
بسم الله الرحمن الرحيم

معاونت پژوهش و فناوری

فرم منشور اخلاق پژوهش

اینجانب شهناز محمدی مجد دانشجوی رشته ریاضی کاربردی – تحقیق در عملیات تعهد می نمایم که اصول زیر را در انجام پایان نامه مدنظر قرار داده ام.

۱–اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.

۲– اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان،حیوان، نبات) و سایر صاحبان حق.

۳– اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه همکاران پژوهش.

٤– اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظرداشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵– رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب داری غیرعلمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع دراختیار.

٦–اصل راز داری: تعهد به صیانت از اسرار واطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷– اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸– اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹– اصل برائت: التزام به برائت جویی از هرگونه رفتار غیرحرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیرعلمی می آلایند.

محل امضاء و تاریخ

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

تعهد نامه اصالت رساله یا پایان نامه تحصیلی

اینجانب **علی اصغر حسین زاده** دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی – آنالیز عددی که در تاریخ ۱۳۹۲/۰۶/۳۰ از رساله خود تحت عنوان "حل سیستم های خطی فازی به کمک سیستم های خطی بازه ای و کاربرد هایش " با کسب نمره ۱۹/۱۰ دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می‌شوم :

۱) این پایان نامه / رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ....) استفاده نموده‌ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آنرا در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده‌ام.

۲) این پایان نامه/ رساله قبلا برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاهها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه یا رساله را داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد، مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

٤) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می‌پذیرم و دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضاء:

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

دانشکده: علوم،گروه ریاضی

رساله دکتری تخصصی رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان

حل سیستم های خطی فازی به کمک سیستم های خطی بازه ای و کاربرد هایش

استادان راهنما:

دکتر توفیق الهویرنلو

دکتر سعید عباسبندی

استاد مشاور:

دکتر میرمظفر معصومی

نگارنده:

علی اصغر حسین زاده

تابستان ۱۳۹۲

سپاسگزاری

سپاس و ستایش به پیشگاه **پروردگار جهان** که آنچه از علم و دانش دارم از اوست و آنچه هستم لطف اوست.

بر خود واجب می دانم طبق فرموده معصوم که: «من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق» بر دستان پر مهر پدر و مادرم بوسه زنم و از همسر گرانقدرم تشکر و قدردانی نمایم چرا که در طول دوران تحصیل، همواره پشتیبان و مشوقم بودند و در این راه مرا یاری نمودند.

از استاد فرزانه و معلم عزیز، **پروفسور دکتر فرهاد حسین زاده لطفی** که همچون پدری دلسوز، فراتر از وظایف معلمی طی دوران تحصیلاتم مرا راهنمایی و یاری نمودند، از صمیم قلب کمال تشکر و قدردانی را ابراز داشته و از خداوند بزرگ توفیق روز افزون ایشان را مسئلت می کنم.

از زحمات ارزنده و صبورانه و راهنمایی های بی شائبه ی اساتید دلسوز و بزرگوارم، جناب آقای **پروفسور دکتر توفیق الهویرنلو**، **پروفسور دکتر سعید عباسبندی** و دکتر میر مظفر معصومی کمال تشکر و سپاس گذاری می نمایم.

همچنین از داوران رساله، جناب آقای دکتر محسن رستمی، جناب آقای دکتر محمد علی فریبرزی عراقی، و سرکار خانم دکتر افشار تشکر می کنم.

علی اصغر حسین زاده

تقدیم به

دستان پر مهر پدرم

احساس پاک مادرم

قلب مهربان همسرم

آینده درخشان پسرم

فهـرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل چهارم : یک روش جدید برای حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی

فصل پنجم : نتیجه گیری وپیشنهادات

چکیده

در این رساله، ابتدا دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای و دستگاه معادلات خطی تمام فازی مورد بررسی قرار گرفته و برخی از روش های حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی به اختصار بیان می شود . سپس با تعریف مفهوم جدیدی به نام شکافت استاندارد بازه ای، روش جدیدی را برای حل دستگاههای خطی تمام بازه ای مطرح می کنیم که قادر است هر نوع جواب جبری دستگاه را در صورت وجود به دست آورد. در فصل آخر با کمک روش ارائه شده برای حل دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای، یک روش جدید ب رای حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی ارائه می دهیم و با پیاده کردن آن روش روی چند مثال این رساله را به پایان می رسانیم.

کلمات کلیدی: عدد بازه ای، حساب بازه ای، شکافت استاندارد بازه ای، دستگاه خطی تمام بازه ای، دستگاه خطی تمام فازی

فصل اول

کلیات

۱-۱ مقدمه

امروزه در دنیای واقعی اطراف ما بسیاری از تعاریف ومفاهیم در مدل بندی پدیده های مختلف فیزیکی نادقیق ، غیر قطعی و صلیقه ای هستند که می تواند ناشی از ضعف دانش و ابزار بشری در شناخت پدیده ها و یا اختلافات صلیقه ای در تعریف و تفصیر این پدیده ها باشد. از جمله این مدل های نادقیق، مدل‌های فازی است. نظریه مجموعه های فازی ابزاری مناسب برای صورت بندی و طراحی این نوع مدلها است . مدل های فازی که در چند سال اخیر، استفاده از آن در ریاضیات کاربردی، الگوریتمهای عددی و علوم مهندسی توسعه ی شگرفی داشته، این امکان را برای ما ایجاد می کند تا بتوانیم مدل هایی بسازیم که به لحاظ ساختار، مفهوم، بهره بری و همچنین نتیجه گیری بسیار نزدیک تر به مدل های طبیعی است . لذا شناخت، مطالعه و بررسی مدل های ریاضی فازی می تواند مفید باشد. از جمله این مدل های ریاضی فازی دستگاه معادلات خطی تمام فازی است. که کاربردی وسیع در مسائل مهندسی و علوم دیگر دارد. از این رو در این رساله حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی مورد بررسی قرار گرفته و روش جدیدی برای یافتن جواب این مدل ها بیان شده است.

۱-۲ بیان مساله

از جمله مسائل مهم ریاضیات که در بسیاری از علوم طبیعی، علوم مهندسی، علوم اقتصادی و علوم بهینه سازی همواره نقش مهمی در نتیجه گیری و ارزیابی دستگاه‌ها ایفا می کند، دستگاه معادلات خطی و غیر خطی است. لذا مطالعه این دستگاهها و یافتن جواب های آنها همواره مورد توجه ریاضیدانان بوده است. که منجر به ارائه روشهای زیادی برای حل اینگونه از دستگاهها شده است . اما اگر در دستگاه‌های کاربردی دستگاههای معادلات خطی،در ماتریس سمت راست یا بردار ضرایب (ویا هر دو) خود دارای ابهام باشند، آنگاه ما با یک دستگاه معادلات خطی فازی روبرو هستیم. دستگاههای معادلات خطی فازی به طور کلی به دو نوع دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی (فقط ماتریس سمت راست فازی) و دستگاه معادلات خطی تمام فازی(ماتریس سمت راست و ماتریس ضرایب فازی) تقسیم می شوند. در اینجا سوال این است که اولا جواب های فازی یک دستگاه معادلات خطی تمام فازی، در صورت وجود، چگونه بدست می آید . ثانینا چگونه می توان جواب های ضعیف تری را برای دستگاه هایی که دارای جواب دقیق فازی نیستند تعریف کرد.

۱-۳ اهمیت موضوع

بسیاری از مسائل کاربردی علوم مهندسی و اقتصادی به صورت دستگاهی از معادلات خطی مدل سازی می شوند. در صورتی که اطلاعات و داده های این مسائل به صورت نا دقیق و مبهم باشند می توان آنها را بصورت دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای و فازی مدل سازی کرد. که در آن ضرایب، پارامترها و مقادیر سمت راست مساله اعداد بازه ای یا فازی است. بنابراین ارائه ی راهکار مناسب برای حل چنین دستگاهی میتواند بسیار مفید و کاربردی می باشد.

۱-٤ تاریخچه

به طور کلی یافتن جواب های فازی کامل دستگاه معادلات خطی تمام فازی بسیار مشکل و پیچیده است، چرا که در واقع این نوع دستگاه های معادلات با دیدگاه α-برشی نوعی دستگاه های معادلات غیر خطی به شمار می روند .در این مورد ۲۰۰۹ ، باکلی[1] در [20] چند مجموعه جواب هم ارز را برای دستگاه معادلات تمام فازی مطرح کرد که در واقع به طور کلی روشهای یافتن جواب را برای این نوع دستگاه ها نشان می دهند ولی عملا غیر کاربردی و غیر قابل محاسبه هستند . همچنین او در این مقاله نوع دیگری از جواب را، با نام جواب کلاسیک، که حاصل از دیدگاه جبری برای دستگاه های تمام بازه ای، در مورد هر α-برش از دستگاه معادلات تمام فازی است، تعریف کرد و رابطه بین جواب ها را بررسی کرد . بعد از آن موزیولی[2] در [37] یک روش ساده با محاسبات بسیار زیاد را برای محاسبه دستگا ههای معادلات خطی تمام فازی پیشنهاد داد . که عملا فقط برای دستگا ههای معادلات کوچک قابل اجرا است . در ادامه دهقان [22] برا ی نوع خاصی دستگاه‌های معادلات تمام فازی روشی را برای یافتن جواب های خاص ارائه داد. در سال ۲۰۰۹ الهویرنلو و کیانی [15] نوع خاصی از جواب را برای دستگاه‌های معادلات خطی تمام فازی پیشنهاد دادند که البته دقت آن به لحاظ α-برشی قابل بحث نیست. بعد از آن الهویرنلو و میکائیلوند[16] با رویکردی پارامتری نسبت به دستگاه معادلات تمام فازی، روشی پارامتری برای یافتن جواب های پارامتری پیشنهاد دادند. واما یکی از روش های خوبی که در حال حاضر ارائه شده روش روش الهویرنلو و سلهشور[17] است که در آن با ارائه یک روش پارامتری، جواب های متقارن فازی برای یک دستگاه معادلات خطی تمام فازی حاصل می شود.

---

[1] Bukckely
[2] Muzzioli

۱-۵ نوع آوری

در این رساله، ابتدا ما با تعریف مفهوم جدیدی به نام شکافت بازه ای، یک دستگاه معادلات خطی تمام بازه‌ای را تبدیل به یک دستگاه م عادلات و نامعادلات غیر خطی می کنیم . سپس با یک مدل برنامه ریزی غیرخطی، جواب های دستگاه معادلات و نامعادلات غیر خطیدر صورت وجود بدست آمده و به کمک آن جواب جبری دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای محاسبه می شود . در ادامه روش فوق را برای محاسبه جوابهای فازی دستگاه معادلات تمام فازی گسترش می دهیم. برای این کار تکنیک فوق برای حل دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای، را برای محاسبه جواب های جبری دستگاههای ۰-برش و ۱-برش یک دستگاه معادلات خطی تمام فازی بکار می بریم و با محاسبه ای جواب های جبری در صورت وجود، برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی، جواب فازی ذوزنقه ای بدست می آوریم. و برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی، که ۱-برش آن ارای جواب جبری باشد ولی ۰-برش آن دارای جواب جبری نباشد، جواب های محیطی و محاطی فازی را محاسبه می کنیم.

۱-٦ تعاریف و اصطلاحات

تعریف ۱-۱ شکافت بازه ای نوعی شکافت برای بازه ها است که بازه را به صورت جمع جبری دو بازه‌ی دیگر تبدیل می کند.

تعریف ۱-۲ جواب محیطی فازی جوابی است که به ازای آن هر سطر ۰-برش سمت چپ دستگاه معادلات خطی تمام فازی زیر مجموعه ۰-برش سمت راست آن می شود.

تعریف ۱-۳ جواب محاطی فازی جوابی است که به ازای آن هر سطر ۰-برش سمت راست دستگاه معادلات خطی تمام فازی زیر مجموعه ۰-برش سمت چپ آن می شود.

۱- ۷ مروری بر فصول آینده

در فصل دوم مقدمات بازه ای و فازی بیان می شود و دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای و فازی مورد بررسی قرار می گیرد.

در فصل سوم یک روش جدید برای حل دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای معرفی می شود.

در فصل چهارم یک روش جدید برای حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی معرفی می شود. و این روش روی چند مثال بکار برده می شود.

در فصل پنجم نتیجه گیری و پیشنهاد رساله بیان می شود.

فصل دوم

مقدماتی بر
دستگاه معادلات خطی
تمام بازه ای و فازی

۲-۱ مقدمه

حل دستگاه معادلات خطی و غیر خطی با توجه به کاربرد آن در مسائل مهندسی، اقتصاد وعلوم مختلف، همواره ابزاری مناسب در دست محققین و دانشمندان است . از طرفی با توجه به وجود ابهام در شناخت و تفصیر پدیده های طبیعی، مدل های ریاضی دارای نوعی عدم قطعیت در قالب بندی و کاربرد هستند . از جمله این مدل های نادقیق، دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای و دستگاه معادلات خطی تمام فازی است که در ساختار خود دارای معلومات و مجهولات بازه ای و فازی است. در این فصل، ما به مطالعه و بررسی درتگاه معادلات خطی تمام بازه ای و دستگاه معادلات خطی تمام فازی می پردازیم . سپس چند رویکرد شاخص را برای حل دستگاههای معادلات خطی تمام فازی به اختصار بیان کرده و نقات ضعف و قدرت آنها را بررسی می کنیم.

۲-۲ دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای

تعریف ۲-۱: یک عدد بازه ای[۳] را با نماد $[x]$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[x] = \{\, t \in \mathbb{R} \;:\; \underline{x} \leq t \leq \overline{x} \,\} := [\, \underline{x}, \overline{x}],$$

که $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$ و $\underline{x} \leq \overline{x}$.مجموعه ی همه ی اعداد بازه ای را با $\mathbb{I}$ نشان می دهیم.

تعریف ۲-۲: برای هر $[y], [x] \in \mathbb{I}$ داریم:

$$[x] = [y] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x} = \underline{y} \;\;\&\;\; \overline{x} = \overline{y}.$$

تعریف ۲-۳: هرگاه $[x]$ و $[y]$ دو عدد بازه ای دلخواه باشند، در این صورت اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به صورت زیر تعریف می شوند:

[۳] Interval number

$$
\begin{cases}
[x]+[y]=\{x+y\ :\ \ x\in[x],y\in[y]\}=\left[\underline{x}+\underline{y},\overline{x}+\overline{y}\right],\\
[x]-[y]=\{x-y\ :\ \ x\in[x],y\in[y]\}\ =\left[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}\right],\\
[x]\cdot[y]=\{x\cdot y\ :\ \ x\in[x],y\in[y]\}\\
\qquad\quad =\left[\min\left\{\underline{x}\cdot\underline{y},\underline{x}\cdot\overline{y},\overline{x}\cdot\underline{y},\overline{x}\cdot\overline{y}\right\},\max\left\{\underline{x}\cdot\underline{y},\underline{x}\cdot\overline{y},\overline{x}\cdot\underline{y},\overline{x}\cdot\overline{y}\right\}\right]\\
\frac{[x]}{[y]}=\left\{\frac{x}{y}:\ \ x\in[x],y\in[y]\right\},\quad \text{هرگاه}\ \ 0\notin[y], \qquad\qquad ,\\
\quad =\left[\min\left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}},\frac{\underline{x}}{\overline{y}},\frac{\overline{x}}{\underline{y}},\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\},\max\left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}},\frac{\underline{x}}{\overline{y}},\frac{\overline{x}}{\underline{y}},\frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\}\right],\quad \text{هرگاه}\ \ 0\notin[y]\\
\lambda\cdot[x]=\{\lambda x\ :\ \ x\in[x]\}=\begin{cases}\left[\lambda\underline{x},\lambda\overline{x}\right], & \text{اگر}\ \lambda\geq 0,\\ \left[\lambda\overline{x},\lambda\underline{x}\right], & \text{اگر}\ \lambda<0.\end{cases},
\end{cases}
$$

لم ۲–۱: با توجه به تعریف ۱–۲–۱ نتیجه می گیریم که عضو خنثی جمعی برابر است با $[0]=[0,0]$ و عضو خنثی ضربی برابر است با $[1]=[1,1]$.

لم ۲–۲: دستگاه های $(\mathbb{I},+)$ و $(\mathbb{I},\cdot)$ تشکیل گروه نمی دهند، چون بیشتر اعداد بازه ای دلخواه دارای عضو معکوس نسبت به اعمال جمع و ضرب نیسرتند.

تعریف ۲–٤: پهنای[٤] عدد بازه ای $[x]$ را با نماد $W[x]$ نشان می دهیم و برابر است با:

$$W[x]=\overline{x}-\underline{x}.$$

تعریف ۲–٥: بردار $[\boldsymbol{X}]=([x_1\ ],[x_2\ ],\cdots,[x_n\ ])^T$ را یک بردار بازه ای[٥] می نامیم هرگاه:

$$\forall i=1,2,\cdots,n:\qquad [x_i]\in\mathbb{I}.$$

مجموعه ی همه ی بردارهای بازه ای را با $\mathbb{I}^n$ نشان می دهیم. واضح است که $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{I}^n$.

[٤] Width
[٥] Interval vector

تعریف ۲–٦: فرض کنید

$$[\boldsymbol{Y}] = ([y_1\ ],[y_2\ ],\cdots,[y_n\ ]\ )^T \quad \text{و} \quad [\boldsymbol{X}] = ([x_1\ ],[x_2\ ],\cdots,[x_n\ ]\ )^T$$

دو بردار بازه ای دلخواه باشند، در این صورت:

$$[\boldsymbol{X}] = [\boldsymbol{Y}] \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1,2,\cdots,n,\ :\ [x_i] = [y_i].$$

تعریف ۲–۷: فرض کنید

$$[\boldsymbol{Y}] = ([y_1\ ],[y_2\ ],\cdots,[y_n\ ]\ )^T \quad \text{و} \quad [\boldsymbol{X}] = ([x_1\ ],[x_2\ ],\cdots,[x_n\ ]\ )^T$$

دو بردار بازه ای دلخواه باشند، در این صورت:

$$[\boldsymbol{X}] \subseteq [\boldsymbol{Y}] \quad \Leftrightarrow\ \sum_{i=1}^{n}\left[\underline{x}_i,\overline{x}_i\right]\ \subseteq\ \sum_{i=1}^{n}\left[\underline{y}_i,\overline{y}_i\right]\ .$$

تعریف ۲–۸: ماتریس $[\boldsymbol{A}] = \left([a_{ij}\ ]\right)_{m\times n}$ را یک ماتریس بازه ای[6] نامیم هرگاه:

$$\forall i = 1,2,\cdots,m\ \ \&\ \forall j = 1,2,\cdots,n,\ \ :\ \ [a_{ij}\ ] = \left[\underline{a}_{ij}\ ,\overline{a}_{ij}\ \right] \in \mathbb{I}.$$

در این صورت

$$[\boldsymbol{A}] = \left[\underline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{A}}\right] = \left\{\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}\ \ :\ \ \underline{\boldsymbol{A}} \le \boldsymbol{A} \le \overline{\boldsymbol{A}}\right\},$$

که در آن: $\underline{\boldsymbol{A}} = \left(\underline{a}_{ij}\ \right)_{m\times n}$ و $\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\overline{a}_{ij}\ \right)_{m\times n}$.

