

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

رساله دکتری تخصصی رشته ریاضی کاربردی - آنالیز عددی (Ph.D)

موضوع:

بررسی جواب های دستگاه معادلات خطی فازی و کاربردهای آن

استادان راهنما:

دکتر توفیق الهویرنلو

دکتر سعید عباسبندی

استاد مشاور:

دکتر میرمظفر معصومی

نگارنده:

راهله نورایی

سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۲



Islamic Azad University
Science and Research Branch

Faculty of Science – Department of Applied Mathematics

Thesis Ph.D.

On Applied Mathematical

Subject:

On the solutions of system of fuzzy linear equations and its applications

Supervisors:

Dr. TofighAllahviranloo

Dr. Saied Abbasbandy

Advisor:

Dr. Mirmozaffar Masoumi

By:

Rahele Nuraei

Autumn 2013

سپاسگزاری

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند منان که توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را بر من عطا فرمود.

برخود وظیفه می دانم از اساتید ارجمندم پروفسور دکتر توفیق الهویرنلو و پروفسور دکتر سعید عباسبندی به پاس تمام زحماتی که در طی تدوین پایان نامه برای اینجانب کشیده اند، از صمیم قلب نهایت سپاسگزاری را نمایم. رهنمودهای ایشان همواره راهگشای مشکلات بوده و این پایان نامه حاصل راهنمایی های مستمر ایشان است و قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده شان این مجموعه به انجام نمی رسید.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر میرمظفر معصومی که در طی دوران تحصیل و نیز به عنوان استاد مشاور در تهیه این پایان نامه مرا یاری نموده اند، تشکر می نمایم.

راهنمای

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که وجودشان گرمی بخش لحظات زندگی ام است.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
چکیده.....	۱
اهداف تحقیق.....	۲

فصل اول : مقدمات فازی

۱-۱. مقدمه.....	۴
۱-۲. مجموعه ی فازی.....	۵
۱-۳. اعداد فازی.....	۱۰
۱-۴. حساب اعداد فازی براساس اصل گسترش.....	۱۵
۱-۵. حساب اعداد فازی براساس α -برش ها.....	۱۵
۱-۶. فرم $L-R$ اعداد فازی.....	۱۷
۱-۷. دستگاه خطی فازی.....	۲۰

فصل دوم : روشی مبتنی بر کمینه کردن فاصله

۲-۱. مقدمه.....	۳۰
۲-۲. متر روی اعداد فازی $L-R$	۳۰
۲-۳. دستگاه های خطی فازی $L-R$	۳۹
۲-۴. حل دستگاه های $L-R$ با ضرایب نامنفی.....	۴۱
۲-۵. حل دستگاه های $L-R$ با بعضی ضرایب منفی.....	۴۴
۲-۶. مثال کاربردی.....	۶۰

فصل سوم : روشی مبتنی بر r -برش

۳-۱. مقدمه	۶۷
۳-۲. تعاریف پایه‌ای	۶۷
۳-۳. فرآیند حذفی گاوس بازه‌ای	۷۰
۳-۴. روش پیشنهادی	۷۶
۳-۵. مثال‌های عددی	۸۳
۳-۶. مثال کاربردی	۸۹
تحقیقات آینده	۹۱
واژه نامه	۹۲
مراجع	۹۵
مقالات چاپ شده در مقطع دکتری	۹۸

چکیده

در این رساله، ابتدا دستگاه معادلات خطی فازی در فرم $L-R$ را مورد بررسی قرار داده و الگوریتم‌هایی را جهت به دست آوردن جواب‌های دقیق یا تقریبی در فرم $L-R$ یا $R-L$ ارائه می‌دهیم. برای این کار، با استفاده از متر اقلیدسی اصلاح شده روی مجموعه اعداد بازه‌ای، یک متر جدید روی زیر مجموعه‌ایی از مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی $L-R$ تعریف می‌کنیم. سپس به کمک این متر جدید سعی می‌کنیم تا جواب دستگاه معادلات خطی فازی مربوطه را طوری به دست آوریم که فاصله بین بردارهای سمت چپ و راست کمینه گردد. در این صورت هرگاه این فاصله به صفر رسید، جواب به دست آمده یک جواب دقیق است. در غیر این صورت، جواب به دست آمده یک جواب تقریبی می‌باشد. سپس توجه خود را به فرم کلی یک دستگاه خطی فازی معطوف کرده و سعی خواهیم کرد تا الگوریتم دیگری برای به دست آوردن جواب دقیق، به وسیله‌ی فرآیند حذفی گؤس بازه‌ای ارائه دهیم. در این الگوریتم ابتدا به وسیله‌ی فرآیند حذفی گؤس بازه‌ای مجموعه جواب یک دستگاه خطی فازی را به دست آورده و در نهایت با محدود کردن آن، جواب‌های دقیق را به دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: عد فازی $L-R$ ، دستگاه خطی فازی $L-R$ ، جواب جبری، جواب تقریبی، فرآیند حذفی گؤس بازه‌ای، مجموعه جواب.

اهداف مشخص تحقیق:

- (۱) تعریف یک متر جدید برای دسته ی مشخصی از اعداد فازی $L-R$.
- (۲) ارائه ی یک کاربرد از این متر در حل دستگاه های خطی فازی $L-R$.
- (۳) ارائه ی یک روش برای حل دستگاه های خطی فازی مبتنی بر r -برش ها با استفاده از فرآیند حذفی گوس بازه ای.

فصل اول

مقدمات فازی

۱-۱ مقدمه

مسائل دنیای واقعی به طور معمول ساختار پیچیده ای دارند که به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت در تعریف و درک آنها است. برای مسائلی که پیچیدگی آنها کم و عدم قطعیت نیز ناچیز است می توان با استفاده از معادلات ریاضی ماهیت و رفتار سیستم را به طور دقیق مدل سازی و تحلیل کرد. اما برای مسائلی که پیچیدگی آنها کمی بیشتر است و عدم قطعیت نیز به طور نسبی زیاد است دیگر نمی توان تحلیل دقیق و قطعی از مسأله داشت. برای چنین مسائلی رویکرد نظریه ی فازی مطرح می شود. این نظریه راهکاری است که به وسیله آن می توان سیستم هایی پیچیده را که مدلسازی آنها با استفاده از ریاضیات و روش های مدل سازی کلاسیک^۱ (غیرفازی) غیرممکن بوده و یا بسیار مشکل است، به آسانی و با انعطاف بسیار بیشتر، مدل سازی کرد. این نظریه که برای اولین بار توسط پرفسور لطفعلی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ [۲۵] مطرح گردید، توانست مقدمات مدل سازی اطلاعات نادقیق و استدلال تقریبی با معادله های ریاضی را فراهم کند که در نوع خود تحولی عظیم در ریاضیات و منطق کلاسیک (غیرفازی) است. نظریه فازی برای بیان و تشریح عدم قطعیت و عدم دقت در رویدادها به کار می رود که براساس منطق چند ارزشی بوجود آمده است. در جایی که پیچیدگی سیستم در حدی است که نمی توان با دقت و صراحت در مورد پارامترها، مشخصه ها و رفتار سیستم قضاوت کرد، مفهوم فازی جهت مدل سازی و تحلیل مطرح می شود. یک روش دیگر برای بیان عدم قطعیت با مدل ریاضی، نظریه احتمال است. در واقع، ماهیت عدم قطعیت با توجه به مساله مورد بررسی می بایست توسط تحلیل گر مشخص شود، زیرا عدم اطمینان می تواند ناشی از «شانس (تصادفی بودن)»، «ابهام»، «کمبود دانش و آگاهی» یا از «عدم دقت» باشد. بنابراین امکان دارد عدم قطعیتی که در برخی پارامترهای یک مدل وجود دارد از نوع احتمالی نباشند.

نظریه فازی به بخش های مختلفی مانند ریاضیات فازی، منطق فازی، سیستم های فازی، تصمیم گیری فازی و هوش مصنوعی و رباتیک طبقه بندی می شود. ریاضیات فازی شامل مجموعه های فازی و عملیات ریاضی مرتبط با آنها است. در مجموعه های کلاسیک (غیرفازی)، حد و مرز مجموعه به طور دقیق و قطعی تعریف می شود. در مجموعه های کلاسیک، یک عنصر یا قطعاً عضو مجموعه است یا قطعاً عضو مجموعه نیست. لذا فرض اساسی در مجموعه های کلاسیک تعریف دقیق و قطعی حد و مرز مجموعه است و عضویت عناصر در

^۱Classic

مجموعه نیز دو حالت بیشتر ندارد. یک عنصر یا عضوی از مجموعه است یا نیست. اما در عمل موارد بسیاری وجود دارد که تعریف حد و مرز دقیق و قطعی برای مجموعه امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای مجموعه افراد چاق نمی‌توان حد و مرز مشخصی تعریف کرد، زیرا به طور دقیق نمی‌توان بر چاق بودن و یا نبودن یک شخص قضاوت کرد. لذا نیاز به مجموعه‌ای داریم که محدوده آن منعطف و به طور تقریبی (نادقیق) تعریف شود. به این نوع مجموعه، مجموعه فازی گفته می‌شود. عضویت عناصر در مجموعه‌های فازی نیز با درجه عضویت که عددی بین صفر و یک است، بیان می‌شود.

در این فصل به معرفی مفاهیم و تعاریف ابتدایی ریاضیات فازی می‌پردازیم و سپس نظر خود را معطوف به دسته‌ی خاصی از مسائل فازی به نام «دستگاه‌های خطی فازی» می‌کنیم و به طرح چند نکته در این خصوص می‌پردازیم.

۲-۱ مجموعه‌ی فازی

تعریف ۱-۲-۱: [۲۶] فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد که اعضای آن در حالت کلی به صورت x نشان داده شوند. مجموعه‌ی جفت مرتب‌های

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ را مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X می‌نامیم.

در تعریف ۱-۲-۱، تابع $\mu_{\tilde{A}}$ را تابع عضویت^۲ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم که به هر $x \in X$ عددی در بازه‌ی $[0, 1]$ با نماد $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عنوان درجه‌ی تعلق یا درجه‌ی عضویت x در مجموعه‌ی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. هر چه مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نزدیکتر باشد، به معنای تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نیز هر چه مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد صفر نزدیکتر باشد، به معنای تعلق کمتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است.

همچنین واضح است که هر زیر مجموعه‌ی کلاسیک (غیر فازی) از مجموعه‌ی مرجع X ، می‌تواند به عنوان یک مجموعه‌ی فازی تلقی شود. زیرا تنها کافی است تابع عضویت را تابع مشخصه‌ی آن انتخاب کنیم.

^۲Fuzzy set
^۲Membership function

قرارداد ۱-۲-۱: مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های فازی در X را با $\mathbb{F}(X)$ نشان می‌دهیم. همچنین در سرتاسر این رساله برای نشان دادن مجموعه‌های فازی از نماد $\sim$ در بالای نام مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم، مانند $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و به همین ترتیب.

تعریف ۲-۲-۱: [۲۶] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی دلخواهی در X باشد. در این صورت تکیه گاه^۴ و هسته^۵ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به ترتیب به صورت‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\text{supp}(\tilde{A}) &= \overline{\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}, \\ \text{core}(\tilde{A}) &= \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}.\end{aligned}$$

تعریف ۳-۲-۱: [۲۶] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی دلخواهی در X باشد. در این صورت ارتفاع^۶ مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(\tilde{A}) = \sup \{\mu_{\tilde{A}}(x) : x \in X\}.$$

همچنین هرگاه $h(\tilde{A}) = 1$ ، آنگاه می‌گوییم مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال^۷ است و در غیر این صورت می‌گوییم زیرنرمال^۸ است. واضح است که اگر $0 < h(\tilde{A}) < 1$ ، آنگاه می‌توانیم با تعریف مجدد تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت $\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{h(\tilde{A})}$ آنرا تبدیل به یک مجموعه‌ی فازی نرمال نماییم.

تعریف ۴-۲-۱: [۲۶] مجموعه‌ی $\tilde{A}$ را مجموعه‌ی فازی تهی^۹ می‌نامیم، اگر برای $x \in X$ داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.$$

تعریف ۵-۲-۱: [۱۴] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه‌های فازی دلخواهی در X باشند. گوییم $\tilde{A}$ زیر مجموعه‌ی $\tilde{B}$ است و می‌نویسیم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ ، هرگاه

$$\forall x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x).$$

^۴Support

^۵Core

^۶Height

^۷Normal

^۸Subnormal

^۹Empty fuzzy set

تعریف ۱-۲-۶: [۱۴] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه‌های فازی دلخواهی در X باشند. گوییم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با هم برابرند و می‌نویسیم $\tilde{A} = \tilde{B}$ ، هرگاه $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ و $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$ یا به عبارتی دیگر

$$\forall x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$

در ادامه، برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X ، مجموعه‌های کلاسیک (غیرفازی) به نام r -برش‌ها را معرفی می‌کنیم. این مجموعه‌ها نقش بسیار مهمی را در مطالعه‌ی نظریه مجموعه‌ی فازی ایفا می‌کنند، زیرا هر مجموعه‌ی فازی دلخواه مانند $\tilde{A}$ را می‌توان به صورت یککتا توسط یک خانواده از چنین مجموعه‌هایی مشخص نمود. همچنین یک کاربرد دیگر از این مجموعه‌ها، در مطالعه‌ی حساب فازی^۱ می‌باشد که در بخش‌های بعدی به صورت مفصل شرح داده خواهد شد.

تعریف ۱-۲-۷: [۱۴] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی دلخواهی در X باشد و $r \in [0,1]$ در این صورت r -برش‌های مجموعه فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\tilde{A}]_r = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\}, \quad r \in (0,1),$$

و برای $r = 0$ نیز تعریف می‌کنیم

$$[\tilde{A}]_0 = \text{supp}(\tilde{A}) = \overline{\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}.$$

نکته ۱-۲-۱: [۱۴] فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X باشد، به راحتی می‌توان نشان داد:

(الف) اگر $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ ، آنگاه داریم $[\tilde{A}]_{r_2} \subseteq [\tilde{A}]_{r_1}$.

(ب) اگر $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله‌ی صعودی (نازولی) و همگرا به r در بازه‌ی $[0,1]$ باشد، آنگاه داریم

$$[\tilde{A}]_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} [\tilde{A}]_{r_k}.$$

در ادامه می‌خواهیم مفهوم «تحدب»^{۱۱} را برای مجموعه‌های فازی تعمیم دهیم. همانطور که بعداً مشاهده خواهیم کرد این مفهوم کاربرد مهمی در تعریف اعداد فازی و حساب فازی خواهد داشت. ابتدا تعریف «تحدب» را روی مجموعه‌های کلاسیک (غیرفازی) ارائه می‌دهیم.

^{۱۱}Fuzzy arithmetic

^{۱۲}Convexity

تعریف ۱-۲-۸: مجموعه کلاسیک (غیرفازی) A از X را محدب^{۱۲} گوئیم هرگاه برای $x_1, x_2 \in A$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم: $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$

تحدب برای مجموعه‌های فازی، براساس تحدب تمام r -برش‌های آن، که مجموعه‌هایی کلاسیک (غیرفازی) می‌باشند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۲-۹: [۲۶] فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X باشد. آنگاه $\tilde{A}$ را یک مجموعه فازی محدب می‌نامیم هرگاه برای $r \in [0, 1]$ $[\tilde{A}]_r$ مجموعه ای محدب در X باشد.

قضیه ۱-۲-۱: $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب در X است اگر و تنها اگر

$$\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1] \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}.$$

اثبات. لزوم: فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب در X باشد و $x_1, x_2 \in X$ به طوری که

$$r = \mu_{\tilde{A}}(x_1) \leq \mu_{\tilde{A}}(x_2).$$

بنابراین خواهیم داشت $x_1, x_2 \in [\tilde{A}]_r$ و نیز با توجه به تحدب $\tilde{A}$ برای $\lambda \in [0, 1]$ نتیجه خواهیم گرفت

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in [\tilde{A}]_r$$

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq r = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}.$$

کفایت: حال فرض کنید که تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ در نامساوی قضیه صدق کند. فرض می‌کنیم

$x_1 \in X$ و $r = \mu_{\tilde{A}}(x_1)$ در این صورت نتیجه می‌گیریم که $x_1 \in [\tilde{A}]_r$. همچنین واضح است که برای

$$\mu_{\tilde{A}}(x_1) = r \leq \mu_{\tilde{A}}(x_2) \quad x_2 \in [\tilde{A}]_r \text{ خواهیم داشت}$$

بنابراین با توجه به فرض، نتیجه خواهیم گرفت

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} = \mu_{\tilde{A}}(x_1) = r.$$

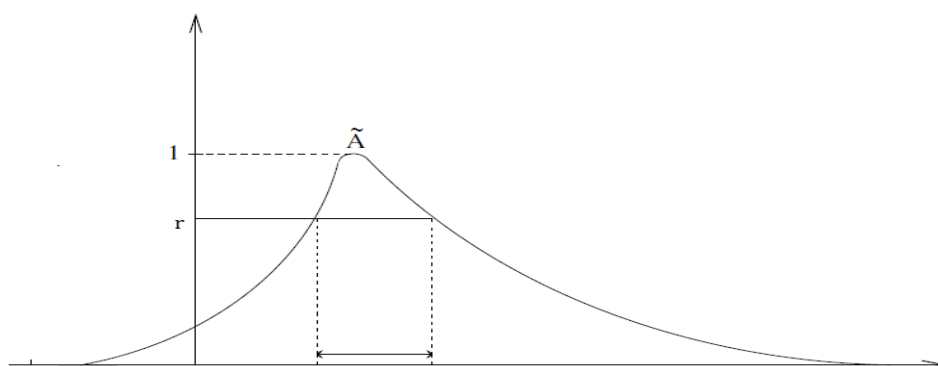
این یعنی آن که $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in [\tilde{A}]_r$ این امر محدب بودن $[\tilde{A}]_r$ را موجب می‌شود. با توجه به

دلخواه بودن x_1 و در نتیجه r ، تحدب $\tilde{A}$ را نتیجه می‌گیریم. ■

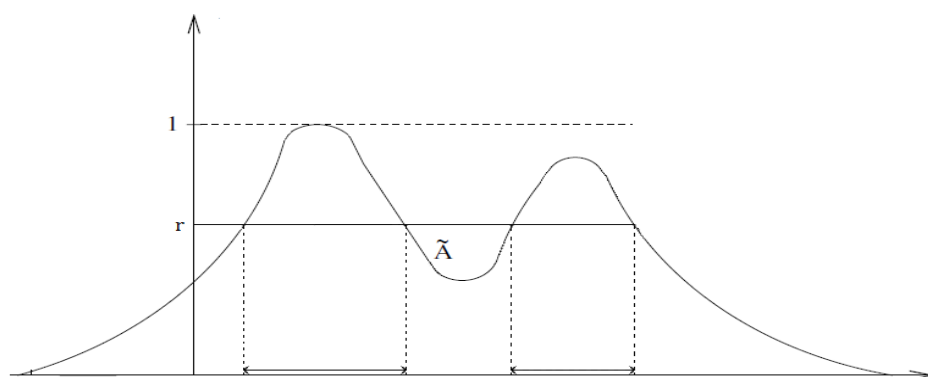
برای درک بهتر از مجموعه‌های فازی محدب و غیر محدب، در شکل‌های ۱-۲-۱ و ۲-۲-۱ به ترتیب یک

مجموعه‌ی فازی محدب و یک مجموعه‌ی فازی غیر محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را ارائه داده ایم.

^{۱۲}Convex



شکل ۱-۲-۱: یک مجموعه فازی محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$.



شکل ۲-۲-۱: یک مجموعه فازی غیرمحدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$.

یکی از اساسی ترین مفاهیم در نظریه مجموعه فازی که می تواند برای تعمیم و مفاهیم ریاضیات کلاسیک (غیرفازی) به ریاضیات فازی مورد استفاده قرار بگیرد، «اصل گسترش»^{۱۳} می باشد. این مفهوم اولین بار توسط عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار در سال ۱۹۶۵ [۲۵] ارائه شد.

تعریف ۱-۲-۱۰: [۲۶] فرض کنید X حاصل ضرب کارتزین^{۱۴} از مجموعه های مرجع $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشد، یعنی $X = \prod_{i=1}^n X_i$ و نیز $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ به ترتیب مجموعه های فازی در $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشند. همچنین فرض کنید که f نگاشتی از X به مجموعه ی مرجع Y باشد و $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در این صورت اصل گسترش به ما اجازه می دهد تا مجموعه فازی $\tilde{B}$ در Y را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) : y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X\},$$

^{۱۳}Extension principle

^{۱۴}Cartesian product

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \{\min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\}\}, & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

و f^{-1} معکوس نگاشت f می باشد.

از تعریف فوق نتیجه می گیریم که هرگاه $n = 1$ ، آنگاه اصل گسترش به صورت زیر تقلیل می یابد:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) : y = f(x), x \in X\},$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}, & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

۳-۱ اعداد فازی

تعریف ۱-۳-۱: [۱۴] مجموعه فازی $\tilde{u}$ روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوئیم هرگاه

الف) $\tilde{u}$ نرمال باشد،

ب) $\tilde{u}$ مجموعه‌ی فازی محدب باشد،

ج) $\mu_{\tilde{u}}$ نیمه پیوسته بالایی^{۱۵} باشد، (تابع حقیقی f را نیمه پیوسته بالایی می نامیم، هرگاه برای $\alpha \in \mathbb{R}$ ،

مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$ مجموعه ای باز باشد)،

د) $\text{supp}(\tilde{u})$ مجموعه ای فشرده در $\mathbb{R}$ باشد.

در این رساله، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی را با $\mathbb{E}$ نشان می دهیم. واضح است که $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{E}$ ، زیرا مجموعه‌ی

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را می توان به صورت زیر تفسیر کرد:

$$\mathbb{R} = \{\chi_{\{x\}} : x \text{ یک عدد حقیقی دلخواه باشد}\},$$

که در آن $\chi_{\{x\}}$ همان تابع مشخصه‌ی عنصر x است. با توجه به تعریف ۷-۲-۳، برای $0 < r \leq 1$ ، $-r$

برش‌های عدد فازی $\tilde{u}$ را به صورت $[\tilde{u}]_r = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{u}}(x) \geq r\}$ و همچنین برای $r = 0$ به

صورت $[\tilde{u}]_0 = \text{supp}(\tilde{u}) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{u}}(x) > 0\}}$ تعریف می کنیم. با استفاده از خاصیت‌های ج

^{۱۵}Upper semi-continuous

و د تعریف ۱-۳-۱ به راحتی می توان نتیجه گرفت که برای $r \in [0, 1]$ $[\tilde{u}]_r$ مجموعه‌هایی بسته و کراندار روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ می باشند. همچنین شرط ب ایجاب می کند که برای $r \in [0, 1]$ $[\tilde{u}]_r$ مجموعه‌هایی محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ هستند. این دو امر، به طور واضح مشخص می سازند که برای $r \in [0, 1]$ $[\tilde{u}]_r$ تشکیل بازه‌های بسته و کراندار روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ می دهند [۲۳]. در این رساله، برای $r \in [0, 1]$ برش‌های عدد فازی $\tilde{u}$ را به صورت

$$[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)],$$

نشان می دهیم.

لم زیر به این سوال پاسخ می دهد که «تحت چه شرایطی یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی در $\mathbb{R}$ تشکیل r - برش‌های یک عدد فازی را می دهد؟».

لم ۱-۳-۱: [۱۹] خانواده ای دلخواه $\{u_r : 0 \leq r \leq 1\}$ از مجموعه‌های ناتهی در $\mathbb{R}$ تشکیل r - برش‌های یک عدد فازی را می دهد، اگر و تنها اگر همه‌ی شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) برای $r \in [0, 1]$ u_r ها بازه‌هایی بسته و کراندار به صورت $u_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)]$ روی $\mathbb{R}$ باشند.

(۲) اگر $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ ، آنگاه $u_{r_2} \subseteq u_{r_1}$.

(۳) هرگاه $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله ای صعودی (غیرنزولی) و همگرا به r در بازه‌ی $[0, 1]$ باشد، آنگاه

$$[\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}(r_k), \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}(r_k)] = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)].$$

نکته ۱-۳-۱: [۷] از لم ۱-۳-۱، نتیجه می گیریم که اگر خانواده‌ی بازه‌های بسته‌ی

$$\{[\underline{u}(r), \bar{u}(r)] : 0 \leq r \leq 1\},$$

تشکیل r - برش‌های یک عدد فازی را بدهد، آنگاه:

الف) شرط ۱ ایجاب می کند که توابع $\underline{u}$ و $\bar{u}$ توابعی کراندار نسبت به r روی بازه‌ی $[0, 1]$ می باشند و

برای $r \in [0, 1]$ خواهیم داشت $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$.

ب) شرط ۲ ایجاب می کند که توابع $\underline{u}$ و $\bar{u}$ به ترتیب توابعی صعودی (نازولی) و نزولی (ناصعودی)

نسبت به r روی بازه‌ی $[0, 1]$ باشند.

ج) شرط ۳ ایجاب می کند که توابع $\underline{u}$ و $\bar{u}$ توابعی از چپ پیوسته نسبت به r روی بازه‌ی $[0, 1]$ می

باشند.

با توجه به نکته‌ی ۱-۳-۱ می‌توانیم تعریف دیگری از عدد فازی که به آن فرم پارامتری^{۱۶} عدد فازی می‌گوییم، ارائه دهیم.

تعریف ۱-۳-۲: [۱۶] یک عدد فازی $\tilde{u}$ به فرم پارامتری، یک زوج مرتب $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ ، از توابع $\underline{u}(r)$ و $\overline{u}(r)$ $0 \leq r \leq 1$ است، که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\underline{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و صعودی (غیرنزولی) باشد،

(۲) $\overline{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و نزولی (غیرصعودی) باشد،

$$\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (۳)$$

با توجه به تعاریف ۱-۲-۵ و ۱-۲-۶ می‌توان تعاریف زیر را ارائه داد.

تعریف ۱-۳-۳: فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ دو عدد فازی دلخواهی باشند. گوییم $\tilde{u}$ زیر مجموعه‌ی $\tilde{v}$ است و می‌نویسیم $\tilde{u} \subseteq \tilde{v}$ هرگاه برای $r \in [0, 1]$ داشته باشیم $[\tilde{u}]_r \subseteq [\tilde{v}]_r$.

تعریف ۱-۳-۴: دو عدد فازی دلخواه $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ با هم برابرند و می‌نویسیم $\tilde{u} = \tilde{v}$ هرگاه برای $r \in [0, 1]$ داشته باشیم $[\tilde{u}]_r = [\tilde{v}]_r$.

در بیشتر مسائل، از یک دسته اعداد فازی خاص که آنها را اعداد فازی ذوزنقه‌ای^{۱۷} می‌نامیم، استفاده می‌کنیم. این اعداد به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۱-۳-۵: عدد فازی $\tilde{u}$ را ذوزنقه‌ای می‌نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0, & d < x, \end{cases}$$

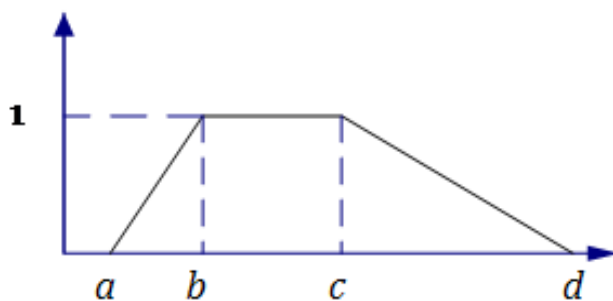
^{۱۶}Parametric form

^{۱۷}Trapezoidal

که در آن a, b, c و d اعداد حقیقی هستند. معمولاً این نوع اعداد فازی را به صورت یک چهارتایی مرتب به فرم (a, b, c, d) نشان می‌دهیم. این عدد فازی در شکل ۱-۳-۱ رسم شده است.

