

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات تهران

دانشکده علوم پایه

رساله

جهت اخذ درجه دکتری در رشته ریاضی کاربردی

عنوان:

بررسی روش های آنالیز هوموتوپي و طيفي برای حل معادلات ديفرانسيل شديداً
غیر خطی روی دامنه های نیمه نامتناهی

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل بابلان و دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور:

دکتر شهنام جوادی

پژوهش و نگارش: سید محمد حسینی حرّات

آبان ۱۳۹۳

چکیده

مدل‌بندی بسیاری از پدیده‌ها و مسائل طبیعی غالباً به حل معادلات غیرخطی منجر می‌شود. مشکلات موجود در مسیر حل این مسائل و به‌دست آوردن یک جواب تحلیلی باعث می‌شود تا از روش‌های عددی استفاده کنیم. هدف از این پژوهش، بررسی و حل انواع معادلات دیفرانسیل پدید آمده روی دامنه‌های بزرگ به دلیل کاربردهای مهندسی و صنعتی می‌باشد.

در این رساله، ابتدا مفاهیم مقدماتی و شرح مختصری از روش باقی‌مانده‌های وزنی به‌عنوان یک روش کلی و بسیار قدرتمند برای به‌دست آوردن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل ارائه شده است. سپس روش آنالیز هوموتوپیک به‌عنوان یک روش توانمند برای حل معادلات غیرخطی بیان می‌کنیم. در ادامه، یک روش عددی بر اساس ترکیبی از روش شبه طیفی با یک پارامتر مقیاس‌گر مثبت برای حل معادله‌ی جریان ناپایدار گاز معرفی شده است. این روش به‌حل مسائل روی دامنه‌های نیمه‌متناهی بدون برش آن به یک دامنه‌ی متناهی می‌پردازد. در پایان نیز یک بهبود جدید از روش آنالیز هوموتوپیک برای حل نوسان‌گرهای به‌شدت غیرخطی ارائه شده است.

کلمات کلیدی: توابع پایه‌ای؛ روش هم‌محلی؛ توابع گویای متعامد؛ روش آنالیز هوموتوپیک؛ روش آنالیز هوموتوپیک - طیفی چند مرحله‌ای؛ نوسان‌گرهای غیرخطی.

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار
۳	۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۴	۱.۱ مقدمه
۴	۲.۱ معادلات دیفرانسیل
۶	۳.۱ توپولوژی و هوموتوپي
۸	۴.۱ روش باقی مانده های وزنی
۱۱	۱.۴.۱ روش هم مکانی
۱۱	۲.۴.۱ روش کمترین مربعات
۱۲	۳.۴.۱ روش گالرکین
۱۳	۵.۱ روش های طیفی
۱۵	۱.۵.۱ چند جمله ای های متعامد
۱۸	۲.۵.۱ مسائل شتورم-لیوویل
۲۰	۳.۵.۱ چند جمله ای های ژاکوبی
۲۲	۶.۱ روش های انتگرال گیری گاوسی
۲۸	۱.۶.۱ چند جمله ای های لژاندر
۲۹	۲.۶.۱ چند جمله ای های چبیشف
۳۳	۲ روش آنالیز هوموتوپي
۳۴	۱.۲ مقدمه

۳۸	معادله‌ی دگر دیسی مرتبه صفر	۲.۲
۴۰	معادلات دگر دیسی مراتب بالاتر	۳.۲
۴۲	قضایای همگرایی	۴.۲
۴۴	قواعد اساسی	۵.۲
۴۵	کنترل ناحیه و سرعت همگرایی	۶.۲
۴۶	h -منحنی	۱.۶.۲
۴۷	هوموتوپی تعمیم یافته	۷.۲

۳ ترکیب روش طیفی با یک پارامتر مقیاس گر مثبت ۴۹

۵۰	روش‌های طیفی در بازه‌های بی‌کران	۱.۳
۵۰	استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد در بازه‌های نیمه‌متناهی و نامتناهی	۱.۱.۳
۵۴	روش برش دامنه	۲.۱.۳
۵۵	روش نگاشت‌ها	۳.۱.۳
۵۷	توابع گویای لژاندر	۴.۱.۳
۵۸	توابع گویای چبیشف	۵.۱.۳
۵۹	همگرایی تقریب به وسیله‌ی توابع گویای چبیشف و لژاندر	۶.۱.۳
۶۲	پارامتر مقیاس گر L	۷.۱.۳
۶۶	معادله‌ی جریان ناپایدار گاز	۲.۳
۶۸	روش طیفی برای حل معادله‌ی جریان ناپایدار گاز	۱.۲.۳
۷۰	نتایج عددی	۲.۲.۳

۴ روش آنالیز هوموتوپی-طیفی چندمرحله‌ای برای حل معادلات نوسانگرهای به شدت ۴

۷۵	غیر خطی	
۷۶	مقدمه	
۷۷	نوسان گرهای به شدت غیر خطی	 ۱.۴
۸۱	روش آنالیز هوموتوپی-طیفی چندمرحله‌ای	 ۲.۴

۱.۲.۴	روش آنالیز هوموتوپیی برای حل نوسان گرهای به شدت غیرخطی	۸۱
۲.۲.۴	روش آنالیز هوموتوپیی-طیفی جدید	۸۴
۳.۲.۴	روش آنالیز هوموتوپیی-طیفی چندمرحله‌ای	۸۶
۳.۴	حل چند نمونه از نوسان گرهای به شدت غیرخطی	۸۸
۱.۳.۴	سیستم آونگ چرخشی	۸۹
۲.۳.۴	نوسانات جرم متصل به یک سیم الاستیک تحت کشش	۹۰
۳.۳.۴	معادله‌ی ون در پل	۹۱

۹۲ مراجع

۹۲ مراجع

۱۰۵ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

لیست تصاویر

۶۴	نمودار چگونگی توزیع نقاط گره‌ای کاوس - رادو از تابع گویای چبیشف به‌ازای $N = ۴۰$ برای مقادیر مختلف L .	۱.۳
۶۵	نمودارهای تابع گویای چبیشف به‌ازای مقادیر مختلف L برای $N = ۰, ۱, ۲, ۳$.	۲.۳
۷۱	ضرایب چبیشف برای مقادیر متفاوتی از L .	۳.۳
۷۱	خط و نقطه: پاده $[۳, ۳]$ ، خط قطعه: پاده $[۲, ۲]$ ، خط: روش پیشنهادی و دایره روش شوتینگ برای $\alpha = ۰/۵$.	۴.۳
۷۲	تقریب برای $y(x)$ با استفاده از روش پیشنهادی برای مقادیر متفاوت α هنگامی که $N = ۳۰$ و $L = ۴$.	۵.۳
۷۲	خطای باقیمانده برای $\alpha = ۰/۵$ ، $N = ۳۰$ و $L = ۴$.	۶.۳
۱.۴	فرو ریختن پل تاکوما ناروز در اثر ارتعاش ناشی از باد، این پل در ۱ ژوئیه سال ۱۹۴۰ افتتاح شد و در ۷ نوامبر سال ۱۹۴۰ فرو ریخت [۱۰۸].	۷۹
۲.۴	سیستم آونگ چرخشی [۱۰۳].	۸۹
۳.۴	نمودارهای جایجایی (الف-ج) و فاز (د-و): روش پیشنهادی (خط)، روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم (نقطه).	۹۰
۴.۴	سیستم جرم متصل به یک سیم الاستیک تحت کشش [۱۰۴، ۱۰۵].	۹۱
۵.۴	نمودارهای جایجایی (الف-ج) و فاز (د-و): روش پیشنهادی (خط)، روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم (نقطه).	۹۲
۶.۴	نمودارهای جایجایی (الف-ج) و فاز (د-و): روش پیشنهادی (خط)، روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم (نقطه).	۹۳

پیشگفتار

معادلات دیفرانسیل به شدت غیرخطی روی دامنه‌های نیمه‌نامتناهی به عنوان یکی از مهمترین مسائل موجود در مهندسی مکانیک و همچنین روش‌های آنالیز هوموتوپي و طیفی به عنوان ابزارهای توانمند برای حل این‌دسته از مسائل محور اصلی تحقیق در این پایان‌نامه می‌باشند. بنابراین در ابتدا به بررسی و معرفی تحقیقات اخیر در زمینه حل عددی معادلات دیفرانسیل غیرخطی می‌پردازیم. سپس به حل برخی از مسائل کاربردی این دسته از معادلات اشاره داشته و بدین ترتیب انگیزه‌های محققان برای مطالعات بیشتر برای ارائه راه‌حل‌های جدید و کارآمد روشن می‌گردد. این مطالعه با هدف توسعه روش‌های آنالیز هوموتوپي و طیفی صورت گرفته و گزارش آن به طور خلاصه بدین شرح است:

ابتدا در بخش اول، به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی لازم می‌پردازیم. این بخش همچنین شامل تاریخچه مختصری از روش‌های طیفی می‌باشد. در ادامه در بخش دوم، روش آنالیز هوموتوپي به عنوان ابزار اصلی حل معادلات غیرخطی معرفی می‌شود. بخش سوم پس از گزارش مختصری از روش‌های طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل به شدت غیرخطی روی دامنه‌های نیمه‌نامتناهی، چگونگی حل معادله جریان ناپایدار گاز با استفاده ترکیب روش طیفی با یک پارامتر مقیاس‌گر مثبت توضیح می‌دهد. بخش چهارم با ترکیب روش طیفی و روش آنالیز هوموتوپي، یک روش جدید به نام روش آنالیز هوموتوپي - طیفی قطعه‌ای برای حل معادلات نوسانگرهای به شدت غیرخطی روی دامنه‌ی بزرگ می‌پردازد.

ضمناً در انتهای پایان‌نامه، پس از مباحث تکمیلی و نتیجه‌گیری، پیشنهاداتی در این زمینه برای علاقمندان ارائه شده است.

فصل ۱

تعاريف و مفاهيم اوليه

۱.۱ مقدمه

در این فصل به طور مختصر به مفاهیمی که در این پایان نامه به آن ها نیاز است اشاره می کنیم. ابتدا با معادلات دیفرانسیل آشنا می شویم. سپس با تعریف فضای توپولوژیک به بیان مفهوم هوموتوپی در توپولوژی می پردازیم. در نهایت روش باقیمانده وزنی و قواعد انتگرال گیری گوسی ارائه می کنیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۱ یک معادله دیفرانسیل معادله ای است شامل یک تابع مجهول و مشتقات آن و هدف از حل آن معادله یافتن تابع مجهول است. چنانچه در این معادله دیفرانسیل مشتقات توابع فقط نسبت به یک متغیر ظاهر شوند آن را یک معادله دیفرانسیل معمولی^۱ می نامند.

تعریف ۲.۲.۱ چنانچه در یک معادله دیفرانسیل مشتقات توابع نسبت به چند متغیر ظاهر شده باشند آن را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی^۲ می نامند.

تعریف ۳.۲.۱ بزرگترین مرتبه ی مشتق ظاهر شده در یک معادله دیفرانسیل معمولی را مرتبه آن معادله می نامند. شکل کلی یک معادله معمولی مرتبه n - ام به صورت

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

می باشد.

تعریف ۴.۲.۱ در یک معادله ی دیفرانسیل که با تابع مجهول y است، چنانچه هیچ جمله غیرخطی از y و مشتقات آن در معادله موجود نباشد معادله را خطی و در غیر این صورت معادله را غیرخطی می نامند. شکل

^۱ Ordinary differential equation

^۲ Partial differential equation

کلی یک معادله‌ی خطی مرتبه n - ام به صورت

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = a_{n+1}(x)$$

است، که ضرایب $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n+1$ ، توابعی معلوم هستند که در بازه‌ای مانند I تعریف شده‌اند.

که اگر $a_{n+1}(x) \equiv 0$ باشد معادله همگن و در حالت $a_{n+1}(x) \neq 0$ معادله غیرهمگن نامیده می‌شود.

معادلات دیفرانسیل خطی معمولی را می‌توان به کمک روش‌های تحلیلی حل کرد، اما اغلب با معادلات دیفرانسیل غیرخطی‌ای مواجه هستیم که نمی‌توان جواب تحلیلی آن‌ها را به دست آورد.

تعریف ۵.۲.۱ در یک معادله دیفرانسیل چنانچه مقدار تابع و مشتقات آن به عنوان شرایط جنبی تنها در یک نقطه داده شده باشند آن را یک مساله مقدار اولیه می‌نامند. شکل کلی یک مساله مقدار اولیه مرتبه n - ام

به صورت

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$y(a) = \alpha_0, \quad y'(a) = \alpha_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(a) = \alpha_{n-1}$$

است، که در آن a و α_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$ ثابت‌های داده شده‌ای هستند.

حرکت یک آونگ ساده در حال نوسان تحت مفروضات ساده معینی را می‌توان با معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

توصیف کرد، که در آن L طول آونگ، g ثابت ثقل زمین، $\theta(t)$ زاویه آونگ با وضعیت قائم یا حالت تعادل آن

در لحظه t است. اگر وضعیت آونگ در شروع حرکت را با $\theta(t_0) = \theta_0$ و سرعت در آن نقطه را با $\theta'(t_0) = \theta'_0$

مشخص کنیم، با یک مساله مقدار اولیه مواجه هستیم. به علاوه به ازای مقادیر کوچک θ ، تقریب $\theta \approx \sin(\theta)$

برای ساده کردن این مساله به معادله خطی

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

به کار می‌رود.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید $f: E \rightarrow R^n$ روی E مشتقپذیر باشد، آنگاه $f \in C^1(E)$ ، اگر مشتق f یعنی

$$Df: E \rightarrow L(R^n)$$

روی E پیوسته باشد، که $L(R^n)$ فضای شامل تمام عملگرهای خطی روی R^n است.

تعریف ۷.۲.۱ فرض کنید E زیر مجموعه بازی از R^n باشد. گوییم تابع $f : E \rightarrow R^n$ در شرط لیپشیتز

روی E صدق می‌کند، هرگاه ثابت مثبت k چنان موجود باشد که برای هر $x, y \in E$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

تعریف ۸.۲.۱ تابع f روی E به طور موضعی لیپشیتز گفته می‌شود، هرگاه برای هر $x_0 \in E$ یک همسایگی

x_0 یعنی $N_\varepsilon(x_0) \subset E$ و ثابت $K_0 > 0$ چنان موجود باشند که برای هر $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$ داشته باشیم:

$$|f(x) - f(y)| \leq K_0|x - y|.$$

فرض کنید E یک زیر مجموعه بازی از R^n و $f : E \rightarrow R^n$ باشد. اگر $f \in C^1(E)$ آنگاه f روی E به طور موضعی لیپشیتز است.

(وجود و یکتایی جواب معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول)

فرض کنید $E = \{(x, y) \mid a < x < b, -\infty < y < \infty\}$ و تابع f بر E پیوسته باشد. هرگاه f نسبت

به متغیر y در شرط لیپشیتز صدق کند آنگاه مساله مقدار اولیه

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$y(a) = \alpha$$

دارای جواب یگانه‌ی $y(x)$ به ازای $a \leq x \leq b$ است.

۳.۱ توپولوژی و هوموتوپی

منشا پیدایش مفهوم فضای توپولوژیک^۱، بررسی خط اعداد حقیقی و فضای اقلیدسی و توابع پیوسته روی این فضاها بوده است. در این بخش، فضای توپولوژیک را تعریف می‌کنیم. تعریف فضای توپولوژی که اکنون تعریفی استاندارد است، با تلاش ریاضیدانان مختلفی مانند اویلر^۲، هاسدورف^۳، فرشه^۴ و دیگران در طی دهه‌های

^۱Topological space

^۲Euler

^۳Hausdorff

^۴Frechet

اولیه قرن ۱۹ انجام شد که تعریف‌های گوناگونی را پیشنهاد کردند ولی توافق آن‌ها بر سر مناسب‌ترین تعریف، پس از زمان طولانی حاصل شد.

تعریف ۱.۳.۱ یک توپولوژی روی یک مجموعه ناتهی X ، گردایه‌ای ناتهی چون τ از زیر مجموعه های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف : X و $\emptyset$ عضو τ هستند،

ب : اجتماع هر زیر گردایه دلخواه از اعضای τ عضو τ است،

ج : اشتراک هر زیر گردایه متناهی از اعضای τ به τ تعلق دارد.

تعریف ۲.۳.۱ مجموعه‌ی X همراه با توپولوژی τ ، یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود به علاوه فضای X با توپولوژی τ را با (X, τ) نمایش می‌دهیم. عناصر τ را زیر مجموعه‌های باز X می‌نامیم.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید (X, τ_1) و (Y, τ_2) دو فضای توپولوژیک باشند. نگاشت $f : X \rightarrow Y$ را یک نگاشت پیوسته گویند هرگاه به ازای هر زیر مجموعه‌ی باز Y مانند p ، مجموعه‌ی $f^{-1}(p)$ در X باز باشد.

اگر X یک مجموعه دلخواه باشد، آنگاه مجموعه‌ی توانی آن (مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های X) یک توپولوژی روی X تعریف می‌کند که این توپولوژی، توپولوژی گسسته نامیده می‌شود. در ادامه به تعریف هوموتوپ، که یک مفهوم اساسی در توپولوژی و مشتقات علم هندسه است، می‌پردازیم.

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنید $I = [0, 1]$ بازه‌ی واحد حقیقی، X و Y فضاهای توپولوژیک و f_1 و f_2 دو نگاشت پیوسته از X بتوی Y باشند. اگر نگاشت پیوسته‌ای چون $F : I \times X \rightarrow Y$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x عضو X :

$$F(0, x) = f_1(x), \quad F(1, x) = f_2(x)$$

آنگاه نگاشت‌های f_1 و f_2 را هوموتوپ و نگاشت F را یک هوموتوپ بین f_1 و f_2 می‌گوئیم و هوموتوپ بودن f_1 و f_2 را با $f_1 \sim f_2$ نمایش می‌دهیم.

به عبارت دیگر هر هوموتوپ، یک خانواده تک پارامتری از توابع پیوسته تعریف شده از فضای X بتوی Y است. اگر t پارامتر معرف زمان باشد، هنگامی که زمان از ۰ تا ۱ تغییر می‌کند، هوموتوپ F نمایشگر دگرذیسی

(تغییر شکل) پیوسته‌ی f_1 به f_2 است.

برای آشنایی بیشتر با هوموتوپی‌ها، یک نوع هوموتوپی ساده ولی در عین حال پر کاربرد را در مثال زیر معرفی می‌کنیم. فرض کنیم f_1 و f_2 دو نگاشت از X بتوی Y باشند. قرار می‌دهیم:

$$F(t, x) = tf_1(x) + (1-t)f_2(x)$$

واضح است که F یک هوموتوپی بین f_1 و f_2 است. در این پایان‌نامه به طور مکرر این هوموتوپی را به کار می‌بریم. هوموتوپی F ، هوموتوپی مستقیم الخط و در برخی مواقع هوموتوپی محدب نامیده می‌شود.

رابطه‌ی $\sim$ یک رابطه هم‌ارزی است. برای اثبات کافی است نشان دهیم سه خصوصیت رابطه هم‌ارزی برقرار است.

الف: به ازای هر تابع مفروض مانند f قرار می‌دهیم $0 \leq t \leq 1$ ، $F(t, x) = f(x)$ ، بنابراین $f \sim f$.

ب: فرض کنید $f_1 \sim f_2$ و F هوموتوپی بین f_1 و f_2 باشد. حال قرار می‌دهیم $G(t, x) = F(1-t, x)$ ، در این صورت G یک هوموتوپی بین f_1 و f_2 است، یعنی $f_1 \sim f_2$.

ج: فرض کنیم $f_1 \sim f_2$ با هوموتوپی F_1 و $f_2 \sim f_3$ با هوموتوپی F_2 ، نشان می‌دهیم که $f_1 \sim f_3$. برای این کار کافی است نگاشت $G: I \times X \rightarrow Y$ را به صورت

$$G(t, x) = \begin{cases} F_1(2t, x), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_2(2t - 1, x), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

تعریف کنیم، واضح است که $f_1 \sim f_3$ با هوموتوپی G .

۴.۱ روش باقی‌مانده‌های وزنی

روش باقی‌مانده‌های وزنی یک روش کلی و بسیار قدرتمند برای به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی برای معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشد. بعلاوه بسیاری از روش‌های عددی موجود مانند روش حجم‌های متناهی، روش عناصر متناهی، روش تفاضلات متناهی و روش‌های طیفی بر پایه‌ی این روش بنا شده‌اند. در این روش جواب معادله به صورت ترکیب خطی از توابع پایه در نظر گرفته می‌شود. عناصر کلیدی در این روش توابع پایه و توابع آزمون می‌باشند. توابع آزمون به کار می‌روند تا سری بریده شده در معادله دیفرانسیل را تا حد ممکن برقرار سازند. این امر به کمک کمینه‌سازی تابع باقی‌مانده انجام می‌گیرد.

ایده‌ی اصلی این روش برای اولین بار توسط کراندال^۱ [۵۹] ارائه و در ادامه توسط فینلیسون^۲ و اسکریون^۳ [۶۴]، ویچنوتسکی^۴ [۶۲] و فینلیسون [۶۳] گسترش یافت.

به منظور بررسی روش باقی‌مانده‌های وزنی، معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{N}u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۱.۱)$$

$$\mathcal{L}u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (۲.۱)$$

که در آن $\Omega : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ ، توابع حقیقی مقدار، $u(\mathbf{x})$ تابع مجهول، Ω دامنه‌ی تعریف معادله، Γ مرز ناحیه‌ی Ω و $\mathcal{N}$ و $\mathcal{L}$ عملگرهای دیفرانسیل هستند. برای حل این معادله در ابتدا جواب تقریبی را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم

$$u_N(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i B_i(\mathbf{x}), \quad (۳.۱)$$

که در آن α_i ‌ها ضرایب بسط، $B_i(\mathbf{x})$ ‌ها توابع پایه‌ای و N تعداد این توابع می‌باشند. این توابع پایه‌ای معمولاً به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که شرایط خاصی مانند شرایط مرزی مسئله و شرط پیوستگی تابع تقریب را برآورده سازند. در این روش هدف یافتن α_i ‌ها است. بدین منظور جواب تقریبی (۳.۱) را در (۱.۱) و (۲.۱) جای‌گذاری کرده و توابع باقی‌مانده زیر را تشکیل می‌دهیم

$$Res(\mathbf{x}) = \mathcal{N}u_N(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}), \quad (۴.۱)$$

$$Res_B(\mathbf{x}) = \mathcal{L}u_N(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}). \quad (۵.۱)$$

چون در عمل تعداد توابع پایه‌ای در نظر گرفته شده در (۳.۱)، N ، کوچک است لذا در حالت کلی $Res(\mathbf{x}) \neq 0$ و $Res_B(\mathbf{x}) \neq 0$. اما می‌توان توابع پایه‌ای را به گونه‌ای انتخاب کرد که یکی از دو تابع باقی‌مانده صفر شود. براین اساس می‌توان جواب تقریبی را به سه روش زیر به‌دست آورد.

۱. روش مرزی^۵: در این روش توابع پایه‌ای به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $Res(\mathbf{x}) = 0$

^۱ Crandall

^۲ Finlayson

^۳ Scriven

^۴ Vichnevetsky

^۵ Boundary method

۲. روش درونی^۱: در این روش توابع پایه‌ای به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $Res_B(\mathbf{x}) = 0$

۳. روش آمیخته^۲: در این روش توابع پایه‌ای به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $Res(\mathbf{x}) \neq 0$ و $Res_B(\mathbf{x}) \neq 0$

۰

در اینجا روش باقی‌مانده‌های وزنی بر پایه روش درونی را شرح می‌دهیم. برای به دست آوردن α_i ها فرض می‌کنیم

$$\int_{\Omega} Res(\mathbf{x}) w_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6.1)$$

که در آن $w_i(\mathbf{x})$ ها توابع آزمون می‌باشند. اگر این $w_i(\mathbf{x})$ ها اعضای مجموعه‌ی کاملی از توابع باشند، آن‌گاه هنگامی که $N \rightarrow \infty$ ، می‌توان نتیجه گرفت که تابع باقی‌مانده باید بر هر عضو مجموعه‌ی کامل عمود باشند. این ایجاب می‌کند که باقی‌مانده وقتی $N \rightarrow \infty$ به صفر همگرا شود و در نتیجه انتظار می‌رود که جواب تقریبی $u_N(\mathbf{x})$ به جواب دقیق معادله‌ی (۱.۱) نزدیک گردد. از رابطه‌ی (۶.۱) به یک دستگاه N معادله و N مجهول بر حسب ضرایب α_i رسیده که با حل آن می‌توان جواب تقریبی مسئله را به دست آورد. اهمیت معادله (۶.۱) در این است که انتخاب‌های متفاوت از توابع وزن با روش‌های مختلف متناظر می‌باشد. رایج‌ترین این روش‌ها عبارتند از:

• روش هم‌مکانی^۳

• روش کمترین مربعات^۴

• روش گالرکین^۵

که در اینجا به طور مختصر به شرح آن‌ها می‌پردازیم.

^۱ Interior method

^۲ Mixed method

^۳ Collocation

^۴ Least squares

^۵ Galerkin

۱.۴.۱ روش هم‌مکانی

روش هم‌مکانی ساده‌ترین روش باقیمانده‌های وزنی است. در این روش توابع آزمون به صورت

$$w_i(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7.1)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن $\delta(\mathbf{x})$ تابع دلتای دیراک می‌باشد. بنا بر ویژگی تابع دلتای دیراک

$$\int_{\Omega} Res(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) d\mathbf{x} = Res(\mathbf{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8.1)$$

و لذا رابطه‌ی (۶.۱) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$Res(\mathbf{x}_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (9.1)$$

در این‌جا با افزایش مقدار N تابع باقی‌مانده در نقاط بیشتر و بیشتری و احتمالاً همه‌جا صفر می‌گردد. این روش نخستین بار توسط اسلتر^۱ [۶۸] برای حل معادله‌ی مرزهای انرژی الکترونیکی در فلزات به کار گرفته شد. کاربردهای نوین‌تر از آن و هم‌چنین نامگذاری این روش به فریزر^۲ و هم‌کاران [۶۵] برمی‌گردد. آن‌ها توابع پایه‌ای مختلفی را به کار بردند و از نقاط هم‌مکانی متفاوتی استفاده کردند. لانکزوس [۶۷] جواب را بر حسب چندجمله‌ای‌های چبیشف بسط داد و از صفرهای این چندجمله‌ای‌ها برای نقاط هم‌مکانی استفاده کرد. جین^۳ [۶۶] یک روش هم‌مکانی با نقاط فراوان را با استفاده از صفرهای چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل مسائل جریان سیالات معرفی کرد. او از ویژگی کمینه‌سازی بیشینه خطای چبیشف استفاده نمود. وی این روش را با روش نیوتن ترکیب کرد تا جواب‌های بهتری به دست آورد.

