



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

دانشکده علوم ریاضی، گروه کاربردی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی – آنالیز عددی (Ph.D)

عنوان:

**یک الگوریتم کارا در حل عددی معادلات انتگرال غیر خطی با استفاده از
توابع هیلبرت هسته باز تولیدی**

استاد راهنما:

دکتر سعید عباسبندی

دکتر محمدعلی فریرزی عراقی

استاد مشاور:

دکتر توفیق الهویرنلو

نگارش:

صدیقه فرزانه جوان

تابستان ۱۳۹۶

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

بیاباری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر افعال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، دانشجویان و

اعضاء هیئت علمی واحد های دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.

۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بکاران پژوهش.

۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اکتساب از هرگونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹- اصل برانست: التزام به برانست جویی از هرگونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به مثابه های غیر علمی می آلائند.



معاونت پژوهش و فن آوری
به نام خدا
تعهد اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب صدیقه فرزانه جوان دانش آموخته مقطع دکتری در رشته ریاضی کاربردی- آنالیز عددی که در تاریخ ۱۳۹۶/۶/۲۹ از پایان نامه خود تحت عنوان " یک الگوریتم کارا در حل عددی معادلات انتگرال غیرخطی با استفاده از توابع هسته هیلبرت بازتولیدی " با کسب نمره دفاع نموده ام بدین وسیله متعهد می شوم:

- (۱) این پایان نامه حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.
- (۲) این پایان نامه قبلاً برای هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.
- (۳) چنان چه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.
- (۴) چنان چه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی: صدیقه فرزانه جوان

تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

دانشکده علوم ریاضی، گروه کاربردی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی – آنالیز عددی (Ph.D)

عنوان:

**یک الگوریتم کارا در حل عددی معادلات انتگرال غیر خطی با استفاده از
توابع هیلبرت هسته باز تولیدی**

استاد راهنما:

دکتر سعید عباسبندی

دکتر محمدعلی فریرزی عراقی

استاد مشاور:

دکتر توفیق الهویرنلو

نگارش:

صدیقه فرزانه جوان

تابستان ۱۳۹۶

سپاس‌گزاری

اکنون که به یاری یزدان پاک، این رساله را که دفاع از آن نشانه‌ی گذر دوره‌ای پر از تلاش، آموزش، کوشش و شاگردی در محضر اساتید بی‌نظیر است را آماده کرده‌ام، بر خود واجب می‌دانم از زحمات اساتید بزرگوارم آقایان: دکتر اسماعیل بابلیان، دکتر سعید عباسبندی و دکتر شهنام جوادی که در طول این دوره افتخار شاگردی در محضرشان را داشته‌ام تشکر و قدردانی نمایم.

لازم می‌دانم سپاس ویژه‌ی خود را به آقایان: دکتر سعید عباسبندی و دکتر محمدعلی فریرزی عراقی، استادان راهنمایم که در تهیه‌ی این پایان‌نامه صبورانه یاریم کردند نثار نمایم.

تقدیر و تشکر فراوان از آقای دکتر توفیق الهویرانلو که مشاوره‌های ارزشمندی را در راستای انجام این پایان‌نامه به این جانب ارائه نموده‌اند.

تقدیر و تشکر به پاس راهنمایی‌های بی‌منت و عالمانه اساتید بزرگوارم آقایان: دکتر فرهاد حسین‌زاده لطفی، دکتر رضا عزتی و دکتر مجید امیرفخریان که در تهیه نهایی این پایان‌نامه از راهنمایی‌های ایشان بهره‌مند شده‌ام.

از ایزد بزرگ برای همه‌ی عزیزان پیروزی، سلامتی و شادکامی آرزو مندم.

تقدیم

پدر و مادر عزیزم

آنان که توانشان رفت تا به توانایی برسم و مویشان سپید گشت تا رویم سپید بماند.

فهرست مطالب

شماره صفحه

عناوین

فهرست جداول

فهرست نمودارها

پیشگفتار

چکیده

فصل اول: کلیات و پیشینه پژوهش	۴
۱-۱- مقدمه	۵
۲-۱- بیان مسئله	۵
۳-۱- اهمیت و ضرورت تحقیق	۶
۴-۱- اهداف تحقیق	۶
۵-۱- سوالات تحقیق	۷
۶-۱- فرضیه‌های تحقیق	۸
۷-۱- پیشینه پژوهش	۸
۸-۱- برخی مفاهیم از آنالیز تابعی	۱۲
۹-۱- معادله انتگرال	۱۴
۱۰-۱- انواع معادلات انتگرال	۱۶
۱-۱۰-۱- معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی	۱۶
۲-۱۰-۱- وجود جواب برای معادله انتگرال فردهلم غیرخطی	۱۷
۳-۱۰-۱- معادلات انتگرال ولترا	۱۸
۴-۱۰-۱- وجود جواب برای معادله انتگرال ولترا غیرخطی	۲۰
۵-۱۰-۱- معادلات انتگرال - دیفرانسیل ولترا	۲۱
۶-۱۰-۱- معادلات انتگرال منفرد	۲۱
۷-۱۰-۱- چند نکته در مورد معادلات انتگرال ولترا و فردهلم	۲۲
۱۱-۱- قاعده لایبنیتز تعمیم یافته	۲۳
۱۲-۱- خواص تابع دیراک	۲۷
۱۳-۱- خواص تابع پله‌ای	۲۷
۱۴-۱- تعاریف مهم	۲۸

فصل دوم: روش فضای هیلبرت هسته باز تولیدی..... ۲۹

- ۱-۲- مقدمه ۳۰
- ۲-۲- تعریف فضای هیلبرت هسته باز تولیدی ۳۰
- ۳-۲- ویژگی‌های اساسی هیلبرت هسته باز تولیدی ۳۲
- ۴-۲- فضای هیلبرت هسته باز تولیدی $W_2^m[a, b]$ ۳۴
- ۵-۲- نحوه ساختن هیلبرت هسته باز تولیدی $R_y(x)$ ۳۷
- ۶-۲- فضای هیلبرت هسته باز تولیدی $W_2^1(\mathbb{R})$ ۴۶

فصل سوم: حل معادلات انتگرال با استفاده از روش فضای هیلبرت هسته باز تولیدی ۴۷

- ۱-۳- مقدمه ۴۸
- ۲-۳- فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت ۴۸
- ۳-۳- حل معادله انتگرال فرد هلم نوع اول ۵۰
- ۳-۳-۱- نمایش جواب دقیق معادله انتگرال فرد هلم ۵۱
- ۳-۳-۲- پایداری جواب معادله انتگرال فرد هلم ۵۳
- ۴-۳- حل معادله انتگرال غیر خطی ولترا-فرد هلم ۵۴
- ۵-۳- حل معادله انتگرال غیر خطی ۵۷
- ۳-۵-۱- بررسی یکتایی جواب ۶۱

فصل چهارم: روش پیشنهادی مبتنی بر فضای هیلبرت هسته باز تولیدی ۶۲

- ۱-۴- مقدمه ۶۳
- ۲-۴- روش پیشنهادی ۶۳
- ۳-۴- الگوریتم روش پیشنهادی ۶۹
- ۴-۳-۱- الگوریتم ۴-۱ روش $RKHS$ ۷۰
- ۴-۳-۲- الگوریتم ۴-۲ روش پیشنهادی $RKHS$ ۷۱
- ۴-۴- مثال‌های عددی ۷۱

فصل پنجم: نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۸۶

- ۱-۵- نتیجه‌گیری ۸۷
- ۲-۵- نتیجه‌گیری و تحقیقات آتی ۸۷
- کد برنامه ۸۸
- مراجع ۸۹
- واژه‌نامه ۹۵
- چکیده لاتین ۹۹

فهرست جداول

- جدول ۱-۴. خطای مطلق نتایج حل معادله (۱۹-۴) برای روش پیشنهادی برای $n = 128$ و روش موجک هار ۷۲.....
- جدول ۲-۴. خطای مطلق نتایج حل معادله (۱۹-۴) برای روش پیشنهادی برای $n = 10$ و روش موجک هار ۷۴.....
- جدول ۳-۴. خطای مطلق نتایج حل معادله (۲۰-۴) برای روش پیشنهادی برای $n = 128$ و روش بلک پالس برای ۷۶.....
- جدول ۴-۴. زمان محاسباتی بر حسب ثانیه برای حل معادله (۲۰-۴) به کمک الگوریتم‌های ۱-۴ و ۲-۴ ۷۶.....
- جدول ۵-۴. خطای مطلق نتایج حل معادله (۲۰-۴) برای روش پیشنهادی برای $n = 4$ و روش بلک پالس ۷۸.....
- جدول ۶-۴. خطای مطلق نتایج حل معادله (۲۱-۴) برای روش پیشنهادی و روش بلک پالس ۸۰.....
- جدول ۷-۴. زمان محاسباتی بر حسب ثانیه برای حل معادله (۲۱-۴) به کمک الگوریتم‌های ۱-۴ و ۲-۴ ۸۰.....
- جدول ۸-۴. خطای مطلق نتایج حل معادله (۲۲-۴) برای روش پیشنهادی و روش موجک هار ۸۲.....
- جدول ۹-۴. خطای مطلق نتایج حل معادله (۲۲-۴) به دو روش الگوریتم ۱-۴ و ۲-۴ ۸۴.....

فهرست نمودارها

نمودار ۱-۴.....	نمودار جواب دقیق و روش پیشنهادی معادله (۱۹-۴) برای $n = 128$	۷۳
نمودار ۲-۴.....	نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۱۹-۴) برای $n = 128$	۷۳
نمودار ۳-۴.....	نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۱۹-۴) برای $n = 10$	۷۴
نمودار ۴-۴.....	نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۱۹-۴) برای $n = 10$	۷۵
نمودار ۵-۴.....	نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۲۰-۴) برای $n = 128$	۷۷
نمودار ۶-۴.....	نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۲۰-۴) برای $n = 128$	۷۷
نمودار ۷-۴.....	نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۲۰-۴) برای $n = 4$	۷۸
نمودار ۸-۴.....	نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۲۰-۴) برای $n = 4$	۷۹
نمودار ۹-۴.....	نمودار مقایسه جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۲۱-۴)	۸۱
نمودار ۱۰-۴.....	نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی (۲۱-۴)	۸۱
نمودار ۱۱-۴.....	نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۲۲-۴)	۸۳
نمودار ۱۲-۴.....	نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۲۲-۴)	۸۳
نمودار ۱۳-۴.....	نمودار مقایسه جواب واقعی و الگوریتم‌های ۱-۴ و ۲-۴ معادله (۲۲-۴)	۸۴
نمودار ۱۴-۴.....	نمودار مقایسه خطای مطلق الگوریتم‌های ۱-۴ و ۲-۴ معادله (۲۲-۴)	۸۵

پیشگفتار

معادلات انتگرال غیرخطی (NIE) در بسیاری از رشته‌های علوم از جمله اقتصاد، دارو، مهندسی الکترونیک، تئوری صف، کنترل، تئوری بازی‌ها، مکانیک، الکتروپدینامیک، الکترواستاتیک، تئوری تصفیه، جنباننده‌ی سیال، تئوری نوسان، قابلیت ارتجاعی، قابلیت تغییرپذیری، گرما و انتقال انبوه و غیره کاربرد دارد. معمولاً انواع مختلفی از معادلات انتگرال غیرخطی به صورت صریح به جواب نمی‌رسند، بنابراین باید آن‌ها را به طور تقریبی به دست آورد.

لذا بسیاری از نویسندگان جواب‌های عددی این معادلات را مورد تحقیق و بررسی قرار داده‌اند. به عنوان مثال، عباسبندی کارایی روش تحلیل هموتوبی برای حل معادلات انتگرال ولترا و فردهلم غیرخطی نوع دوم را در [۱]، [۵۷] و [۱۳] بررسی کرده است. روش چندگامی خطی در [۲] برای روشن ساختن حل عددی معادلات انتگرال غیرخطی ولترا منفرد مورد بررسی قرار گرفته است. کیلباس^۱ و سایگو^۲ در [۴۰] با استفاده از تکنیک خط مجانب برای رسیدن به جواب عددی معادلات انتگرال غیرخطی آبل – ولترا بهره جسته است. ارسی^۳ ضرب نیشتروم را در مسائلی با هسته لگاریتمی و کارمن^۴، به عنوان یک روش برای حل معادله انتگرال غیرخطی ولترا ارائه داد.

فضای هیلبرت هسته بازتولیدی (RKHS) را سیو مینگ^۵ [۴۶] در سال ۱۹۸۶ معرفی کرد. این روش در بسیاری از شاخه‌ها از جمله تئوری تخمین، استاتیک، تئوری ماشین فراگیر، تئوری نمایش گروهی و بسیاری از تحلیل‌ها کاربرد دارد. روش فضای هیلبرت هسته بازتولیدی، یک هسته بر پایه‌ی روش تقریبی

^۱ Kilbas

^۲ Saigo

^۳ Orssi

^۴ Karmen

^۵ Cui Minggen

می‌باشد که برای حل مسائل مقدار مرزی غیر خطی [۳۰]، [۳۳]، [۲۶] و [۶۰] مسائل عمومی غیرخطی منفرد از نوع ادمن-لین^۶، معادلات انتگرال - دیفرانسیل [۱۰]، [۳۵] و [۴] معادلات کسری انتگرال - دیفرانسیل [۲۴] و غیره کاربرد دارد. هدف این رساله ارائه روش‌هایی برای حل معادلات انتگرال غیرخطی است که در چهار فصل به شرح زیر ارائه می‌شود.

در فصل اول مفاهیم اولیه معادلات انتگرال از جمله فردهلم یا ولترا بودن و نوع آن معرفی می‌شوند.

در فصل دوم به مفاهیم اولیه فضای هیلبرت هسته بازتولیدی اشاره می‌شود.

در فصل سوم روش حل معادلات انتگرال غیرخطی با استفاده از فضای هیلبرت هسته بازتولیدی مطرح می‌شود که روش حل بر پایه روند متعامد سازی گرام - اشمیت می‌باشد.

در فصل چهارم با ارائه روش بازگشتی جدید با دو الگوریتم (حذف فرایند متعامد سازی گرام - اشمیت و استفاده از فرایند متعامد سازی گرام - اشمیت) به حل مسائل کاربردی در رشته الکترومغناطیس پرداخته و به مقایسه روش پیشنهادی و روش‌های استفاده از موجک هار و توابع بلک پالس می‌پردازیم. در نهایت در فصل پنجم نتیجه‌گیری و بحث در مورد تحقیقات آتی را بیان می‌کنیم.

کار اصلی در این رساله، به کارگیری از تکنیکی است که مسائل مربوط به معادلات انتگرال غیرخطی بر پایه فضای هیلبرت هسته بازتولیدی را با کاهش مقدار خطا حل نماید و مقاله‌ی مستخرج از این رساله که در فصل چهارم ارائه گردیده عبارت است از:

S. Farzaneh Javan , S. Abbasbandy, M.A. Fariborzi Araghi, Application of Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving a Class of Nonlinear Integral Equations, Mathematical Problems in Engineering Volume ۲۰۱۷ (۲۰۱۷), Article ID ۷۴۹۸۱۳۶, ۱۰ pages.
<https://doi.org/10.1155/2017/7498136>

^۶ Edmen-Lin

چکیده

در این رساله، یک روش جدید بر پایه فضای هیلبرت هسته بازتولیدی برای تقریب جواب معادلات انتگرال غیرخطی نوع دوم پیشنهاد می‌گردد. در این حالت، به جای روند متعامد سازی گرام - اشمیت از روش دیگری که نسبت به خطا جواب‌های رضایت‌بخشی دارند، استفاده شده است. در این روش، جواب به صورت یک سری است که به جواب واقعی نزدیک‌تر است. به علاوه همگرایی روش پیشنهادی اثبات می‌گردد. همچنین برای روشن ساختن کارایی تاثیر روش، چهار مثال کاربردی به همراه الگوریتم ارائه شده است.

کلید واژه: روش هسته بازتولیدی، معادله انتگرال غیر خطی، روند متعامد سازی گرام - اشمیت.

فصل اول

کلیات و پیشینه پژوهش

۱-۱- مقدمه

در این فصل از رساله به ارائه توضیحاتی از ساختار تحقیق و نیز ارائه تعاریف پایه و مبانی تحقیق می‌پردازیم و همچنین مروری بر پیشینه تحقیق و استفاده از روش هسته بازتولیدی فضای هیلبرت در حل مسائل به خصوص معادلات انتگرال داریم.

۱-۲- بیان مسئله

در بسیاری از مسائلی که در طبیعت با آن‌ها روبرو می‌شویم و در علوم مختلف مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرند، در مدل‌سازی ریاضی آن‌ها به معادلاتی برخورد می‌کنیم که روابطی بین توابع هدف و مشتقات یا انتگرال‌های آن‌ها به دست می‌آید و برای بدست آوردن تابع هدف نیازمند استفاده از روش‌های مناسب می‌باشیم. گاهی یافتن این تابع کاری بسیار دشوار است و به لحاظ نظری دارای پیچیدگی‌های بسیار است و برای آن‌ها از روش‌های عددی برای تقریب جواب آن در نقاط مختلف استفاده می‌شود و مقدار آن در هر نقطه تقریب زده می‌شود. یک دسته از این معادلات، معادلات انتگرال می‌باشند. معادلات انتگرال به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. معادلات غیر خطی به دلایل مختلف و پیچیدگی روش‌های حل آن‌ها بیشتر مورد توجه قرار دارند و یافتن روش‌هایی که بتوان جواب آن‌ها را به صورت تحلیلی یا نیمه تحلیلی یافت در اولویت بیشتری نسبت به روش‌های عددی قرار می‌گیرند. البته روش‌های عددی نیز کاربردهای خاص خود را دارند ولی در کل روش‌هایی نظیر روش‌های هوموتوپي، آدومین و... تاکنون توانسته‌اند جواب‌های نسبتاً مناسبی را به دست دهند. کوشش برای ارائه روش‌های جدید و دارای خطای کمتر و نیز محاسبات و پیچیدگی کمتر ادامه دارد.

در این رساله به بررسی روش‌های مبتنی بر فضای هیلبرت هسته بازتولیدی در حل انواع معادلات انتگرال اعم از خطی و غیرخطی می‌پردازیم. این روش جواب معادله را به شکل یک سری در فضای هیلبرت هسته بازتولیدی نمایش می‌دهد. در این رساله برآنیم تا با استفاده از تکنیکی جدید جواب معادله انتگرال را به دست آوریم.

۳-۱- اهمیت و ضرورت تحقیق

با توجه به کاربرد فراوان معادلات انتگرال در علوم مختلف و نیز نیاز به تحقیق در زمینه‌های نظری و یافتن روش‌هایی که بتوانند این معادلات را به صورت نیمه تحلیلی حل کنند و جواب معادله را به صورت تابعی تقریب بزنند، لازم است تا روش‌هایی نظیر روش فضای هسته بازتولیدی مورد بررسی و مطالعه قرار بگیرند و از آن برای حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترا استفاده گردد. بیشترین جذابیت فضای تابعی در فضای توابع مختلف برای تحلیل عددی، فضای هسته بازتولیدی است. حال با عنایت به کاربردهای فراوان معادلات انتگرال در حل دقیق‌تر فرایندهای فیزیکی، بررسی و ارائه روش‌های مناسب حل آن‌ها ضروری می‌باشد.

۴-۱- اهداف تحقیق

هدف این تحقیق بررسی استفاده از روش توابع هسته بازتولیدی برای حل معادلات انتگرال در مقایسه با سایر روش‌های موجود می‌باشد. در این راستا تحلیل خطا، مطالعه دقت الگوریتم و مقایسه جواب‌ها با روش هسته بازتولیدی کلاسیک مورد توجه قرار گرفته است. همچنین ارائه یک روش مبتنی بر فضای هسته بازتولیدی برای حل معادلات انتگرال از اهداف این تحقیق می‌باشد. نتایج یک این تحقیق می‌تواند روش مفیدی را در اختیار مهندسان و دانشمندان علوم پایه و به طور کلی همه محققانی که در زمینه حل معادلات انتگرال تحقیق و پژوهش می‌نمایند، قرار دهد.

۵-۱- سوالات تحقیق

سوالاتی که در این تحقیق مدنظر قرار گرفته است عبارتند از:

۱. آیا می‌توان با استفاده از نظریه توابع هسته بازتولیدی معادله انتگرال غیرخطی را حل کرد؟
۲. چگونه می‌توان با استفاده از نظریه توابع هسته بازتولیدی دستگاه معادلات انتگرال را حل نمود؟

۶-۱- فرضیه های تحقیق

این تحقیق بر این فرضیه استوار است که از روش هسته بازتولیدی می توان برای حل معادلات انتگرال و نیز دستگاه معادلات انتگرال استفاده نمود. همچنین دقت این روش متناسب با نوع فضای هسته بازتولیدی انتخاب شده و تعداد جملات مورد استفاده می باشد.

۷-۱- پیشینه پژوهش

در سال های اخیر بسیاری از معادلات دیفرانسیلی و انتگرالی برآمده از پدیده ها و موقعیت های طبیعی به صورت معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مختلف نظیر شرایط مقدار مرزی تناوبی، خطی و غیرمحل (شرایطی که مرز به صورت تابعی از زمان باشد) مدل شده اند و با استفاده از روش فضای هسته بازتولیدی و توابع این فضا مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته اند. متناظر با شرایط مختلفی که جواب معادله دیفرانسیل را تعیین می کنند، فضای هسته بازتولیدی خاص آن را می توانیم بسازیم. به عبارت دیگر می توانیم فضای هسته بازتولیدی بسازیم که در شرایط جواب صدق کند و با استفاده از آن توابع هسته بازتولیدی را به کار بگیریم. یکی از شاخه های ریاضیات که در سال های اخیر مورد توجه بسیاری از دانشمندان قرار گرفته است، توابع هسته بازتولیدی می باشد. این نوع معادلات در حل مسائل شاخه های فیزیک، شیمی، ریاضی و مهندسی از جمله مکانیک سیالات، شکست مکانیک و ... کاربردهای فراوانی دارد. خواص بازتولیدی به همراه قواعد فضای هیلبرت، اثربخشی اجرای الگوریتم های عملی را در این فضای توابع تضمین می کند. از جمله این کاربردها می توان به مسائل مقدار مرزی، حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی و نیز حل معادلات انتگرال غیرخطی اشاره نمود.

در مطالعات اخیر، بسیاری از معادلات غیرخطی توسط روش هسته بازتولیدی مورد بررسی قرار گرفته اند. شروع مفهوم هسته بازتولیدی به دهه اول ۱۹۰۰ در مقاله زارمبا^۷ بر می گردد [۶۱] که از آن برای مساله مقدار مرزی توابع هارمونیک استفاده کرد. این روش توسط برگمن^۸ توسعه داده شد و بیشتر هسته هایی که در سال های ۱۹۳۰ تا ۱۹۴۰ معرفی شده اند توسط برگمن ارائه شده است [۱۸-۲۲]. برگمن هسته های مربوط به توابع هارمونیک را برای مسائل مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل جزئی بیضوی استفاده کرد و این اولین مرحله در توسعه روش هسته بازتولیدی برای حل معادلات دیفرانسیل است.

^۷ Zarembo

^۸ Bergman

مرحله دوم توسعه این روش‌ها توسط مرسر^۹ (۱۹۰۹) انجام شد [۴۵] و در معادلات خود به این نتیجه رسید که هسته معادلات انتگرالی معین مثبت، خود معین مثبت هستند و هسته‌هایی که این ویژگی را داشته باشند را هرمیتی معین مثبت نامید. همچنین نشان داد که هسته‌های هرمیتی معین مثبت متناظر با یک خانواده از توابع، یک فضای هیلبرت تولید می‌کنند که هسته در این فضا دارای خاصیت بازتولیدی است.

مرحله سوم توسعه نظریه هسته بازتولیدی توسط آرونسجان^{۱۰} انجام شد. در دهه ۱۹۵۰ مطالعات پیشین در این زمینه را خلاصه و دسته‌بندی نمود و تئوری هسته بازتولیدی متقارن که شامل توابع هسته برگمن نیز بود را ارائه کرد [۹]. این نظریه بنیاد مناسبی را برای تحقیقات ارائه نمود و اثبات‌های قضایا را ساده‌تر نمود. فضای هسته بازتولیدی یکی از جذاب‌ترین و پرکاربردترین فضاها برای تابعی موجود در آنالیز عددی است.