نکته ۱-۳-۲: با توجه به تعریف r برش یک عدد فازی، براحتی می‌توان r برش‌های عدد فازی ذوزنقه ای $\tilde{u} = (a, b, c, d)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)] = [a + (b - a)r, d - (d - c)r], \quad r \in [0, 1].$$



شکل ۱-۳-۱: نمایش یک عدد فازی ذوزنقه ای.

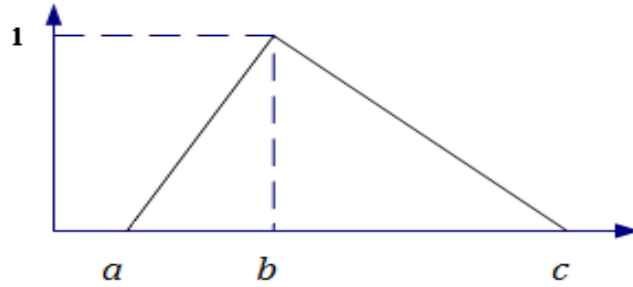
یک حالت خاص از اعداد فازی ذوزنقه ای، اعداد فازی مثلثی^{۱۸} هستند، در حقیقت هرگاه در عدد فازی ذوزنقه ای $\tilde{u} = (a, b, c, d)$ داشته باشیم $b = c$ ، آنگاه عدد فازی $\tilde{u}$ تبدیل به یک عدد فازی مثلثی می‌شود. در حالت کلی یک عدد فازی مثلثی به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱-۳-۶: عدد فازی $\tilde{u}$ را مثلثی می‌نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0. & c < x, \end{cases}$$

که در آن a, b و c اعداد حقیقی هستند. معمولاً این نوع اعداد فازی را به صورت یک سه تایی مرتب به فرم (a, b, c) نشان می‌دهیم. این عدد فازی در شکل ۲-۳-۱ رسم شده است.

^{۱۸}Triangular



شکل ۱-۳-۲: نمایش عدد فازی مثلثی.

نکته ۱-۳-۳: با توجه به تعریف r -برش یک عدد فازی، براحتی می‌توان r -برش‌های عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (a, b, c)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)] = [a + (b - a)r, c - (c - b)r], \quad r \in [0, 1].$$

در زیر، چگونگی به دست آوردن تابع عضویت یک عدد فازی از روی r -برش‌های آن را در قالب یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۱-۳-۱: فرض کنید $\tilde{A}$ عدد فازی دلخواهی باشد. در این صورت داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\}.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $\mu_{\tilde{A}}(x) = r'$ و $\sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\} = r^*$. از آنجا $\mu_{\tilde{A}}(x) = r'$ نتیجه می‌گیریم $x \in [\tilde{A}]_{r'}$ و لذا

$$r' \leq \sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\} \Rightarrow r' \leq r^*.$$

همچنین از آنجا که $\sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\} = r^*$ و $\tilde{A}$ عدد فازی است، نتیجه می‌گیریم $x \in [\tilde{A}]_{r^*}$ ، زیرا در غیر این صورت مجموعه‌ی $[\tilde{A}]_{r^*}$ تشکیل یک مجموعه باز را می‌دهد و این یک تناقض است. بنابراین

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq r^* \Rightarrow r^* \leq r'.$$

بدین ترتیب قضیه ثابت شد. ■

در ادامه می خواهیم حساب اعداد فازی را از دو دیدگاه بررسی کنیم. دیدگاه اول با استفاده از اصل گسترش می باشد که در تعریف ۱-۲-۱۰ در مورد آن توضیح داده شد. دیدگاه دوم با استفاده از مفهوم r -برش یک عدد فازی و استفاده از حساب اعداد بازه ای می باشد. همچنین در این بخش خواهیم دید که این دو دیدگاه کاملاً با هم، هم ارز بوده و نتایج کاملاً یکسانی خواهند داد.

۴-۱ حساب اعداد فازی براساس اصل گسترش

فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی دلخواهی باشند و $*$ یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد، یعنی $*$ $\in \{+, -, \times, /\}$. همچنین فرض کنید $\tilde{u} * \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از اصل گسترش، می توان تابع عضویت عدد فازی $\tilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$\mu_{\tilde{w}}(t) = \sup_{x*y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

بنابراین در حالت های جداگانه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{u}+\tilde{v}}(t) &= \sup_{x+y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u}-\tilde{v}}(t) &= \sup_{x-y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u} \times \tilde{v}}(t) &= \sup_{x \times y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u}/\tilde{v}}(t) &= \sup_{x/y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & y \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد غیرصفر دلخواه باشد، آنگاه ضرب اسکالر $\lambda \cdot \tilde{u}$ نیز یک عدد فازی است که تابع عضویت آن، براساس اصل گسترش، به صورت زیر می باشد:

$$\mu_{\lambda \cdot \tilde{u}}(t) = \sup_{\lambda \cdot x=t} \{\mu_{\tilde{u}}(x)\} = \mu_{\tilde{u}}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \quad t \in \mathbb{R}.$$

۵-۱ حساب اعداد فازی براساس r -برش ها

فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی دلخواهی باشند و $*$ یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد، یعنی $*$ $\in \{+, -, \times, /\}$. همچنین فرض کنید $\tilde{u} * \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از مفهوم r -برش ها و استفاده از حساب اعداد بازه ای، می توان برای $r \in [0, 1]$ r -برش های عدد فازی $\tilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$[\tilde{w}]_r = [\tilde{u}]_r * [\tilde{v}]_r = \{x * y : x \in [\tilde{u}]_r, y \in [\tilde{v}]_r\}.$$

بنابراین در حالت های جداگانه با استفاده از حساب اعداد بازه ای، برای $r \in [0, 1]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
[\tilde{u} + \tilde{v}]_r &= [\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \bar{u}(r) + \bar{v}(r)], \\
[\tilde{u} - \tilde{v}]_r &= [\underline{u}(r) - \bar{v}(r), \bar{u}(r) - \underline{v}(r)], \\
[\tilde{u} \times \tilde{v}]_r &= [\min\{\underline{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \underline{u}(r) \cdot \bar{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \bar{v}(r)\}, \\
&\quad \max\{\underline{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \underline{u}(r) \cdot \bar{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \bar{v}(r)\}], \\
[\tilde{u} / \tilde{v}]_r &= [\min\{\underline{u}(r) / \underline{v}(r), \underline{u}(r) / \bar{v}(r), \bar{u}(r) / \underline{v}(r), \bar{u}(r) / \bar{v}(r)\}, \\
&\quad \max\{\underline{u}(r) / \underline{v}(r), \underline{u}(r) / \bar{v}(r), \bar{u}(r) / \underline{v}(r), \bar{u}(r) / \bar{v}(r)\}].
\end{aligned}$$

همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد، آنگاه ضرب اسکالر $\lambda \cdot \tilde{u}$ نیز یک عدد فازی است که r -برش‌های آن، براساس حساب اعداد بازه‌ای، به صورت زیر می‌باشد:

$$[\lambda \cdot \tilde{u}]_r = \lambda \cdot [\tilde{u}]_r = \begin{cases} [\lambda \underline{u}(r), \lambda \bar{u}(r)], & \lambda \geq 0, \\ [\lambda \bar{u}(r), \lambda \underline{u}(r)], & \lambda < 0, \end{cases} \quad r \in [0, 1].$$

نکته ۱-۵-۱: به راحتی می‌توان نشان داد که حساب اعداد فازی مبتنی بر اصل گسترش و r -برش با یکدیگر هم ارز بوده و نتایج کاملاً یکسانی می‌دهند. در این قسمت، این هم ارزی را برای عمل جمع نشان می‌دهیم. برای سایر اعمال نیز به طور مشابه ثابت می‌شود. فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی دلخواهی باشند و $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$ با استفاده از اصل گسترش برای $t \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\mu_{\tilde{w}}(t) = \sup_{x+y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}.$$

فرض کنید که سوپریمم در موقعیت x^* و y^* رخ دهد. در این صورت نتیجه خواهیم گرفت

$$\mu_{\tilde{w}}(t) = \min\{\mu_{\tilde{u}}(x^*), \mu_{\tilde{v}}(y^*)\}, \quad x^* + y^* = t.$$

حال با استفاده از تعریف r -برش، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
[\tilde{w}]_r &= \{t : \mu_{\tilde{w}}(t) \geq r\} \\
&= \{x^* + y^* : \min\{\mu_{\tilde{u}}(x^*), \mu_{\tilde{v}}(y^*)\} \geq r\} \\
&= \{x^* + y^* : \mu_{\tilde{u}}(x^*) \geq r, \mu_{\tilde{v}}(y^*) \geq r\} \\
&= \{x^* + y^* : x^* \in [\tilde{u}]_r, y^* \in [\tilde{v}]_r\} \\
&= [\tilde{u}]_r + [\tilde{v}]_r.
\end{aligned}$$

که این همان نتیجه‌ی است که حساب اعداد فازی مبتنی بر r -برش به دست می‌دهد.

در ادامه، فرم $L-R$ اعداد فازی را معرفی می‌کنیم و به ارائه‌ی چند تعریف در این خصوص می‌پردازیم.

۱-۶ فرم $L-R$ اعداد فازی

تعریف ۱-۶-۱: [۲۴] عدد فازی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی $L-R$ می‌نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_1-x}{\alpha}\right), & x \leq a_1, \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ R\left(\frac{x-a_2}{\beta}\right), & a_2 \leq x, \end{cases}$$

به طوری که در آن $\alpha, \beta > 0$ و نیز توابع $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

(۱) توابعی نزولی از $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ به $[0, 1]$ هستند.

(۲) $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$

(۳) برای $x > 0$ داریم: $L(x), R(x) < 1$

(۴) برای $x < 1$ داریم: $L(x), R(x) > 0$

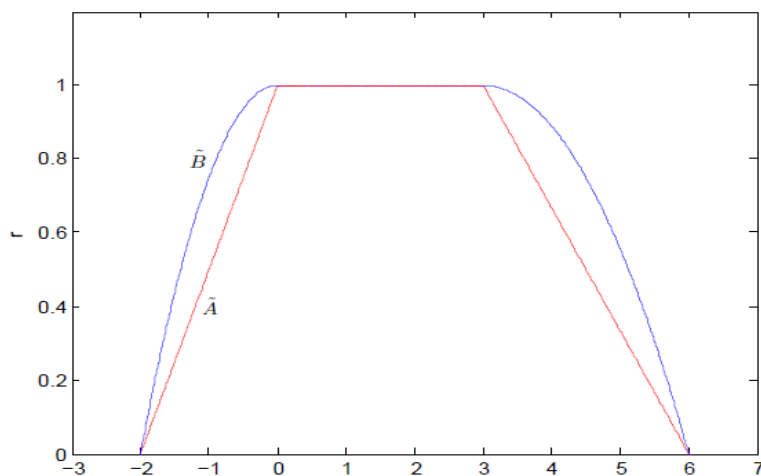
نکته ۱-۶-۱: در تعریف ۱-۶-۱، نقاط a_1 و a_2 را به ترتیب نقاط چپ و راست هسته‌ی عدد فازی $\tilde{A}$ ، α و β را به ترتیب پهناهای چپ و راست عدد فازی $\tilde{A}$ و توابع $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ را به ترتیب توابع حالت^{۱۹} چپ و راست عدد فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم. در این رساله، عدد فازی $L-R$ $\tilde{A}$ را نماد $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم.

در مثال زیر نشان می‌دهیم که ضابطه‌های توابع $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ چگونه در حالت و فرم یک عدد فازی $L-R$ تأثیرگذار هستند.

مثال ۱-۶-۱: عدد فازی $\tilde{A} = (0, 3; 2, 3)_{LR}$ با توابع حالت $L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - x\}$ و نیز عدد فازی $\tilde{B} = (0, 3; 2, 3)_{LR}$ با توابع حالت $L(x) = R(x) = \max\{0, 1 - x^2\}$ را در نظر بگیرید. این اعداد فازی در شکل ۱-۶-۱ به نمایش درآمده‌اند. همانطور که واضح است، به جزء توابع حالت، مابقی مشخصه‌های این دو عدد فازی کاملاً با هم یکسان می‌باشد. شکل ۱-۶-۱ بیان می‌دارد که چگونه با تغییر

^{۱۹}Shape

ضوابط توابع $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ ، فرم و حالت عدد فازی نیز تغییر می‌کند. به همین علت توابع $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ را توابع حالت می‌نامیم. البته باید توجه کرد که برای یک عدد فازی لزومی ندارد که تابع حالت راست با تابع حالت چپ برابر باشد.



شکل ۱-۶-۱: نمایش اعداد فازی ارائه شده در مثال ۱-۶-۱.

در تعریف زیر، تعریف ۱-۶-۱ را به مواردی تعمیم می‌دهیم که حداقل یکی از توابع حالت چپ و راست صفر می‌باشند.

تعریف ۱-۶-۲: [۱۱] تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ که در آن $a_1 \leq a_2$ و $\alpha, \beta \geq 0$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) هرگاه $\alpha = 0$ و $\beta \neq 0$ آنگاه

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ R\left(\frac{x-a_2}{\beta}\right), & a_2 \leq x, \end{cases}$$

(۲) هرگاه $\beta = 0$ و $\alpha \neq 0$ آنگاه

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_1-x}{\alpha}\right), & x \leq a_1, \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ 0, & a_2 < x, \end{cases}$$

(۳) هرگاه $\beta = 0$ و $\alpha = 0$ آنگاه

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1, \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ 0, & a_2 < x, \end{cases}$$

(۴) هرگاه $\beta \neq 0$ و $\alpha \neq 0$ آنگاه

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_1-x}{\alpha}\right), & x \leq a_1, \\ 1, & a_1 \leq x \leq a_2, \\ R\left(\frac{x-a_2}{\beta}\right), & a_2 \leq x. \end{cases}$$

نکته ۱-۶-۲: براساس تعریف ۱-۶-۲، می توان اعداد قطعی^{۲۰} و بازه های قطعی^{۲۱} را جزء اعداد فازی $L-R$ به حساب آورد.

نکته ۱-۶-۳: هرگاه ضابطه ی توابع حالت به صورت $L(x) = R(x) = \max\{0, 1-x\}$ باشد و نیز $a_1 < a_2$ ، آنگاه عدد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ یک عدد فازی دوزنقه ای می باشد. همچنین هرگاه ضابطه ی توابع حالت به صورت $L(x) = R(x) = \max\{0, 1-x\}$ باشد و نیز $a_1 = a_2$ ، آنگاه عدد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ یک عدد فازی مثلثی است.

نکته ۱-۶-۴: به طور واضح برای عدد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ داریم

$$\text{supp}(\tilde{A}) = [a_1 - \alpha, a_2 + \beta], \quad \text{core}(\tilde{A}) = [a_1, a_2],$$

همچنین هرگاه $\beta = \alpha = 0$ آنگاه $\text{supp}(\tilde{A}) = \text{core}(\tilde{A})$.

تعریف ۱-۶-۳: اعداد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2; \gamma, \eta)_{LR}$ را با هم برابر می نامیم اگر و تنها اگر $a_1 = b_1$ ، $a_2 = b_2$ ، $\alpha = \gamma$ و $\beta = \eta$.

^{۲۰}Crisp numbers

^{۲۱}Crisp intervals

نکته ۱-۶-۵: باید توجه شود که برای برابری دو عدد فازی $L-R$ لزوماً می‌بایستی توابع حالت چپ آنها و نیز توابع حالت راست آنها با هم برابر باشند. برای توضیح بیشتر، دو عدد فازی ارائه شده در مثال ۱-۶-۱ را در نظر بگیرید. به طور واضح برای این دو عدد فازی، نقاط چپ و راست هسته و نیز پهنای چپ و راست با هم برابرند، اما دو عدد فازی با هم برابر نیستند. زیرا دارای توابع حالت چپ متمایز و نیز دارای توابع حالت راست متمایز هستند.

تعریف ۱-۶-۴: برای دو عدد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2; \gamma, \eta)_{LR}$ ، جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{A} + \tilde{B} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2; \alpha + \gamma, \beta + \eta)_{LR},$$

$$\lambda \cdot \tilde{A} = \begin{cases} (\lambda a_1, \lambda a_2; \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR}, & \lambda \geq 0, \\ (\lambda a_2, \lambda a_1; -\lambda \beta, -\lambda \alpha)_{RL}, & \lambda < 0. \end{cases}$$

نکته ۱-۶-۳: به راحتی می‌توان نشان داد که جمع و ضرب اسکالر تعریف شده‌ی فوق، معادل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده براساس $\mathcal{F}$ -برش‌ها و اصل گسترش می‌باشد.

۷-۱ دستگاه خطی فازی

تعریف ۱-۷-۱: بردار $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ که در آن $\tilde{x}_i$ ها اعداد فازی هستند را یک بردار عدد فازی^{۲۲} یا به طور مختصر، یک بردار فازی می‌نامیم.

تعریف ۱-۷-۲: [۱۶] دستگاه خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11} \tilde{x}_1 + a_{12} \tilde{x}_2 + \dots + a_{1n} \tilde{x}_n = \tilde{b}_1, \\ a_{21} \tilde{x}_1 + a_{22} \tilde{x}_2 + \dots + a_{2n} \tilde{x}_n = \tilde{b}_2, \\ \vdots \\ a_{n1} \tilde{x}_1 + a_{n2} \tilde{x}_2 + \dots + a_{nn} \tilde{x}_n = \tilde{b}_n, \end{cases} \quad (۱-۷-۱)$$

^{۲۲}Fuzzy number vector

که در آن ماتریس ضرایب $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و $\tilde{b}_i$, $1 \leq i \leq n$, اعداد فازی هستند را یک دستگاه خطی فازی^{۲۳} می‌نامیم.

فرم ماتریسی دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) به صورت

$$A\tilde{x} = \tilde{b},$$

می‌باشد، که در آن $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)^T$ بردارهای فازی می‌باشند.

تعریف ۳-۷-۱: [۱۶] بردار فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را یک جواب جبری فازی دستگاه (۱-۷-۱) می‌نامیم هرگاه به طور دقیق در آن صدق کند، یا به عبارتی دیگر

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j = \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

نکته ۱-۷-۱: در این رساله قرارداد می‌کنیم که جواب جبری فازی دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) را با نماد $\tilde{x}_A = (\tilde{x}_{1A}, \tilde{x}_{2A}, \dots, \tilde{x}_{nA})^T$ نشان دهیم.

نکته ۲-۷-۱: با توجه به تعاریف ۱-۳-۴ و ۳-۷-۱ و نیز با توجه به حساب اعداد فازی مبتنی بر $\mathcal{F}$ -برش‌ها، برای آنکه نشان دهیم بردار فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ جواب جبری دستگاه (۱-۷-۱) می‌باشد، کافی است برای $r \in [0, 1]$ ثابت کنیم که:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{x}_j]_r = [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۲-۷-۱)$$

تعریف ۴-۷-۱: [۱۱] ماتریس حقیقی مقدار $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را «به طور کامل نامنفرد»^{۲۴} گوئیم هرگاه خود و ماتریس قدر مطلق آن، یعنی ماتریس $|A| = (|a_{ij}|)_{n \times n}$ ، هر دو نامنفرد باشند.

^{۲۳}Fuzzy linear system
^{۲۴}Completely nonsingular

لم زیر، نتیجه ایی از قضایای ۱ و ۳ از مرجع [۱۶] می باشد.

لم ۱-۷-۱: هرگاه دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) دارای جواب جبری فازی یکتا باشد، آنگاه ماتریس ضرایب مربوطه به طور کامل نامنفرد است.

نکته ۳-۷-۱: عکس لم فوق برقرار نمی باشد. به طور مثال، دستگاه خطی فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases}$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ توسط r -برش هایشان به صورت زیر مشخص شده اند:

$$[\tilde{b}_1]_r = [r - 12, 12 - r], \quad [\tilde{b}_2]_r = [r - 6, 6 - r].$$

در این مثال به راحتی می توان مشاهده کرد که ماتریس ضرایب A به طور کامل نامنفرد می باشد، اما با این وجود این دستگاه دارای هیچ جواب جبری نمی باشد. در واقع بردار

$$([-6 + 2r, 6 - 2r], [-r, r])^T$$

در دستگاه بازه ای فوق صدق می کند، ولی با توجه به لم ۱-۳-۱ خانواده ی بازه های بسته و کراندار $\{[-r, r] : 0 \leq r \leq 1\}$ تشکیل r -برش های یک عدد فازی را نمی دهند. زیرا شرط ۲ برقرار نمی باشد.

نکته ۴-۷-۱: در لم ۱-۷-۱ فرض «یکتایی جواب جبری» بسیار ضروری است. به این معنی که اگر جواب جبری دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) یکتا نباشد، آنگاه ماتریس ضرایب A لزوماً به طور کامل نامنفرد نمی باشد. به طور مثال دستگاه خطی فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases}$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ توسط r -برش هایشان به صورت زیر مشخص شده اند:

$$[\tilde{b}_1]_r = [3r - 11, 9 - 3r], \quad [\tilde{b}_2]_r = [3r - 10, 10 - 3r].$$

دستگاه خطی فوق دارای نامتناهی جواب جبری فازی با r -برش‌های زیر است:

$$[\tilde{x}_1]_r = [r - 2 + \delta, 3 - r - \delta], \quad [\tilde{x}_2]_r = [2r - 8 - \delta, 7 - 2r + \delta].$$

که در آن $\delta \in [-\frac{11}{2}, \frac{3}{2}]$. با این حال، در این مثال ماتریس ضرایب به طور کامل نامنفرد نمی‌باشد.

یک مدل کلی برای حل و به دست آوردن جواب جبری دستگاه خطی فازی $n \times n$ (۱-۷-۱)، اولین بار توسط فریدمن^{۲۵} و همکارانش در سال ۱۹۹۸ ارائه شد [۱۶]. در این روش، براساس فرم پارامتری اعداد فازی، دستگاه خطی فازی $n \times n$ (۱-۷-۱) را تبدیل به یک دستگاه خطی کلاسیک (غیرفازی) $2n \times 2n$ زیر می‌کنیم:

$$Sx = y, \quad (۳-۷-۱)$$

که در آن

$$x = (\underline{x}_1(r), \dots, \underline{x}_n(r), -\bar{x}_1(r), \dots, -\bar{x}_n(r))^T,$$

$$y = (\underline{b}_1(r), \dots, \underline{b}_n(r), -\bar{b}_1(r), \dots, -\bar{b}_n(r))^T,$$

و نیز درایه‌های ماتریس $S = (s_{kl})_{2n \times 2n}$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \text{if } a_{ij} \geq 0 \Rightarrow & s_{ij} = a_{ij}, & s_{i+n, j+n} = a_{ij}, \\ \text{if } a_{ij} < 0 \Rightarrow & s_{i, j+n} = -a_{ij}, & s_{i+n, j} = -a_{ij}, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

با فرض نامنفرد بودن ماتریس S و با حل معادله‌ی (۳-۷-۱) به وسیله‌ی روش‌های موجود، می‌توانیم بردار x را محاسبه کنیم. فریدمن در مقاله‌ی خود [۱۶] جواب فازی برای دستگاه فازی اولیه‌ی (۱-۷-۱) را به صورت زیر تعریف نمود.

^{۲۵}Friedman

تعریف ۱-۷-۵: [۱۶] فرض کنید $X = \{(x_i(r), -\bar{x}_i(r)) : 1 \leq i \leq n\}$ جواب یکتای دستگاه خطی کلاسیک (غیرفازی) (۱-۷-۳) باشد. بردار عدد فازی $U = \{(u_i(r), \bar{u}_i(r)) : 1 \leq i \leq n\}$ که به صورت

$$\begin{aligned} u_i(r) &= \min\{x_i(r), \bar{x}_i(r), x_i(1), \bar{x}_i(1)\}, \\ \bar{u}_i(r) &= \max\{x_i(r), \bar{x}_i(r), x_i(1), \bar{x}_i(1)\}, \end{aligned}$$

تعریف می‌شود، یک جواب فازی برای دستگاه (۱-۷-۱) می‌باشد. اگر برای $i = 1, 2, \dots, n$ $(x_i(r), \bar{x}_i(r))$ همه اعداد فازی باشند، آنگاه $u_i(r) = x_i(r)$ و $\bar{u}_i(r) = \bar{x}_i(r)$ که در این حالت U جواب فازی قوی^{۲۶} نامیده می‌شود. در غیر این صورت U را جواب فازی ضعیف^{۲۷} می‌نامیم.

نکته ۱-۷-۵: در تعریف فوق باید به این نکته دقت کرد که جواب قوی دقیقاً در دستگاه فازی (۱-۷-۱) صدق می‌کند، به این معنی که با جایگذاری آن در سمت راست، سمت چپ تساوی به دست می‌آید. اما جواب ضعیف این گونه نمی‌باشد و در دستگاه مربوطه صدق نخواهد کرد.

نکته ۱-۷-۶: نکته‌ی بسیار مهم دیگری که در تعریف ۱-۷-۵ وجود دارد این است که براساس این تعریف فریدمن ادعا کرد که بردار U تعریف شده در بالا همواره یک بردار فازی است، یعنی همواره تشکیل یک بردار با مولفه‌های عدد فازی را می‌دهد. در حالی که الهویرنلو و همکارانش [۸] در سال ۲۰۱۱ با یک مثال نقض جالب نشان داد که این ادعا همواره صحیح نمی‌باشد. او در مقاله‌ی خود مثال زیر را ارائه داد.

مثال ۱-۷-۱: دستگاه خطی فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases} \quad (۱-۷-۴)$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1 = (b_1(r), \bar{b}_1(r))$ و $\tilde{b}_2 = (b_2(r), \bar{b}_2(r))$ توسط فرم پارامتریشان به صورت زیر مشخص می‌گردند.

^{۲۶}Strong fuzzy solution

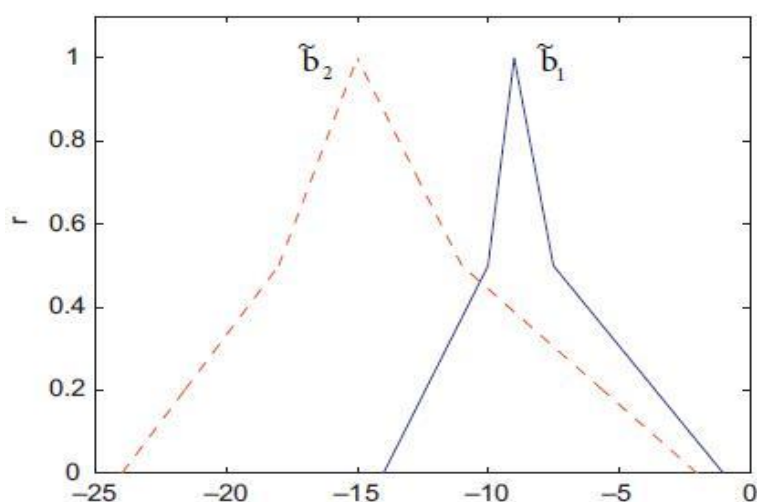
^{۲۷}Weak fuzzy solution

$$\underline{b}_1(r) = \begin{cases} 8r - 14, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2r - 11, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \quad \bar{b}_1(r) = \begin{cases} -1 - 13r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -6 - 3r, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

و

$$\underline{b}_2(r) = \begin{cases} 12r - 24, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 6r - 21, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \quad \bar{b}_2(r) = \begin{cases} -2 - 18r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -7 - 8r, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

در شکل ۱-۷-۳ اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ را رسم نموده ایم. از روی نمودار به راحتی می توان مشاهده کرد که $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ تمامی شرایط یک عدد فازی را دارا هستند.