۲.۴.۱ روش کمترین مربعات

در روش کمترین مربعات به جای کمینه‌سازی مستقیم تابع باقی‌مانده، α_i ها به‌قسمی انتخاب می‌شوند که تابع

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N) = \int_{\Omega} Res(\mathbf{x}) Res(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (10.1)$$

^۱Slater

^۲Frazer

^۳Jain

کمینه باشد. برای کمینه‌سازی این تابع، مشتقات آن را نسبت به ضرایب α_i موجود در (۳.۱) برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = 2 \int_{\Omega} Res(\mathbf{x}) \frac{\partial Res(\mathbf{x})}{\partial \alpha_i} d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (11.1)$$

بنابراین در این روش فرم توابع آزمون به صورت

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial Res(\mathbf{x})}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (12.1)$$

خواهد بود. روش کمترین مربعات در سال ۱۷۹۵ توسط گاوس^۱ [۶۳] برای تخمین حداقل مربعات ایجاد شد و قدیمی‌ترین روش باقی‌مانده‌های وزنی است. پیکن^۲ [۶۹] در سال ۱۹۲۸ از این روش برای حل معادلات دیفرانسل استفاده نمود. معادلات تولید شده در این روش در بسیاری از موارد سنگین و پیچیده هستند ولی با این وجود روش کمترین مربعات دارای کاربردهای زیادی در حل مسائل بدووضع موجود در مهندسی راکتورهای هسته‌ای می‌باشد [۷۰].

۳.۴.۱ روش گالرکین

روش گالرکین را می‌توان به عنوان بهبودی از روش کمترین مربعات در نظر گرفت که در آن به جای استفاده از مشتق‌های تابع باقی‌مانده نسبت به ضرایب مجهول، به عنوان توابع آزمون، مشتق‌های جواب تقریبی (۳.۱) نسبت به ضرایب را به عنوان توابع آزمون انتخاب می‌کنیم:

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial u_N(\mathbf{x})}{\partial \alpha_i} = B_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (13.1)$$

بنابراین در روش گالرکین توابع آزمون از همان خانواده توابع پایه‌ای می‌باشد. در این روش توابع آزمون و پایه باید از N تابع اول مجموعه کاملی از توابع انتخاب شوند. این شرط لازم برای همگرایی به جواب دقیق، هنگامی که $N \rightarrow \infty$ می‌باشد. همچنین در این روش توابع پایه به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در شرایط مرزی همگن صدق کنند. علاوه بر این، استفاده از توابع پایه‌ای متعامد در این روش منجر به آسان‌تر شدن روند محاسبات برای N های بزرگ‌تر می‌شود. روش گالرکین توسط مهندسی روسی به همین نام در سال ۱۹۱۵ معرفی گردید. بسیاری از کاربردهای این روش توسط کولاتز^۳ [۷۵]، فینلیسون و اسکریون^۴ [۶۴]، فینلیسون

^۱Gauss

^۲Picone

^۳Collatz

[۶۳]، دانکن^۱ [۷۳، ۷۲]، دانکن و لیندزی^۲ [۷۴]، ایمز^۳ [۷۱] و فلچر^۴ [۷۶] ارائه شده است.

۵.۱ روش‌های طیفی

روش‌های طیفی در چند دهه‌ی اخیر رشد چشم‌گیری داشته و به سرعت توسعه داده شده است. این روش‌ها ابزار مهمی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل بوده و به‌طور وسیع در شبیه‌سازی عددی در زمینه‌های مختلف نظیر انتقال حرارت، دینامیک سیالات، مکانیک کوانتوم و غیره به‌کار گرفته شده است.

در بخش پیشین شالوده اصلی روش‌های طیفی یعنی، روش باقی‌مانده‌های وزنی را معرفی کردیم. در این بخش به معرفی کامل‌تری از روش‌های طیفی می‌پردازیم. در روش‌های طیفی تابع جواب به صورت یک سری از توابع پایه‌ای به شکل زیر تقریب زده می‌شود:

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i \psi_i(x), \quad (14.1)$$

که در آن $\psi_i(x)$ ها توابع پایه‌ای هستند که با توجه به متناوب بودن یا نبودن جواب مسئله مورد نظر می‌توانند توابع مثلثاتی یا چندجمله‌ای‌های متعامد ژاکوبی^۵ باشند. نکته اساسی در روش‌های طیفی انتخاب توابع پایه‌ای و توابع آزمون می‌باشد. توابع پایه به عنوان توابع تقریب در بسط جواب مسئله به کار می‌روند و توابع آزمون برای تضمین اینکه سری بدست آمده برای تقریب تابع جواب، با حداکثر دقت ممکن در معادله صدق کند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. انتخاب توابع پایه‌ای تفاوت اصلی روش‌های طیفی و روش‌های موضعی مانند عناصر متناهی و تفاضلات متناهی می‌باشد. چون در روش‌های موضعی مانند عناصر متناهی و تفاضلات متناهی توابع پایه موضعی‌اند یعنی در هر زیر دامنه متفاوت‌اند، ولی در روش‌های طیفی توابع پایه‌ای به صورت فراگیر و در کل دامنه تعریف، تابع جواب را تقریب می‌زنند. روش‌های طیفی به دو زیرشاخه اصلی تقسیم می‌شوند:

◀ روش‌های درونیاب یا شبه طیفی

^۴Scriven

^۱Duncan

^۲Lindsay

^۳Ames

^۴Fletcher

^۵Jacobi orthogonal polynomials

در روش‌های شبه طیفی به هر مجموعه پایه، شبکه‌ای از نقاط (گره‌ها) تحت عنوان نقاط هم‌مکانی یا نقاط درونیابی وابسته می‌شود. در این روش ضرایب تابعی معلوم، مانند $f(x)$ با برابر قرار دادن مقدار سری بریده شده و مقدار تابع $f(x)$ در نقاط هم‌مکانی به دست می‌آیند. به‌طور مشابه جواب تقریبی یک معادله دیفرانسیل نیز با برابر صفر قرار دادن تابع باقی‌مانده در نقاط هم‌مکانی حاصل می‌شود. این روش ساده‌ترین نوع روش‌های طیفی بوده و قابل کاربرد برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی و معادلات دیفرانسیل با ضرایب متغیر نیز می‌باشد. زیرشاخه‌ی غیردرونیاب این روش‌ها شامل روش‌های گالرکین و تاو^۱ می‌باشد. در این روش‌ها هیچ شبکه‌ای از نقاط درونیاب وجود ندارد و ضرایب تابعی معلوم مانند $f(x)$ توسط ضرب $f(x)$ در توابع پایه‌ای و انتگرال‌گیری روی یک دامنه‌ی مشخص به دست می‌آیند. از لحاظ تاریخی ابتدا روش‌های غیر درونیاب گسترش یافته‌اند، به همین دلیل برخی عنوان طیفی را فقط برای این روش‌ها به کار می‌برند. در روش گالرکین توابع آزمون از جنس توابع پایه می‌باشند و بعلاوه این توابع در شرایط مرزی مسئله صدق می‌کنند. این روش پرکاربردترین روش طیفی می‌باشد و اولین کاربردهای روش‌های طیفی نیز استفاده از روش گالرکین برای حل معادلات با مشتقات جزئی بوده است. با این حال روش گالرکین برای حل معادلات غیر خطی پیچیده معمولاً قابل کاربرد نیست و با مشکل مواجه می‌شود [۷۷]. روش تاو را می‌توان به صورت یک روش گالرکین اصلاح شده در نظر گرفت. در این روش، مشابه روش گالرکین، توابع پایه و توابع آزمون از یک جنس می‌باشند، ولی برخلاف روش گالرکین نیازی نیست که توابع آزمون در شرایط مرزی مسئله صدق کنند بلکه شرایط مرزی به صورت چند محدودیت به مسئله اضافه می‌شود. این روش نیز مانند روش گالرکین برای حل معادلات غیرخطی پیچیده قابلیت کمی دارد [۷۷].

پس از معرفی روش‌های طیفی بی‌درنگ سوالات اساسی زیر راجع به سری جواب (۱۴.۱) برای این روش‌ها مطرح می‌شوند که توابع پایه‌ای $\psi_i(x)$ چگونه باید انتخاب شوند و همگرایی این سری چگونه است؟ با بررسی جداگانه‌ی روش‌های طیفی برای مسائل متناوب و غیر متناوب می‌توان به این سوالات پاسخ مناسبی داد. وقتی که جواب مسائل مورد بحث متناوب باشند شناخته‌ترین روش طیفی، استفاده از بسط توابع متناوب به صورت سری فوریه می‌باشد. در سری فوریه توابع پایه‌ای توابع مثلثاتی سینوسی و کسینوسی با فرکانس‌های متفاوت می‌باشند. انتخاب توابع پایه‌ای مثلثاتی متناوب در روش فوریه، روندی کلی را برای محاسبه ضرایب

^۱Tau

بسط فراهم کرده و همگرایی طیفی را نیز برای توابع بی‌نهایت بار متناوب و هموار تضمین می‌کند. اما وقتی که مسائل متناوب نباشند، استفاده از پایه‌های مثلثاتی دیگر کارا نیست. بهترین و موثرترین توابع پایه‌ای که برای این مسائل غیرمتناوب معرفی شده‌اند چند جمله‌ای‌های ژاکوبی هستند. با انتخاب چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به عنوان توابع پایه، روش‌های موثری برای بدست آوردن ضرایب بسط در دسترس می‌باشند و همگرایی طیفی نیز برای سری قابل دستیابی است. در این رساله بر روی روش‌های طیفی بر اساس چندجمله‌ای‌های ژاکوبی متمرکز می‌شویم، بنابراین لازم است تا نگاهی به این چندجمله‌ای‌ها و خواص مربوط به آن‌ها داشته باشیم.

۱.۵.۱ چندجمله‌ای‌های متعامد

تعریف ۱.۵.۱ فرض کنید $w(x)$ تابعی پیوسته، مثبت و انتگرال‌پذیر روی بازه‌ی (a, b) باشد، در این صورت فضای $L_w^2(a, b)$ متشکل از تمام توابع اندازه‌پذیری مانند $u(x)$ است که

$$\int_a^b |u(x)|^2 w(x) dx < \infty. \quad (۱۵.۱)$$

ضرب داخلی برای این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(u, v)_w = \int_a^b u(x)v(x)w(x)dx, \quad \forall u, v \in L_w^2(a, b). \quad (۱۶.۱)$$

همچنین نرم القاء شده توسط این ضرب داخلی در فضای $L_w^2(a, b)$ به صورت زیر قابل بیان است:

$$\|u\|_w = \left(\int_a^b |u(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (۱۷.۱)$$

تعریف ۲.۵.۱ یک چندجمله‌ای جبری از درجه‌ی n به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$p_n(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0, \quad k_n \neq 0. \quad (۱۸.۱)$$

که در آن $\{k_i\}_{i=0}^n$ ثابت‌های حقیقی هستند و k_n ضریب جمله‌ی پیشرو $p_n(x)$ است. چندجمله‌ای تکین، چندجمله‌ایی است که دارای ضریب جمله‌ی پیشرو یک باشد. چندجمله‌ای تکین مربوط به $p_n(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{p}_n(x) = \frac{p_n(x)}{k_n} = x^n + a_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + \dots + a_0^{(n)}, \quad (۱۹.۱)$$

که در آن $a_n^{(j)} = k_j/k_n$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

تعریف ۳.۵.۱ دنباله‌ی چندجمله‌ای‌های $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ را نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامد گوییم، هرگاه

$$(p_n, p_m)_w = \int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = \gamma_n \delta_{mn}, \quad (20.1)$$

که در آن $\gamma_n = \|p_n\|_w^2$ و مخالف صفر بوده و δ_{mn} نشان دهنده‌ی تابع دلتای کرونکر است.

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که برای هر تابع وزن داده شده روی بازه‌ی (a, b) ، یک خانواده‌ی یکتا از چندجمله‌ای‌های

متعامد تولید شده به‌وسیله‌ی یک فرمول سه جمله‌ای بازگشتی وجود دارد.

قضیه ۴.۵.۱ [۷۸] برای هر تابع وزن $w(x) \in L^1(a, b)$ ، یک دنباله‌ی یکتا از چندجمله‌ای‌های متعامد

تکین $\{\bar{p}_n\}_{n=0}^{\infty}$ وجود دارد که می‌تواند به‌صورت زیر تولید شود:

$$\begin{aligned} \bar{p}_0(x) &= 1, \\ \bar{p}_1(x) &= x - \alpha_0, \end{aligned} \quad (21.1)$$

$$\bar{p}_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\bar{p}_n(x) - \beta_n\bar{p}_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

که در آن

$$\alpha_n = \frac{(x\bar{p}_n, \bar{p}_n)_w}{\|\bar{p}_n\|_w^2}, \quad n \geq 0, \quad (22.1)$$

$$\beta_n = \frac{\|\bar{p}_n\|_w^2}{\|\bar{p}_{n-1}\|_w^2}, \quad n \geq 1. \quad (23.1)$$

نتیجه ۵.۵.۱ [۷۸] اگر $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از چندجمله‌ای‌های متعامد، با ضریب پیشرو $k_n \neq 0$ باشد،

آن‌گاه داریم:

$$p_{n+1}(x) = (a_n x - b_n)p_n(x) - c_n p_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (24.1)$$

که در آن $p_0(x) = k_0$ و $p_{-1}(x) = 0$ و

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{k_{n+1}}{k_n}, \\ b_n &= \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{(xp_n, p_n)_w}{\|p_n\|_w^2}, \\ c_n &= \frac{k_{n+1}k_{n-1}}{k_n^2} \frac{\|p_n\|_w^2}{\|p_{n-1}\|_w^2}. \end{aligned} \quad (25.1)$$

نتیجه ۶.۵.۱ [۷۸] اگر $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنباله از اعداد حقیقی ناصفر باشد آن گاه رابطه‌ی سه جمله‌ای بازگشتی

(۲۱.۱) یک دنباله از چندجمله‌ای‌ها را طوری تولید می‌کند که :

- ضریب جمله‌ی پیشرو $p_n(x)$ برابر k_n ، و درجه‌ی آن برابر n است.

- $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ متعامد است.

- نرم $L_w^2(a, b)$ از $p_n(x)$ به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\gamma_n = \|p_n\|_w^2 = (a_0/a_n) c_1 c_2 \dots c_n \gamma_0, \quad n \geq 0,$$

که در آن

$$\gamma_0 = k_0^2 \int_a^b w(x) dx.$$

تعریف ۷.۵.۱ بسط تابع $u(x) \in L_w^2(a, b)$ در دستگاه چندجمله‌ای‌های متعامد $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ به صورت زیر

تعریف می‌شود:

$$Su(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{u}_n p_n(x),$$

که در آن $\hat{u}_n$ ضریب n ام بسط بوده و از رابطه‌ی زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\|p_n\|_w^2} (u, p_n)_w, \quad n \geq 0.$$

قضیه ۸.۵.۱ [۷۷] فرض کنید $u(x) \in L_w^2(a, b)$ و $P_N u(x)$ سری قطع شده‌ی درجه‌ی N تابع $u(x)$

به صورت زیر باشد:

$$P_N u(x) = \sum_{n=0}^N \hat{u}_n p_n(x),$$

آن گاه

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u - P_N u\|_w = 0,$$

به عبارتی دیگر دستگاه چندجمله‌ای‌های متعامد $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ در فضای $L_w^2(a, b)$ کامل است.

۲.۵.۱ مسائل شتورم-لیوویل

مسائل مقدار ویژه شتورم-لیوویل^۱ یکی از مسائل پر کاربرد در علوم ریاضی و فیزیک می‌باشد. این مسائل از مدل‌بندی مسائل ارتعاشات در فیزیک کوانتم بدست می‌آیند و در فیزیک توصیف‌کننده‌ی موج‌های هارمونیک و حرکت بر اساس قانون نیوتن هستند. مسائل مقدار ویژه شتورم-لیوویل دارای کاربردهای زیادی در حل مسائل مشتقات جزئی مانند معادلات گرما، موج و لاپلاس با استفاده از روش جداسازی متغیرها می‌باشند. با این حال کاربرد اصلی و با اهمیت مسائل مقدار ویژه شتورم-لیوویل در رابطه با روش‌های طیفی است. اهمیت مسائل شتورم-لیوویل برای روش‌های طیفی ناشی از این حقیقت است که در تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل، معمولاً جواب به شکل یک بسط متناهی از توابع ویژه یک مسئله شتورم-لیوویل مناسب در نظر گرفته می‌شود تا دقت طیفی برآورده شود.

یک مسئله شتورم-لیوویل، یک مسئله مقدار ویژه به شکل

$$-\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{du}{dx} \right] + q(x)u(x) = \lambda w(x)u(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (26.1)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} a_1 u(-1) + b_1 u'(-1) = 0, \\ a_2 u(+1) + b_2 u'(+1) = 0, \end{cases} \quad (27.1)$$

که در آن a_1, a_2, b_1, b_2 اعداد حقیقی و ثابتی هستند به گونه‌ای که $|a_1| + |b_1| > 0$ و $|a_2| + |b_2| > 0$. توابع $p(x), q(x)$ و $w(x)$ هر سه توابع حقیقی داده شده‌ای هستند به طوری که $p(x)$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ اکیدا مثبت و به طور پیوسته مشتق پذیر بوده و در نقاط $x = \pm 1$ نیز پیوسته است، $q(x)$ در بازه‌ی $(-1, 1)$ نامنفی، پیوسته و کران دار است و تابع وزن $w(x)$ در این بازه نامنفی و پیوسته است. در (۲۶.۱)، $\lambda \neq 0$ را یک مقدار ویژه و جواب معادله دیفرانسیل متناظر با این مقدار ویژه را تابع ویژه مسئله شتورم-لیوویل می‌نامند. در حالت کلی مسائل شتورم-لیوویل به دو دسته‌ی زیر تقسیم بندی می‌شوند:

◀ مسائل شتورم-لیوویل منظم

◀ مسائل شتورم-لیوویل منفرد

^۱ Sturm-Liouville

اگر در مسئله شتورم-لیوویل (۲۶.۱) تابع $p(x)$ در بازه $[-1, 1]$ اکیداً مثبت باشد آن را منظم و اگر این تابع حداقل در یکی از نقاط مرزی صفر باشد آن را نامنظم یا منفرد می‌نامند. از ویژگی‌های مهم مسائل شتورم-لیوویل (منظم و منفرد) این است که مقادیر ویژه این مسائل تشکیل یک دنباله از اعداد حقیقی و بی‌کران می‌دهند. همچنین توابع ویژه این مسائل یک پایه متعامد یک‌ه را برای فضای $L_w^2(-1, 1)$ فراهم می‌کنند [۷۹].

همان طور که قبلاً اشاره شد نکته‌ی جالب استفاده از مسائل شتورم-لیوویل در روش‌های طیفی در این است که با بسط یک تابع بی‌نهایت هموار بر حسب توابع ویژه‌ی آن، دقت طیفی تضمین می‌گردد. البته چنانچه گاتلیب و اورزاگ^۱ اشاره کرده‌اند، همه‌ی مسائل شتورم-لیوویل دارای چنین خاصیتی نیستند. آن‌ها نشان دادند که هر تابع بی‌نهایت هموار مانند $u(x)$ را می‌توان به صورت یک سری از توابع ویژه مسئله شتورم-لیوویل منفرد بسط داد و ضریب k ام این بسط سریع‌تر از هر توان منفی k به صفر میل می‌کنند، یعنی بسط تقریبی تابع دارای دقت طیفی است. اما در مورد توابع ویژه‌ای که از مسائل شتورم-لیوویل منظم به دست می‌آیند، باید این نکته را خاطر نشان کرد که در حالت کلی نمی‌توانند دقت طیفی را تضمین کنند، مگر اینکه تابع هموار تقریب زده شده در شرایط مرزی اضافه‌ای صادق باشد. برای روشن‌تر شدن بحث مسئله‌ی شتورم-لیوویل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0, \\ u'(-1) = u'(1) = 0. \end{cases} \quad (28.1)$$

این مسئله دارای مقادیر ویژه $\lambda_n = \pi^2 n^2 / 4$ و توابع ویژه‌ی $\psi_n(x) = \cos(n\pi(x+1)/2)$ است. نتایج نشان می‌دهند که بسط کسینوسی یک تابع هموار روی $(-1, 1)$ به وسیله این توابع ویژه زمانی دارای دقت طیفی است که کلیه مشتقات فرد این تابع روی مرز صفر باشند، که این خود ناشی از این حقیقت است که تابع $p(x)$ روی مرز صفر نیست، یعنی مسئله شتورم-لیوویل (۲۸.۱) منظم است.

به دلیل ویژگی‌های مفیدی که چندجمله‌ای‌ها در مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی دارند در بین مسائل شتورم-لیوویل منفرد، اهمیت ویژه‌ای با مسائلی است که توابع ویژه‌ی آن‌ها به صورت چندجمله‌ای هستند. در این میان چندجمله‌ای‌های ژاکوبی^۲ تنها توابع ویژه مسائل شتورم-لیوویل تکین هستند که به صورت چندجمله‌ای

^۱ Gottlieb and Orszag

^۲ Jacobi polynomials

نوشته می‌شوند [۷۷]. لذا در ادامه به معرفی این چندجمله‌ای‌ها و بررسی خواص آن‌ها می‌پردازیم.

۳.۵.۱ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی $J_n^{\alpha,\beta}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ، توابع ویژه مسئله شتورم-لیوویل تکین (۲۶.۱) با شرایط زیر هستند

$$w^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \beta > -1,$$

$$p^{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha+1}(1+x)^{\beta+1}, \quad q^{\alpha,\beta}(x) = 0,$$

و مقدار ویژه متناظر با هر تابع ویژه $J_n^{\alpha,\beta}(x)$ به صورت $\lambda_n^{\alpha,\beta} = n(n + \alpha + \beta + 1)$ است.

قضیه ۹.۵.۱ [۷۸] چندجمله‌ای‌های ژاکوبی با رابطه‌ی بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$J_0^{\alpha,\beta}(x) = 1, \quad J_1^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta), \quad (29.1)$$

$$J_{n+1}^{\alpha,\beta}(x) = (a_n^{\alpha,\beta}x - b_n^{\alpha,\beta})J_n^{\alpha,\beta}(x) - c_n^{\alpha,\beta}J_{n-1}^{\alpha,\beta}(x), \quad n \geq 1,$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_n^{\alpha,\beta} &= \frac{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}{2(n+1)(n + \alpha + \beta + 1)}, \\ b_n^{\alpha,\beta} &= \frac{(\beta^2 - \alpha^2)(2n + \alpha + \beta + 1)}{2(n+1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)}, \\ c_n^{\alpha,\beta} &= \frac{(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}{(n+1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

به علاوه با توجه به اینکه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی توابع ویژه یک مسئله شتورم - لیوویل منفرد می‌باشند، این چند جمله‌ای‌ها در بازه $(-1, 1)$ نسبت به تابع وزن $w^{\alpha,\beta}(x)$ متعامدند و رابطه تعامد برای آنها به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_{-1}^1 J_n^{\alpha,\beta}(x) J_m^{\alpha,\beta}(x) w^{\alpha,\beta}(x) dx = \gamma_n^{\alpha,\beta} \delta_{mn}, \quad (30.1)$$

$$\gamma_n^{\alpha,\beta} = \|J_n^{\alpha,\beta}\|_{w^{\alpha,\beta}}^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2n+\alpha+\beta+1)n!} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},$$

که در آن δ_{mn} تابع دلتای کرونکر می‌باشد. یک فرمول صریح برای تعریف چندجمله‌ای ژاکوبی درجه‌ی n به صورت زیر می‌باشد

$$J_n^{\alpha,\beta}(x) = 2^{-n} \sum_{j=0}^n \binom{n+\alpha}{j} \binom{n+\beta}{n-j} (x-1)^{n-j} (x+1)^j. \quad (31.1)$$

با جایگزینی $-x$ به جای x در (۳۱.۱)، به این نتیجه می‌رسیم که، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی متقارن هستند. به عبارت دیگر:

$$J_n^{\alpha,\beta}(-x) = (-1)^n J_n^{\alpha,\beta}(x),$$

و این بدان معنی است که چندجمله‌ی ژاکوبی $J_n^{\alpha,\beta}(x)$ برای هر n زوج، تابعی زوج و برای هر n فرد، تابعی فرد هستند. چندجمله‌ای‌های ژاکوبی را می‌توان از فرمول رودریگز^۱ زیر نیز به دست آورد:

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta J_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}].$$

برای چندجمله‌ای‌های ژاکوبی روابط زیر برقرار است:

$$\frac{d}{dx}(J_n^{\alpha,\beta}(x)) = \frac{1}{2}(n+1+\alpha+\beta)J_{n-1}^{\alpha+1,\beta+1}(x), \quad (32.1)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} J_n^{\alpha,\beta}(x) \frac{d}{dx} J_m^{\alpha,\beta}(x) w^{\alpha+1,\beta+1}(x) dx = \lambda_n^{\alpha,\beta} \gamma_n^{\alpha,\beta} \delta_{mn}, \quad (33.1)$$

$$J_{n-1}^{\alpha,\beta}(x) = J_n^{\alpha,\beta-1}(x) - J_n^{\alpha-1,\beta}(x), \quad (34.1)$$

$$J_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{n+\alpha+\beta} [(n+\beta)J_n^{\alpha,\beta-1}(x) + (n+\alpha)J_n^{\alpha-1,\beta}(x)]. \quad (35.1)$$

از رابطه‌ی (۳۳.۱) در می‌یابیم که دنباله‌ی مشتق چندجمله‌ای‌های ژاکوبی، $\left\{ \frac{d}{dx} J_n^{\alpha,\beta}(x) \right\}_{n=0}^\infty$ ، نیز نسبت به تابع وزن $w^{\alpha+1,\beta+1}(x)$ متعامدند.

بسط سری تابع $u(x) \in L_w^2(-1, 1)$ با استفاده از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی به صورت زیر است

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n J_n^{\alpha,\beta}(x), \quad (36.1)$$

که در آن ضرایب بسط با استفاده از ضرب داخلی زیر محاسبه می‌شوند.

$$a_n = \frac{1}{\gamma_n^{\alpha,\beta}} (u, J_n^{\alpha,\beta})_{w^{\alpha,\beta}} = \frac{1}{\gamma_n^{\alpha,\beta}} \int_{-1}^1 u(x) J_n^{\alpha,\beta}(x) w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

برای هر عدد طبیعی N سری قطع شده تابع $u(x)$ از درجه N به صورت زیر است:

$$p_N u(x) = \sum_{n=0}^N a_n J_n^{\alpha,\beta}(x). \quad (37.1)$$

^۱Rodrigues' formula

تحت رابطه‌ی (۱۶.۱)، $p_N u(x)$ تصویر متعامد^۱ تابع $u(x)$ در فضای $P_N(-1, 1)$ ، فضای همه چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه N روی بازه $(-1, 1)$ ، می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$(p_N u, v)_{w^{\alpha, \beta}} = (u, v)_{w^{\alpha, \beta}}, \quad u \in P_N(-1, 1). \quad (38.1)$$

کامل بودن مجموعه چندجمله‌ای‌های ژاکوبی $\{J_n^{\alpha, \beta}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ نتیجه می‌دهد که برای هر تابع $u(x) \in L_w^2(-1, 1)$ خواهیم داشت:

$$\|u - p_N u\|_w \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty.$$

۶.۱ روش‌های انتگرال‌گیری گاوسی

انتگرال‌گیری عددی فرآیند تولید یک مقدار عددی برای انتگرال یک تابع بر روی یک مجموعه است. اهمیت این موضوع زمانی آشکار می‌شود که تابع زیر انتگرال هیچ پادمشتق صریحی نداشته یا مقادیر پادمشتق آن به آسانی به دست نمی‌آید. ایده‌های متفاوتی برای انتگرال‌گیری عددی وجود دارد که می‌توان آن‌ها را در سه دسته‌ی زیر خلاصه کرد:

◀ ایده‌هایی بر اساس درونیابی

◀ ایده‌های گاوسی

◀ ایده‌های ریچاردسن (برونیابی)

به دلیل تعاملی که بین چندجمله‌ای‌های متعامد و فرمول انتگرال‌گیری گاوس^۲ وجود دارد، در این جا نگاهی اجمالی به موضوع روش انتگرال‌گیری گاوسی و فرمول‌های حاصل از آن خواهیم داشت.

