}$ و انتخاب مقادیر پارامتر شکل مناسب به ازای مقادیر مختلف N گزارش شده اند، که همگرایی روش های ارائه شده را نشان می دهد. همچنین در شکل ۳.۵ گراف های کانتور توابع خطای محاسبه شده با فرض $m = 13$, $\delta t = 10^{-3}$ و $N = 400$ و انتخاب پارامتر شکل مناسب در لحظه $t = 2$ رسم شده اند که به روشنی دقت و اعتبار نتایج حاصل را نشان می دهند.

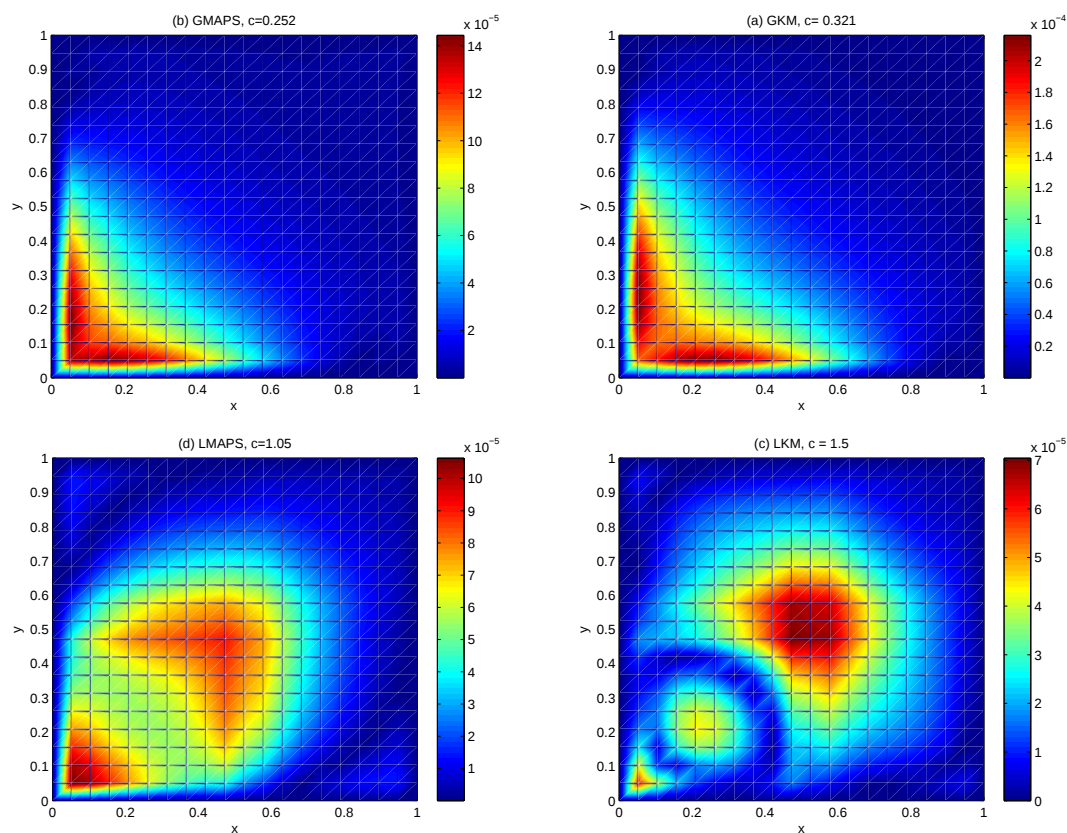
۳.۴.۵ مثال ۳

به عنوان مثال سوم، معادله تلگراف با پارامترهای مدل $\alpha = 1$, $\beta = 1$ و $\gamma = 1$ در ناحیه $(x, y) \in [0, 1]^2$ و $t \geq 0$ در نظر گرفته خواهد شد. جواب دقیق این معادله به صورت زیر می باشد [۳۸، ۳۰]:

$$u(x, y, t) = \exp(x + y - t).$$

شبیه مثال های قبل در این مثال نیز تابع منبع $f(x, t)$ و شرایط آغازین و ابتدایی به سادگی از جواب واقعی قابل محاسبه می باشند. در جدول ۳.۵ نتایج حاصل توسط روش های ارائه شده با فرض $m = 13$ و $N = 400$ و انتخاب مقادیر پارامتر شکل مناسب گزارش شده اند.

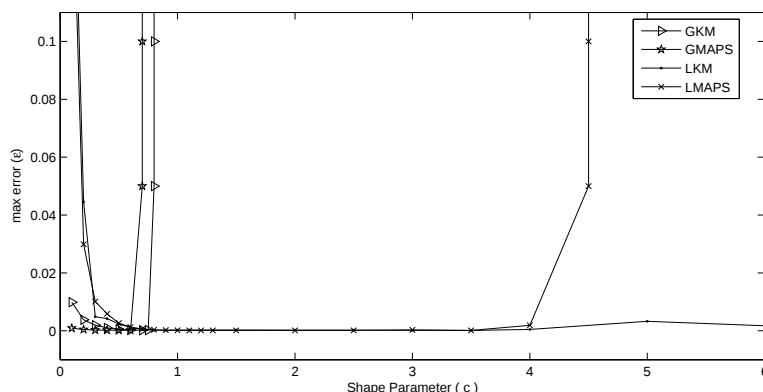
این نتایج به ترتیب با در نظر گرفتن $\delta t = 10^{-4}$ و $\delta t = 10^{-3}$ در فرم های سراسری و موضعی و در سطوح مختلف زمانی محاسبه شده اند. همچنین در شکل های ۴.۵ و ۵.۵ نتایج حاصل برای تابع خطا نسبت



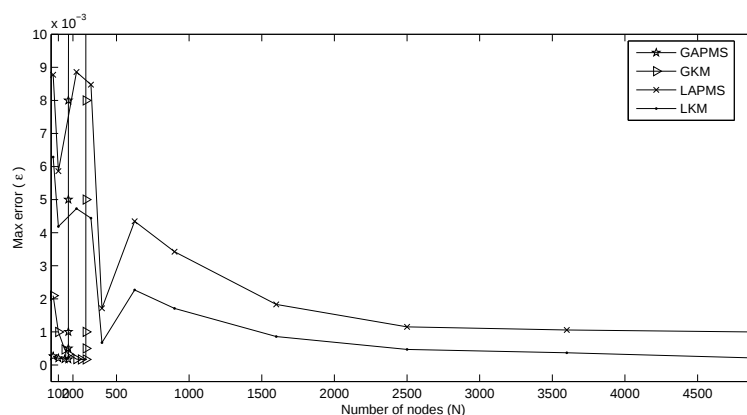
شکل ۳.۵: گراف های کانتور توابع خطا با فرض $\delta t = 0.001$, $n = 13$, $N = 400$ در لحظه $t = 2$ در مثال ۲.

جدول ۳.۵: مقادیر خطای ε_{∞} و ε_{RMS} در مثال ۳ با فرض $N = 400$.

$\delta t = 10^{-4}$		$c = 0.33$ GKM,		$c = 0.27$ GAPMS,	
t	ε_{RMS}	ε_{∞}	ε_{RMS}	ε_{∞}	
0.5	7.099×10^{-4}	1.165×10^{-3}	1.232×10^{-4}	4.201×10^{-4}	
1.0	4.359×10^{-4}	9.246×10^{-4}	1.201×10^{-4}	2.268×10^{-4}	
2.0	7.233×10^{-5}	2.752×10^{-4}	2.558×10^{-5}	6.346×10^{-5}	
3.0	4.182×10^{-5}	1.270×10^{-4}	2.117×10^{-5}	4.276×10^{-5}	
4.0	1.954×10^{-5}	6.43×10^{-5}	3.352×10^{-6}	7.344×10^{-6}	
5.0	3.935×10^{-6}	1.156×10^{-5}	2.592×10^{-6}	6.446×10^{-6}	
$\delta t = 10^{-3}$		$c = 2$ LKM,		$c = 2$ LAPMS,	
t	ε_{RMS}	ε_{∞}	ε_{RMS}	ε_{∞}	
0.5	1.799×10^{-4}	5.173×10^{-4}	1.110×10^{-4}	3.692×10^{-4}	
1.0	6.241×10^{-5}	1.294×10^{-4}	9.725×10^{-5}	1.868×10^{-4}	
2.0	3.389×10^{-5}	6.483×10^{-5}	1.649×10^{-5}	3.385×10^{-5}	
3.0	1.024×10^{-5}	2.674×10^{-5}	9.65×10^{-6}	2.736×10^{-5}	
4.0	3.632×10^{-6}	9.389×10^{-6}	4.291×10^{-6}	1.48×10^{-5}	
5.0	4.922×10^{-6}	1.759×10^{-6}	1.860×10^{-6}	1.463×10^{-6}	



شکل ۴.۵: گراف مربوط به تابع خطا نسبت به تغییرات پارامتر شکل با فرض $n = 13$, $N = 100$ و $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۳.



شکل ۵.۵: گراف مربوط به تابع خطا نسبت به تغییرات تعداد نقاط با فرض $n = 13$, $c = 0.4$ ، و $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 1$ در مثال ۳.

به تغییرات پارامتر شکل و همچنین تعداد نقاط رسم شده اند. به وضوح از این شکل ها مشاهده می شود که فرم های موضعی دارای پایداری بیشتری نسبت به فرم های سراسری آن ها می باشند.

۴.۴.۵ مثال ۴

به عنوان آخرین مثال معادله (۱.۵)–(۲.۵) در ناحیه مربعی $(x, y) \in [0, 1]^2$ ، به ازای $t \geq 0$ و به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$u_{tt} + 2u_t + u = \Delta u + 2/(1 + x + y + t) + \ln(1 + x + y + t) + 1/(1 + x + y + t)^2.$$

جواب دقیق این معادله به فرم زیر است [۳۲]:

جدول ۴.۵: مقادیر خطای ε_∞ با فرض $n = 13, \delta t = 0.001, T = 5$ به ازای مقادیر متفاوت N در مثال ۴.

	$c = 1 \text{ LKM},$	$c = 1 \text{ LMAPS},$	$c = 0.25 \text{ GKM},$	$c = 0.25 \text{ GMAPS},$
N	ε_∞	ε_∞	ε_∞	ε_∞
۶۴	8.174×10^{-4}	5.402×10^{-4}	5.112×10^{-3}	8.751×10^{-4}
۱۰۰	4.618×10^{-4}	2.797×10^{-4}	2.744×10^{-3}	3.521×10^{-4}
۱۴۴	3.842×10^{-4}	2.382×10^{-4}	1.124×10^{-3}	1.661×10^{-4}
۲۲۵	3.431×10^{-4}	2.044×10^{-4}	6.575×10^{-4}	7.815×10^{-5}
۳۲۴	2.866×10^{-4}	1.705×10^{-4}	2.924×10^{-4}	5.307×10^{-5}
۴۰۰	7.555×10^{-5}	6.261×10^{-5}	1.723×10^{-4}	4.781×10^{-5}
۶۲۵	9.219×10^{-5}	9.407×10^{-5}	4.660×10^{-5}	—
۹۰۰	8.624×10^{-5}	7.470×10^{-5}	—	—
۱۲۲۵	7.874×10^{-5}	7.895×10^{-5}	—	—
۱۶۰۰	6.298×10^{-5}	8.159×10^{-5}	—	—

$$u(x, y, t) = \ln(1 + x + y + t).$$

شبهه مثال های قبل، در این حالت نیز روش های بدون شبکه معرفی شده برای حل عددی این مدل استفاده شده اند. در جدول ۴.۵ نتایج حاصل توسط روش های فوق گزارش شده اند. این نتایج با فرض $m = 13, \delta t = 10^{-3}$ و انتخاب مقادیر پارامتر شکل مناسب در لحظه $t = 5$ و به ازای مقادیر N محاسبه شده اند. نتایج گزارش شده در جدول فوق به وضوح همگرایی روش ها را نشان می دهد، هرچند فرم های سراسری به ازای مقادیر بزرگ N ناپایدار می شوند.