مجموعه ی همه ی ماتریس های بازه ای از اندازه ی $m \times n$ را با نماد $\mathbb{I}^{m\times n}$ نشان می دهیم. واضح است که $\mathbb{R}^{m\times n} \subset \mathbb{I}^{\mathrm{m\times n}}$.

---

[6] Interval matrix

تعریف ۲-۹: دستگاه $n \times n$ زیر را یک دستگاه خطی تمام بازه ای[۷] می نامیم.

$$\begin{cases} \left[\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}\right] \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] + \cdots + \left[\underline{a_{1n}}, \overline{a_{1n}}\right] \left[\underline{x_n}, \overline{x_n}\right] = \left[\underline{b_1}, \overline{b_1}\right] \\ \left[\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}\right] \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] + \cdots + \left[\underline{a_{2n}}, \overline{a_{2n}}\right] \left[\underline{x_n}, \overline{x_n}\right] = \left[\underline{b_2}, \overline{b_2}\right] \\ \vdots \\ \left[\underline{a_{n1}}, \overline{a_{n1}}\right] \left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right] + \cdots + \left[\underline{a_{nn}}, \overline{a_{nn}}\right] \left[\underline{x_n}, \overline{x_n}\right] = \left[\underline{b_n}, \overline{b_n}\right] \end{cases}.$$

که در آن

$$\left[\underline{b_i}, \overline{b_i}\right], \left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right], \left[\underline{x_j}, \overline{x_j}\right] \in \mathbb{I}, \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

فرم ماتریسی دستگاه را به صورت

$$[\boldsymbol{A}][\boldsymbol{X}] = [\boldsymbol{b}],$$

نشان می دهیم، که در آن

$$[\boldsymbol{b}] = \left(\left[\underline{b_1}, \overline{b_1}\right], \cdots, \left[\underline{b_n}, \overline{b_n}\right]\right)^T \ ، [\boldsymbol{X}] = \left(\left[\underline{x_1}, \overline{x_1}\right], \cdots, \left[\underline{x_n}, \overline{x_n}\right]\right)^T,$$

و

$$[A] = \begin{bmatrix} \left[\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}\right] & \cdots & \left[\underline{a_{1n}}, \overline{a_{1n}}\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left[\underline{a_{n1}}, \overline{a_{n1}}\right] & \cdots & \left[\underline{a_{nn}}, \overline{a_{nn}}\right] \end{bmatrix}.$$

تعریف ۲-۱۰: برای دستگاه معادلات تمام بازه ای (۱-۵) می توان مجموعه جواب های زیر را تعریف کرد:

- **مجموعه جواب متحده[۸]:**

$$\sum\nolimits_{\exists\exists}([\boldsymbol{A}], [\boldsymbol{b}]) = \sum\nolimits_{\exists\exists} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ (\exists \boldsymbol{A} \in [\boldsymbol{A}])\ (\exists \boldsymbol{b} \in [\boldsymbol{b}])\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b})\},$$

[۷] Fully interval linear system
[۸] United solution set

- **مجموعه جواب تحمل پذیر** [۹]:

$$\sum_{\forall\exists}([\boldsymbol{A}],[\boldsymbol{b}]) = \sum_{\forall\exists} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ (\forall \boldsymbol{A} \in [\boldsymbol{A}])\ (\exists \boldsymbol{b} \in [\boldsymbol{b}])\ (\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b})\},$$

- **مجموعه جواب کنترل پذیر** [۱۰]:

$$\sum_{\exists\forall}([\boldsymbol{A}],[\boldsymbol{b}]) = \sum_{\exists\forall} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ (\exists \boldsymbol{A} \in [\boldsymbol{A}])\ (\forall \boldsymbol{b} \in [\boldsymbol{b}])\ (\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b})\}.$$

تعریف ۲-۱۱: بردار بازه ای $[X] = ([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])^T$ را جواب جبری دستگاه (۱-۵) گوییم هر گاه:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right] \otimes \left[\underline{x_j}, \overline{x_j}\right] = \left[\underline{b_i}, \overline{b_i}\right], \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

نکته ۲-۱ : دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای اولین بار توسط اوتلی [۱۱] و پراگر [۱۲] در سال ۱۹٦٤ ، در علوم ریاضی مطرح شد [۳۵]. آلفلد [۱۳] و مایر [۱٤] [۵] با مطالعه دستگاه های خطی تمام بازه ای با ماتریس ضرایب متقارن، به کمک روش چولسکی [۱۵] جواب های کرانداری برای این دستگاهها بدست آوردند . همچنین آنها در سال ۲۰۰۰، روش های مختلفی را برای حل دستگاه های خطی بازه ای مطرح کردند [۷]. در سال ۱۹۹۹ مرکوو [۱٦] [۳۱] بعضی از الگوریتم های تکراری را برای حل دستگاه های خطی بازه ای مطرح کرد. در سال ۲۰۰٤ پولیاک [۱۷] و نازین [۱۸] [۳۷] با استفاده از مساله برنامه ریزی خطی، روشی را برای بعضی از مدل های خاص دستگاه های خطی بازه ای مطرح کردند، که در آن یک جواب بازه ای بهینه برای این دستگاهها حاصل می شود. در سال ۲۰۰۹ ، مایر [۱۹] [۳۲] روش های مستقیم حل دستگا ههای بازه ای را

---

[۹] Tolerable solution set
[۱۰] Controllable solution set
[۱۱] Oetteli
[۱۲] Prager
[۱۳] Alefeld
[۱٤] Mayer
[۱۵] Cholesky
[۱٦] Markov
[۱۷] Polyak
[۱۸] Nazin
[۱۹] Mayer

بطور مختصر مطرح کرده و نشان داد که چگونه می شود پوسته جواب را برای یک دستگاه بازه ای محاسبه کرد. در همان سال گرالوف[۲۰] [۲۵] روش حذفی گاوس بازه ای را برای حل دستگاه های خطی تمام بازه ای بسط داد. همچنین درآ ن سال سواستجانوب[۲۱] [۳۸] با تعریف صفر کسترش یافته، روش گاوس را برای حل دستگاههای تمام بازه ای بکار برد . روش های دیگری نیز در این زمینه وجود دارد که می تواند در [۳۳,۳٦,۳۸] یافت شود.

۲-۳ دستگاه معادلات خطی تمام فازی

۲-۳-۱ مفاهیم فازی

تعریف ۲-۱۲: هرگاه X مجموعه ای ناتهی باشد در این صورت هر زیر مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X توسط تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}: X \longrightarrow [0,1]$ مشخص می شوند که در آن برای هر x در X مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ میزان تعلق x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ را نشان می دهد.

تعریف ۲-۱۳: دو مجموعه $\tilde{A}$و$\tilde{\mathrm{B}}$ را مساوی گویند هرگاه : $\forall x\ (x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x))$ و می نویسند $\tilde{A} = \tilde{\mathrm{B}}$.

تعریف ۲-۱٤: تکیه گاه[۲۲] مجموعه فازی $\tilde{A}$ را به صورت $Supp(\tilde{A})$ یا $S(\tilde{A})$ نشان می دهند که عبارت است از: $\mathrm{Supp}(\tilde{A}) = \overline{\{x \in X \ :\ \ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}$ که در آن $\bar{S}$ بستار مجموعه S است.

[۲۰] Garloff
[۲۱] Sevastjanov
[۲۲] Support

تعریف ۲–۱۵: برای عدد فازی $\tilde{A}$ به ازای هر $\alpha \in (0,1]$ ، α ـ برش به صورت

$[\tilde{A}]_\alpha = \{x \in X \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \quad \forall \alpha \in (0,1],$ تعریف می شود . و برای $\alpha = 0$ نیز

تعریف می کنیم $[\tilde{A}]_0 = \mathrm{supp}(\tilde{A}) = \overline{\{x \in X \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}$.

تعریف ۲–۱٦ (اصل گسترش): فرض کنید f یک نگاشت از X به مجموعه Y باشد، یعنی

$y = f(x_1, .., x_n)$ ، حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ به عنوان یک زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\widetilde{\mathrm{B}} = \mathrm{f}(\widetilde{\mathrm{A}}_1, \dots, \widetilde{\mathrm{A}}_\mathrm{n}) = \{(\mathrm{y}, \mu_{\widetilde{\mathrm{B}}}(\mathrm{y}))| \in \mathrm{X}\} \qquad (۲–۱)$$

که در آن داریم:

$$\mu_{\widetilde{\mathrm{B}}}(\mathrm{y}) = \begin{cases} \sup\limits_{\substack{(\mathrm{x}_1,..,\mathrm{x}_\mathrm{n}) \\ \mathrm{y}=\mathrm{f}(\mathrm{x}_1,..,\mathrm{x}_\mathrm{n})}} (\min\{\mu_{\widetilde{\mathrm{A}}_1}(\mathrm{x}_1), \dots, \mu_{\widetilde{\mathrm{A}}_\mathrm{n}}(\mathrm{x}_\mathrm{n})\}) & \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}) \neq \emptyset \\ 0 & \mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y}) = \emptyset \end{cases} . \qquad (۲–۲)$$

تعریف ۲–۱۷ (اعداد فازی): یک عدد فازی $\widetilde{\mathrm{M}}$ یک مجموعه فازی نرمال محدب از اعداد حقیقی است که:

الف) تنها یک $\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $\mu_{\widetilde{\mathrm{M}}}(\mathrm{x}_0) = 1$ و به مقدار x_0 مقدارمیانه ای، $\widetilde{\mathrm{M}}$ گفته می‌شود.

ب) تابع عضویت $\mu_{\widetilde{\mathrm{M}}}(\mathrm{x})$ به صورت قطعه ای پیوسته باشد(در یک بازه $\mu_{\widetilde{M}}$ پیوسته باشد).

تعریف ۲–۱۸: اگر یک عدد فازی مثل $\tilde{\mathrm{M}}$ شرط زیر را دارا باشد آن را یک عدد فازی مسطح می نامیم

هرگاه m_1 و m_2 اعداد حقیقی که $m_1 < m_2$ باشد آنگاه برای هر x متعلق به بازه $[m_1, m_2]$،

$\mu_{\tilde{\mathrm{M}}}(\mathrm{x}) = 1$ باشد .

تفاوت بین اعداد فازی و اعداد فازی مسطح در این است که عنصری (عناصری) که مقدار عضویت به ازای آن (آنها) یک باشد بوسیله یک نقطه یا یک بازه داده شده باشد.

تعریف ۲–۱۹ (**فرم پارامتری عدد فازی**)**:** یک عدد فازی $\tilde{u}$ به فرم پارامتری، یک زوج مرتب $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$، از توابع $\overline{u}(r)$ و $\underline{u}(r)$، $0 \leq r \leq 1$ است، که در شرایط زیر صدق کند:

۱) $\underline{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و صعودی(غیرنزولی) باشد،
۲) $\overline{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و نزولی (غیرصعودی)باشد،
۳) $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r),\ 0 \leq r \leq 1$.

تعریف ۲–۲۰: دو عدد فازی دلخواه $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ با هم برابرند و می نویسیم $\tilde{u} = \tilde{v}$، هرگاه برای هر $r \in [0,1]$، داشته باشیم $[\tilde{u}]_r = [\tilde{v}]_r$

تعریف ۲–۲۱: فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعدد فازی دلخواهی باشند و $*$ یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد . همچنین فرض کنید $\tilde{u} * \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از اصل گسترش، می توان تابع عضویت عدد فازی $\tilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{u}+\tilde{v}}(t) = \sup_{x+y=t}\{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u}-\tilde{v}}(t) = sup_{x-y=t}\{min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u}\times\tilde{v}}(t) = \sup_{x\times y=t}\{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u}/\tilde{v}}(t) = \sup_{x/y=t}\{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & y \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد غیرصفر دلخواه باشد، آنگاه ضرب اسکالر $\lambda \cdot \tilde{u}$ نیز یک عدد فازی است که تابع عضویت آن، براساس اصل گسترش، به صورت زیر می باشد:

$$\mu_{\lambda\cdot\tilde{u}}(t) = \sup_{\lambda\cdot x=t}\{\mu_{\tilde{u}}(x)\} = \mu_{\tilde{u}}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (۲-٤)$$

تعریف ۲-۲۲: فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعدد فازی دلخواهی باشند و $*$ یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد. همچنین فرض کنید $\tilde{u} * \tilde{v} = \widetilde{w} \in \mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از مفهوم $\alpha -$ برش ها و استفاده از حساب اعداد بازه ای، می توان برای هر $\alpha \in [0, 1]$، α–برش های عدد فازی $\widetilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$[\widetilde{w}]_\alpha = [\tilde{u}]_\alpha * [\tilde{v}]_\alpha = \{x * y \ : \ x \in [\tilde{u}]_\alpha, y \in [\tilde{v}]_\alpha\}.$$

.

بنابراین در حالت های جداگانه با استفاده ار حساب اعداد بازه ای، برای هر $\alpha \in [0, 1]$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} [\tilde{u}+\tilde{v}]_\alpha = \left[\underline{u}(\alpha)+\underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha)+\overline{v}(\alpha)\right], \\ [\tilde{u}-\tilde{v}]_\alpha = \left[\underline{u}(\alpha)-\overline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha)-\underline{v}(\alpha)\right], \\ [\tilde{u}\times\tilde{v}]_\alpha = [\min\{\underline{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \underline{u}(\alpha)\overline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\overline{v}(\alpha)\}, \\ \qquad \max\{\underline{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \underline{u}(\alpha)\overline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \overline{u}(\alpha)\overline{v}(\alpha)\}], \\ \left[\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}}\right]_\alpha = [\min\left\{\frac{\underline{u}(\alpha)}{\underline{v}(\alpha)}, \frac{\underline{u}(\alpha)}{\overline{v}(\alpha)}, \frac{\overline{u}(\alpha)}{\underline{v}(\alpha)}, \frac{\overline{u}(\alpha)}{\overline{v}(\alpha)}\right\}, max\left\{\frac{\underline{u}(\alpha)}{\underline{v}(\alpha)}, \frac{\underline{u}(\alpha)}{\overline{v}(\alpha)}, \frac{\overline{u}(\alpha)}{\underline{v}(\alpha)}, \frac{\overline{u}(\alpha)}{\overline{v}(\alpha)}\right\}], 0 \notin [\tilde{v}]_\alpha \\ \left[\lambda\cdot\tilde{u}\right]_\alpha = \lambda\cdot[\tilde{u}]_\alpha = \begin{cases} \left[\lambda\underline{u}(\alpha), \lambda\overline{u}(\alpha)\right], & \lambda \geq 0, \\ \left[\lambda\overline{u}(\alpha), \lambda\underline{u}(\alpha)\ \right], & \lambda < 0, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \forall\alpha \in [0,1]. \end{cases} \qquad (۲-٥)$$

تعریف ۲-۲۳: اگرعدد فازی $\tilde{A}$دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x \geq m \end{cases} \qquad (۲-٦)$$

که درآن L و R توابع غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0,1]$ و $L(0) = R(0) = 1$ ، آنگاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ نشان دهید. m رامقدار نمایی یامیانه و α و β رابه ترتیب پهنای چپ و پهنای راست می نامند.

تعریف ۲-۲۴: اگر $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ و $\tilde{B} = (n, \delta, \gamma)$ اعداد فازی LR بوده و r یک اسکالر باشد،آنگاه اعمال محاسباتی ضرب اسکالر، جمع، تفریق و ضرب ، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} r\tilde{A} = \begin{cases} (rm, r\alpha, r\beta) & r > 0 \\ (rm, -r\beta, -r\alpha) & r < 0 \end{cases} \\ \tilde{A} + \tilde{B} = (m + n, \alpha + \delta, \beta + \gamma) \\ \tilde{A} - \tilde{B} = (m - n, \alpha + \gamma, \beta + \delta) \\ \tilde{A} \times \tilde{B} \cong \begin{cases} (mn, n\alpha + m\delta, n\beta + m\gamma) & S(\tilde{A}) > 0, S(\tilde{B}) > 0 \\ (mn, m\delta - n\alpha, m\gamma - n\beta) & S(\tilde{A}) > 0, S(\tilde{B}) < 0 \\ (mn, -m\gamma - n\beta, -m\delta - n\alpha) & S(\tilde{A}) < 0, S(\tilde{B}) < 0 \end{cases} \end{cases} \tag{۲-۷}$$

تعریف ۲-۲۵: عدد فازی ذوزنقه ای نوعی عدد فازی LR با خاصیت $L(x) = R(x) = \max\{0,1-x\}$ است که به صورت چهارتایی $\tilde{u} = (a, b, c, d)$ نمایش داده می شود که دارای تابع عضویتی به صورت زیرمی باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0, & a < x, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0. & d < x, \end{cases} \tag{۲-۸}$$

و همچنین عدد فازی مثلثی نوعی عدد فازی LR با خاصیت $L(x) = R(x) = max\{0,1-x\}$ است که به صورت سه تایی $\tilde{u} = (a, b, c)$ نمایش داده می شود که دارای تابع عضویتی به صورت زیر می باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x)=\begin{cases}0, & a<x,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x=b,\\ \frac{c-x}{c-b}, & b\le x\le c,\\ 0. & c<x,\end{cases} \qquad (۹-۲)$$

لم ۲-۳: با توجه به تعریف α-برش یک عدد فازی، براحتی می توان α -برش های عدد فازی مثلثی $\tilde{u}=(a,b,c)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{u}]_\alpha=\left[\underline{u}(\alpha),\overline{u}(\alpha)\right]=[a+(b-a)\alpha,c-(c-b)\alpha],\quad \forall\alpha\in[0,1].$$

۲-۳-۲ دستگاه معادلات خطی تمام فازی

تعریف ۲-۲۶: دستگاه معادلات خطی $n\times n$

$$\begin{cases}\tilde{a}_{11}\,\tilde{x}_1+\tilde{a}_{12}\,\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{a}_{1n}\,\tilde{x}_n=\ \tilde{b}_1,\\ \tilde{a}_{21}\,\tilde{x}_1+\tilde{a}_{22}\,\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{a}_{2n}\,\tilde{x}_n=\ \tilde{b}_1,\\ \qquad\qquad\vdots\\ \tilde{a}_{n1}\,\tilde{x}_1+\tilde{a}_{n2}\,\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{a}_{nn}\,\tilde{x}_n=\ \tilde{b}_n,\end{cases} \qquad (۱۰-۲)$$

که در آن ضرایب $1\le i,j\le n$ $\tilde{a}_{ij}$ ومقادیر سمت راست $1\le i\le n$,$\tilde{b}_i$ ، و $1\le j\le n$,$\tilde{x}_j$ همگی اعداد فازی هستند، را یک دستگاه معادلات خطی تمام فازی می نامیم.