فرمول انتگرال‌گیری گاوس در جستجوی بهترین تقریب عددی یک انتگرال به وسیله‌ی انتخاب نقاط گره‌ای

بهینه است. روش انتگرال‌گیری گاوس متعلق به خانواده‌ی روش‌های انتگرال‌گیری عددی به صورت کلی

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^N w_j f(x_j) + E_N[f], \quad (39.1)$$

^۱ Orthogonal projection

^۲ Gauss-type quadrature

است، که در آن $\{x_j\}_{j=0}^N$ و $\{w_j\}_{j=0}^N$ به ترتیب گره‌ها و وزن‌های انتگرال‌گیری بوده و $E_N[f]$ خطای انتگرال‌گیری است. اگر $E_N[f] = 0$ ، گوییم فرمول انتگرال‌گیری (۳۹.۱) برای تابع $f(x)$ دقیق است.

فرض که گره‌های $\{x_j\}_{j=0}^N$ متمایز هستند. اگر $f(x) \in C^{N+1}[a, b]$ داریم:

$$E_N[f] = \frac{1}{(N+1)!} \int_a^b f^{(N+1)}(\xi(x)) \prod_{j=0}^N (x - x_j) dx, \quad (40.1)$$

که $\xi(x) \in [a, b]$ می‌دانیم که چندجمله‌ای‌های پایه‌ای لاگرانژ بر اساس نقاط گره‌ای $\{x_j\}_{j=0}^N$ به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر به دست آورده می‌شوند:

$$h_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (41.1)$$

با قرار دادن $f(x) = h_j(x)$ در رابطه‌ی (۳۹.۱) و استفاده از رابطه‌ی (۳۹.۲)، وزن‌های انتگرال‌گیری به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_j = \int_a^b h_j(x) w(x) dx, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (42.1)$$

گوییم فرمول انتگرال‌گیری (۳۹.۱) دارای درجه‌ی دقت m است هرگاه

$$\forall p(x) \in P_m \Rightarrow E_N[p] = 0, \quad (43.1)$$

با این شرط که حداقل یک $q(x) \in P_{m+1}$ وجود داشته باشد به قسمی که $E_N[q] \neq 0$.

به طور کلی برای هر $N+1$ گره متمایز $\{x_j\}_{j=0}^N \subseteq (a, b)$ ، درجه‌ی دقت^۱ برای (۳۹.۱) بین N و $2N+1$ است. به علاوه اگر گره‌های $\{x_j\}_{j=0}^N$ از صفرهای چندجمله‌ای متعامد $p_{N+1}(x)$ نسبت به وزن $w(x)$ انتخاب شده باشند، این قاعده بیشینه‌ی درجه‌ی دقت یعنی $2N+1$ را دارا است. این قاعده، به قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوس معروف است. بنابراین چندجمله‌ای‌های متعامد در این قاعده، به خاطر بالا بردن دقت جواب بسیار اهمیت دارند و این همان رابطه‌ای است که در ابتدا به آن اشاره کردیم.

قضیه ۱.۶.۱ (انتگرال‌گیری گاوس) [۷۸] فرض کنید $\{x_j\}_{j=0}^N$ دنباله صفرهای چندجمله‌ای متعامد $p_{N+1}(x)$

باشد. در این صورت یک مجموعه‌ی یکتا از وزن‌های $\{w_j\}_{j=0}^N$ که به وسیله‌ی (۴۲.۱) تعریف می‌شود وجود دارد، به قسمی که

$$\int_a^b p(x) w(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j p(x_j), \quad \forall p(x) \in P_{2N+1}, \quad (44.1)$$

^۱ Degree of precision

که در آن وزن‌های انتگرال‌گیری همگی مثبت بوده و از رابطه‌ی

$$w_j = \frac{k_{N+1}}{k_N} \cdot \frac{\|p_N(x)\|_w^2}{p_N(x_j)p'_{N+1}(x_j)}, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (45.1)$$

به‌دست می‌آیند. در این‌جا k_j ضریب جمله‌ی پیش‌رو چندجمله‌ای $p_j(x)$ است.

توجه شود که همه‌ی گره‌های فرمول انتگرال‌گیری گاوس درون بازه‌ی (a, b) قرار دارند. این موضوع اعمال شرایط مرزی را مشکل می‌سازد. بنابراین اگر بخواهیم گره‌های انتگرال‌گیری نقاط مرزی را هم شامل شوند، از نقاط گره‌ای گاوس-رادو^۱ یا گاوس-لوباتو^۲ استفاده می‌نماییم.

قضیه ۲.۶.۱ (انتگرال‌گیری گاوس-رادو) [۷۸] فرض که $x_0 = a$ و $\{x_j\}_{j=1}^N$ صفرهای $q_N(x)$ به‌صورت

زیر باشند

$$q_N(x) = \frac{p_{N+1}(x) + \alpha_N p_N(x)}{x - a}, \quad (46.1)$$

که در آن

$$\alpha_N = -\frac{p_{N+1}(a)}{p_N(a)}. \quad (47.1)$$

در این‌صورت یک مجموعه‌ی یکتا از وزن‌های $\{w_j\}_{j=0}^N$ موجود است به‌قسمی‌که:

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^N w_j p(x_j), \quad \forall p(x) \in P_N. \quad (48.1)$$

به‌علاوه وزن‌های انتگرال‌گیری همگی مثبت بوده و می‌توان آن‌ها را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$w_0 = \frac{1}{q_N(a)} \int_a^b q_N(x)w(x)dx, \quad (49.1)$$

$$w_j = \frac{1}{x_j - a} \frac{k_{N+1}}{k_N} \frac{\|q_{N-1}(x)\|_{\tilde{w}}^2}{q_{N-1}(x_j)q'_N(x_j)}, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (50.1)$$

که در آن $\tilde{w}(x) = (x - a)w(x)$

^۱Gauss-Radau

^۲Gauss-Lobatto

قضیه ۳.۶.۱ (انتگرال گیری گاوس- لوباتو) [۷۸] فرض می کنیم $x_* = a$ و $x_N = b$ و $\{x_j\}_{j=1}^{N-1}$

صفرهای $q_{N-1}(x)$ باشند که $q_{N-1}(x)$ در رابطه ی زیر صدق می کند:

$$q_{N-1}(x) = \frac{p_{N+1}(x) + \alpha_N p_N(x) + \beta_N p_{N-1}(x)}{(x-a)(b-x)}, \quad (51.1)$$

و α_N و β_N به گونه ای هستند که برای $x = a$ و $x = b$

$$p_{N+1}(x) + \alpha_N p_N(x) + \beta_N p_{N-1}(x) = 0. \quad (52.1)$$

بنابراین یک مجموعه ی یکتا از وزن های انتگرال گیری $\{w_j\}_{j=0}^N$ وجود دارد، به قسمی که

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{j=0}^N w_j p(x_j), \quad \forall p(x) \in P_{N-1}, \quad (53.1)$$

که در آن

$$w_0 = \frac{1}{(b-a)q_{N-1}(a)} \int_a^b (b-x)q_{N-1}(x)w(x)dx, \quad (54.1)$$

$$w_j = \frac{1}{(x_j-a)(b-x_j)} \cdot \frac{k_{N+1}}{k_N} \cdot \frac{\|q_{N-2}(x)\|_{\hat{w}}^2}{q_{N-2}(x_j)q'_{N-1}(x_j)}, \quad 1 \leq j \leq N-1, \quad (55.1)$$

$$w_N = \frac{1}{(b-a)q_{N-1}(b)} \int_a^b (x-a)q_{N-1}(x)w(x)dx, \quad (56.1)$$

جایی که $\hat{w}(x) = (x-a)(b-x)w(x)$ به علاوه برای $1 \leq j \leq N-1$ ، $w_j > 0$.

حال به بررسی فرمول های انتگرال گیری گاوس برای چندجمله ای های ژاکوبی و در حالت های خاص تر آن یعنی

چندجمله ای های لژاندر و چبیشف می پردازیم.

قضیه ۴.۶.۱ [۷۸] فرمول انتگرال گیری ژاکوبی-گاوس برای چندجمله ای های از درجه حداکثر $2N+1$

دقیق می باشد، که در آن $\{x_j\}_{j=0}^N$ ، صفرهای $J_{N+1}^{\alpha,\beta}(x)$ می باشند. هم چنین وزن های انتگرال گیری از رابطه

زیر محاسبه می شوند،

$$w_j = \frac{C_N^{\alpha,\beta}}{J_N^{\alpha,\beta}(x_j)\partial_x J_{N+1}^{\alpha,\beta}(x_j)}, \quad 0 \leq j \leq N,$$

که در آن

$$C_N^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta}(2N+\alpha+\beta+2)\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{(N+1)!\Gamma(N+\alpha+\beta+2)}. \quad (57.1)$$

قضیه ۵.۶.۱ [۷۸] فرض کنید $x_0 = -1$ و $\{x_j\}_{j=1}^N$ صفرهای چندجمله‌ای $J_N^{\alpha, \beta+1}(x)$ باشند. همچنین

فرض کنید که وزن‌های انتگرال‌گیری نیز از فرمول‌های زیر محاسبه شوند

$$w_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\beta+1)\Gamma^2(\beta+1)N!\Gamma(N+\alpha+1)}{\Gamma(N+\beta+2)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)},$$

$$w_j = \frac{1}{1+x_j} \frac{C_{N-1}^{\alpha, \beta+1}}{J_{N+1}^{\alpha, \beta+1}(x_j) \partial_x J_N^{\alpha, \beta+1}(x_j)}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

به طوریکه $C_{N-1}^{\alpha, \beta}$ از رابطه (۵۷.۱) به دست می‌آید. در این صورت این انتگرال‌گیری که به انتگرال‌گیری ژاکوبی-گوس-رادو معروف است، برای چندجمله‌ای‌های $p(x) \in P_N$ دقیق می‌باشد.

قضیه ۶.۶.۱ [۷۸] فرض کنید $x_0 = -1, x_N = 1$ و $\{x_j\}_{j=1}^{N-1}$ صفرهای چندجمله‌ای $\partial_x J_N^{\alpha, \beta}(x)$ باشند.

همچنین فرض کنید که وزن‌های انتگرال‌گیری نیز از فرمول‌های زیر محاسبه شوند

$$w_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\beta+1)\Gamma^2(\beta+1)\Gamma(N)\Gamma(N+\alpha+1)}{\Gamma(N+\beta+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)},$$

$$w_N = \frac{2^{\alpha+\beta+1}(\alpha+1)\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(N)\Gamma(N+\beta+1)}{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+2)},$$

$$w_j = \frac{1}{1-x_j} \frac{C_{N-2}^{\alpha+1, \beta+1}}{J_{N-2}^{\alpha+1, \beta+1}(x_j) \partial_x J_{N-1}^{\alpha+1, \beta+1}(x_j)}, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

به طوریکه $C_{N-2}^{\alpha+1, \beta+1}$ از رابطه (۵۷.۱) به دست می‌آید. در این صورت این انتگرال‌گیری که به انتگرال‌گیری ژاکوبی-گوس-لوباتو معروف است، برای چندجمله‌ای‌های $p(x) \in P_{N-1}$ دقیق می‌باشد.

برای هر کدام از فرمول‌های بالا و برای هر دو تابع u, v پیوسته روی بازه $[-1, 1]$ رابطه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(u, v)_N = \sum_{i=0}^N u(x_i) v(x_i) w_i. \quad (۵۸.۱)$$

این رابطه مرتبه دقت فرمول انتگرال‌گیری گوس را بیان می‌کند و برای هر تابع $uv \in P_{N+\delta}(-1, 1)$ داریم: ($\delta = -1, 0, 1$)

$$(u, v)_N = (u, v)_w.$$

$(u, v)_N$ یک ضرب داخلی در فضای $P_N(-1, 1)$ می باشد که به آن ضرب داخلی گسسته گویند و نرم متناظر با آن نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$\|u\|_N = (u, u)_N^{\frac{1}{2}}.$$

از تعامد چندجمله ای های ژاکوبی و ضرب داخلی گسسته (۵۸.۱) می توان نتیجه گرفت که

$$\left(J_m^{\alpha, \beta}, J_k^{\alpha, \beta} \right)_N = \gamma_k^{\alpha, \beta} \delta_{km}, \quad \gamma_k^{\alpha, \beta} = \left\| J_k^{\alpha, \beta} \right\|_N^2, \quad k, m = 0, 1, \dots, N.$$

با استفاده از فرمول انتگرال گیری می توان ضرایب بسط ژاکوبی برای هر تابع پیوسته روی بازه $[-1, 1]$ را یافت. این ضرایب از طریق رابطه ی

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\gamma_k} \left(u, J_k^{\alpha, \beta} \right)_N, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

محاسبه می شوند و به آن ها ضرایب گسسته ژاکوبی می گویند. رابطه ی فوق معادل است با این که بگوییم

$$u(x_j) = \sum_{k=0}^N \hat{a}_k J_k^{\alpha, \beta}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

با توجه به رابطه بالا می توان چندجمله ای درونیاب را برای هر تابع $u(x)$ به صورت

$$I_N u(x) = \sum_{k=0}^N \hat{a}_k J_k^{\alpha, \beta}(x), \quad (59.1)$$

تعریف کرد که در این صورت داریم:

$$I_N u(x_j) = u(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (60.1)$$

این تابع درونیاب تنها تابعی است که هر تابع پیوسته $u(x)$ را در نقاط انتگرال گیری و با عناصر $P_N(-1, 1)$ درونیابی می کند. حال برای هر تابع پیوسته $v(x)$ و طبق (۶۰.۱) رابطه زیر برقرار خواهد بود

$$(I_N u, v)_N = (u, v)_N. \quad (61.1)$$

این رابطه نشان می دهد که درونیاب $I_N u(x)$ تصویر متعامد تابع $u(x)$ در فضای $P_N(-1, 1)$ نسبت به ضرب داخلی گسسته (۵۸.۱) می باشد.

۱.۶.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر^۱ در $n = 0, 1, 2, \dots$ توابع ویژه‌ی مسئله شتورم-لیوویل تکین

$$\left((1-x^2)L'_n(x)\right)' + \lambda_n L_n(x) = 0,$$

هستند که در آن $\lambda_n = n(n+1)$ مقدار ویژه‌ی متناظر با تابع ویژه‌ی $L_n(x)$ است. با توجه به تعریف

مسئله شتورم-لیوویل تکین (۲۶.۱) مشخص می‌شود که در آن $p(x) = 1-x^2$ و $q(x) = 0$ و $w(x) = 1$

هستند. چندجمله‌ای‌های لژاندر حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی هستند که به ازای $\alpha = \beta = 0$

$L_n(x) = J_{n,0}^{0,0}(x)$ ، نتیجه می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان از رابطه‌ی بازگشتی زیر بدست آورد:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x,$$

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xL_n(x) - \frac{n}{n+1}L_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر در بازه $(-1, 1)$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ متعامدند و داریم:

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_m(x)dx = \gamma_n \delta_{mn}, \quad \gamma_n = \frac{2}{2n+1},$$

$$\int_{-1}^1 L'_n(x)L'_m(x)(1-x^2)dx = \gamma_n \lambda_n \delta_{mn}.$$

بسط سری هر تابع $u(x) \in L_w^2(-1, 1)$ بر اساس چندجمله‌ای‌های لژاندر به صورت زیر قابل بیان می‌باشد

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k L_k(x),$$

که ضرایب این بسط نیز با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$u_k = \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 u(x)L_k(x)dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

برای چندجمله‌ای‌های لژاندر خواص زیر برقرار است:

$$L_n(-x) = (-1)^n L_n(x), \quad L_n(\pm 1) = (\pm 1)^n \quad (1)$$

$$|L_n(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad n \geq 0, \quad (2)$$

^۱Legendre polynomials

$$(2n+1)L_n(x) = L'_{n+1}(x) - L'_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3)$$

$$(1-x^2)L'_n(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}(L_{n-1}(x) - L_{n+1}(x)). \quad (4)$$

قواعد انتگرال گیری برای چندجمله‌ای‌های لژاندر به اختصار به شرح زیر است:

- لژاندر-گاوس: در این روش نقاط انتگرال گیری، صفرهای $L_{N+1}(x)$ و وزن‌های انتگرال گیری از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_j = \frac{2}{(1-x_j)^2 (L'_{N+1}(x_j))^2}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

- لژاندر-گاوس-رادو: در این روش نقاط انتگرال گیری، صفرهای $L_N(x) + L_{N+1}(x)$ و وزن‌های انتگرال گیری از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_j = \frac{1}{(N+1)^2 (L_N(x_j))^2}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

- لژاندر-گاوس-لوباتو: در این روش نقاط انتگرال گیری، صفرهای $(1-x^2)L'_N(x)$ و وزن‌های انتگرال گیری از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$w_j = \frac{2}{N(N+1) (L_N(x_j))^2}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

۲.۶.۱ چندجمله‌ای‌های چبیشف

چندجمله‌ای‌های چبیشف^۱ $T_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ توابع ویژه‌ی مسئله شتورم-لیوویل تکین

$$\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}T'_n(x))' + \lambda_n T_n(x) = 0,$$

هستند که در آن $\lambda_n = n^2$ مقدار ویژه‌ی متناظر با تابع ویژه‌ی $T_n(x)$ است. با توجه به تعریف مسئله شتورم-

لیوویل تکین (۲۶.۱) مشخص می‌شود که در آن $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = 0$ و $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

هستند. چندجمله‌ای‌های چبیشف حالت خاصی از چندجمله‌ای‌های ژاکوبی هستند که به ازای $\alpha = \beta = 0$

^۱Chebyshev polynomials

$T_n(x) = J_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x)$ ، نتیجه می‌شوند. این چندجمله‌ای‌ها را می‌توان از رابطه‌ی بازگشتی زیر بدست آورد:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

با تغییر متغیر $x = \cos(\theta)$ در معادله دیفرانسیل فوق نتیجه می‌شود که

$$\frac{d}{d\theta} T_n(\theta) + \lambda_n T_n(\theta) = 0.$$

جواب این معادله به صورت زیر می‌باشد:

$$T_n(\theta) = \cos(n\theta).$$

این رابطه نشان می‌دهد که چندجمله‌ای‌های چبیشف را می‌توان به صورت زیر نیز به دست آورد:

$$T_n(\theta) = \cos(n \arccos(x)).$$

چندجمله‌ای‌های چبیشف در بازه $(-1, 1)$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ متعامدند و داریم:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{c_n\pi}{2} \delta_{mn}, \quad c_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \geq 1, \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 T'_n(x)T'_m(x)\sqrt{1-x^2} dx = \frac{n^2 c_n \pi}{2} \delta_{mn}.$$

بسط سری هر تابع $u(x) \in L_w^2(-1, 1)$ بر اساس چندجمله‌ای‌های چبیشف به صورت زیر قابل بیان می‌باشد

$$u(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k T_k(x),$$

که ضرایب این بسط نیز با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شوند:

$$u_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 \frac{u(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots.$$

برای چندجمله‌ای‌های چبیشف خواص زیر برقرار است:

$$2T_n(x) = \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x), \quad n \geq 2, \quad (1)$$

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x), \quad T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad (2)$$

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad |T'_n(x)| \leq n, \quad (3)$$

$$(1-x^2)T'_n(x) = \frac{n}{2}(T_{n-1}(x) - T_{n+1}(x)), \quad (4)$$

$$2T_m(x)T_n(x) = T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x), \quad m \geq n \geq 0, \quad (5)$$

$$T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1} n, \quad (6)$$

$$T''_n(\pm 1) = \frac{1}{2}(\pm 1)^n n(n^2 - 1). \quad (7)$$

قواعد انتگرال گیری برای چندجمله‌ای‌های چبیشف به اختصار به شرح زیر است:

- گاوس-چبیشف: در این روش نقاط و وزن‌های انتگرال گیری از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_j = \cos\left(\frac{(j+1)\pi}{2N+2}\right), \quad w_j = \frac{\pi}{N+1}, \quad 0 \leq j \leq N.$$

- گاوس-چبیشف-رادو: در این روش نقاط و وزن‌های انتگرال گیری از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{2N+1}\right), \quad w_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2N+1}, & j = 0, \\ \frac{j\pi}{2N+1}, & j = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

- گاوس-چبیشف-لوباتو: در این روش نقاط و وزن‌های انتگرال گیری از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad w_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2N}, & j = 0, N, \\ \frac{\pi}{N}, & j = 1, 2, \dots, N-1. \end{cases}$$

فصل ۲

روش آنالیز هوموتوپی

۱.۲ مقدمه

بیشتر پدیده‌های پیرامون ما دارای ماهیت غیرخطی بوده و با معادلات غیرخطی فرمول‌بندی می‌شوند. با توجه به این که با وجود آمدن کامپیوترهای پیشرفته، حل مسائل خطی آسان و آسان‌تر شد اما هنوز بحث در مورد حل دقیق یک مساله‌ی غیرخطی کاری دشوار است. با وجود این که ما در حال حاضر کامپیوترهای پیشرفته و همچنین نرم افزارهایی مانند میپل^۱، ممتیکا^۲ و شبیه آن‌ها را در اختیار داریم اما در اغلب موارد به‌دست آوردن جواب تحلیلی یک مساله غیرخطی داده‌شده مشکل است.

برخی از روش‌های تحلیلی برای حل مسائل غیرخطی مانند تکنیک‌های اختلال موجودند که بسیار مشهور و پرکاربردند. به‌وسیله‌ی روش‌های اختلال، تعداد زیادی از خصوصیات مهم و جالب پدیده‌های غیرخطی آشکار شدند (کشف نهمین سیاره منظومه شمسی نیز مدیون همین روش بوده است).

روش‌های اختلال با استفاده از کمیت‌های اختلال، یک مساله غیرخطی را به تعدادی نامتناهی از زیر مسائل خطی تبدیل کرده و آن را به‌وسیله‌ی مجموعی از جواب‌های چندین زیر مساله خطی اولیه، تقریب می‌زنند. روش‌های اختلال دارای دو مشکل زیر می‌باشند:

الف : یک مساله‌ی غیرخطی در حالت کلی شامل کمیت‌های اختلال نمی‌باشد، این یک ضعف آشکار روش‌های اختلال می‌باشد.

ب : روش‌های اختلال تنها برای حل مسائل غیرخطی ضعیف (شامل پارامترهای هستند که از لحاظ مقداری بسیار کوچک/بزرگ می‌باشند) ارزشمند هستند.

^۱ Maple

^۲ Mathematica

تعداد کمی از روش‌های غیراختلالی برای حل مسائل غیرخطی موجودند. لیاپانوف^۱ با معرفی پارامتر مصنوعی کوچک، از وابستگی روش‌های اختلال به پارامترهای کوچک/بزرگ جلوگیری کرد. او در سال ۲۹۸۱ معادله‌ی

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x$$

را در نظر گرفت، که $A(t)$ یک ماتریس تابع زمان و تناوبی است. لیاپانوف یک پارامتر مصنوعی ε ، برای جایگزینی این معادله با معادله‌ی

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon A(t)x$$

معرفی کرده و سپس سری توانی بر حسب ε را برای جواب معادله‌ی فوق، محاسبه کرد و در تعداد زیادی از حالت‌ها نشان داد که سری برای $\varepsilon = 1$ همگراست. بنابراین می‌توان با قرار دادن $\varepsilon = 1$ بسط جواب را به دست آورد. این روش را روش متغیر مصنوعی لیاپانوف می‌نامند. به طور آشکار این روش نیازمند به برخی قواعد پایه‌ای است تا مکانی که متغیر مصنوعی ε باید آنجا قرار گیرد را مشخص کند.

روش تجزیه آدومیان^۲ یک روش تحلیلی توانا برای حل مسائل غیرخطی است، که ایده آن بسیار ساده می‌باشد. در روش تجزیه مهم نیست که مسئله غیرخطی شامل پارامتر کوچک/بزرگ باشد و علاوه بر آن سرعت همگرایی سری تقریب زیاد است. تقریب داده شده به وسیله روش تجزیه اغلب شامل چند جمله‌ای‌ها می‌باشد و در حالت کلی ناحیه همگرایی سری توانی کوچک است، بنابراین مجموعه‌ی چند جمله‌ای‌ها اغلب نمی‌تواند پایه‌ای مناسب برای تقریب یک مساله غیرخطی باشد، اما متأسفانه روش تجزیه نمی‌تواند شرایطی را فراهم کند تا توابع پایه‌ای متفاوتی را برای تقریب مساله غیرخطی به کار ببریم. علاوه بر محدودیت فوق، روش تجزیه شبیه روش‌های قبلی نمی‌تواند راه مناسبی فراهم کند تا ناحیه و سرعت همگرایی سری تقریب با یکدیگر سازگار شوند.

کارآئی روش‌های بیان شده برای تقریب یک مساله غیرخطی کافی نیست و لازم است تا برخی روش‌های تحلیلی دیگر را گسترش دهیم به طوری که

^۱Lyapunov

^۲Adomian's decomposition method

الف : برای مسائل غیرخطی قوی ارزشمند باشند (شامل پارامترهای هستند که از لحاظ مقداری حتماً بسیار کوچک/بزرگ نمی‌باشند).

ب : یک راه مناسب فراهم کنند تا ناحیه و سرعت همگرایی سری تقریب با یکدیگر سازگار شوند.

ج : شرایطی فراهم کنند تا توابع پایه‌ای متفاوتی را برای تقریب مساله غیرخطی بتوان بکار برد.