شکل ۱-۷-۳: نمایش اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ از مثال ۱-۷-۳.

براساس روش فریدمن [۱۶]، می بایستی برای $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ دستگاه کلاسیک (غیرفازی) 4×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8r - 14 \\ 12r - 24 \\ 1 + 13r \\ 2 + 18r \end{bmatrix},$$

و برای $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ دستگاه کلاسیک (غیرفازی) 4×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r - 11 \\ 6r - 21 \\ 6 + 3r \\ 7 + 8r \end{bmatrix},$$

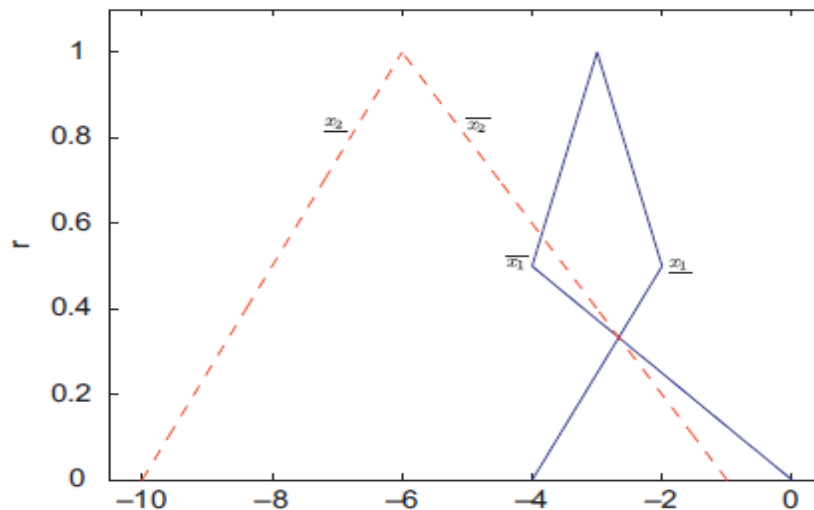
را حل نماییم. با حل دستگاه‌های خطی کلاسیک (غیرفازی) فوق به دست خواهیم آورد:

$$\underline{x}_1(r) = \begin{cases} 4r - 4, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -2r - 1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \quad \bar{x}_1(r) = \begin{cases} -8r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2r - 5, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

و

$$\underline{x}_2(r) = 4r - 10, \quad \bar{x}_2(r) = -1 - 5r.$$

به طور واضح $\tilde{x}_2 = (\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r))$ تشکیل فرم پارامتری یک عدد فازی را می‌دهد. اما $\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r))$ دارای چنین خاصیتی نیست. زیرا برای $r > \frac{1}{2}$ داریم $\bar{x}_1(r) < \underline{x}_1(r)$ و همچنین توابع $\underline{x}_1(r)$ و $\bar{x}_1(r)$ روی بازه‌ی $[\frac{1}{2}, 1]$ به ترتیب توابعی نزولی (غیرصعودی) و صعودی (غیرنزولی) می‌باشند. این دلایل موجب می‌شوند تا $\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r))$ تشکیل فرم پارامتری یک عدد فازی را ندهند. این موضوع در شکل ۱-۷-۱ به نمایش در آمده است.



شکل ۱-۷-۱: نمایش عدد فازی $\tilde{x}_2$ و عدد غیرفازی $\tilde{x}_1$

حال با توجه به تعریف ۵-۷-۱ بردار عدد فازی $U = \{(\underline{u}_i(r), \bar{u}_i(r)) : 1 \leq i \leq 2\}$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم که به عنوان یک جواب فازی ضعیف برای دستگاه خطی فازی (۴-۷-۱) می‌تواند تلقی شود.

$$\underline{u}_1(r) = \min\{\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \bar{x}_1(1)\} = \begin{cases} 4r - 4, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{4}, \\ -3, & \text{if } \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{3}{8}, \\ -8r, & \text{if } \frac{3}{8} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2r - 5, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

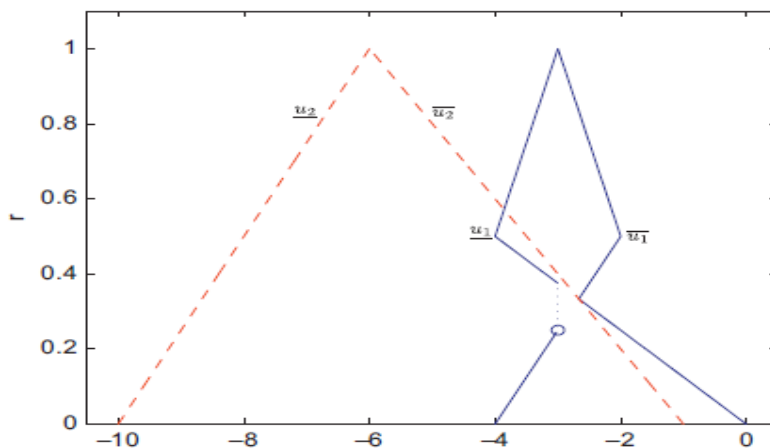
$$\bar{u}_1(r) = \max\{\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \bar{x}_1(1)\} = \begin{cases} -8r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 4r - 4, & \text{if } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -2r - 1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

و

$$\underline{u}_2(r) = \min\{\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \bar{x}_2(1)\} = \underline{x}_2(r) = 4r - 10,$$

$$\bar{u}_2(r) = \max\{\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \bar{x}_2(1)\} = \bar{u}_2(r) = -1 - 5r.$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\tilde{u}_2 = (\underline{u}_2(r), \bar{u}_2(r))$ در شرایط فرم پارامتری یک عدد فازی صدق می‌کند و بنابراین یک عدد فازی است. اما $\tilde{u}_1 = (\underline{u}_1(r), \bar{u}_1(r))$ چنین نمی‌باشد. در واقع، واضح است که تابع $\underline{u}_1(r)$ در بازه‌ی $[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}]$ نزولی (غیرصعودی) است و نیز تابع $\bar{u}_1(r)$ در بازه‌ی $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ صعودی (غیرنزولی) است. این شرایط ایجاب می‌کنند که $\tilde{u}_1 = (\underline{u}_1(r), \bar{u}_1(r))$ یک عدد فازی نباشد. این حقیقت را می‌توان از شکل ۲-۷-۱ به راحتی مشاهده کرد. بنابراین در این مثال نشان داده ایم که جواب فازی ضعیف تعریف شده توسط فریدمن در [۲۴] لزوماً یک بردار عدد فازی مقدار نیست.



شکل ۱-۷-۲: نمایش عدد فازی $\tilde{u}_2$ و عدد غیرفازی $\tilde{u}_1$.

براساس روش فریدمن، بسیاری از محققان روش‌های عددی مختلفی را برای حل دستگاه‌های خطی فازی مطرح کردند [۲, ۵, ۶, ۱۲, ۱۳]. در سال ۲۰۱۱، عزتی [۱۵] روش جدیدی را بر اساس روش نشانیدن [۲۳] برای حل دستگاه‌های خطی فازی ارائه داد که در آن یک دستگاه خطی فازی $n \times n$ تبدیل به دو دستگاه خطی کلاسیک (غیرفازی) $n \times n$ می‌شود. در همان سال، الهویرنلو و همکارش [۱۰] یک روش ساده و عملی را جهت به دست آوردن جواب‌های فازی متقارن برای دستگاه‌های خطی فازی مبتنی بر حل دستگاه در ۱-برش مطرح ساخت. همچنین او و همکارانش در سال ۲۰۱۲، جواب‌های دقیق فازی و نیز نزدیکترین جواب‌های متقارن فازی را به وسیله‌ی ارائه‌ی یک متر جدید به دست آورد [۹, ۱۰]. اخیراً نیز یک روش جدید براساس محدود کردن مجموعه جواب یک دستگاه خطی فازی برای به دست آوردن جواب جبری در [۲۱] مطرح شده است. روش‌های زیادی جهت به دست آوردن جواب جبری یک دستگاه خطی فازی وجود دارد که بعضی از آنها در [۱, ۳, ۴] یافت می‌شوند.

فصل دوم

روشی مبتنی بر کمینه کردن

فاصله

۲-۱ مقدمه

در این فصل، هدف به دست آوردن جواب‌های دقیق یا تقریبی یک دستگاه خطی فاز $L-R$ به وسیله‌ی کمینه کردن فاصله‌ی بین بردارهای سمت راست و سمت چپ این دستگاه می‌باشد. برای این کار ابتدا یک متر جدید روی مجموعه‌ی اعداد فاز $L-R$ که تمامی توابع حالت چپ آنها یکسان و نیز تمامی توابع حالت راست آنها یکسان است را تعریف می‌کنیم. سپس به بررسی ویژگی‌های این متر جدید می‌پردازیم. در نهایت با به کارگیری این متر روی دستگاه خطی فاز $L-R$ ، الگوریتم‌هایی را برای به دست آوردن جواب دقیق یا تقریبی یک دستگاه خطی فاز $L-R$ ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که تمام مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۱۱] است.

۲-۲ متر روی اعداد فاز $L-R$

در این بخش، ابتدا متر اقلیدسی اصلاح شده روی اعداد بازه‌ای را معرفی می‌کنیم، سپس به کمک آن یک متر جدید روی زیرمجموعه‌ای از اعداد فاز $L-R$ ارائه می‌دهیم.

تعریف ۲-۲-۱: فاصله ی اقلیدسی^{۲۸} بین اعداد بازه ای $A = [a_1, a_2]$ و $B = [b_1, b_2]$ برابر است با

$$d_E(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

قضیه ۲-۲-۱: تابع فاصله ی $d_E(\cdot, \cdot)$ ارائه شده در تعریف ۲-۲-۱، یک متر روی مجموعه ی همه ی اعداد بازه ای می باشد.

اثبات. واضح است که هر عدد بازه ای مانند $A = [a_1, a_2]$ را می توان با یک نقطه در فضای $\mathbb{R}^2$ متناظر کرد. به عبارتی دیگر، هرگاه مجموعه ی همه ی اعداد بازه ای را با $\mathbb{IR}$ نمایش دهیم، می توان یک یکریختی بین مجموعه ی $\mathbb{IR}$ و یک زیر مجموعه از فضای $\mathbb{R}^2$ برقرار کرد. یعنی می توان نوشت:

$$\mathbb{IR} \cong \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq a_2\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

از طرفی می دانیم که تابع فاصله ی $d_E(\cdot, \cdot)$ ارائه شده در تعریف ۲-۲-۱، یک متر روی فضای $\mathbb{R}^2$ می باشد. بنابراین به راحتی می توان نتیجه گرفت که این تابع روی مجموعه ی همه ی اعداد بازه ای نیز در خاصیت های یک متر صدق می کند. ■

نکته ۲-۲-۱: واضح است که با توجه به تعریف ۲-۲-۱، تابع متر $d_E(\cdot, \cdot)$ تعریف شده روی اعداد بازه ای، متر معمولی (متر قدرمطلق) روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را حفظ نمی کند. به این معنی که اگر برای اعداد بازه ای $A = [a_1, a_2]$ و $B = [b_1, b_2]$ داشته باشیم $a_1 = a_2 = a$ و $b_1 = b_2 = b$ ، یعنی هرگاه اعداد A و B اعداد حقیقی مقدار باشند، آنگاه نتیجه خواهیم گرفت: $d_E(A, B) \neq |a - b|$. این یعنی آن که متر اقلیدسی تعریف شده روی اعداد بازه ای، متر معمولی روی خط $\mathbb{R}$ را حفظ نمی کند. برای برطرف کردن این نقیصه، متر اقلیدسی اصلاح شده روی اعداد بازه ای را به صورت زیر معرفی می کنیم.

^{۲۸}Euclidean distance

تعریف ۲-۲-۲: [۱۱] فاصله‌ی اقلیدسی اصلاح شده^{۲۹} بین اعداد بازه‌ای $A = [a_1, a_2]$ و $B = [b_1, b_2]$ برابر است با

$$d_{ME}(A, B) = \sqrt{\frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{2}},$$

یا به عبارتی دیگر

$$d_{ME}^2(A, B) = \frac{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{2}. \quad (۲-۲-۱)$$

قضیه ۲-۲-۲: تابع فاصله‌ی $d_{ME}(\cdot, \cdot)$ ارائه شده در تعریف ۲-۲-۲، یک متر روی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بازه‌ی می‌باشد.

اثبات. با توجه به تعاریف ۲-۲-۱ و ۲-۲-۲، برای اعداد بازه‌ی دلخواه $A = [a_1, a_2]$ و $B = [b_1, b_2]$ داریم: $d_{ME}(A, B) = \frac{\sqrt{2}}{2} d_E(A, B)$. لذا با توجه به قضیه‌ی ۲-۲-۱ نتیجه می‌گیریم که تابع فاصله‌ی $d_{ME}(\cdot, \cdot)$ نیز یک متر روی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بازه‌ی می‌باشد. ■

نکته ۲-۲-۲: با توجه به تعریف ۲-۲-۲، به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که متر اقلیدسی اصلاح شده‌ی $d_{ME}(\cdot, \cdot)$ تعریف شده روی اعداد بازه‌ای، متر معمولی (متر قدرمطلق) روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را حفظ می‌کند. به این معنی که اگر برای اعداد بازه‌ای $A = [a_1, a_2]$ و $B = [b_1, b_2]$ داشته باشیم $a_1 = a_2 = a$ و $b_1 = b_2 = b$ ، یعنی هرگاه اعداد A و B اعداد حقیقی مقدار باشند، آنگاه نتیجه خواهیم گرفت: $d_{ME}(A, B) = |a - b|$. این یعنی آن که متر اقلیدسی اصلاح شده روی اعداد بازه‌ای، متر معمولی روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را حفظ می‌کند. به همین علت به متر $d_{ME}(\cdot, \cdot)$ «متر اصلاح شده» می‌گوییم.

^{۲۹}Modified Euclidean distance

در ادامه قصد آن را داریم تا با استفاده از متر اقلیدسی اصلاح شده روی اعداد بازه‌ای، یک متر روی مجموعه‌ی اعداد فازی $L-R$ با توابع حالت چپ یکسان و توابع حالت راست یکسان تعریف کنیم.

تعریف ۲-۲-۳: [۱۱] اعداد فازی $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2; \gamma, \eta)_{LR}$ که توابع حالت چپ آنها یکسان و توابع حالت راست آنها نیز یکسان است را در نظر بگیرید. فاصله بین $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\frac{d_{ME}^2(S(\tilde{A}), S(\tilde{B})) + d_{ME}^2(C(\tilde{A}), C(\tilde{B}))}{2}}, \quad (2-2-2)$$

و یا به عبارتی دیگر

$$d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{d_{ME}^2(S(\tilde{A}), S(\tilde{B})) + d_{ME}^2(C(\tilde{A}), C(\tilde{B}))}{2}. \quad (2-2-3)$$

نکته ۲-۲-۳: از معادلات (۲-۲-۱) و (۲-۲-۳) نتیجه می‌گیریم:

$$d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{((a_1 - b_1) - (\alpha - \gamma))^2 + ((a_2 - b_2) + (\beta - \eta))^2 + (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4}.$$

نکته ۲-۲-۴: با توجه به اینکه در بیشتر مسائلی که با آنها مواجه می‌شویم، تمامی اعداد فازی مورد محاسبه را از یک نوع در نظر می‌گیریم، لذا این فرض که حتماً می‌بایستی تمامی توابع حالت چپ یکسان و تمامی توابع حالت راست یکسان باشند، چیز زیادی از کلیت مطلب نمی‌کاهد.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که تابع فاصله‌ی تعریف شده در معادله‌ی (۲-۲-۲)، در خاصیت‌های یک متر صدق می‌کند. در این رابطه، ابتدا به ارائه‌ی دو لم می‌پردازیم و سپس قضیه‌ی مربوطه را ثابت می‌کنیم.

لم ۲-۲-۱: هرگاه $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ، آنگاه داریم

$$(ab + cd) \leq \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2}.$$

اثبات. با توجه به این که

$$(a^2 + c^2) \cdot (b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = a^2 d^2 + c^2 b^2 - 2abcd = (ad - cb)^2 \geq 0,$$

اثبات بدیهی است. ■

لم ۲-۲-۲: هرگاه $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ، آنگاه داریم

$$(a + b)^2 + (c + d)^2 \leq (\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2})^2.$$

اثبات. با توجه به این که

$$(\sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + d^2})^2 - (a + b)^2 - (c + d)^2 = 2(\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{b^2 + d^2} - (ab + cd)),$$

و نیز با توجه به لم ۲-۲-۱، اثبات بدیهی است. ■

قضیه ۲-۲-۳: تابع فاصله‌ی d تعریف شده در معادله‌ی (۲-۲-۲)، یک متر روی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی

$L-R$ با توابع حالت چپ یکسان و توابع حالت راست یکسان است.

اثبات. با توجه به این که براساس قضیه‌ی ۲-۲-۲، تابع d_{ME} یک متر روی مجموعه‌ی اعداد بازه‌ای می‌باشد،

به راحتی می‌توان بررسی کرد که تابع d تعریف شده در معادله‌ی (۲-۲-۲)، در خواص زیر صدق می‌کند:

- 1) $d(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0$,
- 2) $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{A} = \tilde{B}$,
- 3) $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d(\tilde{B}, \tilde{A})$.

توجه کنید که چون تمام توابع حالت چپ یکسان و نیز تمام توابع حالت راست یکسان است، لذا خاصیت دوم بالا را می توان نتیجه گرفت. حال تنها کافی است نشان دهیم که تابع d در خاصیت نامساوی مثلثی صدق می کند. به این منظور، با توجه به قضیه ۲-۲-۲ و لم ۲-۲-۲، برای سه عدد فازی $\tilde{A}, \tilde{B}$ و $\tilde{C}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d^2(\tilde{A}, \tilde{C}) &= \frac{d_{ME}^2(S(\tilde{A}), S(\tilde{C}))}{2} + \frac{d_{ME}^2(C(\tilde{A}), C(\tilde{C}))}{2} \\ &\leq \frac{\left(d_{ME}(S(\tilde{A}), S(\tilde{B})) + d_{ME}(S(\tilde{B}), S(\tilde{C}))\right)^2}{2} \\ &\quad + \frac{\left(d_{ME}(C(\tilde{A}), C(\tilde{B})) + d_{ME}(C(\tilde{B}), C(\tilde{C}))\right)^2}{2} \\ &\leq (d(\tilde{A}, \tilde{B}) + d(\tilde{B}, \tilde{C}))^2. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات قضیه تمام است. ■

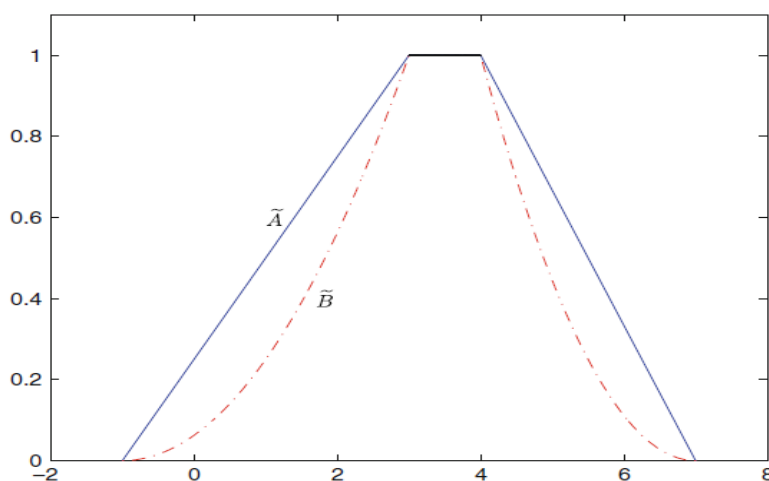
نکته ۲-۲-۵: به راحتی می توان مشاهده کرد که هرگاه اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ، اعداد قطعی باشند، یعنی $\tilde{A} = (a, a; 0, 0)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b, b; 0, 0)_{LR}$ ، آنگاه متر d تعریف شده در معادله (۲-۲-۲)، متر معمولی (متر قدر مطلق) روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را حفظ می کند، یعنی

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |a - b|.$$

نکته ۲-۲-۶: به راحتی می توان مشاهده کرد که هرگاه اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ ، اعداد بازه ای قطعی باشند، یعنی $\tilde{A} = (a_1, a_2; 0, 0)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2; 0, 0)_{LR}$ ، آنگاه متر d تعریف شده در معادله (۲-۲-۲)، متر اقلیدسی اصلاح شده روی مجموعه ی همه ی اعداد بازه ای $\mathbb{IR}$ را حفظ می کند، یعنی

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d_{ME}([a_1, a_2], [b_1, b_2]).$$

نکته ۲-۲-۷: تابع متر d تعریف شده در معادله‌ی (۲-۲-۲)، یک متر روی مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی نمی‌باشد، بلکه یک شبه متر^{۳۰} می‌باشد. به این معنی که اعداد فازی متمایز $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ وجود دارند به طوری که $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$. برای مثال، اعداد فازی نمایش داده شده در شکل ۲-۲-۱ را در نظر بگیرید. به طور واضح توابع حالت چپ با هم یکسان نیستند و همچنین توابع حالت راست نیز با هم یکسان نیستند. در این مورد بدیهی است که $\tilde{A} \neq \tilde{B}$ ولی $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0$. بنابراین برای آن که تابع d تعریف شده در معادله‌ی (۲-۲-۲)، یک متر روی مجموعه‌ی اعداد فازی $L-R$ باشد، لازم است که تمام توابع حالت چپ یکسان و تمام توابع حالت راست نیز یکسان باشند.



شکل ۲-۲-۱: نمایش اعداد فازی متمایز $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$.

در ادامه چند خاصیت مهم را برای تابع متر پیشنهادی d ، ارائه می‌دهیم.

^{۳۰}Pseudo-metric

قضیه ۲-۲-۴: فرض کنید $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ اعداد فازی $L-R$ دلخواهی باشند به طوری که توابع حالت چپ آنها یکسان و توابع حالت راست آنها نیز یکسان باشند. در این صورت خواهیم داشت:

(۱) هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}^+$, $L(x) = R(x)$, آنگاه $d(\tilde{A} - \tilde{C}, \tilde{B} - \tilde{C}) = d(\tilde{A}, \tilde{B})$ که در آن

$$\tilde{A} - \tilde{C} = \tilde{A} + (-1) \cdot \tilde{C}$$

$$d(\tilde{A} + \tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{C}) = d(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad (۲)$$

(۳) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$

$$d(\lambda \tilde{A}, \lambda \tilde{B}) = |\lambda| d(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

اثبات. (۱) فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$, $\tilde{B} = (b_1, b_2; \gamma, \eta)_{LR}$ و $\tilde{C} = (c_1, c_2; \delta, \theta)_{LR}$ اعداد فازی $L-R$ دلخواهی باشند، به طوری که توابع حالت چپ $L(\cdot)$ آنها یکسان و توابع حالت راست $R(\cdot)$ آنها نیز یکسان باشند. در این صورت خواهیم داشت

$$S(\tilde{A} - \tilde{C}) = [a_1 - c_2 - \alpha - \theta, a_2 - c_1 + \beta + \delta],$$

$$C(\tilde{A} - \tilde{C}) = [a_1 - c_2, a_2 - c_1],$$

$$S(\tilde{B} - \tilde{C}) = [b_1 - c_2 - \gamma - \theta, b_2 - c_1 + \eta + \delta],$$

$$C(\tilde{B} - \tilde{C}) = [b_1 - c_2, b_2 - c_1].$$

به راحتی می توان نشان داد

$$d_{ME}(S(\tilde{A} - \tilde{C}), S(\tilde{B} - \tilde{C})) = d_{ME}(S(\tilde{A}), S(\tilde{B})),$$

و

$$d_{ME}(C(\tilde{A} - \tilde{C}), C(\tilde{B} - \tilde{C})) = d_{ME}(C(\tilde{A}), C(\tilde{B})).$$

بنابراین

$$d(\tilde{A} - \tilde{C}, \tilde{B} - \tilde{C}) = d(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

توجه کنید که اگر برای $x \in \mathbb{R}^+$, $L(x) \neq R(x)$, آنگاه براساس تعریف ۱-۶-۴ $\tilde{C} \cdot (-1)$ یک عدد فازی $R-L$ می باشد و لذا نمی توانیم از عملگر جمع ارائه شده در تعریف ۱-۶-۴ استفاده کنیم.

(۲) اثبات خاصیت ۲ کاملاً مشابه اثبات خاصیت ۱ است.

(۳) برای اثبات خاصیت ۳، ابتدا فرض می کنیم $\lambda < 0$. بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned} S(\lambda \tilde{A}) &= [\lambda a_2 + \lambda \beta, \lambda a_1 - \lambda \alpha], & C(\lambda \tilde{A}) &= [\lambda a_2, \lambda a_1], \\ S(\lambda \tilde{B}) &= [\lambda b_2 + \lambda \eta, \lambda b_1 - \lambda \gamma], & C(\lambda \tilde{B}) &= [\lambda b_2, \lambda b_1]. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d_{ME}^2(S(\lambda \tilde{A}), S(\lambda \tilde{B})) &= \lambda^2 \frac{((a_2 - b_2) + (\beta - \eta))^2}{2} + \lambda^2 \frac{((a_1 - b_1) - (\alpha - \gamma))^2}{2} \\ &= \lambda^2 d_{ME}^2(S(\tilde{A}), S(\tilde{B})). \end{aligned}$$

لذا

$$d_{ME}(S(\lambda \tilde{A}), S(\lambda \tilde{B})) = |\lambda| d_{ME}(S(\tilde{A}), S(\tilde{B})),$$

و به طور مشابه

$$d_{ME}(C(\lambda \tilde{A}), C(\lambda \tilde{B})) = |\lambda| d_{ME}(C(\tilde{A}), C(\tilde{B})).$$

بنابراین نتیجه می گیریم

$$d(\lambda \tilde{A}, \lambda \tilde{B}) = |\lambda| d(\tilde{A}, \tilde{B}).$$

اثبات در حالتی که $\lambda > 0$ کاملاً مشابه اثبات فوق است. بنابراین اثبات قضیه تمام است. ■

با توجه به فاصله‌ی تعریف شده بین دو عدد فازی $L-R$ ، می توانیم فاصله بین دو بردار عدد فازی $L-R$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲-۲-۴: [۱۱] فاصله بین دو بردار عدد فازی مقدار $L-R$ $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ و $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D_p(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}) = (\sum_{i=1}^n d^p(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i))^{\frac{1}{p}},$$

که در آن $p \geq 1$ و تابع متر d در معادله‌ی (۲-۲-۲) تعریف شده است.

در این رساله برای به دست آوردن فاصله بین دو بردار عدد فازی $L-R$ از $p = 2$ در تعریف ۲-۲-۴ استفاده می‌کنیم.