تعریف ۲-۲۷: بردار فازی $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)^T$ را که در آن $\tilde{x}_i=\left[\underline{x_i}(r),\overline{x_i}(r)\right]$ $0\le r\le 1,\ 1\le i\le n$, جواب فازی کامل مساله (۳-۷-۱) گوییم هر گاه

$$\begin{cases}\underline{\sum_{j=1}^n a_{ij}\,(r)x_i(r)}=\sum_{j=1}^n \underline{a_{ij}\,(r)x_i(r)}=\underline{b_i}(r)\\ \overline{\sum_{j=1}^n a_{ij}\,(r)x_i(r)}=\sum_{j=1}^n \overline{a_{ij}\,(r)x_i(r)}=\overline{b_i}(r)\end{cases}\quad 0\le r\le 1, 1\le i\le n. \qquad (۱۱-۲)$$

نکته ۲–۲: به طور کلی یافتن جواب های فازی کامل دستگاه معادلات تمام فازی (تعریف (۳–۷–۲)) بسیار مشکل و پیچیده است، چرا که در واقع این نوع دستگاه های معادلات با دیدگاه α–برشی نوعی دستگاه های معادلات غیر خطی به شمار می روند.در این مورد۲۰۰۹ ، باکلی[۲۳] در [20] چند مجموعه جواب هم ارز را برای دستگاه معادلات تمام فازی مطرح کرد که در واقع به طور کلی روشهای یافتن جواب را برای این نوع دستگاه ها نشان می دهند ولی عملا غیر کاربردی و غیر قابل محاسبه هستند . از جمله این جواب ها، مجموعه جواب زیر است:

$$\tilde{X}(x) = sup\{\alpha | \alpha \in [0,1], x \in \Omega(\alpha)\} \qquad (۲–۱۲)$$

در اینجا:

$$\Omega(\alpha) = \Big\{x | x \in \mathbb{R}^n, \Big(\exists A = [a_{ij}]_{n\times n}, a_{ij} \in (\tilde{a}_{ij})_\alpha\Big), \Big(\exists b = [b_k]_{n\times 1}, b_i \in (\tilde{b}_k)_\alpha\Big), (\forall (i,j,k) \in \{1,2,\dots,n\}^3), Ax = b\Big\}. \qquad (۲–۱۳)$$

توجه کنید که مجموعه جواب فوق یک دیدگاه کلی نسبت به تمام جواب های فازی، برای دستگاههای معادلات خطی تمام فازی به ما می دهد. در واقع این نوع نگرش حاصل از تعریف مجموعه جواب متحده برای دستگاه های تمام بازه ای، در مورد هر α–برش از دستگاه معادلات تمام فازی است. باکلی در [20] نوع دیگری از جواب را، با نام جواب کلاسیک، که حاصل از دیدگاه جبری برای دستگاه های تمام بازه ای، در مورد هر α–برش از دستگاه معادلات تمام فازی است، بصورت زیر تعریف می کند:

$$\Big\{\tilde{X} | \textstyle\sum_{j=1}^{n} \Big[\underline{a_{ij}}(r), \overline{a_{ij}}(r)\Big] \otimes \Big[\underline{x_j}(r), \overline{x_j}(r)\Big] = \Big[\underline{b_i}(r), \overline{b_i}(r)\Big], 0 \le r \le 1, 1 \le i \le n\Big\} \qquad (۲–۱٤)$$

توجه کنید که اعمال حسابی ضرب وجمع فوق همان اعمال حسابی بین بازه ها است.

همچنین باکلی در [20] ثابت کرد که جواب ها ی کلاسیک زیر مجموعه جواب های (۳–۳) هستند. در واقع برای دستگاه های معادلات تمام فازی، جواب های کلاسیک نسبت به دیگر جواب های مطرح شده، بهتر و راحتر قابل محاسبه اند چرا که برای محاسبه آنها می توان از محاسبات بازه ای تا حدی کمک

---

[۲۳] Bukckely

گرفت. البته ۲۰۰۹ ، برینجس[24] نشان داد که برای برخی از دستگاههای معادلات تمام فازی مثلثی، جواب کلاسیک وجود ندارد .[43] در مجموع روش های ارائه شده برای برخی از دستگاه‌های معادلات خطی تمام فازی خاص، با شرایط خاص، معرفی شده و معتبر هستند و عموما انواع خاصی از جواب ها را برای این دستگاه‌ها بدست می آورند. با وجود مضایای مهمی که با استفاده از این مقالات بدست آمده، اما چند مساله مهم هنوز در مورد این دستگاهها حل نشده است:

۱) جواب های غیر کلاسیک، چگونه محاسبه می شوند.
۲) جواب های غیر کلاسیک، چه تفسیر مناسبی در دستگاه دارند . و در واقع این جواب ها چگونه در دستگاه صدق می کنند.
۳) میزان افزایش طول پهنای تکیه گاه جواب چقدر است وبا توجه به تساوی سمت چپ و راست دستگاه، این میزان افزایش چگونه قابل تفسیر است.
٤) چگونه و با چه تفسیری می توان با توجه به مبهم بودن دستگاه، شرایط عدم وجود جواب(غیر قابل حل بودن دستگاه) را بیان کرد.
۵) با توجه به ابهام دستگاه، تفسیر خطای جواب های تقریبی چگونه خواهد بود.

۲-۳-۳ بررسی چند روش برای یافتن جواب های دستگاه معادلات خطی تمام فازی

۲-۳-۳-۱ روش موزیولی[25] [37]

در این روش دستگاه معادلات خطی تمام فازی را با فرض اینکه تمام پارامترها و متغییرها اعداد فازی مثلثی هستند در نظر می گیریم . سپس دستگاه زیر را برای یافتن $\left[(\underline{x_j})_\alpha, (\overline{x_j})_\alpha\right]$، با ضرایب و مقاد یر سمت راست دستگاه تشکیل می دهیم.

$$\sum_{j=1}^{n}\left[(\underline{a_{ij}})_\alpha, (\overline{a_{ij}})_\alpha\right]x_j = \left[(\underline{b_i})_\alpha, (\overline{b_i})_\alpha\right] \quad \alpha \in [0,1],\ \ 1 \le i \le n \qquad (۲-۱۵)$$

---

[24] Briggs
[25] Muzzioli

حال با توجه به تعریف $[p,q] = p + (q-p)\lambda \;\;,\;\; \lambda \in [0,1]$ برای بازه ها ، دستگاه (۲-۱۵) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\underline{a_{ij}}\right)_{\alpha} + \left(\left(\overline{a_{ij}}\right)_{\alpha} - \left(\underline{a_{ij}}\right)_{\alpha}\right)\lambda_{ij}\right]x_j = \left[\left(\underline{b_i}\right)_{\alpha} + \left(\left(\overline{b_i}\right)_{\alpha} - \left(\underline{b_i}\right)_{\alpha}\right)\delta_i\right] \quad \delta_i,\lambda_{ij} \in \{0,1\} \;,\alpha \in [0,1] \;\;,1 \le i \le n \qquad (۲-۱۶)$$

اگر تمام ماتریسهای $(A)_0$ نامنفرد باشند یعنی $det((A)_0) \neq 0$. آنگاه دستگاه (۲-۱۶) را حل کرده و مقادیر $x_j \;,\; 1 \le j \le n$ را بر اساس $\delta_i,\lambda_{ij} \;,\alpha \;,\; 1 \le i,j \le n$ بدست می آوریم. سپس برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مقادیر تکیه گاه و ارتفاع جواب یعنی برای محاسبه ۱-برش و ۰-برش از $x_j \;,\; 1 \le j \le n$، ابتدا در حالت‌های (۱) با فرض های $\alpha = 0$ و $\lambda_{ij} = 0 \;,\; 1 \le i,j \le n$ و $\lambda_{ij} = 1$ و $\delta_i = 0$ و $\delta_i = 1$ مقادیر , $\left[\left(\overline{x_j}\right)_0, \left(\underline{x_j}\right)_0\right]$ $1 \le j \le n$ را محاسبه و سپس در حالتهای (۲) با فرض های $\alpha = 1$ و $\lambda_{ij} = 0 \;,\; 1 \le i,j \le n$ و $\lambda_{ij} = 1$ و $\delta_i = 0$ و $\delta_i = 1$ مقادیر , $\left[\left(\overline{x_j}\right)_1, \left(\underline{x_j}\right)_1\right]$ $1 \le j \le n$ را محاسبه می کنیم . البته برای این کار باید $2^{2(n+1)}$ دستگاه را حل کنیم، که این خود جزء ضعف های روش است . توجه کنید که در واقع این روش نوعی جواب های کلاسیک را برای یک دستگاه معادلات تمام فازی بدست می آورد، چرا که با اختصاص ۰ و۱ به δ_i,λ_{ij} ها در ۱-برش و ۰-برش دستگاه (۲-۱۶) در واقع اعمال محاسباتی بازه ها انجام می شود.

۲-۳-۳ روش دهقان *[22]*

دهقان و همکاران در روش خود دستگاه های خطی تمام فازی به فرم

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b} \qquad (۲-۱۷)$$

در نظر گرفتند که در آن تمام درآیه های $\tilde{A}$ و$\tilde{b}$ همگی از یک نوع اعداد فازی LR هستند. در این روش ابتدا برای دستگاه (۲-۱۷) $\tilde{X} = (x,y,z)$ جواب فازی مثبت($x - y \ge 0$) تعریف می شود که از نظر ضرب جبری اعداد LR در دستگاه صدق کند و تابع عضویت آن از همان نوع LR درآیه های $\tilde{A}$ و$\tilde{b}$ در

نظر گرفته شود. حال با فرض اینکه تمام درآیه های $\tilde{A}$ مثبت و فرم کلی آن به صورت $\tilde{A}=(A,M,N)$ بوده و $\tilde{b}=(b,g,h)$ باشد، با توجه به ضرب تقریبی بین اعداد LR داریم:

$$\tilde{A}\otimes\tilde{X}=\tilde{b}\Rightarrow\begin{cases}Ax=b\\Ay+Mx=g\\Az+Nx=h\end{cases}\qquad(۱۸-۲)$$

برای حل دستگاه فوق ابتدا باید معادله $Ax=b$ را حل کنیم که در واقعه معادله ۱-برش دستگاه است. با فرض معکوس پذیر بودن ماتریس A ، جواب فازی مثبت دستگاه به صورت زیر حاصل می شود:

$$\tilde{X}=(A^{-1}b,A^{-1}g-A^{-1}Mx,A^{-1}h-A^{-1}Nx)\qquad(۱۹-۲)$$

در ادامه دهقان و همکاران برای حل دستگاه (۲-۱۹) و یافتن جواب فازی مثبت روش مستقیم کرامر و روشهای تکراری مانند روش گاوس، روش تجزیه LU و ... را پیشنهاد دادند. در پایان رویکرد نویسندگان استفاده از LP زیر برای یافتن جواب دقیق یا جواب تقریبی فازی مثبت برای دستگاههای (۲-۱۷) است:

$$\begin{aligned}LP:\quad & Min\quad \acute{x}+\acute{y}+\acute{z}\\ & S.t.\quad Ax+\acute{x}=b\\ & Ay+Mx+\acute{y}=g\\ & Az+Nx+\acute{z}=h\\ & x-y\geq 0\\ & x,y,z,\acute{x},\acute{y},z\acute{\geq} 0\end{aligned}\qquad(۲۰-۲)$$

در LP فوق اگر $\acute{x}=\acute{y}=\acute{z}=0$ شود آنگاه $\tilde{X}=(x,y,z)$ جواب فازی مثبت دستگاه (۲-۱۷) است در غیر این صورت جواب تقریبی فازی مثبت دستگاه (۲-۱۷) است. البته توجه کنید که این روش برای دستگاههایی با انو اع ماتریس ضرایب LR که صفر عضو تکیه گاه درآیه های آنها نیست قابل گسترش است. از اشکالات روش می توان به موارد زیر اشاره کرد:

معایب روش فوق:

۱) این روش فقط برای دستگاههای (۲-۱۷)، که دارای جواب های دقیق یا تقریبی فازی مثبت هستند قابل استفاده است. و جواب بدست آمده نوعی جواب کلاسیک است.

۲) در جواب تقریبی فازی مثبت بدست آمده از LP (۲-۱۷) درجه اهمیت $cut\text{-}0$ و $cut\text{-}1$ جواب و دستگاه یکسان فرض شده است.

۲-۳-۳ روش الهویرنلو و کیانی [15]

در این روش الهویرنلو و همکاران با استفاده از سه تابع دی فازی

$Amb(\tilde{u}) = \int_0^1 s(r)[\overline{u}(r) - \underline{u}(r)]dr,$ ، $Val(\tilde{u}) = \int_0^1 s(r)[\overline{u}(r) + \underline{u}(r)]dr,$

و $Fuzz(\tilde{u}) = \int_0^{\frac{1}{2}}[\overline{u}(r) - \underline{u}(r)]dr + \int_{\frac{1}{2}}^1[\underline{u}(r) - \overline{u}(r)]dr$ ، برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی جواب های یکریخت را به صورت زیر تعریف کردند.

تعریف ۲-۲۸ [15]: $\tilde{x} = (x_V, x_A, x_F)$ یک جواب یکریخت فازی دستگاه

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b} \tag{۲-۲۱}$$

است اگر و فقط اگر x_V, x_A, x_F جواب (۳-۹) باشد و $x_A, x_F \geq 0$

$$\begin{cases} A_V x_V = b_V \\ A_A x_A = b_A \\ A_F x_F = b_F \end{cases} \tag{۲-۲۲}$$

در اینجا $A_V = [Val(\tilde{a}_{ij})]_{n\times n}$ و $A_A = [Amb(\tilde{a}_{ij})]_{n\times n}$ و $A_F = [Fuzz(\tilde{a}_{ij})]_{n\times n}$

$b_V = [Val(\tilde{b}_i)]_{n\times 1}$ و $b_A = [Amb(\tilde{b}_i)]_{n\times 1}$ و $b_F = [Fuzz(\tilde{b}_i)]_{n\times 1}$.

توجه کنید که x_V, x_A, x_F مقادیر $Val(.)$, $Amb(.)$, $Fuzz(.)$ جواب فازی دستگاه ($\tilde{x}$) است، که در صورت ممکن باید آن را بدست آورد . از این رو نویسندگان برای یافتن جواب فازی دستگاه چند حالت خاص از دستگاه را در نظر می گیرند، از جمله این حالت های خاص دستگاه این است که فرض

کنیم، جواب فازی دستگاه یک بردار فازی ذوزنقه ای متقارن مانند $\tilde{x}_j = \left(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4\right)\ 1 \leq j \leq n$ باشد. در این حالت

$$\begin{cases} x_j^1 = m_j - c_j - d_j\ ,\ \ x_j^2 = m_j - c_j \\ x_j^3 = m_j + c_j\ ,\ \ x_j^4 = m_j + c_j + d_j \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n\ ,$$

که در آن

$$Fuzz(\tilde{x}_j) = x_{Fj} = \frac{d_j}{2}, Amb(\tilde{x}_j) = x_{Aj} = c_j + \frac{d_j}{3}\ , Val(\tilde{x}_j) = x_{Vj} = m_j.$$

در نتیجه با داشتن $\left(x_{Fj}, x_{Aj}, x_{Vj}\right), 1 \leq j \leq n$ مقدار جواب فازی

$$\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) \qquad (۲-۲۳)$$

حاصل می شود. از اشکالات روش فوق، می توان به دو نکته زیر اشاره کرد.

معایب روش فوق:

۱) در این روش ما یک جواب یکریخت فازی دستگاه $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$ یعنی $\tilde{x} = (x_V, x_A, x_F)$ را می یابیم، که فقط در حالت های خاص می توان جواب فازی دستگاه مثل $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ را از روی جواب یکریخت محاسبه کرد.

۲) بین جواب فازی بدست آمده از روش فوق (جواب(۲-۲۳)) و جواب کامل دستگاه (جواب (۲-۲۱)) رابطه ای وجود ندارد. زیرا نمی توان رابطه ای بین مقادیر $Val(\tilde{A}\tilde{X})$ و $Amb(\tilde{A}\tilde{X})$ و $Fuzz(\tilde{A}\tilde{X})$ و مقادیر $\underline{Val(\tilde{A}).Val(\tilde{X})}$ و $\underline{Amb(\tilde{A}).Aam(\tilde{X})}$ و $\underline{Fuzz(\tilde{A})Fuzz(\tilde{X})}$ پیدا کرد. واین یعنی نمی توان میزان صدق کردن جواب در دستگاه و یا خطای جواب را بررسی کرد.