یک نوع از این روش‌های تحلیلی که بر مبنای یک مفهوم اساسی در توپولوژی مطرح شده است روش آنالیز هوموتوپی نام دارد [۳۱، ۳۲، ۳۳، ۴۸]. ایده این روش نیز بسیار ساده است [۲۸]. برای مثال معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$N[u(t)] = 0, \quad (1.2)$$

که در آن N یک عملگر غیرخطی، t متغیر زمان و $u(t)$ تابع مجهول است. فرض کنید $u_0(t)$ نمایش یک تقریب اولیه‌ی $u(t)$ و L نمایش یک عملگر خطی کمکی باشد. در این صورت برای $f = 0$ داریم:

$$Lf = 0. \quad (2.2)$$

حال هوموتوپی H را به شکل

$$H[\phi(t; q), q] = (1 - q)L[\phi(t; q) - u_0(t)] + qN[\phi(t; q)], \quad (3.2)$$

تعریف می‌کنیم، که $q \in [0, 1]$ پارامتر جانشانی و $\phi(t; q)$ تابعی از t و q است. برای $q = 0$ و $q = 1$ به ترتیب داریم:

$$H[\phi(t; q), q] \Big|_{q=0} = L[\phi(t; 0) - u_0(t)]$$

و

$$H[\phi(t; q), q] \Big|_{q=1} = N[\phi(t; 1)]$$

با توجه به رابطه (۲.۲) به سادگی می‌توان نشان داد که جواب معادله‌ی

$$H[\phi(t; q), q] \Big|_{q=0} = 0$$

عبارت است از $\phi(t; 0) = u_0(t)$ و به همین ترتیب $\phi(t; 1) = u(t)$ جواب معادله‌ی

$$H[\phi(t; q), q] \Big|_{q=1} = 0$$

است. وقتی پارامتر جانشانی q از $\circ$ تا 1 افزایش می‌یابد، جواب معادله‌ی

$$H[\phi(t; q), q] = \circ$$

یعنی $\phi(t; q)$ وابسته به این پارامتر بوده و به طور پیوسته از تقریب اولیه $u_\circ(t)$ تا جواب دقیق $u(t)$ از معادله‌ی (۱.۲) تغییر می‌کند. در توپولوژی چنین تغییری را دگرذیسی^۱ می‌نامند. لیائو^۲ با استفاده از هوموتوپای رایج

(۳.۲)، پارامتر کمکی غیر صفر h و تابع کمکی غیر صفر $H(t)$ را معرفی کرد تا هوموتوپای جدید

$$\tilde{H}[\phi(t; q), q, h, H] = (1 - q)L[\phi(t; q) - u_\circ(t)] - qhH(t)N[\phi(t; q)], \quad (4.2)$$

را بسازد، که فرم عمومی‌تر (۳.۲) است، زیرا داریم:

$$\tilde{H}[\phi(t; q), q, -1, 1] = H(\phi; q).$$

به طور مشابه، هنگامی که q از $\circ$ تا 1 افزایش می‌یابد $\phi(t; q, h, H)$ از تقریب اولیه $u_\circ(t)$ تا جواب واقعی $u(t)$ از مساله غیرخطی اصلی تغییر می‌کند. اما، جواب $\phi(t; q, h, H)$ از معادله

$$\tilde{H}[\phi(t; q), q, h, H] = \circ \quad (5.2)$$

نه تنها وابسته به پارامتر جانشانی q است، بلکه به پارامتر کمکی h و تابع کمکی $H(t)$ نیز وابسته است. و لذا هنگامی که $q = 1$ شود جواب هنوز به پارامتر کمکی h و تابع کمکی $H(t)$ وابسته می‌ماند. متفاوت از هوموتوپای رایج (۳.۲)، هوموتوپای تعمیم یافته (۴.۲) می‌تواند یک خانواده از سری‌های تقریب که ناحیه همگرایی آن‌ها وابسته به پارامتر h و تابع $H(t)$ است را تولید کند، مهم‌تر این‌که این یک راه ساده برای سازگار کردن ناحیه و سرعت همگرایی سری‌های تقریب است.

روش آنالیز هوموتوپای به طور موفقیت آمیزی برای حل مسائل غیرخطی مانند مساله‌ی نوسان‌های غیرخطی [۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۸]، مساله‌ی جریان لایه‌های مرزی [۳۲، ۳۳، ۴۰، ۴۲]، مساله‌ی انتقال حرارت [۴۴، ۵۷]، مساله‌ی جریان‌های گذرنده از محیط متخلخل [۹] و معادله توماس - فرمی [۴۵]، مورد استفاده قرار گرفته است.

^۱ Deformation

^۲ Shijun Liao

۲.۲ معادله‌ی دگرذیسی مرتبه صفر

تعداد زیادی از مسائل غیرخطی به وسیله‌ی مجموعه‌ای از معادلات و شرایط اولیه یا مرزی فرمول‌بندی می‌شوند برای اختصار ما در این جا تنها معادله‌ی غیر خطی

$$N[u(r, t)] = g(r, t), \quad (۶.۲)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن N یک عملگر غیرخطی، $u(r, t)$ تابع مجهول، r و t به ترتیب نمایش‌دهنده‌ی متغیرهای مکان و زمان و $g(r, t)$ یک تابع معلوم می‌باشند. فرض می‌کنیم $u_0(r, t)$ یک تخمین اولیه از جواب واقعی $u(r, t)$ باشد و همچنین $h \neq 0$ پارامتر کمکی و $H(r, t) \neq 0$ تابع کمکی باشند و L یک عملگر خطی کمکی باشد. در این صورت برای $f = 0$ داریم:

$$Lf = 0. \quad (۷.۲)$$

حال با به کار بردن $q \in [0, 1]$ به عنوان پارامتر جانشانی، هوموتوپی

$$\begin{aligned} \tilde{H}[\phi(r, t; q); u_0(r, t), H, h, q] = \\ (1 - q) \{L[\phi(r, t; q) - u_0(r, t)]\} - qhH(r, t) \{N[\phi(r, t; q)] - g(r, t)\} \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

را می‌سازیم. با مساوی صفر قرار دادن رابطه (۸.۲)، به معادله‌ی

$$(1 - q) \{L[\phi(r, t; q) - u_0(r, t)]\} = qhH(r, t) \{N[\phi(r, t; q)] - g(r, t)\} \quad (۹.۲)$$

می‌رسیم، که به آن معادله‌ی دگرذیسی مرتبه صفر^۱ می‌گوئیم. $\phi(r, t; q)$ جواب معادله‌ی (۹.۲)، به وضوح به تخمین اولیه‌ی $u_0(r, t)$ ، عملگر خطی کمکی L ، تابع کمکی $H(r, t)$ ، پارامتر کمکی h و پارامتر جانشانی $q \in [0, 1]$ وابسته است. هنگامی که $q = 0$ ، معادله‌ی دگرذیسی مرتبه صفر (۹.۲) به معادله‌ی

$$L[\phi(r, t; 0) - u_0(r, t)] = 0 \quad (۱۰.۲)$$

تبدیل می‌شود، که با استفاده از (۷.۲) داریم:

$$\phi(r, t; 0) = u_0(r, t). \quad (۱۱.۲)$$

^۱Zero-order deformation equation

هنگامی که $q = 1$ ، از آنجا که $h \neq 0$ و $H(t) \neq 0$ ، معادله‌ی دگرذیسی مرتبه‌ی صفر هم‌ارز است با:

$$N[\phi(r, t; 1)] - g(r, t) = 0, \quad (12.2)$$

که جواب واقعی معادله‌ی (۶.۲) را تولید می‌کند یا به عبارت دیگر

$$\phi(r, t; 1) = u(r, t). \quad (13.2)$$

بنابراین با توجه به (۱۱.۲) و (۱۳.۲)، هنگامی که پارامتر جانشانی q از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، $\phi(r, t; q)$ به طور پیوسته از تخمین اولیه‌ی $u_0(r, t)$ تا جواب واقعی $u(r, t)$ از مساله اصلی (۶.۲) تغییر می‌کند. همانطور که گفته شد این نوع تغییر پیوسته را در هوموتوپای دگرذیسی می‌نامند. به همین دلیل معادله‌ی (۹.۲) را معادله‌ی دگرذیسی مرتبه صفر گوئیم.

مشتق مرتبه‌ی m - ام تابع $\phi(r, t; q)$ در $q = 0$ را به صورت

$$u_0^{[m]}(r, t) = \left. \frac{\partial^m \phi(r, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (14.2)$$

تعریف می‌کنیم. به وسیله‌ی قضیه‌ی تیلور $\phi(r, t; q)$ می‌تواند بایک سری توانی از q به شکل

$$\phi(r, t; q) = \phi(r, t; 0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_0^{[m]}(r, t)}{m!} q^m \quad (15.2)$$

بیان شود. می‌نویسیم

$$u_m(r, t) = \frac{u_0^{[m]}(r, t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(r, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (16.2)$$

و با استفاده از (۱۱.۲)، سری توانی (۱۵.۲) به شکل

$$\phi(r, t; q) = u_0(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) q^m \quad (17.2)$$

در می‌آید. توجه می‌کنیم که برای انتخاب تخمین اولیه‌ی $u_0(r, t)$ ، عملگر خطی کمکی L ، پارامتر کمکی غیر صفر h و تابع کمکی $H(r, t)$ آزادی عمل زیادی داریم. فرض کنیم تمام آن‌ها به طور مناسب انتخاب شوند. در این صورت:

الف: جواب $\phi(r, t; q)$ از معادله‌ی دگرذیسی مرتبه‌ی صفر (۹.۲) برای هر $q \in [0, 1]$ وجود دارد.

ب: $u_0^{[m]}(r, t)$ برای $m = 1, 2, 3, \dots$ موجود است.

ج: سری توانی (۱۷.۲) در $q = ۱$ همگراست.

بنابراین، از (۱۳.۲) و (۱۷.۲)، سری جواب

$$u(r, t) = u_0(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) \quad (۱۸.۲)$$

را داریم. این سری یک رابطه بین جواب واقعی $u(r, t)$ و تخمین اولیه‌ی $u_0(r, t)$ بوسیله‌ی $u_m(r, t)$ ها فراهم می‌کند که $u_m(r, t)$ ها توسط آنچه که معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر^۱ نامیده می‌شوند، تعیین می‌گردند، که در بخش بعدی به توصیف آن‌ها خواهیم پرداخت.

۳.۲ معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر

با توجه به رابطه (۱۶.۲) می‌توان معادله‌ی حاکم بر $u_m(r, t)$ را با استفاده از مشتق‌گیری از معادله‌ی دگرذیسی مرتبه صفر (۹.۲) نسبت به پارامتر جایگزینی q تعیین کرد.

بردار $\vec{u}_n$ را به صورت

$$\vec{u}_n = \{u_0(r, t), u_1(r, t), u_2(r, t), \dots, u_n(r, t)\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر m مرتبه از دو طرف معادله‌ی دگرذیسی مرتبه صفر نسبت به پارامتر q مشتق بگیریم و دو طرف معادله‌ی به‌دست آمده را بر $m!$ تقسیم کنیم و سرانجام q را مساوی صفر قرار دهیم به معادله‌ی دگرذیسی مرتبه $m - ۱$ ام

$$L[u_m(r, t) - \chi_m u_{m-1}(r, t)] = hH(r, t)R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) \quad (۱۹.۲)$$

می‌رسیم، که در آن R_m و χ_m به صورت

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \{N[\phi(r, t; q)] - g(r, t)\} \Big|_{q=0}, \quad (۲۰.۲)$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & o.w, \end{cases} \quad (۲۱.۲)$$

تعریف می‌شوند. با قرار دادن رابطه‌ی (۱۷.۲) در رابطه‌ی فوق، داریم:

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left\{ N \left[\sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) q^m \right] - g(r, t) \right\} \Big|_{q=0}. \quad (۲۲.۲)$$

^۱High-order deformation equation

حال توجه می‌کنیم که معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر خطی و غیرهمگن هستند که جمله‌ی غیرهمگن آن‌ها یعنی $R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t)$ برای هر عملگر غیرخطی داده شده، به‌وسیله‌ی (۲۰.۲) محاسبه می‌شود. با توجه به تعریف (۲۰.۲)، سمت راست معادله‌ی (۱۹.۲) تنها به $\vec{u}_{m-1}$ وابسته است. بنابراین، $u_1(r, t), u_2(r, t), \dots$ را یکی پس از دیگری، با حل معادلات خطی (۱۹.۲) به‌دست می‌آوریم. تقریب مرتبه‌ی m - ام از $u(r, t)$ به‌وسیله‌ی رابطه‌ی

$$u(r, t) \approx \sum_{k=0}^m u_k(r, t) \quad (23.2)$$

داده می‌شود. می‌توان معادله‌ی دگرذیسی مرتبه‌ی صفر را به حالت کلی‌تر نیز نوشت. به این منظور فرض کنید $A(q)$ و $B(q)$ دو تابع تحلیلی روی ناحیه‌ی $|q| \leq 1$ باشند و در روابط

$$A(0) = B(0) = 0, \quad A(1) = B(1) = 1 \quad (24.2)$$

صدق کنند و به علاوه فرض کنید

$$A(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k q^k, \quad B(q) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k q^k \quad (25.2)$$

به ترتیب نمایش‌دهنده‌ی سری‌های مکلورن توابع $A(q)$ و $B(q)$ باشند. با توجه به رابطه‌ی (۲۴.۲) داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1, \quad (26.2)$$

بنابراین معادله‌ی دگرذیسی مرتبه‌ی صفر تعمیم یافته را به صورت

$$[1 - B(q)] \{L[\phi(r, t; q) - u_0(r, t)]\} = A(q)hH(r, t) \{N[\phi(t; q)] - g(r, t)\} \quad (27.2)$$

می‌سازیم. تمام روابط مذکور مشابه‌اند به جز معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر که شکل جدید آن‌ها به صورت

$$L \left[u_m(r, t) - \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k u_{m-k}(r, t) \right] = hH(r, t) R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) \quad (28.2)$$

فرمول‌بندی می‌شوند، که در آن

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \delta_{m-k}(r, t) \quad (29.2)$$

است و δ به شکل

$$\delta_n(r, t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \{N[\phi(r, t; q)] - g(r, t)\}}{\partial q^n} \Big|_{q=0} \quad (30.2)$$

تعریف می‌شود. معادله‌ی دگرذیسی مرتبه‌ی صفر (۹.۲) و معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر (۱۹.۲) حالات خاصی از معادلات (۲۷.۲) و (۲۸.۲) هنگامی که $A(q) = B(q) = q$ هستند.

۴.۲ قضایای همگرایی

در حالت کلی نشان داده می‌شود تا زمانی که سری جواب (۱۸.۲) داده شده به وسیله روش آنالیز هوموتوپی

همگرا باشد، جواب مساله غیرخطی (۶.۲) هم خواهد بود. تا زمانی که سری

$$u_o(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t)$$

که در آن $u_m(r, t)$ توسط معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر (۲۸.۲) تحت تعریف‌های (۲۹.۲)، (۳۰.۲) و (۲۱.۲)

به دست می‌آید همگرا باشد سری فوق جواب معادله‌ی (۶.۲) نیز می‌باشد. فرض کنید

$$s(r, t) = u_o(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t)$$

نمایش سری همگرا باشد. با استفاده از (۲۸.۲)، داریم:

$$\begin{aligned} & hH(r, t) \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} L \left[u_m(r, t) - \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k u_{m-k}(r, t) \right] \\ &= L \left[\sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m-1} \beta_k u_{m-k}(r, t) \right] \\ &= L \left[\sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k+1}^{\infty} \beta_k u_{m-k}(r, t) \right] \\ &= L \left[\sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, t) \right] \\ &= L \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \right) \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t) \right] \\ &= L \left[\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \right) s(r, t) \right] \end{aligned}$$

از آن جا که $h \neq 0$ ، $H(r, t) \neq 0$ از (۲۶.۲) و (۷.۲) داریم:

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = 0 \quad (31.2)$$

از طرف دیگر بنابر تعاریف (۲۹.۲) و (۳۰.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m \alpha_k \delta_{m-k}(r, t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=k}^{\infty} \alpha_k \delta_{m-k} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \right) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(r, t) \end{aligned}$$

و از (۲۶.۲)، (۳۰.۲) و (۳۱.۲)

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(r, t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \{N[\phi(r, t; q)] - g(r, t)\}}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = 0. \end{aligned} \quad (32.2)$$

در حالت کلی، $\phi(r, t; q)$ نمی‌تواند جواب معادله‌ی (۶.۲) باشد. فرض کنید

$$\varepsilon(r, t; q) = N[\phi(r, t; q)] - g(r, t)$$

نمایش خطای باقیمانده از معادله‌ی (۶.۲) باشد. واضح است که

$$\varepsilon(r, t, q) = 0$$

مرتبط با جواب دقیق معادله‌ی (۶.۲) است. با توجه به تعریف فوق، سری مکلورن خطای باقیمانده $\varepsilon(r, t; q)$

نسبت به پارامتر q برابر است با:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} \frac{\partial^m \varepsilon(r, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^m}{m!} \frac{\partial^m \{N[(r, t; q)] - g(r, t)\}}{\partial q^m} \Big|_{q=0}$$

و هنگامی که $q = 1$ با استفاده از (۳۲.۲) داریم:

$$\varepsilon(r, t; 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varepsilon(r, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = 0 \quad (33.2)$$

لذا با توجه به تعریف $\varepsilon(r, t; q)$ و رابطه‌ی (۳۳.۲) جواب دقیق معادله‌ی (۶.۲) هنگامی که $q = 1$ ، به‌دست

می‌آید. فرض کنیم $u_m(t)$ مانند قضیه قبل باشد و سری

$$u_0(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_{r,m}(t)$$

همگرا باشد. آنگاه رابطه‌ی

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \delta_m(r, t) = 0$$

برقرار است. مرجع [۴۱]. توجه می‌کنیم که معادله‌ی (۱۹.۲) تنها حالت خاصی از معادله‌ی (۲۸.۲) است،

بنابراین قضیه زیر نیز برقرار است. اگر سری

$$u_0(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(r, t)$$

که در آن $u_m(r, t)$ توسط معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر (۱۹.۲) تحت تعریف‌های (۲۰.۲) و (۲۱.۲) به‌دست

می‌آید، همگرا باشد آن‌گاه سری فوق جواب معادله‌ی (۶.۲) است و همچنین رابطه‌ی

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = 0$$

برقرار می‌باشد. با توجه به قضیه‌های (۴.۲) و (۴.۲) باید تنها روی انتخاب تخمین اولیه $u_0(r, t)$ عملگر خطی کمکی L ، تابع‌های جانشانی $A(q)$ و $B(q)$ ، پارامتر کمکی h و تابع کمکی $H(r, t)$ تمرکز کنیم تا از همگرایی سری (۱۸.۲) مطمئن شویم.

۵.۲ قواعد اساسی

همانطور که گفته شد آزادی زیادی در انتخاب تخمین اولیه و عامل‌های کمکی داریم. بنابراین بهتر است قواعدی را معرفی کنیم تا با رعایت آن‌ها بتوانیم تخمین اولیه و پارامترهای کمکی را به نحو شایسته‌ای انتخاب کنیم. در ابتدا به دو نکته اساسی توجه می‌کنیم. اولاً جواب یک مساله‌ی غیرخطی ممکن است بوسیله‌ی توابع پایه‌ای متفاوتی بیان شود. ثانیاً در تعداد زیادی از حالت‌ها با توجه به خصوصیات فیزیکی و شرایط اولیه/مرزی مساله‌ی داده شده، مشخص کردن نوع توابع پایه‌ای مناسب برای تقریب جواب مساله‌ی داده شده، زیاد دشوار نیست. بنابراین با توجه به مساله غیرخطی و خصوصیات آن در ابتدا باید یک مجموعه از توابع پایه مناسب را برای تقریب جواب، انتخاب کنیم این نوع انتخاب را "قاعده‌ی بیان جواب" گوئیم. برای مثال یک مجموعه از توابع پایه‌ای به صورت

$$\{e_n(r, t) \mid n = 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad (34.2)$$

را انتخاب می‌کنیم، تا جواب $u(r, t)$ از معادله‌ی (۶.۲) را به‌وسیله‌ی

$$u(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n(r, t) \quad (35.2)$$

که در آن c_n ها ضرایب وابسته به h هستند، بیان کنیم. با توجه به رابطه‌ی (۳۵.۲) تخمین اولیه $u_0(r, t)$ باید به‌وسیله‌ی مجموعی از توابع پایه بیان شود، یا به عبارت دیگر

$$u_0(r, t) = \sum_{n=0}^{M_0} a_n e_n(r, t) \quad (36.2)$$

که در آن M_0 یک عدد طبیعی است و a_n ها ضرایبی هستند که با توجه به شرایط اولیه/مرزی محاسبه می‌شوند. عملگر خطی کمکی L باید طوری انتخاب شود که جواب معادله‌ی

$$L[w(r, t)] = 0$$

به وسیله‌ی مجموعی از توابع پایه، مثلاً به صورت

$$w(r, t) = \sum_{n=0}^{M_1} b_n e_n(r, t) \quad (37.2)$$

بیان شود، که در آن b_n ها ضرایبی ثابت هستند و عدد طبیعی M_1 توسط بالاترین مرتبه‌ی مشتق عملگر خطی کمکی مشخص می‌شود. جواب معادله‌ی دگرذیسی مرتبه بالاتر (28.2) می‌تواند به وسیله‌ی

$$u_m(r, t) = u_m^*(r, t) + w(r, t)$$

بیان شود که در آن $u_m^*(r, t)$ جواب خصوصی معادله‌ی (28.2) است. بنابراین تابع کمکی $H(r, t)$ باید به گونه‌ی انتخاب شود که جواب خصوصی $u_m^*(r, t)$ از معادله‌ی (28.2) به وسیله‌ی مجموعی از توابع پایه بیان شود، مثلاً

$$u_m^*(r, t) = L^{-1} [hH(r, t)R_m(\vec{u}_m, r, t)] = \sum_{n=0}^{M_2} d_n e_n(r, t) \quad (38.2)$$

که در آن d_n ها ضرایبی ثابت هستند و L^{-1} ، معکوس عملگر خطی کمکی L می‌باشد. قاعده‌ی بیان جواب ما را در انتخاب تخمین اولیه‌ی $u_o(r, t)$ ، عملگر خطی کمکی L و تابع کمکی $H(r, t)$ راهنمایی می‌کند. بنابراین قاعده‌ی مذکور نقش بسیار مهمی در چارچوب روش آنالیز هوموتوبی بازی می‌کند.

پیداست که قاعده‌ی بیان جواب نمی‌تواند تابع کمکی $H(r, t)$ را بطور یکتا تعیین کند. بنابراین باید دنبال قاعده‌ای باشیم که انتخاب $H(r, t)$ را محدودتر کند. این قاعده، قاعده‌ی ضرایب ارگودیکی^۱ نام دارد. طبق این قاعده، ضرایب عبارت جواب (c_m) ها را طوری بهبود می‌دهیم که مجموعه‌ی توابع پایه‌ای (34.2) کامل شود، به عبارت دیگر طبق این قاعده، توابع پایه‌ای $e_k(r, t)$ برای $k = 0, 1, 2, \dots, N$ باید در سری جواب مرتبه N موجود باشند، یا با افزایش مرتبه‌ی جواب در سری ایجاد شوند. تابع کمکی $H(r, t)$ را می‌توان با استفاده از دو قاعده‌ی ذکر شده یعنی قاعده‌ی بیان جواب و ضرایب ارگودیکی به طور یکتا تعیین کرد.

۶.۲ کنترل ناحیه و سرعت همگرایی

مهم است که از همگرایی سری جواب در ناحیه‌ای به اندازه‌ی کافی بزرگ مطمئن شویم. بطور کلی، ناحیه و سرعت همگرایی سری جواب، به وسیله‌ی توابع پایه‌ای استفاده شده در نمایش سری جواب مشخص می‌شوند.

^۱Ergodicity

برخلاف روش‌های تحلیلی قبلی، روش آنالیز هوموتوپي شرایطی را فراهم می‌کند تا جواب مساله غیرخطی داده شده را به وسیله‌ی توابع پایه‌ی متفاوت بیان کنیم. بنابراین به وسیله‌ی روش آنالیز هوموتوپي می‌توانیم سری جواب همگرا در تمام ناحیه‌ای که از دیدگاه فیزیکی با معناست را به دست بیاوریم. حتی اگر تخمین اولیه‌ی $u_0(r, t)$ عملگر خطی کمکی L و تابع کمکی $H(r, t)$ داده شده باشند هنوز در انتخاب مقدار پارامتر کمکی h ، آزادی عمل زیادی داریم. اثر پارامتر کمکی h ، در ناحیه و سرعت همگرایی زمانی آشکار می‌شود که یک مجموعه از توابع پایه‌ای نامناسب انتخاب شده باشد.

۱.۶.۲ h -منحنی

فرض کنید که یک خانواده از سری‌های جواب از پارامتر کمکی h به وسیله‌ی روش آنالیز هوموتوپي به دست آمده است. حال این سوال مطرح است که مقدار پارامتر کمکی h را چگونه انتخاب کنیم تا از همگرایی سری جواب با سرعت مناسب در یک ناحیه به اندازه کافی بزرگ، مطمئن شویم؟

تعداد زیادی از مسائل غیرخطی شامل کمیت‌های فیزیکی مهم، از قبیل فرکانس یک نوسانگر غیرخطی، اصطکاک جداره در جریان چسبناک و شبیه آن می‌شوند. چون یک خانواده از بسط توابع نسبت به پارامتر کمکی h داریم بنابراین کمیت‌های فیزیکی وابسته به h هستند. فرض کنید

$$\gamma(h) = \frac{d^2}{dt^2} u(r, t)|_{r=0, t=0}$$

با کمیت‌های فیزیکی مرتبط است. $\gamma(h)$ می‌تواند به وسیله‌ی یک منحنی $h \sim \gamma$ رسم شود که به آن h -منحنی می‌گویند. با توجه به قضیه‌ی (۴.۲) تمام سری‌های همگرا از γ داده شده به وسیله‌ی مقادیر متفاوت h به مقدار واقعی آن همگرا هستند، لذا اگر جواب یکتا باشد همه‌ی آن‌ها همگرا به یک مقدار یکسان هستند و لذا یک قطعه خط افقی در h -منحنی وجود دارد که به یک ناحیه از h مربوط می‌شود که به وسیله‌ی R_h نمایش داده می‌شود. بنابراین اگر هر مقدار h از R_h را در سری جواب قرار دهیم آنگاه از همگرایی آن مطمئن هستیم. لذا روش بیان شده در بالا، می‌تواند در انتخاب مقدار h مناسب موثر واقع شود. توجه می‌کنیم که اگر کمیت‌های فیزیکی هم وجود نداشته باشند باز هم می‌توان از h -منحنی استفاده کرد. لذا h -منحنی یک راه مناسب فراهم می‌کند تا اثر h در ناحیه و سرعت همگرایی سری جواب، را ببینیم.

۷.۲ هوموتوپي تعميم يافته

روش آناليز هوموتوپي را مي توان با استفاده از معادله ي دگرديسي مرتبه ي صفر

$$\begin{aligned} & [\mathbb{1} - B(q)] \{L[\phi(r, t; q) - u_o(r, t)]\} = \\ & A(q)hH(r, t) \{N[\phi(r, t; q)] - g(r, t)\} + h_{\mathbb{P}}H_{\mathbb{P}}(r, t)\Pi[\phi(r, t; q); q] \end{aligned} \quad (39.2)$$

تعميم داد، که در آن $u_o(r, t)$ ، L ، $H(r, t)$ ، h ، $A(q)$ و $B(q)$ داراي همان تعاريف قبلي مي باشند، $h_{\mathbb{P}}$ پارامتر کمکي دوم و $H_{\mathbb{P}}(r, t)$ تابع کمکي دوم مي باشند و $\Pi[\phi(r, t; q)]$ یک عملگر کمکي مي باشد که در $q = 0$ و $q = \mathbb{1}$ مقدار صفر را مي گيرد، يا به عبارت ديگر

$$\Pi[\phi(r, t; 0); 0] = \Pi[\phi(r, t; \mathbb{1}); \mathbb{1}] = 0. \quad (40.2)$$

تمام روابط و فرمول هاي بيان شده در قسمت هاي قبل برقرارند به جز معادلات دگرديسي مراتب بالاتر که در حالت کلي به شکل

$$\begin{aligned} & L \left[u_m(r, t) - \sum_{k=\mathbb{1}}^{m-\mathbb{1}} \beta_k u_{m-k}(r, t) \right] \\ & = hH(r, t)R_m(\vec{u}_m, r, t) + h_{\mathbb{P}}H_{\mathbb{P}}(r, t)\Delta_m(r, t) \end{aligned} \quad (41.2)$$

بيان مي شوند که در آنها

$$\Delta_m(r, t) = \frac{\mathbb{1}}{m!} \frac{\partial \Pi[\phi(r, t; q); q]}{\partial q^m} \Big|_{q=0}. \quad (42.2)$$

در اين روش علاوه بر پارامتر کمکي $h_{\mathbb{P}}$ و تابع کمکي $H_{\mathbb{P}}(r, t)$ یک عملگر کمکي $\Pi[\phi(r, t; q); q]$ معرفي مي شود که مي تواند توانايي روش آناليز هوموتوپي را افزايش دهد.