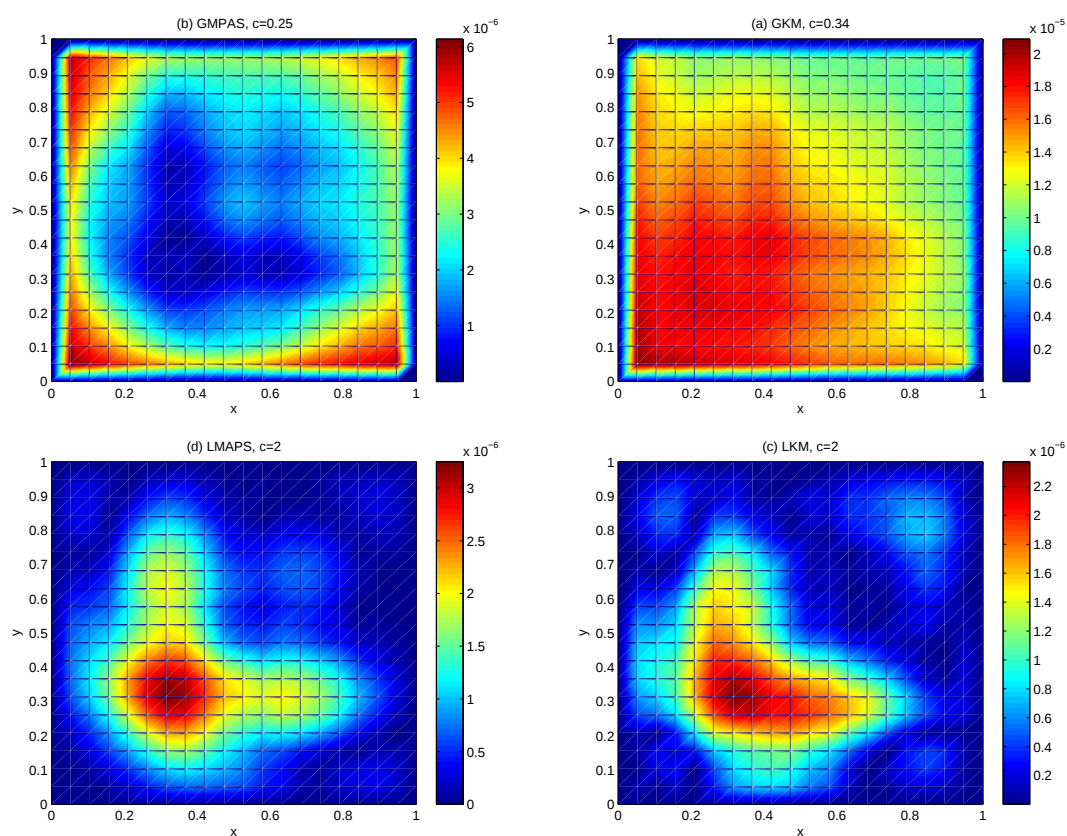
جدول ۵.۵: مقادیر خطاهای ε_{RMS} و ε_{∞} با فرض $\delta t = 10^{-3}$, $N = 400$ در مثال ۴.

$c = 0.34 \text{ GKM}$			$c = 0.25 \text{ GAPMS}$		
t	ε_{RMS}	ε_{∞}	ε_{RMS}	ε_{∞}	
۰.۵	1.131×10^{-5}	3.874×10^{-5}	1.481×10^{-5}	4.569×10^{-5}	
۱.۰	1.758×10^{-5}	2.553×10^{-5}	5.973×10^{-6}	1.378×10^{-5}	
۲.۰	8.929×10^{-6}	1.979×10^{-5}	5.595×10^{-6}	8.313×10^{-6}	
۳.۰	1.138×10^{-5}	2.094×10^{-5}	4.702×10^{-6}	6.721×10^{-6}	
۴.۰	1.324×10^{-5}	2.228×10^{-5}	4.377×10^{-6}	7.226×10^{-6}	
۵.۰	1.419×10^{-5}	2.546×10^{-5}	5.009×10^{-6}	7.722×10^{-6}	
$c = 2 \text{ LKM}$			$c = 2 \text{ LAPMS}$		
t	ε_{RMS}	ε_{∞}	ε_{RMS}	ε_{∞}	
۰.۵	1.989×10^{-5}	5.623×10^{-5}	1.080×10^{-5}	3.575×10^{-5}	
۱.۰	5.598×10^{-6}	1.193×10^{-5}	8.098×10^{-6}	1.625×10^{-5}	
۲.۰	4.699×10^{-6}	8.930×10^{-6}	2.436×10^{-6}	4.601×10^{-6}	
۳.۰	2.182×10^{-6}	4.773×10^{-6}	1.949×10^{-6}	5.033×10^{-6}	
۴.۰	1.174×10^{-6}	2.126×10^{-6}	9.052×10^{-7}	1.848×10^{-6}	
۵.۰	1.673×10^{-6}	2.954×10^{-6}	1.307×10^{-6}	2.800×10^{-6}	

در ادامه در جدول ۵.۵، نتایج حاصل توسط روش های مدل سازی شده و در برخی سطوح زمانی ارائه و مقایسه شده اند. در نهایت در شکل ۶.۵ کانتور های توابع خطا رسم شده اند. از نتایج ارائه شده از طریق جدول ها و شکل ها، مشاهده می شود که روش های عددی، جواب معادله حاکم را بادقت بالا تقریب می زنند.

۵.۵ نتیجه گیری

در این فصل دو رده مهم از روش های بدون شبکه مبتنی بر فرم قوی معادله حاکم که براساس توابع پایه ای شعاعی می باشند برای حل معادله تلگراف دو بعدی مورد استفاده قرار گرفت. در رده اول تابع مجهول توسط یک ترکیب خطی از توابع پایه ای شعاعی تقریب زده شد در حالی که در رده دوم عملگر لاپلاسین تابع مجهول توسط ترکیب خطی توابع پایه ای شعاعی تقریب زده می شود و سپس با توجه به آن توابع جواب ویژه محاسبه شده اند. برای افزایش پایداری و جلوگیری از بد شرطی ماتریس ضرائب، فرم های موضعی برای روش های فوق ارائه و در حل عددی معادله تلگراف مدل بندی شدند. در همه روش ها از یک روند گسسته سازی مبتنی بر تفاضلات متناهی برای گسسته سازی مشتقات زمان معادله استفاده شد. نتایج عددی ارائه شده از طریق جدول ها و همچنین شکل ها مشخص می کنند که نتایج حاصل از روش های مختلف دارای دقت های نزدیک به یکدیگر می باشند هرچند مشاهده می شود که تا حدودی نتایج حاصل از رده اول دقیق تر می باشند. همچنین مشاهده شد که فرم های موضعی ارائه شده به مراتب بسیار پایدار تر و کارا تر از فرم های سراسری آن ها می باشند و حساسیت بسیار کمتری نسبت به تغییرات پارامتر شکل و تعداد نقاط هم محلی از خود



شکل ۶.۵: گراف کانتورهای توابع خطا با فرض $n = 13$, $N = 400$ و $\delta t = 0.001$ در لحظه $t = 2/5$ برای مثال ۴.



فصل ۶

روش پتروف - گالرکین مبتنی بر توابع جواب های ویژه برای حل معادله انتشار با شرایط مرزی غیر استاندارد

۱.۶ مقدمه

بسیاری از پدیده های طبیعی در علوم و مهندسی به صورت مسائل مقدار مرزی با شرایط مرزی غیر کلاسیک مدل بندی می شوند. در این دسته از مسائل اغلب یک عبارت انتگرالی در شرایط مرزی یا در معادله اصلی ظاهر می شوند. این رده ویژه از مدل های ریاضی به طور وسیع در مدل بندی فرآیند های متنوعی در علوم فیزیک، انتقال حرارت، شیمی، زیست شناسی و صنعت به کار می روند [۸۰، ۲۰، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۳].

در این فصل یک روند عددی مبتنی بر روش های بدون شبکه برای حل معادله دو بعدی انتشار:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \mathbf{x} = (x, y) \in \Omega \subseteq \mathcal{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (1.6)$$

با شرایط آغازین و مرزی

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, 0) &= f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}, t) &= h_1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, t) &= k(\mathbf{x})\mu(t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2, \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{x}, t) &= h_3(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

و همچنین شرایط مرزی غیر کلاسیک

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = m(t), \quad t \geq 0, \quad (3.6)$$

ارائه خواهد شد، به طوری که در این روابط $u(x, t)$ و $\mu(t)$ توابع مجهول می‌باشند و همچنین مقدار ثابت α ضریب انتشار گرمایی، $h_1(x, t)$ ، $h_2(x, t)$ ، $f(x)$ و $k(x)$ توابع معلوم و به اندازه کافی هموار بوده، $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$ یک منحنی بسته و مرز دامنه Ω بوده به نحوی که $\bar{\Omega} = (\Omega \cup \Gamma) \in \mathcal{R}^2$ نشان دهنده دامنه متغیرهای مکانی مسئله و t متغیر زمان می‌باشد.

عبارت غیر کلاسیک ظاهر شده در شرط مرزی (۳.۶) سبب می‌شود که بررسی تحلیلی این مسئله با مشکلات زیادی همراه باشد و به علاوه اجرای بسیاری از روش‌های عددی برای حل آن عملاً امکان‌پذیر نباشد. در دهه اخیر، برخی روش‌های عددی برای رده‌های متنوعی از معادلات دیفرانسیل با شرایط غیر استاندارد معرفی و استفاده شده‌اند [۱، ۸۹، ۸۱، ۱۰۶، ۱۳، ۸۴، ۴۴]. به طور ویژه برخی روش‌های عددی برای حل معادله انتشار دو بعدی با شرایط مرزی غیر کلاسیک ارائه شده‌اند. دهقان، برخی روش‌های عددی مبتنی بر روش تفاضلات متناهی را برای حل معادله انتشار دوبعدی با شرایط مرزی غیر استاندارد توسعه و به کار گرفته است [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸]. عباس بندی و شیرزادی، دو روش بدون شبکه را برای حل عددی معادله انتشار دو بعدی غیر استاندارد با شرایط مرزی دیریکله و نیومن به کار برده‌اند [۲، ۳]. اخیراً، کاظم و دیگران یک روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه‌ای شعاعی را برای حل این مدل به کار برده‌اند [۵۲].

در این فصل ابتدا یک روش بدون شبکه مبتنی بر فرم قوی معادله و با استفاده از توابع جواب‌های ویژه به عنوان توابع پایه‌ای برای حل معادله (۱.۶) - (۳.۶) مدل بندی و استفاده خواهد شد و سپس تلاش می‌شود یک روش بدون شبکه مبتنی بر فرم ضعیف معادله حاکم نیز برای حل معادله (۱.۶) - (۳.۶) معرفی و استفاده شود و در نهایت نتایج حاصل از دو روش فوق با یکدیگر مقایسه خواهند شد.

۲.۶ گسسته سازی زمانی

برای حل عددی معادله (۱.۶) با شرایط مرزی و آغازین (۲.۶) - (۳.۶)، ابتدا یک مشتق زمانی ظاهر در معادله توسط یک روش تفاضلات متناهی θ -وزن دار شده $(0 \leq \theta \leq 1)$ ، گسسته سازی خواهد شد. بنابر این با روش گسسته سازی معرفی شده، معادله دیفرانسیل (۱.۶) در دو سطح زمانی متوالی به صورت زیر گسسته سازی خواهد شد:

$$\theta \frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + (1 - \theta) \frac{\partial u^n}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} + O(\delta t),$$

به طوری که $\delta t = t^{n+1} - t^n$ طول گام زمانی گسسته سازی و $u^n = u(x, t^n)$. لذا با توجه به معادله (۱.۶) نتیجه می‌شود:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} \simeq \theta \alpha \Delta u^{n+1} + (1 - \theta) \alpha \Delta u^n,$$

به طوری که در رابطه فوق $\Delta u = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$ عملگر لاپلاسین می‌باشد. به وضوح با ساده سازی رابطه فوق، نتیجه می‌شود:

$$u^{n+1} - \theta \delta t \alpha \Delta u^{n+1} = u^n + \delta t(1 - \theta)\alpha \Delta u^n. \quad (4.6)$$

در رابطه گسسته سازی فوق، با به کارگیری شرط آغازین $u^0 = u(x, 0)$ مشاهده می‌شود که مقادیر u^n ، $n \geq 1$ در هر گام زمانی وابسته به مقدار جواب در سطح زمانی قبلی قابل محاسبه می‌باشد. توجه شود که با فرض $\theta = 0, 1, 1/2$ در رابطه (4.6)، معادلات حاصل به ترتیب معادل با نتایج حاصل از گسسته سازی های تفاضلات پیشرو، کرانک - نیکلسون و تفاضلات پسرو می‌باشند.