۲-۳-۳-٤ روش الهویرنلو و میکائیلوند*[16]*

در این روش الهویرنلو و همکاران، رویکردی پارامتری نسبت به دستگاه معادلات تمام فازی داشتند. آنها در ابتدا یک دستگاه معادلات خطی فازی را در فرم پارامتری به صورت زیر در نظر گرفتند:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\underline{a_{ij}}(r),\overline{a_{ij}}(r)\right]\left[\underline{x_j}(r),\overline{x_j}(r)\right]=\left[\underline{b_i}(r),\overline{b_i}(r)\right], \qquad (۲-۲٤)$$

$$\mathrm{r}\in[0,1]\quad,\quad 1\le i\le \mathrm{n}.$$

سپس با استفاده تغییر متغیر

$$\tilde{z}_j=\begin{cases}\tilde{x}_j, & j\in J\\ 0, & j\notin J\end{cases},\tilde{y}_j=\begin{cases}0, & j\in J\\ \tilde{x}_j, & j\notin J\end{cases}\qquad J=\{j|1\le j\le n\ \ and\ \ \tilde{x}_j\ge 0\},$$

و با فرض های $1\le i,j\le n$ $\tilde{x}_j\le 0\ \ or\ \ \tilde{x}_j\ge 0\ ,\tilde{a}_{ij}\ge 0$ ، دستگاه (۲-۲٤) تبدیل به دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\underline{a_{ij}}(r)\underline{z_j}(r)+\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}(r)\underline{y_j}(r)=\underline{b_i}(r),\\ \sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ij}}(r)\overline{z_j}(r)+\sum_{j=1}^{n}\underline{a_{ij}}(r)\overline{y_j}(r)=\overline{b_i}(r),\end{cases} \qquad (۲-۲٥)$$

$$\mathrm{r}\in[0,1]\quad,\quad 1\le i\le \mathrm{n}\ .$$

حال با تغییر متغیر

$$\begin{cases}(C_1)_{ij}=\underline{a_{ij}}(r)\,,(C_2)_{ij}=\overline{a_{ij}}(r)\,,(Z_1)_j=\underline{z_j}(r)\ \,,(Z_2)_j=\overline{z_j}(r),\\ (Y_1)_j=\underline{y_j}(r),(Y_2)_j=\overline{y_j}(r)\ \,,(B_1)_i=\underline{b_i}(r)\,,(B_2)_i=\overline{b_i}(r),\\ \mathrm{r}\in[0,1]\quad,\quad 1\le i,j\le \mathrm{n},\end{cases} \qquad (۲-۲٦)$$

دستگاه (۲-۲٥) به فرم زیر نوشته می شود.

$$\begin{bmatrix}C_1 & 0 & C_2 & 0\\ 0 & C_2 & 0 & C_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\\ Y_1\\ Y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} \qquad (۲-۲۷)$$

و در نهایت الگوریتم زیر را برای یافتن جواب های غیر صفر$(\tilde{x}_j\le 0\ \ or\ \ \tilde{x}_j\ge 0{,}0\ \ 1\le j\le n)$

دستگاه (۲-۲٤) به صورت زیر ارائه شده است:

الگوریتم یافتن جواب غیر صفر دستگاه معادلات خطی تمام فازی

۱) دستگاه

$$[\tilde{A}]_0[\tilde{X}]_0 = [\tilde{b}]_0 \qquad (۲-۲۸)$$

را حل می کنیم اگر این دستگاه جواب غیر صفر داشته باشد به گام ۲ می رویم در غیر این صورت به گام ٦ بروید.

۲) دستگاه (۲-۲٤) را به دستگاه (۲-۲۷) تبدیل کنید.

۳) دستگاه (۲-۲۷) را حل کنید.

٤) اگر جواب دستگاه (۲-۲۷) یک جواب غیر صفر باشد این جواب، یک جواب غیر صفر دستگاه (۲-۲٤) است و به ٦ می رویم. در غیر این صورت به ٥ بروید.

٥) این دستگاه دارای یک جواب صفر است و این الگوریتم قادر به حل آن نیست.

٦) پایان

معایب روش فوق:

۱) برای شروع حل با الگوریتم باید دستگاه (۲-۲۷)، که یک دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای هست، را حل می کنیم که حل آن بسیار سخت و پیچیده است . از طرفی بیشتر اوقات دستگاه (۲-۲۷)، دارای جواب جبری غیر صفر نیست.

۲) این روش در صورت وجود جواب غیر صفر قابل استفاده است . فلذا برای بسیاری از دستگاهها قابل استفاده نیست

۲-۳-۳-٥ روش الهویرنلو و سلهشور*[17]*

در این روش الهویرنلو و همکاران، سعی کردند که برای دستگاههای معادلات خطی تمام فازی، جواب های متقارن فازی بیابند. برای این کار آنها ابتدا با حل ۱-برش(با فرض اینکه ۱-برش دستگاه، یک دستگاه کریسپ است) و بعد از آن با اختصاص پهنا به جواب ۱-برش دستگاه، جواب های ما کزیمال و مینیمال فازی را بدست آوردند.

در این روش ابتدا ۱-برش دستگاه $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$AX = b \qquad (۲۹-۲)$$

فرض کنید که دستگاه (۲-۲۹) دارای جواب $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ باشد. دستگاه (۲-۲۹) را به دستگاه زی تبدیل می کنیم(در واقع به جواب ۱-برش یک پهنای فرضی می دهیم):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \left[\underline{a_{ij}}(r), \overline{a_{ij}}(r)\right] \otimes \left[x_j - \alpha_i(r), x_j + \alpha_i(r)\right] = \left[\underline{b_i}(r), \overline{b_i}(r)\right], \\ 0 \le r \le 1, 1 \le i \le \mathrm{n}. \end{cases} \qquad (۳۰-۲)$$

در دستگاه (۲-۳۰) α_j ها، پهناهای جواب هستند که مثبت و نامعلوم هستند. در ادامه برای محاسبه پهناهای جواب، اندیس درآیه های ماتریس ضرایب دستگاه را به صورت زیر افراز می کنیم:

$$\begin{cases} 1.\, \mathrm{I}_1 = \left\{(\mathrm{i}, \mathrm{j}) \in \mathbb{N}_\mathrm{n} \times \mathbb{N}_\mathrm{n} \middle| \tilde{\mathrm{a}}_{\mathrm{ij}} > 0\right\}, \\ 2.\, \mathrm{I}_2 = \left\{(\mathrm{i}, \mathrm{j}) \in \mathbb{N}_\mathrm{n} \times \mathbb{N}_\mathrm{n} \middle| \tilde{\mathrm{a}}_{\mathrm{ij}} < 0\right\}, \\ 3.\, \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2, \end{cases} \qquad \mathbb{N}_\mathrm{n} = \{1, \dots, \mathrm{n}\}. \qquad (۳۱-۲)$$

در اینجا ما حالت سوم را که دو حالت دیگر را پوشش می دهد در نظر می گیریم . در حالت سوم فرض کنید که $1 \le j \le s \quad \tilde{a}_{ij} \ge 0$ و $s+1 \le j \le n \quad \tilde{a}_{ij} \le 0$. در این حالت دستگاه (۲-۳۰) تبدیل به دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{s} \underline{a_{ij}}(r)\left(x_j - \alpha_i(r)\right) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a_{ij}}(r)\left(x_j + \alpha_i(r)\right) = \underline{b_i}(r), \\ \sum_{j=1}^{s} \overline{a_{ij}}(r)\left(x_j + \alpha_i(r)\right) + \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a_{ij}}(r)\left(x_j - \alpha_i(r)\right) = \overline{b_i}(r), \\ 0 \le r \le 1, 1 \le i \le n. \end{cases} \qquad (۳۲-۲)$$

با حل دستگاه (۲-۳۲) پهناهای جواب به صورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} \alpha_{i1}(r) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}}(r)x_j - \underline{b_i}(r)}{\sum_{j=1}^{s} \underline{a_{ij}}(r) - \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a_{ij}}(r)} \\ \alpha_{i2}(r) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}(r)x_j - \overline{b_i}(r)}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a_{ij}}(r) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a_{ij}}(r)} \\ 0 \le r \le 1, 1 \le i \le n. \end{cases} \qquad (۲-۳۳)$$

در نتیجه ماکزیمم و مینیمم پهناهای جواب به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} \alpha_s^{-,l}(r) = min_{0\le r\le 1}\{|\alpha_{i1}^{l}(r)|, |\alpha_{i2}^{l}(r)|\}, \\ \alpha_s^{-,u}(r) = min_{0\le r\le 1}\{|\alpha_{i1}^{u}(r)|, |\alpha_{i2}^{u}(r)|\}, \\ \alpha_s^{+,l}(r) = max_{0\le r\le 1}\{|\alpha_{i1}^{l}(r)|, |\alpha_{i2}^{l}(r)|\}, \\ \alpha_s^{+,u}(r) = max_{0\le r\le 1}\{|\alpha_{i1}^{u}(r)|, |\alpha_{i2}^{u}(r)|\}, \\ 0 \le r \le 1, 1 \le i \le n. \end{cases} \qquad (۲-۳٤)$$

که در آن

$$\begin{cases} \alpha_{i1}^{l}(r) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}}(r)x_j - \underline{b_i}(r)}{\sum_{j=1}^{s} \underline{a_{ij}}(1) - \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a_{ij}}(0)} \\ \alpha_{i1}^{u}(r) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}}(r)x_j - \underline{b_i}(r)}{\sum_{j=1}^{s} \underline{a_{ij}}(0) - \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a_{ij}}(1)} \\ \alpha_{i2}^{l}(r) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}(r)x_j - \overline{b_i}(r)}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a_{ij}}(0) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a_{ij}}(1)} \\ \alpha_{i2}^{u}(r) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}(r)x_j - \overline{b_i}(r)}{\sum_{j=1}^{s} \overline{a_{ij}}(1) - \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a_{ij}}(0)} \\ 0 \le r \le 1, 1 \le i \le n. \end{cases} \qquad (۲-۳٥)$$

در این حالت جواب های ماکزیمال و مینیمال متقارن فازی به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} \tilde{X}^{-,l}(r) = \left(\tilde{x}_1^{-,l}(r), \dots, \tilde{x}_n^{-,l}(r)\right)^t \ s.t.\ \tilde{x}_1^{-,l}(r) = \left[x_j - \alpha_s^{-,l}(r), x_j + \alpha_s^{-,l}(r)\right] \\ \tilde{X}^{-,u}(r) = \left(\tilde{x}_1^{-,u}(r), \dots, \tilde{x}_n^{-,u}(r)\right)^t \ s.t.\ \tilde{x}_1^{-,u}(r) = \left[x_j - \alpha_s^{-,u}(r), x_j + \alpha_s^{-,u}(r)\right] \\ \tilde{X}^{+,l}(r) = \left(\tilde{x}_1^{+,l}(r), \dots, \tilde{x}_n^{+,l}(r)\right)^t \ s.t.\ \tilde{x}_1^{+,l}(r) = \left[x_j - \alpha_s^{+,l}(r), x_j + \alpha_s^{+,l}(r)\right] \\ \tilde{X}^{+,u}(r) = \left(\tilde{x}_1^{+,u}(r), \dots, \tilde{x}_n^{+,u}(r)\right)^t \ s.t.\ \tilde{x}_1^{+,u}(r) = \left[x_j - \alpha_s^{+,u}(r), x_j + \alpha_s^{+,u}(r)\right] \\ \qquad\qquad 0 \le r \le 1, 1 \le i \le n. \end{cases} \quad (۳۶-۲)$$

معایب روش:

۱) این روش فقط قادر است جواب های مثبت و منفی دستگاه را در حالتی که همه ضرایب دستگاه مثبت یا منفی باشند بیابد.

۲-٤ جمع بندی فصل

هدف اصلی از ارائه این فصل ، بررسی روش های حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی بوده که به طور کلی می توان گفت این روش ها هر یک دارای معایبی هستند. ما سعی می کنیم که در ادامه این رساله روشی را برای حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی مطرح کنیم که دارای معایب کمتری باشد . از آنجا که هر برش دستگاه معادلات خطی تمام فازی، یک دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای است لذا ما در فصل آینده روشی جدید برای حل دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای مطرح می کنیم.

فصل سوم

روشی جدید برای حل
دستگاه های خطی تمام بازه ای

۳–۱ مقدمه

ریاضیات بازه ای در بررسی عدم قطعیت عددی در الگوریتم ها و مدل ها، توسعه ی شگرفی داشته است. این مدل ها زمانی به وجود می آیند که اطلاعات لازم برای حل مساله نمی توانند به صورت دقیق اندازه گیری و جمع آوری شوند، اما می توانند متعلق به دامنه ی مشخصی از اعداد باشند. از جمله مدل های کاربردی در ریاضیات بازه ای، دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای است. به طور کلی حل دستگاه معادلات تمام بازه ای بسیار مشکل و پیچیده است، چرا که این نوع از دستگاه ها در واقع نوعی از دستگاه های غیر خطی هستند و از طرفی با توجه به بازه ای بودن کامل دستگاه معمولا در صورت وجود، دارای جواب های بازه ای هستند. در این فصل ما روشی را ارائه می دهیم که به کمک آن می توان برای یک دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای جواب بازه ای یافت.

۳–۲ شکافت بازه ای[۲۶]

تعریف۳–۱: برای هر عدد بازه ای $[x]$ ، **شکافت بازه ای** را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases}[x]=[\underline{x},\overline{x}]=[x_1,\alpha]+[\beta,x_2],\\ \quad x_1\le\alpha\le 0\le\beta\le x_2.\end{cases}\qquad(۳\text{-}۱)$$

که در آن $\underline{x}=x_1+\beta,\overline{x}=\alpha+x_2$.

تعریف۳–۲: برای هر عدد بازه ای $[x]$ ، **شکافت استاندارد بازه ای**[۲۷] را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases}[x]=[\underline{x},\overline{x}]=[x_1,\alpha]+[\beta,x_2],\\ \quad x_1\le\alpha\le 0\le\beta\le x_2,\\ \quad x_2.x_1.(\alpha-\beta)=0.\end{cases}\qquad(۳\text{-}۲)$$

که در آن $\underline{x}=x_1+\beta,\overline{x}=\alpha+x_2$.

قضیه۳–۱: هر عدد بازه ای $[x]=[\underline{x},\overline{x}]$ ،دارای شکافت استاندارد بازه ای منحصر به فرد به صورت زیر است:

[۲۶] Interval Spliting
[۲۷] Standard Interval Spliting

$$\begin{cases} \begin{cases} [x] = [0,0] + [\underline{x}, \overline{x}] \\ (x_1 = 0, \alpha = 0, \beta = \underline{x}, x_2 = \overline{x}) \end{cases} & if \quad \underline{x} \geq 0, \\ \begin{cases} [x] = [\underline{x}, \overline{x}] + [0,0] \\ (x_1 = \underline{x}, \alpha = \overline{x}, \beta = 0, x_2 = 0) \end{cases} & if \quad \overline{x} \leq 0, \\ \begin{cases} [x] = [\underline{x}, 0] + [0, \overline{x}] \\ (x_1 = \underline{x}, \alpha = 0, \beta = 0, x_2 = \overline{x}) \end{cases} & if \quad \underline{x} \leq 0 \leq \underline{x} \end{cases} \qquad (۳ ۴)$$

اثبات: برای اثبات سه حالت $\overline{x} \leq 0$ ، $\underline{x} \geq 0$ و $\underline{x} \leq 0 \leq \underline{x}$ را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که $[x] \neq [0,0]$، چرا که برای حالت $[x] = [0,0]$ اثبات بدیهی است.

حالت اول : $\underline{x} \geq 0$. در این حالت چون $[x] \neq [0,0]$ پس $\underline{x} > 0$. لذا با توجه به شرط $x_1 \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq x_2$ ، برای شکافت استاندارد بازه ای $[x] = [\underline{x}, \overline{x}] = [x_1, \alpha] + [\beta, x_2]$، دو حالت $x_1 < 0$ و $x_1 = 0$ قابل بررسی است.

الف) $x_1 < 0$ دراین حالت با توجه به اینکه $\underline{x} = x_1 + \beta$ پس $\beta \neq 0$ در نتیجه $x_2 \neq 0, x_1 \neq 0, (\alpha - \beta) \neq 0$ در این حالت شرط $x_2.x_1.(\alpha - \beta) = 0$ نقض می شود لذا حالت الف امکان پذیر نیست.

ب) $x_1 = 0$. در این حالت $\alpha = 0$ پس $\underline{x} = \beta, \overline{x} = x_2$. لذا $[x] = [0,0] + [\underline{x}, \overline{x}]$. در نتیجه شکافت استاندارد بازه ای $[x]$ به صورت منحصر به فرد مدل (۳-۳) است.

حالت دوم: $\overline{x} \leq 0$. در این حالت چون $[x] \neq [0,0]$ پس $\overline{x} < 0$. لذا با توجه به شرط $x_1 \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq x_2$ ، برای شکافت استاندارد بازه ای $[x] = [\underline{x}, \overline{x}] = [x_1, \alpha] + [\beta, x_2]$، دو حالت $x_2 > 0$ و $x_2 = 0$ قابل بررسی است.

الف) $x_2 > 0$ دراین حالت با توجه به اینکه $\overline{x} = x_2 + \alpha$ پس $\alpha \neq 0$ در نتیجه $x_2 \neq 0, x_1 \neq 0, (\alpha - \beta) \neq 0$ در این حالت شرط $x_2.x_1.(\alpha - \beta) = 0$ نقض می شود لذا حالت الف امکان پذیر نیست.

ب) $x_2 = 0$. در این حالت $\beta = 0$ پس $\underline{x} = x_1, \overline{x} = \alpha$. لذا $[x] = [\underline{x}, \overline{x}] + [0,0]$. در نتیجه شکافت استاندارد بازه ای $[x]$ به صورت منحصر به فرد مدل (۳-۳) است.

حالت سوم: $\underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}$. در این حالت چون $[x] \neq [0,0]$ پس $\underline{x} > 0$ و $\overline{x} < 0$. لذا با توجه به شرط $x_1 \leq \alpha \leq 0 \leq \beta \leq x_2$ ، برای شکافت استاندارد بازه ای

$[x] = [\underline{x}, \overline{x}] = [x_1, \alpha] + [\beta, x_2]$، دو حالت $\begin{cases} \alpha > 0 \\ \beta < 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$ قابل بررسی است.

الف) $\begin{cases}\alpha > 0\\ \beta < 0\end{cases}$ دراین حالت با توجه به اینکه $\underline{x} = x_1 + \beta$ و $\overline{x} = x_2 + \alpha$ پس داریم نتیجه $x_2 \neq 0, x_1 \neq 0, (\alpha - \beta) \neq 0$ در این حالت شرط $x_2 . x_1 . (\alpha - \beta) = 0$ نقض می شود لذا حالت الف امکان پذیر نیست.

ب) $\begin{cases}\alpha = 0\\ \beta = 0\end{cases}$. در این حالت $\underline{x} = x_1, \overline{x} = x_2$. لذا $[x] = [\underline{x}, 0] + [0, \overline{x}]$. در نتیجه شکافت استاندارد بازه ای $[x]$ به صورت منحصر به فرد مدل (۳-۳) است. ■

مثال۳-۱: با توجه به تعریف (۱-۲-۲) برای سه بازه $[5,12]$ ، $[-6,-2]$ و $[-8,9]$ شکافت استاندارد بازه ای به صورت زیر است:

$$\begin{cases}[-6,-2] = [-6,-2] + [0,0],\\ [5,12] = [0,0] + [5,12],\\ [-8,9] = [-8,0] + [0,9].\end{cases} \qquad (۳ ٤)$$

قضیه۳-۲: فرض کنید $[k] = [\underline{k}, \overline{k}]$ یک عدد بازه ای است به طوری که $0 \leq \overline{k}$ یا $\underline{k} \geq 0$. آنگاه برای هر عدد بازه ای $[x]$، با شکافت استاندارد بازه ای $[x] = [x_1, \alpha] + [\beta, x_2]$, داریم:

$$[k].[x] = \begin{cases}[\overline{k}x_1, \underline{k}\alpha] + [\underline{k}\beta, \overline{k}x_2] & if \quad \underline{k} \geq 0\\ [\overline{k}\alpha, \underline{k}x_1] + [\underline{k}x_2, \overline{k}\beta] & if \quad \overline{k} \leq 0\end{cases}.$$

اثبات: با فرض موجود بودن مفروضات مساله، دو حالت کلی را در نظر می گیریم:

حالت $\underline{k} \geq 0$: در اینجا سه حالت را برای عدد بازه ای $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$، با شکافت استاندارد بازه ای $[x] = [x_1, \alpha] + [\beta, x_2]$ در نظر می گیریم:

الف) $\underline{x} \geq 0$. در این حالت طبق تعریف (۲-۳) داریم:

$$[k].[x] = [\underline{kx}, \overline{k}\overline{x}].$$

$$[k].([x_1, \alpha] + [\beta, x_2]) = [\overline{k}.0, \underline{k}.0] + [\underline{kx}, \overline{k}\overline{x}] = [\underline{kx}, \overline{k}\overline{x}],$$

در نتیجه: $[k].([x_1, \alpha] + [\beta, x_2]) = [k].[x]$.