در انتخاب عملگر کمکي $\Pi[\phi(r, t; q); q]$ که در رابطه ي (40.2) صدق کند، آزاد هستيم، براي مثال،

مي توان توابعي مانند:

$$\Pi[\phi(r, t; q); q] = A(q) [\mathbb{1} - B(q)] F[\phi(r, t; q)] \quad (43.2)$$

که در آن $F[\phi(r, t; q)]$ یک تابع است، يا

$$\Pi[\phi(r, t; q); q] = [\mathbb{1} - A(q)] \left\{ [\phi(r, t; q)]^{\mathbb{1}+q} - \phi(r, t; q) \right\} \quad (44.2)$$

و شبیه آن‌ها را انتخاب کرد. برای آشنایی بیشتر با کاربرد معادله‌ی دگردیسی مرتبه‌ی صفر به شکل (۳۹.۲)، خواننده می‌تواند به بخش‌های (۳.۴) و (۱.۲۱) از مرجع [۴۱] رجوع کند.

فصل ۳

ترکیب روش طیفی با یک پارامتر مقیاس‌گر

مثبت

۱.۳ روش‌های طیفی در بازه‌های بی‌کران

باتوجه به این که بسیاری از مسائل موجود در مکانیک سیالات روی بازه‌ی نیمه‌متناهی اتفاق می‌افتد بنابراین لازم است که در ابتدا به بررسی روش‌های طیفی بر روی بازه‌های بی‌کران (نیمه‌متناهی و نامتناهی) بپردازیم. روش‌های طیفی برای بازه‌های بی‌کران را می‌توان به سه دسته‌ی کلی زیر طبقه‌بندی کرد:

- استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد در بازه‌های نیمه‌متناهی و نامتناهی [۸۹، ۹۱، ۸۷، ۸۵، ۸۴]

- روش برش دامنه^۱ [۸۰، ۹۲]

- روش نگاشت‌ها [۸۸، ۸۱، ۸۲، ۹۰]

حال سوالی که مطرح می‌شود این است که کدام روش مناسب‌تر است؟. بوید [۸۰] در کتاب خود به این سوال این‌گونه پاسخ می‌دهد که تمام این روش‌ها به‌خوبی کار می‌کنند اما تنها تفاوت آن‌ها در سهولت برنامه‌نویسی و ارتباط توابع پایه‌ای با شرایط فیزیکی مسئله می‌باشد. در واقع بوید اشاره می‌کند که اگر توابع پایه‌ای به کار رفته در هر سه روش با شرایط فیزیکی مسئله مطابقت داشته باشد آن‌گاه همه‌ی این روش‌ها منجر به نتایج خوبی می‌شوند اما این بدین معنی نیست که نتایج به‌دست آمده یکسان است. در این جا به شرح مختصری از دو روش اول پرداخته و روش سوم را که اساس این فصل بر آن نهاده شده با دقت بیشتری بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۳ استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد در بازه‌های نیمه‌متناهی و نامتناهی

یکی از روش‌های حل مسائل روی بازه‌ی نیمه‌متناهی $(0, +\infty)$ و نامتناهی $(-\infty, +\infty)$ به‌ترتیب استفاده از چندجمله‌ای‌های متعامد لاگر^۲ و هرمیت^۳ است. برای بررسی نقاط ضعف و قوت این دسته از روش‌ها ابتدا لازم است با ساختار این چندجمله‌ای‌ها آشنا شویم.

چندجمله‌ای‌های لاگر:

برای هر $\alpha > -1$ چندجمله‌ای‌های لاگر که با نماد $\ell_n^{(\alpha)}(x)$, $n \geq 0$ نمایش داده می‌شوند، توابع ویژه

^۱Domain truncation method

^۲Laguerre

^۳Hermite

$$(x^{\alpha+1} e^{-x} (\ell_n^{(\alpha)})'(x))' + \lambda_n x^\alpha e^{-x} \ell_n^{(\alpha)}(x) = 0,$$

در بازه‌ی $\Omega = (0, +\infty)$ می‌باشند که در آن $\lambda_n = n$. رشد λ_n نسبت به n خطی است در حالی که در

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی رشد λ_n نسبت به n مربعی بود. این موضوع دو مفهوم دارد [۷۸]:

۱- نرخ همگرایی بسط‌های چندجمله‌ای‌های لاگر، نصف نرخ همگرایی بسط‌های چندجمله‌ای‌های ژاکوبی در شرایط یکسان (اما در فضاها و وزن‌دار متفاوت) است.

۲- مینیمم فاصله بین نقاط گاوس-لاگر از مرتبه‌ی $O(n^{-1})$ است در حالی که در چندجمله‌ای‌های ژاکوبی از مرتبه‌ی $O(n^{-2})$ است.

این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن $w_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$ روی Ω متعامدند و در شرط تعامد زیر صدق می‌کنند:

$$\int_0^{+\infty} \ell_n^{(\alpha)}(x) \ell_m^{(\alpha)}(x) w_\alpha(x) dx = \gamma_n^{(\alpha)} \delta_{mn}, \quad \gamma_n^{(\alpha)} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}.$$

چندجمله‌ای‌های لاگر از رابطه‌ی بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$(n+1)\ell_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n + \alpha + 1 - x)\ell_n^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha)\ell_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

که در آن

$$\ell_0^{(\alpha)}(x) = 1, \quad \ell_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1.$$

هم‌چنین چندجمله‌ای‌های لاگر را می‌توان از فرمول صریح زیر نیز به‌دست آورد:

$$\ell_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n+\alpha}{n-k} x^k.$$

فرمول رودریگز برای یافتن این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است:

$$\ell_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}).$$

برای این دسته از چندجمله‌ای‌ها قواعد انتگرال‌گیری گاوس قابل تعریف و فرمول‌بندی است و علاقه‌مندان می‌توانند در مرجع [۷۸] اطلاعات کافی را در این زمینه کسب کنند.

قضیه ۱.۱.۳ [۹۴] فرض کنید که α یک عدد حقیقی دلخواه باشد آن‌گاه ماکسیم‌های نسبی متوالی تابع

$$e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} |\ell_n^{(\alpha)}(x)|,$$

برای هر $x > x_0$ تشکیل یک دنباله‌ی صعودی می‌دهند که در آن

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \alpha^2 \leq 1, \\ \frac{\alpha^2 - 1}{2n + \alpha + 1}, & \alpha^2 > 1. \end{cases}$$

واضح است که برای x های بزرگ، جمله‌ی پیش‌رو نقش تعیین کننده‌ای را در مقدار $\ell_n^{(\alpha)}(x)$ دارد و با سرعت $\frac{(-1)^n}{n!} x^n$ رشد می‌کند. علاوه بر آن بر طبق قضیه‌ی ۱.۱.۳ چندجمله‌ای‌های لاگر، زمانی که $x \rightarrow \infty$ و n افزایش یابد به سرعت رشد می‌کنند [۹۴]. اما در بسیاری از مسائل کاربردی، جواب‌های اساسی به صورت نمایی در بی‌نهایت به صفر می‌روند. قطعاً استفاده از چندجمله‌ای‌های لاگر که به‌طور شدیدی در بی‌نهایت رشد می‌کنند برای تقریب این توابع ایده‌ی مناسبی نیست. برای رفع این نقیصه می‌توان از توابع لاگر به‌جای چندجمله‌ای‌های لاگر استفاده کرد. توابع لاگر به‌وسیله‌ی رابطه‌ی زیر روی بازه‌ی $\Omega = (0, +\infty)$ تعریف می‌شوند:

$$\hat{\ell}_k^{(\alpha)}(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}} \ell_k^{(\alpha)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

با توجه به تابع وزن چندجمله‌ای‌های لاگر، توابع لاگر نسبت به تابع وزن $\hat{w}_\alpha(x) = x^\alpha$ متعامدند و در رابطه‌ی تعامد زیر صدق می‌کنند:

$$\int_0^{+\infty} \hat{\ell}_n^{(\alpha)}(x) \hat{\ell}_m^{(\alpha)}(x) \hat{w}_\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n + 1)} \delta_{mn}.$$

حال به‌راحتی از رابطه‌ی (۱.۳) مشاهده می‌شود که

$$|\hat{\ell}_k^{(\alpha)}(x)| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

و به این ترتیب مشکل سرعت رشد چندجمله‌ای‌های لاگر در بی‌نهایت با جایگزین کردن آن‌ها با توابع لاگر مرتفع می‌گردد.

چندجمله‌ای‌های هرمیت:

چندجمله‌ای‌های هرمیت که با نماد $H_n(x)$ نمایش داده می‌شوند، توابع ویژه مسئله شتورم-لیوویل

$$e^{-x^2} (e^{-x^2} H_n'(x))' + \lambda_n H_n(x) = 0,$$

در بازه‌ی $\Omega = (-\infty, +\infty)$ می‌باشند که در آن $\lambda_n = 2n$.

این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن $w(x) = e^{-x^2}$ روی Ω متعامدند و در شرط تعامد زیر صدق می‌کنند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) w(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}.$$

چندجمله‌ای‌های هرمیت از رابطه‌ی بازگشتی زیر محاسبه می‌شوند:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

که در آن

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x.$$

هم‌چنین چندجمله‌ای‌های هرمیت را می‌توان از فرمول صریح زیر نیز به‌دست آورد:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

فرمول رودریگز برای یافتن این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر است:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

برای این دسته از چندجمله‌ای‌ها نیز مانند چندجمله‌ای‌های لاگر، قواعد انتگرال‌گیری گاوس قابل تعریف و فرمول‌بندی است و علاقه‌مندان می‌توانند در مرجع [۷۸] اطلاعات کافی را در این زمینه کسب کنند.

چندجمله‌ای‌های هرمیت رابطه‌ی نزدیکی با چندجمله‌ای‌های لاگر به صورت زیر دارند:

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! \ell_n^{(-\frac{1}{2})}(x^2),$$

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! x \ell_n^{(\frac{1}{2})}(x^2).$$

از روابط فوق می‌توان نتیجه گرفت که تابع $H_n(x)$ به‌ازای n های زوج، تابعی زوج و به‌ازای n های فرد، تابعی

فرد است. به عبارت دیگر $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

قضیه ۲.۱.۳ [۹۴] ماکسیم‌های نسبی متوالی تابع $|H_n(x)| e^{-\frac{x^2}{2}}$ برای هر $x \geq 0$ تشکیل یک دنباله‌ی

صعودی می‌دهند.

با توجه به قضیه فوق مشاهده می‌شود که محدودیتی مشابه با چندجمله‌ای‌های لاگر برای این چندجمله‌ای‌ها

نیز وجود دارد. برای رفع این نقیصه می‌توان مشابه حالات قبل از توابع هرمیت به‌جای چندجمله‌ای‌های

هرمیت استفاده کرد. توابع هرمیت به‌وسیله‌ی رابطه‌ی زیر روی بازه‌ی $\Omega = (-\infty, +\infty)$ تعریف می‌شوند:

$$\hat{H}_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} e^{-x^2/2} H_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با توجه به تابع وزن چندجمله‌ای‌های هرمیت، توابع هرمیت نسبت به تابع وزن $\hat{w}(x) = 1$ متعامدند و در رابطه‌ی تعامد زیر صدق می‌کنند:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_n(x) \hat{H}_m(x) dx = \delta_{mn}.$$

۲.۱.۳ روش برش دامنه

تعریف ۳.۱.۳ [۸۰] اگر جواب یک معادله در جهت یا جهت‌هایی که روی آن‌ها فاصله‌ی محاسباتی نامحدود است، با سرعت به یک مقدار ثابت میل کند آن‌گاه می‌توان جواب معادله را بر روی بازه‌های بزرگ اما محدود محاسبه نمود. این روش برای دامنه‌های نامحدود را روش کوتاه‌سازی یا برش دامنه گویند.

به عبارت دیگر در این روش، دامنه‌ی نامتناهی را به یک دامنه‌ی متناهی تبدیل می‌کنیم. بدین صورت که بازه نیمه متناهی $[0, +\infty)$ و نامتناهی $(-\infty, +\infty)$ را به ترتیب با بازه‌های متناهی $[0, L]$ و $[-L, L]$ جایگزین می‌کنیم. این روش در واقع اصلاح شده روش‌های موجود روی بازه‌های متناهی می‌باشد.

تعریف ۴.۱.۳ [۸۰] خطای برش دامنه در حل یک معادله با جواب دقیق $u(y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{DT}(L) = |u(L)| \quad |u(y)| \leq |u(L)|, \quad \forall |y| \geq L, \quad (2.3)$$

یا به عبارت دیگر

$$E_{DT}(L) = \sup_{|y| \geq L} (|u(y)|). \quad (3.3)$$

با توجه به تعریف فوق همیشه مجبور به برآورد مقدار L می‌باشیم چون خطای برش دامنه از روی ماکسیمم قدر مطلق جواب دقیق مسئله در خارج ناحیه‌ی کوتاه شده محاسبه می‌شود و حال این‌که خود جواب دقیق نیز برای ما مجهول است. از طرف دیگر باید توجه داشت که خطای روش به کار گرفته شده در حل یک معادله دیفرانسیل موضوع دیگری است و نباید با خطای برش دامنه اشتباه گرفته شود. نکته مهمی که در این روش وجود دارد این است که اگر L ثابت فرض شود، در حالی که تعداد توابع پایه‌ای یعنی N به بی‌نهایت میل کنند، خطا به صفر همگرا نخواهد بود. در واقع خطای برش دامنه $E_{DT}(L)$ به صفر نزدیک نمی‌شود. اما در صورتی که N و L به طور هم‌زمان افزایش یابند در این صورت خطا (خطای تقریب روش و خطای برش دامنه) به صفر میل می‌کند [۸۰]. روش برش دامنه به دلیل سادگی در استفاده، روش خوبی است، اما این

روش در مقایسه با روش توابع متعامد گویا، که در قسمت بعد معرفی می‌شوند، نسبت به انتخاب پارامتر L حساس‌تر است.

۳.۱.۳ روش نگاشت‌ها

یک روش مناسب و تأثیرگذار در برخورد با دامنه‌های نامتناهی استفاده از نگاشت‌های مناسب برای انتقال بازه‌های نامتناهی به بازه متناهی یا تعریف توابع جدید بر روی بازه‌های نامتناهی است. با این راه کار می‌توان از تصویر چندجمله‌ای‌های متعامد تحت معکوس این نگاشت‌ها، که تشکیل یک سری توابع پایه‌ای متعامد می‌دهند، برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل در بازه‌های نامتناهی استفاده کرد.

تحت نگاشت‌هایی به صورت زیر می‌توان بازه‌های نامتناهی را به بازه‌ی متناهی $(-1, 1)$ تبدیل کرد [۷۸]. این نگاشت‌ها به صورت

$$x = g(y; L), \quad y \in I = (-1, 1), \quad x \in \Omega = (0, +\infty) \text{ یا } (-\infty, +\infty), \quad (4.3)$$

تعریف می‌شوند به طوری که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= g'(y; L) > 0, \quad L > 0, \quad x \in I, \\ g(-1; L) &= 0, \quad g(1; L) = +\infty, \quad \text{اگر } \Omega = (0, +\infty), \\ g(-1; L) &= -\infty, \quad g(1; L) = +\infty, \quad \text{اگر } \Omega = (-\infty, +\infty). \end{aligned} \quad (5.3)$$

در نگاشت‌های فوق L یک پارامتر مقیاس‌گر مثبت^۱ است که در ادامه به طور مفصل بر روی آن بحث خواهیم کرد. بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود، فرض می‌کنیم که نگاشت‌های بالا وارون‌پذیر باشند و وارون آن‌ها را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$y = g^{-1}(x; L) := h(x; L), \quad x \in \Omega, \quad y \in I, \quad L > 0. \quad (6.3)$$

در ادامه به معرفی چند نگاشت معروف از این نوع می‌پردازیم.

نگاشت‌های بین بازه‌های $\Omega = (-\infty, +\infty)$ و $I = (-1, 1)$

^۱ Positive scaling factor

- نگاشت جبری^۱:

$$x = \frac{Ly}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y = \frac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}. \quad (۷.۳)$$

- نگاشت لگاریتمی^۲:

$$x = L(y) = \frac{L}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right), \quad y = \tanh \left(\frac{x}{L} \right). \quad (۸.۳)$$

- نگاشت نمایی^۳:

$$x = \sinh(Ly), \quad y = \frac{1}{L} \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad (۹.۳)$$

$$y \in (-1, 1), \quad x \in (-l_L, l_L), \quad l_L = \sinh(L).$$

نگاشت‌های بین بازه‌های $I = (-1, 1)$ و $\Omega = (0, +\infty)$

- نگاشت جبری:

$$x = \frac{L(1+y)}{(1-y)}, \quad y = \frac{x-L}{x+L}. \quad (۱۰.۳)$$

- نگاشت لگاریتمی:

$$x = \frac{L}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right), \quad y = 2 \tanh \left(\frac{x}{L} \right) - 1. \quad (۱۱.۳)$$

- نگاشت نمایی:

$$x = \sinh \left(\frac{L}{2} (1+y) \right), \quad y = \frac{2}{L} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - 1, \quad (۱۲.۳)$$

$$y \in (-1, 1), \quad x \in (0, l_L), \quad l_L = \sinh(L).$$

^۱Algebraic mapping

^۲Logarithmic mapping

^۳Exponential mapping

ویژگی‌ای که باعث تمایز این نگاشت‌ها می‌شود این است که، زمانی که $|y| \rightarrow \pm 1$ ، متغیر x از نگاشت جبری، لگاریتمی و نمایی به ترتیب به صورت جبری، لگاریتمی و نمایی تغییر می‌کند. این موضوع به ما نشان می‌دهد که تمام نگاشت‌های فوق از کارایی یکسانی در حل مسائل روی بازه‌های نامتناهی برخوردار نیستند بلکه باید با توجه به ویژگی‌های مورد انتظار برای تابع جواب یک مسئله به گونه‌ای شایسته از آن‌ها استفاده نمود.

همان‌طور که اشاره شد می‌توان از دو طریق با استفاده از نگاشت‌ها به حل مسائل روی بازه‌های نامتناهی پرداخت. یکی از راه‌ها ساخت توابع متعامد با ترکیب چند جمله‌ای‌های متعامد با این نگاشت‌ها است. از جمله معروف‌ترین این توابع می‌توان به توابع گویای چبیشف^۱ و گویای لژاندر^۲ اشاره کرد. بوید [۸۱] در سال ۱۹۸۷ توابع گویای چبیشف را روی بازه‌های نیمه‌متناهی معرفی کرد. در ادامه در سال ۲۰۰۰ گوئو و همکارانش^۳ [۹۵]، یک مجموعه جدید از توابع لژاندر کسری دو به دو متعامد را برای حل معادله کورته وگ دوریز^۴ معرفی کردند. پس از کار بنیادی بوید استفاده‌های زیادی از این نوع توابع در حل مسائل روی بازه‌های نامتناهی صورت گرفت که برای اطلاع بیشتر می‌توان مراجع [۹۸، ۹۷، ۹۶] را مشاهده نمود. در ادامه به شرح مختصری از این توابع می‌پردازیم.

۴.۱.۳ توابع گویای لژاندر

این توابع با جایگذاری نگاشت جبری (۱۰.۳) به جای y در چند جمله‌ای‌های لژاندر به صورت زیر ساخته می‌شوند [۸۰]:

$$R_k(x) = P_k(y) = L_k\left(\frac{x-L}{x+L}\right), \quad x \in (0, +\infty), \quad y \in (-1, 1). \quad (13.3)$$

با استفاده از نگاشت داده شده می‌توان روابط مربوط به توابع گویای لژاندر را با استفاده از روابط چند جمله‌ای‌های لژاندر به دست آورد. توابع گویای لژاندر در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \left(\frac{x-L}{x+L}\right) R_n(x) - \left(\frac{n}{n+1}\right) R_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

^۱ Rational Chebyshev functions

^۲ Rational Legendre functions

^۳ Guo, Wang, Shen

^۴ Korteweg-Devries equation

که در آن

$$R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = \frac{x-L}{x+L}.$$

همچنین توابع گویای لژاندر را می‌توان از فرمول صریح زیر نیز به‌دست آورد:

$$R_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i \binom{i}{n} \binom{2n-2i}{n} \left(\frac{x-L}{x+L} \right)^{n-2i}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

با استفاده از نگاشت جبری (۱۰.۳) و با توجه به این نکته که تابع وزن چندجمله‌ای‌های لژاندر به‌فرم $w(y) = 1$

است، خواهیم داشت:

$$w(y) \frac{dy}{dx} = \frac{2L}{(x+L)^2}. \quad (14.3)$$

بنابراین توابع گویای لژاندر نسبت به تابع وزن $w_{RL}(x) = \frac{2L}{(x+L)^2}$ متعامدند و رابطه‌ی تعامد برای آن‌ها

به‌صورت زیر است:

$$\int_0^{+\infty} R_n(x) R_m(x) w_{RL}(x) dx = \int_{-1}^1 L_n(y) L_m(y) w(y) dy = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}. \quad (15.3)$$

همچنین با استفاده از مسئله‌ی شتورم - لیوویل برای چندجمله‌ای‌های لژاندر مشاهده می‌شود که توابع گویای

لژاندر جواب‌های ویژه‌ی مسئله‌ی شتورم - لیوویل تکین زیر می‌باشند:

$$\frac{(x+L)^2}{2} \frac{d}{dx} \left[x \frac{d}{dx} R_n(x) \right] + n(n+1) R_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (16.3)$$

۵.۱.۳ توابع گویای چبیشف

مشابه با توابع گویای لژاندر، توابع گویای چبیشف نیز با جای‌گذاری نگاشت جبری (۱۰.۳) به‌جای y در

چندجمله‌ای‌های چبیشف به‌صورت زیر ساخته می‌شوند [۸۰]:

$$R_k(x) = T_k(y) = T_k\left(\frac{x-L}{x+L}\right), \quad x \in (0, +\infty), \quad y \in (-1, 1). \quad (17.3)$$

توابع گویای چبیشف در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$R_{n+1}(x) = 2 \left(\frac{x-L}{x+L} \right) R_n(x) - R_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

که در آن

$$R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = \frac{x-L}{x+L}.$$

همچنین توابع گویای چبیشف را می‌توان از فرمول صریح زیر نیز به دست آورد:

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^{[n/2]} (-1)^i 2^{n-2i} \binom{n-i}{i} \left(\frac{x-L}{x+L} \right)^{n-2i} - \sum_{i=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^i 2^{n-2i-1} \binom{n-i-1}{i} \left(\frac{x-L}{x+L} \right)^{n-2i}.$$

با استفاده از نگاشت جبری (۱۰.۳) و با توجه به این نکته که تابع وزن چندجمله‌ای‌های چبیشف به فرم $w(y) = 1/\sqrt{1-y^2}$ است، خواهیم داشت:

$$w(y) \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{x}(x+L)}. \quad (۱۸.۳)$$

بنابراین توابع گویای چبیشف نسبت به تابع وزن $w_{RT}(x) = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{x}(x+L)}$ متعامداند و رابطه‌ی تعامد برای آن‌ها به صورت زیر است:

$$\int_0^{+\infty} R_n(x) R_m(x) w_{RT}(x) dx = \int_{-1}^{+1} T_n(y) T_m(y) w(y) dy = \frac{c_n \pi}{2} \delta_{nm}, \quad (۱۹.۳)$$

که در آن

$$c_n = \begin{cases} 2, & n = 0, \\ 1, & n \geq 1. \end{cases}$$

همچنین با استفاده از مسئله‌ی شتورم - لیوویل برای چندجمله‌ای‌های چبیشف مشاهده می‌شود که توابع گویای چبیشف جواب‌های ویژه‌ی مسئله‌ی شتورم - لیوویل تکین زیر می‌باشند:

$$(x+L) \frac{\sqrt{x}}{L} \frac{d}{dx} \left[(x+L) \sqrt{x} \frac{d}{dx} R_n(x) \right] + n^2 R_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (۲۰.۳)$$

۶.۱.۳ همگرایی تقریب به وسیله‌ی توابع گویای چبیشف و لژاندر

فرض کنید $\{R_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ دستگاهی از توابع گویای دو به دو متعامد روی بازه‌ی $(0, +\infty)$ نسبت به تابع وزن $w_R(x)$ باشد:

$$\int_0^{+\infty} R_n(x) R_m(x) w_R(x) dx = \gamma_n \delta_{nm},$$

به طوری که تابع گویای $R_n(x)$ توسط نگاشت جبری (۱۰.۳) از چندجمله‌ای متعامد $p_n(y)$ که روی بازه‌ی

$(-1, 1)$ نسبت به تابع وزن $w(y)$ متعامد است، ساخته می‌شود و

$$w_R(x)dx = w(y)dy. \quad (۲۱.۳)$$

این سیستم در فضای هیلبرت $L^2_{w_R}(\circ, +\infty)$ با نرم

$$\|v\|_{w_R} = \left(\int_{\circ}^{+\infty} |v(x)|^2 w_R(x) dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

کامل می‌باشد. فرض کنید فضای تولید شده توسط توابع گویای $\{R_n(x)\}_{n=\circ}^N$ باشد. به عبارت دیگر

$$\mathcal{R}_N = \text{span}\{R_{\circ}(x), R_1(x), \dots, R_N(x)\}.$$

تابع $u \in L^2_{w_R}(\circ, +\infty)$ را بر حسب توابع گویای $\{R_n(x)\}_{n=\circ}^{\infty}$ به صورت

$$Su(x) = \sum_{i=\circ}^{\infty} a_i R_i(x),$$

نمایش می‌دهیم که در آن a_i ها ضرایب بسط بوده و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$a_i = \frac{1}{\|R_i\|_{w_R}^2} \int_{\circ}^{+\infty} u(x) R_i(x) w_R(x) dx, \quad i = \circ, 1, 2, \dots.$$

حال عملگر $P_N : L^2_{w_R}(\circ, +\infty) \rightarrow \mathcal{R}_N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_N u(x) = \sum_{i=\circ}^N a_i R_i(x).$$

از رابطه‌ی تعامد $R_i(x)$ ها داریم:

$$(P_N u, v)_{w_R} = (u, v)_{w_R}, \quad \forall v \in \mathcal{R}_N.$$

کامل بودن مجموعه‌ی $R_i(x)$ ها ایجاب می‌کند که برای هر $u \in L^2_{w_R}(\circ, +\infty)$ با میل کردن N به سمت

بی‌نهایت

$$\|P_N u - u\|_{w_R} \rightarrow \circ.$$

حال برای به دست آوردن خطای تقریب توسط توابع گویای چبیشف و لژاندر، در ابتدا فضای زیر را تعریف

می‌کنیم:

$$H^r_{w,A}(\circ, +\infty) = \left\{ v \mid v \text{ اندازه پذیر } \|v\|_{r,w,A} < \infty \right\}.$$

نرم این فضا برای هر عدد صحیح غیر منفی r به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|v\|_{r,w,A} = \left(\sum_{k=0}^r \left\| (x+1)^{\frac{r}{r}+k} \frac{d^k}{dx^k} v \right\|_w^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (22.3)$$

که در آن $w(x)$ بسته به عملگر انتخابی، تابع وزن توابع گویای چبیشف یا توابع گویای لژاندر می باشد. A عملگر اشتورم-لیوویل نامیده می شود و برای هر یک از این توابع تعریف مشخصی دارد.