بعد از آرونسجان، محققان از این روش برای حل مسائل در بسیاری از زمینه‌ها استفاده نمودند. بریلینسکی^{۱۱} و رانیا (۱۹۹۸) [۲۳] یک هسته بازتولیدی برای حل مسائل خود در زمینه کوانتیزه کردن هامیلتونی عملگر انرژی ساختند. ویلسون^{۱۲} (۲۰۰۱) [۵۸] تحقیقاتی در خصوص سری‌های هولومورفیک گسسته با استفاده از هسته بازتولیدی انجام دادند. لارکین^{۱۳} (۱۹۷۰) [۴۲] اصول تقریب بهینه در فضای هیلبرت تابعی را با فضای هسته بازتولیدی ترکیب نمود و از خواص آن در فضای هسته بازتولیدی استفاده نمود. در سال ۱۹۷۴ چاوالا^{۱۴} تقریب بهینه‌ای برای فضای هیلبرت تابعی با استفاده از هسته بازتولیدی و با دقت چندجمله‌ای پیشنهاد داد. از جمله مسائلی که با روش هسته بازتولیدی مورد بررسی و حل قرار گرفته‌اند می‌توان به پردازش سیگنال توسط آلپای^{۱۵} و دیم^{۱۶} در سال ۱۹۹۶ [۷]، فرایند تصادفی هالت^{۱۷} در سال ۲۰۰۳ [۳۶] و تبدیل موجک توسط استراس^{۱۸} و استید^{۱۹} در سال ۲۰۰۲ [۵۴] اشاره نمود.

^۹ Mercer

^{۱۰} Aronszajn

^{۱۱} Brylinski & Rania

^{۱۲} Wilson

^{۱۳} Larkin

^{۱۴} Veenakaul

^{۱۵} Alpay

^{۱۶} Dym

^{۱۷} Hult

^{۱۸} Strauss

^{۱۹} Steidl

در ادبیات حل معادلات انتگرال غیرخطی، روش‌های مختلفی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. تکنیک‌هایی که عموماً استفاده شده‌اند شامل روش‌های تصویر سازی، هم مکانی، نیشتروم دوزنقه‌ای، تجزیه آدومین و روش آشوب هموتوپی می‌باشد [۲۹]. روش‌های مذکور در عمل دارای کارایی محاسباتی زیاد و خطای تقریب در یافتن جواب معادله می‌باشند.

از جمله روش‌های عددی که تاکنون برای حل معادلات انتگرال ارائه شده‌اند روش موجک‌های هار است [۱۷]. همچنین روش‌های دیگری برای حل معادلات انتگرال فردهلم خطی نوع دوم بکار گرفته شده‌اند [۸] و نتایج قابل توجهی در مقایسه با سایر روش‌های عددی بدست آورده‌اند. همچنین روش‌های تکراری [۴۱]، روش بلک-پالس [۱۶] برای حل مسائل معادلات انتگرال و دستگاه معادلات انتگرال خطی و غیرخطی استفاده شده است.

محققان تحقیقات خود را برای حل عددی دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی توسعه دادند و روش‌های توابع هار کسری [۲۴] و روش توابع بلاک-پالس [۱۶] برای آن‌ها به کار گرفتند.

از روش‌های عددی که در سال‌های اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته و از آن برای حل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی و نیز دستگاه معادلات انتگرال استفاده کرده‌اند می‌توان روش موجک هار [۱۷]، روش موجک گالرکین [۴۹] و روش‌های انتگرال‌گیری عددی [۲۶] را نام برد.

معادلات انتگرال نوع اول کاربردهای فراوانی در زمینه آنالیز داده‌های انتقال حرارت، اسپکتروسکوپی، آنالیز رزونانس مغناطیسی هسته ای (NMR) و آنالیز داده‌های انتشار نور مانا (SLS) دارد. موارد فوق همگی از مسائل معکوس بدوضع می‌باشند. برای مسائل بدوضع با استفاده از روش منظم‌سازی، تقریبی از جواب آن را می‌یابیم. این روش در دهه ۱۹۶۰ توسط تیخونف^{۲۰} ارائه شد [۵۵]. ایده اصلی این روش جایگزین کردن معادله اصلی با یک معادله بسته است که شامل یک پارامتر کوچک می‌باشد به گونه‌ای که معادله تغییر یافته را می‌توان با روشی پایدار حل نمود و وقتی که پارامتر کوچک انتخاب شود، جواب آن به جواب مساله اصلی نزدیک است.

بوشناق^{۲۱} و همکاران از روش فضای هیلبرت هسته بازتولیدی برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل از مرتبه کسری استفاده نمودند [۲۵] و سپس در سال ۲۰۱۴ مطالعه خود را برای حل دستگاه معادلات

^{۲۰} Tikhonov

^{۲۱} Bushnaq

انتگرال-دیفرانسیل از مرتبه کسری توسعه دادند و یک روش مبتنی بر فضای هسته بازتولید برای حل آن پیشنهاد دادند.

مایا^{۲۲} و همکاران الگوریتم جدیدی به نام روش فضای هیلبرت هسته بازتولیدی که نسخه اصلاح شده روش فضای هسته بازتولیدی است را برای حل مسائل غیرخطی اسیلاتورها ارائه نمودند [۴۴]. روش مایا و همکاران بازه همگرایی جواب معادله را که به صورت سری می‌باشد را افزایش می‌دهد. آن‌ها روش پیشنهادی را با نتایج روش رانگه-کوتا مقایسه نمودند و نتایج نشان می‌دهند که روش آن‌ها از نظر محاسباتی بسیار کارا است و به راحتی برای مسائل غیرخطی قابل استفاده است.

محمدی^{۲۳} و همکاران، دو مساله سهموی معکوس با شرایط مرزی غیرمحملی را با استفاده از روش فضای هسته بازتولیدی مورد بررسی و مطالعه قرار داده‌اند [۵۰]. نویسندگان جواب این معادله را با استفاده از یک روش تکراری تقریب زده و به صورت تحلیلی و در قالب یک سری محاسبه نشان داده‌اند. همچنین همگرایی روش تکراری را اثبات کرده و نتایج عددی حاصل از آن نشان می‌دهد که از روش هسته بازتولیدی می‌توان به عنوان یک روش ساده و با دقت بالا برای حل این نوع مسائل استفاده کرد.

جنگ^{۲۴} در مقاله‌ای به مطالعه روش فضای هسته بازتولیدی در حل معادلات انتگرال نوع سوم پرداخت و جواب آن را به صورت یک سری در فضای هسته بازتولیدی نشان داد [۳۲]. این معادله کاربردهای فیزیکی فراوانی در تئوری الاستیسیته و پراکنش ذرات دارد. نتایج عددی حاصل از این روش در مقایسه با جواب دقیق معادلات مورد بررسی نشان می‌دهد که این روش دقت بالایی دارد.

محمدی و مختاری^{۲۵} در تحقیقی به بررسی و حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی با استفاده از روش فضای هسته بازتولیدی پرداخته جوابی تحلیلی با پیاده‌سازی یک فرایند تکراری برای آن ارائه دادند و همگرایی این روش برای حل دستگاه معادلات اثبات کرده‌اند [۴۸]. از این روش برای حل دستگاه معادله برگر و یک دستگاه هذلولی غیرخطی استفاده شده است و نتایج عددی حاصل با جواب‌های دقیق آن‌ها مورد مقایسه و تحلیل قرار گرفته است.

^{۲۲} Maayah

^{۲۳} Mohammadi

^{۲۴} Geng

^{۲۵} Mokhtari

مرادی^{۲۶} پیاده سازی جدیدی از روش هسته بازتولیدی برای تقریب جواب یک دسته از معادلات مقدار مرزی نوع سوم با ضرایب متغیر ارائه داد [۳۸]. در این روش یک جواب تحلیلی برای مساله ارائه شده و نتایج پیاده سازی موفق آن نشان داده شده است.

میرزایی^{۲۷} و حدادیان^{۲۸} به مطالعه معادله ولترا-فردهلم غیرخطی با استفاده از توابع پالس سه بعدی اصلاح شده (M^۳D-BFs) پرداخته‌اند [۴۷]. این روش معادله انتگرال غیر خطی را به یک معادله جبری غیرخطی تبدیل می‌کند و با حل آن تقریبی از جواب معادله را به دست می‌دهد.

نعمتی^{۲۹} و اردوخانی^{۳۰} با استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر به ارائه روشی برای حل معادله انتگرال ولترا دویبعدی غیرخطی پرداختند [۵۲]. در این روش از نقاط گاوس-لژاندر برای تبدیل معادله انتگرال به معادله جبری غیرخطی استفاده شده است و نتایج حاصل از این مطالعه نشان‌دهنده دقت مناسب و کاربردپذیر بودن آن است.

جیانگ^{۳۱} و چن^{۳۲} روش جدیدی مبتنی بر روش فضای هسته بازتولیدی برای حل دستگاه معادلات انتگرال ولترا خطی نوع دوم ارائه دادند [۳۹]. جواب تقریبی این معادله با n جمله از سری پیشنهادی تقریب زده می‌شود. این روش به سادگی پیاده‌سازی می‌شود و دقت بالایی دارد.

دو^{۳۳} به بررسی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی که در مسائل مکانیک جامدات معمولاً با آن‌ها برخورد می‌کنیم پرداخت [۲۸]. در این دسته از معادلات، که معادلات دیفرانسیل-انتگرال فردهلم منفرد می‌باشند و هسته انتگرال منفرد می‌باشد. روش‌های عددی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند و حل آن‌ها بسیار دشوار است. نویسندگان با استفاده از روش فضای هسته بازتولیدی روشی برای حل این معادلات ارائه دادند. نتایج عددی استفاده از این روش برای حل این دسته از معادلات نشان می‌دهد که روش پیشنهادی کارا و دارای دقت بالایی است.

^{۲۶} Mooradi

^{۲۷} Mirzaee

^{۲۸} Haddadiyan

^{۲۹} Nemati

^{۳۰} Ordokhani

^{۳۱} Jiang

^{۳۲} Chen

^{۳۳} Du

جنگ^{۳۴} و کیان^{۳۵} روشی بر مبنای فضای هسته بازتولیدی برای حل مساله لایه مرزی با اغتشاش منفرد در نقاط بازگشت که دارای دو لایه مرزی است ارائه دادند [۳۴]. در این تحقیق، مساله به دو معادله لایه مرزی با دامنه معمولی تبدیل می‌شود و سپس با استفاده از روش فضای هسته بازتولیدی حل می‌شوند. از شرایط مرزی برای پیوستگی جواب استفاده می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهند که جواب این روش در مقایسه با سایر روش‌ها بسیار دقیق است.

لی^{۳۶} و وو^{۳۷} روشی کارا برای تحلیل خطای تقریب در روش فضای هسته بازتولیدی در حل مسائل مقدار مرزی ارائه کردند و ابزاری برای تخمین خطای تقریب آن برای مسائل مقدار مرزی خطی پیشنهاد نمودند [۴۳].

گائو^{۳۸} در مقاله خود روشی برای حل مسائل مقدار اولیه/مرزی مرتبه دوم منفرد ارائه کرد که بر پایه فضای هسته بازتولیدی هیلبرت عمل می‌کند [۳۱]. از مزایای این روش برای این دسته از مسائل این است که برای بسیاری از آن‌ها به صورت عمومی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. جواب معادله به صورت یک متناهی جمله از سری کلی تقریب زده می‌شود و نشان داده شده است که به صورت تحلیلی به جواب مساله همگراست. نتایج عددی، صحت و دقت این روش را تایید می‌کنند.

۸-۱- برخی مفاهیم از آنالیز تابعی

تعریف ۱-۱. [۵۳] به هر عضو x از فضای برداری X یک عدد حقیقی نامنفی نسبت می‌دهیم و آن را نرم x می‌نامیم و با نماد $\|x\|$ نشان می‌دهیم به طوری که:

الف) به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|x\| \geq 0$

ب) $\|x\| = 0$ است اگر و فقط اگر $x = \vec{0}$.

ج) به ازای هر $x \in X$ و $a \in F$ داشته باشیم $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ که در آن F میدانی است که X روی آن تعریف می‌شود.

^{۳۴} Geng

^{۳۵} Qian

^{۳۶} Li

^{۳۷} Wu

^{۳۸} Gao

(د) برای هر دو عضو x, y از X نامساوی زیر (نامساوی مثلثی) برقرار باشد:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

در این حالت X را یک فضای برداری نرم‌دار می‌نامیم. عدد نامنفی $\|x - y\|$ را فاصله بین دو نقطه x, y می‌نامیم.

تعریف ۱-۲. [۵۳] فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد. به هر دو عضو x, y از فضای X یک عدد حقیقی نسبت می‌دهیم که آن را ضرب داخلی x, y می‌نامیم و با نماد $\langle x, y \rangle$ نشان می‌دهیم به طوری که:

(الف) برای هر $x \in X$ داریم: $\langle x, x \rangle \geq 0$ و اگر $\langle x, x \rangle = 0$ آن‌گاه $x = \vec{0}$

(ب) برای هر $x, y \in X$ داریم: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(ج) برای هر $x \in X$ و هر $k \in \mathbb{R}$ داریم: $\langle kx, y \rangle = k \langle x, y \rangle$

(د) $\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = \langle x + y, z \rangle$

تعریف ۱-۳. [۵۳] فضای X را از توابع حقیقی یک فضای خطی یا یک فضای برداری گویند در صورتی که برای هر دو عضو $f, g \in X$ و هر دو اسکالر α, β داشته باشیم:

$$\alpha f + \beta g \in X$$

تعریف ۱-۴. [۵۳] تابع اندازه پذیر $f \in L^p$ است در صورتی که:

$$\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty, \quad p \geq 1$$

لذا تابع $f \in L^2[a, b]$ اگر $\int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$ باشد.

۹-۱- معادله انتگرال

معادله انتگرال به معادله‌ای گویند که در آن تابع مجهول، زیر علامت انتگرال قرار دارد یک نمونه از معادله انتگرال که در آن $y(x)$ تابعی مجهول است [۵۹] و بایستی تعیین شود بدین صورت است:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t) y(t) dt \quad (۱-۱)$$

که در آن λ عددی است ثابت و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابعی بر حسب x یا توابعی ثابت هستند. $f(x)$ و $k(x, t)$ که هسته معادله انتگرال گویند توابعی معلوم هستند. به عبارت دیگر معادله انتگرالی معادله‌ای است که در آن تابع مجهول در زیر یک یا چند علامت انتگرال‌گیری ظاهر شود.

مثال ۱-۱. چند نمونه از معادلات انتگرالی در ادامه اشاره شده‌اند.

$$g(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t) g(t) dt, \quad a \leq x \leq b \quad (۲-۱)$$

$$g(x) = \int_a^b k(x, t) g'(t) dt \quad (۳-۱)$$

$$g(x) = \int_a^b k(x, t) \sin(g(t)) dt \quad (۴-۱)$$

که در این معادلات g تابعی مجهول و بقیه توابع معلوم‌اند. توابع معلوم در معادلات انتگرال بالا می‌توانند توابع مختلط یا حقیقی از متغیرهای حقیقی x, t باشند. معادله انتگرال (۲-۱) می‌تواند به صورت

$$\varphi[g(x)] = f(x) \quad (5-1)$$

نوشته شود به طوری که $\varphi[g(x)]$ که شامل تابع مجهول $g(x)$ است به صورت تابعی خطی است یعنی این که

$$\varphi[\lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)] = \lambda_1 \varphi(g_1(x)) + \lambda_2 \varphi(g_2(x)) \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ ثابت} \quad (6-1)$$

بنابراین برای معادله انتگرال (۲-۱) خواهیم داشت.

$$\varphi[g(x)] = g(x) - \int_a^b k(x, t) g(t) dt \quad (7-1)$$

معادلات انتگرالی از نوع معادله انتگرال (۲-۱) را که $\varphi[g(x)]$ عبارت خطی است و $g(x)$ تحت یک یا چند علامت انتگرال گیری ظاهر می شود را معادلات انتگرال خطی می نامیم و چنانچه عملگر φ خطی نباشد معادلات انتگرال را غیرخطی می نامیم مانند معادلات انتگرال (۳-۱) و (۴-۱) که غیرخطی اند.

شکل کلی معادلات انتگرال خطی به صورت زیر است.

$$h(x) \quad g(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x, t) g(t) dt \quad (8-1)$$

که در آن $h(x)$ و $f(x)$ و $k(x, t)$ توابعی معلوم هستند و $g(x)$ تابعی مجهول است و بایستی تعیین شود $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ توابعی از x هستند یا توابعی ثابت اند و λ یک پارامتر مختلط یا حقیقی غیر صفر است. به $k(x, t)$ هسته معادله انتگرال گوییم.

۱-۱۰-۱- انواع معادلات انتگرال

معادلات انتگرال به چهار نوع تقسیم می‌شود [۵۹]:

- ❖ معادلات انتگرال فردهلم
- ❖ معادلات انتگرال ولترا
- ❖ معادلات انتگرال-دیفرانسیل
- ❖ معادلات انتگرال منفرد

۱-۱۰-۱- معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی

تعریف ۱-۶. [۵۹] در معادلات انتگرال فردهلم حدود انتگرال گیری اعدادی ثابت و حقیقی هستند. شکل کلی آنها بدین صورت است:

$$u(x)h(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(u(t))dt \quad \text{اعداد حقیقی } a \text{ و } b \quad (9-1)$$

که $u(x)$ تابع نامعلوم داخل و خارج انتگرال است، λ یک پارامتر مختلط یا حقیقی غیر صفر است. برای این نوع از معادلات، هسته $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ ، توابع با مقادیر حقیقی و $F(u(x))$ یک تابع غیرخطی از $u(x)$ مانند $u^3(x)$ ، $\cos(u(x))$ و ... است.

معادلات انتگرال فردهلم خود به چند دسته تقسیم می‌شود.

الف) معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع اول:

اگر $h(x) = 0$ باشد آن‌گاه معادله انتگرال (۹-۱) به معادله انتگرال فردهلم غیرخطی نوع اول تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) F(u(t)) dt = 0 \quad (10-1)$$

ب) معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم:

اگر $h(x) = 1$ باشد آن گاه معادله انتگرال (1-9) به معادله انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم تبدیل می شود.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) F(u(t)) dt \quad (11-1)$$

ج) معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی همگن نوع دوم:

حالتی خاص از معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم است و در آن $f(x) = 0$ است و داریم:

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x, t) F(u(t)) dt \quad (12-1)$$

۱-۱۰-۲- وجود جواب برای معادله انتگرال فردهلم غیرخطی

در این جا شرایط وجود جواب معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی را بازگو می کنیم [۵۹]. قضیه و اثبات کامل آن در [۳] و [۵] موجود است. ابتدا معادله انتگرال فردهلم غیرخطی نوع دوم را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, t, u(t)) dt \quad (13-1)$$

شرایط وجود جواب معادله انتگرال غیرخطی فردهلم (۱۳-۱) به صورت زیر است:

۱- تابع $f(x)$ در بازه $a \leq x \leq b$ کراندار باشد یعنی برای عدد مثبتی چون R ، $|f(x)| < R$.

۲- تابع $G(x, t, u(t))$ در $a \leq x, t \leq b$ کراندار و انتگرال پذیر^{۳۹} است، یعنی برای عدد مثبت k ،

$$|G(x, t, u(t))| < k$$

۳- تابع $G(x, t, u(t))$ در شرط لپ شیتس نسبت به متغیر سوم صادق باشد، یعنی برای عدد مثبت

M

$$|G(x, t, z) - G(x, t, z')| < M |z - z'|$$

با استفاده از روش تقریب، در [۳۷] اثبات شده که سری جواب برای تمامی مقادیر λ که $\lambda < \frac{1}{K(b-a)}$ و

K بزرگترین عدد بین $1 + \frac{R}{|\lambda|k(b-a)}$ و M (در بند ۳ معرفی شده) می باشد، به صورت یکنواخت همگراست.

۱-۱۰-۳- معادلات انتگرال ولترا غیرخطی:

تعریف ۷-۱. [۵۹] شکل کلی معادلات انتگرال ولترا غیرخطی بدین صورت است:

$$h(x) u(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t) F(u(t)) dt \quad (۱۴-۱)$$

که در آن یکی از حدود بالا یا پایین انتگرال گیری به جای یک عدد ثابت، متغیری چون x ظاهر می شود. برای این نوع از معادلات، هسته $k(x, t)$ و تابع $f(x)$ ، توابع با مقدار حقیقی اند و $F(u(x))$ یک تابع غیرخطی از تابع نامعلوم $u(x)$ مانند $\sin(u(x))$ ، $e^{u(x)}$ و ... می باشد.

^{۳۹} اگر تابعی دارای انتگرال باشد به آن انتگرال پذیر گویند.

معادلات انتگرال ولترا را می‌توانیم به صورت معادلات انتگرال فرد هلم تبدیل کنیم مثلاً برای معادله انتگرال ولترا (۱-۱۴) خواهیم داشت.

$$h(x) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) F(u(t)) dt \quad (1-15)$$

به طوری که

$$k(x, t) = \begin{cases} k(x, t) & a < t < x < b \\ 0 & a < x < t < b \end{cases} \quad (1-16)$$

معادلات انتگرال ولترا غیرخطی به چند دسته تقسیم می‌شود.

الف) معادلات انتگرال ولترا غیرخطی نوع اول:

اگر $h(x) = 0$ باشد معادله انتگرال (۱-۱۴) به معادله انتگرال ولترا غیرخطی نوع اول تبدیل می‌شود.

$$f(x) + \int_a^x k(x, t) F(u(t)) dt = 0 \quad (1-17)$$

ب) معادله انتگرال ولترا غیرخطی نوع دوم:

اگر در معادله انتگرال (۱-۱۴) داشته باشیم $h(x) = 1$ آن‌گاه معادله انتگرال حاصل را معادله انتگرال ولترا غیرخطی نوع دوم نامیم.

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t) F(u(t)) dt \quad (1-18)$$

ج) معادلات انتگرال ولترا غیرخطی همگن نوع دوم:

حالت خاصی از معادلات انتگرال ولترا غیرخطی نوع دوم هستند که در آن‌ها $f(x) = 0$ است.

$$u(x) = \int_a^x k(x, t) F(u(t)) dt \quad (19-1)$$

مثال ۱-۳. چند نمونه از معادلات انتگرال غیر خطی در زیر آورده شده است.

$$۱) \quad g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) g(t) dt$$

$$۲) \quad g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) e^{g(t)} dt$$

$$۳) \quad g(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \sin(g(t)) dt$$

۱-۱۰-۴- وجود جواب برای معادله انتگرال ولترا غیرخطی

در این جا شرایط وجود جواب معادلات انتگرال ولترا غیرخطی را ارائه می‌دهیم [۵۹]. قضیه و اثبات کامل آن در [۳]، [۵-۶]، [۱۱-۱۲] و [۱۴] موجود است. ابتدا معادله انتگرال ولترا غیرخطی نوع دوم را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$u(x) = f(x) + \int_a^x G(x, t, u(t)) dt \quad (20-1)$$

شرایط خاص زیر برای وجود جواب معادله انتگرال ولترا غیرخطی است:

۱- تابع $f(x)$ در بازه‌ی $a \leq x \leq b$ انتگرال‌پذیر و کران‌دار باشد.

۲- تابع $f(x)$ باید در بازه‌ی (a, b) در شرط لیب شیتس صدق کند. یعنی برای عدد مثبتی چون

k ,

$$|f(x) - f(y)| < k|x - y|$$

۳- تابع $G(x, t, u(t))$ در $a \leq x, t \leq b$ کران دار و انتگرال پذیر باشد، یعنی برای عدد مثبتی چون

k ،

$$|G(x, t, u(t))| < k$$

۴- تابع $G(x, t, u(t))$ در شرط لپ شیتس نسبت به متغیر سوم صادق باشد، یعنی برای عدد

مثبت M ،

$$|G(x, t, z) - G(x, t, z')| < M|z - z'|$$

۱-۱۰-۵- معادلات انتگرال - دیفرانسیل ولترا

در صورتی که در رابطه (۱-۱۴) مشتقات $g(x)$ درست چپ تساوی و زیر انتگرال ظاهر می شوند. معادله انتگرال حاصل را معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا نامیم. به عنوان مثال داریم

$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)F(u(t))dt \quad (1-21)$$

۱-۱۰-۶- معادلات انتگرال منفرد

وقتی که در معادله انتگرال یک یا هر دو حدود انتگرال گیری نامتناهی باشد یا هنگامی که هسته معادله انتگرال در بازه انتگرال گیری در یک یا چند نقطه دارای انفصال باشد یا نامتناهی باشد در این صورت معادله انتگرال را منفرد گوئیم.