۲-۳ دستگاه‌های خطی فازی $L-R$

در این بخش توجه خود را معطوف به دستگاه‌های خطی فازی $L-R$ کرده و سعی می‌کنیم تا با استفاده از متر ارائه شده در تعریف ۲-۲-۴، جواب‌های دقیق و تقریبی چنین دستگاه‌هایی را به دست آوریم. در اینجا دوباره لازم است تاکید شود که تمامی اعداد فازی $L-R$ در نظر گرفته شده در این بخش دارای توابع حالت چپ یکسان و نیز دارای توابع حالت راست یکسان هستند.

تعریف ۲-۳-۱: [۱۱] دستگاه خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11} \tilde{x}_1 + a_{12} \tilde{x}_2 + \dots + a_{1n} \tilde{x}_n = \tilde{b}_1, \\ a_{21} \tilde{x}_1 + a_{22} \tilde{x}_2 + \dots + a_{2n} \tilde{x}_n = \tilde{b}_2, \\ \vdots \\ a_{n1} \tilde{x}_1 + a_{n2} \tilde{x}_2 + \dots + a_{nn} \tilde{x}_n = \tilde{b}_n, \end{cases} \quad (۲-۳-۱)$$

که در آن ماتریس ضرایب $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و $\tilde{b}_i$ ، $1 \leq i \leq n$ ، اعداد فازی $L-R$ ، با توابع حالت چپ یکسان و نیز با توابع حالت راست یکسان هستند را یک دستگاه خطی فازی $L-R$ ^{۳۱} می نامیم.

فرم ماتریسی دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) به صورت

$$A\tilde{x} = \tilde{b},$$

می باشد، که در آن $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)^T$ بردارهای فازی $L-R$ می باشند که مؤلفه های آن ها به صورت زیر مشخص می گردند

$$\tilde{x}_i = (x_1^i, x_2^i; \alpha_x^i, \beta_x^i)_{LR}, \quad \tilde{b}_i = (b_1^i, b_2^i; \alpha_b^i, \beta_b^i)_{LR}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

تعریف ۲-۳-۲: [۱۱] بردار فازی $L-R$ $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را یک جواب دقیق $L-R$ ^{۳۲} برای دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) می نامیم هرگاه با توجه به اعمال جمع و ضرب اسکالر ارائه شده در تعریف ۱-۶-۱-۴ داشته باشیم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j = \tilde{b}_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (2-3-2)$$

نکته ۲-۳-۱: باید به این نکته توجه شود که هرگاه در دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱)، توابع حالت $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ با هم متمایز باشند و نیز ماتریس ضرایب A دارای درایه های منفی باشد، آنگاه دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) لزوماً دارای جواب دقیق $L-R$ نمی باشد، مگر برای حالت های خاص که چندین فرضیات قوی روی مسأله اتخاذ شود. زیرا براساس تعریف ۱-۶-۱-۴ قرینه ی یک عدد فازی $L-R$ ، عدد فازی $R-L$ می باشد. در نتیجه هرگاه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ اعداد فازی $L-R$ ، آن گاه $\tilde{A} - \tilde{B} = \tilde{A} + (-1) \cdot \tilde{B}$ ، نه یک عدد فازی $L-R$ است

^{۳۱} $L-R$ fuzzy linear system
^{۳۲} $L-R$ exact solution

و نه یک عدد فازی $R-L$. به این معنی که توابع حالت چپ و راست برای عدد فازی $\tilde{A} - \tilde{B}$ نه تابع $L(\cdot)$ است و نه تابع $R(\cdot)$. به عنوان مثال اعداد فازی $L-R$ زیر را در نظر بگیرید

$$\tilde{A} = (-1, 2; 1, 2)_{LR}, \quad \tilde{B} = (-1, 3; 1, 1)_{LR},$$

که در آن توابع حالت چپ $L(\cdot)$ و راست $R(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$L(x) = \max \{1 - x, 0\}, \quad R(x) = \max \{1 - x^2, 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

در این صورت به دست خواهیم آورد

$$\tilde{A} - \tilde{B} = (-4, 3; 2, 3)_{l'R'},$$

که در آن

$$L'(x) = \max \left\{ \frac{1}{2} - 2x + \frac{1}{2}\sqrt{8x+1}, 0 \right\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$R'(x) = \max \{2\sqrt{3x+1} - (3x+1), 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

همان طور که واضح است $\tilde{A} - \tilde{B}$ نه یک عدد فازی $L-R$ است و نه یک عدد فازی $R-L$ ، بلکه یک عدد فازی $L'-R'$. بنابراین در حالت کلی نتیجه می گیریم که هرگاه توابع حالت $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ با هم متمایز باشند و نیز ماتریس ضرایب A دارای درایه های منفی باشد، آن گاه دستگاه خطی فازی $L-R$ (۱-۳-۲) لزوماً دارای جواب دقیق $L-R$ نمی باشد.

برای تشریح نکته ی ۱-۳-۲، دستگاه خطی فازی $L-R$ زیر را در حالت کلی نظر بگیرید.

$$\begin{cases} a_{11} \tilde{x}_1 + a_{12} \tilde{x}_2 = (b_1^1, b_2^1; \alpha_b^1, \beta_b^1)_{LR}, \\ a_{21} \tilde{x}_1 + a_{22} \tilde{x}_2 = (b_1^2, b_2^2; \alpha_b^2, \beta_b^2)_{LR}, \end{cases}$$

که در آن تمامی توابع حالت چپ با هم یکسان و نیز تمامی توابع حالت راست با هم یکسان و در عین حال خود توابع حالت $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ با هم متمایز هستند و ضرایب a_{11} ، a_{21} و a_{22} اعداد حقیقی مثبت و a_{12}

یک عدد حقیقی منفی می‌باشد. با توجه به نکته‌ی ۱-۳-۲ نمی‌توان اعداد فازی $L-R$ $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_2$ یافت به طوری که $a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 = (b_1^2, b_2^2; \alpha_b^2, \beta_b^2)_{LR}$ زیرا حاصل نمی‌تواند یک عدد فازی $L-R$ باشد. بنابراین دستگاه فازی $L-R$ فوق دارای جواب دقیق $L-R$ نیست، به این معنی که دستگاه فوق ممکن است دارای جواب فازی باشد اما این جواب از نوع $L-R$ نیست. با این وجود، هدف از این بخش، تنها به دست آوردن جواب‌های دقیق $L-R$ یا $R-L$ برای دستگاه‌های خطی فازی $L-R$ (۱-۳-۲) می‌باشد.

در این رساله برای حل دستگاه خطی فازی $L-R$ (۱-۳-۲) دو حالت کلی را در نظر می‌گیریم. حالت اول: همه‌ی درایه‌های ماتریس ضرایب نامنفی باشند. حالت دوم: بعضی یا همه‌ی درایه‌های ماتریس ضرایب منفی باشند. در ادامه به طور مجزا این دو حالت را در نظر می‌گیریم.

۲-۴ حل دستگاه‌های $L-R$ با ضرایب نامنفی

در این قسمت فرض می‌کنیم که در دستگاه خطی فازی $L-R$ (۱-۳-۲) همه‌ی درایه‌های ماتریس ضرایب A نامنفی باشند و همچنین تمامی توابع حالت چپ باهم یکسان و نیز تمامی توابع حالت راست با هم یکسان باشند. در این حالت دستگاه خطی فازی $L-R$ (۱-۳-۲) می‌تواند دارای جواب دقیق $L-R$ باشد. برای به دست آوردن این جواب، از تعاریف ۱-۶-۳ و ۱-۶-۴ و معادله‌ی (۲-۳-۲) برای $i = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_1^j = b_1^i, \quad (2-4-1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_2^j = b_2^i, \quad (2-4-2)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_x^j = \alpha_b^i, \quad (2-4-3)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}\beta_x^j = \beta_b^i. \quad (2-4-4)$$

در این حالت هرگاه ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد، آن گاه با حل دستگاه‌های حقیقی $(2-4-4)-(2-4-1)$ بردار

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T,$$

که در آن برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $\tilde{x}_i = (x_1^i, x_2^i; \alpha_x^i, \beta_x^i)_{LR}$ را به دست می‌آوریم. هرگاه بردار $\tilde{x}$ تشکیل یک بردار فازی $L-R$ دهد، به این معنی که برای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $\alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0$ و $x_1^i \leq x_2^i$ در این صورت بردار $\tilde{x}$ یک جواب دقیق $L-R$ یکتا برای دستگاه خطی فازی $L-R$ $(2-3-1)$ خواهد بود، در غیر این صورت دستگاه خطی فازی $L-R$ $(2-3-1)$ دارای جواب دقیق $L-R$ نیست.

نکته ۲-۴-۱: توجه کنید در حالتی که تمام درایه‌های ماتریس ضرایب A نامنفی باشند، اینکه خود توابع حالت چپ $L(\cdot)$ و توابع حالت راست $R(\cdot)$ با هم متمایز یا یکسان باشند، اهمیت چندانی ندارد. زیرا در این حالت، روش به صورتی که بیان شد، اجرا می‌گردد.

در ادامه یک مثال عددی جهت نشان دادن کارایی روش، ارائه می‌کنیم.

مثال ۲-۴-۱: دستگاه خطی فازی $L-R$ 3×3 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 3\tilde{x}_3 = (-9, 11; 11, 8)_{LR}, \\ \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = (-2, 9; 8, 5)_{LR}, \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3 = (-3, 14; 11, 7)_{LR}, \end{cases}$$

که در آن

$$L(x) = \max \{1 - x, 0\}, \quad R(x) = \max \{1 - x^3, 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

واضح است که در این مثال، توابع حالت چپ و راست با هم متفاوتند. برای حل دستگاه فوق ابتدا دستگاه‌های

حقیقی (۲-۴-۴)-(۲-۴-۱) را به ترتیب، به صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$\begin{cases} 2x_1^1 + x_1^2 + 3x_1^3 = -9, \\ x_1^1 + 2x_1^2 + x_1^3 = -2, \\ x_1^1 + 3x_1^2 + 2x_1^3 = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_2^1 + x_2^2 + 3x_2^3 = 11, \\ x_2^1 + 2x_2^2 + x_2^3 = 9, \\ x_2^1 + 3x_2^2 + 2x_2^3 = 14, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_x^1 + \alpha_x^2 + 3\alpha_x^3 = 11, \\ \alpha_x^1 + 2\alpha_x^2 + \alpha_x^3 = 8, \\ \alpha_x^1 + 3\alpha_x^2 + 2\alpha_x^3 = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\beta_x^1 + \beta_x^2 + 3\beta_x^3 = 8, \\ \beta_x^1 + 2\beta_x^2 + \beta_x^3 = 5, \\ \beta_x^1 + 3\beta_x^2 + 2\beta_x^3 = 7. \end{cases}$$

با حل دستگاه‌های فوق به دست خواهیم آورد

$$\mathbf{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)^T = (-2, 1, -2)^T,$$

$$\mathbf{x}_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)^T = (1, 3, 2)^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_x = (\alpha_x^1, \alpha_x^2, \alpha_x^3)^T = (3, 2, 1)^T,$$

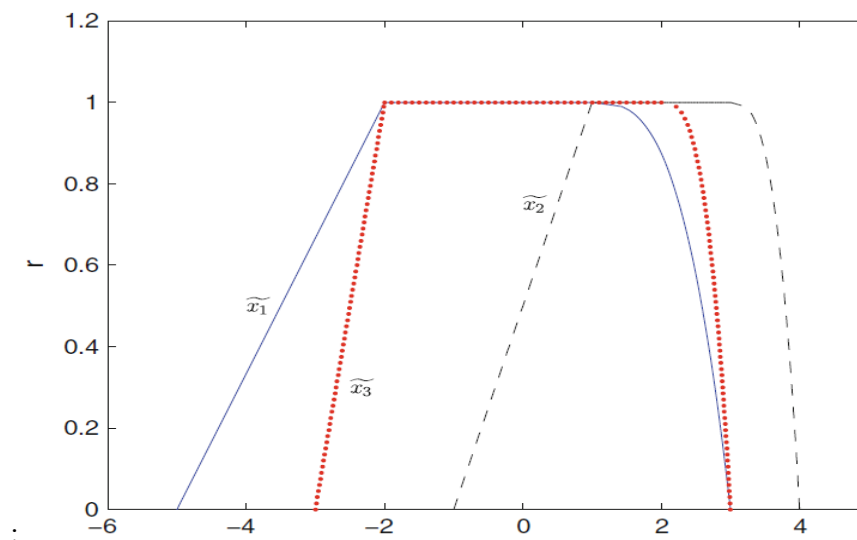
$$\boldsymbol{\beta}_x = (\beta_x^1, \beta_x^2, \beta_x^3)^T = (2, 1, 1)^T.$$

همان طور که واضح است برای $i = 1, 2, 3$ داریم $\alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0$ و بنابراین مسأله دارای جواب

دقیق $L-R$ یکتا است که به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} (x_1^1, x_2^1; \alpha_x^1, \beta_x^1)_{LR} \\ (x_1^2, x_2^2; \alpha_x^2, \beta_x^2)_{LR} \\ (x_1^3, x_2^3; \alpha_x^3, \beta_x^3)_{LR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2, 1; 3, 2)_{LR} \\ (1, 3; 2, 1)_{LR} \\ (-2, 2; 1, 1)_{LR} \end{bmatrix}.$$

در شکل ۲-۴-۱ این سه عدد فازی $L-R$ را رسم نموده‌ایم.



شکل ۲-۴-۱: نمایش جواب دقیق $L-R$ برای مثال ۲-۴-۱

۲-۵ حل دستگاه‌های $L-R$ با بعضی ضرایب منفی

در این بخش فرض می‌کنیم که در دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) همه‌ی توابع حالت چپ باهم یکسان و نیز همه‌ی توابع حالت راست با هم یکسان باشند و نیز ماتریس ضرایب A دارای درایه‌های منفی باشد. با توجه به نکته‌ی ۲-۳-۱ برای حل دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) دو حالت مهم را در نظر می‌گیریم. حالت اول: هرگاه خود توابع حالت چپ و راست با هم متمایز باشند. حالت دوم: هرگاه خود توابع حالت چپ و راست با هم یکسان باشند. در ادامه به صورت جداگانه به هر یک از این حالت‌ها می‌پردازیم.

۲-۵-۱ با توابع حالت چپ و راست متمایز

در این مورد، با توجه به نکته‌ی ۲-۳-۱ دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) لزوماً دارای جواب دقیق $L-R$ نیست. در حالت‌های خاص و با اتخاذ فرض‌هایی، می‌توان یک بردار جواب دقیق که بعضی از مؤلفه‌های آن $L-R$ و بعضی دیگر از مؤلفه‌های آن $R-L$ هستند را به دست آوریم. به همین منظور در این بخش فرض

می‌کنیم که در ماتریس ضرایب A تمامی درایه‌های موجود در یک ستون دارای علامت یکسان باشند، به عنوان مثال هرگاه a_i نمایانگر ستون i -ام ماتریس A باشد، آنگاه قرارداد می‌کنیم ستون‌های $a_1, a_2, \dots, a_k$ نامثبت و ستون‌های $a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n$ نامنفی باشند. با توجه به این قرارداد، هرگاه دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) دارای جواب دقیق فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\tilde{x}_i = (x_1^i, x_2^i; \alpha_x^i, \beta_x^i)_{RL}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

$$\tilde{x}_i = (x_1^i, x_2^i; \alpha_x^i, \beta_x^i)_{LR}, \quad i = k+1, k+2, \dots, n,$$

یعنی $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_k$ اعداد فازی $R-L$ و $\tilde{x}_{k+1}, \tilde{x}_{k+2}, \dots, \tilde{x}_n$ اعداد فازی $L-R$ هستند.

برای حل دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱)، با توجه به قرارداد فوق و تعاریف ۱-۶-۳ و ۱-۶-۴ و نیز با توجه به معادله‌ی (۲-۳-۲)، برای $i = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می‌گیریم

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} x_2^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_1^j = b_1^i, \quad (2-5-1)$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} x_1^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_2^j = b_2^i, \quad (2-5-2)$$

$$-\sum_{j=1}^k a_{ij} \beta_x^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} \alpha_x^j = \alpha_b^i, \quad (2-5-3)$$

$$-\sum_{j=1}^k a_{ij} \alpha_x^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} \beta_x^j = \beta_b^i. \quad (2-5-4)$$

از معادلات (۲-۵-۱) و (۲-۵-۲) به دست می‌آوریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (x_1^j + x_2^j) = b_1^i + b_2^i, \quad (2-5-5)$$

و همچنین از معادلات (۲-۵-۳) و (۲-۵-۴) به دست می‌آوریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\beta_x^j - \alpha_x^j) = \beta_b^i - \alpha_b^i. \quad (2-5-6)$$

قرار می‌دهیم

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T, \quad \mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T,$$

که در آن

$$w_i = x_1^i + x_2^i, \quad c_i = b_1^i + b_2^i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

همچنین قرار می‌دهیم

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T, \quad \mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T,$$

که در آن

$$v_i = \beta_x^j - \alpha_x^j, \quad d_i = \beta_b^i - \alpha_b^i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین معادلات (۲-۵-۵) و (۲-۵-۶) به ترتیب هم‌ارز دستگاه‌های حقیقی زیر می‌باشند

$$\mathbf{Aw} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{Av} = \mathbf{d}. \quad (۲-۵-۷)$$

با حل دستگاه‌های حقیقی (۲-۵-۷) می‌توانیم بردارهای $\mathbf{w}$ و $\mathbf{v}$ را به دست آوریم و در نتیجه می‌توانیم بنویسم

$$x_2^i = w_i - x_1^i, \quad \beta_x^i = v_i + \alpha_x^i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \quad (۲-۵-۸)$$

از طرف دیگر، واضح است که اگر $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ جواب دقیق دستگاه فازی $L-R$ (۲-۳-۱) باشد، آنگاه

$$(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})_i = \tilde{b}_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

و در نتیجه

$$d((\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})_i, \tilde{b}_i) = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین یک راه منطقی برای یافتن جواب دقیق، کمینه کردن فاصله میان بردارهای $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}$ و $\tilde{\mathbf{b}}$ است. برای انجام این کار، قرار می‌دهیم

$$(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}})_i = \tilde{y}_i = (y_1^i, y_2^i; \alpha_y^i, \beta_y^i)_{LR}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$y_1^i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_2^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_1^j, \quad (2-5-9)$$

$$y_2^i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_1^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_2^j, \quad (2-5-10)$$

$$\alpha_y^i = -\sum_{j=1}^k a_{ij} \beta_x^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} \alpha_x^j, \quad (2-5-11)$$

$$\beta_y^i = -\sum_{j=1}^k a_{ij} \alpha_x^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} \beta_x^j. \quad (2-5-12)$$

به وسیله‌ی تعریف ۲-۲-۴ و با استفاده از علامت گذاری‌های فوق، مسأله‌ی کمینه‌سازی زیر را جهت به دست

آوردن جواب دقیق دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) تشکیل می‌دهیم

$$\begin{cases} \min & Z = \sum_{i=1}^n d^2(\tilde{y}_i, \tilde{b}_i) \\ \text{s. t.} & x_1^i \leq x_2^i, \\ & \alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0, \\ & x_1^i, x_2^i: \text{free}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (2-5-13)$$

که در آن

$$\begin{aligned} d^2(\tilde{y}_i, \tilde{b}_i) = & \frac{\left((y_1^i - b_1^i) - (\alpha_y^i - \alpha_b^i) \right)^2}{4} \\ & + \frac{\left((y_2^i - b_2^i) + (\beta_y^i - \beta_b^i) \right)^2}{4} \\ & + \frac{(y_1^i - b_1^i)^2 + (y_2^i - b_2^i)^2}{4}, \end{aligned}$$

و y_1^i, y_2^i, α_y^i و β_y^i براساس معادلات (۲-۵-۹)-(۲-۵-۱۲) به دست می‌آیند.

از طرف دیگر از معادلات (۲-۵-۸)-(۲-۵-۱۲)، برای $i = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می‌گیریم

$$y_1^i = \sum_{j=1}^k a_{ij} w_j - \sum_{j=1}^k a_{ij} x_1^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_1^j, \quad (2-5-14)$$

$$y_2^i = \sum_{j=k+1}^n a_{ij} w_j + \sum_{j=1}^k a_{ij} x_1^j - \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_1^j, \quad (2-5-15)$$

$$\alpha_y^i = -\sum_{j=1}^k a_{ij} v_j - \sum_{j=1}^k a_{ij} \alpha_x^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} \alpha_x^j, \quad (2-5-16)$$

$$\beta_y^i = \sum_{j=k+1}^n a_{ij} v_j - \sum_{j=1}^k a_{ij} \alpha_x^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} \alpha_x^j. \quad (2-5-17)$$

توجه کنید که در معادلات (2-5-14)-(2-5-17) پارامترهای x_2^i و β_x^i برای $i = 1, 2, \dots, n$ حذف گردیدند. حال در مسأله‌ی کمینه‌سازی (2-5-13) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \Omega_1^i &:= (y_1^i - b_1^i) - (\alpha_y^i - \alpha_b^i), & \Omega_2^i &:= (y_2^i - b_2^i) + (\beta_y^i - \beta_b^i), \\ \Omega_3^i &:= (y_1^i - b_1^i), & \Omega_4^i &:= (y_2^i - b_2^i), \end{aligned}$$

در این صورت به وسیله‌ی معادلات (2-5-2)-(2-5-17) به دست می‌آوریم

$$\Omega_1^i = -\sum_{j=1}^k a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) + \sum_{j=1}^k a_{ij} (w_j + v_j) + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) - (b_1^i - \alpha_b^i),$$

$$\Omega_2^i = \sum_{j=1}^k a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) - \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (w_j + v_j) - (b_2^i + \beta_b^i),$$

$$\Omega_3^i = -\sum_{j=1}^k a_{ij} x_1^j + \sum_{j=1}^k a_{ij} w_j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_1^j - b_1^i,$$

$$\Omega_4^i = \sum_{j=1}^k a_{ij} x_1^j - \sum_{j=k+1}^n a_{ij} x_1^j + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} w_j - b_2^i,$$

بنابراین می‌توان مسأله‌ی (2-5-13) را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & Z = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \left((\Omega_1^i)^2 + (\Omega_2^i)^2 + (\Omega_3^i)^2 + (\Omega_4^i)^2 \right) \\ \text{s. t.} & \\ & x_1^i \leq \frac{1}{2} w_i, \\ & \alpha_x^i \geq -v_i, \\ & \alpha_x^i \geq 0, \\ & x_1^i: \text{free}, \\ & \forall i = 1, 2, \dots, n, \end{array} \right. \quad (2-5-18)$$

برای ساده‌تر کردن مسأله‌ی کمینه‌سازی (2-5-18) قضیه‌ی بعدی را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲-۵-۱-۱: برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$\Omega_1^i = -\Omega_2^i, \quad \& \quad \Omega_3^i = -\Omega_4^i.$$

اثبات. داریم $Av = d$ و $Aw = c$ بنابراین

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (w_j + v_j) = (b_1^i + b_2^i) + (\beta_b^i - \alpha_b^i),$$

یا به عبارتی دیگر

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} (w_j + v_j) - (b_1^i - \alpha_b^i) = (b_2^i + \beta_b^i) - \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (w_j + v_j).$$

حال داریم

$$\begin{aligned} \Omega_1^i &= -\sum_{j=1}^k a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) + \sum_{j=1}^k a_{ij} (w_j + v_j) + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) - (b_1^i - \alpha_b^i) \\ &= -\left(\sum_{j=1}^k a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) - \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (x_1^j - \alpha_x^j) + \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (w_j + v_j) - (b_2^i + \beta_b^i) \right) \\ &= -\Omega_2^i. \end{aligned}$$

به طور مشابه، چون $Aw = c$ ، آنگاه می توان نتیجه گرفت که $\Omega_3^i = -\Omega_4^i$. ■

براساس قضیه ۲-۵-۱-۱ می توانیم مسأله ی کمینه سازی (۲-۵-۱۸) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\begin{cases} \min & Z = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left((\Omega_1^i)^2 + (\Omega_3^i)^2 \right) \\ s. t. & \\ & x_1^i \leq \frac{1}{2} w_i, \\ & \alpha_x^i \geq \max \{0, -v_i\}, \\ & x_1^i: \text{free}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2-5-19)$$

مسأله ی کمینه سازی (۲-۵-۱۳) دارای $2n$ متغیر آزاد در علامت و $3n$ محدودیت می باشد، در حالی که

مسأله ی کمینه سازی (۲-۵-۱۹) دارای n متغیر آزاد در علامت و $2n$ محدودیت است. بنابراین به طور واضح،

حل مسأله ی کمینه سازی (۲-۵-۱۹) آسان تر از حل مسأله ی کمینه سازی (۲-۵-۱۳) می باشد. با حل مسأله ی

کمینه‌سازی (۲-۵-۱۹) و با استفاده از معادله‌ی (۲-۵-۸)، می‌توانیم یک جواب برای دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) پیدا کنیم. به این ترتیب که هرگاه مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی کمینه‌سازی برابر صفر شود، آنگاه جواب به دست آمده به عنوان یک جواب دقیق برای دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) است. در غیر این صورت، یعنی زمانی که مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی کمینه‌سازی برابر صفر نشود، آنگاه دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) دارای جواب دقیق نمی‌باشد و لذا جواب به دست آمده را می‌توان به عنوان یک جواب تقریبی تلقی کرد. با توجه به بحث فوق، می‌توانیم یک الگوریتم برای به دست آوردن یک جواب برای دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) با گام‌های زیر ارائه داد.

الگوریتم ۱:

گام ۱: ابتدا دستگاه‌های حقیقی (۲-۵-۷) را تشکیل داده و با حل آنها، بردارهای w و v را به دست آورید.
 گام ۲: برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، Ω_1^i و Ω_3^i را تشکیل داده و با حل مسأله‌ی کمینه‌سازی (۲-۵-۱۹)، مقدار x_1^i و α_x^i را برای $i = 1, 2, \dots, n$ به دست آورید.
 گام ۳: با استفاده از معادله‌ی (۲-۵-۸) بردار فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را تشکیل دهید.
 گام ۴: هرگاه $Z = 0$ آنگاه بردار $\tilde{x}$ یک جواب دقیق و در غیر این صورت یک جواب تقریبی برای دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) است.

در ادامه با فرض آن که مقدار بهینه‌ی مسأله‌ی کمینه‌سازی (۲-۵-۱۹) برابر صفر است، الگوریتم دیگری ارائه می‌دهیم. برای این کار، فرض می‌کنیم که بردار فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ جواب دقیق دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) باشد. در این صورت براساس مباحث گذشته، در مسأله‌ی کمینه‌سازی (۲-۵-۱۸) نتیجه خواهیم گرفت

$$\Omega_1^i = 0, \quad \Omega_2^i = 0, \quad \Omega_3^i = 0, \quad \Omega_4^i = 0,$$

و در نتیجه با توجه به تعریف Ω_j^i ، $j = 1, 2, 3$ ، به ترتیب داریم

$$|A|r = k, \quad |A|r = l, \quad (2-5-20)$$

$$|A|x_1 = m, \quad |A|x_1 = n, \quad (2-5-21)$$

که در آن برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$\begin{aligned} (r)_i &= x_1^i - \alpha_x^i, & (x_1)_i &= x_1^i, \\ (k)_i &= (b_1^i - \alpha_b^i) - \sum_{j=1}^k a_{ij} (w_j + v_j), & (l)_i &= \sum_{j=k+1}^n a_{ij} (w_j + v_j) - (b_2^i + \beta_b^i), \\ (m)_i &= b_1^i - \sum_{j=1}^k a_{ij} w_j, & (n)_i &= \sum_{j=k+1}^n a_{ij} w_j - b_2^i. \end{aligned}$$

از طرفی باید توجه شود که دستگاه‌های موجود در معادله‌ی (2-5-20) با یکدیگر هم‌ارز هستند، به این معنی که در حقیقت بردارهای l و k با یکدیگر برابرند، یعنی $l = k$. به همین ترتیب دستگاه‌های موجود در معادله‌ی (2-5-21) با یکدیگر هم‌ارز هستند، به این معنی که $m = n$.