۳.۶ گسسته سازی مکانی

در این بخش تلاش می‌شود دو رده اساسی از روش های بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه ای شعاعی برای حل مدل گسسته شده (4.6) با شرایط مرزی معادله حاکم (2.6) - (3.6) استفاده خواهد شد. این روش ها مبتنی بر هر دو فرم قوی و ضعیف معادلات حاکم بر مدل می‌باشند. در هر دو این روش ها از توابع پایه ای شعاعی به عنوان توابع پایه ای برای تقریب عملگر لاپلاسین تابع مجهول در مسئله (4.6) استفاده شده است. در ادامه این دو روش برای حل معادله حاکم فرمول بندی خواهند شد.

۱.۳.۶ روش جواب های ویژه تقریبی

در این بخش یک تکنیک عددی بدون شبکه مبتنی بر روش هم محلی جواب های ویژه تقریبی برای حل معادله (1.6) - (3.6) فرمول بندی خواهد شد. بر اساس روش MAPS عملگر لاپلاسین تابع مجهول در سطح زمانی $n + 1$ ام در فرم قوی معادله گسسته سازی شده (4.6) توسط یک ترکیب خطی از توابع پایه ای شعاعی $(\varphi(r_j))$ به صورت زیر تقریب زده خواهد شد:

$$\Delta u^{n+1} = \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(r_j), \quad (5.6)$$

به طوری که در این رابطه $\{r_j = \|x - x_j\|, x_j \in \bar{\Omega}\}$ نشان دهنده فاصله اقلیدسی بین نقطه x و نقاط مرکزی x_j می‌باشد و همچنین $\{\lambda_j^{n+1}\}_{j=1}^N$ یک مجموعه از ضرائب مجهول در سطح زمانی $n + 1$ ام می‌باشد که در ادامه محاسبه خواهند شد. در سراسر این فصل از توابع چند ربعی $\varphi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + c^2}$ به عنوان توابع پایه ای شعاعی استفاده خواهد شد. همان گونه که در فصل قبل نیز اشاره شد، چون عملگر لاپلاسین یک عملگر دو بعدی می‌باشد آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\Delta = 1/r(d/dr(r(d/dr))),$$

لذا با دو بار انتگرال گیری پیا پی از (۵.۶) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \int \frac{1}{r} \int r \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(r) \right) dr dr, \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \left(\int \frac{1}{r} \int r \varphi(r) dr dr \right), \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(r), \end{aligned} \quad (6.6)$$

به طوری که $\psi(r)$ تابع جواب ویژه تقریبی متناظر به تابع پایه ای شعاعی $\varphi(r)$ می‌باشد. بنابراین توابع جواب ویژه تقریبی متناظر به توابع چند ربعی به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\psi(r) = \frac{1}{9} (4c^2 + r^2) \sqrt{c^2 + r^2} - \frac{c^3}{3} \ln(c + \sqrt{c^2 + r^2}).$$

اکنون بر مبنای روش جواب های ویژه تقریبی با جایگذاری روابط (۵.۶) و (۶.۶) در معادله گسسته سازی شده (۴.۶) و همچنین شرایط مرزی استاندارد و غیر استاندارد (۲.۶) و (۳.۶) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) - \theta \delta t \alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) &= \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) + \delta t (1 - \theta) \alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) &, \quad k = 1, \dots, N_\Omega, \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = h_1(\mathbf{x}, t^{n+1}) &, \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma_1}, \quad (7.6) \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = K(\mathbf{x}) \mu(t^{n+1}) &, \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma_2}, \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial n}(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) = h_2(\mathbf{x}_k, t^{n+1}) &, \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma_3}, \end{aligned}$$

اکنون بنا به روش هم محلی با انتخاب $N = N_\Omega + N_{\Gamma_1} + N_{\Gamma_2} + N_{\Gamma_3}$ نقطه هم محلی $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N \in \bar{\Omega} = (\Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$ به نحوی که N_Ω و N_{Γ_i} به ترتیب نشان دهنده تعداد نقاط واقع بر درون دامنه و روی مرزهای دامنه می‌باشند و جایگذاری این مقادیر در روابط (۷.۶) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|) - \theta \delta t \alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \varphi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|) &= \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \psi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|) + \delta t(1 - \theta) \alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \varphi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|) &, \quad k = 1, \dots, N_{\Omega}, \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|) = h_1(\mathbf{x}_k, t^{n+1}) &, \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma_1}, \quad (۸.۶) \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|) = K(\mathbf{x}_k) \mu(t^{n+1}) &, \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma_2}, \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \frac{\partial \psi}{\partial n}(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|) = h_2(\mathbf{x}_k, t^{n+1}) &, \quad k = 1, \dots, N_{\Gamma_3}, \end{aligned}$$

همچنین از شرط مرزی غیر استاندارد (۳.۶) نتیجه می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \int_{\Omega} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) d\mathbf{x} = m(t^{n+1}). \quad (۹.۶)$$

به وضوح روابط (۸.۶) و (۹.۶) یک دستگاه معادلات خطی با $N + 1$ معادله و $N + 1$ ضریب مجهول $\{\lambda_j^{n+1}\}_{j=1}^N$ و $\mu(t^{n+1})$ در سطح زمانی $n + 1$ ام مشخص خواهد کرد. از روابط بالا مشاهده می‌شود که برای محاسبه ضرایب مجهول از روند بازگشته و صریح داده شده، برای شروع به یک حدس اولیه λ^* نیاز می‌باشد، این حدس اولیه را به راحتی می‌توان با درونیایی شرط آغازین معادله و به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^* \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = f(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

مسئله درونیایی ارائه شده در رابطه فوق را می‌توان به فرم ماتریس زیر بازنویسی کرد:

$$\lambda^* = \psi^{-1} \mathbf{F}, \quad (۱۰.۶)$$

به طوری که $\lambda^* = [\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*]^T$ ، $\mathbf{F} = [f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2), \dots, f(\mathbf{x}_N)]^T$ و $\psi_{ij} = \psi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|)$ یک ماتریس N در N می‌باشد. توجه شود که ماتریس ψ همواره یک ماتریس نامفرد متقارن می‌باشد [۷۱].

۲.۳.۶ روش بدون شبکه مبتنی بر فرم ضعیف بر اساس جواب های ویژه تقریبی

در این بخش یک روش بدون شبکه بر مبنای روش پتروف - گالرکین موضعی $MLPG$ برای حل معادله دیفرانسیل حاکم بر مدل فرمول بندی و استفاده خواهد شد. بر خلاف روش بدون شبکه $MAPS$ روش $MLPG$ بر مبنای فرم ضعیف معادله حاکم بر روی زیر دامنه هایی از دامنه اصلی $\bar{\Omega}$ مسئله مدل بندی خواهد شد. در این روش، فرآیند با محاسبه فرم ضعیف معادله (۴.۶) برای نقاط داخلی آغاز خواهد شد:

$$\int_{\Omega_Q^i} [u^{n+1} - \theta \delta t \alpha \Delta u^{n+1}] \nu d\mathbf{x} = \int_{\Omega_Q^i} [u^n + \delta t(1 - \theta) \alpha \Delta u^n] \nu d\mathbf{x}, \quad (11.6)$$

به طوری که ν تابع تست و Ω_Q^i بیانگر ناحیه موضعی حول i -امین نقطه مرکزی می باشد. اگر چه این زیر دامنه ها را می توان با هر شکل و اندازه هندسی دلخواه در نظر گرفت، در طول این بخش زیر دامنه های Ω_Q^i ، نواحی دایره ای کوچک به مرکز $\mathbf{x}_i$ و شعاع r_Q در نظر گرفته می شوند. به وضوح با توجه به روابط

$$\Delta u \nu = u_{,ll} \nu = (u_{,l} \nu)_{,l} - u_{,l} \nu_{,l},$$

و قضیه دیور ژانس [۱۱، ۳۰]، معادله فرم ضعیف رابطه (۱۱.۶) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_Q^i} u^{n+1} \nu d\mathbf{x} - \theta \delta t \alpha \int_{\partial \Omega_Q^i} u_{,l}^{n+1} \cdot n_l \nu ds + \theta \delta t \alpha \int_{\Omega_Q^i} u_{,l}^{n+1} \cdot \nu_{,l} d\mathbf{x} = \\ \int_{\Omega_Q^i} u^n \nu d\mathbf{x} + \delta t(1 - \theta) \alpha \int_{\partial \Omega_Q^i} u_{,l}^n \cdot n_l \nu ds - \delta t(1 - \theta) \alpha \int_{\Omega_Q^i} u_{,l}^n \cdot \nu_{,l} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (12.6)$$

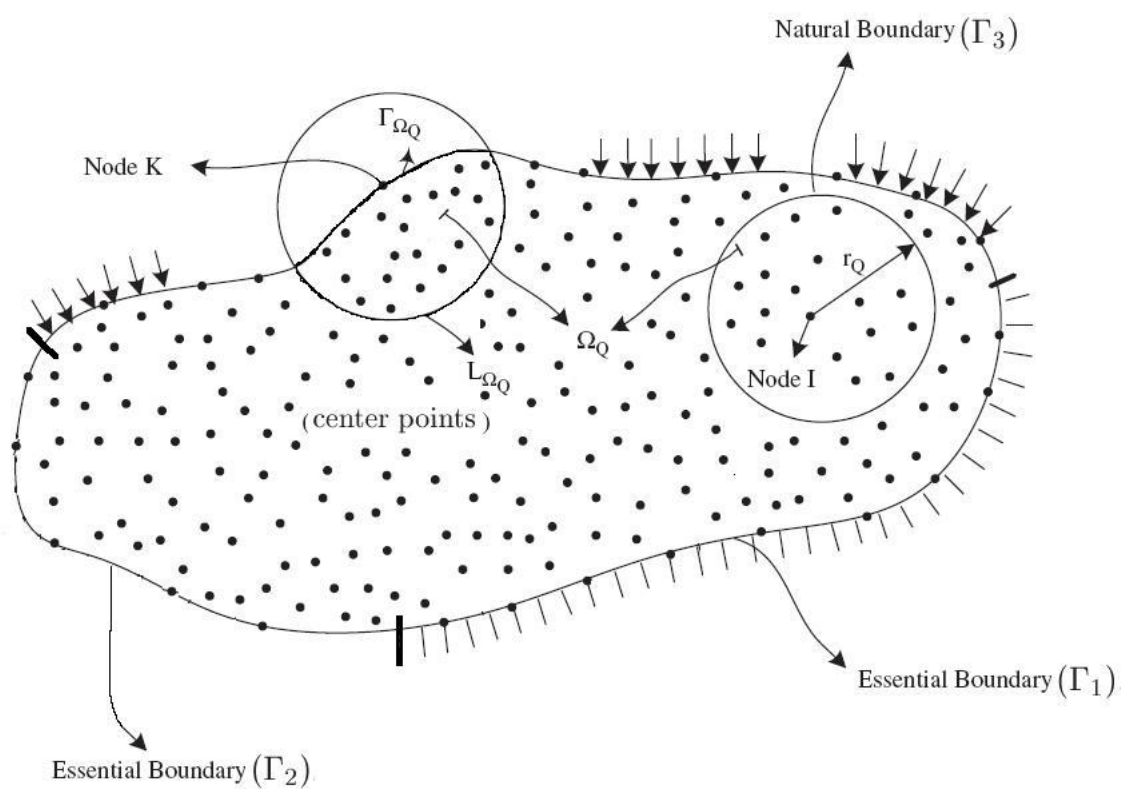
به طوری که $\partial \Omega_Q^i$ بیانگر مرز زیر دامنه Ω_Q^i بوده و همچنین Ω_Q^i ، $\partial \Omega_Q^i = (\partial() / \partial \mathbf{x}_1, \partial() / \partial \mathbf{x}_2)$ که در آن بردار نرمال یکه خارج شونده از مرز $\partial \Omega_Q^i$ می باشد. در سراسر این بخش از تابع پله ای هویساید به عنوان توابع تست در فرم ضعیف استفاده خواهد شد [۱۲، ۶۵].

$$\nu(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_Q \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_Q \end{cases}$$

به وضوح مشتقات تابع پله ای ν برابر صفر می باشد و لذا رابطه (۱۲.۶) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\int_{\Omega_Q^i} u^{n+1} d\mathbf{x} - \theta \delta t \alpha \int_{\partial \Omega_Q^i} u_{,l}^{n+1} \cdot n_l ds = \int_{\Omega_Q^i} u^n d\mathbf{x} + \delta t(1 - \theta) \alpha \int_{\partial \Omega_Q^i} u_{,l}^n \cdot n_l ds, \quad (13.6)$$

با توجه به شکل ۱.۶، مشاهده می شود که هر نقطه واقع بر مرز طبیعی Γ_3 ، مرز $\partial \Omega_Q^i$ را می توان به صورت $\Gamma_{\Omega_Q^i} \cup L_{\Omega_Q^i}$ نشان داد. بنابراین برای هر نقطه بر مرز طبیعی $\mathbf{x}_i \in \Gamma_3$ ، فرم ضعیف ارائه شده در رابطه (۱۳.۶) به صورت زیر قابل بازنویسی می باشد.