مثال ۱-۲. معادلات انتگرال زیر منفرد هستند.

$$۱) \quad g(x) = \int_0^{\infty} (x-t)^{\alpha} g(t) dt$$

$$۲) \quad g(x) = \int_0^{\infty} \frac{g(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

معادلات انتگرال ولترا و فردهلم متداولترین معادلات انتگرالی هستند که با آنها برخورد می‌کنیم.

۱-۱۰-۷- چند نکته در مورد معادلات انتگرال ولترا و فردهلم

در این قسمت به ذکر چند نکته در مورد معادلات انتگرال ولترا و فردهلم می‌پردازیم.

۱) ساختمان معادلات انتگرال ولترا و فردهلم:

در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع اول تابع مجهول g تنها به طور خطی زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود، اما در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی نوع دوم تابع مجهول هم در زیر علامت انتگرال و هم در خارج از علامت انتگرال به صورت خطی ظاهر می‌شود.

۲) حدود انتگرال‌گیری:

در معادلات انتگرال فردهلم، انتگرال‌گیری روی یک بازه متناهی با حدود ثابت انجام می‌شود ولی در معادلات انتگرال ولترا حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری متغیر است و معمولاً همان حد بالای انتگرال‌گیری به عنوان متغیر انتخاب می‌شود.

(۳) منشاء ظهور معادلات انتگرال:

معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل مهندسی، فیزیک، شیمی و بیولوژی ظاهر می‌شوند [۲۷]. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مساله مقدار مرزی باشد آن‌گاه معادله انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مساله مقدار اولیه باشد آن‌گاه این معادله قابل تبدیل به یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود. برحسب این‌که معادله انتگرال در چه نوع مساله‌ای ظاهر می‌شود تکنیک‌ها و ایده‌های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال به کار برده می‌شود.

(۴) خاصیت خطی:

همان گونه که قبلاً بیان شد تابع مجهول $g(x)$ در معادلات انتگرال ولترا و فردهلم خطی در زیر علامت انتگرال به صورت توان یک ظاهر می‌شود، اما زمانی معادلات انتگرال غیرخطی فردهلم و ولترا خواهیم داشت که به جای $g(x)$ عملگری غیرخطی نظیر $F(g(x))$ آورده شود. فرم کلی معادلات انتگرال غیرخطی به صورت (۲۱-۱) می‌باشد.

برای درک بیشتر ارتباط بین معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرالی به ذکر چند مثال خواهیم پرداخت. قبل از ارائه مثال‌ها به بیان قاعده لاینیتز و یک لم که از این قاعده منتج می‌شود اشاره می‌کنیم.

۱-۱۱- قاعده لاینیتز تعمیم یافته [۵۹]

تابع $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x, y) dy$ که در آن $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ دارای مشتقات مرتبه اول پیوسته نسبت به x می‌باشد را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم:

$$f'(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} F(x, y) dy + \beta'(x)F(x, \beta(x)) - \alpha'(x)F(x, \alpha(x)) \quad (۲۲-۱)$$

این رابطه وقتی برقرار است که $F(x, y)$ و مشتق جزئی $\frac{\partial F}{\partial x}$ توابعی پیوسته از x و y باشند.

رده‌ای از مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی را می‌توان به ترتیب به معادلات انتگرال ولترا و فردهلم تبدیل کرد ولی برای انجام این کار نیاز به لم زیر داریم که انتگرال‌های چندگانه را به انتگرال یگانه تبدیل می‌کند.

لم ۱-۱. [۵۹]

$$\underbrace{\int_a^x \dots \int_a^x}_{n \text{ بار}} f(t) dt \dots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt \quad (۲۳-۱)$$

مثال ۱-۴. معادله انتگرال فردهلم متناظر با مساله مقدار مرزی زیر پیدا می‌شود.

$$\begin{aligned} y''(x) + 4y(x) &= \sin x & 0 < x < 1 \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned} \quad (۲۷-۱)$$

قرار می‌دهیم $y''(x) = u(x)$ ، با دوبار انتگرال‌گیری از طرفین تساوی در بازه $(0, x)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y'(0) + \int_0^x u(t) dt \\ y(x) &= xy'(0) + \int_0^x (x-t) u(t) dt \\ y(1) = 0 &= y'(0) + \int_0^1 (1-t) u(t) dt \Rightarrow y'(0) = - \int_0^1 (1-t) u(t) dt \end{aligned}$$

$$y(x) = x \int_0^1 (t-1) u(t) dt + \int_0^x (x-t) u(t) dt \quad (۲۸-۱)$$

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x - \int_0^1 \epsilon x(t-1) u(t) dt - \epsilon \int_0^x (x-t) u(t) dt \\ &= \sin x + \int_0^x \epsilon t(1-x) u(t) dt + \int_x^1 \epsilon x(1-t) u(t) dt \end{aligned}$$

$$= \sin x + \int_0^1 k(x, t) u(t) dt \quad (29-1)$$

$$k(x, t) = \begin{cases} t(1-x) & 0 \leq t \leq x \\ x(1-t) & x \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (30-1)$$

مثال ۱-۵. مساله مقدار اولیه زیر به یک معادله انتگرال ولترای معادل با آن تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) &= g(x) \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta, \quad y''(0) &= \gamma \end{aligned} \quad (31-1)$$

که در آن γ, β, α اعداد ثابت هستند و توابع $p(x)$ و $q(x)$ و $r(x)$ توابع تحلیلی هستند و دارای بسط تیلور حول مبدا می باشند و $g(x)$ روی بازه مفروض فاصله مورد بحث پیوسته است.

قرار می دهیم:

$$y'''(x) = u(x) \quad (32-1)$$

که در آن $u(x)$ یک تابع بازه پیوسته روی بازه مفروض است. از طرفین رابطه (۳۱-۱) در بازه $(0, x)$ سه بار انتگرال می گیریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_0^x y'''(t) d(t) = y''(x) - y''(0) = y''(x) - \gamma = \int_0^x u(t) d(t) \quad (33-1)$$

$$\Rightarrow y''(x) = \gamma + \int_0^x u(t) dt$$

$$\int_0^x y''(t) dt = y'(x) - y'(0) = y'(x) - \beta = \gamma x + \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

$$\Rightarrow y'(x) = \beta + \gamma x + \int_0^x (x-t) u(t) dt \quad (34-1)$$

$$\int_0^x y'(t) dt = y(x) - \alpha = \beta x + \frac{1}{2} \gamma x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt$$

$$\Rightarrow y(x) = \alpha + \beta x + \frac{1}{2} \gamma x^2 + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt \quad (35-1)$$

با توجه به روابط (31-1) و (32-1) و (33-1) و (34-1) و (35-1) خواهیم داشت:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t) u(t) dt \quad (36-1)$$

که در آن

$$k(x, t) = (x-t)^2 = p(x) + q(x)(x-t) + \frac{1}{2!} r(x)(x-t)^2 \quad (37-1)$$

و بنابراین داریم

$$f(x) = g(x) - \left\{ \gamma p(x) + \beta q(x) + \alpha r(x) + \gamma x q(x) + r(x) \left(\beta x + \frac{1}{2} \gamma x^2 \right) \right\} \quad (38-1)$$

۱۲-۱ خواص تابع دیراک^{۴۰}

[۵۳] تابع دیراک که به صورت

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

تعریف می شود دارای خواص زیر می باشد:

$$۱. \int_a^b f(x) \delta(x-y) dx = \begin{cases} f(y) & y \in [a, b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$۲. \int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1 & 0 \in (a, b) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$۳. \delta(-x) = \delta(x)$$

$$۴. \delta(\alpha x) = \frac{\delta(x)}{|\alpha|}, \alpha \in R$$

$$۵. x \delta(x) = 0$$

۱۳-۱ خواص تابع پله ای^{۴۱}

[۵۳] تابع پله ای که به صورت

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

تعریف می شود دارای خواص زیر می باشد که در آن δ تابع دیراک است:

Dirac function^{۴۰}
step function^{۴۱}

$$1. \int_0^x \delta(x-y) dx = \eta(x-y) \\ = (x-y)_+^0$$

$$2. \frac{d}{dx} \eta(x-y) = \delta(x-y)$$

۱۴-۱ تعاریف مهم

پایه: مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی است که فضای پوشش داده شده توسط آن‌ها کل فضای برداری شود.

مستقل خطی: یک مجموعه از بردارها را مستقل خطی می‌گوییم، اگر هیچ‌کدام را نتوان برحسب ترکیب خطی بقیه نوشت. به عبارت دیگر یک مجموعه از بردارها مستقل خطی است اگر هیچ ترکیب خطی ناصفر آن‌ها مساوی بردار صفر نشود.

فضای برداری: مجموعه V را یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط C می‌گوییم هرگاه دو عمل جمع بردارها و ضرب اسکالر بر روی آن تعریف شده باشد.

میدان: یک میدان مجموعه‌ای از اعداد یا اسکالرها به همراه اعمال جمع و ضرب است که دارای خواصی طبیعی مانند شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری و جابه‌جایی باشند.

فصل دوم

روش فضای هیلبرت هسته بازتولیدی

۲-۱- مقدمه

در این فصل در ابتدا مفاهیم مقدماتی و پایه‌ای ویژگی‌های فضای هیلبرت هسته بازتولیدی و قضایای آن ارائه می‌شود و تولید تابع هیلبرت هسته بازتولیدی از فضای هیلبرت هسته بازتولیدی در شرایط مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. قابل ذکر است که روش فضای هیلبرت هسته بازتولیدی ابزاری قدرتمند برای مدل نمودن توابع غیرخطی می‌باشد. یکی از مزیت‌های روش مبتنی به هسته، سادگی در پیاده‌سازی مدل‌های غیرخطی است.

۲-۲- تعریف فضای هیلبرت هسته بازتولیدی

فرض کنیم H یک فضای هیلبرت به صورت زیر باشد که در آن f یک تابع تک متغیری باشد [۴۳].

$$H = \{ f(x) \mid f(x) \text{ تابع حقیقی یا مختلط باشد} \mid x \in X \}$$

و ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ تعریف شده روی این فضا باشد. اگر برای هر $y \in X$ ثابت، تابع $R_y(x)$ ای موجود باشد که داشته باشیم $R_y(x) \in H$ و برای هر $f(x) \in H$ که در شرط

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_H = f(y) \quad (1-2)$$

صدق کند، آن‌گاه $R_y(x)$ را هسته بازتولیدی هیلبرت H و فضای هیلبرت H را فضای هیلبرت هسته بازتولیدی می‌نامند.

مثال ۲-۱. فضای اقلیدسی n بعدی یک فضای هیلبرت هسته بازتولیدی است.

$$\mathbb{R}^n = \{ a \mid a = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \}$$

$$e_k(i) = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} \quad 0 \leq i, k \leq n$$

و $e_k(i)$ یک هسته بازتولیدی هیلبرت $\mathbb{R}^n$ است. e_k بردار پایه استاندارد فضای اقلیدسی است و داریم

$$\langle a, e_k \rangle = a_k$$

شایان ذکر است که ضرب داخلی تعریف شده در این فضا همان ضرب نقطه‌ای می‌باشد.

مثال ۲-۲. در فضای هیلبرت n بعدی H مجموعه $\{e_i\}_1^n$ یک پایه متعامد یکه است که در آن

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle_H = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

لذا $R_s(t) = \sum_i e_i(t) \overline{e_j(s)}$ هسته بازتولیدی هیلبرت فضای H است. در واقع برای هر $f(t) \in H$ داریم:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_i a_i e_i(t) \\ \langle f(t), R_s(t) \rangle &= \left\langle \sum_i a_i e_i(t), \sum_j e_j(t) \overline{e_j(s)} \right\rangle_H \\ &= \sum_i a_i e_i(s) = f(s) \end{aligned}$$

فضای تابعی $W_2^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$W_2^m[a, b] = \{f(x) \mid f^{(m-1)}(x) \text{ و مطلقاً پیوسته } f^{(m)}(x) \in L^2[a, b], x \in [a, b]\} \quad (2-2)$$

ضرب داخلی و نرم فضای $W_2^m[a,b]$ به صورت زیر است [۲۷]:

$$\forall f, g(x) \in W_2^m[a,b]$$

$$\langle f, g \rangle_{W_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx \quad (۳-۲)$$

$$\|f\|_{W_2^m} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{W_2^m}} \quad (۴-۲)$$

۳-۲- ویژگی های اساسی هسته بازتولیدی هیلبرت

در این بخش ویژگی های پایه ای و اساسی هسته بازتولیدی هیلبرت که در ادامه تحقیق مورد استفاده قرار می گیرند مطرح می شوند [۲۷].

ویژگی ۱. [۲۷] اگر H یک فضای هیلبرت هسته بازتولیدی باشد، آنگاه هسته بازتولیدی هیلبرت $R_y(x)$ در فضای H متقارن مزدوج است. به عبارت دیگر $R_y(x) = \overline{R_x(y)}$.

برهان: چون $R_y(x) \in H$ ، لذا بنابر تعریف فضای هیلبرت هسته بازتولیدی و (۱-۲) داریم

$$\begin{aligned} R_y(x) &= \langle R_y(\cdot), R_x(\cdot) \rangle_H \\ &= \overline{\langle R_x(\cdot), R_y(\cdot) \rangle_H} = \overline{R_x(y)} \end{aligned}$$

ویژگی ۲. [۲۷] اگر H یک فضای هیلبرت هسته بازتولیدی باشد، آنگاه هسته بازتولیدی هیلبرت $R_y(x)$ در فضای H منحصر به فرد است.

برهان: فرض کنیم $Q_y(x)$ یک هسته بازتولیدی هیلبرت دیگر باشد، لذا

$$\begin{aligned} Q_y(x) &= \langle Q_y(\cdot), R_x(\cdot) \rangle_H \\ &= \overline{\langle R_x(\cdot), Q_y(\cdot) \rangle_H} \\ &= \overline{R_x(y)} = R_y(x) \end{aligned}$$

ویژگی ۳. [۲۷] اگر $R_y(x)$ هسته بازتولیدی هیلبرت H باشد، آن گاه برای هر $x \in X$ داریم $R_x(x) \geq 0$ و $R_x(x) = 0$ اگر و تنها اگر $H = \{0\}$.

$$R_x(x) = \langle R_x(\cdot), R_x(\cdot) \rangle_H = \|R_x\|_H^2 \geq 0$$

برهان:

$$\begin{aligned} R_x(x) = 0 &\Leftrightarrow \|R_x\|^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow R_x = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle f(\cdot), 0 \rangle_H = 0 \\ &\Leftrightarrow H = \{0\} \end{aligned}$$

ویژگی ۴. [۲۷] هسته بازتولیدی هیلبرت $R_y(x)$ یک هسته معین مثبت است، هرگاه

$$\sum_i R_{x_i}(x_j) \bar{t_i} t_j \geq 0 \quad \forall x_i \in X$$

که در آن t_i ها اعداد مختلط هستند.

ویژگی ۵. [۲۷] فضای تابعی هیلبرت H یک فضای هیلبرت هسته بازتولیدی است اگر و تنها اگر برای هر $x \in X$ تابع خطی $I(f) = f(x)$ کراندار باشد.

برهان:

شرط لازم) فرض کنیم H یک فضای هیلبرت هسته بازتولیدی با هسته بازتولیدی هیلبرت $R_y(x)$ باشد. تابع دلخواهی مانند $I(f) = f(x)$ را در نظر می گیریم، نشان می دهیم $I(f)$ کراندار است.

$$\begin{aligned} |I(f)| &= |f(x)| = \langle f(\cdot), R_x(\cdot) \rangle_H \\ &\leq \|f\|_H \|R_x(\cdot)\|_H = \|f\|_H \sqrt{R_x(x)} \\ &= M_x \|f\|_H \\ \Rightarrow \|I(f)\|_H &\leq M \end{aligned}$$

شرط کافی) با توجه به کران‌داری l ، می‌توان قضیه نمایش ریس^{۴۲} را به کار برد. پس

$$f(x) = I(f) = \langle f, R_x \rangle_H$$

۲-۴- فضای هیلبرت هسته بازتولیدی $W_2^m[a, b]$ [۲۷]

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ داده شده باشد و $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$ مجموعه‌ای از بازه‌های دو به دو جدا از هم باشند که $(a_k, b_k) \subset [a, b]$. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ که برای $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$$

آن‌گاه تابع f را مطلقاً پیوسته بر بازه $[a, b]$ می‌نامیم.

ویژگی ۶. [۲۷] هر تابع مطلقاً پیوسته بر بازه $[a, b]$ ، پیوسته است.

برهان: کافی است در تعریف توابع مطلقاً پیوسته $n=1$ قرار دهیم. لذا داریم:

برای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود دارد که برای $b - a < \delta$ ، خواهیم داشت $|f(b) - f(a)| < \varepsilon$. که این تعریف پیوستگی تابع f بر بازه $[a, b]$ است.

ویژگی ۷. [۲۷] برای تابع f تعریف شده بر بازه $[a, b]$ اگر برای هر $x \in [a, b]$ $|f'(x)| \leq M$ آن‌گاه f مطلقاً پیوسته است.

برهان: به کمک قضیه مقدار میانی داریم،

$$\exists \zeta_k \in (a_k, b_k) \subset [a, b] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

^{۴۲} Riesz representation theorem

$$\begin{aligned}
|f(b_k) - f(a_k)| &= |f'(\xi_k)(b_k - a_k)| \\
&< |f'(\xi_k)|(b_k - a_k) \\
&< M(b_k - a_k) \\
\Rightarrow \sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| &< M \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) \\
&< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۸. اگر تابع f' بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، آنگاه f بر $[a, b]$ مطلقاً پیوسته است.

ویژگی ۸ [۲۷] اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه تابع $\int_a^x f(t) dt$ بر بازه $[a, b]$ مطلقاً پیوسته است.

برهان: فرض کنیم $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n \subset [a, b]$ یک خانواده از بازه‌های دوبه‌دو جدا از هم باشند که در شرط $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ صدق می‌کنند.

$$\begin{aligned}
|f(b_i) - f(a_i)| &= \left| \int_a^{b_i} f(t) dt - \int_a^{a_i} f(t) dt \right| \\
&= \left| \int_{a_i}^{b_i} f(t) dt \right| \\
&\leq \int_{a_i}^{b_i} |f(t)| dt
\end{aligned}$$

بنابر فرض تابع f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر است. یعنی $\int_a^b |f(t)| dt < \infty$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| &< \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f(t)| dt \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

بررسی خواص ضرب داخلی در تعریف (۳-۲):

(i) $\forall f \in W_2^m[a, b]$

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) f^{(m)}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f^{(i)}(a))^2 + \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle f, f \rangle_{W_2^m} &= 0 \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) f^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) f^{(m)}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f^{(i)}(a))^2 + \int_a^b (f^{(m)}(x))^2 dx\end{aligned}$$

حاصل جمع دو عبارت مثبت (توان دو) برابر صفر شده است. این نتیجه می دهد که هر کدام از آن عبارت ها برابر صفر است و این بدان معنی است که

$$\Rightarrow f \equiv 0.$$

(ii) $\forall f, g \in W_2^m[a, b]$

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} g^{(i)}(a) f^{(i)}(a) + \int_a^b g^{(m)}(x) f^{(m)}(x) dx \\ &= \langle g, f \rangle_{W_2^m}.\end{aligned}$$

$$(iii) \quad \forall f, g \in W_2^m[a, b], \quad k \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned} \langle kf, g \rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} k f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + \int_a^b k f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx \\ &= k \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) g^{(i)}(a) + k \int_a^b f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx \\ &= k \langle f, g \rangle_{W_2^m}. \end{aligned}$$

$$(iv) \quad \forall f, g, t \in W_2^m[a, b]$$

$$\begin{aligned} \langle f, t \rangle_{W_2^m} + \langle g, t \rangle_{W_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) t^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x) t^{(m)}(x) dx \\ &\quad + \sum_{i=0}^{m-1} g^{(i)}(a) t^{(i)}(a) + \int_a^b g^{(m)}(x) t^{(m)}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (f^{(i)}(a) + g^{(i)}(a)) t^{(i)}(a) + \int_a^b (f^{(m)}(x) + g^{(m)}(x)) t^{(m)}(x) dx \\ &= \langle f + g, t \rangle_{W_2^m}. \end{aligned}$$

قضیه ۲-۱. [۲۷] فضای تابعی $W_2^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت است.

قضیه ۲-۲. [۲۷] $W_2^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت هسته بازتولیدی است.

۲-۵- نحوه ساختن $R_y(x)$ [۲۷]

اگر $R_y(x)$ یک هسته بازتولیدی هیلبرت $W_2^m[a, b]$ باشد، آن گاه برای هر $y \in [a, b]$ و برای هر تابع $f(x) \in W_2^m$ با استفاده از تعریف داریم:

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{w_2^m} = f(y) \quad (5-2)$$

لذا از (۳-۲) داریم:

$$\langle f(x), R_y(x) \rangle_{w_2^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx \quad (6-2)$$

و همچنین از انتگرال‌های دوگانه پی در پی داریم:

$$\int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_{x=a}^b + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx \quad (7-2)$$

از تغییر متغیر خواهیم داشت:

$$\sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} R_y(x)}{\partial x^{m+i}} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \quad (8-2)$$

لذا با جایگذاری (۸-۲) در (۷-۲) داریم:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m R_y(x)}{\partial x^m} dx &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=a} + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=b} - \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=a} + \\
&\quad (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx
\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}
\langle f(x), R_y(x) \rangle_{w_2^m} &= \sum_{i=0}^{m-1} \left[f^{(i)}(a) \frac{\partial^i R_y(x)}{\partial x^i} \Big|_{x=a} + (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=b} \right. \\
&\quad \left. - (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=a} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx \right] \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \left[\frac{\partial^i R_y(x)}{\partial x^i} \Big|_{x=a} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=a} \right] + \\
&\quad \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=b} + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} dx
\end{aligned}$$

بنابراین $R_y(x)$ جواب معادله زیر است:

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(x)}{\partial x^i} \Big|_{x=a} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=a} = 0 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-i-1}} \Big|_{x=b} = 0 \\ (-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y) \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (9-2)$$

اگر $x \neq y$ باشد، آن گاه $R_y(x)$ جواب معادله دیفرانسیل زیر با مرتبه $2m$ است یعنی

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = 0 \quad (10-2)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0 \\ \frac{\partial^{2m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{2m-i-1}} = 0 \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \quad (11-2)$$

اگر $x = y$ ، آن گاه کافی است از رابطه $(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x-y)$ نسبت به x در فاصله $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ انتگرال گرفته و سپس ε را به صفر میل می دهیم. یعنی

$$(-1)^m \left(\frac{\partial^{2m-1} lR_y(y^+)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} rR_y(y^-)}{\partial x^{2m-1}} \right) = 1 \quad (12-2)$$

با تکرار فرایند انتگرال و حد، داریم:

$$\frac{\partial^i lR_y(y)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i rR_y(y)}{\partial x^i} \quad i = 0, 1, \dots, 2m-2 \quad (13-2)$$

و لذا جواب عمومی معادله (9-2) به کمک روابط (11-2)، (12-2) و (13-2) به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} lR_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1} & x < y \\ rR_y(x) = \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1} & x > y \end{cases} \quad (14-2)$$

که $c_i(y)$ و $d_i(y)$ توابعی بر حسب y هستند.