سرانجام قرار می‌دهیم $\lambda_\alpha = x_1 - r$ و $s = m - k$. در این صورت از معادلات (2-5-20) و (2-5-21) داریم

$$|A|\lambda_\alpha = s, \quad |A|x_1 = m, \quad (2-5-22)$$

که در آن برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$(\lambda_\alpha)_i = \alpha_x^i, \quad (s)_i = \alpha_b^i + \sum_{j=1}^k a_{ij} v_j,$$

و

$$(x_1)_i = x_1^i, \quad (m)_i = b_1^i - \sum_{j=1}^k a_{ij} w_j.$$

از طرفی اگر قرار دهیم

$$x_2 = w - x_1, \quad \lambda_\beta = v + \lambda_\alpha, \quad (2-5-23)$$

آن گاه خواهیم داشت

$$(x_2)_i = x_2^i, \quad (\lambda_\beta)_i = \beta_x^i.$$

براساس دستگاه‌های خطی حقیقی (۲-۵-۷)، (۲-۵-۲۲) و (۲-۵-۲۴) و با این فرض که دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) دارای جواب یکتا می‌باشد، می‌توانیم الگوریتم دیگری ارائه دهیم که در آن به حل یک مسأله‌ی کمینه‌سازی نیازی نیست.

الگوریتم ۲:

گام ۱: ابتدا دستگاه‌های حقیقی (۲-۵-۷) و (۲-۵-۲۲) را تشکیل داده و با حل آنها، بردارهای x_1, v, w و λ_α را به دست آورید.

گام ۲: با استفاده از معادله‌ی (۲-۵-۸) و یا معادله‌ی (۲-۵-۲۳)، بردار $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را تشکیل دهید.

گام ۳: هرگاه $\tilde{x}$ تشکیل یک بردار فازی دهد، به این معنی که برای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $\alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0$ و $x_1^i \leq x_2^i$ در این صورت بردار $\tilde{x}$ یک جواب دقیق برای دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) است. در غیر این صورت مسأله دارای جواب دقیق نمی‌باشد.

گام ۴: جهت به دست آوردن یک جواب تقریبی، برای $i = 1, 2, \dots, n$ Ω_1^i و Ω_3^i را تشکیل داده و با حل مسأله‌ی کمینه‌سازی (۲-۵-۱۹)، مقدار x_1^i و α_x^i را برای $i = 1, 2, \dots, n$ به دست آورید.

گام ۵: با استفاده از معادله‌ی (۲-۵-۸) و یا معادله‌ی (۲-۵-۲۳)، بردار فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را به عنوان جواب تقریبی برای دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) تشکیل دهید.

توجه کنید که براساس الگوریتم ۲، هرگاه دستگاه خطی فازی $L-R$ (۲-۳-۱) دارای جواب دقیق باشد، آنگاه برای بدست آوردن آن، نیازی به حل یک مسأله‌ی کمینه‌سازی نیست. در ادامه با ارائه دو مثال عددی، این الگوریتم را مورد اجرا قرار می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۲-۵: دستگاه خطی فازی 3×3 $L-R$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = (-1, 5; 5, 9)_{LR}, \\ -\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = (-3, 3; 8, 13)_{LR}, \\ -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 = (-8, -2, 7; 12)_{LR}, \end{cases}$$

که در آن

$$L(x) = \max \{1 - x, 0\}, \quad R(x) = \max \{1 - x^3, 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

در این مثال به طور واضح، توابع حالت چپ و راست با هم متفاوتند و همچنین ستون‌های اول و سوم نامثبت و ستون دوم نامنفی می‌باشد. در این حالت دستگاه خطی فازی فوق می‌تواند دارای یک جواب دقیق مانند $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)^T$ باشد که در آن $\tilde{x}_2$ یک عدد فازی $L-R$ و $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_3$ اعداد فازی $R-L$ هستند. برای حل دستگاه فازی فوق، براساس الگوریتم ۲ داریم

$$Aw = c \Rightarrow w = (-6, 1, 9)^T,$$

$$Av = d \Rightarrow v = (-1, 1, -1)^T,$$

$$|A|x_1 = m \Rightarrow x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)^T = (-4, 0, 4)^T,$$

$$|A|\lambda_\alpha = s \Rightarrow \lambda_\alpha = (\alpha_\alpha^1, \alpha_\alpha^2, \alpha_\alpha^3)^T = (2, 2, 2)^T.$$

حال از معادله‌ی (۲-۵-۸) و یا معادله‌ی (۲-۵-۲۳)، به دست می‌آوریم

$$x_2 = w - x_1 \Rightarrow x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)^T = (-2, 1, 5)^T,$$

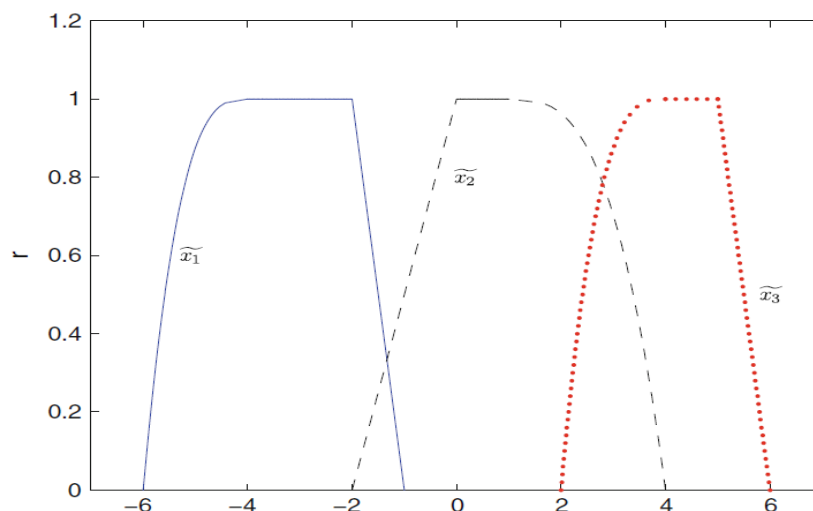
$$\lambda_\beta = v + \lambda_\alpha \Rightarrow \lambda_\beta = (\beta_\beta^1, \beta_\beta^2, \beta_\beta^3)^T = (1, 3, 1)^T.$$

از نتایج فوق به وضوح روشن است که برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $\alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0$ و $x_1^i \leq x_2^i$ بنابراین

جواب فازی یکتای دستگاه خطی فازی فوق را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1^1, x_2^1; \alpha_x^1, \beta_x^1)_{RL} \\ (x_1^2, x_2^2; \alpha_x^2, \beta_x^2)_{LR} \\ (x_1^3, x_2^3; \alpha_x^3, \beta_x^3)_{RL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4, -2; 2, 1)_{RL} \\ (0, 1; 2, 3)_{LR} \\ (4, 5; 2, 1)_{RL} \end{bmatrix}.$$

همانطور که قبلاً توضیح داده شد، در جواب دقیق، مؤلفه‌های اول و سوم اعداد فازی $R-L$ و مؤلفه‌ی دوم یک عدد فازی $L-R$ است. برای درک بیشتر این موضوع، در شکل ۲-۵-۱ این سه عدد فازی را رسم نموده‌ایم.



شکل ۲-۵-۱: نمایش عدد فازی $L-R$ $\tilde{x}_2$ و اعداد فازی $R-L$ $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_3$ از مثال ۲-۵-۱-۱.

در مثال بعدی نشان می‌دهیم که هرگاه یکی از توابع حالت چپ یا راست صفر باشند، آنگاه نتایج به دست آمده باز هم صحیح خواهند بود.

مثال ۲-۵-۱-۲: دستگاه خطی فازی 3×3 $L-R$ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 2\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = (-8, -2; 9, 0)_{LR}, \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 = (-12, -2; 15, 0)_{LR}, \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 = (-14, -6; 9, 0)_{LR}, \end{cases}$$

که در آن

$$L(x) = \max \{1 - x, 0\}, \quad R(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

در این مثال تابع حالت راست $R(\cdot)$ تابع ثابت صفر می‌باشد، یا به عبارتی دیگر، اعداد فازی موجود در ستون سمت راست فاقد پهنای راست می‌باشند. همچنین در این مثال، ستون‌های اول و دوم ماتریس ضرایب نامنفی و ستون سوم آن نامثبت می‌باشد. بنابراین در صورت وجود جواب دقیق، مؤلفه‌های اول و دوم این جواب اعداد فازی $L-R$ و مؤلفه‌ی سوم آن یک عدد فازی $R-L$ است. برای به دست آوردن این جواب، با توجه به الگوریتم ۲ داریم

$$Aw = c \Rightarrow w = (-1, 3, 11)^T,$$

$$Av = d \Rightarrow v = (-2, -3, 2)^T,$$

$$|A|x_1 = m \Rightarrow x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)^T = (-1, 1, 4)^T,$$

$$|A|\lambda_\alpha = s \Rightarrow \lambda_\alpha = (\alpha_x^1, \alpha_x^2, \alpha_x^3)^T = (2, 3, 0)^T.$$

حال از معادله‌ی (۸-۵-۲) و یا معادله‌ی (۲۳-۵-۲)، به دست می‌آوریم

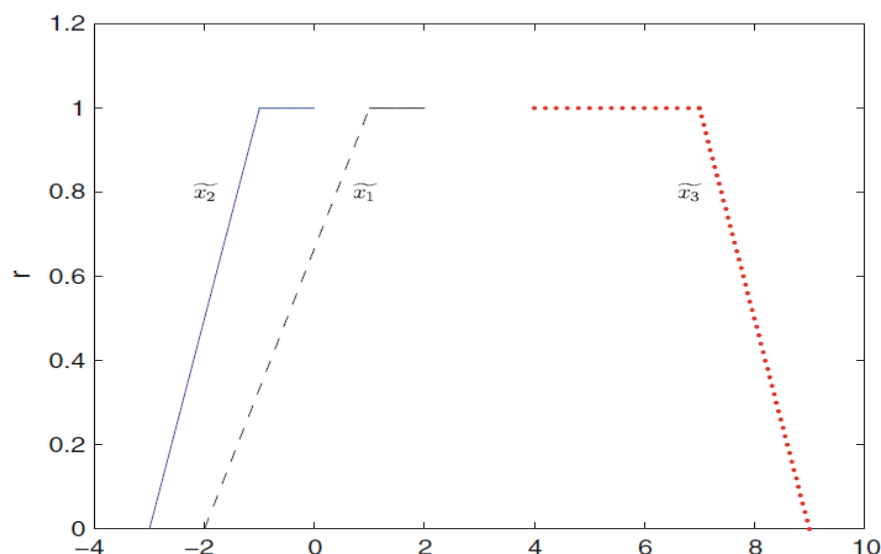
$$x_2 = w - x_1 \Rightarrow x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)^T = (0, 2, 7)^T,$$

$$\lambda_\beta = v + \lambda_\alpha \Rightarrow \lambda_\beta = (\beta_x^1, \beta_x^2, \beta_x^3)^T = (0, 0, 2)^T.$$

به طور واضح، برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم $\alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0$ و بنابراین جواب فازی یکتای دستگاه خطی فازی فوق را به صورت زیر می‌توان ارائه داد

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1^1, x_2^1; \alpha_x^1, \beta_x^1)_{LR} \\ (x_1^2, x_2^2; \alpha_x^2, \beta_x^2)_{LR} \\ (x_1^3, x_2^3; \alpha_x^3, \beta_x^3)_{RL} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1, 0; 2, 0)_{LR} \\ (1, 2; 3, 0)_{LR} \\ (4, 7; 0, 2)_{RL} \end{bmatrix}.$$

همانطور که مشخص است، در جواب دقیق، مؤلفه‌های اول و دوم، اعداد فازی $L-R$ و مؤلفه‌ی سوم یک عدد فازی $R-L$ است. با توجه به صفر بودن تابع $R(\cdot)$ ، این امر ایجاب می‌کند که پهنای راست اعداد فازی $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_2$ و نیز پهنای چپ عدد فازی $\tilde{x}_3$ صفر باشد. این موضوع در شکل ۲-۵-۲ نمایش داده شده است.



شکل ۲-۵-۲: نمایش اعداد فازي $L-R$ $\tilde{x}_1$ و $\tilde{x}_2$ و عدد فازي $R-L$ $\tilde{x}_3$ از مثال ۲-۵-۱-۲.

حال در ادامه، حالت دوم یعنی حالتی که خود توابع حالت چپ و راست با هم مساوی هستند را در نظر می‌گیریم.

۲-۵-۲ با توابع حالت چپ و راست یکسان

اکنون فرض می‌کنیم که ماتریس ضرایب دارای درایه‌های منفی باشد و نیز خود توابع حالت چپ و راست همه‌ی اعداد موجود در ستون سمت راست با هم یکسان باشند. در این حالت، دستگاه خطی فازي (۲-۳-۱) می‌تواند یک جواب دقیق $L-R$ یا $R-L$ داشته باشد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که الگوریتم‌های پیشنهادی در این حالت کاملاً مشابه الگوریتم‌های ۱ و ۲ پیشنهاد شده در بخش قبلی (حالتی که خود توابع حالت چپ و راست با هم متفاوت بودند) می‌باشند. اما تفاوت اساسی میان این حالت و حالت قبلی این است که در حالت قبلی دستگاه فازي در حالت کلی فاقد یک جواب دقیق $L-R$ یا $R-L$ بود، مگر در موارد خاصی که چندین فرضیات قوی روی مسأله در نظر گرفته شود (به طور مثال، تمام درایه‌های موجود در یک ستون ماتریس ضرایب هم‌علامت باشند). اما در حالتی که توابع حالت چپ و راست با هم یکسان باشند، برای داشتن یک

جواب دقیق $L-R$ یا $R-L$ ، نیازی به هیچ فرض اضافی نیست. در این حالت، برای به دست آوردن یک جواب دقیق $L-R$ یا $R-L$ ، برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_i^+ = \{j : 1 \leq j \leq n \text{ \& } a_{ij} \geq 0\}, \quad (2-5-24)$$

$$\Gamma_i^- = \{j : 1 \leq j \leq n \text{ \& } a_{ij} < 0\}. \quad (2-5-25)$$

با توجه به تعاریف ۲-۶-۲ و ۴-۶-۲ و همچنین با توجه به معادلات (۲-۳-۲)، (۲-۵-۲۴) و (۲-۵-۲۵) داریم

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} x_1^j + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} x_2^j = b_1^i, \quad (2-5-26)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} x_2^j + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} x_1^j = b_2^i, \quad (2-5-27)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \alpha_x^j - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \beta_x^j = \alpha_b^i, \quad (2-5-28)$$

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \beta_x^j - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \alpha_x^j = \beta_b^i. \quad (2-5-29)$$

بنابراین مشابه بخش ۲-۵-۱ می‌توانیم الگوریتم‌هایی را برای حل دستگاه خطی فازی (۲-۳-۱) به دست آورد و جواب را به صورت $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ ارائه داد که در آن

$$\tilde{x}_i = (x_1^i, x_2^i; \alpha_x^i, \beta_x^i)_{LR}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

واضح است که در این حالت $L-R$ بودن یا $R-L$ بودن جواب فرق چندانی با هم ندارند، زیرا در این حالت فرض کردیم که توابع حالت چپ و راست با هم یکسانند.

در ادامه، یک مثال عددی جهت نشان دادن کارایی روش بیان می‌کنیم.

مثال ۲-۵-۱-۲: دستگاه خطی فازی 3×3 $L-R$ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = (-6, 3; 8, 9)_{LR}, \\ 3\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 = (-14, 0; 14, 7)_{LR}, \\ \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 = (4, 20; 7, 20)_{LR}, \end{cases}$$

که در آن

$$L(x) = R(x) = \max \{1 - x, 0\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

بنابراین در این مثال، همه‌ی اعداد فازی موجود در ستون سمت راست یا یک عدد فازی مثلثی می‌باشد، یا یک عدد فازی ذوزنقه‌ای. برای به دست آوردن جواب دستگاه فوق، با توجه به الگوریتم ۲ داریم

$$Aw = c \Rightarrow w = (0, -4, 5)^T,$$

$$Av = d \Rightarrow v = (0, -1, 3)^T,$$

$$|A|x_1 = m \Rightarrow x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)^T = (-1, -3, 1)^T,$$

$$|A|\lambda_\alpha = s \Rightarrow \lambda_\alpha = (\alpha_x^1, \alpha_x^2, \alpha_x^3)^T = (1, 3, 1)^T.$$

حال از معادله‌ی (۲-۵-۸) و یا معادله‌ی (۲-۵-۲۳)، به دست می‌آوریم

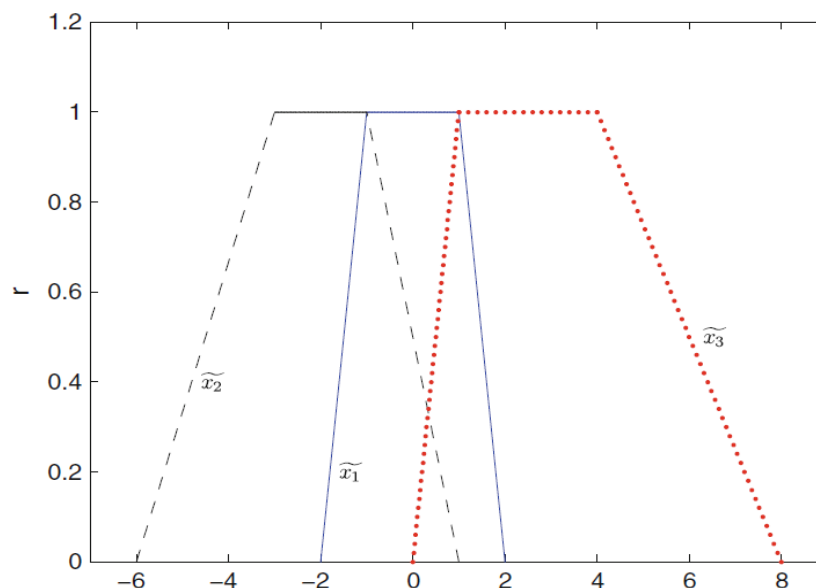
$$x_2 = w - x_1 \Rightarrow x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)^T = (1, -1, 4)^T,$$

$$\lambda_\beta = v + \lambda_\alpha \Rightarrow \lambda_\beta = (\beta_x^1, \beta_x^2, \beta_x^3)^T = (1, 2, 4)^T.$$

به طور واضح، برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، داریم $\alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0$ و $x_1^i \leq x_2^i$. بنابراین می‌توان جواب فازی یکتای دستگاه خطی فازی فوق را به صورت زیر ارائه داد

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1^1, x_2^1; \alpha_x^1, \beta_x^1)_{LR} \\ (x_1^2, x_2^2; \alpha_x^2, \beta_x^2)_{LR} \\ (x_1^3, x_2^3; \alpha_x^3, \beta_x^3)_{LR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1, 1; 1, 1)_{LR} \\ (-3, -1; 3, 2)_{LR} \\ (1, 4; 1, 4)_{LR} \end{bmatrix}.$$

مؤلفه‌های این جواب در شکل ۲-۵-۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳-۵-۲: نمایش اعداد فازی $\tilde{x}_1$ ، $\tilde{x}_2$ و $\tilde{x}_3$ از مثال ۱-۲-۵-۲.

نکته ۱-۲-۵-۲: اخیراً قنبری و مهدوی امیری در [۱۸] روشی را جهت محاسبه‌ی جواب‌های کلی دستگاه‌های خطی فازی $L-R$ با ماتریس ضرایب قطعی (غیرفازی) به وسیله‌ی توابع رتبه‌بندی^{۳۳} مطرح کردند. آنها با کمینه کردن فاصله میان بردارهای قطعی $\mathfrak{R}(\tilde{b})$ و $\mathfrak{R}(A\tilde{x})$ ، که در آن $\mathfrak{R}(\cdot)$ یک تابع رتبه‌بندی دلخواه می‌باشد، یک مسأله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی را جهت به دست آوردن جواب یک دستگاه خطی فازی $L-R$ ارائه دادند. با این وجود، باید توجه کرد که هرگاه مقدار بهینه در مسأله‌ی بهینه‌سازی فوق صفر شود، آنگاه جواب بهینه‌ی به دست آمده لزوماً در دستگاه صدق نمی‌کند. یا به عبارتی دیگر، جواب به دست آمده در این حالت لزوماً یک جواب جبری نیست. زیرا می‌دانیم که تقریباً بیشتر توابع رتبه‌بندی دارای این خاصیتند که اگر

$$\mathfrak{R}(A\tilde{x}) = \mathfrak{R}(\tilde{b}),$$

آنگاه لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که

$$A\tilde{x} = \tilde{b}.$$

^{۳۳}Ranking Functions

اما طبق روش پیشنهاد شده‌ی این فصل از رساله، با کمینه کردن فاصله میان بردارهای فازی $A\tilde{x}$ و $\tilde{b}$ به وسیله‌ی یک متر جدید، یک مسأله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی جهت به دست آوردن جواب یک دستگاه خطی فازی $L-R$ ارائه شد. ضمن اینکه، هرگاه مقدار بهینه در مسأله‌ی بهینه سازی فوق صفر شود، آنگاه جواب بهینه‌ی به دست آمده حتماً در دستگاه صدق می‌کند. یا به عبارتی دیگر، جواب به دست آمده در این حالت لزوماً یک جواب جبری است.

این فصل را با ارائه‌ی یک مثال کاربردی به پایان می‌رسانیم. لازم به ذکر است با توجه به اینکه در این مثال تمام درایه های ماتریس ضرایب مثبت می باشد، اما دستگاه را مطابق الگوریتم ۲ حل می کنیم تا نشان دهیم که الگوریتم مذکور در حالتی که تمام درایه های ماتریس ضرایب مثبت باشد نیز قابل استفاده است.

۶-۲ مثال کاربردی

مثال ۶-۲-۱: یک شرکت تولیدی کفش، سه نوع کفش مردانه، زنانه و بچه‌گانه تولید می‌کند. شرکت برای تولید هر جفت کفش مردانه ۸۰۰۰ تومان هزینه، ۲۰۰ گرم چرم و ۳ ساعت زمان صرف می‌کند و برای تولید هر جفت کفش زنانه ۵۰۰۰ تومان هزینه، ۷۰ گرم چرم و ۲ ساعت زمان صرف می‌کند. همچنین برای تولید هر جفت کفش بچه‌گانه ۷۰۰۰ تومان هزینه، ۱۰۰ گرم چرم و ۴ ساعت زمان صرف می‌کند. ضمناً شرکت دارای تقریباً ۳۸.۵ کیلو چرم و تقریباً ۲۱۰۰۰۰۰ تومان سرمایه در اختیار دارد. هرگاه شرکت بخواهد به طور تقریبی ۱۰۰۰ ساعت کار کند، آنگاه شرکت با توجه به منابع موجود، تقریباً به چه تعداد از انواع کفش‌ها می‌تواند تولید کند؟

در این مثال، اعداد تقریباً ۲۱۰۰۰۰۰ تومان، ۳۸۵۰۰ گرم (یا همان ۳۸.۵ کیلوگرم) و ۱۰۰۰ ساعت را به ترتیب به صورت اعداد فازی

$$\tilde{b}_1 = (2100000, 2100000; 97000, 75000)_{LR},$$

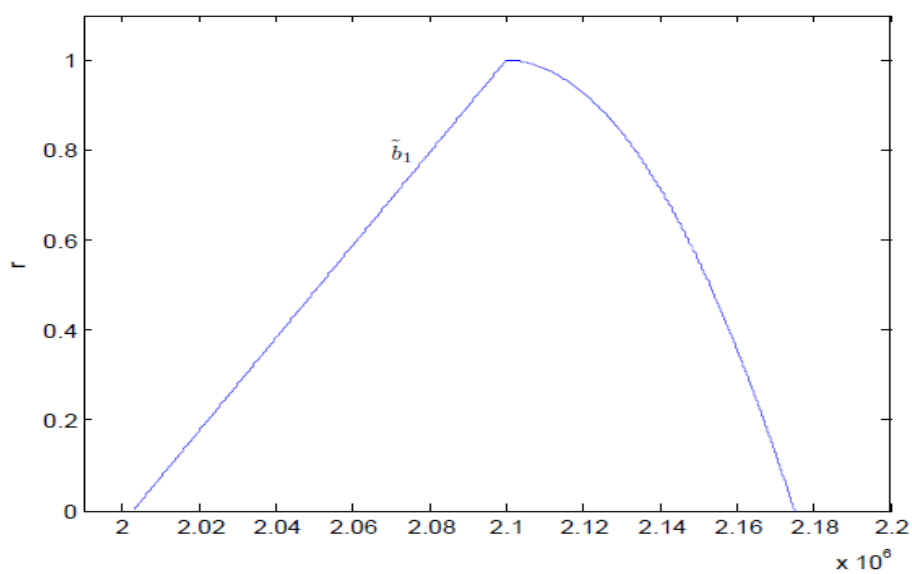
$$\tilde{b}_2 = (38500, 38500; 1810, 1670)_{LR},$$

$$\tilde{b}_3 = (1000, 1000; 45, 31)_{LR},$$

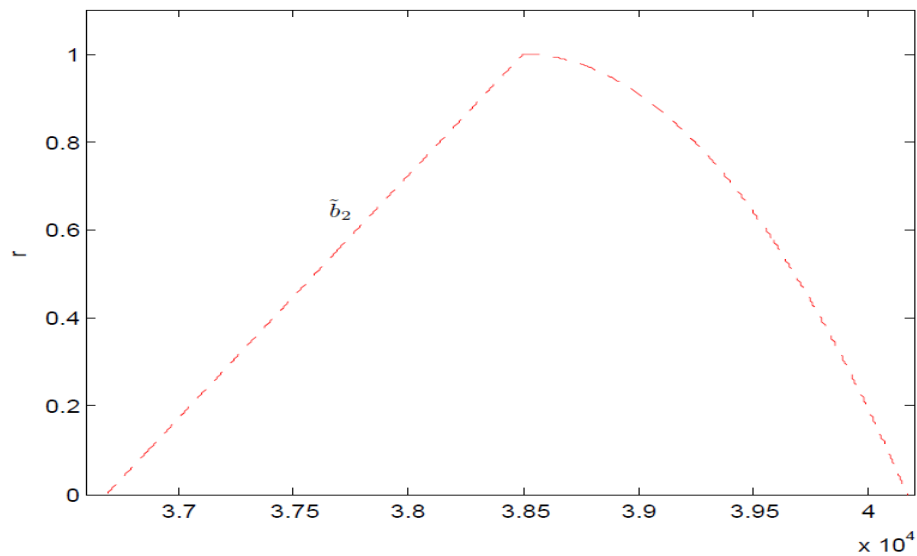
مدل بندی می‌کنیم، که در آن ضابطه‌ی توابع حالت چپ و راست را به صورت

$$L(x) = \max \{0, 1 - x\}, \quad R(x) = \max \{0, 1 - x^2\},$$

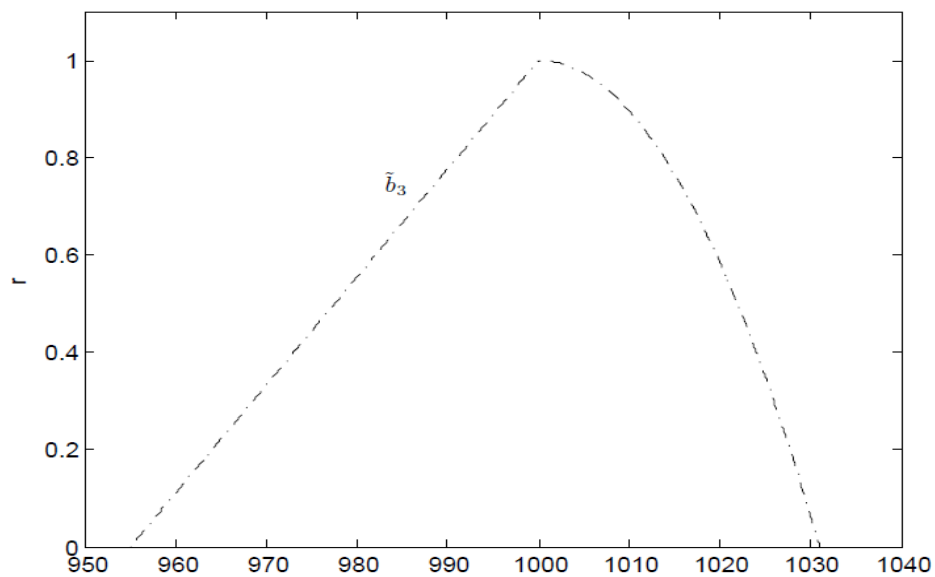
در نظر می‌گیریم. این اعداد فازی را به صورت جداگانه ایی در شکل‌های ۲-۶-۱ تا ۲-۶-۳ نمایش داده‌ایم.