شکل ۱۰۶: ناحیه موضعی Ω_Q ، مرز ضروری (دیریکله) (Γ_1, Γ_2) و مرز طبیعی Γ_3 . نقطه I یک نقطه درونی و K یک نقطه روی مرز طبیعی می‌باشد.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_Q^i} u^{n+1} d\mathbf{x} - \theta \delta t \alpha \left(\int_{\Gamma_{\Omega_Q^i}} u_{,l}^{n+1} . n_l ds + \int_{L_{\Omega_Q^i}} u_{,l}^{n+1} . n_l ds \right) = \\ \int_{\Omega_Q^i} u^n d\mathbf{x} + \delta t (1 - \theta) \alpha \left(\int_{\Gamma_{\Omega_Q^i}} u_{,l}^n . n_l ds + \int_{L_{\Omega_Q^i}} u_{,l}^n . n_l ds \right), \end{aligned} \quad (14.6)$$

از طرفی با استفاده از شرط مرزی نیومن (۲.۶) در رابطه بالا نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_Q^i} u^{n+1} d\mathbf{x} - \theta \delta t \alpha \int_{L_{\Omega_Q^i}} u_{,l}^{n+1} . n_l ds = \\ \int_{\Omega_Q^i} u^n d\mathbf{x} + \delta t (1 - \theta) \alpha \left(\int_{\Gamma_{\Omega_Q^i}} h_{\nabla}^n ds + \int_{L_{\Omega_Q^i}} u_{,l}^n . n_l ds \right) + \theta \delta t \alpha \int_{\Gamma_{\Omega_Q^i}} h_{\nabla}^{n+1} ds. \end{aligned} \quad (15.6)$$

اکنون برای محاسبه جواب های عددی در سطح زمانی u^{n+1} و همچنین مقدار مجهول μ^{n+1} ، تابع مجهول u^{n+1} توسط یک ترکیب خطی از توابع جواب های ویژه (۶.۶) تقریب زده می‌شود. با جایگذاری رابطه (۶.۶) در فرمول ضعیف موضعی (۱۳.۶) و (۱۵.۶) به ترتیب برای نقاط واقع در درون دامنه و روی مرز طبیعی، روابط زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \left[\int_{\Omega_Q^i} \psi_j d\mathbf{x} \right] - (\theta \delta t \alpha) \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \left[\int_{\partial \Omega_Q^i} \psi_{j,l} . n_l ds \right] = \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \left[\int_{\Omega_Q^i} \psi_j d\mathbf{x} \right] + \delta t (1 - \theta) \alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \left[\int_{\partial \Omega_Q^i} \psi_{j,l} . n_l ds \right], \quad \forall \mathbf{x}_i \in \Omega, \end{aligned} \quad (16.6)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \left[\int_{\Omega_Q^i} \psi_j d\mathbf{x} \right] - \theta \delta t \alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \left[\int_{L_{\Omega_Q^i}} \psi_{j,l} . n_l ds \right] = \\ \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \left[\int_{\Omega_Q^i} \psi_j d\mathbf{x} \right] + \delta t (1 - \theta) \alpha \int_{\Gamma_{\Omega_Q^i}} h_{\nabla}^n ds + \theta \delta t \alpha \int_{\Gamma_{\Omega_Q^i}} h_{\nabla}^{n+1} ds + \\ \delta t (1 - \theta) \alpha \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \int_{L_{\Omega_Q^i}} \psi_{j,l} . n_l ds, \quad \forall \mathbf{x}_i \in \Gamma_{\nabla}. \end{aligned} \quad (17.6)$$

به وضوح مشاهده خواهد شد که شرایط مرزی دیریکله و غیر استاندارد به طور مستقیم در فرم ضعیف ظاهر نمی‌شوند، بنابراین این شرایط را باید به طور جداگانه بررسی کرد. لذا برای مرزهای ضروری $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ ، شرط مرزی دیریکله به طور مستقیم و به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi_j(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = h_1(\mathbf{x}_i, t^{n+1}), \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_1, \quad (18.6)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \psi_j(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) = k(\mathbf{x}_i) \mu^{n+1}, \quad \mathbf{x}_i \in \Gamma_2, \quad (19.6)$$

و همچنین شرط مرزی غیر استاندارد نیز به صورت زیر به کار می‌رود:

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \int_{\Omega} \psi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|) d\mathbf{x} = m(t^{n+1}). \quad (20.6)$$

دسته معادلات گسسته سازی شده (۱۶.۶) - (۲۰.۶) یک دستگاه معادلات خطی با $N + 1$ معادله و $N + 1$ ضریب مجهول $\{\lambda_j^{n+1}\}_{j=1}^N$ و $\mu(t^{n+1})$ را در سطح زمانی $n + 1$ ام مشخص می‌کند. در روش صریح ارائه شده همانند روش MAPS برای بردار آغازین λ^* از بردار داده شده در رابطه (۱۰.۶) استفاده خواهد شد.

۴.۶ نتایج عددی

در این بخش روش های عددی معرفی شده در بخش های قبلی برای حل برخی مثال ها از معادله (۱.۶) به کار گرفته خواهند شد. در هر دو روش یاد شده یک مجموعه نقاط متساوی الفاصله به طول گام های h به عنوان نقاط مرکزی و هم محلی استفاده شده اند. در روش *mlpg* نحوه تولید زیر دامنه ها که کل ناحیه اصلی را بپوشاند دارای اهمیت زیادی است. در این بخش از زیر دامنه های دایره ای با شعاع $r_Q = 0.75h$ استفاده می‌شوند که این زیر دامنه ها کل دامنه اصلی را می‌پوشانند. در فرم ضعیف از روش های عددی دو نقطه ای گاوسی برای محاسبه عددی انتگرال در روی زیر دامنه ها و همچنین از روش انتگرال گیری عددی ۸ نقطه ای گاوسی برای محاسبه انتگرال روی مرز و همچنین انتگرال های ظاهر شده در رابطه (۲۰.۶). ε_∞ و خطای نسبی ε_R زیر استفاده شده است:

$$\varepsilon_\infty = \max\{|\mu(t_j) - \tilde{\mu}(t_j)|, \quad j = 1, 2, \dots, N\},$$

$$\varepsilon_R = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (u(\mathbf{x}_j, t) - \tilde{u}(\mathbf{x}_j, t))^2}{\sum_{j=1}^N (u(\mathbf{x}_j, t))^2}},$$

به طوری که $\{u(x_j, t), \mu(t_j)\}$ و $\{\tilde{u}(x_j, t), \tilde{\mu}(t_j)\}$ به ترتیب بیانگر جواب های دقیق و تقریبی می باشند. در هر دو روش ارائه شده به علت بد شرطی ماتریس ضرائب حاصل از دستگاه های معادلات خطی (۸.۶) و (۹.۶) در حالت اول و همچنین دستگاه (۱۶.۶) - (۲۰.۶) در حالت دوم از یک روش منظم سازی تیخونوف با استفاده از توابع GCV استفاده شده است.

۱.۴.۶ مثال ۱

به عنوان اولین مثال، معادله (۱.۶) در بازه $(x, y) \in [0, 1]^2$, $t \geq 0$ و با پارامتر مدل $\alpha = 1$ به صورت زیر در نظر گرفته خواهد شد:

$$u(x, y, 0) = \exp(x + y), \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1]^2,$$

$$u(x, 1, t) = \exp(x + 1 + 2t), \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = \exp(x)\mu(t), \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x = -\exp(y + 2t), \quad y \in [0, 1], x = 0, t \geq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x = \exp(1 + y + 2t), \quad y \in [0, 1], x = 1, t \geq 0,$$

با شرایط مرزی غیر استاندارد:

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) dx dy = \exp(2t)(\exp(2) - 2\exp(1) + 1), \quad t \geq 0,$$

جواب دقیق این مدل به صورت زیر است [۳، ۵۲]:

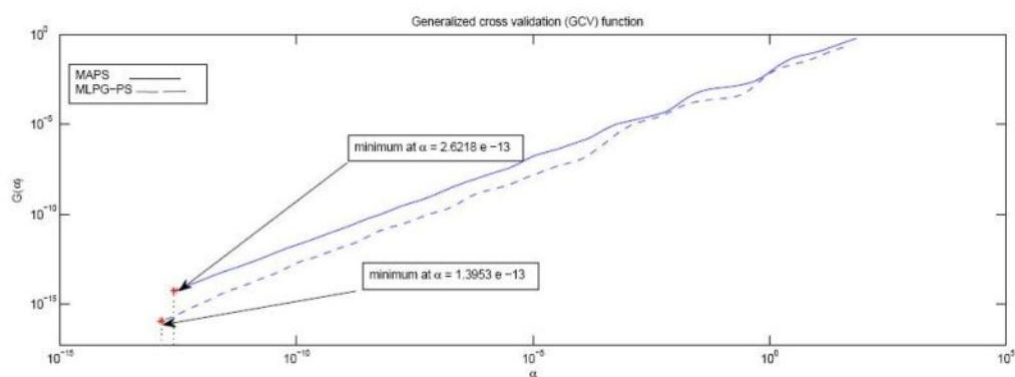
$$u(x, y, t) = \exp(x + y + 2t), \quad \mu(t) = \exp(2t).$$

در ادامه دو روش ارائه شده برای حل این مدل استفاده خواهد شد. نتایج محاسبه شده توسط روش های فوق برای حل این مدل با مفروضات $c = 0.65$, $\delta t = 10^{-3}$ و انتخاب $N = 400$ نقاط مرکزی و هم محلی در جدول ۱.۶ در سطوح زمانی متفاوت گزارش شده اند، به علاوه نتایج حاصل با نتایج گزارش شده در مقاله [۳] مقایسه شده اند که به روشنی دقت بالای روش های معرفی شده را نشان می دهد.