ویژگی ۹. [۲۷] اگر $R_y(x)$ هسته بازتولیدی هیلبرت $W_2^m[a, b]$ باشد، آنگاه

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^2[a, b], \quad i + j = 2m - 1 \quad (15-2)$$

برهان: رابطه $(-1)^m \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = \delta(x - y)$ را در $(-1)^m$ ضرب می‌کنیم. لذا داریم:

$$\frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \delta(x - y) \quad (16-2)$$

حال با گرفتن $\int_0^x dx$ از طرفین رابطه (۱۶-۲) داریم.

$$\frac{\partial^{2m-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-1}} = (-1)^m \eta(x - y) + c_1 \quad (17-2)$$

اگر در (۱۷-۲) $\eta = 0$ ، آن گاه $\frac{\partial^{2m-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-1}} = c_1 \in L^2$ و اگر در (۱۷-۲) $\eta = 1$ ، آن گاه

$$\frac{\partial^{2m-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-1}} \in L^2 \quad \text{پس} \quad \frac{\partial^{2m-1} R_y(x)}{\partial x^{2m-1}} = (-1)^m + c_1 \in L^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2m} R_y(x)}{\partial x^{2m-1} \partial y} &= (-1)^{m+1} \frac{\partial}{\partial y} \eta(y-x) \\ &= (-1)^{m+1} \delta(x-y) \end{aligned}$$

با تکرار این روند و خاصیت تابع دیراک، گزاره اثبات می شود.

ویژگی ۱۰. [۲۷] تابع $\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j}$ ، $0 \leq i+j \leq 2m-2$ یک تابع مطلقاً پیوسته بر بازه $[a, b]$ است.

ویژگی ۱۱. [۲۷] اگر $R_y(x)$ هسته بازتولیدی هیلبرت $W_2^m[a, b]$ باشد، آن گاه

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in W_2^m[a, b], \quad i+j = m-1 \quad (۱۸-۲)$$

ویژگی ۱۲. [۲۷] فرض کنیم $W_2^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت هسته بازتولیدی باشد و برای $n=1, 2, \dots$ ، $f(x), f_n(x) \in W_2^m$ اگر دنباله $f_n(x)$ در نرم $\|\cdot\|_{W_2^m}$ به $f(x)$ همگرا باشد، آن گاه دنباله $f_n^{(k)}(x)$ برای $0 \leq k \leq m-1$ به طور یکنواخت به $f^{(k)}(x)$ همگرا خواهند بود.

برهان: اگر $R_y(x)$ هسته بازتولیدی هیلبرت $W_2^m[a, b]$ باشد، در این صورت

$$f_n(x) - f(x) = \left\langle f_n(y) - f(y), R_x(y) \right\rangle_{W_2^m}$$

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) &= (f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x))^{(k)} \\ &= \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left\langle f_n(y) - f(y), R_x(y) \right\rangle_{W_2^m} \\ &= \left\langle f_n(y) - f(y), \frac{\partial^k}{\partial x^k} R_x(y) \right\rangle_{W_2^m} \end{aligned}$$

طبق ویژگی ۱۱، $\frac{\partial^k}{\partial x^k} R_x(y) \in W_2^m[a, b]$ ، $k = 0, 1, \dots, m-1$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| &\leq \|f_n(y) - f(y)\|_{W_2^m} \cdot \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} R_x(y) \right\|_{W_2^m} \\ &\leq M \cdot \|f_n(y) - f(y)\|_{W_2^m} \end{aligned}$$

با گرفتن حد از دو طرف داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \cdot \|f_n(y) - f(y)\|_{W_2^m} \\ &= 0 \end{aligned}$$

از طرفی M کران بالای سمت چپ است و مستقل از x است، لذا $f_n^{(k)}$ همگرایی یکنواخت است. $\square$

مثال ۲-۳. [۲۷] تابع هیلبرت هسته بازتولیدی فضای $W_2^1[a,b]$ به صورت زیر است.

$$R_y(x) = \begin{cases} 1-a+x & x \leq y \\ 1-a+y & x > y \end{cases} \quad (۱۹-۲)$$

مثال ۲-۴. [۲۷] تابع هیلبرت هسته بازتولیدی فضای $W_2^2[0,1]$ به صورت زیر است.

$$R_y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^5}{120} + \frac{1}{12} x^2 y^2 (x+3) + xy \left(1 - \frac{x^4}{24}\right) & x \leq y \\ 1 + \frac{y^5}{120} + \frac{1}{12} x^2 y^2 (y+3) + xy \left(1 - \frac{y^4}{24}\right) & x > y \end{cases} \quad (۲۰-۲)$$

مثال ۲-۵. [۲۷] تابع هیلبرت هسته بازتولیدی فضای $W_2^7[0,1]$ به صورت زیر است.

$$\{R_y(x) = \frac{1}{51011754393600} (8192y^2(1716x^6 - 1287x^5y + 715x^4y^2 - 286x^3y^3 + 78x^2y^4 - 13xy^5 + y^6) + 8192(6227020800 + x^{13} - 13x(x^{11} - 479001600)y + 78x^2(19958400 + x^9)y^2 - 286x^3(x^7 - 604800)y^3 + 715x^4(15120 + x^5)y^4 - 1287x^5(x^3 - 336)y^5 + 1716x^6(7+x)y^6) - 7028736x^6y^6(x+y+|y-x|) + 1317888x^5y^5(x+y+|y-x|)^3 - 183040x^4y^4(x+y+|y-x|)^5 + 18304x^3y^3(x+y+|y-x|)^7 - 1248x^2y^2(x+y+|y-x|)^9 + 52xy(x+y+|y-x|)^{11} - (x+y+|y-x|)^{13}).\}$$

مثال ۲-۶. [۲۷] تابع هیلبرت هسته بازتولیدی فضای $W_2^1[0,1]$ به صورت زیر است.

$$R_y(x) = \begin{cases} 1+x & x \leq y \\ 1+y & x > y \end{cases} \quad (22-2)$$

با جایگذاری $m=1$ و $i=0$ در (۲-۴) داریم:

$$\begin{cases} lR_y(x) = c_1(y) + c_2(y)x & x < y \\ rR_y(x) = d_1(y) + d_2(y)x & x > y \end{cases}$$

همچنین از رابطه‌ی (۲-۱۱) داریم:

$$\begin{cases} R_y(0) - (-1)^0 \frac{\partial R_y(0)}{\partial x} = 0 \Rightarrow R_y(0) = \frac{\partial R_y(0)}{\partial x} \Rightarrow c_1(y) = c_2(y) & (*) \\ \frac{\partial R_y(1)}{\partial x} = 0 \Rightarrow d_2(y) = 0 \end{cases}$$

از رابطه‌ی (۲-۱۲) داریم:

$$(-1)^1 \left(\frac{\partial lR_y(y^+)}{\partial x} - \frac{\partial rR_y(y^-)}{\partial x} \right) = 1 \Rightarrow c_2(y) = 1$$

طبق (*) $c_1(y) = 1$.

همچنین از (۲-۱۳) داریم:

$$lR_y(y) = rR_y(y) \Rightarrow d_1(y) = 1+y$$

۲-۶- فضای هیلبرت هسته بازتولیدی $W_2^1(\mathbb{R})$ [۲۷]

در برخی مسائل دامنه متغیر مجموعه اعداد حقیقی است و لذا می‌بایست فضای هسته بازتولیدی مناسب آن‌ها تعریف شوند. در این فضا $f'(x) \in L^2(\mathbb{R})$ است و نرم و ضرب داخلی این فضا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle f(x), g(x) \rangle_{W_2^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x)g(x) + f'(x)g'(x))dx \quad (2-23)$$

$$\|f(x)\|_{W_2^1(\mathbb{R})} = \sqrt{\langle f(x), f(x) \rangle_{W_2^1(\mathbb{R})}} \quad (2-24)$$

جواب عمومی هسته بازتولیدی هیلبرت به صورت زیر خواهد بود:

$$R_y(x) = \begin{cases} c_1(y)e^x + c_2(y)e^{-x} & x \leq y \\ d_1(y)e^x + d_2(y)e^{-x} & x > y \end{cases} \quad (2-25)$$

که ضرایب را به صورت $c_1(y) = \frac{e^{-y}}{2}$ و $c_2(y) = 0$ و $d_1(y) = 0$ و $d_2(y) = \frac{e^y}{2}$ می‌توانیم انتخاب کنیم. لذا برای هسته بازتولید داریم

$$R_y(x) = \frac{e^{-|x-y|}}{2} \quad (2-26)$$

فصل سوم

حل معادلات انتگرال غیرخطی با استفاده از روش فضای هیلبرت هسته
بازتولیدی

مطالعه معادلات انتگرال غیرخطی از سال‌های ۱۹۲۰ تا ۱۹۳۰ آغاز گردید و تاکنون روش‌های زیادی برای حل آن‌ها ارائه شده است. در روش‌های معرفی شده برای حل این معادلات عمدتاً مساله به یک معادله جبری غیرخطی تبدیل می‌شود و با حل آن معادله با روش‌هایی مثل نیوتن جواب مساله پیدا می‌شود. روش هسته بازتولیدی هیلبرت یک تکنیک جدید برای حل این نوع مسائل است که برای انواع خطی و غیرخطی آن کاربرد دارد. با توجه به این‌که در فرایند اجرای این روش از تکنیک‌های متعامدسازی استفاده می‌شود، روش‌های مربوطه نظیر فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت و توابع پایه‌ای تولید شده توسط هسته بازتولیدی هیلبرت نیز ارائه می‌شوند. این فصل بر استفاده از روش فضای هسته بازتولیدی در حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترا تمرکز دارد و نحوه پیاده‌سازی و به‌کارگیری آن برای حل مسائل معادلات انتگرال خطی و غیرخطی و نیز مباحث نظری آن شامل الگوریتم و ویژگی‌های جواب ارائه می‌شوند.

۳-۲- فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت [۳۷]

پایه‌ای مانند $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ برای $\mathbb{R}^n$ داده شده است [۵۱]. می‌خواهیم از این پایه، پایه‌ای مانند $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ به دست آوریم که اعضای آن دو به دو بر هم عمود باشند، یعنی $y_i \cdot y_j = 0 \quad i \neq j$ برای این کار مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

الف) قرار می‌دهیم $y_1 = x_1$.

ب) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} x_2 + ay_1 &= y_2 \\ &= x_2 + ax_1 \end{aligned}$$

y_1 بایستی بر y_2 عمود باشد، پس باید داشته باشیم

$$\begin{aligned} 0 &= y_1 \cdot y_2 \\ &= y_1 \cdot x_2 + ay_1 \cdot y_1 \end{aligned}$$

از آن‌جا داریم $a = -\frac{y_1 \cdot x_2}{y_1 \cdot y_1}$ در نتیجه

$$y_2 = x_2 - \frac{y_1 \cdot x_2}{y_1 \cdot y_1} \cdot y_1$$

ج) قرار می دهیم $y_3 = x_3 + ay_2 + by_1$ باید داشته باشیم،

$$\begin{aligned} 0 &= y_1 \cdot y_3 \\ &= y_1 \cdot x_3 + ay_1 \cdot y_2 + by_1 \cdot y_1 \\ 0 &= y_2 \cdot y_3 \\ &= y_2 \cdot x_3 + ay_2 \cdot y_2 + by_2 \cdot y_1 \end{aligned}$$

از آن جا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{y_2 \cdot x_3}{y_2 \cdot y_2} \quad \text{و} \quad b = -\frac{y_1 \cdot x_3}{y_1 \cdot y_1} \\ y_3 &= x_3 - \frac{y_2 \cdot x_3}{y_2 \cdot y_2} \cdot y_2 - \frac{y_1 \cdot x_3}{y_1 \cdot y_1} \cdot y_1 \end{aligned}$$

با ادامه این روش به دست می آید

$$y_n = x_n - \frac{y_{n-1} \cdot x_n}{y_{n-1} \cdot y_{n-1}} \cdot y_{n-1} - \frac{y_{n-2} \cdot x_n}{y_{n-2} \cdot y_{n-2}} \cdot y_{n-2} - \dots - \frac{y_1 \cdot x_n}{y_1 \cdot y_1} \cdot y_1$$

از آن جا اگر تعریف کنیم

$$z_i = \frac{y_i}{\|y_i\|} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

پایه $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ یک پایه متعامد نرمال برای $\mathcal{R}^n$ می باشد.

البته به دلیل انجام تعداد اعمال بالای ضرب و تقسیم در این فرآیند، روش فوق ناپایدار است.

مثال ۳-۱. با به کار بردن روش گرام-اشمیت یک پایه متعامد نرمال از پایه

$$\{x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\} \text{ برای } \mathbb{R}^3 \text{ به دست آورید.}$$

$$y_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_2 = x_2 - \frac{y_1 \cdot x_2}{y_1 \cdot y_1} \cdot y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{0}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = x_3 - \frac{y_2 \cdot x_3}{y_2 \cdot y_2} \cdot y_2 - \frac{y_1 \cdot x_3}{y_1 \cdot y_1} \cdot y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{0}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{6}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{ و } z_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \text{ و } z_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

۳-۳- حل معادله انتگرال فردهلم نوع اول

در این قسمت روش فضای هسته بازتولیدی حل معادله انتگرال فردهلم بدووضع از نوع اول ارائه می‌شود و نمایش جواب دقیق آن در این فضا ارائه می‌شود. پایداری جواب این مسئله در فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ که مسئله‌ای خوش وضع است، در این بخش مورد بررسی قرار گرفته و اثبات شده است. نتایج نشان می‌دهند که تحلیل پایداری هر جواب از معادله به تحلیل پایداری جواب با کمترین نرم تبدیل می‌شود. فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۷]:

$$W_2^1[a,b] = \{f(x) | f'(x) \in L^2[a,b]\} \quad (۱-۳)$$

و برای هر $u(x), v(x) \in W_2^1[a,b]$ ضرب داخلی و نرم فضای $W_2^1[a,b]$ به صورت زیر است [۲۷]:

$$\langle u, v \rangle_{W_2^1} = u(a)v(a) + \int_a^b u'(x)v'(x)dx \quad (۲-۳)$$

$$\|u\|_{W_2^1} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1}} \quad (۳-۳)$$

تابع هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است [۲۷]:

$$R_y(x) = \begin{cases} 1-a+x & x \leq y \\ 1-a+y & x > y \end{cases} \quad (۴-۳)$$

۳-۳-۱- نمایش جواب دقیق معادله انتگرال فردhelm نوع اول

معادله انتگرال فردhelm نوع اول به شکل زیر را در نظر می گیریم:

$$\int_a^b k(s,t)u(s)ds = f(x) \quad u, f \in W_2^1[a,b] \quad (۵-۳)$$

که تابع u نامشخص و تابع f داده شده است و تابع k در شرط زیر می بایست صدق کند

$$\iint_{[a,b] \times [a,b]} k^2(x,t)dxdt \leq M, M \in \mathbb{R}^+ \quad (۶-۳)$$

عملگر خطی این معادله به صورت زیر است:

$$Au = \int_a^b k(x, s)u(s)ds. \quad (۷-۳)$$

این عملگر از $W_2^1[a, b]$ به $W_2^1[a, b]$ تحت شرایط (۶-۳) کراندار است. دنباله $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که در بازه $[a, b]$ چگال^{۴۳} باشد. اگر A^* آمیخته A باشد، برای به‌دست آوردن نمایش جواب دقیق معادله (۵-۳) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= R_{x_i}(x) \\ \psi_i(x) &= A^* \varphi_i(x) \end{aligned} \quad (۸-۳)$$

تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (۹-۳)$$

که β_{ik} ها ضرایب حاصل از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت هستند. فرض می‌کنیم

$$\Psi = \left\{ u \mid u = \sum_{i=1}^\infty c_i \bar{\psi}_i(x), \{c_i\}_{i=1}^\infty \in l^2 \right\} \quad (۱۰-۳)$$

و p را عملگر تصویرسازی از $W_2^1[a, b]$ به Ψ قرار می‌دهیم. یعنی

$$pu = \sum_{i=1}^\infty \langle u, \bar{\psi}_i \rangle_{W_2^1} \bar{\psi}_i \quad (۱۱-۳)$$

قابل توجه است که $p = p^*$ و $p^2 = p$.

^{۴۳}در یک فضای توپولوژی (Y, τ) ، زیر مجموعه A از Y در Y چگال است هرگاه $\bar{A} = c\bar{A} = Y$. [۳۵].

قضیه ۳-۱. [۲۷] فرض کنیم $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[a, b]$ چگال باشد. اگر معادله (۵-۳) جواب یکتا داشته باشد و تعریف کنیم

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (۱۲-۳)$$

آن‌گاه $u(x)$ جواب معادله (۵-۳) خواهد بود.

قضیه ۳-۲. [۲۷] اگر معادله (۵-۳) دارای بیش از یک جواب باشد، نمایش تمام جواب‌های دقیق آن به صورت زیر است:

$$u(x) = u(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{r}_i(x) \quad (۱۳-۳)$$

که دنباله حقیقی $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in L^2$ و $u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k)) \bar{\psi}_i(x)$ جواب معادله (۵-۳) با کمترین نرم است.

۳-۲-۳- پایداری جواب معادله انتگرال فردهلم نوع اول

معادلات انتگرال فردهلم از نوع (۵-۳) در فضای $C[a, b]$ یا $L^2[a, b]$ بدو وضع می‌باشد. حل این مساله در فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ این مشکل را به دنبال ندارد و در این بخش به تحلیل آن می‌پردازیم. مساله پایداری جواب معادله انتگرال فردهلم نوع اول در فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ یک مساله خوش وضع است و خطای اندازه‌گیری داده‌ها نمی‌تواند منجر به خطای زیاد در جواب دقیق شود.

ابتدا مفهوم پایداری جواب معادله (۵-۳) در فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ را تعریف می‌کنیم. فرض کنیم $u(x)$ جواب معادله (۵-۳) باشد. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_{W_2^1} = 0$ نتیجه دهد که $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_{W_2^1} = 0$ ، آن‌گاه جواب تقریبی $u_n(x)$ از $u(x)$ با تابع تقریبی $f_n(x)$ از $f(x)$ در فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ پایدار است. براساس نتایج به دست آمده، هر جواب از معادله (۵-۳) به صورت $u = u + v$ است که $u \in \Psi$, $v \in \Psi^{\perp}$ آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}
 Au &= Au + Av \\
 &= Au \\
 &= f
 \end{aligned}
 \tag{۱۴-۳}$$

بنابراین پایداری هر جواب از معادله (۵-۳) معادل می باشد با پایداری جواب این معادله که دارای کمترین نرم است.

قضیه ۳-۳. [۲۷] اگر معادله (۵-۳) دارای جواب باشد و $u(x)$ جواب این معادله با کمترین نرم باشد، آنگاه تقریب این جواب با فرم $u^n(x)$ در فضای هیلبرت هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ پایدار است.

۳-۴- حل معادله انتگرال غیرخطی ولترا-فردهلم

در این بخش نمایش جواب دقیق معادله انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی در فضای هسته بازتولیدی ارائه می شود. نمایش جواب معادله به صورت یک سری می باشد و تقریب متناهی جمله از آن مورد استفاده قرار می گیرد. نرم خطای جواب تقریبی معادله با استفاده از این سری در فضای $W_2^1[a, b]$ به صورت یکنواخت نزولی است. از جمله مزایای این روش برای معادلات غیرخطی، سرعت همگرایی بالا و عدم نیاز به مفروضات و شرایطی نظیر خطی سازی است.

در این قسمت معادله انتگرال غیرخطی ولترا-فردهلم به صورت زیر را در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned}
 u(x) &= f(x) + Gu(x) \\
 Gu(x) &= \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) N_1(u(t)) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) N_2(u(t)) dt
 \end{aligned}
 \tag{۱۵-۳}$$

که در آن $u \in W_2^1[a, b]$ تابع مجهول، $f \in W_2^1[a, b]$ تابع پیوسته در بازه $[a, b]$ ، $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ ، k_1, k_2 توابع پیوسته در $[a, b] \times [a, b]$ و N_1, N_2 جملات غیرخطی پیوسته در $W_2^1[a, b]$ می باشند. در این بخش نمایش جواب دقیق معادله غیرخطی ولترا-فردهلم در فضای هسته بازتولیدی ارائه می شود که به فرم سری می باشد.

از مزایای این روش این است که به تکنیک‌هایی نظیر خطی‌سازی نیازی نیست و خطای تقریب‌های عددی از جواب معادله به طور یکنواخت به صفر میل می‌کند.

فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a,b]$ را همانند رابطه‌های (۱-۳) تا (۳-۳) و هسته بازتولیدی $R_y(x)$ را از رابطه (۴-۳) در نظر می‌گیریم. دنباله $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در بازه $[a,b]$ چگال باشد و قرار می‌دهیم $\psi_i(x) = R_{x_i}(x)$. با استفاده از خاصیت هسته بازتولیدی داریم:

$$\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{W_2^1} = u(x_i) \quad (۱۶-۳)$$

قضیه ۳-۴. [۲۷] اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[a,b]$ چگال باشد، آن‌گاه $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه کامل از $W_2^1[a,b]$ خواهد بود.

قضیه ۳-۵. [۲۷] اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[a,b]$ چگال باشد و معادله (۳-۱۵) جواب یکتا داشته باشد، آن‌گاه جواب آن به فرم زیر خواهد بود:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (f(x_k) + Gu(x_k)) \bar{\psi}_i(x) \quad (۱۷-۳)$$

جواب معادله (۳-۱۵) در فضای هسته بازتولیدی به فرم رابطه (۳-۱۷) می‌باشد و برای آن داریم:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (f(x_k) + Gu(x_k)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x) \end{aligned} \quad (۱۸-۳)$$

که در آن

$$A_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (f(x_k) + Gu(x_k)) \quad (19-3)$$

A_i ها نامعلوم هستند و توسط B_i ها تقریب زده می‌شوند. برای محاسبات عددی قرار می‌دهیم $u_1(x) = f(x)$ و یک تقریب n جمله‌ای از $u(x)$ به صورت زیر خواهیم داشت:

$$u_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (20-3)$$

که در آن

$$B_1 = \beta_{11} (f(x_1) + Gu_1(x_1))$$

$$u_2(x) = B_1 \bar{\psi}_1(x)$$

$$B_2 = \sum_{k=1}^2 \beta_{2k} (f(x_k) + Gu_2(x_k))$$

$$u_3(x) = B_1 \bar{\psi}_1(x) + B_2 \bar{\psi}_2(x)$$

...

$$B_n = \sum_{k=1}^n \beta_{nk} (f(x_k) + Gu_n(x_k))$$

$$u_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^n B_k \bar{\psi}_k(x) \quad (21-3)$$

لم ۳-۱. [۲۷] اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - \bar{u}(x)\|_{W_2^1} = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ آن‌گاه $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x_n) = \bar{u}(y)$.

با توجه به پیوستگی توابع $N_1(\cdot)$ و $N_2(\cdot)$ داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} N_1(u_n(x_n)) &= N_1(\bar{u}(y)) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} N_2(u_n(x_n)) &= N_2(\bar{u}(y))\end{aligned}\quad (22-3)$$

و لذا داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Gu(x_n) = G\bar{u}(y) \quad (23-3)$$

قضیه ۳-۶. [۲۷] فرض کنیم $\|u_n(x)\|_{W_2^1}$ در رابطه (۳-۲۰) کراندار باشد. اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[a, b]$ چگال باشد، آنگاه تقریب n جمله‌ای $u_n(x)$ به جواب دقیق $u(x)$ از معادله (۳-۱۵) همگرا خواهد بود و نمایش آن به صورت زیر است:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (24-3)$$

که B_i ها از رابطه (۳-۱۵) به دست می آیند.

قضیه ۳-۷. [۲۷] فرض کنیم $u(x)$ جواب معادله (۳-۱۵) و $r_n(x)$ خطای جواب تقریبی $u_{n+1}(x)$ طبق رابطه (۳-۱۵) باشد. آنگاه خطای e_n به طور یکنواخت نزولی است.

۳-۵- حل معادله انتگرال غیر خطی

معادله انتگرال را به صورت کلی زیر در نظر می گیریم:

$$u(x) + \int_a^{b \text{ (or } x)} K(x, t) N(u(t)) dt = f(x) \quad a \leq x, t \leq b \quad (25-3)$$

که در آن $u \in W_2^1[a, b]$ تابع مجهول، $f \in W_2^1[a, b]$ تابع پیوسته در بازه $[a, b]$ ، a, b کران‌های ثابت، $K(x, t)$ تابع پیوسته در بازه $[a, b] \times [a, b]$ ، $N(v(x))$ جمله غیرخطی پیوسته در $W_2^1[a, b]$ که $v(x) \in W_2^1[a, b]$ و $a \leq x \leq b$ می‌باشند. معادله انتگرال (۶۷-۳) در بازه $[a, b]$ دارای جواب می‌باشد.