شکل ۲-۶-۱: نمایش عدد فازی تقریباً ۲۱۰۰۰۰۰ در مثال ۲-۶-۱.



شکل ۲-۶-۲: نمایش عدد فازی تقریباً ۳۸۵۰۰ در مثال ۲-۶-۱.



شکل ۲-۶-۳: نمایش عدد فازی تقریباً ۱۰۰۰ در مثال ۲-۶-۱.

با توجه به بحث فوق، می‌توانیم مسأله را در قالب یک دستگاه خطی فازی $L-R$ به صورت زیر مدل‌بندی می‌کنیم:

$$\begin{cases} 8000\tilde{x}_1 + 5000\tilde{x}_2 + 7000\tilde{x}_3 = (2100000, 2100000; 97000, 75000)_{LR}, \\ 200\tilde{x}_1 + 70\tilde{x}_2 + 100\tilde{x}_3 = (38500, 38500; 1810, 1670)_{LR}, \\ 3\tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 + 4\tilde{x}_3 = (1000, 1000; 45, 31)_{LR}. \end{cases}$$

دستگاه فوق را می توان از روش ارائه شده در بخش ۲-۴ حل نمود، اما در این قسمت برای نشان دادن کارایی

روش ارائه شده، این دستگاه را مطابق الگوریتم ۲ حل می کنیم. در این حالت خواهیم داشت:

$$\Gamma_i^+ = \{1, 2, \dots, n\}, \quad \Gamma_i^- = \emptyset.$$

برای به دست آوردن جواب مسأله، با توجه به الگوریتم ۲ داریم

$$Aw = c \Rightarrow w = (200, 100, 300)^T,$$

$$Av = d \Rightarrow v = (2, -2, -4)^T,$$

$$|A|x_1 = m \Rightarrow x_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3)^T = (100, 50, 150)^T,$$

$$|A|\lambda_\alpha = s \Rightarrow \lambda_\alpha = (\alpha_x^1, \alpha_x^2, \alpha_x^3)^T = (5, 3, 6)^T.$$

حال از معادله‌ی (۲-۵-۸) و یا معادله‌ی (۲-۵-۲۳)، به دست می‌آوریم

$$x_2 = w - x_1 \Rightarrow x_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)^T = (100, 50, 150)^T,$$

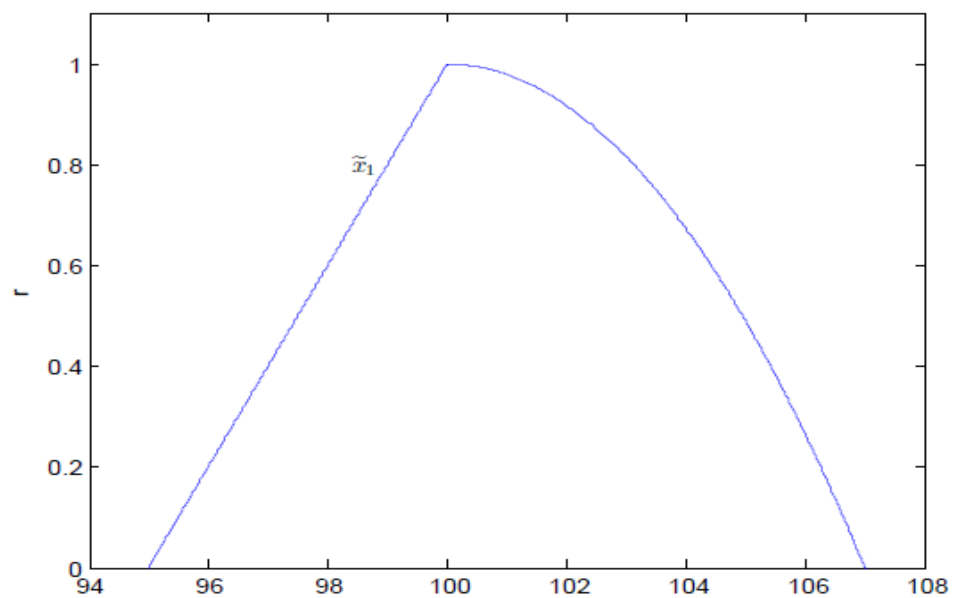
$$\lambda_\beta = v + \lambda_\alpha \Rightarrow \lambda_\beta = (\beta_x^1, \beta_x^2, \beta_x^3)^T = (7, 1, 2)^T.$$

به طور واضح، برای $i = 1, 2, 3$ ، داریم $\alpha_x^i, \beta_x^i \geq 0$ و $x_1^i \leq x_2^i$. بنابراین می‌توان جواب فازی یکتای دستگاه

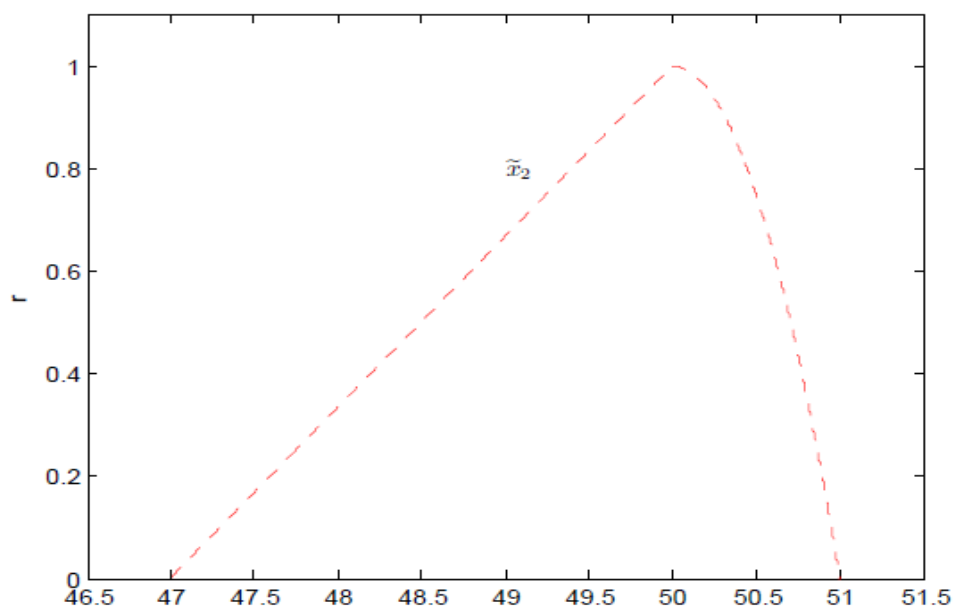
خطی فازی فوق را به صورت زیر ارائه داد

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} (x_1^1, x_2^1; \alpha_x^1, \beta_x^1)_{LR} \\ (x_1^2, x_2^2; \alpha_x^2, \beta_x^2)_{LR} \\ (x_1^3, x_2^3; \alpha_x^3, \beta_x^3)_{LR} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (100, 100; 5, 7)_{LR} \\ (50, 50; 3, 1)_{LR} \\ (150, 150; 6, 2)_{LR} \end{bmatrix}.$$

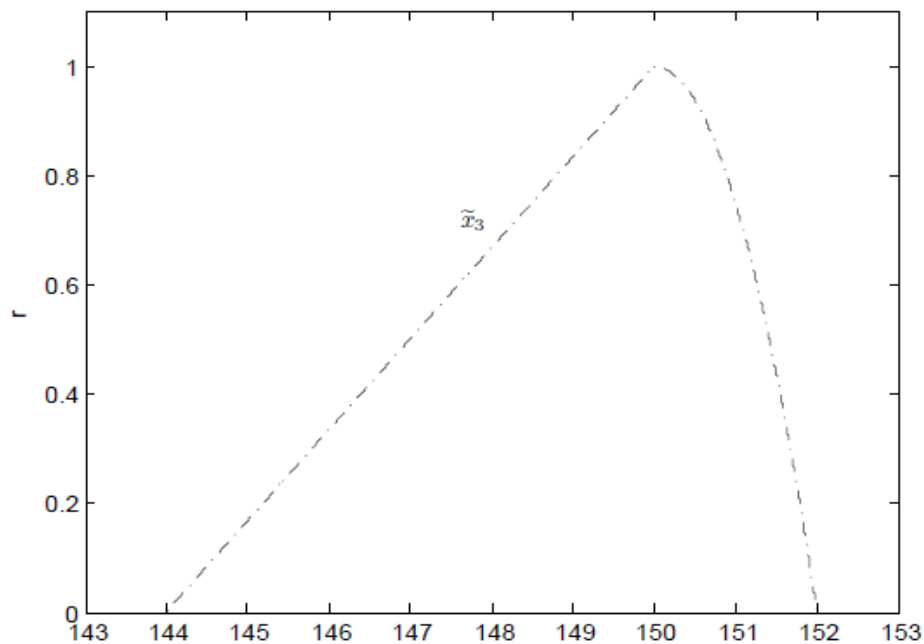
مؤلفه‌های این جواب به ترتیب در شکل‌های ۲-۶-۴ الی ۲-۶-۶ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۴-۶-۲: نمایش مؤلفه ی اول بردار جواب در مثال ۲-۶-۱.



شکل ۵-۶-۲: نمایش مؤلفه ی دوم بردار جواب در مثال ۲-۶-۱.



شکل ۴-۶-۲: نمایش مؤلفه ی سوم بردار جواب در مثال ۲-۶-۱.

باید توجه شود که فرم جواب ارائه شده، با فرم اعداد فازی در نظر گرفته شده برای مدل بندی مسأله، یکسان می باشد. بنابراین با توجه به جواب به دست آمده، شرکت می تواند با منابع موجود، تقریباً ۱۰۰ جفت کفش مردانه، ۵۰ جفت کفش زنانه و نیز تقریباً ۱۵۰ جفت کفش بچه گانه تولید نماید.

فصل سوم

روشی مبتنی بر r -برش

۳-۱ مقدمه

در این فصل، براساس مفهوم r -برش یک عدد فازی، روشی جهت به دست آوردن جواب‌های جبری یک دستگاه خطی فازی ارائه می‌دهیم. در این روش، ابتدا به وسیله‌ی اجرای فرآیند حذفی گوس بازه‌ای روی r -برش دستگاه خطی فازی مربوطه، مجموعه جواب فازی را به دست آورده و سپس با محدود کردن آن جواب جبری دستگاه خطی فازی را در صورت وجود به دست می‌آوریم. لازم به ذکر است که تمام مطالب این فصل برگرفته از مرجع [۲۱] است.

۳-۲ تعاریف پایه‌ای

در این بخش، تعدادی از تعاریف و نتایج ابتدایی که در بخش‌های بعدی این فصل مورد نیاز هستند را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۳-۲-۱: [۲۱] عدد فازی $\tilde{x}$ با r -برش‌های $[x(r), \bar{x}(r)]$ را متقارن^{۳۴} گوئیم، هرگاه

$$\underline{x}(r) + \bar{x}(r) = 0.$$

تعریف ۳-۲-۲: [۲۱] تابع نقطه‌ی میانی^{۳۵} برای عدد فازی $\tilde{x}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

^{۳۴}Symmetric

$$Mid_{\tilde{x}}(r) = \frac{\underline{x}(r) + \bar{x}(r)}{2}, \quad r \in [0, 1].$$

تعریف ۳-۲-۳: [۲۱] تابع پهنا^۳ برای عدد فازی $\tilde{x}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Wid_{\tilde{x}}(r) = \bar{x}(r) - \underline{x}(r), \quad r \in [0, 1].$$

لم ۳-۲-۱: فرض کنید $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ اعداد فازی دلخواه و $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی دلخواهی باشند و نیز $\tilde{y} = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i$ در این صورت نتیجه خواهیم گرفت:

$$Mid_{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^n a_i Mid_{\tilde{x}_i}, \quad Wid_{\tilde{y}} = \sum_{i=1}^n |a_i| Wid_{\tilde{x}_i}.$$

اثبات. تساوی فوق را برای تابع پهنا ثابت می‌کنیم. اثبات برای تابع نقطه‌ی میانی کاملاً مشابه است. برای این کار، تعریف می‌کنیم

$$M = \{i : a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\}, \quad N = \{i : a_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n\}.$$

با توجه به این که $\tilde{y} = \sum_{i=1}^n a_i \tilde{x}_i$ نتیجه می‌گیریم

$$\underline{y}(r) = \sum_{i \in M} a_i \underline{x}_i(r) + \sum_{i \in N} a_i \bar{x}_i(r),$$

$$\bar{y}(r) = \sum_{i \in M} a_i \bar{x}_i(r) + \sum_{i \in N} a_i \underline{x}_i(r).$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} Wid_{\tilde{y}} &= \bar{y}(r) - \underline{y}(r) \\ &= (\sum_{i \in M} a_i \bar{x}_i(r) + \sum_{i \in N} a_i \underline{x}_i(r)) - (\sum_{i \in M} a_i \underline{x}_i(r) + \sum_{i \in N} a_i \bar{x}_i(r)) \\ &= \sum_{i \in M} a_i (\bar{x}_i(r) - \underline{x}_i(r)) - \sum_{i \in N} a_i (\bar{x}_i(r) - \underline{x}_i(r)) \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i| (\bar{x}_i(r) - \underline{x}_i(r)) \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i| Wid_{\tilde{x}_i}, \quad r \in [0, 1]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

^۳Midpoint function

^۴Width function

قرارداد ۳-۲-۱: برای بردار فازی $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ قرارداد می‌کنیم

$$[\tilde{\mathbf{x}}]_r = ([\tilde{x}_1]_r, [\tilde{x}_2]_r, \dots, [\tilde{x}_n]_r)^T = ([\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r)], [\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r)], \dots, [\underline{x}_n(r), \bar{x}_n(r)])^T,$$

و بردار $[\tilde{\mathbf{x}}]_r$ را یک بردار بازه‌ای پارامتری^{۳۷} می‌نامیم.

تعریف ۳-۲-۴: برای دو بردار فازی $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ و $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n)^T$ می‌گوییم

$$\tilde{\mathbf{x}} \subseteq \tilde{\mathbf{y}} \text{ اگر و تنها اگر } \tilde{x}_i \subseteq \tilde{y}_i \text{ برای } i = 1, 2, \dots, n$$

اکنون دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) را در نظر بگیرید. با تساوی قرار دادن r -برش‌های سمت چپ و راست دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱)، دستگاه بازه‌ای پارامتری زیر را به دست خواهیم آورد:

$$\begin{cases} a_{11} [\tilde{x}_1]_r + a_{12} [\tilde{x}_2]_r + \dots + a_{1n} [\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_1]_r, \\ a_{21} [\tilde{x}_1]_r + a_{22} [\tilde{x}_2]_r + \dots + a_{2n} [\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_2]_r, \\ \vdots \\ a_{n1} [\tilde{x}_1]_r + a_{n2} [\tilde{x}_2]_r + \dots + a_{nn} [\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_n]_r, \end{cases} \quad \forall r \in [0, 1], \quad (3-2-1)$$

که در آن $[\tilde{x}_i]_r = [\underline{x}_i(r), \bar{x}_i(r)]$ و $[\tilde{y}_i]_r = [\underline{y}_i(r), \bar{y}_i(r)]$ برای $i = 1, 2, \dots, n$.

فرم ماتریسی دستگاه بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) را می‌توان به صورت

$$A[\tilde{\mathbf{x}}]_r = [\tilde{\mathbf{b}}]_r,$$

ارائه داد، که با توجه به قرارداد ۳-۲-۱ داریم:

$$[\tilde{\mathbf{x}}]_r = ([\tilde{x}_1]_r, [\tilde{x}_2]_r, \dots, [\tilde{x}_n]_r)^T, \quad [\tilde{\mathbf{y}}]_r = ([\tilde{y}_1]_r, [\tilde{y}_2]_r, \dots, [\tilde{y}_n]_r)^T.$$

^{۳۷}Parametric interval number

جواب جبری پارامتری^{۳۸} برای دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) را به صورت بردار بازه‌ای پارامتری

$$[\tilde{\mathbf{x}}_A]_r = ([\tilde{x}_{1A}]_r, [\tilde{x}_{2A}]_r, \dots, [\tilde{x}_{nA}]_r)^T$$

ارائه می دهیم به طوری که

$$A[\tilde{\mathbf{x}}_A]_r = [\tilde{\mathbf{b}}]_r, \quad r \in [0, 1]. \quad (۳-۲-۳)$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم، برای حل یک دستگاه خطی فازی، کافی است خانواده‌ای از دستگاه‌های خطی بازه‌ای در ترازهای^{۳۹} مختلف r حل شوند. بنابراین، یک راه حل منطقی جهت به دست آوردن جواب جبری برای دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱)، حل دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری فوق با استفاده از روش‌های بازه‌ای موجود است. بعد از به دست آوردن جواب‌های پارامتری، با استفاده از لم ۱-۳-۱ بررسی می‌کنیم که آیا خانواده‌ی بازه‌های به دست آمده تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد یا خیر. به همین منظور، در بخش بعدی، فرآیند حذفی گوس بازه‌ای را برای حل دستگاه خطی بازه‌ای با ماتریس ضرایب حقیقی یادآوری می‌کنیم.

۳-۳ فرآیند حذفی گوس بازه‌ای

در این قسمت، ابتدا به یادآوری فرآیند حذفی گوس بازه‌ای برای حل یک دستگاه خطی بازه‌ای با ماتریس ضرایب حقیقی می‌پردازیم. سپس به بررسی رابطه میان جواب جبری پارامتری دستگاه (۳-۲-۱) و جواب به دست آمده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای می‌پردازیم.

فرآیند حذفی گوس بازه‌ای در واقع همان فرآیند حذفی گوس کلاسیک است که در آن اعداد حقیقی جای خود را به اعداد بازه‌ای و نیز اعمال حقیقی جای خود را به اعمال بازه‌ای متناظر داده است [۲۲, ۲۰, ۱۷]. در اینجا، این فرآیند را تنها برای دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) که در آن ماتریس ضرایب A نامنفرد و حقیقی مقدار و بردار سمت راست آن بازه‌ای مقدار است، ارائه می‌دهیم.

^{۳۸}Parametric exact solution
^{۳۹}Levels

می‌دانیم که براساس فرآیند حذفی گوس، در مرحله‌ی پیشرو با استفاده از اعمال سطری مقدماتی، دستگاه را به صورت زیر به یک دستگاه مثلثی تبدیل می‌کنیم:

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} a_{kj}^{(k)},$$

$$[\tilde{b}_i]_r^{(k+1)} = [\tilde{b}_i]_r^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} [\tilde{b}_k]_r^{(k)}, \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad r \in [0, 1],$$
(۳-۳-۱)

که در آن $k = 1, 2, \dots, n-1$ شمارنده‌ی ستون است و $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ ، $i, j = k+1, k+2, \dots, n$ و

$$r \in [0, 1] \text{ برای } [\tilde{b}_i]_r^{(1)} = [\tilde{b}_i]_r = [\underline{b}_i(r), \bar{b}_i(r)]$$

در مرحله‌ی پسرو، بردار جواب پارامتری را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$[\tilde{x}_n]_r = \frac{1}{a_{nn}^{(n)}} [\tilde{b}_n]_r^{(n)},$$
(۳-۳-۲)

$$[\tilde{x}_i]_r = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}} \left\{ [\tilde{b}_i]_r^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} [\tilde{x}_j]_r \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$
(۳-۳-۳)

برای $r \in [0, 1]$ لازم است به این نکته توجه گردد که تمامی اعمال به کارگرفته شده در معادلات (۳-۳-۱) الی (۳-۳-۳) براساس اعمال حساب بازه‌ها می‌باشند. همچنین با توجه به حقیقی بودن و نامنفرد بودن ماتریس ضرایب، این نوع از فرآیند حذفی گوس بازه‌ای شدن است. در ضمن، برای بهبود پایداری عددی الگوریتم فوق، می‌توان از محورگیری جزئی در مرحله‌ی پیشرو استفاده کرد.

قرارداد ۳-۳-۱: در این رساله، بردار جواب به دست آمده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای را مجموعه جواب می‌نامیم و با نماد

$$[\tilde{x}_G]_r = ([\tilde{x}_{1G}]_r, [\tilde{x}_{2G}]_r, \dots, [\tilde{x}_{nG}]_r)^T,$$

نشان می‌دهیم، که در آن $[\tilde{x}_{iG}]_r = [\underline{x}_{iG}(r), \bar{x}_{iG}(r)]$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ و $r \in [0, 1]$

در ادامه نشان می‌دهیم که جواب‌های حاصل شده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای دارای چه خاصیت‌هایی است.

قضیه ۳-۳-۱: هرگاه بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_G]_r = ([\tilde{x}_{1G}]_r, [\tilde{x}_{2G}]_r, \dots, [\tilde{x}_{nG}]_r)^T$ جواب یکتای به دست آمده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای برای دستگاه (۳-۲-۱) باشد، آنگاه برای $i = 1, 2, \dots, n$ یک عدد فازی است. یا به عبارتی دیگر، خانواده‌ی $\{[\tilde{x}_{iG}]_r : r \in [0, 1]\}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ در شرایط لم ۱-۳-۱ صدق می‌کند.

اثبات. با توجه به اینکه براساس اعمال حسابی تعریف شده، جمع و تفریق دو عدد فازی همواره یک عدد فازی می‌باشد و نیز ضرب یک عدد قطعی در یک عدد فازی نیز همواره تشکیل یک عدد فازی می‌دهد، بنابراین از معادلات (۳-۳-۲) و (۳-۳-۳) نتیجه می‌گیریم که $\tilde{x}_{iG}$ ها همواره اعداد فازی هستند و بنابراین خانواده‌ی $\{[\tilde{x}_{iG}]_r : r \in [0, 1]\}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ در شرایط لم ۱-۳-۱ صدق خواهند کرد. ■

قضیه ۳-۳-۲: هرگاه ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد، آنگاه برای $i = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\underline{x}_{jG}(r) + \bar{x}_{jG}(r)) = \underline{b}_i(r) + \bar{b}_i(r), \quad r \in [0, 1],$$

و در نتیجه

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \text{Mid}_{\tilde{x}_{jG}}(r) = \text{Mid}_{\tilde{b}_i}(r), \quad r \in [0, 1].$$

اثبات. قضیه را در حالتی که $n = 2$ است ثابت می‌کنیم. اثبات برای $n > 3$ به صورت مشابه است. دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری 2×2 زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} a_{11} [\tilde{x}_1]_r + a_{12} [\tilde{x}_2]_r = [\tilde{b}_1]_r, \\ a_{21} [\tilde{x}_1]_r + a_{22} [\tilde{x}_2]_r = [\tilde{b}_2]_r, \end{cases}$$

که در آن ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ نامنفرد است. براساس فرآیند حذفی گوس بازه‌ای و با فرض $a_{11} \neq 0$ داریم

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & [\tilde{b}_1]_r \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & [\tilde{b}_2]_r - \frac{a_{21}}{a_{11}}[\tilde{b}_1]_r \end{bmatrix}.$$

حال با استفاده از مرحله‌ی پسرو، به دست می‌آوریم

$$[\tilde{x}_{2G}]_r = \frac{a_{11}}{\det(A)} \left\{ [\tilde{b}_2]_r - \frac{a_{21}}{a_{11}} [\tilde{b}_1]_r \right\},$$

$$[\tilde{x}_{1G}]_r = \frac{1}{a_{11}} \left\{ [\tilde{b}_1]_r - \frac{a_{12}a_{11}}{\det(A)} \left([\tilde{b}_2]_r - \frac{a_{21}}{a_{11}} [\tilde{b}_1]_r \right) \right\}.$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 a_{1j}(\underline{x}_{jG}(r) + \bar{x}_{jG}(r)) &= a_{11}(\underline{x}_{1G}(r) + \bar{x}_{1G}(r)) + a_{12}(\underline{x}_{2G}(r) + \bar{x}_{2G}(r)) \\ &= \left\{ \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right) - \frac{a_{12}a_{11}}{\det(A)} \left(\left(\underline{b}_2(r) + \bar{b}_2(r) \right) - \frac{a_{21}}{a_{11}} \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{a_{12}a_{11}}{\det(A)} \left(\left(\underline{b}_2(r) + \bar{b}_2(r) \right) - \frac{a_{21}}{a_{11}} \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right) \right) \\ &= \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 a_{2j}(\underline{x}_{jG}(r) + \bar{x}_{jG}(r)) &= a_{21}(\underline{x}_{1G}(r) + \bar{x}_{1G}(r)) + a_{22}(\underline{x}_{2G}(r) + \bar{x}_{2G}(r)) \\ &= \frac{a_{21}}{a_{11}} \left\{ \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right) - \frac{a_{12}a_{11}}{\det(A)} \left(\left(\underline{b}_2(r) + \bar{b}_2(r) \right) - \frac{a_{21}}{a_{11}} \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right) \right) \right\} \\ &\quad + \frac{a_{22}a_{11}}{\det(A)} \left(\left(\underline{b}_2(r) + \bar{b}_2(r) \right) - \frac{a_{21}}{a_{11}} \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right) \right) \\ &= \left(\underline{b}_1(r) + \bar{b}_1(r) \right) \left\{ \frac{a_{21}}{a_{11}} + \frac{a_{12}(a_{21})^2}{a_{11}\det(A)} - \frac{a_{22}a_{21}}{\det(A)} \right\} \\ &\quad + \left(\underline{b}_2(r) + \bar{b}_2(r) \right) \left\{ \frac{a_{22}a_{11}}{\det(A)} - \frac{a_{12}a_{21}}{\det(A)} \right\} \\ &= \left(\underline{b}_2(r) + \bar{b}_2(r) \right). \blacksquare \end{aligned}$$

به وسیله‌ی قضیه‌ی ۲-۳-۳ می‌توان رابطه‌ی جدیدی بین جواب به دست آمده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای و جواب جبری پارامتری دستگاه (۱-۲-۳) به صورت زیر ارائه داد.