ب) $\overline{x} \leq 0$. در این حالت طبق تعریف(۲-۳) داریم:

$$[k].[x] = [\overline{k}\underline{x}, \underline{k}\overline{x}].$$

$$[k].([x_1,\alpha]+[\beta,x_2])=\left[\overline{k}\underline{x},\underline{k}\overline{x}\right]+\left[\underline{k}0,\overline{k}0\right]=\left[\overline{k}\underline{x},\underline{k}\overline{x}\right].$$

در نتیجه: $[k].([x_1,\alpha]+[\beta,x_2])=[k].[x]$.

ج) $\underline{x}\le 0\le\overline{x}$. در این حالت طبق تعریف(۲-۳) داریم:

در نتیجه: $[k].([x_1,\alpha]+[\beta,x_2])=[k].[x]$.

حالت $\overline{k}\le 0$: این حالت اثبات مشابه حالت اول است.■

۳-۳ روش جدید برای حل دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای

دستگاه تمام بازه ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\underline{a_{ij}},\overline{a_{ij}}\right]\otimes\left[\underline{x_j},\overline{x_j}\right]=\left[\underline{b_i},\overline{b_i}\right],\quad i=1,2,\cdots,n, \qquad (۳\ ۵)$$

که در آن $\underline{a_{ij}}\ge 0$ یا $0\ge\overline{a_{ij}}$ به ازای هر $i,j\in\{1,\dots,n\}$.

ابتدا اندیس های عناصر ماتریس A را بهصورت زیر افراز می کنیم.

$$J_i^{+}=\left\{j|\underline{a_{ij}}\ge 0\right\},\qquad i=1,2,\cdots,n,$$
$$J_i^{-}=\left\{j|0\ge\overline{a_{ij}}\ \vartheta\ \underline{a_{ij}}\ne 0\right\},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

در نتیجه با توجه به افراز فوق دستگاه (۳-۵) تبدیل به دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases}\sum_{J_i^{+}}\left[\underline{a_{ij}},\overline{a_{ij}}\right]\otimes\left[\underline{x_j},\overline{x_j}\right]+\sum_{J_i^{-}}\left[\underline{a_{ij}},\overline{a_{ij}}\right]\otimes\left[\underline{x_j},\overline{x_j}\right]=\left[\underline{b_i},\overline{b_i}\right],\\ i=1,2,\cdots,n.\end{cases} \qquad (۳\ ۶)$$

حال فرض کنید که در دستگاه (۳-٦) متغییرهای بازه ای $\left[\underline{x_j},\overline{x_j}\right],\ j=1,2,\cdots,n$ ، دارای شکافت بازه ای $\left[\underline{x_j},\overline{x_j}\right]=[x_{j1},\alpha_j]+[\beta_j,x_{j2}],\quad j=1,2,\cdots,n$ باشند. در این صورت دستگاه (۳-٦) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$
\begin{cases}
\sum_{J_i^+} \left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right] \otimes \left(\left[x_{j1}, \alpha_j\right] + \left[\beta_j, x_{j2}\right]\right) + \\
\sum_{J_i^-} \left[\underline{a_{ij}}, \overline{a_{ij}}\right] \otimes \left(\left[x_{j1}, \alpha_j\right] + \left[\beta_j, x_{j2}\right]\right) + \ = \left[\underline{b_i}, \overline{b_i}\right], \\
x_{j1} \le \alpha_j \le 0 \le \beta_j \le x_{j2}, \\
x_{j2} x_{j1} \left(\alpha_j - \beta_j\right) = 0, \\
i, j \ = 1, 2, \cdots, n.
\end{cases}
\tag{۳ ۷}
$$

با توجه به قضیه (۳–۲) دستگاه (۳–۷) تبدیل به دستگاه زیر می شود:

$$
\begin{cases}
\sum_{J_i^+} \left(\overline{a_{ij}} x_{j1} + \underline{a_{ij}}\ \beta_j\ , \underline{a_{ij}} \alpha_j + \overline{a_{ij}}\ x_{j2}\right) \\
\sum_{J_i^-} \left(\overline{a_{ij}} \alpha_j + \underline{a_{ij}} x_{j2}\ , \underline{a_{ij}} x_{j1} + \overline{a_{ij}}\ \beta_j\right) + \ = \left[\underline{b_i}, \overline{b_i}\right], \\
x_{j1} \le \alpha_j \le 0 \le \beta_j \le x_{j2}, \\
x_{j2} x_{j1} \left(\alpha_j - \beta_j\right) = 0, \\
i, j \ = 1, 2, \cdots, n.
\end{cases}
\tag{۳ ۸}
$$

حال قرار می دهیم:

$$
\begin{cases}
\sum_{J_i^-} \left(\overline{a_{ij}} \alpha_j + \underline{a_{ij}} x_{j2}\right) + \sum_{J_i^+} \left(\overline{a_{ij}} x_{j1} + \underline{a_{ij}}\ \beta_j\ \right) =: \underline{(AX)_i}, \\
\sum_{J_i^-} \left(\ \underline{a_{ij}} x_{j1} + \overline{a_{ij}}\ \beta_j\right) + \sum_{J_i^+} \left(\underline{a_{ij}} \alpha_j + \overline{a_{ij}}\ x_{j2}\right) =: \overline{(AX)_i}, \\
i \ = 1, 2, \cdots, n.
\end{cases}
\tag{۳ ۹}
$$

در نهایت با استفاده از تغییر متغیر فوق، دستگاه (۳–۹) به دستگاه زیر تبدیل می شود.

$$
\begin{cases}
\underline{(AX)_i} = \underline{b_i}, \\
\overline{(AX)_i} = \overline{b_i}, \\
x_{j1} \le \alpha_j \le 0 \le \beta_j \le x_{j2}, \\
x_{j2} x_{j1} \left(\alpha_j - \beta_j\right) = 0, \\
i, , j \ = 1, 2, \cdots, n.
\end{cases}
\tag{۳ ۱۰}
$$

توجه دارید که دس‌تگاه (۳-۱۰) یک دستگاه معادلات غیر خطی است که با حل آن جواب های جبری دستگاه (۳-۵) بدست می آید. روش های مختلفی برای حل این نوع از دستگاه ها وجود دارد که پیشنهاد ما برای حل آن استفاده از برنامه ریزی غیر خطی(NLP) زیر است:

$$\begin{cases} Max \quad z = \sum_{j=1}^{n}\left(x_{j2}+\alpha_j - \beta_j - x_{j1}\right) \\ S.t. \quad X \in S_{CIS} \end{cases} \qquad (۳ ۱۱)$$

در اینجا

$$X = (x_{12}, x_{11}, \alpha_1, \beta_1, \ldots, x_{n2}, x_{n1}, \alpha_n, \beta_n) \ ,$$

$$S_{CIS} = \left\{ X \in \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \underline{(AX)_i} = \underline{b_i} \\ \overline{(AX)_i} = \overline{b_i} \\ x_{j1} \le \alpha_j \le 0 \le \beta_j \le x_{j2} \\ x_{j2}x_{j1}\left(\alpha_j - \beta_j\right) = 0 \end{array} \right. \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \right\}.$$

با حل دستگاه (۳-۱۱) و محاسبه $X^* = (x_{12}, x_{11}, \alpha_1, \beta_1, \ldots, x_{n2}, x_{n1}, \alpha_n, \beta_n)$ ، جواب جبری دستگاه (۳-۵) به صورت $[X] = ([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])^T$ بدست می آید که در آن

$$\left[\underline{x_j}, \overline{x_j}\right] = \left[x_{j1}, \alpha_j\right] + \left[\beta_j, x_{j2}\right] \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

توجه کنید که درNLP (۳-۱۱)، تابع هدف در واقع مجموع پهناهای جواب یعنی $\sum_{j=1}^{n} W\left([x_j]\right)$ است که مقصود از ماکزیمم کردن آن یافتن جواب های جبری با حد اکثر پهنا است.

قضیه۳-۳: دستگاه (۳-۵) دارای جواب جبری $[X] = ([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])^T$ است اگر و فقط اگر $X = (x_{12}, x_{11}, \alpha_1, \beta_1, \ldots, x_{n2}, x_{n1}, \alpha_n, \beta_n)$ جواب بهینه دستگاه (۳-۱۱) باشد که

$$[x_j] = \left[\underline{x_j}\,,\,\overline{x_j}\right] = [x_{j1}, \alpha_j] + [\beta_j, x_{j2}] \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

اثبات: باتوجه به مدل های (۱-٦) تا (۱-۱۲) و با توجه به قضایای (۳-۱) و (۳-۲) اثبات بدیهی است.■

مثال۳-۲: دستگاه تمام بازه ای زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} [3,7]x_1 + [2,2]x_2 + [7,13]x_3 + [-8,-3]x_4 = [-279,46], \\ [5,12]x_1 + [-4,-2]x_2 + [5,10]x_3 + [4,12]x_4 = [-156,264], \\ [-10,-3]x_1 + [7,13]x_2 + [3,8]x_3 + [7,15]x_4 = [-331,292], \\ [-15,-9]x_1 + [7,18]x_2 + [4,17]x_3 + [-17,-2]x_4 = [-748,74]. \end{cases} \qquad (۱۴\ ۳)$$

با بکاربردن مدل (۱۳-۱۱) برای مساله فوق، مدل زیر را داریم:

$$\begin{aligned} & Max \quad z = \textstyle\sum_{j=1}^{4}\left(x_{j2}+\alpha_j - \beta_j - x_{j1}\right) \\ & S.t. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -7*x_{11} - 3*\beta_1 - 2x_{21} - 2\beta_2 - 13*x_{31} - 7\beta_3 + 3*x_{42} + 8*\alpha_4 = 279, \\ 3*\alpha_1 + 7*x_{12} + 2\alpha_2 + 2x_{22} + 7\alpha_3 + 13*x_{32} - 8\beta_4 - 3*x_{41} = 46, \\ -12*x_{11} - 5*\beta_1 + 4*x_{22} + 2*\alpha_2 - 10*x_{31} - 5*\beta_3 - 12*x_{41} - 4*\beta_4 = 156, \\ 5*\alpha_1 + 12*x_{12} - 2*\beta_2 - 4*x_{21} + 5*\alpha_3 + 10*x_{32} + 4\alpha_4 + 12*x_{42} = 264, \\ 3\alpha_1 + 10*x_{12} - 13*x_{21} - 7\beta_2 - 8*x_{31} - 3*\beta_3 - 15*x_{41} - 7*\beta_4 = 331, \\ -10*x_{11} - 3\beta_1 + 7\alpha_2 + 13*x_{22} + 3*\alpha_3 + 8*x_{32} + 7*\alpha_4 + 15*x_{42} = 292, \\ 9\alpha_1 + 15*x_{12} - 18*x_{21} - 7\beta_2 - 17*x_{31} - 4*\beta_3 + 2*x_{42} + 17*\alpha_4 = 748, \\ -15*x_{11} - 9\beta_1 + 7\alpha_2 + 18*x_{22} + 4*\alpha_3 + 17*x_{32} - 17\beta_4 - 2*x_{41} = 74, \\ x_{j1} \le \alpha_j \le 0 \le \beta_j \le x_{j2}, \\ x_{j2}x_{j1}\left(\alpha_j - \beta_j\right) = 0, \\ x_{j2}, x_{j1}, \alpha_j, \beta_j \ \ free, \\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \qquad (۱۳\ ۳)$$

با حل مدل فوق، جواب بهینه بصورت زیر حاصل می شود:

$$
\begin{cases}
X_{11} = 0, X_{12} = 12, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 6, \\
X_{21} = -7, X_{22} = 9, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \\
X_{31} = -15, X_{32} = 0, \alpha_3 = -8, \beta_3 = 0, \\
X_{41} = 0, X_{42} = 11, \alpha_4 = 0, \beta_4 = 0.
\end{cases}
\tag{۳ ۱٤}
$$

و در نتیجه جواب های جبری دستگاه (۳–۱۲) به صورت زیر بدست می آید:

$$
\begin{cases}
X_1^* = [0,0] + [6,12] = [6,12], \\
X_2^* = [-7,0] + [0,9] = [-7,9], \\
X_3^* = [-15,-8] + [0,0] = [-15,-8], \\
X_4^* = [0,0] + [0,11] = [0,11].
\end{cases}
\tag{۳ ۱۵}
$$

توجه کنید که

$$A \otimes X^* = b.$$

۳-٤ جمع بندی فصل

برای روش ارائه شده در این فصل، جهت حل دستگاه معادلات تمام بازه ای، می توان خواص زیر را برشمرد:

۱) برای دستگاه معادلات تمام بازه ای جواب جبری بازه ای، بدست می آورد.

۲) استفاده از آن آسان است.

۳) قادر است انواع جواب های جبری اعم از جواب های جبری مثبت، جواب های جبری منفی و جواب های جبری که صفر داخل آنها است را می توان بدست آورد.

٤) روش بطور کلی قابل گسترش برای انواع دستگاه معادلات تمام بازه ای است.

البته این روش مانند همه روش های دیگر در ریاضیات، دارای معایبی نیز هست . در ادامه این رساله سعی می کنیم این روش را برای حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی بکار ببریم.

فصل چهارم

یک روش جدید برای حل
دستگاه معادلات خطی تمام فازی

٤-١ مقدمه

یافتن جواب های فازی کامل دستگاه معادلات خطی تمام فازی بسیار مشکل و پیچیده است، چرا که در واقع این نوع دستگاه های معادلات از نظر α-برشی نوعی دستگاه های معادلا ت غیر خطی به شمار می روند. در این فصل ما یک روش جدید برای یافتن جواب های فازی، برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی ارائه می دهیم . که متفاوت با روش های بیان شده در فصل سوم بوده و البته دارای مضایا و معایبی است. در انتها روش جدید بر روی چند مثال اجرا می شود.

٤-٢ یک روش جدید برای یافتن جواب های فازی، برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی :

در ابتدا دستگاه معادلات خطی تمام فازی $n \times n$ زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}\,\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\,\tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{a}_{1n}\,\tilde{x}_n = \tilde{b}_1, \\ \tilde{a}_{21}\,\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\,\tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{a}_{2n}\,\tilde{x}_n = \tilde{b}_1, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \tilde{a}_{n1}\,\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{n2}\,\tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{a}_{nn}\,\tilde{x}_n = \tilde{b}_n, \end{cases} \qquad (١-٤)$$

که در آن ضرایب $\tilde{a}_{ij}$ $1 \le i,j \le n$ ومقادیر سمت راست $\tilde{b}_i$,$1 \le i \le n$ ، و متغییرهای $\tilde{x}_j$,$1 \le j \le n$ همگی اعداد فازی هستند . و در آن $\underline{a_{ij}}(0) \ge 0$ یا $0 \ge \overline{a_{ij}}(0)$ همچنین $\underline{a_{ij}}(1) \ge 0$ یا $0 \ge \overline{a_{ij}}(1)$ به ازای هر $i,j \in \{1,\ldots,n\}$

سپس ما α-برش دستگاه (٤-١) را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} [\tilde{a}_{11}]_\alpha\,[\tilde{x}_1]_\alpha + [\tilde{a}_{12}]_\alpha\,[\tilde{x}_2]_\alpha + \cdots + [\tilde{a}_{1n}]_\alpha\,[\tilde{x}_n]_\alpha = [\tilde{b}_1]_\alpha, \\ [\tilde{a}_{21}]_\alpha\,[\tilde{x}_1]_\alpha + [\tilde{a}_{22}]_\alpha\,[\tilde{x}_2]_\alpha + \cdots + [\tilde{a}_{2n}]_\alpha\,[\tilde{x}_n]_\alpha = [\tilde{b}_2]_\alpha, \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ [\tilde{a}_{n1}]_\alpha\,[\tilde{x}_1]_\alpha + [\tilde{a}_{n2}]_\alpha\,[\tilde{x}_2]_\alpha + \cdots + [\tilde{a}_{nn}]_\alpha\,[\tilde{x}_n]_\alpha = [\tilde{b}_n]_\alpha, \end{cases} \qquad (٢-٤)$$

که در آن $\alpha \in [0,1]$ و شکل ماتریسی آن به صورت

$$[\tilde{A}]_\alpha [\tilde{X}]_\alpha = [\tilde{b}]_\alpha \qquad , \qquad \alpha \in [0,1] \tag{۴-۳}$$

است. دستگاه (۴-۳) نشان می دهد که هر بردار فازی $\tilde{X}$ ، برای اینکه جواب دستگاه (۴-۱) باشد باید در هر دستگاه معادلات خطی حاصل از α-برش دستگاه (۴-۱) صدق کند. با توجه به این موضوع ما مجموعه های زیر را برای دستگاه (۴-۱) تعریف می کنیم.

تعریف ۴-۱: برای دستگاه (۴-۱) ما سه نوع مجموعه جواب زیر را تعریف می کنیم:

۱) مجموعه جواب متحد فازی ذوزنقه ای

$$UTFSS = \left\{\tilde{X} \in \mathrm{F}_T^n | [\tilde{A}]_1 \otimes [\tilde{X}]_1 = [\tilde{b}]_1 , [\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{X}]_0 = [\tilde{b}]_0 \right\} \tag{۴-۴}$$

۲) مجموعه جواب تحمل پذیر فازی ذوزنقه ای

$$TTFSS = \left\{\tilde{X} \in \mathrm{F}_T^n | [\tilde{A}]_1 \otimes [\tilde{X}]_1 = [\tilde{b}]_1 , [\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{X}]_0 \subseteq [\tilde{b}]_0 \right\} \tag{۴-۵}$$

۳) مجموعه جواب کنترل پذیر فازی ذوزنقه ای

$$CTFSS = \left\{\tilde{X} \in \mathrm{F}_T^n | [\tilde{A}]_1 \otimes [\tilde{X}]_1 = [\tilde{b}]_1 , [\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{X}]_0 \supseteq [\tilde{b}]_0 \right\} \tag{۴-۶}$$

در اینجا F_T^n مجموعه تمام اعداد ذوزنقه ای فازی است.