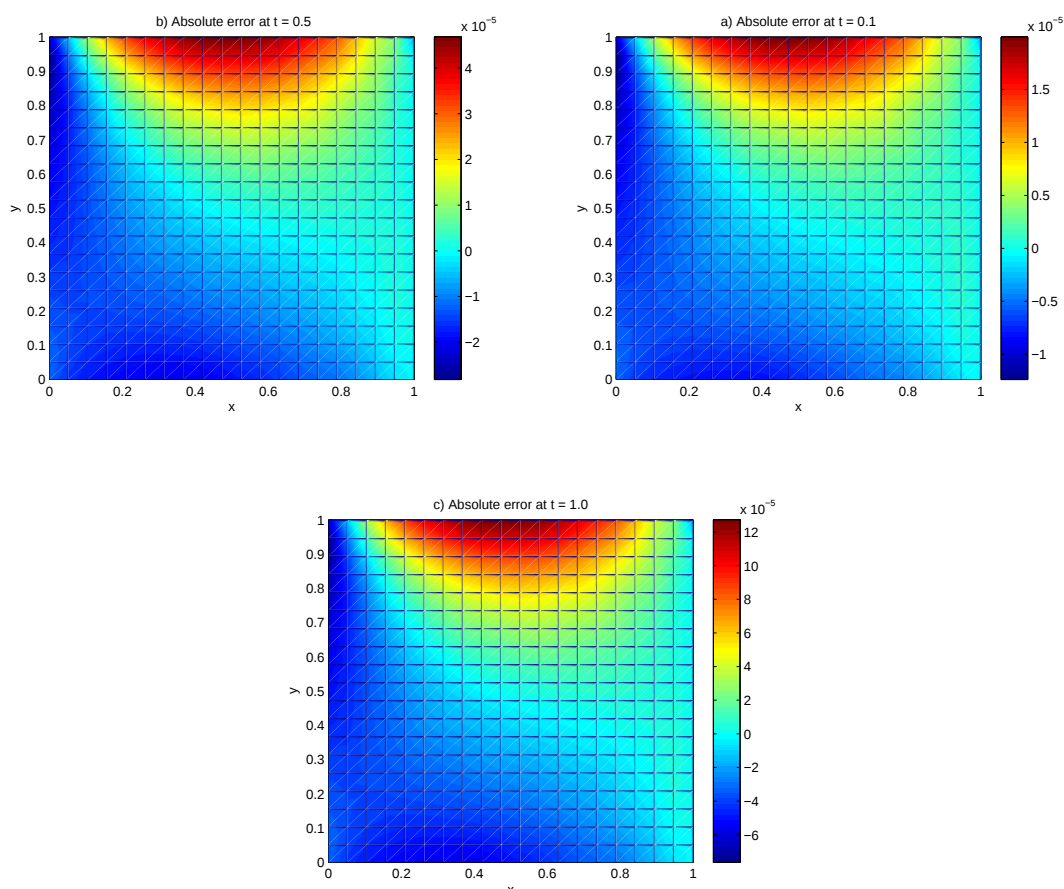
همان گونه که قبلاً اشاره شد در اجرای روش های بدون شبکه معرفی شده، برای حل دستگاه معادلات حاصل که در اغلب موارد دستگاه بد شرط می باشد از روش منظم سازی تیخونوف با ترکیب توابع GCV استفاده شده است. در شکل ۲.۶ تابع GCV به کارگرفته شده در روش منظم سازی تیخونوف برای محاسبه مقدار بهینه پارامتر منظم سازی (α) رسم شده اند. در این شکل مشاهده می شود که مقدار بهینه پارامتر منظم سازی برای روش $MLPG - PS$ و $MAPS$ به ترتیب برابر $10^{-13} \times 1/3953$ و $\alpha = 10^{-13} \times 2/6248$ می باشند.

جدول ۱.۶: مقادیر خطاهای $\varepsilon_\infty(\mu)$ و $\varepsilon_R(u)$ با فرض $\delta t = ۰/۰۰۱$, $N = ۴۰۰$ و $c = ۰/۶۵$ در مثال ۱.

t	[۳]		MAPS		MLPG-PS	
	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(\mu)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(\mu)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(\mu)$
۰/۱	$۷/۲۴۵e-۵$	$۳/۳۷۵e-۴$	$۱/۵۸۱۴e-۶$	$۴/۸۶۷e-۶$	$۱/۸۸۸۲e-۵$	$۱/۱۰۴e-۴$
۰/۲	$۶/۰۴۸e-۵$	$۲/۰۴۵e-۴$	$۱/۶۸۹۲e-۶$	$۶/۰۲۱e-۶$	$۱/۹۰۹۱e-۵$	$۱/۳۵۱e-۴$
۰/۳	$۶/۵۰۷e-۵$	$۳/۹۰۸e-۴$	$۱/۷۰۱۹e-۶$	$۷/۳۸۰e-۶$	$۱/۹۰۹۳e-۵$	$۱/۶۵۰e-۴$
۰/۴	$۶/۲۲۷e-۵$	$۳/۶۵۸e-۴$	$۱/۷۰۵۰e-۶$	$۹/۱۵۳e-۶$	$۱/۹۰۹۴e-۵$	$۲/۰۱۵e-۴$
۰/۵	$۶/۳۹۵e-۵$	$۵/۴۲۲e-۴$	$۱/۷۰۳۰e-۶$	$۱/۱۰۵e-۵$	$۱/۹۱۰۰e-۵$	$۲/۴۶۱e-۴$
۰/۶	$۶/۲۷۷e-۵$	$۵/۷۷۵e-۴$	$۱/۷۰۶۳e-۶$	$۱/۳۸۱e-۵$	$۱/۹۰۹۵e-۵$	$۳/۰۰۶e-۴$
۰/۷	$۶/۳۵۷e-۵$	$۷/۸۲۱e-۴$	$۱/۷۰۱۰e-۶$	$۱/۶۳۷e-۵$	$۱/۹۰۹۲e-۵$	$۳/۶۷۱e-۴$
۰/۸	$۶/۲۹۹e-۵$	$۸/۸۴۹e-۴$	$۱/۷۰۸۰e-۶$	$۲/۰۶۹e-۵$	$۱/۹۰۹۱e-۵$	$۴/۴۸۴e-۴$
۰/۹	$۶/۳۴۱e-۵$	$۱/۱۰۱e-۳$	$۱/۷۰۲۸e-۶$	$۲/۴۶۸e-۵$	$۱/۹۰۹۵e-۵$	$۵/۴۷۷e-۴$
۱/۰	$۶/۳۱۰e-۵$	$۱/۳۰۱e-۳$	$۱/۷۰۳۶e-۶$	$۳/۰۰۳e-۵$	$۱/۹۰۹۷e-۵$	$۶/۶۹۰e-۴$



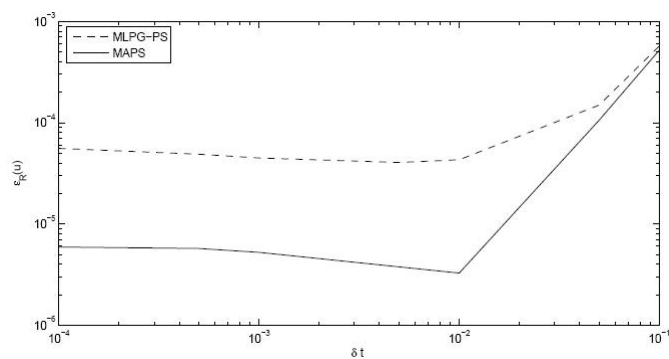
شکل ۲.۶: گراف تابع GCV در روش تیخونوف با فرض $\delta t = ۱۰^{-۳}$, $N = ۴۰۰$, $c = ۰/۶۵$ در مثال ۱.



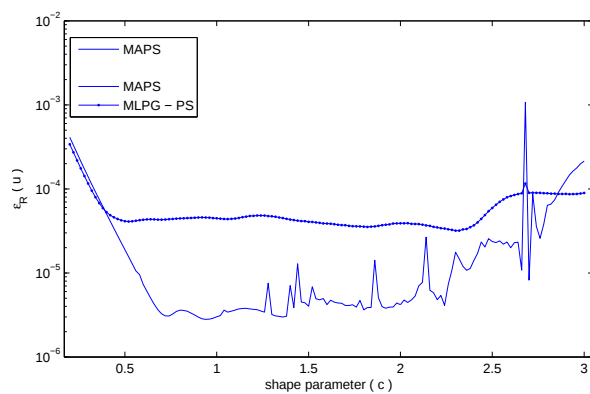
شکل ۳.۶: گراف های کانتور توابع خطا با مفروضات $\delta t = ۰/۰۰۱$, $N = ۴۰۰$ و $c = ۰/۶۵$ در برخی سطوح زمانی در مثال ۱.

به علاوه گراف های کانتور توابع خطای محاسبه شده توسط روش بدون شبکه $MAPS$ با فرض $N = ۴۰۰$ و انتخاب $c = ۰/۶۵$ در برخی سطوح زمانی در شکل ۳.۶ رسم شده اند که دقت بالا و کارایی روش را مشخص می سازند.

برای نمایش میزان وابستگی روش های ارائه شده به تغییرات طول گام زمانی δt ، نتایج محاسبه شده توسط روش های فوق با فرض $N = ۲۲۵$ و $c = ۰/۷$ در شکل ۴.۶ رسم شده اند. از نتایج رسم شده در این شکل مشاهده می شود که هر دو مثال برای طول گام زمانی مختلف پایداری خود را حفظ می کنند. از نتایج ارائه شده در این بخش از طریق جدول ها و شکل ها مشاهده می شود که هر دو روش دارای کارایی و دقت بالایی برای حل مسئله فوق می باشند هر چند که روش $MAPS$ نسبت به روش $MLPG - PS$ دارای دقت بیشتری می باشد. در نهایت در شکل ۵.۶ مقادیر خطای نسبی نتایج محاسبه شده نسبت به تغییرات پارامتر شکل c با فرض $N = ۲۲۵$ و $\delta t = ۰/۰۱$ رسم شده اند که نشان می دهد روش $MLPG - PS$ نسبت به تغییرات پارامتر شکل پایدار تر از روش $MAPS$ می باشد.



شکل ۴.۶: مقادیر خطای نسبی نسبت به تغییرات طول گام زمانی δt در مثال ۱.



شکل ۵.۶: مقادیر خطای نسبی نسبت به تغییرات پارامتر شکل c در مثال ۱.

۲.۴.۶ مثال ۲

به عنوان مثال دوم، معادله (۱.۶) در دامنه $(x, y) \in [0, 1]^2$, $t \geq 0$ با فرض $\alpha = 1$ و شرایط آغازین، مرزی

$$u(x, y, 0) = (1 + y) \exp(x), \quad (x, y) \in \Omega = [0, 1]^2,$$

$$u(x, 1, t) = 2 \exp(x + t), \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = \exp(x) \mu(t), \quad x \in [0, 1], t \geq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x = -(1 + y) \exp(t), \quad y \in [0, 1], x = 0, t \geq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x = (1 + y) \exp(1 + t), \quad y \in [0, 1], x = 1, t \geq 0,$$

و شرط مرزی غیر استاندارد

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) dx dy = \frac{2}{3} (\exp(1) - 1) \exp(t), \quad t \geq 0,$$

در نظر گرفته می‌شود. برای این مدل جواب دقیق معادله به صورت زیر می‌باشد [۵۲، ۳]:

$$u(x, y, t) = (1 + y) \exp(x + t), \quad \mu(t) = \exp(t).$$

مانند مثال قبل، روش های بدون شبکه معرفی شده در این فصل برای حل عددی این مدل به کار می‌رود. در جدول ۲.۶ نتایج حاصل از به کارگیری روش های معرفی شده برای حل این مثال گزارش شده اند. این نتایج با در نظر گرفتن $\delta t = 0.1$, $N = 900$ و $c = 0.75$ در هر دو روش ذکر شده حاصل شده اند. همچنین برای نشان دادن دقت بالا و اعتبار نتایج حاصل، نتایج به دست آمده با نتایج گزارش شده در مقاله [۳] مقایسه شده اند.