قضیه ۳-۳-۳: توابع نقطه‌ی میانی جواب حاصله از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای و جواب جبری پارامتری یکتای دستگاه (۳-۲-۱) با هم یکسانند. به عبارت دیگر برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$Mid_{\tilde{x}_{iG}}(r) = Mid_{\tilde{x}_{iA}}(r), \quad r \in [0, 1].$$

اثبات. چون $[\tilde{x}_A]_r = ([\tilde{x}_{1A}]_r, [\tilde{x}_{2A}]_r, \dots, [\tilde{x}_{nA}]_r)^T$ جواب جبری پارامتری دستگاه (۳-۲-۱) می‌باشد، لذا

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\underline{x}_{jA}(r), \bar{x}_{jA}(r)] = [\underline{b}_i(r), \bar{b}_i(r)], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

و به طور واضح

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} (\underline{x}_{jA}(r) + \bar{x}_{jA}(r)) = (\underline{b}_i(r) + \bar{b}_i(r)), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

در نتیجه برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} Mid_{\tilde{x}_{jA}}(r) = Mid_{\tilde{b}_i}(r), \quad r \in [0, 1]. \quad (۳-۳-۴)$$

از طرف دیگر، به وسیله‌ی قضیه‌ی ۳-۳-۲ داریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} Mid_{\tilde{x}_{jG}}(r) = Mid_{\tilde{b}_i}(r), \quad r \in [0, 1]. \quad (۳-۳-۵)$$

همچنین، با توجه به فرض، چون دستگاه (۳-۲-۱) دارای جواب جبری یکتا است، نتیجه می‌گیریم که ماتریس ضرایب A نامنفرد می‌باشد و بنابراین معادلات (۳-۳-۴) و (۳-۳-۵) ایجاب می‌کنند که برای هر $i = 1, 2, \dots, n$

$$Mid_{\tilde{x}_{iG}}(r) = Mid_{\tilde{x}_{iA}}(r), \quad r \in [0, 1]. \quad \blacksquare$$

برای درک بهتر قضایای فوق، مثال زیر را ارائه می‌دهیم.

مثال ۳-۳-۱: دستگاه خطی فازی 3×3 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 = \tilde{b}_1, \\ 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = \tilde{b}_2, \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + 2\tilde{x}_3 = \tilde{b}_3, \end{cases} \quad (3-3-6)$$

که در آن $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2$ و $\tilde{b}_3$ اعداد فازی به ترتیب با توابع عضویت زیر می‌باشند:

$$\tilde{b}_1(t) = \begin{cases} \frac{t+8}{3}, & -8 \leq t < -5, \\ 1, & -5 \leq t < -4, \\ \frac{-t}{4}, & -4 \leq t \leq 0, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \quad \tilde{b}_2(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{5}, & -1 \leq t < 4, \\ 1, & 4 \leq t < 5, \\ \frac{9-t}{4}, & 5 \leq t \leq 9, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

و

$$\tilde{b}_3(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{6}, & -1 \leq t < 5, \\ 1, & 5 \leq t < 7, \\ \frac{11-t}{4}, & 7 \leq t \leq 11, \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

همچنین، توابع عضویت جواب جبری یکتای دستگاه فازی (۳-۳-۶) به صورت زیر می‌باشند:

$$\tilde{x}_1(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t < 0, \\ 1-t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \quad \tilde{x}_2(t) = \begin{cases} t+2, & -2 \leq t < -1, \\ -t, & -1 \leq t \leq 0, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

و

$$\tilde{x}_3(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{2}, & 1 \leq t < 3, \\ 1, & 3 \leq t < 4, \\ 5-t, & 4 \leq t \leq 5, \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

با در نظر گرفتن r -برش دستگاه فازی (۳-۳-۶)، دستگاه بازه‌ای پارامتری

$$\begin{cases} [\tilde{x}_1]_r + [\tilde{x}_2]_r - [\tilde{x}_3]_r = [-8 + 3r, -4r]_r, \\ 2[\tilde{x}_1]_r - [\tilde{x}_2]_r + [\tilde{x}_3]_r = [-1 + 5r, 9 - 4r]_r, \\ -[\tilde{x}_1]_r + [\tilde{x}_2]_r + 2[\tilde{x}_3]_r = [-1 + 6r, 11 - 4r]_r, \end{cases} \quad (3-3-7)$$

با جواب جبری پارامتری

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{x}}_A]_r &= ([\tilde{x}_{1A}]_r, [\tilde{x}_{2A}]_r, [\tilde{x}_{3A}]_r)^T \\ &= ([r-1, 1-r], [r-2, -r], [1+2r, 5-r])^T. \end{aligned}$$

به وسیله‌ی فرآیند حذفی گوس بازه‌ای، برای دستگاه (3-3-7) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{x}}_G]_r &= ([\tilde{x}_{1G}]_r, [\tilde{x}_{2G}]_r, [\tilde{x}_{3G}]_r)^T \\ &= \left(\left[\frac{163r-187}{9}, \frac{187-163r}{9} \right], \left[\frac{83r-104}{9}, \frac{86-83r}{9} \right], \left[\frac{53r-29}{9}, \frac{83-44r}{9} \right] \right)^T. \end{aligned}$$

به طور واضح برای $i = 1, 2, 3$ داریم

$$[\tilde{x}_{iA}]_r \subseteq [\tilde{x}_{iG}]_r, \quad r \in [0, 1].$$

همچنین به راحتی می‌توان نشان داد

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} (\underline{x}_{jA}(r) + \bar{x}_{jA}(r)) = (\underline{b}_i(r) + \bar{b}_i(r)), \quad i = 1, 2, 3, \quad r \in [0, 1],$$

و نیز داریم

$$\begin{aligned} Mid_{\tilde{x}_{1G}}(r) &= Mid_{\tilde{x}_{1A}}(r) = 0, \\ Mid_{\tilde{x}_{2G}}(r) &= Mid_{\tilde{x}_{2A}}(r) = -1, \\ Mid_{\tilde{x}_{3G}}(r) &= Mid_{\tilde{x}_{3A}}(r) = 3 + \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

در بخش بعدی، روشی جدید برای تخمین داخلی مجموعه جواب دستگاه خطی فازی (1-7-1) ارائه می‌دهیم،

به گونه‌ای که این تخمین داخلی، یک جواب جبری باشد.

۳-۴ روش پیشنهادی

براساس قضیه ۳-۳-۳، توابع نقطه‌ی میانی جواب جبری و جواب گوس بازه‌ای باهم برابرند. بر این اساس می‌توانیم روش جدیدی را برای به دست آوردن جواب جبری دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) ارائه دهیم. در روش پیشنهادی، با محدود کردن مجموعه جواب به دست آمده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای، یک بردار بازه‌ای پارامتری به دست خواهیم آورد به طوری که در دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) صدق کند. از طرفی با توجه به اینکه دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱)، در حقیقت r -برش دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) می باشد، بنابراین می توان از روش پیشنهادی مان جهت به دست آوردن جواب جبری فازی برای دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) در صورت وجود استفاده کرد.

حال به توضیح روش پیشنهادی مان جهت به دست آوردن جواب جبری پارامتری برای دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) می پردازیم.

فرض کنید بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_G]_r = ([\tilde{x}_{1G}]_r, [\tilde{x}_{2G}]_r, \dots, [\tilde{x}_{nG}]_r)^T$ جواب به دست آمده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای برای دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) باشد. تعریف می کنیم

$$[\tilde{x}_A]_r = \begin{pmatrix} [\tilde{x}_{1A}]_r \\ [\tilde{x}_{2A}]_r \\ \vdots \\ [\tilde{x}_{nA}]_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{x}_{1G}(r) + \theta_1(r), \bar{x}_{1G}(r) - \theta_1(r)] \\ [\underline{x}_{2G}(r) + \theta_2(r), \bar{x}_{2G}(r) - \theta_2(r)] \\ \vdots \\ [\underline{x}_{nG}(r) + \theta_n(r), \bar{x}_{nG}(r) - \theta_n(r)] \end{pmatrix}, \quad (3-4-1)$$

که در آن

$$0 \leq \theta_i(r) \leq \frac{\bar{x}_{iA}(r) - \underline{x}_{iA}(r)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1]. \quad (3-4-2)$$

توجه کنید که شرط (۳-۴-۲) ایجاب می کند که $[\tilde{x}_A]_r$ یک بردار عدد بازه‌ای پارامتری باشد. برای تعیین مقدار $\theta_i(r)$ فرض می کنیم که بردار عدد بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_A]_r$ در دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) صدق کند. در این صورت داریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{x}_{jA}]_r = [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1].$$

با استفاده از لم ۳-۲-۱، نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{Wid}_{\tilde{x}_{jA}}(r) = \text{Wid}_{\tilde{b}_i}(r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1]. \quad (۳-۴-۳)$$

از طرف دیگر با توجه به معادله‌ی (۳-۴-۱) داریم

$$\text{Wid}_{\tilde{x}_{jA}}(r) = \text{Wid}_{\tilde{x}_{jG}}(r) - 2\theta_j(r), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1]. \quad (۳-۴-۴)$$

بنابراین از معادلات (۳-۴-۳) و (۳-۴-۴)، برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \theta_j(r) = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \text{Wid}_{\tilde{x}_{jG}}(r) - \text{Wid}_{\tilde{b}_i}(r) \right\}. \quad (۳-۴-۵)$$

بنابراین برای یافتن بردار عدد بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_A]_r$ ، ابتدا دستگاه خطی حقیقی (۳-۴-۵) را حل می‌کنیم، سپس مقدار به دست آمده‌ی $\theta_i(r)$ را در معادله‌ی (۳-۴-۱) جایگذاری می‌کنیم. برای حل دستگاه خطی حقیقی (۳-۴-۵) می‌توانیم از فرآیند حذفی گوس کلاسیک (معمولی) استفاده کنیم. در ضمن، هرگاه جواب دستگاه (۳-۴-۵) در شرط (۳-۴-۲) صدق کرد، در این صورت دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) دارای جواب جبری یکتا به فرم معادله‌ی (۳-۴-۱) می‌باشد. در غیر این صورت دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) دارای هیچ جواب جبری بازه‌ای پارامتری نیست.

بحث فوق را می‌توان برای دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) نیز مطرح کرد، زیرا در واقع دستگاه (۳-۲-۱) r -برش دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) می‌باشد. ضمن آن که جهت به دست آوردن جواب جبری برای دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) در فرم r -برش، بعد از به دست آوردن بردار عدد بازه‌ای پارامتری (۳-۴-۱) باید بررسی شود که آیا جواب به دست آمده تکمیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد یا خیر؟

در قضیه‌ی زیر یک شرط کافی برای فازی بودن جواب به دست آمده، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱-۴-۳: فرض کنید بردار پارامتری $\Theta(r) = (\theta_1(r), \theta_2(r), \dots, \theta_n(r))^T$ جواب یکنای دستگاه پارامتری حقیقی (۳-۴-۵) باشد، به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$(۱) \text{ برای } i = 1, 2, \dots, n \text{ و } r \in [0, 1] \text{ داشته باشیم: } 0 \leq \theta_i(r) \leq \frac{\bar{x}_{iA}(r) - \underline{x}_{iA}(r)}{2}$$

(۲) برای $i = 1, 2, \dots, n$ تابعی از چپ پیوسته و نازولی نسبت به r روی بازه‌ی $[0, 1]$ باشد.

در این صورت برای $i = 1, 2, \dots, n$ خانواده‌ی بازه‌های

$$\{[\tilde{x}_{iA}]_r = [\underline{x}_{iG}(r) + \theta_i(r), \bar{x}_{iG}(r) - \theta_i(r)]\},$$

تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد.

اثبات. بر اساس لم ۱-۳-۱ کافی است نشان دهیم:

الف) برای $i = 1, 2, \dots, n$ و $r \in [0, 1]$ بازه‌ی بسته و کراندار روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

ب) هرگاه $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ آنگاه $[\tilde{x}_{iA}]_{r_1} \supseteq [\tilde{x}_{iA}]_{r_2}$

ج) هرگاه $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله‌ای نازولی و همگرا به r در بازه‌ی $[0, 1]$ باشد، آنگاه

$$[\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_{iG}(r_k) + \theta_i(r_k), \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_{iG}(r_k) - \theta_i(r_k)] = [\underline{x}_{iG}(r) + \theta_i(r), \bar{x}_{iG}(r) - \theta_i(r)].$$

اثبات الف: با توجه به اینکه برای $i = 1, 2, \dots, n$ یک عدد فازی می‌باشد، لذا برای $r \in [0, 1]$

$$[\tilde{x}_{iG}]_r = [\underline{x}_{iG}(r), \bar{x}_{iG}(r)]$$

نسبت به r روی بازه‌ی $[0, 1]$ است و همچنین $\underline{x}_{iG}(r) \leq \bar{x}_{iG}(r)$ حال با توجه به فرض قضیه و شرط ۱،

نتیجه می‌گیریم که توابع $\underline{x}_{iG} + \theta_i$ و $\bar{x}_{iG} - \theta_i$ توابعی کراندار روی بازه‌ی $[0, 1]$ هستند و نیز

$$\underline{x}_{iG}(r) + \theta_i(r) \leq \bar{x}_{iG}(r) - \theta_i(r)$$

به عبارتی دیگر برای $r \in [0, 1]$ ، $[\tilde{x}_{iA}]_r$ بازه‌ای بسته و کراندار می‌باشد.

اثبات ب: فرض کنید $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$. با توجه به اینکه برای $i = 1, 2, \dots, n$ یک عدد فازی می‌باشد، لذا $[x_{iG}(r_1), \bar{x}_{iG}(r_1)] \supseteq [x_{iG}(r_2), \bar{x}_{iG}(r_2)]$ ، یا به عبارتی دیگر

$$x_{iG}(r_1) \leq x_{iG}(r_2), \quad \bar{x}_{iG}(r_2) \leq \bar{x}_{iG}(r_1), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-4-6)$$

از طرف دیگر با استفاده از فرض قضیه و شرط ۲، داریم

$$\theta_i(r_1) \leq \theta_i(r_2), \quad -\theta_i(r_2) \leq -\theta_i(r_1), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-4-7)$$

بنابراین از معادلات (۳-۴-۶) و (۳-۴-۷)، برای $i = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می‌گیریم

$$x_{iG}(r_1) + \theta_i(r_1) \leq x_{iG}(r_2) + \theta_i(r_2), \quad \bar{x}_{iG}(r_2) - \theta_i(r_2) \leq \bar{x}_{iG}(r_1) - \theta_i(r_1),$$

یا به عبارتی دیگر $[\tilde{x}_{iA}]_{r_1} \supseteq [\tilde{x}_{iA}]_{r_2}$

اثبات ج: چون برای $i = 1, 2, \dots, n$ یک عدد فازی می‌باشد، بنابراین برای هر دنباله‌ی نانزولی همگرا به $r \in [0, 1]$ مانند $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_{iG}(r_k) = \bar{x}_{iG}(r), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_{iG}(r_k) = x_{iG}(r).$$

از طرف دیگر، چون θ_i تابعی از چپ پیوسته روی $[0, 1]$ می‌باشد، خواهیم داشت

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_i(r_k) = \theta_i(r).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} x_{iA}(r_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \{x_{iG}(r_k) + \theta_i(r_k)\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{iG}(r_k) + \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_i(r_k) \\ &= x_{iG}(r) + \theta_i(r) \\ &= x_{iA}(r). \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_{iA}(r_k) = \bar{x}_{iA}(r)$. لذا اثبات قضیه به پایان می‌رسد. ■

در قضیه زیر نشان می‌دهیم که جواب به دست آمده توسط روش پیشنهادی مان در واقع یک جواب جبری برای دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) است.

قضیه ۳-۴-۲: فرض کنید ماتریس ضرایب A به طور کامل نامنفرد باشد و همچنین جواب دستگاه (۳-۴-۵) در شرط (۳-۴-۲) صدق کند. در این صورت برای $r \in [0, 1]$ بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_A]_r$ تعریف شده در معادله (۳-۴-۱) جواب جبری یکتای دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) است.

اثبات. برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_i^+ = \{j : a_{ij} \geq 0, j = 1, 2, \dots, n\}, \quad \Gamma_i^- = \{j : a_{ij} < 0, j = 1, 2, \dots, n\}.$$

می‌بایستی برای $i = 1, 2, \dots, n$ و برای $r \in [0, 1]$ نشان دهیم $\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{x}_{jA}]_r = [\tilde{y}_i]_r$ به این منظور کافی است نشان دهیم

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_{jA}(r) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_{jA}(r) = \underline{y}_i(r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1], \quad (۳-۴-۸)$$

و

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \bar{x}_{jA}(r) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_{jA}(r) = \bar{y}_i(r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1]. \quad (۳-۴-۹)$$

از معادلات (۳-۴-۱) و (۳-۴-۵) و قضیه ۳-۳-۲ داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_{jA}(r) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_{jA}(r) &= \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\underline{x}_{jG}(r) + \theta_j(r)) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\bar{x}_{jG}(r) - \theta_j(r)) \\
&= \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_{jG}(r) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_{jG}(r) + \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \theta_j(r) \\
&= \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_{jG}(r) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_{jG}(r) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| (\bar{x}_{jG}(r) - \underline{x}_{jG}(r)) \right\} - \frac{1}{2} (\bar{y}_i(r) - \underline{y}_i(r)) \\
&= \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_{jG}(r) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_{jG}(r) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\bar{x}_{jG}(r) - \underline{x}_{jG}(r)) - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\bar{x}_{jG}(r) - \underline{x}_{jG}(r)) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{y}_i(r) - \underline{y}_i(r)) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\underline{x}_{jG}(r) + \bar{x}_{jG}(r)) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\underline{x}_{jG}(r) + \bar{x}_{jG}(r)) \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} (\bar{y}_i(r) - \underline{y}_i(r)) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} (\underline{x}_{jG}(r) + \bar{x}_{jG}(r)) + (\underline{y}_i(r) - \bar{y}_i(r)) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ (\underline{y}_i(r) + \bar{y}_i(r)) + (\underline{y}_i(r) - \bar{y}_i(r)) \right\} \\
&= \underline{y}_i(r)
\end{aligned}$$

به طور مشابه می توان برقراری معادله ی (۳-۴-۹) را نیز ثابت کرد. از طرف دیگر چون ماتریس ضرایب A به طور کامل نامنفرد است، لذا ماتریس های A و $|A|$ نامنفرد می باشند. بنابراین $[\tilde{x}_G]_r$ و $\theta_i(r)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ به طور یکتا به دست می آیند و در نتیجه $[\tilde{x}_A]_r$ نیز یکتاست. بنابراین اثبات تمام است. ■

با استفاده از قضایای ۳-۴-۱ و ۳-۴-۲ می توان نتیجه ی بعدی را ارائه داد.

نتیجه ۳-۴-۱: فرض کنید ماتریس ضرایب A به طور کامل نامنفرد باشد و همچنین جواب دستگاه (۳-۴-۵) در شرایط قضیه ی ۳-۴-۱ صدق کند. در این صورت، دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) دارای جواب جبری فازی یکتاست، به طوری که r -برش های مؤلفه های آن مطابق معادله ی (۳-۴-۱) تعریف می شوند.

نکته ۳-۴-۱: برای به دست آوردن جواب جبری دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱)، بعد از حل دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) و به دست آوردن خانواده‌ی بازه‌های $\{\tilde{x}_{iA}^r : r \in [0, 1]\}$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، می‌بایستی به وسیله‌ی لم ۱-۳-۱ و یا قضیه‌ی ۳-۴-۱ بررسی کنیم که آیا خانواده‌ی بازه‌های به دست آمده، تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد یا خیر.

براساس بحث فوق، می‌توانیم الگوریتمی جهت به دست آوردن یک تخمین داخلی از مجموعه جواب دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) ارائه دهیم، به طوری که این تخمین یک جواب جبری برای دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) باشد. این الگوریتم شامل مراحل زیر است:

الگوریتم:

گام ۱: دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری (۳-۲-۱) را به روش فرآیند حذفی گوس بازه‌ای حل نمایید و بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_G]^r$ ، $r \in [0, 1]$ را به دست آورید.

گام ۲: دستگاه خطی حقیقی پارامتری (۳-۴-۵) را به روش فرآیند حذفی گوس کلاسیک (معمولی) حل نمایید و بردار حقیقی پارامتری $\theta_i(r)$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ و $r \in [0, 1]$ را به دست آورید.

گام ۳: با استفاده از معادله‌ی (۳-۴-۱) بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_A]^r$ را تشکیل دهید.

گام ۴: هرگاه خانواده‌ی بازه‌های $\{[\tilde{x}_A]^r : r \in [0, 1]\}$ در شرایط لم ۱-۳-۱ و یا قضیه‌ی ۳-۴-۱ صدق کرد، آنگاه دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) دارای جواب جبری یکتا می‌باشد و $[\tilde{x}_A]^r$ در واقع r -برش جواب جبری دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) است. در غیر این صورت، دستگاه خطی فازی (۱-۷-۱) دارای جواب جبری نیست.

۳-۵ مثال‌های عددی

در این بخش، برای نشان دادن کارایی روش ارائه شده در بخش قبلی، دو مثال عددی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۳-۵-۱: دستگاه خطی فازی 4×4 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + 2\tilde{x}_4 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 - 2\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 - \tilde{x}_4 = \tilde{b}_2, \\ \tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 + \tilde{x}_4 = \tilde{b}_3, \\ \tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3 - 2\tilde{x}_4 = \tilde{b}_4, \end{cases} \quad (3-5-1)$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3$ و $\tilde{b}_4$ به وسیله‌ی توابع عضویشان به ترتیب به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1(t) &= \begin{cases} \frac{t+10}{12}, & -10 \leq t < 2, \\ 1, & 2 \leq t < 9, \\ \frac{26-t}{17}, & 9 \leq t \leq 26, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} & \tilde{b}_2(t) &= \begin{cases} \frac{t+22}{11}, & -22 \leq t < -11, \\ 1, & -11 \leq t < -6, \\ \frac{9-t}{15}, & -6 \leq t \leq 9, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \\ \tilde{b}_3(t) &= \begin{cases} \frac{t+9}{9}, & -9 \leq t < 0, \\ 1, & 0 \leq t < 4, \\ \frac{16-t}{12}, & 4 \leq t \leq 16, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} & \tilde{b}_4(t) &= \begin{cases} \frac{t+23}{18}, & -23 \leq t < -15, \\ 1, & -5 \leq t < 1, \\ \frac{18-t}{17}, & 1 \leq t \leq 18, \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که ماتریس ضرایب A به طور کامل نامنفرد است. با در نظر گرفتن r -برش دستگاه (3-5-1)، دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2[\tilde{x}_1]_r - [\tilde{x}_2]_r + [\tilde{x}_3]_r + 2[\tilde{x}_4]_r = [12r - 10, 26 - 17r]_r, \\ [\tilde{x}_1]_r - 2[\tilde{x}_2]_r + [\tilde{x}_3]_r - [\tilde{x}_4]_r = [11r - 22, 9 - 15r]_r, \\ [\tilde{x}_1]_r - [\tilde{x}_2]_r + [\tilde{x}_3]_r + [\tilde{x}_4]_r = [9r - 9, 16 - 12r]_r, \\ [\tilde{x}_1]_r + 3[\tilde{x}_2]_r - [\tilde{x}_3]_r - 2[\tilde{x}_4]_r = [18r - 23, 18 - 17r]_r, \end{cases} \quad (3-5-2)$$

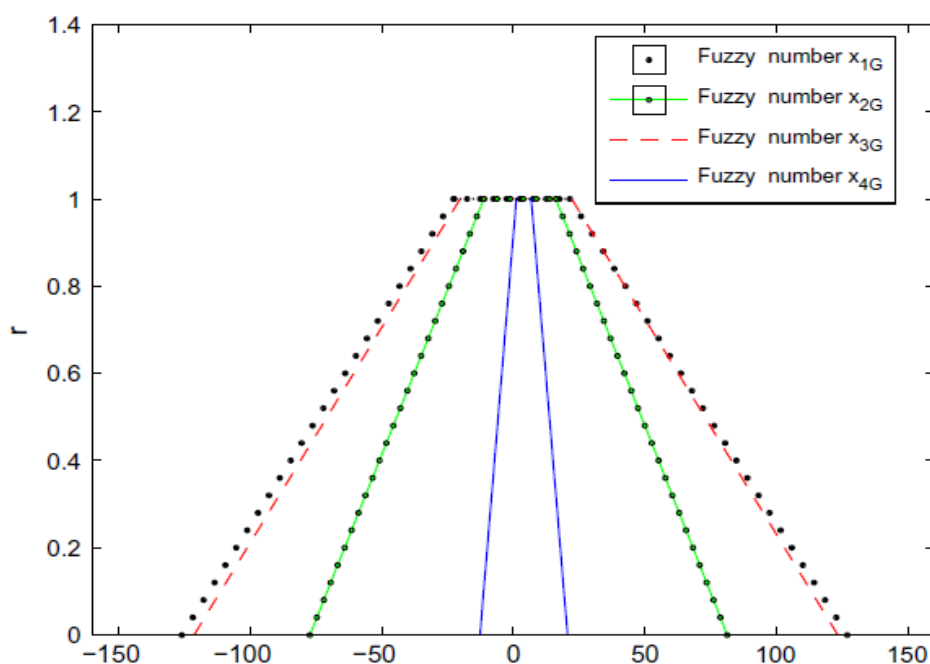
با توجه به الگوریتم ارائه شده، ابتدا دستگاه فوق را به وسیله‌ی فرآیند حذفی گوس بازه‌ای حل می‌کنیم. برای این کار، با استفاده از عملیات سطری مقدماتی به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & [12r - 10, 26 - 17r] \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 & [\frac{39}{2}r - 35, 14 - 21r] \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & [\frac{49}{2}r - \frac{80}{3}, \frac{98}{3} - \frac{49}{2}r] \\ 0 & 0 & 0 & -7 & [\frac{193}{2}r - \frac{433}{3}, \frac{265}{3} - \frac{193}{2}r] \end{bmatrix}.$$

بنابراین، به وسیله‌ی معادلات (۳-۳-۲) و (۳-۳-۳) مجموعه جواب $[\tilde{x}_G]_r$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$[\tilde{x}_G]_r = \begin{pmatrix} [\tilde{x}_{1G}]_r \\ [\tilde{x}_{2G}]_r \\ [\tilde{x}_{3G}]_r \\ [\tilde{x}_{4G}]_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{1447}{14}r - \frac{881}{7}, \frac{888}{7} - \frac{1475}{14}r \right] \\ \left[\frac{925}{14}r - \frac{1622}{21}, \frac{1706}{21} - \frac{911}{14}r \right] \\ \left[\frac{1415}{14}r - \frac{2546}{21}, \frac{2588}{21} - \frac{1415}{14}r \right] \\ \left[\frac{193}{14}r - \frac{265}{21}, \frac{433}{21} - \frac{193}{14}r \right] \end{pmatrix}.$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که $[\tilde{x}_{iG}]_r$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، تشکیل r -برش یک عدد فازی را می‌دهد. این حقیقت در شکل ۳-۵-۱ به نمایش درآمده است.



شکل ۳-۵-۱: نمایش اعداد فازی $\tilde{x}_{1G}$ ، $\tilde{x}_{2G}$ ، $\tilde{x}_{3G}$ و $\tilde{x}_{4G}$ از مثال ۳-۵-۱.