توجه کنید که در هر سه مجموعه جواب $UTFSS$ ، $TTFSS$ و $CTFSS$ باید ۱-برش دستگاه دارای جواب جبری باشد.

تعریف ۴-۲: برای دستگاه (۴-۱)، $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ را **جواب مناسب فازی ذوزنقه ای** گوییم اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} [\tilde{A}]_1 \otimes [\tilde{X}]_1 = [\tilde{b}]_1, \\ [\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{X}]_0 = [\tilde{b}]_0, \end{cases} \qquad (٤-٧)$$

در اینجا $1 \leq j \leq n$ $\tilde{x}_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4)$ اعداد فازی ذوزنقه ای هستند. حال برای حل دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای (٤-٧) با استفاده از روش ارائه شده در فصل سوم، دستگاه (٤-٧) تبدیل به دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases} \underline{(AX_1)_i} = \underline{(b_1)_i}, \\ \underline{(AX_0)_i} = \underline{(b_0)_i}, \\ \overline{(AX_1)_i} = \overline{(b_1)_i}, \\ \overline{(AX_0)_i} = \overline{(b_0)_i}, \\ x_{j1}^0 + \beta_j^0 \leq x_{j1}^1 + \beta_j^1 \\ \alpha_j^1 + x_{j2}^1 \leq \alpha_j^0 + x_{j2}^0 \\ x_{j1}^1 \leq \alpha_j^1 \leq 0 \leq \beta_j^1 \leq x_{j2}^1, \\ x_{j1}^0 \leq \alpha_j^0 \leq 0 \leq \beta_j^0 \leq x_{j2}^0 \\ x_{j2}^1 x_{j1}^1 (\alpha_j^1 - \beta_j^1) = 0, \\ x_{j2}^0 x_{j1}^0 (\alpha_j^0 - \beta_j^0) = 0 \\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \qquad (٤-٨)$$

که در آن:

(٤-٩)

$$\begin{cases} \underline{(AX_1)_i} = \sum_{J_i^-} \left(\overline{a_{ij}}(1)\alpha_j^1 + \underline{a_{ij}}(1) x_{j2}^1 \right) + \sum_{J_i^+} \left(\overline{a_{ij}}(1) x_{j1}^1 + \underline{a_{ij}}(1)\, \beta_j^1 \right), \\ \overline{(AX_1)_i} = \sum_{J_i^-} \left(\underline{a_{ij}}(1) x_{j1}^1 + \overline{a_{ij}}(1)\beta_j^1 \right) + \sum_{J_i^+} \left(\underline{a_{ij}}(1)\alpha_j^1 + \overline{a_{ij}}(1) x_{j2}^1 \right), \\ \underline{(AX_0)_i} = \sum_{J_i^-} \left(\overline{a_{ij}}(0)\alpha_j^0 + \underline{a_{ij}}(0) x_{j2}^0 \right) + \sum_{J_i^+} \left(\overline{a_{ij}}(0) x_{j1}^0 + \underline{a_{ij}}(0)\, \beta_j^0 \right), \\ \overline{(AX_0)_i} = \sum_{J_i^-} \left(\underline{a_{ij}}(0) x_{j1}^0 + \overline{a_{ij}}(0)\beta_j^0 \right) + \sum_{J_i^+} \left(\underline{a_{ij}}(0)\alpha_j^0 + \overline{a_{ij}}(0) x_{j2}^0 \right), \\ \left[\underline{(b_1)_i}, \overline{(b_1)_i} \right] = [\tilde{b}_i]_1, \\ \left[\underline{(b_0)_i}, \overline{(b_0)_i} \right] = [\tilde{b}_i]_0, \\ [x_{j1}^1, \alpha_j^1] + [\beta_j^1, x_{j2}^1] = [x_j^2, x_j^3] = [\tilde{x}_j]_1, \\ [x_{j1}^0, \alpha_j^0] + [\beta_j^0, x_{j2}^0] = [x_j^1, x_j^4] = [\tilde{x}_j]_0, \\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases}$$

با حل دستگاه (٤–٨) جواب مناسب فازی ذوزنقه ای محاسبه می شود. با توجه به وجود نامعادلات خطی و غیر خطی در دستگاه (٤–٨)، پیشنهاد ما برای حل این دستگاه، مدل برنامه ریزی غیر خطی (NLP) زیر است:

$$\begin{cases} Max \quad z = \sum_{j=1}^{n}\left(\left(x_{j2}^1 + \alpha_j^1 - \beta_j^1 - x_{j1}^1\right) + \left(x_{j2}^0 + \alpha_j^0 - \beta_j^0 - x_{j1}^0\right)\right) \\ S.t. \quad S = \begin{cases} \underline{(AX_1)_i} = \underline{(b_1)_i}, \\ \underline{(AX_0)_i} = \underline{(b_0)_i}, \\ \overline{(AX_1)_i} = \overline{(b_1)_i}, \\ \overline{(AX_0)_i} = \overline{(b_0)_i}, \\ x_{j1}^0 + \beta_j^0 \le x_{j1}^1 + \beta_j^1 \\ \alpha_j^1 + x_{j2}^1 \le \alpha_j^0 + x_{j2}^0 \\ x_{j1}^1 \le \alpha_j^1 \le 0 \le \beta_j^1 \le x_{j2}^1, \\ x_{j1}^0 \le \alpha_j^0 \le 0 \le \beta_j^0 \le x_{j2}^0 \\ x_{j2}^1 x_{j1}^1\left(\alpha_j^1 - \beta_j^1\right) = 0, \\ x_{j2}^0 x_{j1}^0\left(\alpha_j^0 - \beta_j^0\right) = 0 \\ i,j = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \end{cases} \qquad (١٠-٤)$$

با حل (NLP) فوق و محاسبه $x_{j1}^1, x_{j2}^1, \alpha_j^1, \beta_j^1, x_{j1}^0, x_{j2}^0, \alpha_j^0, \beta_j^0, \quad j = 1, \dots, n$ ، جواب مناسب فازی ذوزنقه ای یعنی $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)^T$ برای دستگاه (٤–١) با تبدیل زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} \tilde{x}_j = \left(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4\right) \\ \left[\tilde{x}_j\right]_1 = \left[x_j^2, x_j^3\right] = \left[x_{j1}^1, \alpha_j^1\right] + \left[\beta_j^1, x_{j2}^1\right], \\ \left[\tilde{x}_j\right]_0 = \left[x_j^1, x_j^4\right] = \left[x_{j1}^0, \alpha_j^0\right] + \left[\beta_j^0, x_{j2}^0\right], \\ j = 1,2,\cdots,n. \end{cases} \qquad (١١-٤)$$

قضیه ٤-۱: بردار فازی ذوزنقه ای $[\tilde{X}] = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n)^T$ جواب مناسب فازی ذوزنقه ای دستگاه

(٤-۱) است اگر و فقط اگر

$$X = (x_{11}^1, x_{12}^1, \alpha_1^1, \beta_1^1, x_{11}^0, x_{12}^0, \alpha_1^0, \beta_1^0, \ldots, x_{n1}^1, x_{n2}^1, \alpha_n^1, \beta_n^1, x_{n1}^0, x_{n2}^0, \alpha_n^0, \beta_n^0) \quad (٤-۱۲)$$

جواب بهینه دستگاه (٤-۱۰) باشد. که

$$\begin{cases} [\tilde{x}_j]_1 = [x_j^2, x_j^3] = [x_{j1}^1, \alpha_j^1] + [\beta_j^1, x_{j2}^1], \\ [\tilde{x}_j]_0 = [x_j^1, x_j^4] = [x_{j1}^0, \alpha_j^0] + [\beta_j^0, x_{j2}^0], \\ j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \quad (٤-۱۳)$$

اثبات: باتوجه به مدل های (٤-۱) تا (٤-۱۰) اثبات بدیهی است.

٤-۳ جواب های محیطی و محاطی فازی

واضح است که وجود جواب های مناسب فازی ذوزنقه ای برای اکثر دستگاههای معادلات خطی تمام فازی دور از انتظار است، چرا که لازمه وجود چنین جواب هایی، وجود جواب های جبری کلاسیک برای ۰- برش دستگاه است که ممکن است موجود نباشد . از این رو در این قسمت ما جواب هایی را معرفی می کنیم که لازمه وجود آنها، وجود جواب های جبری کلاسیک برای ۰-برش دستگاه نیست.

تعریف٤-۳(جواب های محیطی فازی):

برای دستگاه (٤-۱)، $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ را **جواب محیطی فازی ذوزنقه ای** گوییم اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} (1) \tilde{X} \in TTFSS \\ (2) \forall \tilde{Y} \in TTFSS,\ d([\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{X}]_0, [\tilde{b}]_0) \geq d([\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{Y}]_0, [\tilde{b}]_0) \end{cases} \quad (٤-۱٤)$$

و آن را با $\tilde{X}_{\subseteq}$ نشان می دهیم.

در اینجا $1 \leq j \leq n$ $\tilde{x}_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4)$ اعداد فازی ذوزنقه ای هستند.

تعریف ٤-٤(جواب های محاطی فازی):

برای دستگاه (٤-١)، $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ را **جواب محاطی فازی ذوزنقه ای** گوییم اگر و فقط اگر

$$\begin{cases} 1)\tilde{X} \in CTFSS \\ 2)\forall \tilde{Y} \in CTFSS,\ d([\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{X}]_0, [\tilde{b}]_0) \leq d([\tilde{A}]_0 \otimes [\tilde{Y}]_0, [\tilde{b}]_0) \end{cases} \quad (١٥-٤)$$

و آن را با $\tilde{X}_{\supseteq}$ نشان می دهیم.

در اینجا $1 \leq j \leq n$ $\tilde{x}_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4)$ اعداد فازی ذوزنقه ای هستند.

٤-٣-٣ محاسبه جواب های محیطی و محاطی فازی

حال فرض کنید که مدل (٤-١٠) نشدنی باشد و این یعنی که مساله (٤-١) جواب مناسب فازی ذوزنقه ای ندارد. لذا در اینجا برای یافتن جواب های محیطی و محاطی فازی ذوزنقه ای، با توج به تعاریف (٤-٣-١) و (٤-٣-٢) ابتدا جواب های جبری ١-برش مساله (٤-١) را با استفاده از مدل زیر بدست می آوریم:

$$\begin{cases} Max \quad z = \sum_{j=1}^{n}\left(x_{j2}^1 + \alpha_j^1 - \beta_j^1 - x_{j1}^1\right) \\ S.t. \quad S = \begin{cases} \underline{(AX_1)_i} = \underline{(b_1)_i}, \\ \overline{(AX_1)_i} = \overline{(b_1)_i}, \\ x_{j1}^1 \leq \alpha_j^1 \leq 0 \leq \beta_j^1 \leq x_{j2}^1, \\ x_{j2}^1 x_{j1}^1\left(\alpha_j^1 - \beta_j^1\right) = 0, \\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{cases} \quad (١٦-٤)$$

اگر

$$X = (x_{11}^1, x_{12}^1, \alpha_1^1, \beta_1^1, x_{11}^0, x_{12}^0, \alpha_1^0, \beta_1^0, \ldots, x_{n1}^1, x_{n2}^1, \alpha_n^1, \beta_n^1, x_{n1}^0, x_{n2}^0, \alpha_n^0, \beta_n^0) \quad (۱۷-٤)$$

جواب بهینه مدل (٤-١٥) باشد.یعنی ١-برش مساله (٤-١) جواب جبری داشته باشد. قرار می دهیم

$$\begin{cases} [\tilde{x}_j]_1 = [x_j^2, x_j^3] = [x_{j1}^1, \alpha_j^1] + [\beta_j^1, x_{j2}^1], \\ j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \quad (۱۸-٤)$$

آنگاه برای یافتن جواب محیطی فازی ذوزنقه ای، مدل زیر را حل می کنیم:

$$\begin{cases} Min\ \ z = Max\left\{Max_{1\le i\le n}\left|\underline{(AX_0)_i} - \underline{(b_0)_i}\right|, Max_{1\le i\le n}\left|\overline{(AX_0)_i} - \overline{(b_0)_i}\right|\right\} \\ S.t. \quad S_{\subseteq} = \begin{cases} \underline{(AX_0)_i} \ge \underline{(b_0)_i}, \\ \overline{(AX_0)_i} \le \overline{(b_0)_i}, \\ x_{j1}^0 + \beta_j^0 \le x_j^2, \\ x_j^3 \le \alpha_j^0 + x_{j2}^0, \\ x_{j1}^0 \le \alpha_j^0 \le 0 \le \beta_j^0 \le x_{j2}^0, \\ x_{j2}^0 x_{j1}^0 (\alpha_j^0 - \beta_j^0) = 0, \\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{cases} \quad (۱۹-٤)$$

با استفاده از خواص تابع Max مدل (٤-١٨) تبدیل به مدل زیر می شود:

$$\begin{cases} Min \quad z \\ S.t. \quad S_{\subseteq} = \begin{cases} \underline{(AX_0)_i} - \underline{(b_0)_i} \le z, \\ \overline{(b_0)_i} - \overline{(AX_0)_i} \le z, \\ \underline{(AX_0)_i} \ge \underline{(b_0)_i}, \\ \overline{(AX_0)_i} \le \overline{(b_0)_i}, \\ x_{j1}^0 + \beta_j^0 \le x_j^2, \\ x_j^3 \le \alpha_j^0 + x_{j2}^0, \\ x_{j1}^0 \le \alpha_j^0 \le 0 \le \beta_j^0 \le x_{j2}^0, \\ x_{j2}^0 x_{j1}^0 (\alpha_j^0 - \beta_j^0) = 0, \\ i, j = 1, 2, \cdots, n. \end{cases} \end{cases} \quad (۲۰-٤)$$

و به همین صورت، برای یافتن جواب های محاطی فازی ذوزنقه ای از مدل زیر استفاده می کنیم:

$$
\begin{cases}
Min \quad z \\
S.t. \quad S_{\supseteq} = \begin{cases}
\underline{(b_0)_i} - \underline{(AX_0)_i} \le z, \\
\overline{(AX_0)_i} - \overline{(b_0)_i} \le z, \\
\underline{(AX_0)_i} \le \underline{(b_0)_i}, \\
\overline{(AX_0)_i} \ge \overline{(b_0)_i}, \\
x_{j1}^0 + \beta_j^0 \le x_j^2, \\
x_j^3 \le \alpha_j^0 + x_{j2}^0, \\
x_{j1}^0 \le \alpha_j^0 \le 0 \le \beta_j^0 \le x_{j2}^0, \\
x_{j2}^0 x_{j1}^0 \left(\alpha_j^0 - \beta_j^0\right) = 0, \\
i, j = 1, 2, \cdots, n.
\end{cases}
\end{cases}
\tag{۲۱-٤}
$$

با حل دو مدل (٤-۲۰) و (٤-۲۱) و محاسبه $j = 1, \ldots, n$ $x_{j1}^1, x_{j2}^1, \alpha_j^1, \beta_j^1, x_{j1}^0, x_{j2}^0, \alpha_j^0, \beta_j^0,$ ، برای هر یک از این دو مدل، جواب محیطی فازی ذوزنقه ای $\tilde{X}_{\subseteq} = (\tilde{x}_{\subseteq 1}, \tilde{x}_{\subseteq 2}, \cdots, \tilde{x}_{\subseteq n})^T$ و جواب محاطی فازی ذوزنقه ای $\tilde{X}_{\supseteq} = (\tilde{x}_{\supseteq 1}, \tilde{x}_{\supseteq 2}, \cdots, \tilde{x}_{\supseteq n})^T$ دستگاه (٤-۱)، به صورت زیر بدست می آید:

$$
\begin{cases}
\tilde{x}_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4) \\
\left[\tilde{x}_{\subseteq j}\right]_0 = \left[x_j^1, x_j^4\right] = \left[x_{j1}^0, \alpha_j^0\right] + \left[\beta_j^0, x_{j2}^0\right], \\
\left[\tilde{x}_{\supseteq j}\right]_0 = \left[x_j^1, x_j^4\right] = \left[x_{j1}^0, \alpha_j^0\right] + \left[\beta_j^0, x_{j2}^0\right], \\
j = 1, 2, \cdots, n.
\end{cases}
\tag{۲۲-٤}
$$

قضیه٤-۲: برای هر دستگاه معادلات خطی تمام فازی $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$ اگر دستگاه ۱-برش جواب جبری داشته باشد، آنگاه دستگاه دارای جواب محاطی فازی ذوزنقه ای است.

اثبات: فرض کنید برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$ دستگاه ۱-برش جواب جبری $[\tilde{X}]_1 = ([\tilde{x}_1]_1, [\tilde{x}_2]_1, \cdots, [\tilde{x}_n]_1)^T$ داشته باشد، که در آن

$$
\left[\tilde{x}_j\right]_1 = \left[x_j^2, x_j^3\right], \qquad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{۲۳-٤}
$$

فرض کنید $[\tilde{b}]_0$ یک بردار بازه ای با درآیه های بازه ای کراندار است در این صورت می توان اعداد x_j^1 و $x_j^4,\ \ j = 1, 2, \cdots, n$ را طوری یافت که

$$\begin{cases} x_j^1 \le x_j^2, x_j^4 \ge x_j^3, & j = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \left[\underline{a_{ij}}(0), \overline{a_{ij}}(0)\right] \otimes \left[x_j^1\ , x_j^4\right] \supseteq [\tilde{b}]_0, & i = 1, 2, \cdots, n \end{cases} \quad (۲٤-٤)$$

در نتیجه بردار فازی ذوزنقه ای $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n), \tilde{x}_j = \left(x_j^1, x_j^2, x_j^3, x_j^4\right), 1 \le j \le n$ یک جواب شدنی مدل (٤-٢١) است.بنابراین مدل (٤-٢١) شدنی و دارای جواب بهینه است. لذا دستگاه دارای جواب محاطی فازی ذوزنقه ای است.

قضیه ٤-٣: برای یک دستگاه معادلات خطی تمام فازی $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$ ، بردار فازی ذوزنقه ای $\tilde{X}$ جواب مناسب فازی ذوزنقه ای است اگر و فقط اگر دستگاه دارای جواب محیطی فازی ذوزنقه ای $\tilde{X}_{\subseteq}$ و جواب محاطی فازی ذوزنقه ای $\tilde{X}_{\supseteq}$ باشد که $\tilde{X} = \tilde{X}_{\subseteq} = \tilde{X}_{\supseteq}$.