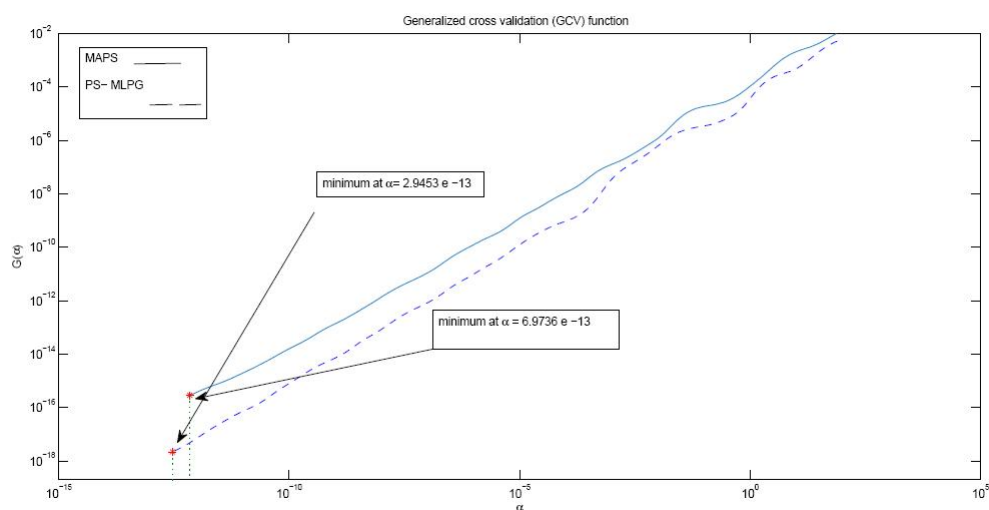
در ادامه مقادیر بهینه محاسبه شده توسط تابع GCV برای پارامتر منظم سازی مورد استفاده در روش منظم سازی تیخونوف در شکل ۶.۶ رسم شده اند. به علاوه در شکل ۷.۶ گراف کانتور های توابع خطا محاسبه شده توسط روش $MAPS$ با در نظر گرفتن $\delta t = 10^{-2}$, $N = 900$ و $c = 0.75$ در برخی سطوح زمانی رسم شده اند. در شکل ۸.۶ گراف توابع خطای محاسبه شده نسبت به تغییرات تعداد نقاط هم محلی رسم شده اند. به وضوح از این شکل نتیجه می‌شود که مقادیر خطا با افزایش تعداد نقاط هم محلی کاهش می‌یابند و به مقدار واقعی همگرا می‌شوند.

۵.۶ نتیجه گیری

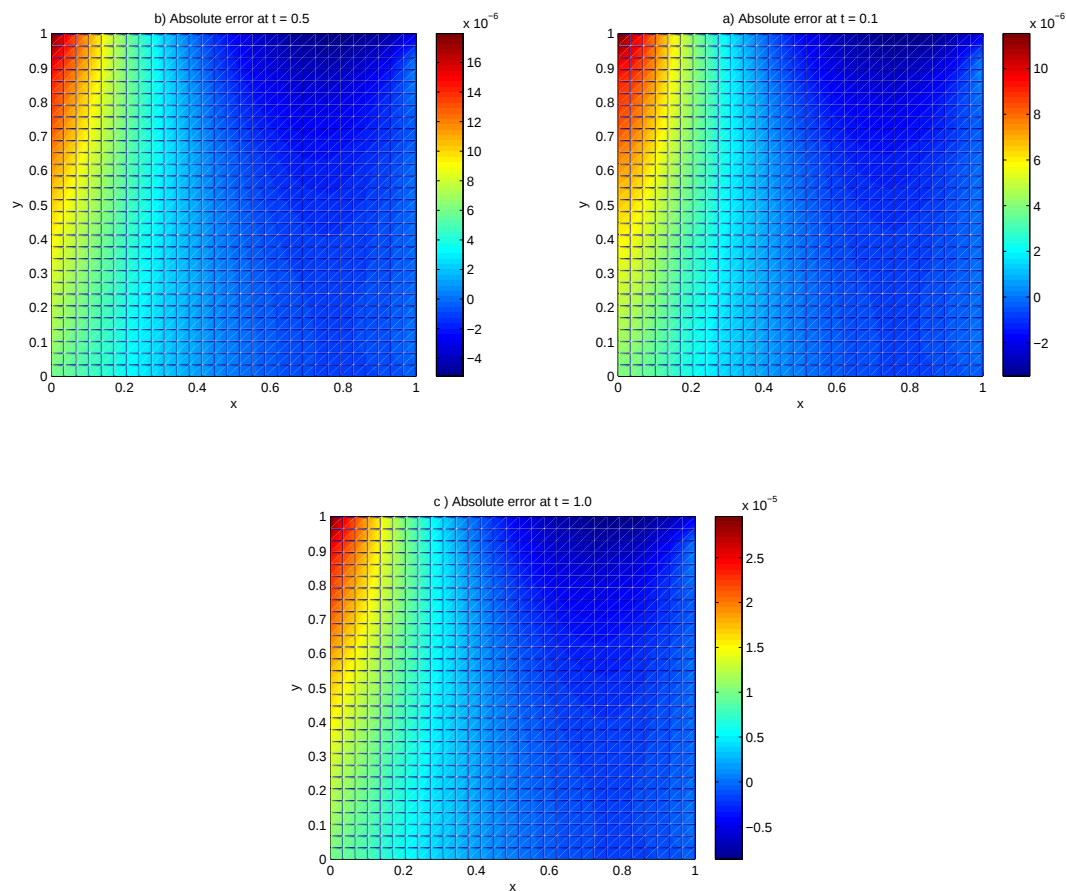
در این فصل دو رده اصلی از روش های بدون شبکه که مبتنی بر فرم قوی معادله حاکم و همچنین فرم ضعیف معادله می‌باشند معرفی و برای حل عددی مسئله دوبعدی انتشار گرما با یک شرط مرزی غیر استاندارد فرمول بندی شدند. برای افزایش پایداری روش ها از توابع جواب ویژه تقریبی به عنوان توابع پایه ای استفاده شد.

جدول ۲.۶: مقادیر خطای $\varepsilon_R(u)$ و $\varepsilon_\infty(\mu)$ با در نظر گرفتن $\delta t = 0.1$, $N = 900$ و $c = 0.75$ در مثال ۲.

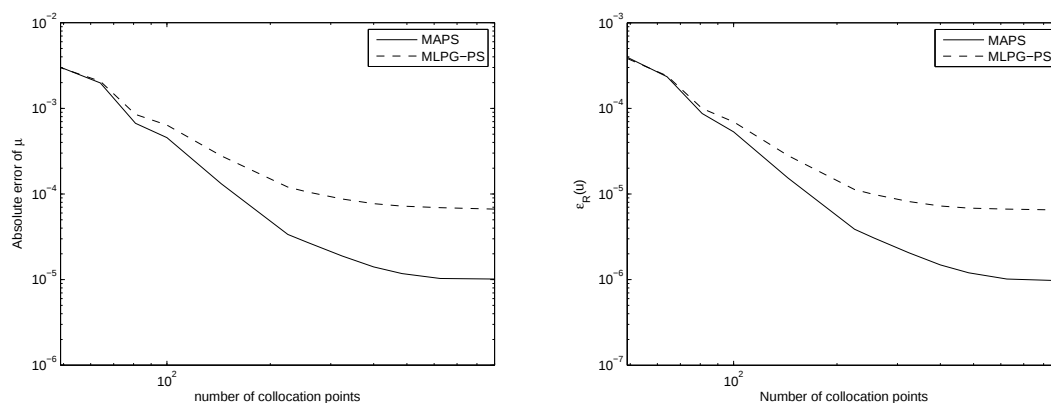
t	[۳]		MAPS		MLPG-PS.	
	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(\mu)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(\mu)$	$\varepsilon_R(u)$	$\varepsilon_\infty(\mu)$
۰/۱	$7/820e-5$	$3/186e-4$	$9/6148e-7$	$3/939e-6$	$6/3095e-6$	$2/700e-5$
۰/۲	$6/245e-5$	$1/534e-4$	$9/4651e-7$	$4/405e-6$	$6/4767e-6$	$2/994e-5$
۰/۳	$6/911e-5$	$3/148e-4$	$9/5074e-7$	$4/992e-6$	$6/4925e-6$	$3/310e-5$
۰/۴	$6/453e-5$	$2/272e-4$	$9/5216e-7$	$5/546e-6$	$6/4951e-6$	$3/658e-5$
۰/۵	$6/772e-5$	$3/579e-4$	$9/5552e-7$	$6/164e-6$	$6/4951e-6$	$4/042e-5$
۰/۶	$6/513e-5$	$2/982e-4$	$9/5732e-7$	$6/837e-6$	$6/4951e-6$	$4/468e-5$
۰/۷	$6/713e-5$	$4/197e-4$	$9/5732e-7$	$7/552e-6$	$6/4948e-6$	$4/937e-5$
۰/۸	$6/548e-5$	$3/796e-4$	$9/5650e-7$	$8/317e-6$	$6/4952e-6$	$5/457e-5$
۰/۹	$6/680e-5$	$4/987e-4$	$9/5591e-7$	$9/181e-6$	$6/4955e-6$	$6/031e-5$
۱/۰	$6/569e-5$	$4/762e-4$	$9/5524e-7$	$1/016e-5$	$6/4949e-6$	$6/665e-5$



شکل ۶.۶: مقادیر بهینه پارامتر منظم سازی محاسبه شده توسط تابع GCV با فرض $N = 900$, $c = 0.75$ در مثال ۲.



شکل ۷.۶: گراف کانتورهای توابع خطا با فرض $\delta t = ۰/۰۱$, $N = ۹۰۰$ و $c = ۰/۷۵$ در برخی سطوح زمانی در مثال ۲.و



شکل ۸.۶: نمایش تغییرات مقدار خطای نسبی نتایج حاصل نسبت به تغییرات تعداد نقاط هم محلی با فرض $\delta t = ۰/۰۱$ و $c = ۰/۷۵$ در مثال ۲.

در هر دو روش از یک روش عددی مبتنی بر تفاضلات متناهی برای گسسته سازی عبارت مشتق زمان حاضر در معادله استفاده شد. نتایج حاصل که از طریق جدول ها و شکل ها گزارش شده اند نشان می‌دهند که نتایج حاصل از به کارگیری روش $MAPS$ که مبتنی بر فرم قوی معادله حاکم می‌باشد از نتایج به دست آمده توسط روش $MLPG - PS$ که بر اساس فرم ضعیف مدل می‌باشد دقیق تر می‌باشند. هر چند که پایداری روش $MLPG - PS$ نسبت به تغییرات پارامتر شکل بسیار بیشتر از پایداری روش $MAPS$ می‌باشد. در نهایت از مقایسه نتایج حاصل از هر دو روش ذکر شده با نتایج حاصل برای این مدل توسط دیگر روش های بدون شبکه موجود، نتیجه می‌شود هر دو روش ارائه شده معادله را با دقت بالا تقریب می‌زنند.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Thin plate spline	اسپلاین صفحه نازک
Polyharmonic spline	اسپلاین های چند همسازه
Borel measure	اندازه برل
Lebesgue measure	اندازه لبگ
Shape parameter	پارامتر شکلی
Stability	پایداری
Computational complexity	پیچیدگی های محاسباتی
Fourier-Bessel transform	تبدیل بسل - فوریه
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Hankel transform	تبدیل هنکل
Trial approximation	تقریب جواب
Radial basis function	توابع پایه ای شعاعی
Node generation	تولید نقاط
Particular Solutions	جواب های ویژه
Multiquadrics	چند ربعی ها
Generalized multiquadrics	چند ربعی های تعمیم یافته
Inverse Multiquadrics	چند ربعی های معکوس
Gaussian eliminations	حذفی گاوس
Pointwise approximate relative error	خطای نسبی تقریبی نقطه ای
Interpolant	درونیاب
Partition of unity method	روش افراز یکه
Reproducing kernel particle method	روش باز تولید عناصر هسته

روش بدون شبکه پترف - گالرکین	Meshless Petrov-Galerkin Method
روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی	Meshless local boundary integral equation
method	
روش تفاضلات متناهی	Finite difference method
روش تقسیم عملگرهای تکراری	Iterative operator splitting method
روش جواب‌های ویژه تقریبی	Method of Approximate Particular Solutions
روش حجم متناهی	Finite volume method
روش درونیایی شعاعی نقاط	Radial point interpolation method
روش ذرات هیدرودینامیکی هموار	Smoothed Particle Hydrodynamic method
روش‌های طیفی	Spectral methods
روش عناصر پخش شده	Diffuse element method
روش عناصر متناهی	Finite elements method
روش عناصر مرزی	Boundary Element Method
روش کانسا	Kansa's method
روش گالرکین	Galerkin method
روش گالرکین با عناصر آزاد	Element free Galerkin method
روش منظم سازی تیخونوف	Tikhonov regularization method
روش نودهای مرزی	Boundary node method
روش هم محلی	Collocation method
شرایط لحظه ای	Moment conditions
عدد حالت	Condition number
فاصله تراکم	Fill distance
فاصله تفکیک	Separation distance
فضای های سوبولف	Sobolev spaces
فضای آزمون	Test space
فضای محلی	Native space
فضای هیلبرت	Hilbert space
قضیه گرشگورین	Gershgorin's Theorem
گوسی ها	Gaussians