برای توابع گویای لژاندر، عملگر A به صورت زیر تعریف می شود:

$$Av(x) = -w_{RL}^{-1}(x) \frac{d}{dx} \left(x \frac{d}{dx} v(x) \right).$$

برای سهولت کار پارامتر L را برابر یک در نظر می گیریم. با استقرا نشان داده می شود که

$$A^m v(x) = \sum_{k=1}^m (x+1)^{m+k} R_k(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x).$$

بنابراین با کمک رابطه ی (22.3) در می یابیم که $A^m : L_{w_{RL},A}^m(0, +\infty) \rightarrow L_{w_{RL}}^1(0, +\infty)$ یک نگاشت پیوسته می باشد. هم چنین قضیه ی زیر خطای تقریب به وسیله ی توابع گویای لژاندر را مشخص می کند.

قضیه 5.1.3 [95] برای هر $v \in H_{w_{RL},A}^r(0, +\infty)$ و $r \geq 0$

$$\|P_N v - v\|_{w_{RL}} \leq c N^{-r} \|v\|_{r,w_{RL},A}.$$

برای توابع گویای چبیشف، عملگر A به صورت زیر تعریف می شود:

$$Av(x) = -w_{RT}^{-1}(x) \frac{d}{dx} \left(w_{RT}^{-1}(x) \frac{d}{dx} v(x) \right).$$

در این جا نیز برای سهولت کار پارامتر L را برابر یک در نظر می گیریم. با استقرا نشان داده می شود که

$$A^m v(x) = \sum_{k=1}^m (x+1)^{m+k} R_k(x) \frac{d^k}{dx^k} v(x).$$

بنابراین با کمک رابطه ی (22.3) در می یابیم که $A^m : L_{w_{RT},A}^m(0, +\infty) \rightarrow L_{w_{RT}}^1(0, +\infty)$ یک نگاشت پیوسته می باشد. هم چنین قضیه ی زیر خطای تقریب به وسیله ی توابع گویای لژاندر را مشخص می کند.

قضیه 6.1.3 [9] برای هر $v \in H_{w_{RT},A}^r(0, +\infty)$ و $r \geq 0$

$$\|P_N v - v\|_{w_{RT}} \leq c N^{-r} \|v\|_{r,w_{RT},A}.$$

در پایان این قسمت ذکر این نکته ضروری است که بر اساس قضیه های 4.6.1 - 5.6.1 و نگاشت (10.3) می توان فرمول های انتگرال گیری گاوسی را با استفاده از توابع گویای چبیشف و لژاندر به دست آورد. برای روشن تر شدن بحث روش انتگرال گیری گاوس در بازه ی نیمه متناهی توضیح می دهیم.

قضیه ۷.۱.۳ (انتگرال گیری گاوسی در بازه نیمه‌متناهی): اعداد مثبت $w_0, w_1, \dots, w_N$ وجود دارند

به طوری که برای هر تابع $f(x) \in \mathcal{R}_{N+1}$

$$\int_0^{+\infty} f(x) w_R(x) dx = \sum_{j=0}^N w_j f(x_j),$$

که در آن x_j ها صفرهای تابع گویای $R_{N+1}(x)$ هستند.

اثبات: فرض کنید $f(x) \in \mathcal{R}_{N+1}$. با استفاده از تغییر متغیر $x = L \left(\frac{1+y}{1-y} \right)$ رابطه‌ی (۲۱.۳) و با فرض

$f(x) = g(y)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x) w_R(x) dx &= \int_{-1}^1 f\left(L \frac{1+y}{1-y}\right) w(y) dy \\ &= \int_{-1}^1 g(y) w(y) dy = \sum_{j=0}^N \lambda_j g(y_j) = \sum_{j=0}^N w_j f(x_j), \end{aligned}$$

که در آن x_j و w_j با کمک نگاشت (۱۰.۳) از y_j و λ_j به دست می‌آیند. با توجه به فرمول روش انتگرال گیری

گاوس روی بازه‌ی $(-1, 1)$ ، رابطه‌ی بالا برای هر $g(y) \in P_{N+1}$ هنگامی که y_j ها ریشه‌های چندجمله‌ای

متعامد $p_{N+1}(y)$ باشند، برقرار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که رابطه‌ی بالا برای هر $f(x) \in \mathcal{R}_{N+1}$

برقرار است و از طرفی با توجه به تعریف $R_{N+1}(x) = p_{N+1}\left(\frac{x-L}{x+L}\right)$ می‌توان نتیجه گرفت که x_j ها

ریشه‌های $R_{N+1}(x)$ هستند. $\square$

با استدلالی مشابه می‌توان فرمول‌های انتگرال گیری گاوس - رادو و گاوس - لوباتو را برای بازه‌ی نیمه‌متناهی

به دست می‌آیند. در این جا باید توجه داشت که برای انتگرال گیری گاوس - رادو نقطه مرزی صفر را به عنوان

گره اضافه می‌کنیم و چنانچه بخواهیم به جای صفر از بی‌نهایت استفاده کنیم باید در سری، $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ را

برای نقطه‌ی آخر به کار ببریم.

۷.۱.۳ پارامتر مقیاس گر L

در این قسمت به بررسی نقش پارامتر مقیاس گر L در ساختار توابع گویای متعامد و چگونگی تعیین آن

می‌پردازیم. ابتدا اثر پارامتر L را بر چگونگی توزیع نقاط هم‌محلی و همواری توابع گویای متعامد مورد بررسی

قرار می‌دهیم. فرض کنید $\{\xi_{N,j}\}_{j=0}^N$ مجموعه نقاط گره‌ای گاوس - رادو متناظر با چندجمله‌ای متعامد روی

بازه‌ی $(-1, 1)$ باشد. با استفاده از معکوس نگاشت (10.3) می‌توان مجموعه نقاط گره‌ای کاوس - رادو گویای $\{\xi_{N,j}^L\}_{j=0}^N$ به صورت زیر تعریف کرد:

$$\xi_{N,j}^L = g(\xi_{N,j}; L) = L \frac{1 + \xi_{N,j}}{1 - \xi_{N,j}}, \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (23.3)$$

بدون از دست رفتن کلیت مسئله فرض کنید که این نقاط به صورت صعودی مرتب شده باشند. با استفاده از قضیه مقدار میانگین داریم:

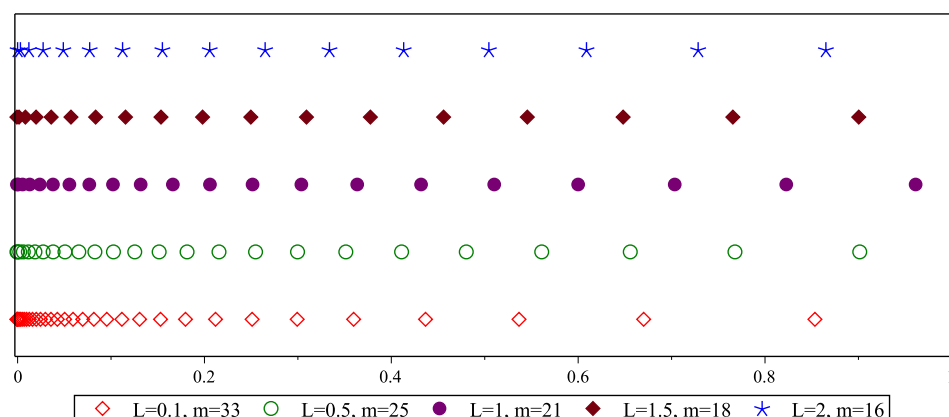
$$\xi_{N,j+1}^L - \xi_{N,j}^L = g'(\xi; L)(\xi_{N,j+1} - \xi_{N,j}), \quad \xi \in (\xi_{N,j}, \xi_{N,j+1}). \quad (24.3)$$

با توجه به رابطه (24.3) مشاهده می‌شود که فاصله هر دو گره به مقدار مشتق نگاشت مورد نظر بستگی دارد. برای نگاشت (10.3) داریم:

$$\frac{dx}{dy} = g'(y; L) = \frac{2L}{(1-y)^2}. \quad (25.3)$$

با توجه به این رابطه می‌بینیم که هرچه مقدار پارامتر L افزایش یابد، شبکه‌ی نقاط نیز گسترده‌تر می‌شود. معمولاً تقریب‌های با مرتبه بالا در نزدیکی مرزها خطاهای قابل توجهی خواهند داشت. ساده‌ترین راه جبران این خطاها، این است که گره‌ها را در نزدیکی نقاط انتهایی بازه متمرکز کنیم. بعضی اظهارنظرهای شهودی به نزدیکی نقاط از نوع مربعی^۱ اشاره دارد. به این معنی که کمترین فاصله بین گره‌ها، برطبق رابطه $O(N^{-2})$ کاهش می‌یابد. تمامی چندجمله‌ای‌های متعامد، در نقاط انتهایی، خاصیت به هم نزدیکی مربعی نقاط گره‌ای را از خود نشان می‌دهند. تراکم شبکه‌ای مربعی در حالتی که از این چندجمله‌ای‌ها استفاده می‌شود به قدری قوی است که مانع بروز نوسان‌های کاذب در نزدیکی نقاط انتهایی می‌شود [۹۹]. در روش‌های طیفی، وقتی که $N \rightarrow \infty$ ، منطقی به نظر می‌رسد که گره‌ها را تقریباً به طور مربعی به سمت نقاط انتهایی بازه، نزدیک کنیم و به همین دلیل در اکثر موارد نقاط انتگرال‌گیری گاوس به عنوان نقاط هم‌محلی استفاده می‌شوند. با توجه به نکات اشاره شده در بالا ملاحظه می‌شود که با تغییر پارامتر مقیاس گر L می‌توان بر روی فاصله‌ی بین نقاط هم‌محلی کنترل خوبی داشت در حالی که این امر در مورد نقاط گره‌ای به دست آمده از چندجمله‌ای‌های لاگر و هرمیت امکان‌پذیر نیست. در شکل ۱۰.۳، پراکندگی نقاط گره‌ای کاوس - رادو از تابع کسری چبیشف به‌ازای $N = 40$ روی بازه‌ی $[0, 1]$ نشان داده شده است. در این شکل m نشان دهنده‌ی تعداد نقاط گره‌ای

^۱Quadratic node clustering

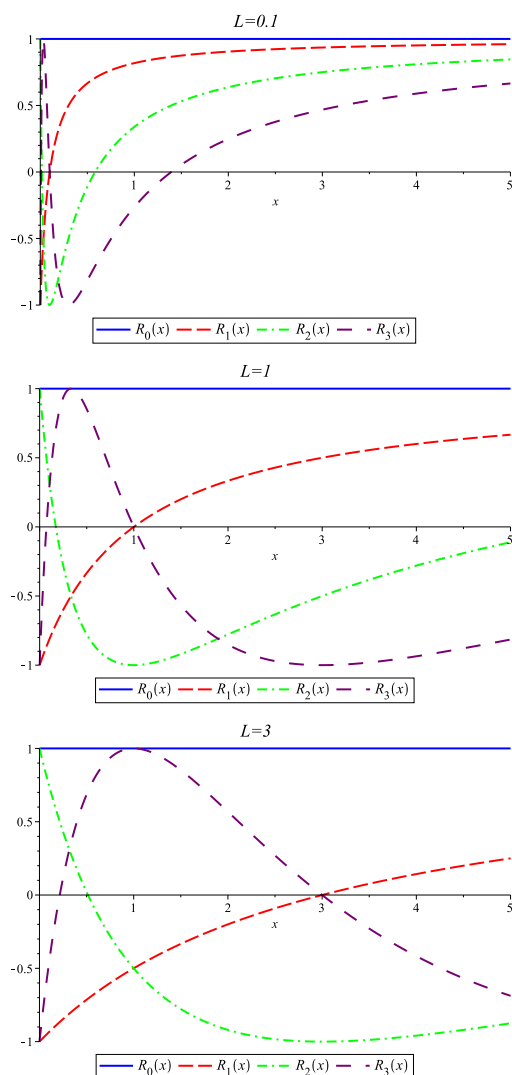


شکل ۱.۳: نمودار چگونگی توزیع نقاط گره‌ای کاوس - رادو از تابع گویای چبیشف به‌ازای $N = 40$ برای مقادیر مختلف L .

در بازه‌ی $[0, 1]$ است. مشاهده می‌شود که برای یک N ثابت، با افزایش پارامتر L از فشردگی و تعداد نقاط گره‌ای کاسته می‌شود. اما نکته‌ی مهم دیگر، نقش پارامتر L در میزان همواری توابع کسری متعامد است. در واقع با افزایش پارامتر L توابع کسری متعامد هموارتر می‌شوند. این موضوع را می‌توان در شکل ۲.۳ برای توابع کسری چبیشف مشاهده کرد.

حال با توجه به ویژگی‌های مناسب پارامتر L ، این سوال مطرح می‌شود که در تقریب یک تابع بر اساس پایه‌های کسری چگونه می‌توان مقدار L مناسب را تعیین کرد؟ بویید در کتاب خود اشاره می‌کند که در حالت کلی راه حل مشخص، ساده و دقیقی برای تعیین پارامتر L وجود ندارد و مبنای کار را بر تجربه و سعی و خطا قرار می‌دهد. اما به‌عنوان یک قانون کلی بیان می‌کند که مقدار L باید با افزایش N ، افزایش یابد تا دقت طیفی برای تقریب حاصل شود. از طرفی دیگر راه‌کارهایی را برای انجام سعی و خطا در جهت مناسب ارائه می‌دهد که در این جا به بیان آن‌ها می‌پردازیم [۸۰].

راه‌کار اول بر مبنای دقت طیفی این دسته از توابع استوار است. در واقع توجه داریم که در بسط یک تابع به‌وسیله‌ی توابع متعامد زمانی به‌دقت طیفی نزدیک می‌شویم که قدر مطلق ضرایب بسط با سرعت مناسبی کوچک شده و به صفر نزدیک شوند. با استفاده از این واقعیت پیشنهاد می‌شود که برای تقریب یک تابع، مقداری از L که به‌واسطه‌ی آن قدر مطلق ضرایب بسط با سرعت بیشتری به‌سمت صفر میل می‌کنند، را به‌عنوان یک مقدار مناسب در نظر بگیریم.



شکل ۲.۳: نمودارهای تابع گویای چبیشف به ازای مقادیر مختلف L برای $N = 0, 1, 2, 3$.

راه کار دوم بر اساس رسم نمودار قدرمطلق خطا (در صورت وجود جواب دقیق) یا قدرمطلق تابع باقی مانده از یک مسئله بر حسب مقادیر مختلف L در یک دستگاه مختصات است. به طور معمول منحنی خطا بر حسب L برای یک N ثابت تقریباً به شکل V می باشد. به همین دلیل به این روش تعیین پارامتر L ، روش V -شکل^۱ گفته می شود. همان طور که اشاره شد راه کاری برای تعیین مقدار دقیق L وجود ندارد اما نکته ی جالب و قابل توجه این است که با فرض وجود مقدار دقیق L برای یک مسئله، تمام L های انتخابی در یک همسایگی نه چندان کوچک از آن نیز می توانند دقتی مطلوب و نزدیک به دقت بهینه را فراهم کنند. این مطلب نشان

^۱ V-shape

می‌دهد که شاید ما نتوانیم مقدار بهینه‌ی L را برای هر مسئله محاسبه کنیم اما می‌توانیم با روش سعی و خطا خود را به این مقدار نزدیک کنیم. لازم به ذکر است که تمام مطالب فوق تجربی بوده و روش تعیین مقدار بهینه‌ی L هنوز به عنوان یک مسئله‌ی باز مورد توجه محققان می‌باشد.

در ادامه این فصل قصد داریم تا با حل جریان ناپایدار گاز یک محیط متخلخل از معادلات موجود در مکانیک سیالات بپردازیم. اما در این جا هدف استفاده‌ی مستقیم از توابع کسری متعامد نیست بلکه می‌خواهیم با استفاده از نگاشت‌های تعریف شده، خواص پارامتر L و تبدیل مسئله اصلی به یک مسئله‌ی جدید روی بازه‌ی متناهی به حل این دسته از معادلات بپردازیم.

۲.۳ معادله‌ی جریان ناپایدار گاز

در این بخش، به بررسی مختصری از جریان ناپایدار گاز از طریق یک محیط متخلخل ارائه شده است (جزئیات بیشتر در این زمینه را می‌توان در [۹] یافت). شرح فیزیکی مساله نزدیک به مطالب ارائه شده در [۱۱۶] است. در این مطالعه از جریان ناپایدار گاز از طریق یک محیط متخلخل نیمه بی نهایت، در ابتدا گاز با فشار یکنواخت ρ_0 در زمان $T = 0$ پر شده است، فشار در هنگام خروج جریان، به طور ناگهانی با کاهش از ρ_0 به $\rho_1 = 0$ مواجه می‌شود و پس از آن در این فشار پایین ادامه می‌یابد. جریان همدمای ناپایدار گاز، توسط یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی توصیف می‌شود. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی که جریان ناپایدار گاز از طریق یک محیط متخلخل نیمه بی نهایت توصیف می‌کند توسط ماسکت^۱ [۱۱۸] به فرم زیر به دست آمده است:

$$\nabla^2(P^2) = 2A \frac{\partial P}{\partial t} \quad (26.3)$$

که در آن P فشار در محیط متخلخل است و ثابت A توسط خواص محیط، داده می‌شود. در محیط یک بعدی گسترش از $z = 0$ تا $z = \infty$ ، معادله‌ی (۲۶.۳) به

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(P \frac{\partial P}{\partial z} \right) = A \frac{\partial P}{\partial t},$$

^۱Muskat

با شرایط مرزی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} P(z, \circ) = P_{\circ}, & \circ < z < \infty, \\ P(\circ, t) = P_{\circ}(< P_{\circ}), & \circ < t < \infty. \end{cases}$$

با استفاده از متغیرهای مستقل و بی بعد

$$x = \frac{z}{\sqrt{t}} \left(\frac{A}{P_{\circ}} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad y(x) = \alpha^{-1} \left(1 - \frac{P^{\alpha}(z)}{P_{\circ}^{\alpha}} \right),$$

معرفی شده توسط کیدر^۱ [۱۱۴]، مساله به معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی زیر تبدیل می‌شود (معادله جریان ناپایدار گاز):

$$y''(x) + \frac{\alpha y y'(x)}{\sqrt{1 - \alpha y(x)}} = \circ, \quad x \geq \circ, \quad \circ \leq \alpha < ۱. \quad (۲۷.۳)$$

شرایط مرزی توسط خواص فیزیکی به صورت زیر اعمال می‌شوند:

$$y(\circ) = ۱, \quad y(\infty) = \circ. \quad (۲۸.۳)$$

روش‌های متعددی برای به دست آوردن جواب‌های تحلیلی و عددی این مساله استفاده شده اند. کیدر

[۱۱۴]، از روش اختلال برای حل معادله‌ی (۲۷.۳) استفاده کرد. او فرض کرد که

$$y(x) = y_{\circ} + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \dots, \quad (۲۹.۳)$$

و قرار داد

$$(1 - \alpha y)^{-\frac{1}{\alpha}} = 1 + \frac{1}{\alpha} \alpha y + \frac{3}{8} \alpha^2 y^2 + \dots. \quad (۳۰.۳)$$

با قرار دادن (۲۹.۳) و (۳۰.۳) در (۲۷.۳) و بالانس کردن ضرایب آن بر اساس $۱, \alpha, \alpha^2$ ، روابط زیر را به دست آورد:

$$۱ : \quad y_{\circ}'' + \alpha y_{\circ} = \circ, \quad y_{\circ}(\circ) = ۱, y_{\circ}(\infty) = \circ \longrightarrow y_{\circ} = ۱ - \operatorname{erf}(x),$$

$$\alpha : \quad y_1'' + x y_{\circ} y_1' + \alpha y_1$$

^۱Kidder

$$^{\circ}, y_1(^{\circ}) = y_1(\infty) = ^{\circ} \longrightarrow y_1 =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2\pi} \left\{ y_0 \left[1 + \sqrt{\pi} x e^{-x^2} \right] - e^{-x^2} \right\}, \\ \alpha^2 : & y_1'' + x y_1' \left\{ y_1 + \frac{2}{\lambda} y_0 \right\} + x y_1' y_0 + 2 x y_1 = ^{\circ}, \quad y_2(^{\circ}) = y_2(\infty) \\ & - \frac{1}{\pi} y_1 - \frac{1}{2\pi} y_0 + \frac{1}{\lambda \pi^{3/2}} x e^{-x^2} - \frac{1}{16\sqrt{\pi}} x (5 - 2x^2) e^{-x^2} (y_0)^2 \\ & + \frac{1}{4\pi} (2 - x^2) e^{-x^2} y_0 + \frac{3^{3/2}}{16\pi} \left[erf(\sqrt{3}x) - erf(x) \right]. \end{aligned}$$

به راحتی دیده می شود که پیچیدگی محاسبات با افزایش تعداد ترم‌ها، به سرعت افزایش می یابد.

آگاروال^۱ و ریگان^۲ در [۱۱۶]، نتایج وجود جواب مختلفی برای معادله‌ی (۲۷.۳) ارائه کردند. آن‌ها نشان

دادند که مساله مقدار مرزی (۲۷.۳) یک جواب $y \in C^2[^{\circ}, +\infty)$ با خصوصیت $1 \leq y(x) < ^{\circ}$ برای هر $x \in [^{\circ}, +\infty)$ دارد.

۱.۲.۳ روش طیفی برای حل معادله‌ی جریان ناپایدار گاز

معادله دیفرانسیل (۲۷.۳) با شرایط مرزی (۲۸.۳) در نظر می‌گیریم با تغییر متغیر

$$y(x) = Y(\mu), \quad \mu = \frac{x - L}{x + L}, \quad s > ^{\circ}, \quad (31.3)$$

که در آن L پارامتر مقیاس‌گر است که می‌تواند برای تنظیم کردن فاصله‌ی نقاط هم‌مکانی استفاده شود. داریم:

$$\begin{aligned} x &= \frac{L(1 + \mu)}{1 - \mu}, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2L} (1 - \mu)^2 \frac{dY}{d\mu}, \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{4L^2} (1 - \mu)^4 \frac{d^2 Y}{d\mu^2} - \frac{1}{2L^2} (1 - \mu)^3 \frac{dY}{d\mu}. \end{aligned}$$

بنابراین معادلات (۲۷.۳) و (۲۸.۳) به معادلات دیفرانسیل معمولی زیر با شرایط مرزی روی بازه‌ی متناهی

$[-1, 1]$ تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4L^2} (1 - \mu)^3 \frac{d^2 Y}{d\mu^2} (\mu) - \frac{1}{2L^2} (1 - \mu)^2 \frac{dY}{d\mu} (\mu) + \frac{(\mu + 1) \frac{d}{d\mu} Y(\mu)}{\sqrt{1 - \alpha Y(\mu)}} = ^{\circ}, \\ & Y(-1) = 1, \quad Y(1) = ^{\circ}. \end{aligned} \quad (32.3)$$

^۱ Agarwal

^۲ Regan

در حال حاضر، ما روش شبه طیفی برای حل مساله مقدار مرزی (۳۲.۳) به کار می‌بریم. در این روش از نقاط

چبیشف-گوس-لوباتو

$$\mu_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

استفاده می‌شود. تابع مجهول $Y(\mu)$ در معادله‌ی (۳۲.۳) می‌تواند توسط سری زیر تقریب زده شود

$$Y_N(\mu) = \sum_{k=0}^N \hat{Y}_k T_k(\mu), \quad (33.3)$$

که $T_k(\mu)$ چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول هستند. و $\hat{Y}_k$ ضرایب چبیشف‌اند که توسط رابطه‌ی زیر تعیین می‌شوند:

$$\hat{Y}_k = \frac{2}{N\hat{c}_k} \sum_{i=0}^N \frac{1}{\hat{c}_i} Y(\mu_i) \cos\left(\frac{\pi i k}{N}\right), \quad (34.3)$$

که $\hat{c}_0 = \hat{c}_N = 2$ و $\hat{c}_i = 1$ برای $1 \leq i \leq N-1$.