نمایش معادله انتگرال (۶۷-۳) به صورت عملگری به فرم زیر است:

$$\mathbb{L}u(x) = u(x) \quad (۲۶-۳)$$

که در آن داریم

$$\mathbb{L}u(x) = f(x) - \int_a^{b \text{ (or } x)} K(x, t) N(u(t)) dt \quad (۲۷-۳)$$

واضح است که $\mathbb{L}$ عملگری خطی و کران‌دار از $W_2^1[a, b]$ به $W_2^1[a, b]$ است. در ادامه، نمایش جواب تحلیلی معادله انتگرال (۶۷-۳) در فضای $W_2^1[a, b]$ ارائه می‌شود که به فرم سری می‌باشد.

فضای هسته بازتولیدی $W_2^1[a, b]$ را همانند رابطه‌های (۱-۳) تا (۳-۳) و هسته بازتولیدی $R_y(x)$ را از رابطه (۴-۳) در نظر می‌گیریم. دنباله $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در بازه $[a, b]$ چگال باشد. قرار می‌دهیم $\varphi_i(x) = R_{x_i}(x)$ و $\psi_i(x) = \mathbb{L}^* \varphi_i(x)$ که $\mathbb{L}^*$ اپراتور آمیخته $\mathbb{L}$ می‌باشد. در حقیقت برای هر $u, v \in W_2^1[a, b]$ بنابر ۲۶-۳ داریم $\mathbb{L}(u(x) + v(x)) = u(x) + v(x)$ و

$$\|\mathbb{L}u(x)\|_{W_2^1[a, b]} = \|u(x)\|_{W_2^1[a, b]}.$$

قضیه ۳-۸. دنباله $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در بازه $[a, b]$ چگال باشد، آن‌گاه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل^{۴۴} از $W_2^1[a, b]$ است و $\psi_i(x) = \mathbb{L}_t R_x(t)|_{t=x_i}$ که متغیر t در اپراتور $\mathbb{L}$ اشاره بر وابستگی $\mathbb{L}$ به متغیر t است.

^{۴۴} برای هر $x \in [a, b]$ و برای $i = 0, 1, \dots$ اگر $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{W_2^1} = 0$ نتیجه دهد $u(x) = 0$ آن‌گاه به $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل در فضای $W_2^1[a, b]$ گوئیم [۳۵].

برهان.

داریم

$$\begin{aligned}\psi_i(x) &= \langle (\mathbb{L}^* \varphi_i)(t), R_x(t) \rangle_{W_2^1[a,b]} \\ &= \langle \varphi_i(t), L_t R_x(t) \rangle_{W_2^1[a,b]} \\ &= L_t R_x(t) |_{t=x_i}\end{aligned}$$

واضح است $\psi_i(x) \in W_2^1[a,b]$ برای هر $u(x) \in W_2^1[a,b]$ فرض کنیم $\langle u(x), \psi_i(x) \rangle_{W_2^1} = 0$ برای $i=1,2,\dots$ با استفاده از این مطلب و خاصیت هسته بازتولیدی داریم

$$\begin{aligned}\langle u(x), (\mathbb{L}^* \varphi_i)(x) \rangle_{W_2^1[a,b]} &= \langle \mathbb{L}u(\cdot), \varphi_i(\cdot) \rangle_{W_2^1[a,b]} \\ &= (\mathbb{L}u)(x_i) \quad i=1,2,\dots \\ &= 0\end{aligned} \quad (28-3)$$

با توجه به چگال بودن دنباله $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در بازه $[a,b]$ ، بنابراین $(\mathbb{L}u)(x) = 0$ نهایتاً با استفاده از وارون پذیری $\mathbb{L}$ داریم $u \equiv 0$. بنابراین $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک سیستم کامل از $W_2^1[a,b]$ خواهد بود. $\square$

فرض کنیم $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در بازه $[a,b]$ چگال و $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک مجموعه مستقل خطی در فضای $W_2^1[a,b]$ باشد. با استفاده از فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت به مجموعه متعامد نرمال $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ در $W_2^1[a,b]$ می‌رسیم به گونه‌ای که

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x), \quad \beta_{ii} > 0, \quad i=1,2,\dots \quad (29-3)$$

قضیه ۳-۹. فرض کنیم $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در بازه $[a,b]$ چگال و جواب معادله (۳-۲۶) یکتا باشد، آنگاه جواب معادله (۳-۲۶) به صورت زیر می‌باشد

$$u(x) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (30-3)$$

برهان.

با استفاده از معادله (۲۹-۳) داریم

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle_{W_2^1[a,b]} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle u(x), \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \right\rangle_{W_2^1[a,b]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), \psi_k(x) \rangle_{W_2^1[a,b]} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle u(x), \mathbb{L}^* \varphi_k(x) \rangle_{W_2^1[a,b]} \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \langle \mathbb{L} u(x), \varphi_k(x) \rangle_{W_2^1[a,b]} \bar{\psi}_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \mathbb{L} u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \end{aligned}$$

به علاوه $u(x) \in W_2^1[a,b]$ و $\hat{a}_i = \langle u(x), \bar{\psi}_i(x) \rangle$ و $u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i \bar{\psi}_i(x)$ گسترده سری‌های فوریه در مجموعه متعامد یکه $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ هستند و فضای هیلبرت می‌باشد. در این صورت سری $\sum_{i=0}^{\infty} \hat{a}_i \bar{\psi}_i(x)$ در نرم $\|\cdot\|_{W_2^1}$ همگراست و جواب معادله (۲۶-۳) به صورت (۳۰-۳) خواهد بود. $\square$

حال برای تقریب جواب $u_n(x)$ از n جمله از جواب واقعی $u(x)$ استفاده می‌کنیم و لذا

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \beta_{ik} u(x_k) \bar{\psi}_i(x) \quad (۳۱-۳)$$

قضیه ۳-۱۰. اگر $u(x) \in W_2^1[a,b]$ ، آن‌گاه $M > 0$ وجود دارد به طوری که

$$|u(x)| \leq M \|u(x)\|_{W_2^1[a,b]}$$

برهان.

برای هر $x, t \in [a,b]$ ، داریم $u(x) = \langle u(t), R_x(t) \rangle_{W_2^1[a,b]}$ از طرفی می‌دانیم $\|R_x(t)\|_{W_2^1[a,b]} \leq M$ بنابراین

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| \langle u(t), R_x(t) \rangle_{W_2^1[a,b]} \right| \\
&\leq \|R_x(t)\|_{W_2^1[a,b]} \|u(t)\|_{W_2^1[a,b]} \\
&\leq M \|u(t)\|_{W_2^1[a,b]}
\end{aligned}$$

□

قضیه ۳-۱۱. جواب تقریبی $u_n(x)$ همگرای یکنواخت است.

برهان.

فرض کنیم $x \in [a, b]$ ، با استفاده از قضایای ۳-۹ و ۳-۱۰ داریم

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n(x) - u(x)| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle u_n(x) - u(x), R_x(x) \rangle_{W_1^2[a,b]} \right| \\
&\leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(x) - u(x)\|_{W_1^2[a,b]} = 0
\end{aligned}$$

□

۳-۵-۱- بررسی یکتایی جواب:

اگر هسته $K(x, t)$ در معادله‌ی (۳-۲۵) در بازه‌ی مربعی $a \leq x \leq b$ و $a \leq t \leq b$ کران‌دار، پیوسته و دارای مقدار حقیقی باشد و تابع $f(x)$ یک تابع با مقدار حقیقی پیوسته باشد، آنگاه شرط لازم برای وجود یکتایی جواب معادله‌ی (۳-۲۵)، $| \lambda | M(b-a) < 1$ می‌باشد (که $0 < \lambda < 1$ در معادله‌ی (۳-۲۵) وقتی $|k(x, t)| \leq M \in \mathcal{R}$ اثبات دقیق در [۳۶].

تمامی موارد مطروحه بالا برای معادله انتگرال فردhelm بود. از طرفی می‌دانیم معادله‌ی (۳-۲۵) یک معادله عمومی است که شامل نوع ولترا نیز می‌باشد. یکتایی جواب درحالت ولترا در [۳]، [۵-۶] و [۱۱] به صورت کامل بحث شده است. در [۱۲]، x ، $f(x)$ ، $K(x, t)$ و $N(v(x))$ بررسی شده‌اند به‌طوری که معادله (۳-۲۵) دارای جواب یکتا باشد. در [۱۴] نیز یکتایی جواب را اثبات کرده‌اند. به علاوه جوادی در [۳۸] نیز در این‌باره توضیح داده است. برای جزئیات بیشتر یکتایی جواب معادله (۳-۲۵) می‌توان به [۵۹]، [۳]، [۵-۶]، [۱۱-۱۲] و [۱۴] مراجعه شود.

فصل چهارم

روش پیشنهادی مبتنی بر فضای هیلبرت هسته بازتولیدی

۴-۱- مقدمه

در این فصل از رساله، که فصل اصلی می‌باشد، یک روش کارا برای حل معادله انتگرال نوع دوم مبتنی بر فضای هیلبرت هسته بازتولیدی ارائه می‌شود. با توجه به حجم محاسبات زیاد و نیز ناپایداری عددی روش متعامد سازی گرام-اشمیت روشی مبتنی بر تکنیک فضای هسته بازتولیدی هیلبرت ارائه می‌شود که از معایب روش متعامد سازی گرام-اشمیت مبرا می‌باشد. بدین منظور از روش مرادی [۳۸] برای حذف فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت استفاده کرده و با استفاده از تکنیک $u_0(x_1)=u(x_1)$ در رابطه بازگشتی ارائه شده، به اثبات قضایا و حل مسائل در فضای هسته هیلبرت بازتولیدی $w_1^2[a,b]$ می‌پردازیم. دلیل استفاده از فضای $w_1^2[a,b]$ در [۱۵] بررسی شده که دقیق‌ترین جواب‌ها را می‌توان در این فضا به دست آورد. به علاوه در حل مثال‌ها که بیشتر مسائل مدل شده الکترومغناطیس می‌باشد از دو الگوریتم (با استفاده از روش متعامدسازی گرام-اشمیت و بدون استفاده از روش متعامد سازی گرام-اشمیت) استفاده کرده‌ایم تا بتوان زمان‌های محاسبات را مقایسه کنیم. در این روش نیز جواب به صورت سری می‌باشد.

۴-۲- روش پیشنهادی

معادله (۳-۲۶) را در نظر می‌گیریم. اگر

$$A_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} u(x_k) \quad (۴-۱)$$

که β_{ik} ضرایب حاصل از فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت هستند، آنگاه معادله (۳-۳۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\psi}_i(x) \quad (۴-۲)$$

حال فرض کنیم برای برخی x_j ، $u(x_j)$ معلوم باشد. بدون این که خللی در مسئله وارد شود، فرض کنیم $j=1$. با قرار دادن $u_0(x_1)=u(x_1)$ و با استفاده از n جمله از جواب $u(x)$ داریم

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x) \quad (3-4)$$

که

$$B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} u_{k-1}(x_k) \quad (4-4)$$

در ادامه همگرایی یکنواخت جواب تقریبی معادله (3-4) به جواب دقیق معادله (1-4) اثبات می‌کنیم.

قضیه 1-4. فرض کنیم $\|u_n(x)\|_{W_1^2[a,b]}$ در رابطه (3-4) کران‌دار باشد. اگر $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در بازه $[a,b]$ چگال باشد، آن‌گاه تقریب n جمله‌ای $u_n(x)$ در معادله (3-4) به جواب دقیق $u(x)$ در معادله (3-68) همگراست و نمایش آن به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n B_i \psi_i(x)$$

که B_i ها از رابطه (4-4) به دست می‌آیند.

برهان.

ابتدا همگرایی روش تکراری $u_n(x)$ موجود در رابطه (3-4) اثبات می‌شود. با توجه به فرایند ارائه شده در رابطه (3-35) داریم:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + B_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(x). \quad (5-4)$$

با استفاده از ویژگی متعامد بودن $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^\infty$ داریم:

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}\|_{w_1^2[a,b]}^2 &= \|u_n\|_{w_1^2[a,b]}^2 + B_{n+1}^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} B_i^2\end{aligned}\quad (6-4)$$

بنابراین دنباله $\{\|u_n(x)\|_{w_1^2[a,b]}\}$ به طور یکنواخت صعودی است و با توجه به کران‌داری آن، همگرا خواهد بود. بنابراین $\sum_{i=1}^{\infty} B_i^2$ کراندار است و این نتیجه می‌دهد که $\{B_i\}_{i=1}^{\infty} \in L^2$.

اگر $m > n$ با استفاده از خاصیت متعامد بودن $u_{n+1}(x) - u_n(x)$ برای $n = 2, 3, \dots$ داریم:

$$\begin{aligned}\|u_m(x) - u_n(x)\|_{w_1^2[a,b]}^2 &= \|u_m(x) - u_{m-1}(x) + u_{m-1}(x) - \dots + u_{n+1}(x) - u_n(x)\|_{w_1^2[a,b]}^2 \\ &= \|u_m(x) - u_{m-1}(x)\|_{w_1^2[a,b]}^2 + \dots + \|u_{n+1}(x) - u_n(x)\|_{w_1^2[a,b]}^2 \\ &= \left\| \sum_{i=n+1}^m (u_i - u_{i-1}) \right\|_{w_1^2[a,b]}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^m \|u_i - u_{i-1}\|_{w_1^2[a,b]}^2 \\ &= \sum_{i=n+1}^m B_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\end{aligned}\quad (7-4)$$

بنابر قضیه ۳-۶

برای اثبات کامل بودن $W_2^1[a,b]$ نیاز به $\hat{u}$ ای داریم که $\hat{u} \in W_2^1[a,b]$ که $u_n \rightarrow \hat{u}$ وقتی $n \rightarrow \infty$. حال می‌توانیم نشان دهیم $\hat{u}$ جواب معادله (۳-۲۶) است.

با گرفتن حد از دو طرف رابطه (۴-۳)، داریم $\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$. بنابراین $\mathbb{L}\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \mathbb{L}\bar{\psi}_i(x)$.

فرض کنیم $x_i \in \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ، لذا

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}\hat{u}(x_l) &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \mathbb{L}\bar{\psi}_i(x_l) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \mathbb{L}\bar{\psi}_i(x), \varphi_l(x) \rangle_{w_2^1[a,b]} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(x), \mathbb{L}^* \varphi_l(x) \rangle_{w_2^1[a,b]} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \langle \bar{\psi}_i(x), \bar{\psi}_l(x) \rangle_{w_2^1[a,b]} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \left\langle \bar{\psi}_i(x), \sum_{l=1}^i \beta_{il} \psi_l(x) \right\rangle_{w_2^1[a,b]} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x_l) \\
&= \hat{u}(x_l)
\end{aligned} \tag{۸-۴}$$

$$\mathbb{L}\hat{u}(x_l) = \hat{u}(x_l) \text{ یعنی}$$

می‌دانیم $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[a,b]$ چگال است. برای هر $x \in [a,b]$ ، زیرمجموعه $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ موجود است به طوری که $x_{n_i} \rightarrow x$ وقتی $i \rightarrow \infty$. داریم $\mathbb{L}u(x) = u(x)$ که نشان می‌دهد $\hat{u}(x)$ جواب معادله (۳-۲۶) است و

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x) \tag{۹-۴}$$

و به این ترتیب اثبات تمام است. $\square$

بنابراین برای تقریب جواب معادله از رابطه $u_N(x) = \sum_{i=1}^N \bar{a}_i \psi_i(x)$ استفاده می‌کنیم که در آن

$$\beta_n = \begin{bmatrix} \beta_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdots & \beta_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \cdots & \psi_{1N} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & & \psi_{2N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \psi_{N1} & \psi_{N2} & \cdots & \psi_{NN} \end{bmatrix}, \quad \psi_{ij} = \langle L\psi_j, \psi_i \rangle_{W_2^1[a,b]},$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0(x_1) \\ u_1(x_2) \\ \vdots \\ u_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_n \end{bmatrix}, n=1,2,\dots$$

قضیه ۴-۲. فرض کنیم $\gamma_{ij} = [\Psi^{-1}]_{ij}$. جواب تقریبی رابطه (۴-۳) به صورت زیر نیز قابل نمایش است

$$u(x) \simeq u_n(x) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \psi_i(x) \quad (۴-۱۰)$$

که در آن

$$\Lambda_i = \sum_{k=1}^i \gamma_{ik} u_{k-1}(x_k) \quad (۴-۱۱)$$

برهان.

فرض کنیم $u_n(x) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \psi_i(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x)$ از طرفی بنا بر روش متعامدسازی گرام-اشمیت داریم

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad \text{لذا} \quad \bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \Lambda_i \psi_i(x) &= \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^n B_i \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n B_i \beta_{ik} \psi_k(x)
\end{aligned} \tag{۱۲-۴}$$

می‌دانیم $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ و $(k=1,2,\dots,n)$ $\Lambda_k = \sum_{i=k}^n B_i \beta_{ik}$ مستقل خطی‌اند، پس

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\beta}^T \mathbf{B} \tag{۱۳-۴}$$

از رابطه (۲۶-۳) واضح است که $\mathbb{L}u_n(x) = u_n(x)$ برای هر $i=1,2,\dots,n$ داریم

$$\langle \mathbb{L}u_n(x), \bar{\psi}_i \rangle = \langle u_n(x), \bar{\psi}_i \rangle \Rightarrow \sum_{j=1}^n B_j \langle \mathbb{L}\bar{\psi}_j, \bar{\psi}_i \rangle = \langle u_n(x), \bar{\psi}_i \rangle \tag{۱۴-۴}$$

دو طرف رابطه (۱۴-۴) را ساده می‌کنیم. از سمت چپ رابطه (۱۴-۴) داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n B_j \langle \mathbb{L}\bar{\psi}_j, \bar{\psi}_i \rangle &= \sum_{j=1}^n B_j \left\langle \mathbb{L} \sum_{k=1}^j \beta_{jk} \psi_k, \sum_{l=1}^i \beta_{il} \bar{\psi}_l \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^n B_j \sum_{k=1}^j \beta_{jk} \sum_{l=1}^i \beta_{il} \langle \mathbb{L}\psi_k, \bar{\psi}_l \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n B_j \sum_{k=1}^j \sum_{l=1}^i \beta_{jk} \beta_{il} \langle \mathbb{L}\psi_k, \bar{\psi}_l \rangle \beta_{lj}^T \\
&= \sum_{j=1}^n B_j (\mathbf{\beta} \mathbf{\Psi} \mathbf{\beta}^T)_{ij}
\end{aligned} \tag{۱۵-۴}$$

و از سمت راست رابطه (۱۴-۴) و به کمک قضیه ۱-۴ داریم

$$\begin{aligned}
\langle u_n(x), \bar{\psi}_i \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^i B_k \bar{\psi}_k, \bar{\psi}_i \right\rangle \\
&= B_i \\
&= \sum_{k=1}^i \beta_{ik} u_{k-1}(x_k)
\end{aligned}
\tag{۱۶-۴}$$

از روابط (۱۳-۴) و (۱۶-۴) رابطه زیر به دست می آید

$$\beta \Psi \beta^T B = \beta u \tag{۱۷-۴}$$

با جایگذاری در رابطه (۱۳-۴) داریم $\beta \Psi \Lambda = \beta u_n$. بنابراین

$$\Psi \Lambda = u_n \tag{۱۸-۴}$$

لذا جواب تقریبی رابطه (۶۸-۳) به فرم (۱۰-۴) نیز خواهد بود. $\square$

۳-۴- الگوریتم روش پیشنهادی

در الگوریتم اصلاح شده برای روش فضای هیلبرت هسته بازتولیدی، از روش تکراری برای تقریب عملگر معادله انتگرال استفاده می شود. همچنین برای حذف فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت از روش مرادی و همکاران [۳۸] استفاده شده است تا اثر خطای محاسبه متعامد سازی از میان برداشته شود. از این طریق، استفاده از روش متعامد سازی مرادی و همکاران [۱۵]، متعامد سازی آن طور که در تکنیک کلاسیک فضای هسته بازتولیدی مورد استفاده بود، تغییر یافته و ناپایداری عددی و حجم محاسبات مربوط به آن از الگوریتم کاهش یافته است. به علاوه با استفاده از ایده $u_0(x_1) = u(x_1)$ در اولین گام روش بازگشتی به الگوریتم ۴-۲ خواهیم رسید.

نکته قابل توجه در حل و بررسی مثال های عددی این است که در حل مسائل با استفاده از الگوریتم ۲-۴ مدت زمان حل مسائل بالاتر از استفاده از الگوریتم ۱-۴ می باشد، اما تقریب جواب ها با n یکسان در الگوریتم ۲-۴ دارای دقت بالاتری می باشد.

۱. وارد کنید a ، b و m

۲. برای $t \leq b$ و $a \leq x$

اگر $t \leq x$ قرار دهید $R_x(t) = 1 - a + t$

در غیر این صورت محاسبه کنید $R_x(t) = 1 - a + x$

۳. برای $i = 1, 2, \dots, m$ قرار دهید $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ و $\psi_i(x) = L_t R_x(t)|_{t=x_i}$

۴. برای $i = 1, 2, \dots, m$ و $j = 1, 2, \dots, m$

جایگذاری کنید $\beta_{11} = 1/\|\psi_1\|$

اگر $i \neq j$ ، آن گاه قرار دهید $\beta_{kj} = \frac{-1}{\sqrt{\|\psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \psi_i(t), \bar{\psi}_k(t) \rangle^2}} \sum_{k=j}^{i-1} \langle \psi_i(t), \bar{\psi}_k(t) \rangle \beta_{kj}$

در غیر این صورت محاسبه کنید $\beta_{ij} = \frac{1}{\sqrt{\|\psi_i\|^2 - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \psi_i(t), \bar{\psi}_k(t) \rangle^2}}$

۵. برای $i = 1, 2, \dots, m$ محاسبه کنید $\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x)$

۶. قرار دهید $u_0(x_1) = u(x_1)$

۷. قرار دهید $n = 1$

۸. قرار دهید $B_n = \sum_{k=1}^n \beta_{nk} u_{k-1}(x_k)$

۹. محاسبه کنید $u_n(x) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x)$

۱۰. اگر $n < m$ آن گاه قرار دهید $n = n + 1$ و بروید به گام ۸

در غیر این صورت، توقف کنید

۱۱. چاپ کنید $u_n(x)$

الگوریتم ۴-۲- روش پیشنهادی RKHS (بدون به کارگیری روش گرام-اشمیت)

۱. وارد کنید a, b و m

۲. برای $t \leq b$ و $a \leq x$

اگر $t \leq x$ ، قرار دهید $R_x(t) = 1 - a + t$

در غیر این صورت محاسبه کنید $R_x(t) = 1 - a + x$

۳. برای $i = 1, 2, \dots, m$ ، قرار دهید $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ و $\psi_i(x) = L_t R_x(t)|_{t=x_i}$

۴. محاسبه کنید $u_0(x_1) = u(x_1)$

۵. برای $i, j = 1, 2, \dots, m$ ، قرار دهید $\gamma_{ij} = [\Psi^{-1}]_{ij}$

۶. قرار دهید $n = 1$

۷. قرار دهید $\Lambda_n = \sum_{k=1}^n \gamma_{nk} u_{k-1}(x_k)$

۸. محاسبه کنید $u_n(x) = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \psi_i(x)$

۹. اگر $n < m$ آن‌گاه قرار دهید $n = n + 1$ و بروید به گام ۷

در غیر این صورت، توقف کنید

۱۰. چاپ کنید $u_n(x)$

۴-۴- مثال‌های عددی

در این بخش، با استفاده از روش فضای هسته بازتولیدی (الگوریتم ۴-۲) تعدادی از معادلات انتگرال فردهلم و ولترا را به عنوان مثال حل می‌کنیم.