Dense matrix	ماتریس پر
Compact support	محمل فشرده
Poisson's equation	معادله پواسون
Telegraph equation	معادله تلگراف
Cubic nonlinear Schrödinger (CNS) equation	معادله غیر خطی شرودینگر مکعبی
Positive definite	معین مثبت
strictly positive definite	معین مثبت اکید
Conditionally positive definite	معین مثبت مشروط
Negative definite	معین منفی
Eigen value	مقدار ویژه
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Field nodes	نقاط میدانی
Semipositive definite	نیمه معین مثبت
Kernel	هسته
Reproducing kernel	هسته بازتولید شده
Hermitian kernel	هسته هرمیتی
Unisolvant	یکتا حل کننده
Monotone	یکنوا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Borel measure	اندازه برل
Boundary Element Method	روش عناصر مرزی
Boundary node method	روش نودهای مرزی
Collocation method	روش هم محلی
Compact support	محمل فشرده
Computational complexity	پیچیدگی های محاسباتی
Condition number	عدد حالت
Conditionally positive definite	معین مثبت مشروط
Cubic nonlinear Schrödinger (CNS) equation	معادله غیر خطی شرودینگر مکعبی
Dense matrix	ماتریس پر
Diffuse element method	روش عناصر پخش شده
Eigen value	مقدار ویژه
Element free Galerkin method	روش گالرکین با عناصر آزاد
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
Field nodes	نقاط میدانی
Fill distance	فاصله تراکم
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Finite elements method	روش عناصر متناهی
Finite volume method	روش حجم متناهی
Fourier-Bessel transform	تبدیل بسل - فوریه
Galerkin method	روش گالرکین
Gaussians	گاوسی ها

Gaussian eliminations	حذفی گاوس
Generalized multiquadrics	چند ربعی های تعمیم یافته
Gershgorin's Theorem	قضیه گرشگورین
Hankel transform	تبدیل هنکل
Hermitian kernel	هسته هرمیتی
Hilbert space	فضای هیلبرت
Interpolant	درونیاب
Inverse Multiquadrics	چند ربعی های معکوس
Iterative operator splitting method	روش تقسیم عملگر های تکراری
Kansa's method	روش کانسا
Kernel	هسته
Laplace transform	تبدیل لاپلاس
Lebesgue measure	اندازه لبگ
Meshless local boundary integral equation	روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی
method	
Meshless Petrov-Galerkin Method	روش بدون شبکه پترف - گالرکین
Method of Approximate Particular Solutions	روش جواب های ویژه تقریبی
Moment conditions	شرایط لحظه ای
Monotone	یکنوا
Multiquadrics	چند ربعی ها
Native space	فضای محلی
Negative definite	معین منفی
Node generation	تولید نقاط
Particular Solutions	جواب های ویژه
Partition of unity method	روش افراز یکه
Pointwise approximate relative error	خطای نسبی تقریبی نقطه ای
Poisson's equation	معادله پواسون
Polyharmonic spline	اسپلاین های چند همسازه
Positive definite	معین مثبت

Radial basis function.....	توابع پایه‌ای شعاعی
Radial point interpolation method	روش درونیایی شعاعی نقاط
Reproducing kernel	هسته بازتولید شده
Reproducing kernel particle method	روش باز تولید عناصر هسته
Semipositive definite.....	نیمه معین مثبت
Separation distance	فاصله تفکیک
Shape parameter	پارامتر شکلی
Smoothed Particle Hydrodynamic method.....	روش ذرات هیدرودینامیکی هموار
Sobolev spaces.....	فضای های سوبولف
Spectral methods	روش های طیفی
Stability	پایداری
strictly positive definite	معین مثبت اکید
Telegraph equation	معادله تلگراف
Test space	فضای آزمون
Thin plate spline	اسپلاین صفحه نازک
Tikhonov regularization method	روش منظم سازی تیخونوف
Trial approximation	تقریب جواب
Unisolvant	یکتا حل کننده

مراجع

- [1] S. Abbasbandy, H. Roohani Ghehsareh, *A New Semi-Analytical Solution of the Telegraph Equation with Integral Condition*, Z. Naturforsch. 66a (2011) 760-768.
- [2] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, *A meshless method for two-dimensional diffusion equation with an integral condition*, Eng. Anal. Bound. Elem. 34(2010)1031-1037.
- [3] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, *MLPG method for two-dimensional diffusion equation with Neumann's and non-classical boundary conditions*, Appl. Numer. Math. 61 (2011) 170-180.
- [4] R. Abdur, A.I. Bin Md Ismail, *Numerical studies on two-dimensional Schrodinger equation by Chebyshev spectral collocation method*. U.P.B. Sci. Bull., Series A 73 (2011) 101-110.
- [5] G.P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics (3rd ed.)*, Academic Press, San Diego, 2001.
- [6] X. Antoine, C. Besse, V. Mouyset, *Numerical schemes for the simulation of the two-dimensional Schrodinger equation using nonreflecting boundary conditions*. Math Comput 73 (2004) 1779-1799.
- [7] A. Arnold, *Numerically absorbing boundary conditions for quantum evolution equations*. VLSI Des 6 (1998) 313-319.
- [8] K.E. Atkinson. *The numerical evaluation of particular solutions for Poisson's equation*. IMA J. Numer. Anal., 5 (1985) 319-338.
- [9] S.N. Atluri, *The meshless method (MLPG) for domain and BIE discretizations*, Tech Science Press, 2004.
- [10] S.N. Atluri, S. Shen, *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method*, Tech Science Press, 2002.
- [11] S.N. Atluri, T. Zhu, *A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics*, Comput. Mech. 22 (1998) 117-127.
- [12] Atluri SN, Shen S. *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple and less costly alternative to the finite element and boundary element methods*. Comput Modeling Eng Sci 2002;3:11-51.
- [13] G. Avalishvili, M. Avalishvili, D. Gordeziani, *On a nonlocal problem with integral boundary conditions for a multidimensional elliptic equation*, Applied Mathematics Letters, 24 (2011) 566-571.
- [14] J. Banasiak, J.R. Mika, *Singularly perturbed telegraph equations with applications in the random walk theory*, J. Appl. Math. Stoch. Anal. 11 (1) (1998) 9-28.
- [15] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, *Element-free Galerkin methods*, Int. J. Numer. Methods Engrg. 37 (1994) 229-256.

- [16] S. Bochner, *Monotone Funktionen, Stieltjes Integrale und harmonische Analyse*, Math. Ann. 108 (1933) 378–410.
- [17] Cannon JR, vander Hoek J. *Diffusion subject to specification of mass*. J Math Anal Appl 1986;115:517–29.
- [18] Cannon JR, Lin Y. *An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation*. J Math Anal App, 1990;145(2):470–84.
- [19] Cannon JR, Lin Y, Matheson AL. *The solution of the diffusion equation in two- space variables subject to the specification of mass*. Appl Anal J, 1993;50: 1–19.
- [20] D. E. Carlson, *Linear thermoelasticity*, in: *Encyclopedia of Physics*, Vol. 2, Springer, Berlin 1972.
- [21] C.S. Chen, C.M. Fan, and P.H. Wen. *The method of particular solutions for solving elliptic problems with variable coefficients*. Communication in Numerical Methods in Engineering, 2010.
- [22] E. W. Cheney, W. A. Light, *A Course in Approximation Theory*, Brooks/Cole (Pacific Grove, CA), 1999.
- [23] Day WA. *A decreasing property of solutions of a parabolic equation with applications to thermoelasticity and other theories*. Q Appl Math 1983;XLIV:468–75.
- [24] M. Dehghan, *Alternating direction implicit methods for two-dimensional diffusion with a non-local boundary condition*, Int. J. Comput. Math. 72 (1999) 349–366.
- [25] M. Dehghan, *Fully implicit finite differences methods for two-dimensional diffusion with a non-local boundary condition*, J. Comput. Appl. Math. 106 (1999) 255–269.
- [26] M. Dehghan, *A new ADI technique for two-dimensional parabolic equation with an integral condition*, Comput. Math. Appl. 43 (2002) 1477–1488.
- [27] M. Dehghan, *Fully explicit finite-difference methods for two-dimensional diffusion with an integral condition*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 48 (2002) 637–650.
- [28] M. Dehghan, *Numerical solution of a non-local boundary value problem with Neumann's boundary conditions*, Commun. Numer. Methods Eng. 19 (2003) 1–12.
- [29] M. Dehghan, *Finite difference procedures for solving a problem arising in modeling and design of certain optoelectronic devices*. Math. Comput. Simul. 71 (2006) 16–30.
- [30] M. Dehghan, A. Ghesmati, *Combination of meshless local weak and strong (MLWS) forms to solve the two dimensional hyperbolic telegraph equation*, Eng. Anal. Bound. Elem. 34 (2010) 324–336.
- [31] M. Dehghan, M. Lakestani, *The use of Chebyshev cardinal functions for solution of the second-order one-dimensional telegraph equation*, Numer. Methods Partial Differential Equations 25 (2009) 931–938.
- [32] M. Dehghan, D. Mirzaei, *The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the generalized two-dimensional non-linear Schrodinger equation*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 32 (2008) 747–756.
- [33] M. Dehghan, D. Mirzaei, *Numerical solution to the unsteady two-dimensional Schrodinger equation using meshless local boundary integral equation method*, Int. J. Numer. Methods Eng. 76 (2008) 501–520.

- [34] M. Dehghan, D. Mirzaei, *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity*, Appl. Numer. Math. 59 (2009) 1043-1058.
- [35] M. Dehghan, A. Taleei, *A Chebyshev pseudospectral multidomain method for the soliton solution of coupled nonlinear Schrodinger equations*. Computer Physics Communications, 182 (2011) 2519-2529.
- [36] M. Dehghan, A. Shokri, *A numerical method for two-dimensional Schrodinger equation using collocation and radial basis functions*, Computers and Mathematics with Applications 54 (2007) 136-146.
- [37] M. Dehghan, A. Shokri, *A numerical method for solving the hyperbolic telegraph equation*, Numer. Methods Partial Differential Equations 24 (2008) 1080-1093.
- [38] M. Dehghan, A. Shokri, *A meshless method for numerical solution of a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions*, Numer. Methods Partial Differential Equations 25 (2009) 494-506.
- [39] M. Dehghan, A. Mohebbi, *A high order implicit collocation method for the solution of two-dimensional linear hyperbolic equation*, Numer. Methods Partial Differential Equations 25 (2009) 232-243.
- [40] M. Delfour, M. Fortin, G. Payre, *Finite difference solution of a nonlinear Schrödinger equation*, J. Comput. Phys. 44 (1981) 277-288.
- [41] Yilmaz Dereli, *The meshless kernel-based method of lines for the numerical solution of the nonlinear Schrodinger equation*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 36 (2012) 1416-1423.
- [42] H. Ding, Y. Zhang, *A new fourth-order compact finite difference scheme for the two-dimensional second-order hyperbolic equation*, J. Comput. Appl. Math. 230 (2009) 626-632.
- [43] C.A. Duarte, J.T. Oden, *An h-p adaptive method using clouds*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 237-262.
- [44] G. Fairweather, R.D. Saylor, *The reformulation and numerical solution of certain nonclassical initial-boundary value problems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 12 (1991) 127-144.
- [45] G.E. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishers, Singapore, 2007.
- [46] G.E. Fasshauer, E. C. Gartland, and J. W. Jerome, *Algorithms Defined by Nash iteration: Some implementations via multilevel collocation and smoothing*, J. Comput. Applied Math. 119 (2000) 161-183.
- [47] G.E. Fasshauer, *Newton iteration with multiquadrics for the solution of nonlinear PDEs*, Comput. Math. Appl. 43 (2002) 423-438.
- [48] G.E. Fasshauer, *Nonsymmetric multilevel RBF collocation within an operator Newton framework for nonlinear PDEs*, in *Trends in approximation theory*, K. Kopotun, T. Lyche and M. Neamtu (eds), Vanderbilt University Press, Nashville, 2001, 103-112.
- [49] Z. Gao, S. Xie, *Fourth-order alternating direction implicit compact finite difference schemes for two-dimensional Schrodinger equations*, Applied Numerical Mathematics, 61 (2011) 593-614.
- [50] G.H. Golub, M. Heath and G. Wahba, *Generalized cross-validation as a method to choosing a good ridge parameter*, Technometrics, 21(1979)215-223.