اثبات: بردار فازی ذوزنقه ای $\tilde{X}$ جواب مناسب فازی ذوزنقه ای دستگاه $\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{b}$ است. اگر و فقط اگر $\tilde{X}$ جواب شدنی مدل های (٤-٢٠) و (٤-٢١) با مقدار تابع هدف صفر است . و اگر و فقط اگر $\tilde{X} = \tilde{X}_{\subseteq} = \tilde{X}_{\supseteq}$.

٤-٤ مثال ها

مثال٤-١: دستگاه معادلات خطی تمام فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} (2,3,4)+(1,1,1)+(1,2,3)=(-9,2,18) \\ (5,6,7)+(-4,-3,-2)+(2,2,2)=(-13,8,34) \\ (-3,-2,-1)+(1,2,3)+(3,3,4)=(-30,-10,5) \end{cases} \tag{٤-٢٥}$$

که در آن تمامی ضرایب و مقادیر سمت راست، اعداد فازی مثلثی هستند.

باتوجه به اینکه $\underline{a_{ij}}(0) \geq 0$ یا $0 \geq \overline{a_{ij}}(0)$ به ازای هر $i,j \in \{1,\dots,n\}$ لذا می توانیم روش جدید را برای آن پیاده کنیم. با توجه به اینکه ۱-برش دستگاه (٤-٢٥) ذستگاهی کریسپ است، لذا ابتدا ۱-برش دستگاه فوق را حل می کنیم، که جواب حاصل از آن به صورت زیر است:

$$x_{core} = (2,0,-2)^t.$$

حال مدل (٤-١٠) را برای دستگاه(٤-٢٥)، به صورت زیر می نویسیم:

$$MAX \quad z = \sum_{j=1}^{3}(x_{j2} + \alpha_j - \beta_j - x_{j1})$$

$$s.t. \quad \begin{cases} -4x_{11} - 2\beta_1 - x_{21} - \beta_2 - 3x_{31} - \beta_3 = 9 \\ 2\alpha_1 + 4x_{12} + \alpha_2 + x_{22} + \alpha_3 + 3x_{32} = 18 \\ -7x_{11} - 5\beta_1 - 4x_{22} + 2\alpha_2 - 2x_{31} - 2\beta_3 = 13 \\ 5\alpha_1 + 7x_{12} - 2\beta_2 + 4x_{21} + 2\alpha_3 + 2x_{32} = 34 \\ -3x_{11} - \beta_1 + 3x_{22} + \alpha_2 + 4x_{32} + 3\alpha_3 = 5 \\ \alpha_1 + 3x_{12} - \beta_2 - 3x_{21} - 3\beta_3 - 4x_{31} = 30 \\ x_{11} \leq \alpha_1 \leq 0 \leq \beta_1 \leq x_{21} \quad x_{11} + \beta_1 \leq 2 \leq x_{12} + \alpha_1 \\ x_{21} \leq \alpha_2 \leq 0 \leq \beta_2 \leq x_{22} \quad x_{21} + \beta_2 \leq 0 \leq x_{22} + \alpha_2 \\ x_{31} \leq \alpha_3 \leq 0 \leq \beta_3 \leq x_{32} \quad x_{31} + \beta_3 \leq -2 \leq x_{32} + \alpha_3 \\ x_{11}.x_{12}.(\beta_1 - \alpha_1) = 0 \quad x_{21}.x_{22}.(\beta_2 - \alpha_2) = 0 \\ x_{31}.x_{32}.(\beta_3 - \alpha_3) = 0 \\ x_{j1}, x_{j2}, \alpha_j, \beta_j \quad isfree \quad j = 1 \dots n \end{cases} \tag{٤-٢٦}$$

با حل مدل فوق جواب به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} X_{11} = 0, X_{12} = 4, \alpha_1 = 0, \beta_1 = 1, \\ X_{21} = -2, X_{22} = 3, \alpha_2 = 0, \beta_2 = 0, \\ X_{31} = -3, X_{32} = 0, \alpha_3 = -1, \beta_3 = 0. \end{cases} \quad (۲۷-٤)$$

لذا جواب مناسب فازی مثلثی ای دستگاه (٤-۲۵) را می توان به صورت اعداد فازی مثلثی زیر نوشت:

$$\begin{cases} \tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*), \\ \tilde{x}_1^* = (1,2,4), \\ \tilde{x}_2^* = (-2,0,3), \\ \tilde{x}_3^* = (-3,-2,-1). \end{cases} \quad (۲۸-٤)$$

واضح است که: $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*) \in UTFSS$

مثال٤-۲: دستگاه معادلات خطی تمام فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \quad (۲۹-٤)$$

که در آن

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (-7,-4,,-2,-1) & (3,4,8,9) & (2,3,5,6) & (1,3,4,8) \\ (2,4,7,11) & (2,5,10,14) & (2,4,8,10) & (-6,-5,-3,-2) \\ (3,5,6,7) & (-8,-4,-4,-2) & (-10,-6,-3,-2) & (0,3,7,10) \\ (-8,-7,-5,-1) & (5,6,9,12) & (-6,-4,-2,0) & (-7,-6,-3,-2) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} (-194,-86,12,84) \\ (-200,-74,68,202) \\ (-120,-9,70,216) \\ (-272,-122,-25,33) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix}.$$

و تمامی ضرایب و مقادیر سمت راست، اعداد فازی ذوزنقه ای هستند.

ابتدا ۱–برش و ۰–برش دستگاه (٤–۲۹) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix} [-4,-2] & [4,8] & [3,5] & [3,4] \\ [4,7] & [5,10] & [4,8] & [-5,-3] \\ [5,6] & [-4,-4] & [-6,-3] & [3,7] \\ [-7,-5] & [6,9] & [-4,-2] & [-6,-3] \end{bmatrix} [\tilde{\mathrm{X}}]_1 = \begin{bmatrix} [-86,12] \\ [-74,68] \\ [-9,70] \\ [-122,-25] \end{bmatrix} \quad (٤\text{–}۳۰)$$

$$\begin{bmatrix} [-7,-1] & [3,9] & [2,6] & [1,8] \\ [2,11] & [2,14] & [2,10] & [-6,-2] \\ [3,7] & [-8,-2] & [-10,-2] & [0,10] \\ [-8,-1] & [5,12] & [-6,0] & [-7,-2] \end{bmatrix} [\tilde{\mathrm{X}}]_0 = \begin{bmatrix} [-194,84] \\ [-200,202] \\ [-120,216] \\ [-272,33] \end{bmatrix} \quad (٤\text{–}۳۱)$$

باتوجه به اینکه $\underline{a_{ij}}(0) \geq 0$ یا $\overline{a_{ij}}(0) \leq 0$ به ازای هر $i,j \in \{1,\dots,n\}$ لذا می توانیم روش جدید را برای آن پیاده کنیم. با اجرای مدل (٤–۱۰) برای حل همزمان دو مساله (٤–۳۰) و (٤–۳۱)، جواب به صورت زیر حاصل می شود:

(٤–۳۲)

$$\begin{cases} x_{11}^1 = 0, x_{12}^1 = 5, \alpha_1^1 = 0, \beta_1^1 = 3, x_{11}^0 = 0, x_{12}^0 = 8, \alpha_1^0 = 0, \beta_1^0 = 2, \\ x_{21}^1 = -7, x_{22}^1 = 0, \alpha_2^1 = -3, \beta_2^1 = 0, x_{21}^0 = -10, x_{22}^0 = 0, \alpha_2^0 = -2, \beta_2^0 = 0, \\ x_{31}^1 = -2, x_{32}^1 = 6, \alpha_3^1 = 0, \beta_3^1 = 0, x_{31}^0 = -4, x_{32}^0 = 10, \alpha_3^0 = 0, \beta_3^0 = 0, \\ x_{41}^1 = 0, x_{42}^1 = 0, \alpha_4^1 = 0, \beta_4^1 = 0, x_{41}^0 = -3, x_{42}^0 = 4, \alpha_4^0 = 0, \beta_4^0 = 0. \end{cases}$$

در نتیجه جواب مناسب فازی ذوزنقه ای مساله (٤–۲۸) به صورت زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} \tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*), \\ \tilde{x}_1^* = (2,3,5,8), \\ \tilde{x}_2^* = (-10,-7,-3,-2), \\ \tilde{x}_3^* = (-4,-2,6,10), \\ \tilde{x}_4^* = (-3,0,0,4). \end{cases} \quad (٤\text{–}۳۳)$$

واضح است که: $\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*) \in UTFSS$

مثال٤-٣: دستگاه معادلات خطی تمام فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b} \qquad (٣٤-٤)$$

که در آن

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} (2,4,5,6) & (-11,-4,-3,-2) & (3,8,10,15) & (-13,-5,-5,-3) \\ (3,7,9,11) & (7,10,12,17) & (-13,-9,-7,-5) & (-9,-3,-1,0) \\ (1,3,7,10) & (-12,-6,-4,-1,) & (-9,-8,-6,-3) & (3,5,5,9) \\ (0,3,6,7) & (3,8,10,11) & (1,6,10,12) & (-11,-7,-4,0) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} (-295,-65,9,166) \\ (-97,62,135,386) \\ (-249,-51,33,147) \\ (-157,-8,102,261) \end{bmatrix}, \qquad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix}.$$

که در آن تمامی ضرایب و مقادیر سمت راست، اعداد فازی ذوزنقه ای هستند.

باتوجه به اینکه $\underline{a_{ij}}(0) \geq 0$ یا $\overline{a_{ij}}(0) \leq 0$ به ازای هر $i,j \in \{1,\dots,n\}$ لذا می توانیم روش جدید را برای آن پیاده کنیم . برای این کار برای مثال فوق مدل (٤-١٠) را نوشته واجرا کنیم . اما مدل نشدنی است. لذا برای این مثال ما به دنبال جواب های محیطی و محاطی فازی ذوزنقه ای خواهیم بود . برای یافتن جواب محیطی فازی، ابتدا مدل (٤-١٦) را برای ۱-برش دستگاه (٤-٣٤)، به صورت زیر می نویسیم:

$$
\begin{aligned}
MAX \quad & z = \sum_{j=1}^{4}(x_{j2} + \alpha_j - \beta_j - x_{j1}), \\
s.t. \quad & 5x_{11}^1 + 4\beta_1^1 - 3\alpha_2^1 - 4x_{22}^1 + 10x_{31}^1 + 8\beta_3^1 - 5\alpha_4^1 - 5x_{42}^1 = -65, \\
& 4\alpha_1^1 + 5x_{12}^1 - 4x_{21}^1 - 3\beta_2^1 + 8\alpha_3^1 + 10x_{32}^1 - 5\beta_4^1 - 5x_{41}^1 = 9, \\
& 9x_{11}^1 + 7\beta_1^1 + 12x_{21}^1 + 10\beta_2^1 - 9x_{32}^1 - 7\alpha_3^1 - \alpha_4^1 - 3x_{42}^1 = 62, \\
& 7\alpha_1^1 + 9x_{12}^1 + 10\alpha_2^1 + 12x_{22}^1 - 7\beta_3^1 - 9x_{31}^1 - 3x_{41}^1 - \beta_4^1 = 135, \\
& 7x_{11}^1 + 3\beta_1^1 - 6x_{22}^1 - 4\alpha_2^1 - 8x_{32}^1 - 6\alpha_3^1 + 5x_{41}^1 + 5\alpha_4^1 = -51, \\
& 3\alpha_1^1 + 7x_{12}^1 - 4\beta_2^1 - 6x_{21}^1 - 6\beta_3^1 - 8x_{31}^1 + 5\alpha_4^1 + 5x_{42}^1 = 33, \\
& 6x_{11}^1 + 3\beta_1^1 + 10x_{12}^1 + 8\beta_2^1 + 10x_{31}^1 + 6\beta_3^1 - 4\alpha_4^1 - 7x_{42}^1 = -8, \\
& 3\alpha_1^1 + 6x_{12}^1 + 8\alpha_2^1 + 10x_{22}^1 + 6\alpha_3^1 + 10x_{32}^1 - 7x_{41}^1 - 4\beta_4^1 = 102, \\
& x_{11}^1 \le \alpha_1^1 \le 0 \le \beta_1^1 \le x_{12}^1 \quad x_{11}^1.x_{12}^1.(\beta_1^1 - \alpha_1^1) = 0, \\
& x_{21}^1 \le \alpha_2^1 \le 0 \le \beta_2^1 \le x_{22}^1 \quad x_{21}^1.x_{22}^1.(\beta_2^1 - \alpha_2^1) = 0, \\
& x_{31}^1 \le \alpha_3^1 \le 0 \le \beta_3^1 \le x_{32}^1 \quad x_{31}^1.x_{32}^1.(\beta_3^1 - \alpha_3^1) = 0, \\
& x_{41}^1 \le \alpha_4^1 \le 0 \le \beta_4^1 \le x_{42}^1 \quad x_{41}^1.x_{42}^1.(\beta_4^1 - \alpha_4^1) = 0, \\
& x_{j1}^1, x_{j2}^1, \alpha_j^1, \beta_j^1, x_{j1}^0, x_{j2}^0, \alpha_j^0, \beta_j^0 \quad isfree \quad j = 1 \ldots n.
\end{aligned}
$$

(۴-۳۵)

با حل مدل فوق جواب آن به صورت زیر حاصل می شود:

$$
\begin{cases}
x_{11}^1 = 0, x_{12}^1 = 2, \alpha_1^1 = 0, \beta_1^1 = 1, \\
x_{21}^1 = 0, x_{22}^1 = 6, \alpha_2^1 = 0, \beta_2^1 = 5, \\
x_{31}^1 = -3, x_{32}^1 = 0, \alpha_3^1 = -2, \beta_3^1 = 0, \\
x_{41}^1 = -6, x_{42}^1 = 3, \alpha_4^1 = 0, \beta_4^1 = 0.
\end{cases}
$$

(۴-۳۶)

و در نتیجه ۱-برش جواب محیطی فازی ذوزنقه ای مساله (۴-۳۳) به صورت زیر حاصل می شود.

$$
\begin{cases}
[\tilde{x}_1^*]_1 = [1,2], \\
[\tilde{x}_2^*]_1 = [5,6], \\
[\tilde{x}_3^*]_1 = [-3,-2], \\
[\tilde{x}_4^*]_1 = [-6,3].
\end{cases}
$$

(۴-۳۷)

حال با توجه به اینکه ۱-برش دستگاه دارای جواب است. برای یافتن جواب محیطی فازی مدل (۴-۲۰) را برای این مثال به صورت زیر می نویسیم:

$$
\begin{array}{ll}
Min & z \\
s.t. & (6x_{11}^0+2\beta_1^0-2\alpha_2^0-11x_{22}^0+15x_{31}^0+3\beta_3^0-13x_{42}^0-3\alpha_4^0)+295\le z, \\
& -(2\alpha_1^0+6x_{12}^0-11x_{21}^0-2\beta_2^0+3\alpha_3^0+15x_{32}^0-3\beta_4^0-13x_{41}^0)+166\le z, \\
& (x_{11}^0+3\beta_1^0+17x_{21}^0+7\beta_2^0-13x_{32}^0-5\alpha_3^0-9x_{42}^0)+80\le z, \\
& -(3\alpha_1^0+11x_{12}^0+7\alpha_2^0+17x_{22}^0-5\beta_3^0-13x_{31}^0-9x_{41}^0)+370\le z, \\
& (10x_{11}^0+\beta_1^0-12x_{22}^0-\alpha_2^0-9x_{32}^0-3\alpha_3^0+9x_{41}^0+3\beta_4^0)+260\le z, \\
& -(\alpha_1^0+10x_{12}^0-\beta_2^0-12x_{21}^0-3\beta_3^0-9x_{31}^0+3\alpha_4^0+9x_{42}^0)+160\le z, \\
& (7x_{11}^0+11x_{21}^0+3\beta_2^0+12x_{31}^0+\beta_3^0-11x_{42}^0)+157\le z, \\
& -(x_{12}^0+3\alpha_2^0+11x_{22}^0+\alpha_3^0+12x_{32}^0-11x_{41}^0)+261\le z, \\
& 6x_{11}^0+2\beta_1^0-2\alpha_2^0-11x_{22}^0+15x_{31}^0+3\beta_3^0-13x_{42}^0-3\alpha_4^0\ge -295, \\
& 2\alpha_1^0+6x_{12}^0-11x_{21}^0-2\beta_2^0+3\alpha_3^0+15x_{32}^0-3\beta_4^0-13x_{41}^0\le 166, \\
& x_{11}^0+3\beta_1^0+17x_{21}^0+7\beta_2^0-13x_{32}^0-5\alpha_3^0-9x_{42}^0\ge -80, \\
& 3\alpha_1^0+11x_{12}^0+7\alpha_2^0+17x_{22}^0-5\beta_3^0-13x_{31}^0-9x_{41}^0\le 370, \\
& 10x_{11}^0+\beta_1^0-12x_{22}^0-\alpha_2^0-9x_{32}^0-3\alpha_3^0+9x_{41}^0+3\beta_4^0\ge -260, \\
& \alpha_1^0+10x_{12}^0-\beta_2^0-12x_{21}^0-3\beta_3^0-9x_{31}^0+3\alpha_4^0+9x_{42}^0\le 160, \\
& 7x_{11}^0+11x_{21}^0+3\beta_2^0+12x_{31}^0+\beta_3^0-11x_{42}^0\ge -157, \\
& x_{12}^0+3\alpha_2^0+11x_{22}^0+\alpha_3^0+12x_{32}^0-11x_{41}^0\le 261, \\
& x_{11}^0\le\alpha_1^0\le 0\le\beta_1^0\le x_{12}^0 \quad x_{11}^0+\beta_1^0\le 1 \quad \alpha_1^0+x_{12}^0\ge 2, \\
& x_{21}^0\le\alpha_2^0\le 0\le\beta_2^0\le x_{22}^0 \quad x_{21}^0+\beta_2^0\le 5 \quad \alpha_2^0+x_{22}^0\ge 6, \\
& x_{31}^0\le\alpha_3^0\le 0\le\beta_3^0\le x_{32}^0 \quad x_{31}^0+\beta_3^0\le -3 \quad \alpha_3^0+x_{32}^0\ge -2, \\
& x_{41}^0\le\alpha_4^0\le 0\le\beta_4^0\le x_{42}^0 \quad x_{41}^0+\beta_4^0\le -6 \quad \alpha_4^0+x_{42}^0\ge 3, \\
& x_{11}^0.x_{12}^0.(\beta_1^0-\alpha_1^0)=0 \qquad x_{21}^0.x_{22}^0.(\beta_2^0-\alpha_2^0)=0, \\
& x_{31}^0.x_{32}^0.(\beta_3^0-\alpha_3^0)=0 \qquad x_{41}^0.x_{42}^0.(\beta_4^0-\alpha_4^0)=0, \\
& x_{j1}^1,x_{j2}^1,\alpha_j^1,\beta_j^1,x_{j1}^0,x_{j2}^0,\alpha_j^0,\beta_j^0 \quad isfree \quad j=1\ldots n.
\end{array}
\tag{۳۸-٤}
$$

با حل مدل فوق جواب آن به صورت زیر حاصل می شود:

$$
\begin{cases}
x_{11}^0=-5.130461, x_{12}^0=5.478992, \alpha_1^0=0, \beta_1^0=0, \\
x_{21}^0=0, x_{22}^0=8.951225, \alpha_2^0=0, \beta_2^0=5, \\
x_{31}^0=-4.178396, x_{32}^0=0, \alpha_3^0=-2, \beta_3^0=0, \\
x_{41}^0=-11.47123, x_{42}^0=7.618326, \alpha_4^0=0, \beta_4^0=0.
\end{cases}
\tag{۳۹-٤}
$$

پس ۰-برش جواب محیطی فازی ذوزنقه ای مساله (٤-۳۳) به صورت زیر است.

$$
\begin{cases}
[\tilde{x}_1^*]_0=[-5.130461,5.478992], \\
[\tilde{x}_2^*]_0=[5,8.951225], \\
[\tilde{x}_3^*]_0=[-4.178396,-2], \\
[\tilde{x}_4^*]_0=[-11.47123,7.618326].
\end{cases}
\tag{٤۰-٤}
$$

در نتیجه جواب محیطی فازی ذوزنقه ای به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} \tilde{X}_{\subseteq}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*) \\ \tilde{x}_1^* = (-5.130461, 1, 2, 5.478992), \\ \tilde{x}_2^* = (5, 5, 6, 8.951225), \\ \tilde{x}_3^* = (-4.178396, -3, -2, -2), \\ \tilde{x}_4^* = (-11.47123, -6, 3, 7.618326). \end{cases} \tag{٤١-٤}$$

واضح است که: $\tilde{X}_{\subseteq}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*) \in TTFSS$

به طور مشابه با اجرای مدل (٤-٢١) برای این مثال، جواب های محاطی فازی به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} \tilde{X}_{\supseteq}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*) \\ \tilde{x}_1^* = (-5.302201, 1, 2, 5.686398), \\ \tilde{x}_2^* = (5, 5, 6, 8.973808), \\ \tilde{x}_3^* = (-4.139219, -3, -2, -2), \\ \tilde{x}_4^* = (-11.69914, -6, 3, 7.875894). \end{cases} \tag{٤٢-٤}$$

واضح است که: $\tilde{X}_{\supseteq}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*) \in CTFSS$.