علاوه بر آن می‌دانیم که مشتق‌های اول و دوم تابع $Y(\mu)$ در نقاط گره‌ای را می‌توان به‌فرم زیر محاسبه کرد:

$$\frac{dY}{d\mu}(\mu_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij} Y(\mu_j), \quad (35.3)$$

$$\frac{d^2 Y}{d\mu^2}(\mu_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij}^2 Y(\mu_j), \quad (36.3)$$

که در آن D ماتریس مشتق چبیشف و $D^2 = (D)^2$ می‌باشند. عناصر ماتریس مشتق D از رابطه‌ی زیر

محاسبه می‌شوند [۷۸]:

$$\begin{aligned} D_{00} &= -D_{NN} = \frac{2N^2 + 1}{6}, \\ D_{ii} &= -\frac{1}{2} \frac{\mu_i}{1 - \mu_i^2}, \quad i \neq 0, N, \\ D_{ij} &= -\frac{1}{2} \frac{\hat{c}_i}{\hat{c}_j} \frac{(-1)^{i+j}}{\mu_i - \mu_j}. \end{aligned} \quad (37.3)$$

با به‌کاربردن روابط (۳۵.۳) و (۳۶.۳)، معادله‌ی (۳۲.۳) منجر به نتایج زیر می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4L^2} (1 - \mu_i)^2 \left(\sum_{j=0}^N D_{ij}^2 Y(\mu_j) \right) - \frac{1}{2L^2} (1 - \mu_i)^2 \left(\sum_{j=0}^N D_{ij} Y(\mu_j) \right) \\ &+ \frac{(\mu_i + 1) \left(\sum_{j=0}^N D_{ij} Y(\mu_j) \right)}{\sqrt{1 - \alpha Y(\mu_i)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (38.3)$$

که

$$Y(\mu_0) = 0, \quad Y(\mu_N) = 1.$$

معادلات (۳۸.۳) تشکیل یک دستگاه غیرخطی $N - 1$ معادله و $N - 1$ مجهول می‌دهند که با حل آن توسط روش‌های تکراری مانند نیوتن می‌توان مقادیر مجهول $\{Y(\mu_i)\}_{i=0}^{N-1}$ را به دست آورد. با معلوم شدن این مقادیر جواب تقریبی معادله‌ی (۲۷.۳) به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$y_N(x) = Y_N(\mu) = \sum_{k=0}^N \hat{Y}_k T_{k,L}(x), \quad x \in [0, +\infty),$$

$$T_{k,L}(x) = T_k\left(\frac{x-L}{x+L}\right) \quad \text{که}$$

۲.۲.۳ نتایج عددی

دستگاه معادلات غیرخطی (۳۸.۳) با ۴۰ تکرار روش نیوتن و شروع اولیه‌ی $Y^{(0)} = (0, 0, \dots, 0)^T$ حل شده است. تمامی محاسبات با کامپیوتر شخصی پنتیوم ۴، با پردازشگر ۲/۲ گیگا هرتزی و نرم‌افزار میپل ۱۳ با ۳۰ رقم دقت انجام شده است. خطای باقیمانده توسط رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود:

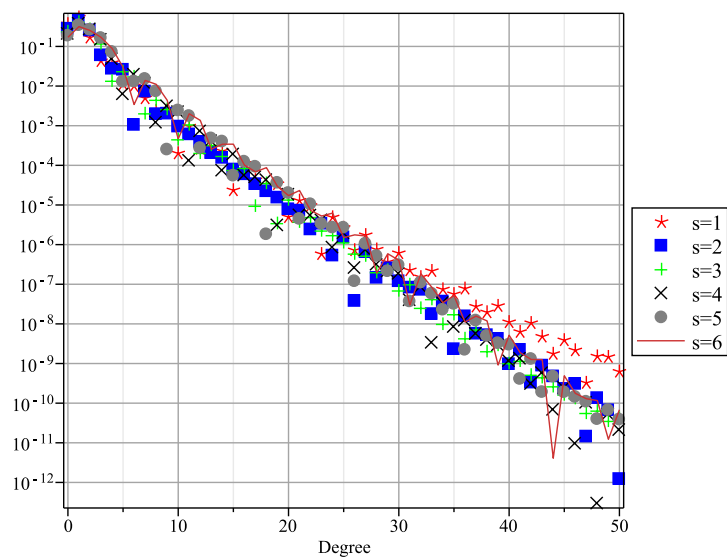
$$MR = \max_{x \in [0, +\infty)} |A(y_N(x))|,$$

که $A(y) = y'' + 2xy'(1 - \alpha y)^{-\frac{1}{\alpha}}$ در جدول ۱.۳، برای برخی از مقادیر N و L ، زمان انجام محاسبات و خطای باقیمانده لیست شده است. شکل ۳.۳ قدرمطلق ضرایب چبیشف محاسبه شده برای L های متفاوت

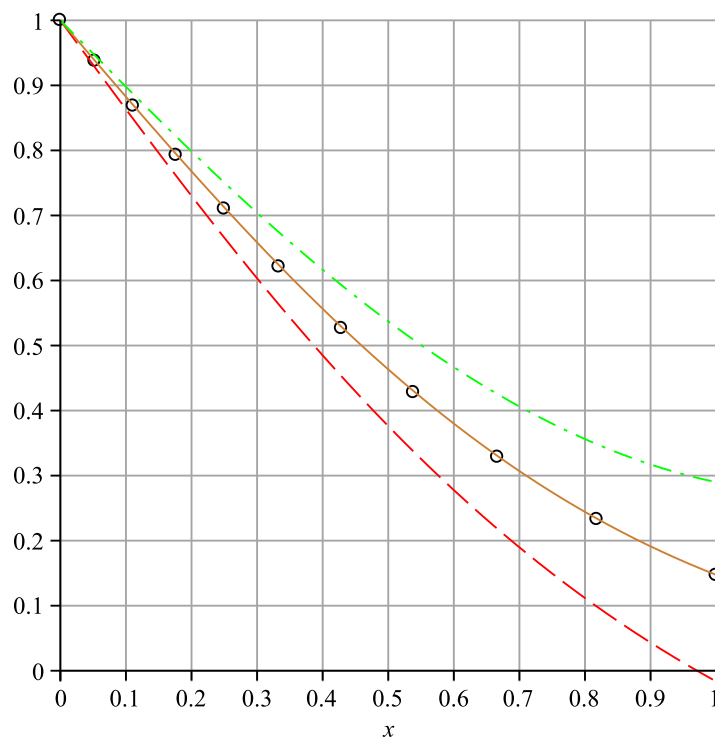
جدول ۱.۳: خطای باقیمانده برای برخی مقادیر N و L هنگامی که $\alpha = 0.5$.

خطای باقیمانده							زمان محاسبات
N	$L = 100$	$L = 200$	$L = 300$	$L = 400$	$L = 500$	$L = 600$	
۳۰	$2.1E - 2$	$1.5E - 3$	$6.7E - 4$	$6.7E - 4$	$8.7E - 4$	$9.7E - 4$	۱۵.۳
۴۰	$1.5E - 3$	$1.4E - 5$	$1.6E - 5$	$1.2E - 5$	$1.6E - 5$	$2.5E - 5$	۳۱.۵
۵۰	$7.7E - 4$	$7.5E - 7$	$7.7E - 7$	$2.7E - 7$	$2.9E - 7$	$3.2E - 7$	۵۶.۹

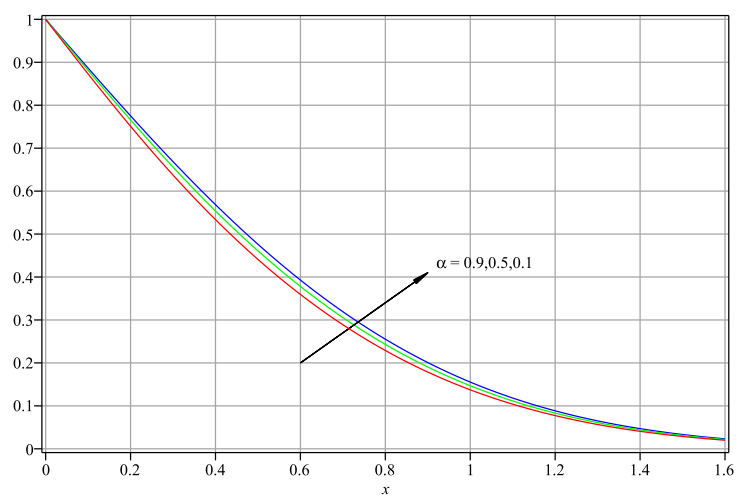
نشان می‌دهد. شکل ۳.۳ و جدول ۱.۳ نشان می‌دهد $L = 4$ می‌تواند یک مقدار مناسب برای پارامتر مقیاس L هنگامی که $30 \leq N \leq 50$ باشد. مقایسه‌ای شکلی بین روش پیشنهادی با $N = 30$ و $L = 4$ ، روش آدومیان [۱۱۷]، روش اختلال [۱۱۴] و روش شوتینگ [۱۱۹] در شکل ۴.۳ ارائه شده است. در شکل ۵.۳ برای مقادیر مختلفی از α ، مقادیر $y(x)$ به دست آمده از روش پیشنهادی نشان داده شده است. در شکل ۳.۳ ۶ باقیمانده برای $\alpha = 0.5$ ، $N = 30$ و $L = 4$ نشان داده شده است.



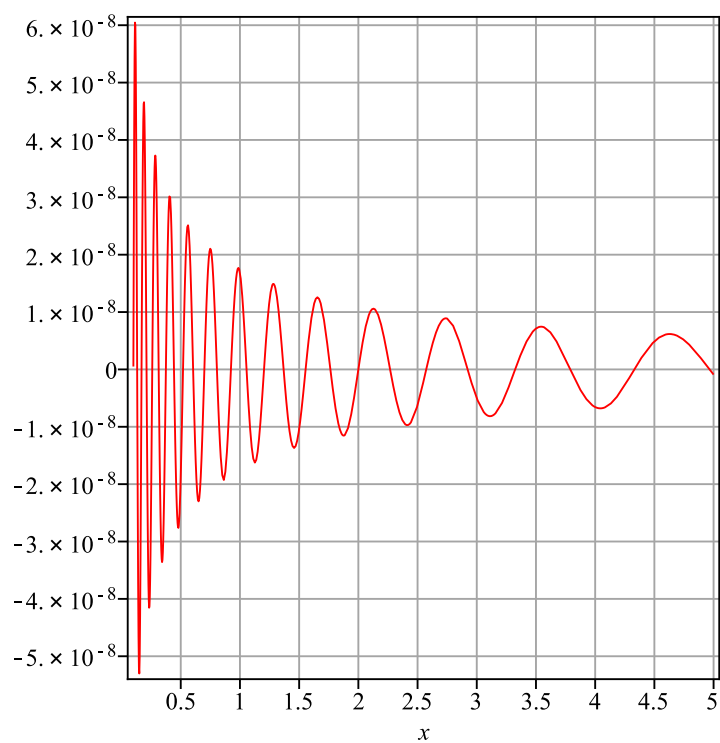
شکل ۳.۳: ضرایب چیشف برای مقادیر متفاوتی از L .



شکل ۴.۳: خط و نقطه: پاده $[۳, ۳]$ ، خط قطعه: پاده $[۲, ۲]$ ، خط: روش پیشنهادی و دایره روش شوتینگ برای $\alpha = ۵/۵$.



شکل ۵.۳: تقریب برای $y(x)$ با استفاده از روش پیشنهادی برای مقادیر متفاوت α هنگامی که $N = 30$ و $L = 4$



شکل ۶.۳: خطای باقیمانده برای $\alpha = 0.5$, $N = 30$, و $L = 4$.

جدول ۲.۳، مقدار تقریبی $y(x)$ به دست آمده با روش پیشنهادی، روش اختلال [۱۱۴]، توابع لاگور [۱۲۱]، روش اختلال هوموتوپي [۱۲۰] و روش عددی [۱۱۹] ارائه شده است. آن نشان می‌دهد که روش پیشنهادی از تمامی روش‌های نیمه تحلیلی دیگر، تقریب‌های بهتری ارائه می‌کند. همان‌طور که می‌دانیم

جدول ۲.۳: نتایج عددی $y(x)$ برای $\alpha = 0.5$

x	روش اختلال هوموتوپي [۱۲۰]	توابع لاگور [۱۲۱]	روش اختلال [۱۱۴]	روش عددی	$N = 8$	$N = 20$
۰/۱	۰/۸۸۸۰۸۶۵۱	۰/۹۰۹۳۱۸۷۳	۰/۸۸۱۶۵۸۸۳	۰/۸۸۱۳۶۴۶۵	۰/۸۸۲۳۵۰۴۹	۰/۸۸۱۳۶۴۹۰
۰/۲	۰/۷۷۹۲۲۳۵۱	۰/۸۱۷۴۸۷۶۳	۰/۷۶۶۳۰۷۶۸	۰/۷۶۵۸۲۸۸۱	۰/۷۶۷۵۸۸۴۷	۰/۷۶۵۸۳۱۴۳
۰/۳	۰/۶۷۵۹۷۹۲۵	۰/۷۱۵۲۲۳۴۴	۰/۶۵۶۵۳۸۰۰	۰/۶۵۶۰۰۰۶۸	۰/۶۵۷۲۱۵۰۲	۰/۶۵۶۰۰۰۹۷
۰/۴	۰/۵۸۰۲۷۲۹۲	۰/۶۰۹۸۲۰۷۵	۰/۵۵۴۴۰۲۴۰	۰/۵۵۳۸۹۸۹۴	۰/۵۵۴۱۷۷۲۵	۰/۵۵۳۹۰۷۱۷
۰/۵	۰/۴۹۳۳۲۹۳۶	۰/۵۱۶۳۲۳۴۸	۰/۴۶۱۳۶۵۰۳	۰/۴۶۰۹۴۲۷۶	۰/۴۶۰۷۷۲۱۶	۰/۴۶۰۹۴۸۰۴
۰/۶	۰/۴۱۵۷۲۰۷۸	۰/۴۱۹۳۲۳۸۵	۰/۳۷۸۳۱۰۹۳	۰/۳۷۷۹۸۱۵۸	۰/۳۷۸۲۰۴۲۴	۰/۳۷۷۹۸۰۶۴
۰/۷	۰/۳۴۷۴۷۱۱۸	۰/۴۰۹۸۲۳۷۷	۰/۳۰۵۵۹۷۶۵	۰/۳۰۵۳۵۲۳۴	۰/۳۰۶۷۲۱۵۵	۰/۳۰۵۳۵۵۴۵
۰/۸	۰/۲۸۸۱۹۳۹۶	۰/۳۱۹۹۹۰۶۸	۰/۲۴۳۱۳۲۵۵	۰/۲۴۲۹۵۴۳۹	۰/۲۴۵۸۹۵۹۰	۰/۲۴۲۹۶۶۷۱
۰/۹	۰/۲۳۷۲۳۴۵۷	۰/۲۰۸۲۰۲۸۵	۰/۱۹۰۴۶۲۳۷	۰/۱۹۰۳۳۴۲۳	۰/۱۹۴۸۸۸۰۳	۰/۱۹۰۳۴۹۵۴
۱/۰	۰/۱۹۳۷۹۷۰۸	۰/۲۱۹۹۱۰۷۴	۰/۱۵۸۷۶۸۹۸	۰/۱۴۶۷۷۳۳۱	۰/۱۵۲۶۵۱۸۹	۰/۱۴۶۷۸۲۶۶

حل معادله‌ی جریان ناپایدار گاز، حتی به صورت عددی کاری دشوار است و از طرفی حل آن یک مساله‌ی مهم در مهندسی به حساب می‌آید. در این بخش با استفاده از ترکیب روش طیفی با یک پارامتر مقیاس گر مثبت جواب تقریبی از این معادله به دست آوردیم. پارامتر مقیاس گر L نقش مهمی در دقت تقریب بازی می‌کند. نتایج عددی فوق نشان می‌دهد که جواب‌های به دست آمده با روش پیشنهادی، از دیگر روش‌ها نیمه تحلیلی برای حل معادله‌ی جریان ناپایدار گاز دقیق تر است.

فصل ۴

روش آنالیز هوموتوپی-طیفی چندمرحله‌ای
برای حل معادلات نوسانگرهای به شدت
غیرخطی

مقدمه

همان‌طور که در فصل‌های گذشته اشاره شد اکثر پدیده‌ها در جهان واقعی به‌طور ذاتی غیرخطی هستند و به‌وسیله معادلات غیرخطی مدل بندی و مشخص می‌شوند. با ظهور کامپیوترهای دیجیتالی و پیشرفت روز افزون آن‌ها، حل مسائل خطی آسان و آسان‌تر شد. اگرچه به‌دست آوردن جواب‌های مسائل غیرخطی در حالت کلی هنوز بسیار سخت و پیچیده است. به‌ویژه، به‌واسطه‌ی داشتن ابرکامپیوترهایی با دقت بالا و محاسبات با ارقام زیاد و نرم افزارهای محاسباتی قوی نظیر میپل، متلب و ممتیکا، تعیین یک تقریب عددی از مسئله‌ی غیرخطی داده شده در مقابل تقریب عددی در بسیاری از موارد سخت‌تر و پرهزینه‌تر است.

اما توجه داریم که هر یک از روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی امتیازها و محدودیت‌های خاص خود را دارند و منطقی به‌نظر نمی‌رسد که بر روی یک دسته متمرکز شویم و از دیگری غافل باشیم. هدف در این‌جا استفاده‌ی هم‌زمان از روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی در حل یک مسئله است به‌گونه‌ای که هر دو روش علاوه بر حفظ ویژگی‌های مناسب خود در جهت رفع معایب روش دیگر کمک کنند. روش‌های نیمه‌تحلیلی زیادی برای حل مسائل غیرخطی مانند روش تکراری پیکارد، روش اختلال، روش تجزیه آدومیان، روش اختلال هوموتوبی، روش تکرار وردشی و روش آنالیز هوموتوبی وجود دارند و به‌طور وسیع به‌کار گرفته می‌شوند. کارایی روش‌های اختلال به وجود پارامتر اختلال (کوچک یا بزرگ) در معادله‌ی مورد حل بستگی دارد که نبود این پارامتر در معادله می‌تواند به عنوان نقص برای این روش‌ها در نظر گرفته شود. ضعف اصلی روش‌های تجزیه آدومیان و اختلال هوموتوبی نیز محاسبه چندجمله‌ای‌های موسوم به چندجمله‌ای‌های آدومیان و چندجمله‌ای‌های خی می‌باشد. اما مشکل اساسی در استفاده از این روش‌ها، محاسبه‌ی انتگرال‌های ظاهر شده در جریان حل مسئله می‌باشد و اگر محاسبه‌ی این انتگرال‌ها پیچیده یا غیر ممکن باشد دیگر روش‌های بالا به‌صورت تحلیلی قابل اجرا نیستند.

می‌دانیم که یکی از مهم‌ترین معایب روش‌های طیفی در لزوم حل دستگاه جبری حاصل از پیاده‌سازی روش می‌باشد. این مشکل زمانی حادتر می‌شود که مسئله‌ی مورد نظر شامل جملات غیرخطی از تابع جواب باشد و علاوه بر آن برای افزایش دقت جواب مجبور باشیم تا تعداد توابع پایه‌ی موجود در بسط تقریبی را افزایش دهیم. در مقابل روش استاندارد آنالیز هوموتوبی نیز دارای معایب بسیاری است که در ادامه به‌طور مفصل به بحث در این‌باره خواهیم پرداخت. در این فصل قصد داریم با ترکیب روش طیفی بر اساس چندجمله‌ای‌های چبیشف و روش آنالیز هوموتوبی یک روش جدید آنالیز هوموتوبی - طیفی بسازیم که علاوه بر استفاده از

ویژگی‌های مهم هر دو روش، معایب آن‌ها را نیز برطرف کنیم و در ادامه با ترکیب روش جدید آنالیز هوموتوپي - طیفی با روش چند مرحله‌ای روش آنالیز هوموتوپي - طیفی چند مرحله‌ای را به دست می‌آوریم و آن را برای حل معادلات نوسان گرهای به شدت غیر خطی به کار می‌بریم.

۱.۴ نوسان گرهای به شدت غیر خطی

هنگامی که نخستین اسباب موسیقی، احتمالاً طبل یا سوت، ساخته شدند، انسان به ارتعاش علاقه‌مند شد. از آن زمان به بعد، انسان برای بررسی پدیده‌های مرتعش، بررسی‌های مبتکرانه و دقیقی را به کار برده است. گالیلهو گالیله (۱۵۶۴ - ۱۶۴۲) را بنیان‌گذار علم تجربی مدرن می‌نامند. در حقیقت، قرن هفدهم را اغلب قرن نبوغ می‌نامند زیرا شالوده‌ی فلسفه و علم مدرن در این دوره زمانی شکل گرفته است.

گالیله با مشاهده‌ی حرکت آونگی در یک کلیسا در پیزا، رفتار یک آونگ ساده را مطالعه کرد. روزی، هنگامی که گالیله در حین موعظه‌های پدر روحانی احساس خستگی می‌کرد، به سقف کلیسا خیره شده بود. آونگی در حال نوسان توجه او را جلب کرد. او با نبض خود شروع به اندازه‌گیری دوره‌ی تناوب حرکت‌های آونگ کرد و با حیرت دریافت که دوره‌ی تناوب از دامنه‌ی نوسان مستقل است. این مشاهده باعث شد تا گالیله آزمایش‌های بیشتری در مورد آونگ ساده انجام دهد. گالیله در سال ۱۶۳۸، اجسام مرتعش را بررسی کرد. او وابستگی فرکانس ارتعاش را به طول آونگ ساده و پدیده‌ی ارتعاشات هماهنگ (تشدید) را توصیف نمود. هم‌چنین، نوشته‌های گالیله نشان می‌دهند که او درک روشنی از رابطه‌ی بین فرکانس، طول، کشش، و چگالی یک تار مرتعش کشیده شده داشته است. ولی، نخستین گزارش منتشر شده در مورد ارتعاش تارها، توسط کشیش، فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی، مارین مرسن^۱ (۱۵۸۸ - ۱۶۴۸) ارائه شد. هم‌چنین، مرسن برای نخستین بار فرکانس ارتعاش یک تار بلند را اندازه‌گیری کرد و به کمک آن، فرکانس تار کوتاه‌تری را که دارای چگالی و کشش یکسانی با تار نخستین بود پیش‌بینی کرد. کشف قوانین تارهای مرتعش را اغلب به مرسن نسبت می‌دهند زیرا نتایج خود را دو سال قبل از گالیله در سال ۱۶۳۶ منتشر کرد.

حل نظری (دینامیکی) مساله‌ی تار مرتعش در سال ۱۷۱۳ توسط ریاضیدان انگلیسی سر بروک تیلور^۲ به دست آمد. فرکانس طبیعی ارتعاشی که تیلور از معادله‌ی حرکت به دست آورد با مقادیر تجربی مشاهده شده

^۱ Marin Mersenne

^۲ Sir Brook Taylor

توسط گالیله و مرسن سازگار بود. روش اتخاذ شده توسط تیلور با وارد کردن مشتق‌های جزئی در معادله‌های حرکت توسط دانیل برنولی^۱، ژان دالامبر^۲ و لئونارد اویلر^۳ کامل شد.

امکان ارتعاش تار با چندین فرکانس هماهنگ در یک زمان (با جابه‌جایی هر نقطه در هر لحظه برابر با جمع جبری جابه‌جایی‌های هر فرکانس هماهنگ) از طریق معادله‌های دینامیکی دانیل برنولی در گزارش علمی او اثبات و توسط فرهنگستان برلین در سال ۱۷۵۵ منتشر شد. از این ویژگی به‌عنوان اصل هم‌بودی نوسانات کوچک نامبرده شد که در اصطلاحات امروزه اصل برهم‌نهی نام دارد. این اصل برای گسترش نظریه‌ی ارتعاشات اثبات شد و به امکان بیان هر تابع دلخواه (یعنی، هر شکل اولیه‌ی تار) با استفاده از سری نامتناهی سینوس‌ها و کسینوس‌ها منجر شد. به‌علت این معنی ضمنی، دالامبر و اویلر به درستی این اصل تردید داشتند. ولی، درستی این نوع بسط توسط ژوزف فوریه در سال ۱۸۲۲ اثبات شد.

اغلب فعالیت‌های بشر شامل ارتعاش در یک یا چند حالت است. مثلاً، می‌شنویم زیرا پرده‌ی گوش ارتعاش می‌کند و می‌بینیم زیرا امواج نور تحت ارتعاش‌اند. نفس کشیدن با ارتعاش شش‌ها مرتبط است و قدم زدن مستلزم حرکت نوسانی (تناوبی) پاها و دست‌هاست و به‌علت حرکت نوسانی حنجره می‌توان صحبت کرد. محققان اولیه در زمینه‌ی ارتعاشات، تلاش خود را روی درک پدیده‌های طبیعی و گسترش نظریه‌های ریاضی متمرکز کردند تا به‌توانند ارتعاش سیستم‌های فیزیکی را توصیف کنند. در سال‌های اخیر، کاربردهای مهندسی ارتعاشات، مانند طراحی ماشین‌ها، پی (فونداسیون)، سازه‌ها، موتورها، توربین‌ها و سیستم‌های کنترل، عامل پژوهش‌های بسیار بوده است.

به‌علت عدم توازن ذاتی در موتورها، اغلب محرک‌های اصلی دارای مشکلات ارتعاشی هستند. این عدم توازن می‌تواند ناشی از طراحی نادرست یا ساخت ضعیف باشد. مثلاً، عدم توازن در موتورهای دیزل می‌تواند باعث شود که امواج زمینی به قدر کافی قدرتمند در مناطق شهری مزاحمت ایجاد کنند. به‌علت عدم توازن، چرخ‌های برخی از لوکوموتیوها در سرعت‌های بالا می‌توانند از روی خط آهن بیش از یک سانتی متر بلند شوند. در توربین‌ها، ارتعاشات باعث شکست‌های مکانیکی چشم‌گیری می‌شوند. مهندسان هنوز قادر نشده‌اند که از شکست‌های ناشی از ارتعاشات پره و دیسک در توربین‌ها جلوگیری کنند. هرگاه فرکانس طبیعی ارتعاش

^۱Daniel Bernoulli

^۲Jean d'Alembert

^۳Leonhard Euler

یک ماشین یا سازه بر فرکانس تحریک خارجی منطبق شود، پدیده‌ای معروف به تشدید اتفاق می‌افتد، که منجر به انحراف‌های بیش از حد و شکست می‌شود. گزارش‌های بسیاری از شکست سیستم‌ها به علت تشدید و ارتعاش بیش از حد اجزا و سیستم‌ها وجود دارد. یک نمونه مشهور از قدرت تخریب این امواج ارتعاشی پل تاکوما ناروز^۱ است که در سال ۱۹۴۰ توسط بادی با سرعت ۴۰ مایل در ساعت (۶۴ کیلومتر در ساعت) تخریب شد. بررسی‌های دقیق از محل نشان دادند که خرابی عرشه ناکارآمد بوده ولی با این حال عامل اصلی فرو ریزی پل نبوده است. در آن روز باد با سرعت به پل ضربه زده و با برخورد قائم به پل باعث ایجاد ارتعاش شده است. شکل ۱.۴ لحظه‌ی تخریب این پل را بر اثر پدیده‌ی تشدید نشان می‌دهد [۱۰۸]. به علت آثار مخرب ارتعاشات بر روی ماشین‌ها و سازه‌ها، آزمایش ارتعاش در طراحی و ساخت اغلب سیستم‌های مهندسی به عنوان یک اصل اساسی به حساب می‌آید.



شکل ۱.۴: فرو ریختن پل تاکوما ناروز در اثر ارتعاش ناشی از باد، این پل در ۱ ژوئیه سال ۱۹۴۰ افتتاح شد و در ۷ نوامبر سال ۱۹۴۰ فرو ریخت [۱۰۸].

به رغم آثار زیان‌بخش ارتعاش، این پدیده می‌تواند در کاربردهای مصرفی و صنعتی متعددی به طور مفید مورد استفاده قرار گیرد. در حقیقت، کاربرد تجهیزات ارتعاشی در سال‌های اخیر به طور قابل توجهی افزایش یافته است. برای نمونه، از ارتعاش در تسمه‌های لرزشی، قیف‌ها، غربال‌ها، غلتک‌ها، ماشین لباسشویی، مسواک‌های برقی، مته‌ی دندان‌پزشکی، ساعت و دستگاه‌های ماساژ برقی استفاده می‌شود. هم‌چنین، ارتعاش در ماشین‌های شمع کوب، آزمایش ارتعاشی مواد، فرایندهای پرداخت ارتعاشی و مدارهای الکترونیکی برای حذف

^۱ Tacoma Narrows bridge

فرکانس‌های ناخواسته به کار می‌رود. ارتعاش باعث افزایش بازده فرایندهای خاص ماشین‌کاری، ریخته‌گری، آهن‌گری و جوش‌کاری می‌شود. از ارتعاشات برای شبیه‌سازی زمین لرزه‌ها در پژوهش‌های زمین‌شناختی و نیز برای انجام مطالعات در طراحی راکتورهای هسته‌ای استفاده می‌شود.

هر حرکتی که بعد از یک بازه‌ی زمانی تکرار شود، ارتعاش یا نوسان نامیده می‌شود. تاب خوردن یک آونگ و حرکت یک تار به‌صدا درآمده، نمونه‌هایی از ارتعاش‌اند. نظریه‌ی ارتعاش با مطالعه‌ی حرکت‌های نوسانی اجسام و نیروهای مرتبط با آن‌ها سروکار دارد.