مثال ۴-۱. [۱۷] معادله انتگرال فردهلم غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(x) - \int_0^1 xy u^3(y) dy = e^x - \frac{(1+2e^3)x}{9} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (۱۹-۴)$$

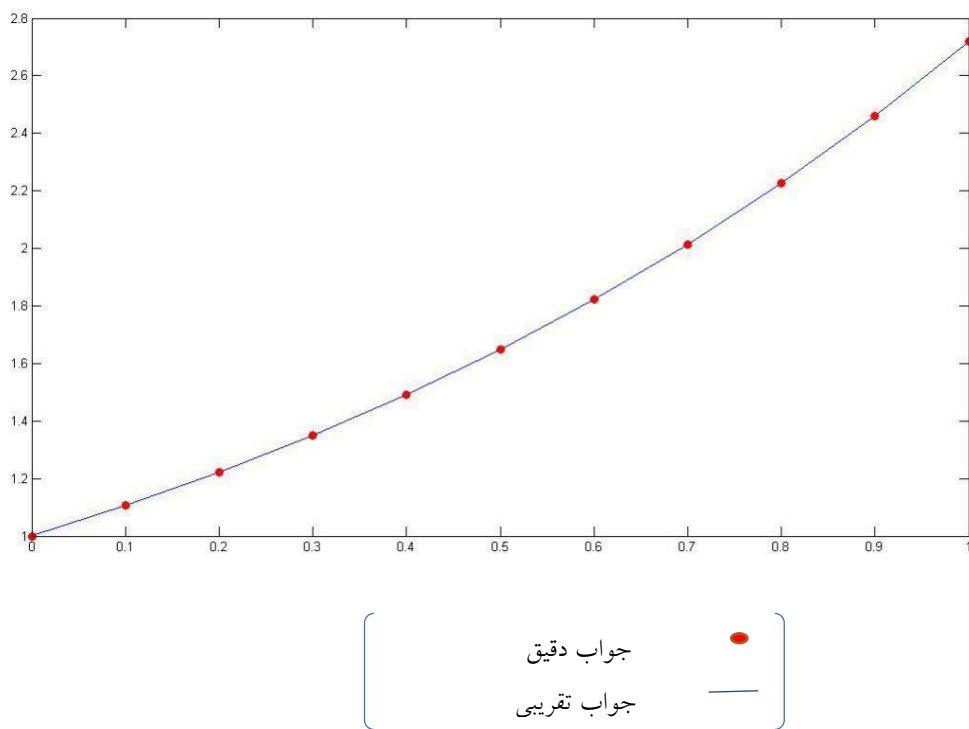
جواب دقیق این معادله برابر است با $u(x) = e^x$. در این مثال نقطه ابتدایی $u_0(0) = u(0) = 1$ را در نظر گرفته و حل می‌کنیم. دنباله نقاط x_i ها را به صورت $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ تعریف می‌کنیم و در آن مقدار $n = 128$ (جدول ۱-۴ و نمودارهای ۱-۴ و ۲-۴) و $n = 10$ (جدول ۲-۴ و نمودارهای ۳-۴ و ۴-۴) را در نظر می‌گیریم. خطای مطلق نتایج حل این معادله با روش حل معادله پیشنهادی برای $n = 128$ در مقایسه با روش توابع بلک پالس در جدول ۱-۴ و نمودار ۲-۴ و برای $n = 10$ جدول ۲-۴ و نمودار ۴-۴ ارائه شده است.

شایان ذکر است در تمامی جداول به روش موجک هار برای $n = 128$ می‌باشد.

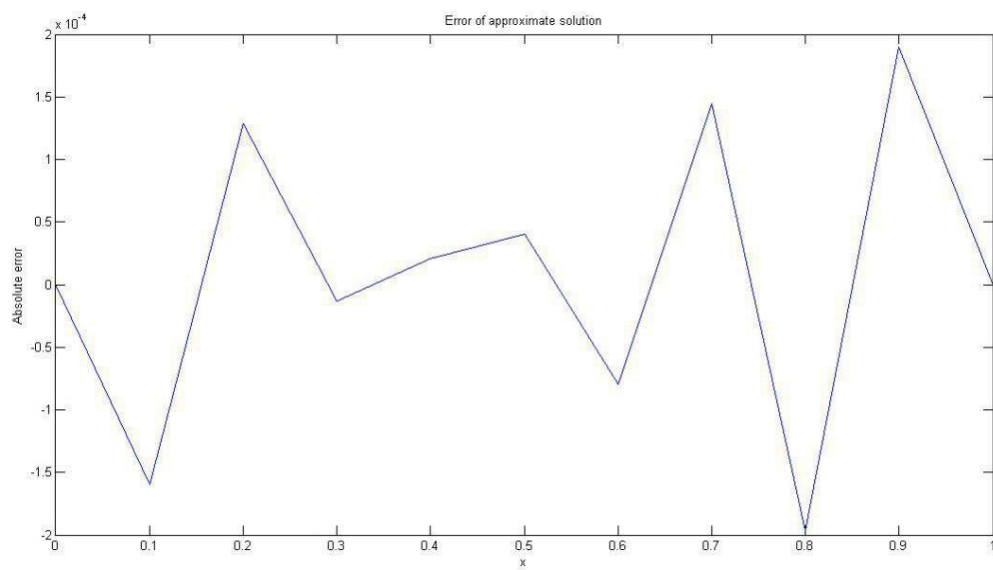
جدول ۱-۴- خطای مطلق نتایج حل معادله (۱۹-۴) برای روش پیشنهادی و روش موجک هار $n = 128$

x	جواب دقیق	جواب تقریبی	روش موجک هار [۱۷]	خطای مطلق روش پیشنهادی	خطای مطلق روش موجک هار [۱۷]
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷۰۹۱۸	۱/۱۰۵۱۵۴۹۹۳	۱/۱۱۴۶۲۷۵۶۰	۰/۰۰۰۰۱۵۹۲۵	۰/۰۰۹۴۵۶۶۴۲
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰۲۷۵۷	۱/۲۲۱۳۸۹۹۰۳	۱/۲۲۶۷۵۸۸۴۰	۰/۰۰۰۰۱۲۸۵۵	۰/۰۰۵۳۵۶۰۸۳
۰/۳	۱/۳۴۹۸۵۸۸۰۶	۱/۳۴۹۸۴۵۴۹	۱/۳۴۵۴۵۸۱۷۹	۰/۰۰۰۰۱۳۳۱۷	۰/۰۰۴۴۰۰۶۲۷
۰/۴	۱/۴۹۱۸۲۴۶۹۶	۱/۴۹۱۸۰۳۹۱۳	۱/۴۸۰۲۰۲۴۷۰	۰/۰۰۰۰۲۰۷۸۴	۰/۰۱۱۶۲۲۲۲۶
۰/۵	۱/۶۴۸۷۲۱۲۶۸	۱/۶۴۸۶۸۰۸۵۸	۱/۶۷۱۷۶۹۸۱۹	۰/۰۰۰۰۴۰۴۱۲	۰/۰۲۳۰۴۸۵۵۱
۰/۶	۱/۸۲۲۱۱۸۷۹۷	۱/۸۲۲۰۳۹۵۴۱	۱/۸۳۸۸۵۴۹۰۳	۰/۰۰۰۰۷۹۲۵۹	۰/۰۱۶۷۳۶۱۰۶
۰/۷	۲/۰۱۳۷۵۲۷۰۳	۲/۰۱۳۶۰۸۴۶۴	۲/۰۲۲۱۱۸۰۸۶	۰/۰۰۰۱۴۴۲۴۳	۰/۰۰۸۳۶۵۳۸۳
۰/۸	۲/۲۲۵۵۴۰۹۲۳	۲/۲۲۵۳۰۴۲۸۸	۲/۲۲۳۱۳۹۰۷۷	۰/۰۰۰۲۳۶۶۴۰	۰/۰۰۲۴۰۱۸۴۶
۰/۹	۲/۴۵۹۶۰۳۱۰۴	۲/۴۵۹۲۵۳۲۱۱	۲/۴۴۳۶۸۴۸۹۸	۰/۰۰۰۳۴۹۸۹۹	۰/۰۱۵۹۱۸۲۰۶

نمودار ۴-۱- نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۴-۱۹) برای $n = 128$



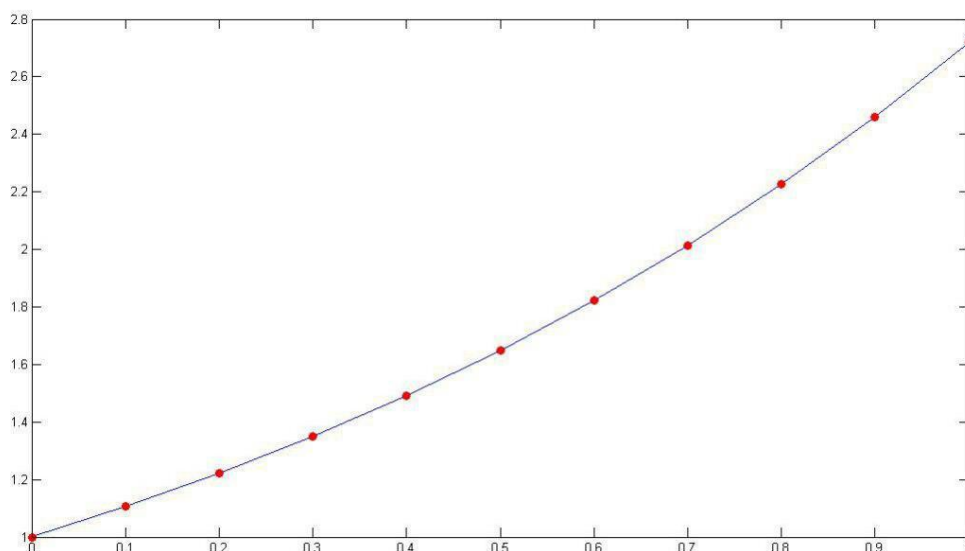
نمودار ۴-۲- نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۴-۱۹) برای $n = 128$



جدول ۴-۲- خطای مطلق نتایج حل معادله (۴-۱۹) برای روش پیشنهادی برای $n = 10$ و روش موجک هار

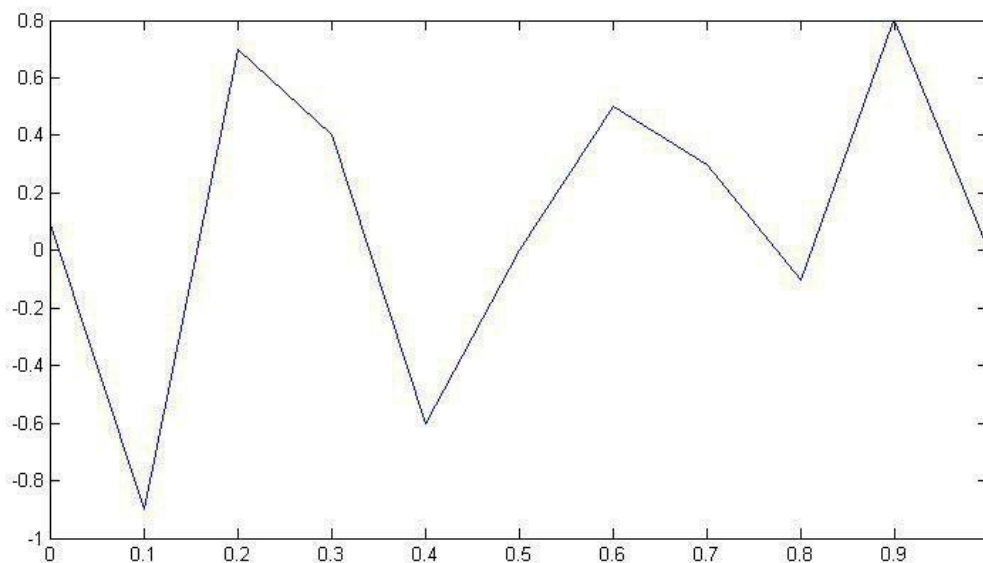
x	جواب دقیق	جواب تقریبی	روش موجک هار [۱۷]	خطای مطلق روش پیشنهادی	خطای مطلق روش موجک هار [۱۷]
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷۰۹۱۸	۰/۱۹۸۹۷۹۸۷۷۹	۱/۱۱۴۶۲۷۵۶۰	۰/۹۰۶۱۹۱۰۴۱	۰/۰۹۴۵۶۶۴۲
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰۲۷۵۷	۱/۹۷۴۴۷۵۰۶۷	۱/۲۲۶۷۵۸۸۴۰	۰/۷۵۳۰۷۲۳۱۰	۰/۰۵۳۵۶۰۸۳
۰/۳	۱/۳۴۹۸۵۸۸۰۶	۱/۸۲۲۶۶۳۸۰۶	۱/۳۴۵۴۵۸۱۷۹	۰/۴۷۲۸۰۵۶۸۱	۰/۰۴۴۰۰۶۲۷
۰/۴	۱/۴۹۱۸۲۴۶۹۶	۰/۸۴۷۷۶۰۹۶۷	۱/۴۸۰۲۰۲۴۷۰	۰/۶۴۴۰۶۳۷۲۹	۰/۰۱۱۶۲۲۲۲۶
۰/۵	۱/۶۴۸۷۲۱۲۶۸	۱/۶۶۹۳۶۸۰۱۹	۱/۶۷۱۷۶۹۸۱۹	۰/۰۲۰۶۴۶۷۵۱	۰/۰۲۳۰۴۸۵۵۱
۰/۶	۱/۸۲۲۱۱۸۷۹۷	۲/۳۵۷۳۶۷۲۵۷	۱/۸۳۸۸۵۴۹۰۳	۰/۵۳۵۲۴۸۴۶۰	۰/۰۱۶۷۳۶۱۰۶
۰/۷	۲/۰۱۳۷۵۲۷۰۳	۲/۴۰۱۱۱۲۶۸۲	۲/۰۲۲۱۱۸۰۸۶	۰/۳۸۷۳۵۹۹۷۹	۰/۰۰۸۳۶۵۳۸۳
۰/۸	۲/۲۲۵۵۴۰۹۲۳	۲/۰۲۶۰۳۲۸۵۵	۲/۲۲۳۱۳۹۰۷۷	۰/۱۹۹۵۰۸۰۶۸	۰/۰۰۲۴۰۱۸۴۶
۰/۹	۲/۴۵۹۶۰۳۱۰۴	۳/۲۷۷۶۱۹۷۹۱	۲/۴۴۳۶۸۴۸۹۸	۰/۸۱۸۰۱۶۶۸۷	۰/۰۱۵۹۱۸۲۰۶

نمودار ۴-۳- نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۴-۱۹) برای $n = 10$



● جواب دقیق
— جواب تقریبی

نمودار ۴-۴- نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۴-۱۹) برای $n = 10$



مثال ۴-۲. [۱۶] معادله انتگرال ولترای غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x u^2(y) dy = \sin(x) + \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{1}{4}x \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (۴-۲۰)$$

جواب دقیق این معادله برابر است با $u(x) = \sin(x)$. در این مثال نقطه ابتدایی $u_0(0) = u(0) = 0$ را در نظر گرفته و حل می‌کنیم. دنباله نقاط x_i ها را به صورت $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ تعریف می‌کنیم و در آن مقدار $n = 128$ (جدول ۴-۳ و نمودارهای ۴-۵ و ۴-۶) و $n = 4$ (جدول ۴-۵ و نمودارهای ۴-۷ و ۴-۸) را در نظر می‌گیریم. خطای مطلق نتایج حل این معادله با روش حل معادله پیشنهادی در مقایسه با روش توابع بلک پالس در جدول ۴-۳ و نمودار ۴-۶ برای $n = 128$ و جدول ۴-۵ و نمودار ۴-۸ برای $n = 4$ ارائه شده است. به علاوه در جدول ۴-۴ مقایسه زمان محاسباتی بین الگوریتم‌های ۴-۱ و ۴-۲ موجود می‌باشد.

شایان ذکر است در تمامی جداول به روش بلک پالس برای $n = 128$ می‌باشد.

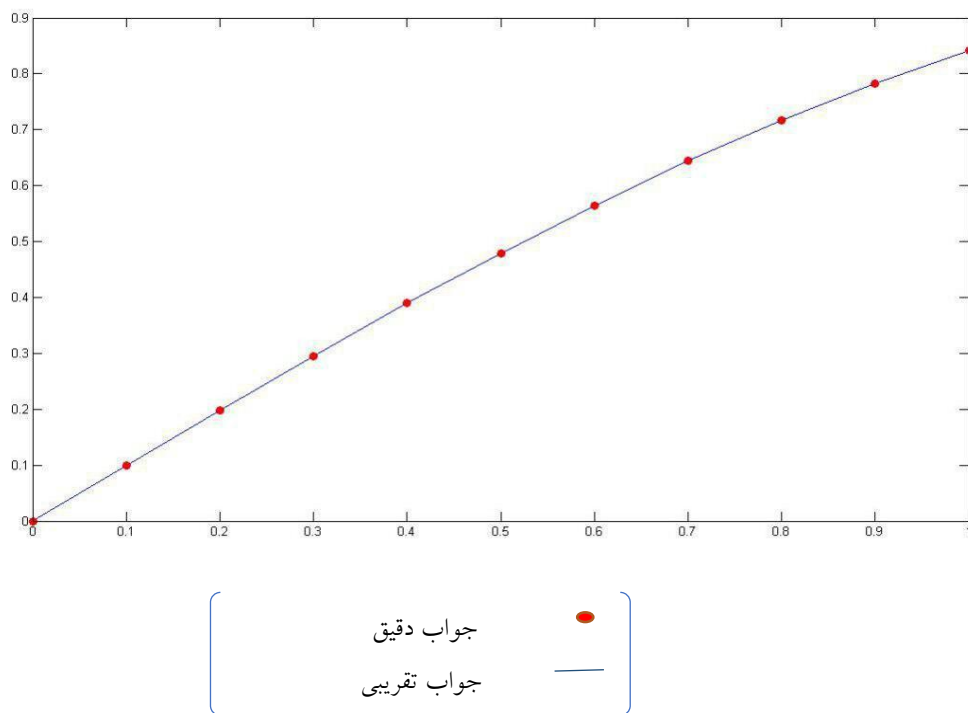
جدول ۴-۳- خطای مطلق نتایج حل معادله (۲۰-۴) برای روش پیشنهادی برای $n = 128$ و روش توابع بلک پالس

x	جواب دقیق	جواب تقریبی	روش بلک پالس [۱۶]	خطای مطلق روش پیشنهادی	خطای مطلق روش تابع بلک پالس [۱۶]
۰/۱	۰/۰۹۹۸۳۳	۰/۰۹۸۵۲۴	۰/۱۰۱۳۸۸	۰/۰۰۱۳۰۸	۰/۰۰۱۵۵۵
۰/۲	۰/۱۹۸۶۶۹	۰/۱۹۹۷۶۶	۰/۱۹۴۰۷۳	۰/۰۰۱۰۹۷	۰/۰۰۴۵۹۶
۰/۳	۰/۲۹۵۵۲۰	۰/۲۹۴۸۵۷	۰/۲۹۹۹۹۵	۰/۰۰۰۶۶۲	۰/۰۰۴۴۷۵
۰/۴	۰/۳۸۹۴۱۸	۰/۳۸۹۶۵۸	۰/۳۸۷۹۷۸	۰/۰۰۰۲۴۰	۰/۰۰۱۴۴۰
۰/۵	۰/۴۷۹۴۲۶	۰/۴۷۹۵۸۵	۰/۴۸۶۲۶۶	۰/۰۰۰۱۶۰	۰/۰۰۶۸۴۰
۰/۶	۰/۵۶۴۶۴۲	۰/۵۶۳۹۹۳	۰/۵۶۵۹۳۰	۰/۰۰۰۶۴۸	۰/۰۰۱۲۸۸
۰/۷	۰/۶۴۴۲۱۸	۰/۶۴۵۴۷۷	۰/۶۴۰۶۲۴	۰/۰۰۱۲۶۰	۰/۰۰۳۵۹۴
۰/۸	۰/۷۱۷۳۵۶	۰/۷۱۵۳۷۳	۰/۷۲۰۶۱۱	۰/۰۰۱۹۸۲	۰/۰۰۳۲۵۵
۰/۹	۰/۷۸۳۳۲۷	۰/۷۸۵۶۵۳	۰/۷۸۲۳۵۱	۰/۰۰۲۳۲۶	۰/۰۰۰۹۷۶

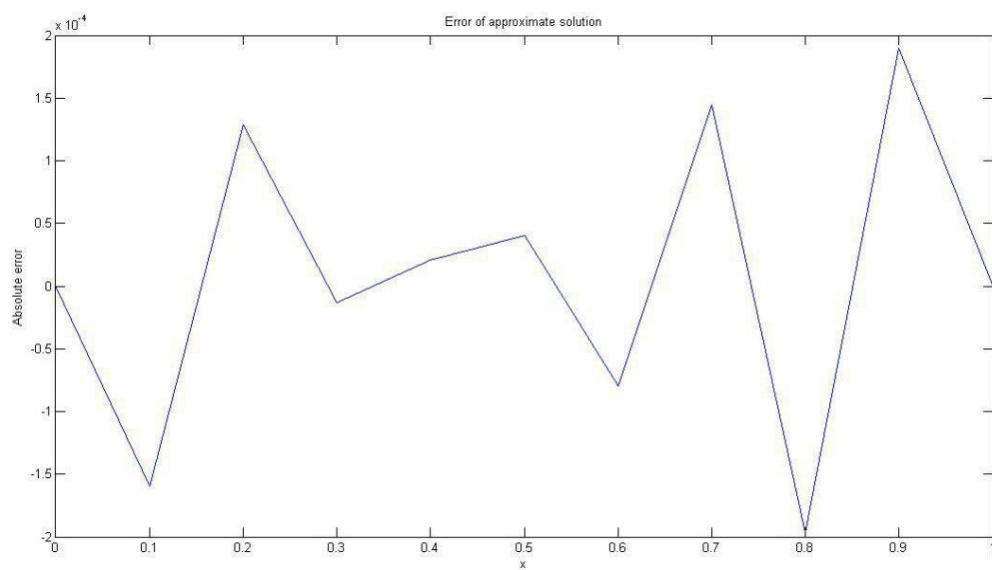
جدول ۴-۴- زمان محاسباتی بر حسب ثانیه برای حل معادله (۲۰-۴) به کمک الگوریتم‌های ۱-۴ و ۲-۴

n	الگوریتم ۱-۴	الگوریتم ۲-۴
۴	۲/۸۷	۳/۴۷
۸	۴/۸۲	۹/۵۲
۱۶	۳۱/۷۷	۵۹/۷۵

نمودار ۴-۵- نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۴-۲۰) برای $n = 128$



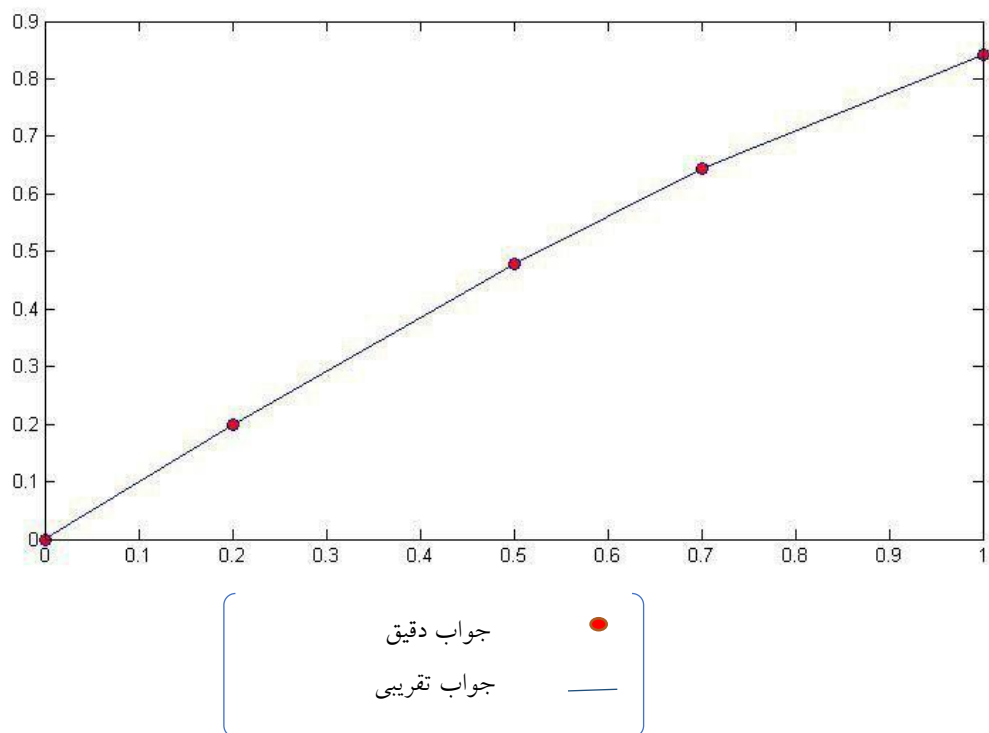
نمودار ۴-۶- نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۴-۲۰) برای $n = 128$