مثال٤-٤(یک مثال کاربردی [37]): در این مثال یک کاربرد اقتصادی از دستگاه دوآل معادلات خطی تمام فازی را مطرح می کنیم. یکی از مسائل مهم اقتصادی رابطه بین قیمت عرضه یک کالا و نرخ تولید و میزان عرضه و تقاضای آن کالاست. این رابطه می تواند به صورت توابع خطی زیر نشان داده شود:

$$\begin{cases} \tilde{q}_d = \tilde{a} * \tilde{p} + \tilde{b} \\ \tilde{q}_s = \tilde{c} * \tilde{p} + \tilde{d} \end{cases} \tag{٤٣-٤}$$

در اینجا $\tilde{q}_s$ منبع عرضه است که مستلزم تساوی با $\tilde{q}_d$ منبع تقاضا می باشد. $\tilde{p}$ قیمت کالا و $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ و $\tilde{d}$ ضرایب برآورد توابع هستند. تمامی متغییرها و ضرایب اعداد فازی مثلثی می باشند. حال با فرض تساوی

بین مبلغ عرضه و مبلغ تقاضا، دستگاه دوآل معادلات خطی تمام فازی (٤-٤٢) تبدیل به دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases}\tilde{x}_1 = \tilde{a} * \tilde{x}_2 + \tilde{b} \\ \tilde{x}_1 = \tilde{c} * \tilde{x}_2 + \tilde{d}\end{cases} \tag{٤-٤٤}$$

اگر برای یک کالا ضرایب توابع به صورت

$$\begin{cases}\tilde{a} = -(18,20,22), \tilde{b} = (1200,1230,1250), \\ \tilde{c} = (12,13,15), \tilde{d} = (-250,-220,-200),\end{cases} \tag{٤-٤٥}$$

تعریف شوند آنگاه دستگاه دوآل معادلات خطی تمام فازی (٣-٤٤) تبدیل به دستگاه زیر می شود:

$$\begin{cases}\tilde{x}_1 = -(18,20,22) * \tilde{x}_2 + (1200,1230,1250) \\ \tilde{x}_1 = (12,13,15) * \tilde{x}_2 + (-250,-220,-200)\end{cases} \tag{٤-٤٦}$$

با توجه به اینکه در دستگاه فوق $0 \geq \underline{a_{ij}}(0)$ یا $\overline{a_{ij}}(0) \geq 0$ به ازای هر $i, j \in \{1, \dots, n\}$. لذا می توانیم روش جدید را برای یافتن جواب آن بکار ببریم . در این راستا با اجرای مدل (٤-١٠) برای حل مساله (٤-٤٦)، جواب مناسب فازی مثلثی به صورت زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases}\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*), \\ \tilde{x}_1^* = (36.48294,351.2121,593.3071), \\ \tilde{x}_2^* = (23.87358,43.93939,52.88714).\end{cases} \tag{٤-٤٧}$$

توجه کنید که این جواب به صورت جبری در دستگاه (٤-٤٥) صدق می کند و داریم:

$$\tilde{X}^* = (\tilde{x}_1^*, \tilde{x}_2^*, \tilde{x}_3^*, \tilde{x}_4^*) \in UTFSS \tag{٤-٤٨}$$

٤-٥ جمع بندی فصل

همان طور که در مثال های فوق دیده شد برای هر دستگاه معادلات خطی تمام فازی $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ با شرط

$\underline{a_{ij}}(0) \geq 0$ یا $\overline{a_{ij}}(0) \geq 0$ به ازای هر $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ، در صورت وجود می توان جواب مناسب فازی ذوزنقه ای را با روش پیشنهادی یافت و در صورت عدم وجود جواب مناسب فازی ذوزنقه ای، می توان جواب های محیطی و محاطی فازی ذوزنقه ای را با مدل های پیشنهادی (٤-٢٠) و (٤-٢١) محاسبه کرد. که جواب هایی تقریبی هستند. البته این روش مانند همه روش های دیگر در ریاضیات، دارای معایبی نیز هست.

فصل پنجم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ مقدمه

این فصل در رابطه با نتایج کلی و لزوم ارائه راه کار های جدید انجام شده در این پایان نامه و همچنین ارائه پیشنهادات قابل بررسی در آینده است.

۵-۲ نتیجه گیری

از جمله مسائل مهم ریاضیات فازی دستگاه معادلات خطی تمام فازی است . لذا مطالعه این دستگاهها و حل آنها همواره مورد توجه محققین بوده است . که منجر به ارائه روشهائی برای حل اینگونه از دستگاهها شده است. در این پایان نامه سعی شده که روش دقیقتر و کارامد تری نسیت به سایر روش ها بیان شود. در روش پیشنهادی ارائه شده در رساله ابتدا روش جدیدی برای حل دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای بیان می شود که با کمک آن جواب های جبری این نوع دستگاه ها در صورت وجود محاسبه می شود . سپس به کمک این روش و با توجه بـه اینکه برش های دستگاه معادلات خطی تمام فازی، یک دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای است جواب های فازی ذوزنقه ای موجود برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی را محاسبه می شود، چه جواب های فازی ذوزنقه ای مثبت، چه منفی و چه جواب های فازی ذوزنقه ای که صفر داخل تکیه گاه آنها است. و برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی که جواب تقریبی فازی ذوزنقه ای ندارند، جواب های تقریبی فازی ذوزنقه ای محیطی و محاطی بدست می آورد . در پایان چند مثال برای بررسی کاربرد این روش آورده شده است.

از مضایای این روش یافتن جواب های فازی تقریبی برای ه ر نوع دستگاه معادلات خطی تمام فازی، با کمترین مقدار خطا در ۰-برش دستگاه است به شرط این که دستگاه در ۱-برش دارای جواب باشد . از دیگر مضایای این روش یافتن جواب های فازی ذوزنقه ایی است که صفر داخل تکیه گاه آن است.

از معایب این روش استفاده از مدل غیر خطی و همچن ین یافتن جواب هایی است که فقط با استفاده از اطلاعات ۱-برش و ۰-برش دستگاه معادلات خطی تمام فازی بدست می آید.

۵-۲ پیشنهادات

همان طور که بیان شد روش ارائه شده در پایان نامه قادر به محاسبه جواب های فازی ذوزنقه ای است که در واقع به لحاظ جبری در ۰-برش و ۱-برش دستگاه ها صادق هستند. حال پیشنهادات ما برای روش های حل قابل ارائه در آینده به صورت زیر است:

۱) ارائه یک روش جدید بهتر یا توسعه روش پیشنهادی، برای محاسبه جوابهای فازی دقیقتر بصورتی که به لحاظ جبری در برش های دیگر دستگاه ، غیر از ۱-برش و ۰-برش صدق کند.

۲) ارائه یک روش جدید بهتر یا توسعه روش پیشنهادی، به طوری که دارای شکلی ساده تر و پیچیدگی محاسباتی کمتر باشد و در صورت ممکن از دارای مدلی خطی باشد.

۳) ارائه یک روش جدید بهتر یا توسعه روش پیشنهادی، برای هر نوع دستگاه معادلات خطی تمام فازی، از جمله برای دستگاه خطی تمام فازی دوآل باشد.

واژه نامه

بردار عدد بازه ای	Interval number vector
بردار عدد فازی	Fuzzy number vector
جواب فازی ضعیف	Weak fuzzy solution
جواب فازی قوی	Strong fuzzy solution
جواب فازی مناسب	*Suitable fuzzy solution*
جواب کلاسیک	*Classic solution*
جواب محیطی فازی	*Fuzzy escribed solution*
جواب محاطی فازی	*Fuzzy peripheral solution*
دستگاه خطی تمام بازه ای	Fully interval linear system
دستگاه خطی فازی	Fuzzy linear system
دستگاه خطی تمام فازی	Fully fuzzy linear system
شکافت بازه ای	*Interval splitting*
شکافت استاندارد بازه ای	*Standard interval splitting*
مجموعه جواب تحمل پذیر	Tolerable solution set
مجموعه جواب تحمل پذیر فازی ذوزنقه ای	*Tolerable trapezoidal fuzzy solution set*
مجموعه جواب کنترل پذیر	Controllable solution set
مجموعه جواب کنترل پذیر فازی ذوزنقه ای	*Controllable trapezoidal fuzzy solution set*
مجموعه جواب متحده	United solution set
مجموعه جواب متحده فازی ذوزنقه ای	*United trapezoidal fuzzy solution set*

مراجع فارسی:

[1] الهویرنلو توفیق، نرگس طاهری، ۱۳۸۷، مجموعه فازی و خواص آن، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران.

مراجع انگلیسی :

[1] S. Abbasbandy, M. Alavi, A method for solving fuzzy linear system. Iranian Journal of Fuzzy Systems 2 (2005) 37–43.

[2] S. Abbasbandy, R. Ezzati, A. Jafarian, LU decomposition method for solving fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 172 (2006) 633–643.

[3] S. Abbasbandy, A. Jafarian, Steepest descent method for system of fuzzy linear equations. Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 823–833.

[4] S. Abbasbandy, A. Jafarian, R. Ezzati, Conjugate gradient method for fuzzy symmetric positive definite system of linear equations, Applied Mathematics and Computation 171 (2005) 1184–1191.

[5] G. Alefeld, G. Mayer, The Cholesky method for interval data, Linear Algebra Appl. 194 (1993) 161–182.

[6] G. Alefeld, G. Mayer, On the symmetric and unsymmetric solution set of interval systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 16 (1995) 1223–1240.

[7] G. Alefeld, G. Mayer, Interval analysis: theory and applications, Journal of Computational and Applied Mathematics 121 (2000) 421–464.

[8] T. Allahviranloo, Numerical methods for fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 155 (2004) 493–502.

[9] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Solving fuzzy linear systems by homotopy perturbation method, Int. J. Comput. Cognit. 8 (2) (2010) 24–30.

[10] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A new approach to obtain algebraic solution of interval linear systems, Soft Computing 16 (2012) 121–133.

[11] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory, Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 5360–5379.

[12] T.Allahviranloo, M.Ghanbari, A.A.Hosseinzadeh, E.Haghi, R.Nuraei, A note on “Fuzzy linear systems”, Fuzzy Sets and Systems 177 (2011) 87–92.

[13] T. Allahviranloo, E. Haghi, M. Ghanbari, The nearest symmetric fuzzy solution for a symmetric fuzzy linear system, An. St. Univ. Ovidius Constanta, 20(1) (2012) 151–172.

[14] T. Allahviranloo, N. A. Kiani, M. Barkhordary, and M. Mosleh, Hommorphic Solution of Fully Fuzzy Linear System, Computational Mathematics and Modeling, Vol. 19, No. 3, 2008.

[15] Tofigh Allahviranloo , Nasser Mikaeilvand , Narsis Aftab Kiani, Rasol Mastani Shabestari, Signed Decomposition of Fully Fuzzy Linear Systems, Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), Vol. 3, No. 1 (June 2008) pp. 77 – 88.

[16] T. Allahviranloo, S. Salahshour, Fuzzy symmetric solution of fuzzy linear systems, J. Comput. Appl. Math. 235 (16) (2011) 4545–4553.

[17] T. Allahviranloo, R. Nuraei, M. Ghanbari, E. Haghi, A. A. Hosseinzadeh, A new metric for L–R fuzzy numbers and its application in fuzzy linear systems, Soft Computing 16 (2012) 1743–1754.

[18] M. Amirfakhrian, Numerical solution of a fuzzy system of linear equations with polynomial parametric form, Int. J. Comput. Math. 84(7) (2007) 1089–1097.

[19] B. Asady, S. Abbasbandy, M. Alavi, Fuzzy general linear systems, Applied Mathematics and Computation 169 (2005) 34–40.

[20] J.J. Buckley, Y. Qu, Solving systems of linear fuzzy equations, Fuzzy Sets and Systems, 43 (1991) 33-43.

[21] S. Corsaro, M. Marino, Interval Linear Systems: the State of the Art, Computational Statistics 21 (2006) 365–383.

[22] M. Dehghan, B. Hashemi, M. Ghatee, Computational methods for solving fully fuzzy linear systems, Appl. Math. Comput. 179 (2006) 328-343.

[23] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy numbers: an overview, in: J. Bezdek (Ed.), Analysis of Fuzzy Information, CRC Press, 1987, pp. 112–148.

[24] R. Ezzati, Solving fuzzy linear systems, Soft Comput. 15 (1) (2011) 193–197.

[25] J.A. Ferreira, F. Patricio, F. Oliveira, A priori estimates for the zeros of interval polynomials, J. Comput. Appl. Math. 136 (2001) 271–281.

[26] J.A. Ferreira, F. Patricio, F. Oliveira, On the computation of solutions of systems of interval polynomial equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 173 (2005) 295–302.

[27] M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik, J. Rohn, K. Zimmermann (Eds.), Linear Optimization Problems with Inexact Datam, Springer, 2006.

[28] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Systems 96 (1998) 201–209.

[29] J. Garloff, Interval Gaussian elimination with pivot tightening, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 30 (2009) 1761–1772.

[30] M. Ghanbari, T. Allahviranloo, Fuzzy inclusion linear systems, Fuzzy Sets and Systems, submitted for publication.

[31] M. Ghanbari, T. Allahviranloo, E. Haghi, Estimation of algebraic solution by limiting the solution set of an interval linear system, Soft Comput 16 (2012) 2135–2142.

[32] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984) 215–229.

[33] B. Kearfott, V. Kreinovich (Eds.), Applications of Interval Computations, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[34] J. Kuttler, A Fourth-order Finite-Difference Approximation for the Fixed Membrane Eigenproblem, Math. Comp. 25 (1971) 237–256.

[35] S. Markov, An iterative method for algebraic solution to interval equations, Applied Numerical Mathematics 30 (1999) 225–239.

[36] G. Mayer, On regular and singular interval systems, Journal of Computational and Applied Mathematics 199 (2007) 220–228.

[37] S. Muzzilio, H. Reynaerts, Fuzzy linear system of the form A1x+b1= A2x+b2 Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 939-951

[38] I.A. Nikas, T.N. Grapsa, Bounding the zeros of an interval equation, Applied Mathematics and Computation 213 (2009) 466–478.

[39] R. Nuraei, T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Finding an inner estimation of the solution set of a fuzzy linear system, Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 5148–5161.

[40] W. Oettli, W. Prager, Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, Numer. Math. 6 (1964) 405–409.

[41] O.A. Prokopyev, S. Butenko, A. Trapp, Checking solvability of systems of interval linear equations and inequalities via mixed integer programming, European Journal of Operational Research 199 (2009) 117–121.

[42] B.T. Polyak, S.A. Nazin, Interval solutions for interval algebraic equations, Mathematics and Computers in Simulation 66 (2004) 207–217.

[43] P. Sevastjanov, L. Dymova, A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case, Information Sciences 179 (2009) 925–937.

[44] S. Shary, Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations, Reliable Computing 3 (2) (1997) 103–135.

[45] C. Wu, M. Ming, On embedding problem of fuzzy number space: Part 1, Fuzzy Sets and Systems 44 (1991) 33–38.

[46] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338–353.

[47] H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

Abstract

In this paper, at first, fully interval linear system and fully fuzzy linear system have been investigated and some the methods the solving fully fuzzy linear system have been explained briefly. After defining new concept, namely standard interval splitting, we express new method for solving fully interval linear system which is able to achieve any algebraic solution. In the lost chapter with the help of proposed method for solving fully interval linear system, a new method for solving fully fuzzy linear system is introduced. The thesis is going to be finished by solving some numerical examples.

Islamic Azad University

Science and Research Branch

Faculty of Science – Department of Applied Mathematics

Thesis Ph.D.

On Applied Mathematical

Subject:

The Solving Fuzzy Linear Systems by using Interval Linear Systems and Their Applications

Supervisors:

Dr. TofighAllahviranloo

Dr. Saied Abbasbandy

Advisor:

Dr. Mirmozaffar Masoumi

By:

Ali Asghar hosseinzadeh

Summer 2013