حال دستگاه خطی حقیقی پارامتری (۳-۴-۵) را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2\theta_1(r) + \theta_2(r) + \theta_3(r) + 2\theta_4(r) = \frac{3286}{7} - \frac{2719}{7}r, \\ \theta_1(r) + 2\theta_2(r) + \theta_3(r) + \theta_4(r) = \frac{8572}{21} - \frac{4723}{14}r, \\ \theta_1(r) + \theta_2(r) + \theta_3(r) + \theta_4(r) = \frac{6971}{21} - \frac{1920}{7}r, \\ \theta_1(r) + 3\theta_2(r) + \theta_3(r) + 2\theta_4(r) = \frac{10480}{21} - \frac{5771}{14}r. \end{cases} \quad (3-5-3)$$

با حل دستگاه فوق به وسیله‌ی فرآیند حذفی گوس کلاسیک، نتیجه خواهیم گرفت

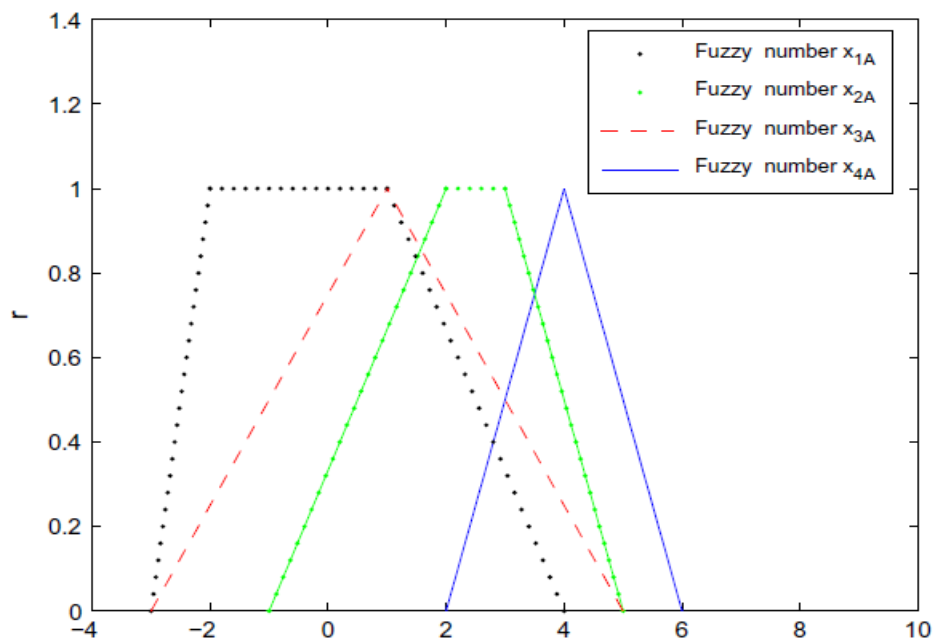
$$\begin{pmatrix} \theta_1(r) \\ \theta_2(r) \\ \theta_3(r) \\ \theta_4(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{860}{7} - \frac{1433}{14}r \\ \frac{1601}{21} - \frac{883}{14}r \\ \frac{2483}{21} - \frac{1359}{14}r \\ \frac{307}{21} - \frac{165}{14}r \end{pmatrix}.$$

در گام سوم، با استفاده از معادله‌ی (۳-۴-۱) بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{\mathbf{x}}_A]_r$ را که به عنوان یک تخمین داخلی

برای مجموعه جواب $[\tilde{\mathbf{x}}_G]_r$ می‌باشد، به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$[\tilde{\mathbf{x}}_A]_r = \begin{pmatrix} [\tilde{x}_{1A}]_r \\ [\tilde{x}_{2A}]_r \\ [\tilde{x}_{3A}]_r \\ [\tilde{x}_{4A}]_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{x}_{1A}(r) + \theta_1(r), \bar{x}_{1A}(r) - \theta_1(r)] \\ [\underline{x}_{2A}(r) + \theta_2(r), \bar{x}_{2A}(r) - \theta_2(r)] \\ [\underline{x}_{3A}(r) + \theta_3(r), \bar{x}_{3A}(r) - \theta_3(r)] \\ [\underline{x}_{4A}(r) + \theta_4(r), \bar{x}_{4A}(r) - \theta_4(r)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r - 3, 4 - 3r] \\ [3r - 1, 5 - 2r] \\ [4r - 3, 5 - 4r] \\ [2r + 2, 6 - 2r] \end{pmatrix}.$$

شکل ۳-۵-۲ به وضوح نشان می‌دهد که $[\tilde{x}_{iA}]_r$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، تشکیل r -برش یک عدد فازی را می‌دهد.



شکل ۳-۵-۲: نمایش اعداد فازی $\tilde{x}_{1A}$, $\tilde{x}_{2A}$, $\tilde{x}_{3A}$ و $\tilde{x}_{4A}$ از مثال ۳-۵-۱.

بنابراین در این مثال، دارای جواب جبری فازی یکتای $\tilde{\mathbf{x}}_A = (\tilde{x}_{1A}, \tilde{x}_{2A}, \tilde{x}_{3A}, \tilde{x}_{4A})^T$ با توابع عضویت زیر می‌باشیم

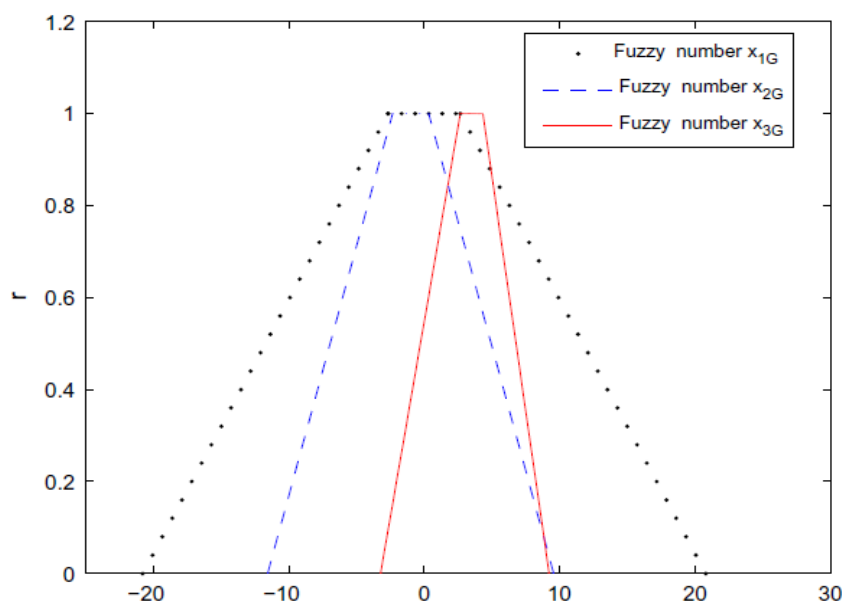
$$\tilde{x}_{1A}(t) = \begin{cases} t+3, & -3 \leq t < -2, \\ 1, & -2 \leq t < 1, \\ \frac{4-t}{3}, & 1 \leq t \leq 4, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \quad \tilde{x}_{2A}(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{3}, & -1 \leq t < 2, \\ 1, & 2 \leq t < 3, \\ \frac{5-t}{2}, & 3 \leq t \leq 5, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

$$\tilde{x}_{3A}(t) = \begin{cases} \frac{t+3}{4}, & -3 \leq t < 1, \\ \frac{5-t}{4}, & 1 \leq t \leq 5, \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \quad \tilde{x}_{4A}(t) = \begin{cases} \frac{t-2}{2}, & 2 \leq t < 4, \\ \frac{6-t}{2}, & 4 \leq t \leq 6, \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

مثال ۳-۵-۲: دستگاه خطی فازی (۳-۳-۶) را در نظر بگیرید. با به کار گیری فرآیند حذفی گوس بازه‌ای، مجموعه جواب را به صورت زیر به دست خواهیم آورد:

$$[\tilde{x}_G]_r = \begin{pmatrix} [\tilde{x}_{1G}]_r \\ [\tilde{x}_{2G}]_r \\ [\tilde{x}_{3G}]_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\frac{163r-187}{9}, \frac{187-163r}{9} \right] \\ \left[\frac{83r-104}{9}, \frac{86-83r}{9} \right] \\ \left[\frac{53r-29}{9}, \frac{83-44r}{9} \right] \end{pmatrix}.$$

شکل ۳-۵-۳ نشان می‌دهد که جواب‌های به دست آمده از طریق فرآیند حذفی گوس بازه‌ای اعداد فازی می‌باشند.



شکل ۳-۵-۳: نمایش اعداد فازی $\tilde{x}_{1G}$ ، $\tilde{x}_{2G}$ و $\tilde{x}_{3G}$ از مثال ۳-۵-۲.

اکنون دستگاه خطی حقیقی پارامتری (۳-۴-۵) را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} \theta_1(r) + \theta_2(r) + \theta_3(r) = \frac{302}{9} - \frac{263}{9}r, \\ 2\theta_1(r) + \theta_2(r) + \theta_3(r) = \frac{160}{3} - \frac{139}{3}r, \\ \theta_1(r) + \theta_2(r) + 2\theta_3(r) = \frac{340}{9} - \frac{298}{9}r, \end{cases} \quad (۳-۵-۴)$$

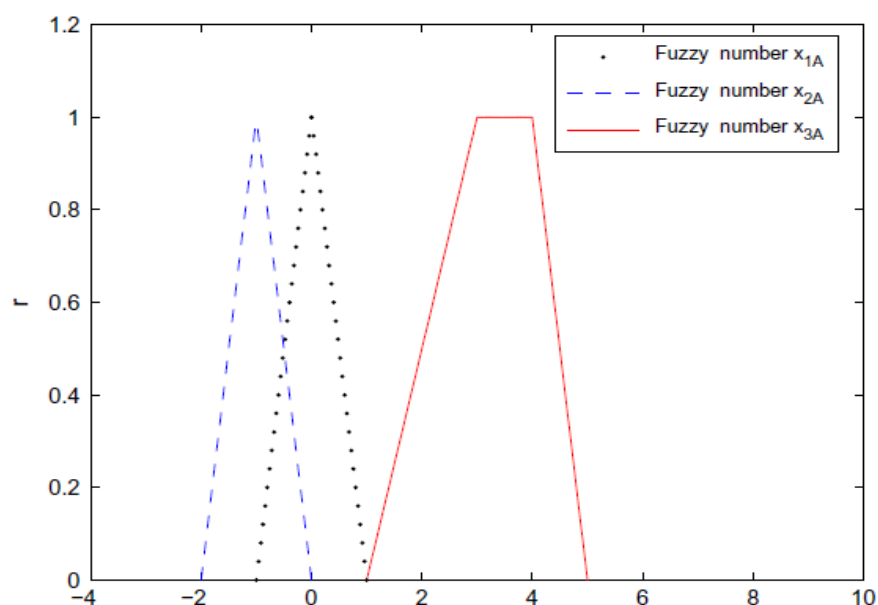
با حل دستگاه فوق به روش فرآیند حذفی گوس کلاسیک، خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(r) \\ \theta_2(r) \\ \theta_3(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{178}{9} - \frac{154}{9}r \\ \frac{86}{9} - \frac{74}{9}r \\ \frac{38}{9} - \frac{35}{9}r \end{pmatrix}.$$

در گام بعدی، با استفاده از معادله (۳-۴-۱) بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{x}_A]_r$ را که به عنوان یک تخمین داخلی برای مجموعه جواب $[\tilde{x}_G]_r$ می‌باشد، به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$[\tilde{x}_A]_r = \begin{pmatrix} [\tilde{x}_{1A}]_r \\ [\tilde{x}_{2A}]_r \\ [\tilde{x}_{3A}]_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{x}_{1A}(r) + \theta_1(r), \bar{x}_{1A}(r) - \theta_1(r)] \\ [\underline{x}_{2A}(r) + \theta_2(r), \bar{x}_{2A}(r) - \theta_2(r)] \\ [\underline{x}_{3A}(r) + \theta_3(r), \bar{x}_{3A}(r) - \theta_3(r)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [r-1, 1-r] \\ [r-2, -r] \\ [2r+1, 5-r] \end{pmatrix}.$$

به وضوح شکل ۳-۵-۴ نشان می‌دهد که $i = 1, 2, 3, 4$ ، $[\tilde{x}_{iA}]_r$ تشکیل r -برش یک عدد فازی را می‌دهد. بنابراین می‌توانیم به آسانی توابع عضویت جواب جبری را به صورت معادلات ارائه شده در مثال ۳-۳-۱ به دست آوریم.



شکل ۳-۵-۴: نمایش اعداد فازی $\tilde{x}_{1A}$ ، $\tilde{x}_{2A}$ و $\tilde{x}_{3A}$ از مثال ۳-۵-۲.

۳-۶ مثال کاربردی

در این بخش مسأله تولید کفش های مردانه، زنانه و بچه گانه را که در مثال ۲-۶-۱ مورد بررسی قرار گرفته اند را مجدداً در نظر می گیریم و این بار به روش مطرح شده در این فصل، آن را حل می کنیم. با در نظر گرفتن r -برش دستگاه خطی فازی ارائه شده در مثال ۲-۶-۱، دستگاه خطی بازه‌ای پارامتری زیر را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} 8000[\tilde{x}_1]_r + 5000[\tilde{x}_2]_r + 7000[\tilde{x}_3]_r = [2003000 + 97000r, 2100000 + 75000\sqrt{1-r}], \\ 200[\tilde{x}_1]_r + 70[\tilde{x}_2]_r + 100[\tilde{x}_3]_r = [36690 + 1810r, 38500 + 1670\sqrt{1-r}], \\ 3[\tilde{x}_1]_r + 2[\tilde{x}_2]_r + 4[\tilde{x}_3]_r = [955 + 45r, 1000 + 31\sqrt{1-r}]. \end{cases}$$

با توجه به الگوریتم ارائه شده، ابتدا دستگاه فوق را به وسیله‌ی فرآیند حذفی گوس بازه‌ای حل می کنیم. برای این کار، با استفاده از عملیات سطری مقدماتی به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 8000 & 5000 & 7000 & [97000r + 2003000, 75000\sqrt{1-r} + 2100000] \\ 0 & -55 & -75 & [1810r - 1875\sqrt{1-r} - 15810, 1670\sqrt{1-r} - 2425r - 11575] \\ 0 & 0 & \frac{53}{44} & [2161r/44 - 1425\sqrt{1-r}/44 + 5789/44, 1531\sqrt{1-r}/44 - 1843r/44 + 9793/44] \end{bmatrix}.$$

بنابراین، به وسیله‌ی معادلات (۳-۳-۲) و (۳-۳-۳) مجموعه جواب $[\tilde{x}_G]_r$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$[\tilde{x}_G]_r = \begin{pmatrix} \left[\frac{41497}{424}r + \frac{903}{424} - \frac{29467}{424}\sqrt{1-r}, \frac{32435}{424}\sqrt{1-r} - \frac{39377}{424}r + \frac{81777}{424} \right] \\ \left[\frac{4850}{53}r - \frac{2200}{53} - \frac{3697}{53}\sqrt{1-r}, \frac{3750}{53}\sqrt{1-r} - \frac{4691}{53}r + \frac{7341}{53} \right] \\ \left[\frac{2161}{53}r + \frac{5789}{53} - \frac{1425}{53}\sqrt{1-r}, \frac{1531}{53}\sqrt{1-r} - \frac{1843}{53}r + \frac{9793}{53} \right] \end{pmatrix}.$$

به آسانی می توان بررسی کرد که $[\tilde{x}_{iG}]_r$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ تشکیل r -برش یک عدد فازی را می دهد. حال دستگاه خطی حقیقی پارامتری (۳-۴-۵) را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$\begin{cases} 8000 \theta_1(r) + 5000 \theta_2(r) + 7000 \theta_3(r) = \frac{1}{53} (57927000\sqrt{1-r} - 75733000(1-r)), \\ 200 \theta_1(r) + 70 \theta_2(r) + 100 \theta_3(r) = \frac{1}{53} (1137965\sqrt{1-r} - 1497095(1-r)), \\ 3 \theta_1(r) + 2 \theta_2(r) + 4 \theta_3(r) = \frac{1}{424} (193153\sqrt{1-r} - 252163(1-r)), \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق به وسیله‌ی فرآیند حذفی گؤس کلاسیک، نتیجه خواهیم گرفت

$$\begin{pmatrix} \theta_1(r) \\ \theta_2(r) \\ \theta_3(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{424}(29467\sqrt{1-r} - 39377(1-r)) \\ \frac{1}{53}(3697\sqrt{1-r} - 4691(1-r)) \\ \frac{1}{53}(1425\sqrt{1-r} - 1843(1-r)) \end{pmatrix}.$$

در گام سوم، با استفاده از معادله‌ی (۱-۴-۳) بردار بازه‌ای پارامتری $[\tilde{\mathbf{x}}_A]_r$ را که به عنوان یک تخمین داخلی

برای مجموعه جواب $[\tilde{\mathbf{x}}_G]_r$ می‌باشد، به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

$$[\tilde{\mathbf{x}}_A]_r = \begin{pmatrix} [\tilde{x}_{1A}]_r \\ [\tilde{x}_{2A}]_r \\ [\tilde{x}_{3A}]_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{x}_{1A}(r) + \theta_1(r), \bar{x}_{1A}(r) - \theta_1(r)] \\ [\underline{x}_{2A}(r) + \theta_2(r), \bar{x}_{2A}(r) - \theta_2(r)] \\ [\underline{x}_{3A}(r) + \theta_3(r), \bar{x}_{3A}(r) - \theta_3(r)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [5r + 95, 100 + 7\sqrt{1-r}] \\ [3r + 47, 50 + \sqrt{1-r}] \\ [6r + 144, 150 + 2\sqrt{1-r}] \end{pmatrix}.$$

می‌توان به آسانی مشاهده کرد که جواب به دست آمده از این روش کاملاً با جواب به دست آمده از روش

فصل دوم یکسان است. در واقع، در مثال ۲-۶-۱ جواب را در فرم $L-R$ ارائه داده ایم اما در این قسمت همان

جواب را در فرم r -برش به دست آورده ایم.

تحقیقات آینده

در قسمت اول این رساله متر جدیدی را روی دسته ی مشخصی از اعداد فازی معرفی کرده ایم. از این متر استفاده های متعددی می توان انجام داد، از جمله: کاربرد آن در حل دستگاه خطی فازی $L-R$ برای دستگاه های مربعی و غیر مربعی (لازم به ذکر است که در این رساله دستگاه های مربعی مورد بررسی قرار گرفته اند)، کاربرد آن در رتبه بندی اعداد فازی $L-R$ و غیره می باشد. در قسمت دوم این رساله، با استفاده از فرآیند حذفی گوس بازه ای و محدود کردن مجموعه جواب به دست آمده، موفق به ارائه ی جواب جبری (در صورت وجود) برای یک دستگاه خطی فازی شده ایم. می توان به جای استفاده از فرآیند حذفی گوس بازه ای، از روش های دیگری چون روش حذفی گوس جردن بازه ای، روش تجزیه ی LU بازه ایی و غیره استفاده نمود.

واژه‌نامه

Union.....	اجتماع.....
Heigh.....	ارتفاع.....
Fuzzy reasoning.....	استدلال فازی.....
Intersection.....	اشتراک.....
Extension principle.....	اصل گسترش.....
Interval number vector.....	بردار عدد بازه‌ای.....
Fuzzy number vector.....	بردار عدد فازی.....
Completely nonsingular.....	به طور کامل نامنفرد.....
Width.....	پهنا.....
Membership function.....	تابع عضویت.....
Characteristic function.....	تابع مشخصه.....
Convexity.....	تحدب.....
Level	تراز.....
Support.....	تکیه گاه.....
Empty.....	تهی.....
Weak fuzzy solution.....	جواب فازی ضعیف.....
Strong fuzzy solution.....	جواب فازی قوی.....
Fuzzy arithmetic	حساب فازی.....

Membership degree.....	درجه عضویت.....
Fuzzy linear system.....	دستگاه خطی فازی.....
Subnormal.....	زیر نرمال.....
Radius.....	شعاع.....
Interval number.....	عدد بازه‌ای.....
Fuzzy number.....	عدد فازی.....
Trapezoidal fuzzy number.....	عدد فازی ذوزنقه ای.....
Triangular fuzzy number.....	عدد فازی مثلثی.....
Absolute value.....	قدر مطلق.....
Minimal absolute value.....	قدر مطلق کمینه.....
Solution set.....	مجموعه جواب.....
Fuzzy set.....	مجموعه فازی.....
Convex fuzzy set.....	مجموعه فازی محدب.....
Normal fuzzy set.....	مجموعه فازی نرمال.....
Classic set.....	مجموعه کلاسیک.....
Universal set.....	مجموعه مرجع.....
Fuzzy logic.....	منطق فازی.....
Regular.....	منظم.....
Normal.....	نرمال.....

Vertex point..... نقطه‌ی رأسی

Midpoin..... نقطه‌ی میانی

Mapping..... نگاشت

Upper semi-continuous..... نیمه پیوسته بالایی

- [1] S. Abbasbandy, M. Alavi, A method for solving fuzzy linear system, Iranian Journal of Fuzzy Systems 2 (2005) 37–43.
- [2] S. Abbasbandy, R. Ezzati, A. Jafarian, LU decomposition method for solving fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 172 (2006) 633–643.
- [3] S. Abbasbandy, A. Jafarian, Steepest descent method for system of fuzzy linear equations, Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 823–833.
- [4] S. Abbasbandy, A. Jafarian, R. Ezzati, Conjugate gradient method for fuzzy symmetric positive definite system of linear equations, Applied Mathematics and Computation 171 (2005) 1184–1191.
- [5] T. Allahviranloo, Numerical methods for fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 155 (2004) 493–502.
- [6] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Solving fuzzy linear systems by homotopy perturbation method, Int. J. Comput. Cognit. 8 (2) (2010) 24–30.
- [7] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory, Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 5360–5379.
- [8] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A.A. Hosseinzadeh, E. Haghi, R. Nuraei, A note on “Fuzzy linear systems”, Fuzzy Sets and Systems 177 (2011) 87–92.
- [9] T. Allahviranloo, E. Haghi, M. Ghanbari, The nearest symmetric fuzzy solution for a symmetric fuzzy linear system, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 20(1) (2012) 151–172.
- [10] T. Allahviranloo, S. Salahshour, Fuzzy symmetric solution of fuzzy linear systems, J. Comput. Appl. Math. 235 (16) (2011) 4545–4553.
- [11] T. Allahviranloo, R. Nuraei, M. Ghanbari, E. Haghi, A. A. Hosseinzadeh, A new metric for L–R fuzzy numbers and its application in fuzzy linear systems, Soft Computing 16 (2012) 1743–1754.

- [12] M. Amirfakhrian, Numerical solution of a fuzzy system of linear equations with polynomial parametric form, *Int. J. Comput. Math.* 84(7) (2007) 1089–1097.
- [13] B. Asady, S. Abbasbandy, M. Alavi, Fuzzy general linear systems, *Applied Mathematics and Computation* 169 (2005) 34–40.
- [14] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy numbers: an overview, in: J. Bezdek (Ed.), *Analysis of Fuzzy Information*, CRC Press, 1987, pp. 112–148.
- [15] R. Ezzati, Solving fuzzy linear systems, *Soft Comput.* 15 (1) (2011) 193–197.
- [16] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Fuzzy linear systems, *Fuzzy Sets and Systems* 96 (1998) 201–209.
- [17] J. Garloff, Interval Gaussian elimination with pivot tightening, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 30 (2009) 1761–1772.
- [18] R. Ghanbari, N. Mahdavi-Amiri N, New solutions of L–R fuzzy linear systems using ranking functions and ABS algorithms. *Appl. Math. Model.* 34 (2010) 3363–3375.
- [19] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 12 (1984) 215–229.
- [20] G. Mayer, A contribution to the feasibility of the interval Gaussian algorithm, *Reliab. Comput.* 12 (2006) 79–98.
- [21] R. Nuraei, T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Finding an inner estimation of the solution set of a fuzzy linear system, *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 5148–5161.
- [22] P. Sevastjanov, L. Dymova, A new method for solving interval and fuzzy equations: linear case, *Inform. Sci.* 179 (2009) 925–937.
- [23] C. Wu, M. Ming, On embedding problem of fuzzy number space: Part 1, *Fuzzy Sets and Systems* 44 (1991) 33–38.
- [24] M.S. Yang, W.L. Hung, S.C. Chien, On a similarity measure between LR-type fuzzy numbers and its application to database acquisition, *Int. J. Intell. Syst.* 20 (2005) 1001–1016.

[25] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338–353.

[26] H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

مقالات:

- [1] T.Allahviranloo, M.Ghanbari, A.A.Hosseinzadeh, E.Haghi, **R. Nuraei**, A note on “Fuzzy linear systems”, Fuzzy Sets and Systems, 77 (2011) 87-92. **(ISI)**
- [2] T. Allahviranloo, **R. Nuraei**, M. Ghanbari, E. Haghi, A.A.Hosseinzadeh, A new metric for L-R fuzzy numbers and its application in fuzzy linear systems, Soft Computing, 16(10) (2012) 1743-1754. **(ISI)**
- [3] **R. Nuraei**, T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Finding an inner estimation of the solution set of a fuzzy linear system, Applied Mathematical Modelling, 37(7) (2013) 5148-5161. **(ISI)**
- [4] M. Matinfar, M. Ghanbari, **R. Nuraei**, Numerical solution of linear fuzzy Volterra integro-differential equations by variational iteration method, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 4 (2013) 575-586. **(ISI)**
- [5] S. Abbasbandy, **R. Nuraei**, M. Ghanbari, Revision of sign distance method for ranking of fuzzy numbers, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Accepted, In Press. **(ISI)**
- [6] M. Ghanbari , **R. Nuraei**, Revision of a fuzzy distance measure, International Journal of Industrial Mathematics, 5(2) (2013) 143-147.**(ISC)**
- [7] M. Ghanbari , **R. Nuraei**, Convergence of a semi-analytical method on the fuzzy linear systems, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Accepted, In Press. **(ISI)**
- [8] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, **R. Nuraei**, An application of a semi analytical method on linear fuzzy Volterra integral equations, Journal of Fuzzy Set Valued Analysis, Accepted, In Press. **(ISC)**
- [9] M. Ghanbari , **R. Nuraei**, Note on “New solutions of LR fuzzy linear systems using ranking functions and ABS algorithms”, Journal of Fuzzy Information and Engineering, 5(3) (2013) 317-326.
- [10] M. Ghanbari , **R. Nuraei**, A new computational method for solving the first order linear fuzzy Fredholm integro-differential equations, Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing, 2013 (2013) 1-13. **(ISC)**

[11] T. Allahviranloo, A.A.Hosseinzadeh, M. Ghanbari, E. Haghi, **R. Nuraei**, On the new solutions for a fully fuzzy linear system, Soft Computing, Accepted, In Press. (ISI)

[12] M. Ghanbari, **R. Nuraei**, Solving linear Fredholm fuzzy integral equations by a semi-analytical method, Journal of Uncertain Systems, Accepted, In Press.

کنفرانس ها:

[1] M. Ghanbari, **R. Nuraei**, An improvement on a ranking method, The 11 th Iranian Conference on Fuzzy Systems , University of Sistan and Baluchestan , Zahedan, Iran.

[2] M. Ghanbari, E. Haghi, **R. Nuraei**, A.A.Hosseinzadeh, A new metric distance for L-R fuzzy numbers, The 11 th Iranian Conference on Fuzzy Systems , University of Sistan and Baluchestan , Zahedan, Iran.