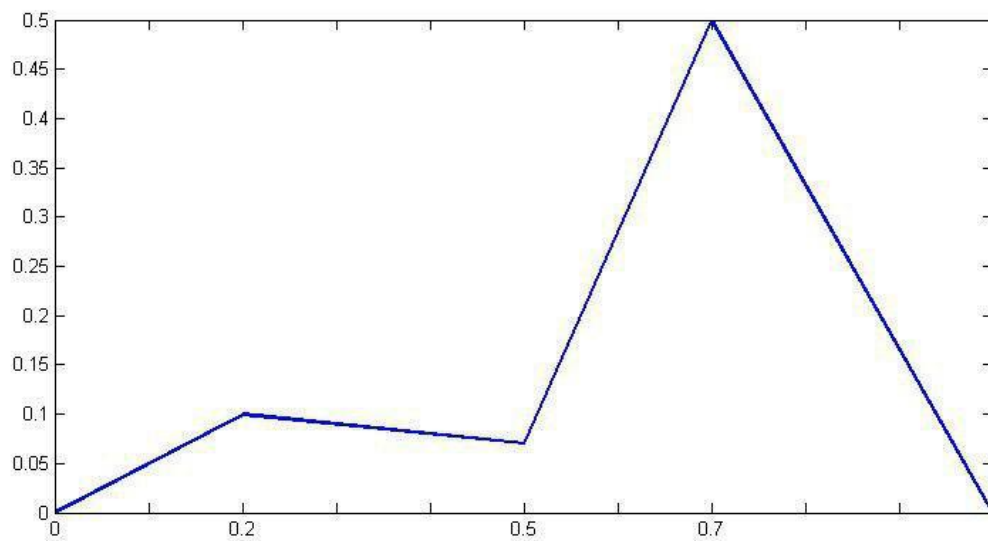
جدول ۴-۵- خطای مطلق نتایج حل معادله (۴-۲۰) برای روش پیشنهادی برای $n = 4$ و روش توابع بلک پالس

x	جواب دقیق	جواب تقریبی	روش بلک پالس [۱۶]	خطای مطلق روش پیشنهادی	خطای مطلق روش تابع بلک پالس [۱۶]
۰/۲	۰/۱۹۸۶۶۹	۰/۳۴۸۹۷۰	۰/۱۹۴۰۷۳	۰/۱۵۰۳۰۱	۰/۰۰۴۵۹۶
۰/۵	۰/۴۷۹۴۲۶	۰/۵۵۰۸۹۶	۰/۴۸۶۲۶۶	۰/۰۷۱۴۷۰	۰/۰۰۶۸۴۰
۰/۷	۰/۶۴۴۲۱۸	۱/۱۴۵۷۲۷	۰/۶۴۰۶۲۴	۰/۵۰۱۵۰۹	۰/۰۰۳۵۹۴

نمودار ۴-۷- نمودار جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۴-۲۰) برای $n = 4$



نمودار ۴-۸- نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۴-۲۰) برای $n = 4$



مثال ۳-۳. [۱۶] معادله انتگرال فردهلم غیرخطی زیر را در نظر می گیریم:

$$u(x) - \frac{1}{2} \int_0^x u^2(y) dy = x^2 - \frac{1}{12} \quad 0 < x \leq 1 \quad (۴-۲۱)$$

جواب دقیق این معادله برابر است با $u(x) = x^2$. در این مثال نقطه ابتدایی $u_0(0) = u(0) = 0$ را در نظر گرفته و حل می کنیم. دنباله نقاط x_i ها را به صورت $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ تعریف می کنیم و در آن مقدار $n = 128$ را در نظر می گیریم. خطای مطلق نتایج حل این معادله با روش حل معادله پیشنهادی در مقایسه با روش توابع بلک پالس در جدول ۴-۶ و نمودار ۴-۱۰ ارائه شده است. به علاوه در جدول ۴-۷ مقایسه زمان محاسباتی بین الگوریتم های ۴-۱ و ۴-۲ موجود می باشد.

شایان ذکر است در تمامی جداول به روش بلک پالس برای $n = 128$ می باشد.

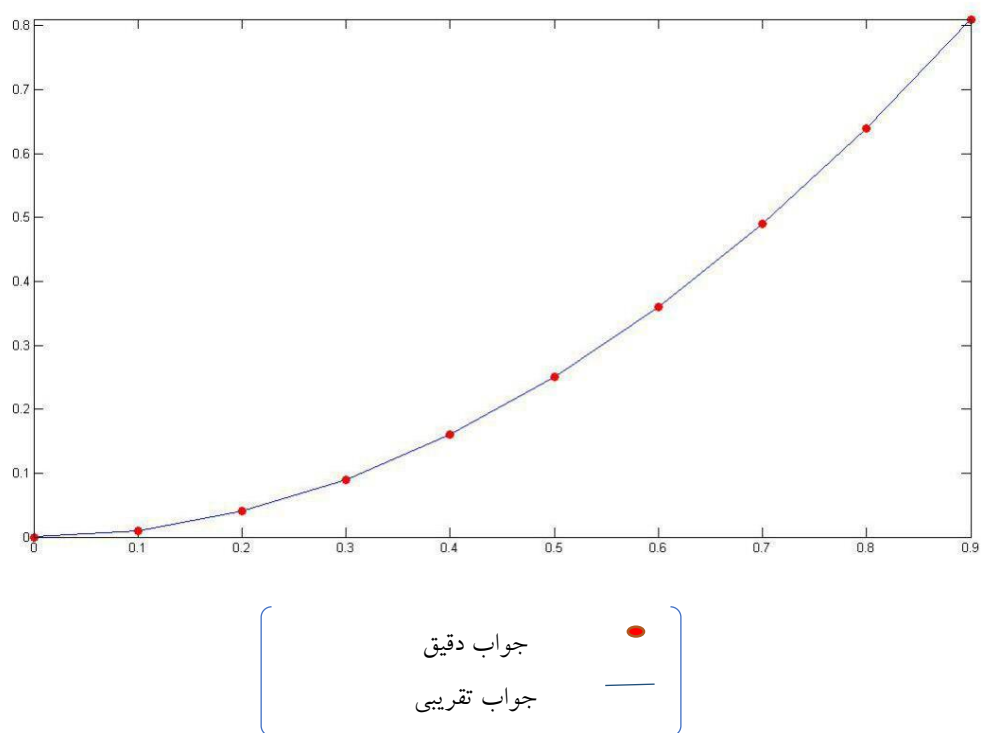
جدول ۴-۶- خطای مطلق نتایج حل معادله (۴-۲۱) برای روش پیشنهادی و روش توابع بلک پالس

x	جواب دقیق	جواب تقریبی	روش بلک پالس [۱۶]	خطای مطلق روش پیشنهادی	خطای مطلق روش تابع بلک پالس [۱۶]
۰/۱	۰/۰۱۰۰۰۰	۰/۰۱۰۷۶۲	۰/۰۱۰۳۰۸	۰/۰۰۰۷۶۲	۰/۰۰۰۳۰۸
۰/۲	۰/۰۴۰۰۰۰	۰/۰۴۰۶۵۵	۰/۰۳۸۱۴۰	۰/۰۰۰۶۵۵	۰/۰۰۱۸۶۰
۰/۳	۰/۰۹۰۰۰۰	۰/۰۹۰۴۴۴	۰/۰۹۲۸۲۸	۰/۰۰۰۴۴۴	۰/۰۰۲۸۲۸
۰/۴	۰/۱۶۰۰۰۰	۰/۱۶۰۲۳	۰/۱۵۸۷۴۶	۰/۰۰۰۲۳۰	۰/۰۰۱۲۵۴
۰/۵	۰/۲۵۰۰۰۰	۰/۲۵۰۰۰۱	۰/۲۵۷۸۶۷	۰/۰۰۰۰۰۱	۰/۰۰۷۸۶۷
۰/۶	۰/۳۶۰۰۰۰	۰/۳۵۹۶۰۶	۰/۳۶۱۸۷۱	۰/۰۰۰۳۹۴	۰/۰۰۱۸۷۱
۰/۷	۰/۴۹۰۰۰۰	۰/۴۸۹۴۴۸	۰/۴۸۳۴۵۳	۰/۰۰۰۵۵۲	۰/۰۰۶۵۴۷
۰/۸	۰/۶۴۰۰۰۰	۰/۶۳۹۳۹۱	۰/۶۴۷۵۱۵	۰/۰۰۰۶۰۹	۰/۰۰۷۵۱۵
۰/۹	۰/۸۱۰۰۰۰	۰/۸۱۱۶۳۸	۰/۸۰۷۱۸۳	۰/۰۰۱۶۳۸	۰/۰۰۲۸۱۷

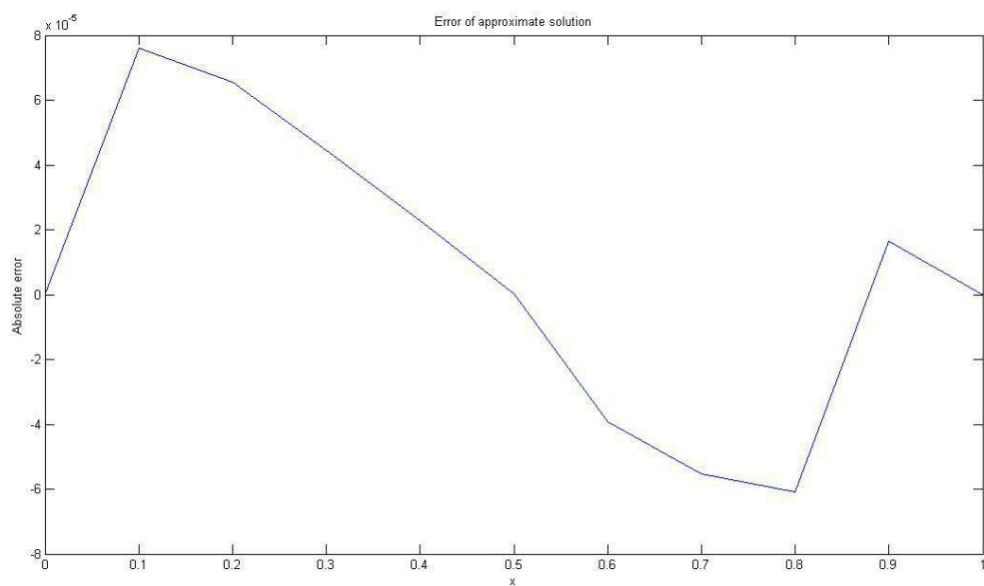
جدول ۴-۷- زمان محاسباتی بر حسب ثانیه برای حل معادله (۴-۲۱) به کمک الگوریتم‌های ۴-۱ و ۴-۲

n	الگوریتم ۴-۱	الگوریتم ۴-۲
۴	۲/۵۹	۳/۱
۸	۵/۰۹	۸/۴۶
۱۶	۲۸/۸۹	۳۴/۲

نمودار ۴-۹- نمودار مقایسه جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۴-۲۱)



نمودار ۴-۱۰- نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۴-۲۱)



مثال ۴-۴. [۱۷] معادله انتگرال فردهلم غیرخطی زیر را در نظر می گیریم:

$$u(x) + \int_0^1 e^{x-2y} u^3(y) dy = e^{x+1} \quad 0 \leq x < 1 \quad (۲۲-۴)$$

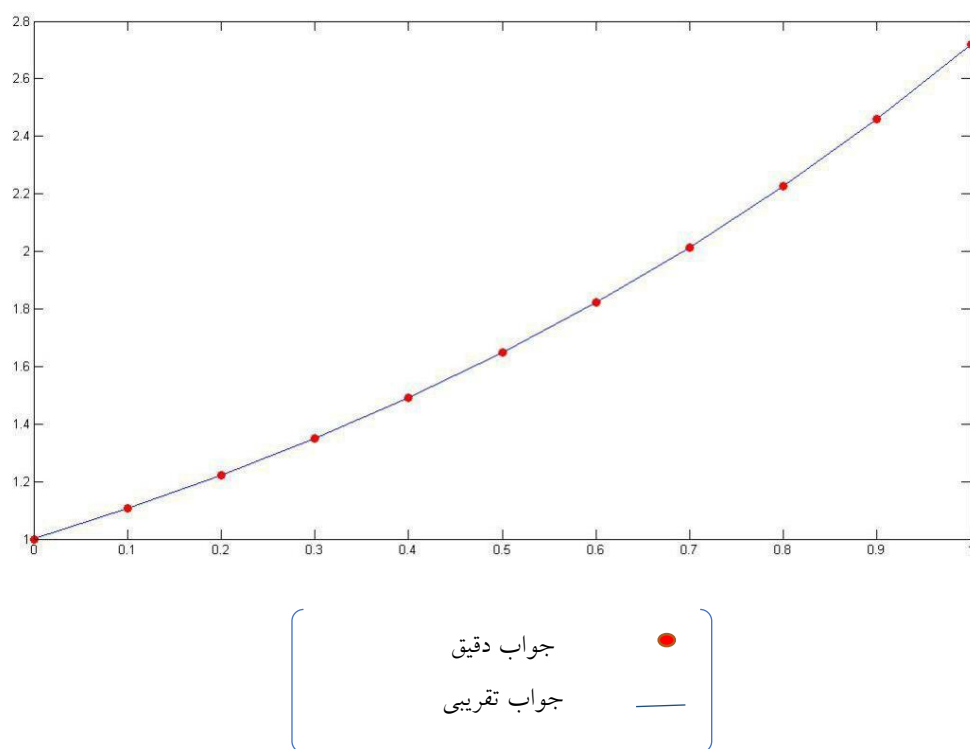
جواب دقیق این معادله برابر است با $u(x) = e^x$. در این مثال نقطه ابتدایی $u_0(0) = u(0) = 1$ را در نظر گرفته و حل می کنیم. دنباله نقاط x_i ها را به صورت $x_i = \frac{i-1}{n-1}$ برای $i = 1, 2, \dots, n$ تعریف می کنیم و در آن مقدار $n = 128$ را در نظر می گیریم. خطای مطلق نتایج حل این معادله با روش حل معادله پیشنهادی در مقایسه با روش موجک هار در جدول ۴-۸ و نمودار ۴-۱۲ ارائه شده است. به علاوه این مسئله را با استفاده از دو الگوریتم ۴-۱ و ۴-۲ حل کرده که خطای مطلق نتایج حل این معادله در مقایسه با الگوریتم ۴-۱ و ۴-۲ در جدول ۴-۹ و نمودار ۴-۱۴ ارائه شده است.

شایان ذکر است در تمامی جداول به روش موجک هار برای $n = 128$ می باشد.

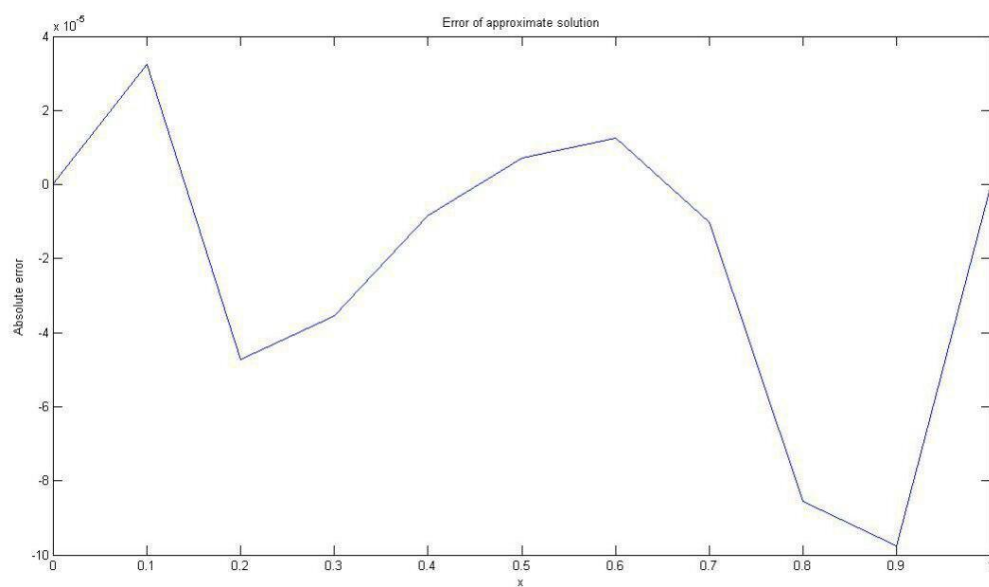
جدول ۴-۸- خطای مطلق نتایج حل معادله (۲۲-۴) برای روش پیشنهادی و روش موجک هار

x	جواب دقیق	جواب تقریبی	روش موجک هار [۱۷]	خطای مطلق روش پیشنهادی	خطای مطلق روش موجک هار [۱۷]
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷۰۹۱۸	۱/۱۰۵۴۹۵۷۹۶	۱/۱۱۱۰۹۹۴۷۳	۰/۰۰۰۳۲۴۸۷۸	۰/۰۰۵۹۲۸۵۵۵
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰۲۷۵۷	۱/۲۲۰۹۳۱۱۳۹	۱/۲۲۰۲۹۶۶۱۵	۰/۰۰۰۴۷۱۶۱۸	۰/۰۰۱۱۰۶۱۴۲
۰/۳	۱/۳۴۹۸۵۸۸۰۶	۱/۳۴۹۵۰۲۸۸۷	۱/۳۳۹۸۱۷۰۸۴	۰/۰۰۰۳۵۵۹۱۹	۰/۰۱۰۰۴۱۷۲۲
۰/۴	۱/۴۹۱۸۲۴۶۹۶	۱/۴۹۱۷۴۰۲۶۹	۱/۴۷۱۹۶۵۰۹۱	۰/۰۰۰۰۸۴۴۲۷	۰/۰۱۹۸۵۹۶۰۵
۰/۵	۱/۶۴۸۷۲۱۲۶۸	۱/۶۴۸۶۴۹۸۴۶	۱/۴۷۱۹۶۵۰۹۱	۰/۰۰۰۰۷۱۴۲۲	۰/۰۲۳۱۱۹۹۷۳
۰/۶	۱/۸۲۲۱۱۸۷۹۷	۱/۸۲۲۲۴۳۱۰۶	۱/۸۳۱۸۸۸۹۲۷	۰/۰۰۰۱۲۴۳۰۹	۰/۰۰۹۷۷۰۱۳۰
۰/۷	۲/۰۱۳۷۵۲۷۰۳	۲/۰۱۳۶۵۰۲۳۲	۲/۰۱۱۹۳۶۵۵۶	۰/۰۰۰۱۰۲۴۷۱	۰/۰۰۱۸۱۶۱۴۷
۰/۸	۲/۲۲۵۵۴۰۹۲۳	۲/۲۲۴۶۸۴۵۰۳	۲/۲۰۹۶۷۸۳۸۱	۰/۰۰۰۰۸۵۶۴۲۰	۰/۰۱۵۸۶۲۵۴۲
۰/۹	۲/۴۵۹۶۰۳۱۰۴	۲/۴۵۸۶۲۶۵۷۳	۲/۴۲۶۸۵۴۶۷۶	۰/۰۰۰۹۷۶۵۳۱	۰/۰۳۲۷۴۸۴۲۸

نمودار ۴-۱۱- نمودار مقایسه جواب واقعی و روش پیشنهادی معادله (۴-۲۲)



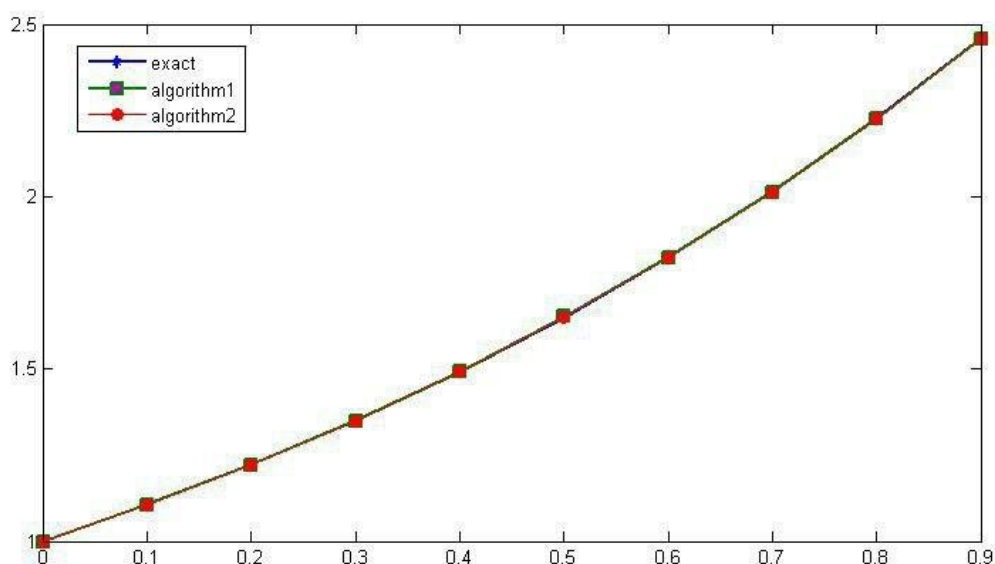
نمودار ۴-۱۲- نمودار خطای مطلق روش پیشنهادی معادله (۴-۲۱)



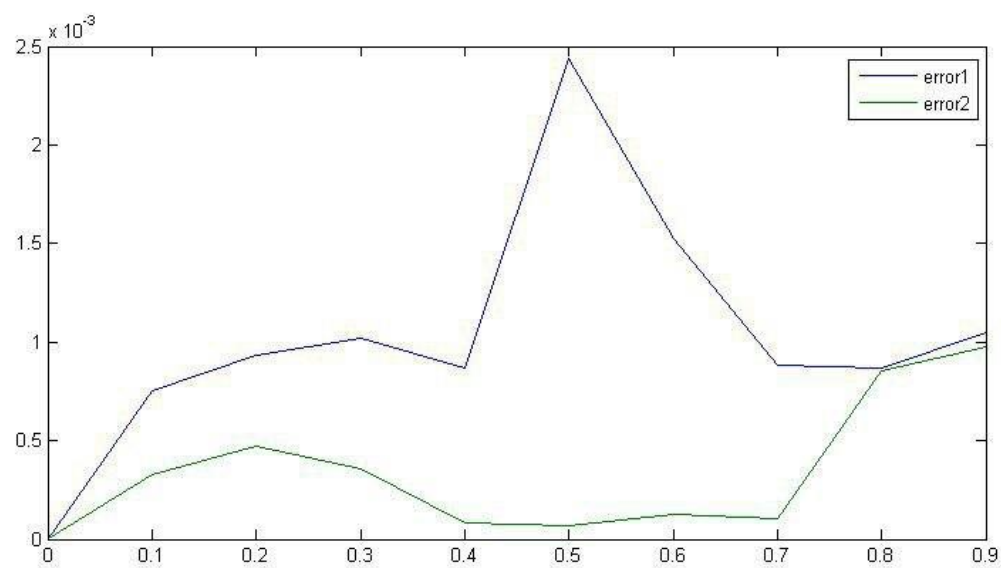
جدول ۴-۹- خطای مطلق نتایج حل معادله (۴-۲۲) به دو روش الگوریتم ۴-۱ و ۴-۲

x	جواب دقیق	جواب تقریبی الگوریتم ۴-۲	جواب تقریبی الگوریتم ۴-۱	خطای مطلق روش الگوریتم ۴-۲	خطای مطلق روش الگوریتم ۴-۱
۰/۱	۱/۱۰۵۱۷۰۹۱۸	۱/۱۰۵۴۹۵۷۹۶	۱/۱۰۵۹۲۳۹۵۸	۰/۰۰۰۳۲۴۸۷۸	۰/۰۰۰۷۵۳۰۴
۰/۲	۱/۲۲۱۴۰۲۷۵۷	۱/۲۲۰۹۳۱۱۳۹	۱/۲۲۰۴۶۸۲۳۹	۰/۰۰۰۴۷۱۶۱۸	۰/۰۰۰۹۳۴۵۱۸
۰/۳	۱/۳۴۹۸۵۸۸۰۶	۱/۳۴۹۵۰۲۸۸۷	۱/۳۴۸۸۳۷۷۱۴	۰/۰۰۰۳۵۵۹۱۹	۰/۰۰۱۰۲۱۰۹۲
۰/۴	۱/۴۹۱۸۲۴۶۹۶	۱/۴۹۱۷۴۰۲۶۹	۱/۴۹۰۹۵۷۲۲۷	۰/۰۰۰۰۸۴۴۲۷	۰/۰۰۰۸۶۷۴۶۹
۰/۵	۱/۶۴۸۷۲۱۲۶۸	۱/۶۴۸۶۴۹۸۴۶	۱/۶۵۱۱۵۹۸۴۴	۰/۰۰۰۰۷۱۴۲۲	۰/۰۰۲۴۳۸۵۷۶
۰/۶	۱/۸۲۲۱۸۷۹۷	۱/۸۲۲۲۴۳۱۰۶	۱/۸۲۳۶۴۳۴۹	۰/۰۰۰۱۲۴۳۰۹	۰/۰۰۱۵۲۴۶۹۳
۰/۷	۲/۰۱۳۷۵۲۷۰۳	۲/۰۱۳۶۵۰۲۳۲	۲/۰۱۲۸۷۳۱۹۹	۰/۰۰۰۱۰۲۴۷۱	۰/۰۰۰۸۷۹۵۰۴
۰/۸	۲/۲۲۵۵۴۰۹۲۳	۲/۲۲۴۶۸۴۵۰۳	۲/۲۲۴۶۶۹۵۹۷	۰/۰۰۰۸۵۶۴۲۰	۰/۰۰۰۸۷۱۳۲۶
۰/۹	۲/۴۵۹۶۰۳۱۰۴	۲/۴۵۸۶۲۶۵۷۳	۲/۴۵۸۵۵۷۷۷۸	۰/۰۰۰۹۷۶۵۳۱	۰/۰۰۱۰۴۵۳۲۶

نمودار ۴-۱۳- نمودار مقایسه جواب واقعی و الگوریتم‌های ۴-۱ و ۴-۲ معادله (۴-۲۲)



نمودار ۴-۱۴- نمودار مقایسه خطای مطلق الگوریتم‌های ۴-۱ و ۴-۲ معادله (۴-۲۱)



فصل پنجم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۱-۵- نتیجه گیری

به دلیل ناپایداری فرآیند متعامدسازی گرام - اشمیت، از بین بردن این مشکل قابل تامل می باشد. در [۳۸] و [۱۵] نویسندگان روشی را برای حذف این فرآیند پیشنهاد داده اند. به کمک این ایده و قرار دادن $u_0(x_1) = u(x_1)$ در اولین نقطه رابطه بازگشتی جواب، به جواب تقریبی ای خواهیم رسید.