- [51] N. Gucuyenen and G. Tanoglu, *Iterative operator splitting method for capillary formation model in tumor angiogenesis problem: Analysis and application*, Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng. 2011; 27:1740-1750.
- [52] S. Kazem, J.A. Rad, *Radial basis functions method for solving of a non-local boundary value problem with Neumann's boundary conditions*, Applied Mathematical Modelling. 36 (2012) 2360-2369.
- [53] P.C. Hansen, *Regularization tools: a Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*. Numerical Algorithms 6 (1994) 1-35.
- [54] W. Huang, C. Xu, S.T. Chu, S.K. Chaudhuri, *The finite-difference vector beam propagation method*. J Lightwave Technol 10 (1992) 295-304.
- [55] Y.C. Hon, R. Schaback, *On unsymmetric collocation by radial basis functions*, Appl. Math. Comput, 119 (2001) 177-186.
- [56] R. Jiari, S. Pandit, R.C. Mittal, *A differential quadrature algorithm to solve the two dimensional linear hyperbolic telegraph equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions*, Appl. Math. Comput. 218 (2012) 7279-7294.
- [57] P.M. Jordan, A. Puri, *Digital signal propagation in dispersive media*, J. Appl. Phys. 85(3) (1999) 1273-1282.
- [58] E.J. Kansa. *Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics - I*. Comput. Math. Applic., 19(8/9)(1990) 127-145.
- [59] E.J. Kansa, *Multiquadrics - a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics II. solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations*, Comput. Math. Appl. 19 (1990) 147-161.
- [60] C.K. Lee, X. Liu, S.C. Fan, *Local multiquadric approximation for solving boundary value problems*, Comput. Mechanics 30 (2003) 395-409.
- [61] H.A. Levine, S. Pamuk, B.D. Sleeman, M. Nilsen-Hamilton, *Mathematical model of capillary formation and development in tumor angiogenesis: penetration into the stroma*, Bulletin of Mathematical Biology 2001; 63(5):801-863.
- [62] M. Levy, *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation*, IEE Electromagnetic Waves Series 45, Padstow, England, 2000.
- [63] W.K. Liu, S. Jun, Y.F. Zhang, *Reproducing kernel particle methods*, Int. J. Numer. Methods Fluids 21 (1995) 1081-1106.
- [64] G.R. Liu, G.Y. Zhang, Y.T. Gu, Y.Y. Wang, *A meshfree radial point interpolation method (RPIM) for three-dimensional solids*, Comput Mech, 36 (2005) 421-430.
- [65] G.R. Liu, Y.T. Gu, *A LOCAL RADIAL POINT INTERPOLATION METHOD (LRPIM) FOR FREE VIBRATION ANALYSES OF 2-D SOLIDS*, Journal of Sound and vibration, 246 (2001) 29-46.
- [66] G. R. Liu, *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*, CRC press, 2003.
- [67] L.B. Lucy, *A numerical approach to the testing of fusion process*, Astron. J. 88 (1977) 1013-1024.
- [68] M.M. Mazarei and A. Aminataei, *Numerical Solution of Poisson's Equation Using a Combination of Logarithmic and Multiquadric Radial Basis Function Networks*, Journal of Applied Mathematics. dx.doi.org/10.1155/2012/286391.
- [69] C.D. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, SIAM (Philadelphia), 2007.

- [70] J.M. Melenk, I. Babuška, *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 289-314.
- [71] C.A. Micchelli, *Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions*, Constr. Approx. 2 (1986) 11-22.
- [72] D. Mirzaei, M. Dehghan, *Implementation of meshless LBIE method to the 2D non-linear SG problem*, Int. J. Numer. Methods Eng. 79 (2009) 1662-1682.
- [73] A. Mohebbi, M. Dehghan, *High order compact solution of the one-space-dimensional linear hyperbolic equation*, Numer. Methods Partial Differential Equations 24 (2008) 1222-1235.
- [74] A. Mohebbi, M. Dehghan, *The use of compact boundary value method for the solution of two-dimensional Schrodinger equation*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 225 (2009) 124-134.
- [75] Y.X. Mukherjee, S. Mukherjee, *The boundary node method for potential problems*, Int. J. Numer. Methods Eng. 40 (1997) 797-815.
- [76] F. J. Narcowich, N. Sivakumar, and J. D. Ward, *On condition numbers associated with radial-function interpolation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 186 (1994), 457-485.
- [77] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, *Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements*, Comput. Mech. 10 (1992) 307-318.
- [78] V.P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, *Meshless methods: A review and computer implementation aspects*, Math. Comput. Simul. 79 (2008) 763-813.
- [79] S. Pamuk and A. Erdem, *The method of lines for the numerical solution of a mathematical model for capillary formation: The role of endothelial cells in the capillary*, Appl. Math. and Comp, 186(2007) 831-835.
- [80] M. Renardy, W. Hrusa, and J. A. Nohel, *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, Longman Sci. Tech., Essex, England 1987.
- [81] H. Roohani Ghehsareh, B. Soltanalizadeh, S. Abbasbandy. *A matrix formulation to the wave equation with nonlocal boundary condition*, Int. J. Comput. Math. 88 (2011) 1681-1696.
- [82] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [83] A. Saadatmani and M. Dehghan, *Numerical solution of a mathematical model for capillary formation in tumor angiogenesis via the tau method*, Commun. Numer. Meth. Engng, 24 (2008), 1467-1474.
- [84] S. Sajavicius, *Optimization, conditioning and accuracy of radial basis function method for partial differential equations with nonlocal boundary conditions—A case of two-dimensional Poisson equation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37 (2013) 788-804.
- [85] B.E.A. Saleh, M.C. Teich, *Fundamentals of Fotonics*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1991.
- [86] M. Sarboland and A. Aminataei, *Taylor's Meshless Petrov-Galerkin Method for the Numerical Solution of Burger's Equation by Radial Basis Functions*, ISRN Applied Mathematics. dx.doi.org/10.5402/2012/254086.
- [87] B. Šarler, R. Vertnik, *Meshfree explicit local radial basis function collocation method for diffusion problems*, Comput. Math. Appl. 51 (2006) 1269-1282.

- [88] J. Sladek, V. Sladek, S.N. Atluri, *Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problem of elasticity with nonhomogeneous material properties*, Comput. Mech. 24 (2000) 456-462.
- [89] D. K. Salkuyeh, H. Roohani Ghehsareh, *Convergence of the Variational Iteration Method for the Telegraph Equation with Integral Conditions*, Numer. Methods Partial Differential Equations 27 (2011) 1442-1455.
- [90] R. Schaback, *Stability of radial basis function interpolants*, Approximation Theory X, C. K. Chui, L. L. Schumaker, and J. Stekler (eds.), Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2002, 433-440.
- [91] I. J. Schoenberg, *Metric spaces and completely monotone functions*, Annals of Mathematics 39 (1938) 811-841.
- [92] Siraj-ul-Islam, R. Vertnik, B. Šarler, *Local radial basis function collocation method along with explicit time stepping for hyperbolic partial differential equations*, Appl. Numer. Math. doi:10.1016/j.apnum.2011.08.009.
- [93] C. Shu, H. Ding, K.S. Yeo, *Local radial basis function-based differential quadrature method and its application to solve two-dimensional incompressible Navier–Stokes equations*, Comput. Meth. Appl. Mechanics Eng. 192 (2003) 941-954.
- [94] M. Subasi, *On the finite-difference schemes for the numerical solution of two dimensional Schrodinger equation*. Numer Methods Partial Differential Equations 18 (2002) 752-758.
- [95] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Solutions of ill-posed problems*, Winston and sons, Washington, D. C., 1977.
- [96] R. Vertnik, B. Šarler. *Meshless local radial basis function collocation method for convective–diffusive solid–liquid phase change problems*, Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow 16(5) (2006) 617-640.
- [97] G. Wahba, *Spline Models for Observational Data*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, Vol. 59, SIAM, Philadelphia, 1990.
- [98] H. Wendland, *Scattered Data Approximation*, Cambridge University Press, 2005.
- [99] V.H. Weston, S. He, *Wave splitting of the telegraph equation in R^3 and its application to inverse scattering*, Inverse Probl. 9 (1993) 789-812.
- [100] S. Xie, G. Li, S. Yi, *Compact finite difference schemes with high accuracy for one-dimensional nonlinear Schrodinger equation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 198 (2009) 1052–1060.
- [101] Y. Xu, L. Zhang, *Alternating direction implicit method for solving two-dimensional cubic nonlinear Schrodinger equation*. Computer Physics Communications, 183 (2012) 1082-1093.
- [102] G. Yao, J. Kolibal, C.S. Chen, *A localized approach for the method of approximate particular solutions*, Comput. Math. Appl. 61 (2011) 2376-2387.
- [103] G. Yao, B. Šarler, C.S. Chen, *A comparison of three explicit local meshless methods using radial basis functions*, Eng. Anal. Bound. Elem. 35 (2011) 600-609.
- [104] G. Yao, Siraj-ul-Islam, B. Šarler, *Assessment of global and local meshless methods based on collocation with radial basis functions for parabolic partial differential equations in three dimensions*, Eng. Anal. Bound. Elem. 36 (2012) 1640-1648.
- [105] T. Zhu, J.D. Zhang, S.N. Atluri, *A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach*, Comput. Mech. 21 (1998) 223-235.

- [106] Zhoujin Cui, Zuodong Yang, *Roles of weight functions to a nonlinear porous medium equation with nonlocal source and nonlocal boundary condition*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 342(2008) 559-570.

Surname: Roohani Ghehsareh

Name: Hadi

Title: A meshless method based on the radial basis functions for solving time dependent problems

Supervisor: Prof. S. Abbasbandy

Advisor: Dr. D. Rostami

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University

Faculty of Science

Department of Mathematics

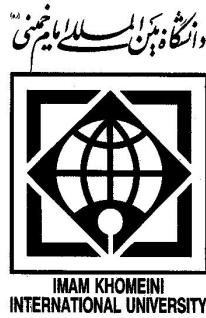
Date: September 2013

Number of pages: 123

Keywords: Partial differential equations; meshfree methods; Radial basis functions; collocation methods; Galerkin methods; particular solutions; two dimensional schrodinger equation; two dimensional hyperbolic equation; tumor diffusion model

Abstract

In this thesis some meshless methods based on the radial basis functions are used to solve some time dependent partial differential equations. The main idea of these methods is to approximate the unknown solution as a Linear combination of radial basis functions. Both main category of meshless methods which are based on the strong form (collocation methods) and weak form (galerkin methods) of the governing problem are investigated. To deal with the time derivative, two efficient approaches are presented. In the first technique the time component will be discretized with the finite difference schemes, and then the radial basis function approximation will be used to find the solution in the collocation or Galerkin forms. As another strategy to increase the appearing error in the time discretization, the time component is considered as an extra variable in the radial basis functions. In continuation, some localized meshless methods are introduced and well used to avoid ill-conditioned problems involving global radial basis function approximations. Also the method of approximate particular solutions (MAPS) in its global and weak formulations are used for solving these types of problems.



Imam Khomeini International University
Faculty of Science
Department of Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

A meshless method based on the radial basis functions for solving time dependent problems

Supervisor

Prof. S. Abbasbandy

Advisor

Dr. D. Rostami

by

Hadi Roohani Ghehsareh

September 2013