با مقایسه زمان اجرا بین الگوریتم های ۱-۴ (استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام - اشمیت) و ۲-۴ (حذف فرآیند متعامدسازی گرام - اشمیت) به این مهم خواهیم رسید که الگوریتم ۲-۴ دارای زمان اجرای بالاتری نسبت به الگوریتم ۱-۴ می باشد. برای مثال در جدول ۴-۴ وقتی $n=4$ ، زمان اجرا برای الگوریتم ۱-۴، ۳/۴۷ ثانیه است. در صورتی که برای همین n ، زمان اجرای الگوریتم ۲-۴، ۲/۸۷ ثانیه می باشد. (اطلاعات بیشتر را می توانید در جداول ۴-۴ و ۷-۴ مشاهده فرمایید)

اما در مورد دقت جواب ها، جواب تقریبی به دست آمده از الگوریتم ۲-۴ دقیق تر از جواب تقریبی به دست آمده از الگوریتم ۱-۴ است (اطلاعات بیشتر در جدول ۴-۹ و نمودار ۴-۱۳). این بدین معناست که با کنار گذاشتن فرآیند متعامدسازی گرام - اشمیت گرچه زمان cpu افزایش می یابد، اما خطای روش کاهش یافته و دقت جواب افزایش خواهد یافت.

۲-۵- نتیجه گیری و تحقیقات آتی

در این رساله به بررسی روش های مبتنی بر فضای هیلبرت هسته بازتولید در حل معادلات انتگرال می پردازیم. این روش تابع جواب به شکل یک سری در فضای هیلبرت هسته بازتولید نمایش داده می شود. یا توابع پایه متعامد یکه را توسط فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت تولید و به عنوان توابع آزمون در تقریب تابع جواب مورد استفاده قرار می دهیم (الگوریتم ۱-۴) و یا فرایند متعامدسازی گرام-اشمیت را حذف و به جای آن [۱۵] را جایگزین می کنیم (الگوریتم ۲-۴). چگونگی پیاده سازی را با استفاده از حل معادله انتگرال فردهلم غیرخطی و حل معادله انتگرال ولترا غیرخطی به تفصیل بررسی نمودیم.

با پیاده سازی تمامی مراحل مذکور برای دستگاه معادلات انتگرال غیرخطی، می توان این روش را گسترش و مقالات جدیدی ارائه نمود. به علاوه در معادلات انتگرال غیرخطی دوبعدی نیز کارایی دارد. همچنین این روش در حل معادلات تاخیری نیز به نتیجه رسیده است که پس از ویرایش نهایی برای ژورنال های معتبر ارسال خواهد گردید.

```
##pseudocode##
#This is the pseudocode of RKHS Method. You can implement it on any CAS
software such as Maple, Mathematica and etc.

R := proc (x as variable, t as variable)
if t <= x
    return \-a+t,
else
    return \-a+x,
end proc;

L := proc(u as function)
    return
        f(x) - p(x)u( h(x)) - \lambda \int_a^b N(x,t,u(t))dt,
        # or "f(x) - p(x)u( h(x)) - \lambda \int\limits_a^x N(x,t,u(t))dt",
end proc;

Y:= proc (x as variable, i as variable, u as function, L as proc)
    return eval(L(u(.,t)), t = x_i),
end proc;
operator **(u as function, v as function)
return u(a) v(a) - \int_a^b diff(u,s) diff(v,s) ds,
end operator;

Y:= proc (i as variable, j as variable, u as function, L as proc)
    return L(Y(x,i,u,L))** Y(x,j,u,L),
end proc;

β:= proc (i as variable, j as variable)
if i < j
    return .,
else
    return β_ij
end proc;

β:= [β(i,j)];
Y:= [Y(i,j,u,L)];

v:= proc(i as variable, j as variable)
return inv(Y) [i,j],
end proc;

u[.] := u.;

for n := . to N do
λ[n] := \sum_k=\^n v[i,k] u[k-];
u[n] := proc(x,Y)
return \sum_k=\^n λ[k] Y(x,k,u,L),
end proc:
end for;

print u[N];
```

- [١] S. Abbasbandy (٢٠٠٧), Homotopy analysis method for heat radiation equations, International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. ٣٤, no. ٣, pp. ٣٨٠-٣٨٧.
- [٢] S. Abbasbandy, B. Azarnavid, and M.S. Alhuthali (٢٠١٥), A shooting reproducing kernel Hilbert space method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. ٢٧٩, pp. ٢٩٣-٣٠٥.
- [٣] M. Abramowitz and I.A. Stegun (١٩٦٤), Handbook of Mathematical Functions With Formulas, Graphs and Mathematical Tables, National Bureau of Standards, Washington, vol. ٨, pp. ٥٩-٧٦.
- [٤] O. Abu Arqub, M. Al-Smadi and S. Momani (٢٠١٢), Application of reproducing kernel method for solving nonlinear Fredholm-Volterra integrodifferential equations, Abstract and Applied Analysis, vol. ٢٠١٢, Article ID ٨٣٩٨٣٦, ١٦ pages.
- [٥] V.M. Aleksandrov (١٩٩٣), Asymptotic methods in the mechanics of continuous media: problems with mixed boundary conditions, Appl. Math. and Mech. (PMM), vol. ٥٧, no. ٢, pp. ٣٢١-٣٢٧.
- [٦] V.M. Aleksandrov and E.V. Kovalenko (١٩٨٦), Problems With Mixed Boundary Conditions in Continuum Mechanics [in Russian], Nauka, Moscow, vol. ٢٢٥, no. ١, pp. ٨٧-٩٥.
- [٧] D. Alpay and H. Dym (١٩٩٦), On a new class of realization formulas and their application. Linear Algebra and its Applications, vol. ٢٤١-٢٤٣, pp. ٣-٨٤.
- [٨] A. Alvandi, M. Paripour and Z. Roshani (٢٠١٥), Reproducing kernel method for solving a class of Fredholm integro-differential equations, in Proceedings of the ٤٦th Annual Iranian Mathematics Conference, no. ٤٦, pp. ٥٠٥, Yazd University.
- [٩] N. Aronszajn (١٩٥٠), Theory of reproducing kernels. Trans. Amer. Math. Soc, vol. ٦٨, pp. ٣٣٧-٤٠٤.
- [١٠] O.A. Arqub, M. Al-Smadi and N. Shawagfeh (٢٠١٣), Solving Fredholm integro-differentialequations using reproducing kernel Hilbert space method. Applied Mathematics and Computation, vol ٢١٩, pp ٨٩٣٨-٨٩٤٨.

[11] N.Kh. Arutyunyan (1959), A plane contact problem of creep theory, Appl. Math. and Mech. (PMM), Vol. 23, No. 5, pp. 901–924.

[12] N.Kh. Arutyunyan (1966), Some Problems in the Theory of Creep, Pergamon Press, Oxford.

[13] B. Azarnavid, F. Parvaneh and S. Abbasbandy (2010), Picard-reproducing kernel Hilbert space method for solving generalized singular nonlinear Lane-Emden type equations, Mathematical Modelling and Analysis, vol. 20, no. 6, pp. 704–717.

[14] Yu.I. Babenko (1986), A Method for Computing Heat and Diffusion Flows [in Russian], Heat and Mass Transfer, Khimiya, Moscow, vol. 8, pp. 59–76.

[15] E. Babolian, S. Javadi and E. Moradi (2016), Error analysis of reproducing kernel Hilbert space method for solving functional integral equations, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 300, pp. 300–311.

[16] E. Babolian, Z. Masouri and S. Hatamzadeh-Varmazyar (2008), New direct method to solve nonlinear Volterra-Fredholm integral and integro-differential equations using operational matrix with block-pulse functions, in Progress in Electromagnetics Research B, EMW Publishing, Cambridge, Mass, USA, vol. 8, pp. 59–76.

[17] E. Babolian and A. Shamsavaran (2009), Numerical solution of nonlinear Fredholm integral equations of the second kind using Haar wavelets, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 220, no. 1, pp. 87–90.

[18] S. Bergman (1922), Über die entwicklung der harmonischen funktionen der Ebene und des raumes nach orthogonal funktionen. Math. vol. 86, pp. 238–271.

[19] S. Bergman (1930), Über Kurvenintegrale von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen, die Differentialgleichungen befriedigen. Math.Z, vol. 32, pp. 386–406.

[20] S. Bergman (1937), Sur un lien entre la theorie des equations aux derives partielles elliptiques et celle des fonctions d'une variable complexe. C.R. Acad. Sci., Paris, vol. 205, pp. 1198–1200.

[21] S. Bergman (1937), Zur theorie der function, die eine linear partielle differentialgleichung befriedigen. Math. Sb, vol. 44, pp. 1169–1198.

- [۲۲] S. Bergman (۱۹۴۰), The approximation of functions satisfying a linear partial differential equation. *Duke Math. J*, vol. ۶, pp. ۶۳۷-۵۶۱.
- [۲۳] R. Brylinski (۱۹۹۸), Geometric quantization of real minimal nilpotent orits. *Differential Geometry and its Applications*, vol. ۹, no. ۱-۲, pp. ۵-۵۸.
- [۲۴] S. Bushnaq, B. Maayah, S. Momani and A. Alsaedi (۲۰۱۴), A Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving systems of Fractional Integrodifferential Equations. *Abstract and Applied Analysis*, pp. ۱۰۱۱۵۵-۱۰۳۰۱۶.
- [۲۵] S. Bushnaq, S. Momani and Y. Zhou (۲۰۱۴), A Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving Integro-Differential Equations of Fractional Order, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. ۱۵۶, no. ۱, pp. ۹۶-۱۰۵.
- [۲۶] M. Cui and F. Geng (۲۰۰۷), Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. ۲۰۵, pp. ۶-۱۵.
- [۲۷] M. Cui and Y. Lin (۲۰۰۸), *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing kernel Space*, Nova Science Publishers, Inc.
- [۲۸] H. Du, Z. Guoliang and C.H. Zhao (۲۰۱۴), Reproducing kernel method for solving Fredholm integro-differential equations with weakly singularity, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. ۲۲۵, pp. ۱۲۲-۱۳۲.
- [۲۹] I.L. El-Kalla (۲۰۰۸), Convergence of the Adomian method applied to a class of nonlinear integral equations, *Applied Mathematics Letters. An International Journal of Rapid Publication*, vol. ۲۱, no. ۴, pp. ۳۷۲-۳۷۶.
- [۳۰] E. Gao, S. Song and X. Zhang (۲۰۱۲), Solving singular second- order initial /boundary value problems in reproducing kernel Hilbert space, vol. ۲۲۹, no. ۱, pp. ۴۱-۶۰.
- [۳۱] Y. Gao and X. Lv (۲۰۱۲), Reproducing Kernel Space Method for the Solution of Linear Fredholm Integro-Differential Equations and Analysis of Stability, *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, vol. ۲۰۱۲, pp. ۱۰-۱۵.
- [۳۲] F.Z. Geng (۲۰۱۲), solving Integral Equations of the third kind in the reproducing kernel space, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, vol. ۳۸, no. ۳, pp. ۵۴۳-۵۵۱.

- [۳۳] H. Geng and M. Cui (۲۰۰۷), Solving singular nonlinear second-order periodic boundary value problems in the reproducing kernel space. *Applied Mathematics and Computation*, vol. ۱۹۲, pp. ۳۸۹-۳۹۸.
- [۳۴] F.Z. Geng and S.P. Qian (۲۰۱۳), Reproducing kernel method for singularly perturbed turning point problems having twin boundary layers, *Applied Mathematics Letters*, vol. ۲۶, pp. ۹۹۸-۱۰۰۴.
- [۳۵] D. Hong, Zh. Guoliang and Zh. Chunyan (۲۰۱۴), Reproducing kernel method for solving Fredholm integro-differential equations with weakly singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. ۲۵۵, pp. ۱۲۲-۱۳۲.
- [۳۶] H. Hult (۲۰۰۳), Approximating some Volterra type stochastic integrals with applications to parameter estimation. *Stochastic Processes and their Applications*, vol. ۱۰۵, no. ۱, pp. ۱-۳۲.
- [۳۷] Gh. Jahanshahloo, A. Teymoori and S. Kord Rostami (۱۹۸۷), *Applied linear Algebra*, Naghoos Publishers, ISBN ۹۶۴-۰۶-۳۵۳۹-۱, Inc.
- [۳۸] S. Javadi, E. Babolian and E. Moradi (۲۰۱۴), New implementation of reproducing kernel Hilbert space method for solving a class of functional integral equations, *Communications in Numerical Analysis*, vol. ۲۰۱۴, pp. ۷-۱۴.
- [۳۹] W. Jiang and Z.H. Chen (۲۰۱۳), Solving a system of linear Volterra integral equations using the new reproducing kernel method, *Applied Mathematics and Computation*, vol. ۲۱۹, no. ۲۰, pp. ۱۰۲۲۵-۱۰۲۳۰.
- [۴۰] A.A. Kilbas and M. Saigo (۱۹۹۹), On solution of nonlinear Abel-Volterra integral equation, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. ۲۲۹, no. ۱, pp. ۴۱-۶۰.
- [۴۱] I. Komashynska and M. Al-Smadi (۲۰۱۴), Iterative reproducing kernel method for solving second-order integrodifferential equations of Fredholm type, *Journal of Applied Mathematics*, vol. ۲۰۱۴, no. ۴۵۹۵۰۹, pp. ۵۴-۶۵.
- [۴۲] F.M. Larkin (۱۹۹۲), Optimal approximation in Hilbert space with reproducing kernel function. *Math. Comp*, vol. ۲۲, no. ۴, pp. ۹۱۱-۹۲۱.
- [۴۳] X. Li and B. Wu (۲۰۱۳), A new reproducing kernel method for variable order fractional boundary value problems for functional differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. ۳۱۱, pp. ۳۸۷-۳۹۳.

- [٤٤] B. Maayah, S. Bushnaq and S. Momani (٢٠١٤), Iterative Multistep Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving Strongly Nonlinear Oscillators, *Advances in Mathematical Physics*, vol. ٢٠١٤, pp. ٢١٤-٢٢١.
- [٤٥] J. Mercer (١٩٠٩), Function of positive and negative type and their connection with the theory of integral equation. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser*, vol. ٢٠٩, pp. ٤١٥-٤٤٦.
- [٤٦] C. Minggen and D. Zhongxing (١٩٨٦), On the best operator of interpolation, *Mathematica Numerica Sinica*, vol. ٨, no. ٢, pp. ٢٠٩-٢١٦.
- [٤٧] F. Mirzaee and E. Hadadiyan (٢٠١٣), A computational method for nonlinear mixed Volterra-Fredholm integral equations, *Caspian Journal of Mathematical Science*, vol. ٢, no. ٢, pp. ١١٣-١٢٣.
- [٤٨] M. Mohammadi and R. Mokhtari (٢٠١٣), A new algorithm for solving nonlinear Schrödinger equation in the reproducing kernel space, *IJS&T-Transaction*, vol. ٣٧, pp. ٥١٣-٥٢٦.
- [٤٩] M. Mohammadi, R. Mokhtari and H. Panahipour (٢٠١٣), A Galerkin-reproducing kernel method: application to the ٢D nonlinear coupled Burgers' equations, *Eng*, vol. ٨, pp. ٥٩-٧٦.
- [٥٠] M. Mohammadi, R. Mokhtari and H. Panahipour (٢٠١٤), Solving two parabolic inverse problems with a nonlocal boundary condition in the reproducing kernel space, *Appl. Comput. Math*, vol. ١٣, pp. ٩١-١٠٦.
- [٥١] M. Monajjemi (٢٠١١), Mathematics in physical chemistry, *Journal of Physical and Theoretical Chemistry of Islamic Azad University of Iran*, vol ١٠, no. ١, pp. ١-٩.
- [٥٢] S. Nemati and Y. Ordokhani (٢٠١٣), Legendre expansion methods for the numerical solution of nonlinear ٢D Fredholm integral equations of the second kind, *J. Appl. Math. Informatics*, vol. ٣١, pp. ٦٠٩-٦٢١.
- [٥٣] H.L. Royden, *Real Analysis, Methods and Applications*, Springer, Berlin, Germany, vol. ٥٧, no. ٢, pp. ٣٢١-٣٢٧.
- [٥٤] D.J. Strauss and G. Steidl (٢٠٠٢), Hybrid wavelet-support vector classification of waveforms. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. ١٤٨, no. ٢, pp. ٣٧٥-٤٠٠.
- [٥٥] A.N. Tikhonov and A.A. Samarskii (١٩٦٠), On canonical homogeneous difference schemes *Dokl Akad, Russian Mathematical Surveys*, Vol. ٢٢, no. ٢, pp. ٧٦١-٧٦٥.

[٥٦] M.M.Ch. Veenakaul (١٩٧٤), Optimal rules with polynomial precesion for Hilbert space possessing reproducing kernel function. Math. Comp. Number Math, vol. ٢٢, pp. ٢٠٧-٢١٨.

[٥٧] H. Vosughi, E. Shivanian, and S. Abbasbandy (٢٠١١), A new analytical technique to solve Volterra's integral equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences, vol. ٣٤, no. ١٠, pp. ١٢٤٣-١٢٥٣.

[٥٨] R. Wilson (٢٠٠١), Composition series for analytic continuations of holomrphic discrete series representations of Sup,q. Differential Geometry and its Applications, vol. ١٥, no. ٣, pp. ٢٢١-٢٥٢.

[٥٩] A.M. Wazwaz (٢٠١١), Linear and Nonlinear Integral Equations, Methods and Applications, Springer, Berlin, Germany, vol. ٢٢٥, no. ١, pp. ٨٧-٩٥.

[٦٠] H. Yao and M. Cui (٢٠٠٧), A new algorithm for a class of singular boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, vol. ١٨٦, pp. ١١٨٣-١١٩١.

[٦١] S. Zaremba (١٩٠٨), Sur le calcul numerique des founctions demandess danse le problems de dirichlet et le problems hydrodynamique. Bulletin International de I Academic des Science de Cracovie, pp. ١٢٥-١٩٥.

واژه‌نامه:

Absolute error	خطای مطلق
Adjoint	آمیخته
Abstract	مجرد
Algorithm	الگوریتم
Analytical	تحلیلی
Approximation	تقریب
Approximate error	خطای تقریبی
Approximate solution	جواب تقریبی
Asymptotic technique	تکنیک مجانبی
Block-pulse function	تابع بلک پالس
Boundary condition	شرط مرزی
Bounded	کران‌دار
Coefficient	ضریب
Comparison	مقایسه
Complete	کامل
Complex	مختلط
Condition	شرط
Constant	ثابت
Continuous	پیوسته
Convergent	همگرایی
Decreasing	کاهشی

Dense	چگال
Differential equation	معادله دیفرانسیل
Dirac function	تابع دیراک
Exact error	خطای دقیق
Exact solution	جواب دقیق
Execution time	زمان اجرا
Expand	گسترش دادن
Explicit	صریح
First kind	نوع اول
Fourier series	سری فوریه
Fractional	کسری
Fredholm integral equation	معادله انتگرال فردهلم
Functional space	فضای تابعی
Gram-Schmidt orthogonal process	فرآیند متعامدسازی گرام - اشمیت
Hilbert space	فضای هیلبرت
Homogeneous	همگن
Increasing	افزایشی
Initial	ابتدایی
Initial condition	شرط اولیه
Inner product	ضرب داخلی
Inner product space	فضای ضرب داخلی
Integrable	انتگرال پذیر

Integral equaion	معادله انتگرال
Integro-differential equaion	معادله انتگرال - دیفرانسیل
Intercept	بریدن، قطع کردن
Iteration	تکرار
Iterative method	روش تکراری
Linear integral equations	معادلات انتگرال خطی
Monotonically	یکنواخت
Multistep	چندگامی
Nonlinear Fredholm integral equation	معادله انتگرال فردهلم غیرخطی
Nonlinear integral equations	معادلات انتگرال غیرخطی
Nonlinear Volterra integral equation	معادله انتگرال ولترا غیرخطی
Normal orthogonal system	دستگاه متعامد نرمال
Order	مرتبه
Orthogonal	متعامدسازی
Orthonormal	متعامد یکه
Phenomenon	پدیده
Real	حقیقی
Recurrence	بازگشتی
Riesz representation theorem	قضیه نمایش ریس
Reproducing kernel	هسته بازتولیدی
Reproducing kernel space	فضای هسته بازتولیدی
Reproducing kernel Hilbert	هسته بازتولیدی هیلبرت

Reproducing kernel Hilbert space	فضای هیلبرت هسته بازتولیدی
Revised	بهبود یافته
Second kind	نوع دوم
Sequence	دنباله
Singular	تکین (منفرد)
Step	گام
Unifomly	به طور یکنواخت
Unique	یکتا
Unstable	ناپایدار
Volterra integral equation	معادله انتگرال ولترا
Wavelet	موجک

Abstract:

In this thesis, a new approach based on the Reproducing Kernel of Hilbert Space Method is proposed to approximate the solution of the second-kind nonlinear integral equations. In this case, the Gram-Schmidt process is substituted by another process so that a satisfactory result is obtained. In this method, the solution is expressed in the form of a series. Furthermore, the convergence of the proposed technique is proved. In order to illustrate the effectiveness and efficiency of the method, four sample integral equations are solved via the given algorithm.

Keywords: Reproducing Kernel of Hilbert Space Method, Nonlinear Integral Equations, Gram-Schmidt Orthogonal Process.



**ISLAMIC AZAD UNIVERSITY
SCIENCE AND RESEARCH BRANCH
Faculty of Mathematical sciences - Department of Applied
Mathematics**

Ph.D Thesis on Applied Mathematics – Numerical Analysis

Title

**An efficient algorithm in numerical solution of the Nonlinear Integral
equations by using reproducing kernel Hilbert functions**

Thesis Advisor:

**Saeid Abbasbandy (Ph.D.)
Mohammad Ali Fariborzi Araghi (Ph.D.)**

Consulting Advisor:

Tofiq Allahviranloo (Ph.D.)

By:

Sedigheh Farzaneh Javan

Summer ۲۰۱۷