به‌طور کلی، یک سیستم ارتعاشی شامل وسیله‌ای برای ذخیره کردن انرژی پتانسیل (فنر یا کشسانی)، وسیله‌ای برای ذخیره‌ی انرژی جنبشی (جرم یا لختی) و وسیله‌ای که با آن انرژی به تدریج تلف می‌شود (میراگر) است. ارتعاش یک سیستم مستلزم تبدیل انرژی پتانسیل آن به انرژی جنبشی و به طور متناوب، تبدیل انرژی جنبشی آن به انرژی پتانسیل است. اگر سیستمی میرانده شود، مقداری انرژی در هر دوره از ارتعاش تلف می‌شود و اگر قرار باشد که ارتعاش در حالت پایا حفظ شود، این انرژی تلف‌شده باید با یک منبع خارجی جبران شود.

با توجه به اهمیت و کاربرد سیستم‌های ارتعاشی (نوسانی)، در ادامه‌ی این فصل قصد داریم تا روش آنالیز هوموتوپي-طیفی قطعه‌ای برای حل دسته‌های مهمی از معادلات دیفرانسیل حاکم بر این نوع از سیستم‌ها به کار ببریم. شکل کلی معادله دیفرانسیل یک نوسان‌گر غیرخطی به‌صورت زیر است:

$$u''(t) + \alpha u(t) + F(t, u(t), u'(t), u''(t)) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.4)$$

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B, \quad (2.4)$$

که در آن α یک عدد حقیقی مثبت و $F(t, u(t), u'(t), u''(t))$ یک تابع غیرخطی است. اگر این تابع دارای صورت غیرخطی پیچیده‌ای باشد آن‌گاه این معادله را یک معادله‌ی نوسان‌گر به‌شدت غیرخطی می‌نامند. به‌علت اهمیت بالا و کاربرد بسیار این دسته از معادلات تاکنون تحقیقات گسترده‌ای بر روی آن‌ها صورت گرفته است. کتاب معروف نوسان‌گرهای غیرخطی اثر نایفه^۱ و موک^۲ [۱۰۲] را می‌توان به‌عنوان یکی از کامل‌ترین مراجع در این زمینه در نظر گرفت. هم‌چنین روش‌های متعددی نیز برای حل تحلیلی و عددی این دسته از معادلات تولید و به کار گرفته شده است که معروف ترین این روش‌ها را می‌توان در مراجع [۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲] یافت.

^۱Nayfeh

^۲Mook

حل معادله دیفرانسیل یک نوسان گر غیرخطی با استفاده از روش استاندارد آنالیز هوموتوپي به دلیل وجود جمله ی $F(t, u(t), u'(t), u''(t))$ کار دشواری است بخصوص وقتی بخواهیم این مسئله را روی یک بازه ی بزرگ حل کنیم. تحقیقات انجام شده در مورد این دسته از معادلات نشان می دهند که روش آنالیز هوموتوپي در حالت کلی قادر به حل آن ها روی بازه های کوچک می باشد. در ادامه برای رفع این مشکل روش های چند مرحله ای یا قطعه ای بر اساس روش آنالیز هوموتوپي پیشنهاد شدند. در این گونه از روش ها با گسسته سازی بازه ی مورد نظر و استفاده ی مکرر از روش آنالیز هوموتوپي روی این زیر بازه ها به حل مسئله می پردازند. اما مسئله ی اصلی این است که روش های چند مرحله ای نیز هنوز همان مشکلات روش استاندارد آنالیز هوموتوپي را شامل می شوند.

۲.۴ روش آنالیز هوموتوپي-طیفی چندمرحله ای

در این بخش تصمیم داریم اصلاحی از روش آنالیز هوموتوپي به نام روش آنالیز هوموتوپي-طیفی چندمرحله ای برای حل معادلات نوسان گرهای به شدت غیرخطی بیان کنیم. ابتدا مشکلات روش آنالیز هوموتوپي برای حل این دسته از معادلات را بیان نموده و سپس نشان می دهیم که روش ارائه شده مشکلات روش آنالیز هوموتوپي را ندارد.

۱.۲.۴ روش آنالیز هوموتوپي برای حل نوسان گرهای به شدت غیرخطی

در این قسمت، روش آنالیز هوموتوپي برای حل معادله ی (۱.۴) با شرایط اولیه ی (۲.۴) به کار رفته است. با توجه به شرایط اولیه ی (۲.۴) طبیعی است که $u_0(t) = A + Bt$ به عنوان تخمین اولیه $u(t)$ در نظر گرفته شود. عملگر خطی کمکی L به صورت زیر تعریف می شود:

$$L[\tilde{u}(t, q)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}(t, q) + \alpha \tilde{u}(t, q) \quad (3.4)$$

که $q \in [0, 1]$ پارامتر جانشانی و $\tilde{u}(t, q)$ یک نوع نگاشت برای تابع جواب $u(t)$ است و همچنین L در رابطه ی زیر صدق می کند:

$$L[C_1 \cos(\sqrt{\alpha}t) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha}t)] = 0,$$

که C_1 و C_2 ضرایب ثابت هستند. عملگر غیرخطی برای معادله‌ی (۱.۴) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$N[\tilde{u}(t, q)] = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}(t, q) + \alpha \tilde{u}(t, q) + F\left(t, \tilde{u}(t, q), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(t, q), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}(t, q)\right).$$

با توجه به این عملگرها معادله دگرذیسی مرتبه‌ی صفر به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$(\mathbf{1} - q)L[\tilde{u}(t, q) - u_*(t)] = qc_*N[\tilde{u}(t, q)], \quad \tilde{u}(\circ, q) = A, \quad \tilde{u}'(\circ, q) = B, \quad (۴.۴)$$

که در آن $\circ \neq c_*$ یک پارامتر کمکی است. واضح است هنگامی که q از $\circ$ تا $\mathbf{1}$ افزایش می‌یابد، جواب معادله‌ی دگرذیسی مرتبه‌ی صفر (۴.۴) یعنی $\tilde{u}(t, q)$ از $u_*(t)$ تا $u(t)$ تغییر می‌کند. اگر $\tilde{u}(t, q)$ به اندازه‌ی کافی هموار باشد سری مکلورن نسبت به q به صورت زیر است:

$$\tilde{u}(t, q) = u_*(t) + \sum_{m=\mathbf{1}}^{\infty} u_m(t)q^m \quad (۵.۴)$$

که در آن

$$u_m(t) = \frac{\mathbf{1}}{m!} \frac{\partial^m \tilde{u}(t, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=\circ}.$$

حال اگر سری (۵.۴) در $q = \mathbf{1}$ همگرا باشد داریم:

$$u(t) = u_*(t) + \sum_{m=\mathbf{1}}^{\infty} u_m(t).$$

با m -مرتبه مشتق‌گیری از طرفین معادله‌ی (۴.۴) و تقسیم بر $m!$ قراردادن $q = \circ$ معادله‌ی دگرذیسی مرتبه‌ی m به صورت زیر به دست می‌آید:

$$L[u_m(t) - \chi_m u_{m-\mathbf{1}}(t)] = c_* R_m(t), \quad u_m(\circ) = \circ, \quad u'_m(\circ) = \circ, \quad (۶.۴)$$

که در آن

$$R_m(t) = u''_{m-\mathbf{1}} + \alpha u_{m-\mathbf{1}} + \frac{\mathbf{1}}{(m-\mathbf{1})!} \frac{\partial^{m-\mathbf{1}}}{\partial q^{m-\mathbf{1}}} F\left(t, \tilde{u}(t, q), \frac{\partial}{\partial t} \tilde{u}(t, q), \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}(t, q)\right) \Big|_{q=\circ},$$

و

$$\chi_m = \begin{cases} \circ, & m \leq \mathbf{1}, \\ \mathbf{1}, & m > \mathbf{1}. \end{cases} \quad (۷.۴)$$

فرض می‌کنیم که u_m^* نشان‌دهنده‌ی جواب خصوصی معادله‌ی (۶.۴) باشد. لذا جواب کلی معادله‌ی (۶.۴)

$$u_m = u_m^* + C_1 \cos(\sqrt{\alpha}t) + C_2 \sin(\sqrt{\alpha}t), \quad (۸.۴)$$

است که C_1 و C_2 با استفاده از شرایط اولیه‌ی معادله‌ی (۶.۴) به‌دست می‌آیند. با توجه به عملگر خطی کمکی (۶.۴)، معادله‌ی (۸.۴) به رابطه‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$u_m(t) = \chi_m u_{m-1}(t) + \frac{c_0}{\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}t) \int_0^t R_m(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx - \cos(\sqrt{\alpha}t) \int_0^t R_m(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right). \quad (۹.۴)$$

واضح است که در محاسبه‌ی انتگرال‌های سمت راست رابطه‌ی (۹.۴)، ممکن است سه مشکل زیر بوجود آید:

۱) ممکن است تابع R_m به‌قدری پیچیده باشند که محاسبه‌ی انتگرال‌های تولید شده بسیار دشوار و حتی در مواردی غیر ممکن باشد. به‌عنوان مثال وجود ترم‌های غیرخطی $\sqrt{u}$ یا $\sin(u)$ و قسمت غیر همگن $g(t) = \sin(t^2)$ در یک مسئله ممکن است مانع به‌کارگیری روش استاندارد آنالیز هوموتوپي باشد.

۲) با افزایش تعداد تکرارها به‌منظور رسیدن به تقریب مناسب، ممکن است که تعداد جملات تقریب به‌دست آمده در هر تکرار با سرعت بسیار زیادی رشد کند که این امر موجب افزایش تعداد انتگرال‌گیری‌ها و در نتیجه پیچیدگی و زمان بالای محاسبات می‌شود. از طرف دیگر ذخیره‌سازی نتایج حاصل از یک تکرار به‌منظور محاسبه‌ی تکرار جدید نیز منجر به اشغال فضای زیادی از حافظه‌ی سیستم محاسباتی می‌شود.

۳) همان‌طور که در فصل ۲ اشاره شده است، در چارچوب روش آنالیز هوموتوپي با قواعد بیان جواب و ضرایب ارگودیکی مواجه هستیم که ممکن است مشکلاتی برای محاسبه‌ی انتگرال‌های تولید شده بوجود آورد.

به منظور افزایش سرعت همگرایی و کاهش محاسبات و زمان آن، اصلاحات گوناگونی از روش آنالیز هوموتوپي مطرح شدند که یکی از مهمترین آن‌ها روش آنالیز هوموتوپي-طیفی ارائه شده توسط متسا^۱ و همکاران است

^۱ Motsa

[۱۱۰، ۱۱۱]. روش آنالیز هوموتوپي-طيفي يك ابزار توانا برای حل معادلات تابعي شديداً غيرخطي است. برای غلبه کردن بر سه مشکل فوق، در قسمت بعد يك روش جديد که ترکیب دو روش آنالیز هوموتوپي و شبه طيفي است را ارائه می کنیم که برخلاف روش آنالیز هوموتوپي-طيفي ارائه شده توسط متسا و همکاران و روش طيفي نیاز به حل هیچ دستگاه خطي و غيرخطي جبري ندارد.

۲.۲.۴ روش آنالیز هوموتوپي-طيفي جديد

در این قسمت يك روش جديد برای حل نوسان گرهای به شدت غيرخطي ارائه می کنیم. تحت شرایط اولیه ی (۲.۴)، طبيعي است که $u_0(t) = A + Bt$ به عنوان تخمین اولیه $u(t)$ انتخاب کنیم. با توجه به رابطه ی (۹.۴) داریم:

$$u_1(t) = \frac{c_0}{\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}t) \int_0^t R_1(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx - \cos(\sqrt{\alpha}t) \int_0^t R_1(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right). \quad (10.4)$$

با توجه به فصل اول و روش های طيفي، تابع $u_1(t)$ روی $[0, T]$ می تواند توسط سری زیر تقریب زده شود:

$$u_1^M(t) = \sum_{j=0}^M \tilde{u}_{1,j} T_j \left(\frac{2}{T}t - 1 \right), \quad (11.4)$$

که T_j چند جمله ای های چبیشف نوع اول هستند و

$$\tilde{u}_{1,j} = \frac{2(-1)^j}{M\tilde{c}_j} \sum_{i=0}^M \frac{1}{\tilde{c}_i} u_1(\tilde{t}_i) \cos\left(\frac{\pi i j}{M}\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, M, \quad (12.4)$$

که $\tilde{t}_i = \frac{T}{2}(t_i + 1)$, $i = 0, 1, \dots, M$ و $t_i = -\cos\left(\frac{\pi i}{M}\right)$ نقاط گوس-چبیشف-لوباتو هستند و $u_1(\tilde{t}_i)$, $i = 0, 1, \dots, M$ ضرایب مجهول (۱۰.۴) در $\tilde{t}_i$, $i = 0, 1, \dots, M$ با قراردادن نقاط گره ای M ، $i = 0, 1, \dots, M$ می توان توسط رابطه ی زیر پیدا کرد:

$$u_1(\tilde{t}_i) = \frac{c_0}{\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_0^{\tilde{t}_i} R_1(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx - \cos(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_0^{\tilde{t}_i} R_1(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right). \quad (13.4)$$

در اینجا ما با استفاده از قاعده ی گوس-لژاندر-لوباتوی p -نقطه ای انتگرال های معین سمت راست (۱۳.۴) تخمین می زنیم.

با توجه به رابطه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\begin{aligned} u_{\Psi}(t) &= u_{\Psi}(t) + \frac{c_{\circ}}{\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}t) \int_{\circ}^t R_{\Psi}(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx \right. \\ &\quad \left. - \cos(\sqrt{\alpha}t) \int_{\circ}^t R_{\Psi}(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right). \end{aligned} \quad (۱۴.۴)$$

به‌طور مشابه تابع $u_{\Psi}(t)$ روی $[\circ, T]$ می‌تواند توسط سری زیر تقریب زده شود:

$$u_{\Psi}^M(t) = \sum_{j=\circ}^M \tilde{u}_{\Psi,j} T_j \left(\frac{\Psi}{T} t - \mathbf{1} \right), \quad (۱۵.۴)$$

که

$$\tilde{u}_{\Psi,j} = \frac{\Psi(-\mathbf{1})^j}{M\tilde{c}_j} \sum_{i=\circ}^M \frac{\mathbf{1}}{\tilde{c}_i} u_{\Psi}(\tilde{t}_i) \cos\left(\frac{\pi i j}{M}\right), \quad j = \circ, \mathbf{1}, \Psi, \dots, M. \quad (۱۶.۴)$$

با قراردادن نقاط گره‌ای $\tilde{t}_i$, $i = \circ, \mathbf{1}, \dots, M$ در (۱۴.۴) ضرایب مجهول $u_{\Psi}(\tilde{t}_i)$, $i = \circ, \mathbf{1}, \dots, M$ می‌توان توسط رابطه‌ی زیر پیدا کرد:

$$\begin{aligned} u_{\Psi}(\tilde{t}_i) &= u_{\Psi}^M(\tilde{t}_i) + \frac{c_{\circ}}{\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_{\circ}^{\tilde{t}_i} R_{\Psi}(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx \right. \\ &\quad \left. - \cos(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_{\circ}^{\tilde{t}_i} R_{\Psi}(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right). \end{aligned} \quad (۱۷.۴)$$

به‌طور مشابه، انتگرال‌های معین سمت راست (۱۷.۴) با استفاده از قاعده‌ی گوس-لژاندر-لوباتوی p -نقطه‌ای تخمین می‌زنیم.

در حالت کلی برای $m > \Psi$ با توجه به رابطه‌ی (۹.۴) داریم:

$$\begin{aligned} u_m(t) &= u_{m-\mathbf{1}}(t) + \frac{c_{\circ}}{\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}t) \int_{\circ}^t R_m(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx \right. \\ &\quad \left. - \cos(\sqrt{\alpha}t) \int_{\circ}^t R_m(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right). \end{aligned} \quad (۱۸.۴)$$

به‌طور مشابه تابع $u_m(t)$ روی $[\circ, T]$ می‌تواند توسط سری زیر تقریب زده شود:

$$u_m^M(t) = \sum_{j=\circ}^M \tilde{u}_{m,j} T_j \left(\frac{\Psi}{T} t - \mathbf{1} \right), \quad (۱۹.۴)$$

که

$$\tilde{u}_{m,j} = \frac{\Psi(-\mathbf{1})^j}{M\tilde{c}_j} \sum_{i=\circ}^M \frac{\mathbf{1}}{\tilde{c}_i} u_m(\tilde{t}_i) \cos\left(\frac{\pi i j}{M}\right), \quad j = \circ, \mathbf{1}, \Psi, \dots, M, \quad (۲۰.۴)$$

$$u_m(\tilde{t}_i) = u_{m-1}^M(\tilde{t}_i) + \frac{c_0}{\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_0^{\tilde{t}_i} R_m(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx - \cos(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_0^{\tilde{t}_i} R_m(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right). \quad (21.4)$$

همچنین انتگرال‌های معین سمت راست (۲۱.۴) با استفاده از قاعده‌ی گوس-لژاندر-لوباتوی p -نقطه‌ای تخمین می‌زنیم. تقریب مرتبه‌ی n تابع $u(t)$ روی $[0, T]$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$U_{n,M}(t) = u_0(t) + \sum_{m=1}^n u_m^M(t). \quad (22.4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم سری جواب (۲۲.۴) شامل پارامتر کنترل‌کننده‌ی همگرایی c_0 است که نقش مهمی در کنترل کردن سرعت و ناحیه‌ی همگرایی سری جواب بازی می‌کند و همچنین این موضوع یکی از مهمترین فواید روش آنالیز هوموتوپ‌ی نسبت به سایر روش‌های نیمه‌تحلیل است. تاکنون روش‌های متفاوتی برای تعیین مقدار مناسب پارامتر c_0 ارائه شده است. همان‌طور که در فصل دوم اشاره شده است روش c_0 -منحنی می‌تواند ناحیه‌ی معتبر از مقادیر c_0 را نشان دهد که در آن سری جواب همگراست. بنابراین این روش نمی‌تواند مقدار بهینه‌ی c_0 را تعیین کند. در سال ۲۰۰۷ یابوشیتا^۱ و همکاران [۱۱۲] یک مقدار بهینه برای پارامتر c_0 با مینیمم کردن مجذور باقیمانده‌ی خطا

$$\Delta(c_0) = \int_0^T (U_{n,M}''(t) + \alpha U_{n,M}(t) + F(t, U_{n,M}(t), U_{n,M}'(t), U_{n,M}''(t)))^2 dt. \quad (23.4)$$

به دست آوردند. این روش، روش آنالیز هوموتوپ‌ی-بهینه نامیده شد. واضح است که با افزایش مرتبه‌ی تقریب n محاسبه‌ی (۲۳.۴) کاری دشوار است. لیائو [۱۱۳] و عباس‌بندی و جلیلی [۹] روش‌های برای تعیین مقدار بهینه‌ی پارامتر c_0 با استفاده از قواعد انتگرال‌گیری ارائه دادند. در این قسمت ما از روش لیائو [۱۱۳] برای تعیین c_0 استفاده می‌کنیم.

۳.۲.۴ روش آنالیز هوموتوپ‌ی-طیفی چندمرحله‌ای

واضح است که روش آنالیز هوموتوپ‌ی-طیفی ارائه شده در بخش قبل برای حل معادلاتی مناسب است که جواب آن‌ها روی بازه‌های کوچک به سرعت تغییر نکند یا نوسانسی نباشد. بنابراین آشکار است که روش

^۱Yabushita

آنالیز هوموتوپي-طيفي برای حل معادلات نوسانگر به شدت غيرخطي روی دامنه های بزرگ مناسب نمی باشد.

برای غلبه بر این مشکل ما روش آنالیز هوموتوپي-طيفي چندمرحله ای را ارائه می کنیم.

در ابتدا ما بازه ی $[0, T]$ را به زیر بازه های $\Omega_r = [T_{r-1}, T_r]$ که $r = 1, 2, \dots, m$ و $\Delta = T_r - T_{r-1}$

به علاوه نگاشت خطي $\psi_r : \Omega_r \rightarrow [-1, 1]$ به صورت زیر تعريف می کنیم:

$$\psi_r(t) = \frac{2(t - T_{r-1})}{\Delta_r} - 1, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad (24.4)$$

و نقاط گره ای $\tilde{t}_i^r$ انتخاب می کنیم به طوریکه:

$$\tilde{t}_i^r = \psi_r^{-1}(t_i) = \frac{\Delta_r}{2}(t_i + 1) + T_{r-1}, \quad r = 1, 2, \dots, m, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad (25.4)$$

که $\psi_r^{-1}(t)$ نگاشت معکوس $\psi_r(t)$ است.

روی $\Omega_1 = [T_0, T_1]$ فرض می کنیم $u_{1,0}(t) = u(T_0) + u'(T_0)(t - T_0) = A + Bt$ و برای

$m \geq 1$ داریم:

$$u_{1,m}(t) \simeq u_{1,m}^M(t) = \sum_{j=0}^M \tilde{u}_{mj}^{(1)} T_j(\psi_1(t)), \quad (26.4)$$

که

$$\tilde{u}_{mj}^{(1)} = \frac{2(-1)^j}{M\tilde{c}_j} \sum_{i=0}^M \frac{1}{\tilde{c}_i} u_{1,m}(\tilde{t}_i) \cos\left(\frac{\pi i j}{M}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (27.4)$$

$$\begin{aligned} u_{1,m}(\tilde{t}_i) &\simeq \chi_m u_{1,m-1}(\tilde{t}_i) + \frac{c_0^1(\tilde{t}_i - T_0)}{2\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_{-1}^1 R_m(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx \right. \\ &\quad \left. - \cos(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i) \int_{-1}^1 R_m(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right), \quad m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (28.4)$$

که انتگرال های معین سمت راست (28.4) با استفاده از قاعده ی گوس-لژاندر-لوباتوی p -نقطه ای تخمین

می زنیم. بنابراین می توانیم تقریب مرتبه ی m تابع $u(t)$ روی Ω_1 به صورت $U_{1,n}(t) = \sum_{m=0}^n u_{1,m}(t)$

به دست آوریم. مقدار بهینه ی c_0^1 با استفاده از مینیمم کردن مجذور باقیمانده ی خطای زیر بدست می آوریم:

$$\Delta(c_0^1) = \int_{\Omega_1} (U_{1,n}''(t) + \alpha U_{1,n}(t) + F(t, U_{1,n}(t), U_{1,n}'(t), U_{1,n}''(t)))^2 dt. \quad (29.4)$$

روی $\Omega_2 = [T_1, T_2]$ فرض می کنیم $u_{2,0}(t) = U_{1,n}(T_1) + U_{1,n}'(T_1)(t - T_1)$ و برای $m \geq 1$ داریم:

$$u_{2,m}(t) \simeq u_{2,m}^M(t) = \sum_{j=0}^M \tilde{u}_{mj}^{(2)} T_j(\psi_2(t)), \quad (30.4)$$

که

$$\tilde{u}_{mj}^{(\gamma)} = \frac{\gamma(-1)^j}{M\tilde{c}_j} \sum_{i=0}^M \frac{1}{\tilde{c}_i} u_{\gamma,m}(\tilde{t}_i^{\gamma}) \cos\left(\frac{\pi i j}{M}\right), \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (31.4)$$

$$\begin{aligned} u_{\gamma,m}(\tilde{t}_i^{\gamma}) &\simeq \chi_m u_{\gamma,m-1}(\tilde{t}_i^{\gamma}) + \frac{c_{\gamma}^{\gamma}(\tilde{t}_i^{\gamma} - T_{\gamma})}{\gamma\sqrt{\alpha}} \left(\sin(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i^{\gamma}) \int_{-1}^1 R_m(x) \cos(\sqrt{\alpha}x) dx \right. \\ &\quad \left. - \cos(\sqrt{\alpha}\tilde{t}_i^{\gamma}) \int_{-1}^1 R_m(x) \sin(\sqrt{\alpha}x) dx \right), \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (32.4) \end{aligned}$$

به طور مشابه، انتگرال‌های معین سمت راست (32.4) با استفاده از قاعده‌ی گوس-لژاندر-لوباتوی p -نقطه‌ای

تخمین می‌زنیم. بنابراین می‌توانیم تقریب مرتبه‌ی n ام تابع $u(t)$ روی Ω_{γ} به صورت $U_{\gamma,n}(t) = \sum_{m=0}^n u_{\gamma,m}(t)$

به دست آوریم. مقدار بهینه‌ی c_{γ}^{γ} با استفاده از مینیمم کردن مجذور باقیمانده‌ی خطای زیر بدست می‌آوریم:

$$\Delta(c_{\gamma}^{\gamma}) = \int_{\Omega_{\gamma}} \left(U_{\gamma,n}''(t) + \alpha U_{\gamma,n}(t) + F(t, U_{\gamma,n}(t), U_{\gamma,n}'(t), U_{\gamma,n}''(t)) \right)^{\gamma} dt. \quad (33.4)$$

به طور مشابه، می‌توانیم تقریب مرتبه‌ی n ام تابع $u(t)$ روی Ω_s به صورت $U_{s,n}(t) = \sum_{m=0}^n u_{s,m}(t)$

$3, 4, \dots, m$ به دست آوریم. در نهایت تقریب تابع $u(t)$ روی بازه‌ی $[0, T]$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$u(t) \simeq U_n^M(t) = \begin{cases} U_{1,n}^M(t), & t \in \Omega_1, \\ U_{\gamma,n}^M(t), & t \in \Omega_{\gamma}, \\ \vdots \\ U_{m,n}^M(t), & t \in \Omega_m. \end{cases} \quad (34.4)$$

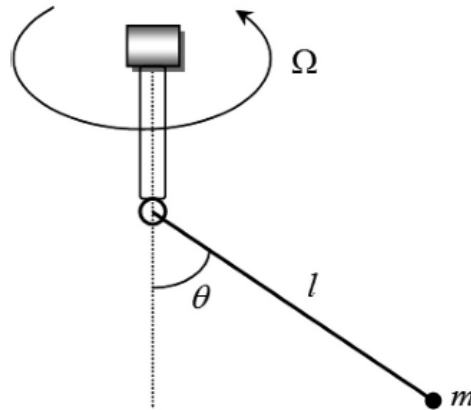
۳.۴ حل چند نمونه از نوسان‌گرهای به شدت غیرخطی

در این قسمت به منظور بررسی دقت روش تکرار وردشی - طیفی چندمرحله‌ای برای حل مسئله‌ی نوسانگر

به شدت غیرخطی مقایسه‌ای بین این روش و روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم با $\Delta t = 0.001$ صورت

گرفته است. در برنامه‌نویسی این قسمت از نرم‌افزار میپل بهره گرفته‌ایم و در تمام محاسبات مقدار $p = 15$

فرض شده است.



شکل ۲.۴: سیستم آونگ چرخشی [۱۰۳].

۱.۳.۴ سیستم آونگ چرخشی

سیستم آونگ ساده‌ی متصل شده به یک پایه‌ی گردان مطابق شکل ۲.۴ را در نظر بگیرید. معادله‌ی حرکت برای این سیستم به صورت زیر به دست می‌آید [۱۰۲]:

$$u'' + \omega_0^2 (1 - \Lambda \cos u) \sin u = 0, \quad u(0) = A \in (0^\circ, 180^\circ), \quad u'(0) = 0, \quad (3.4.4)$$

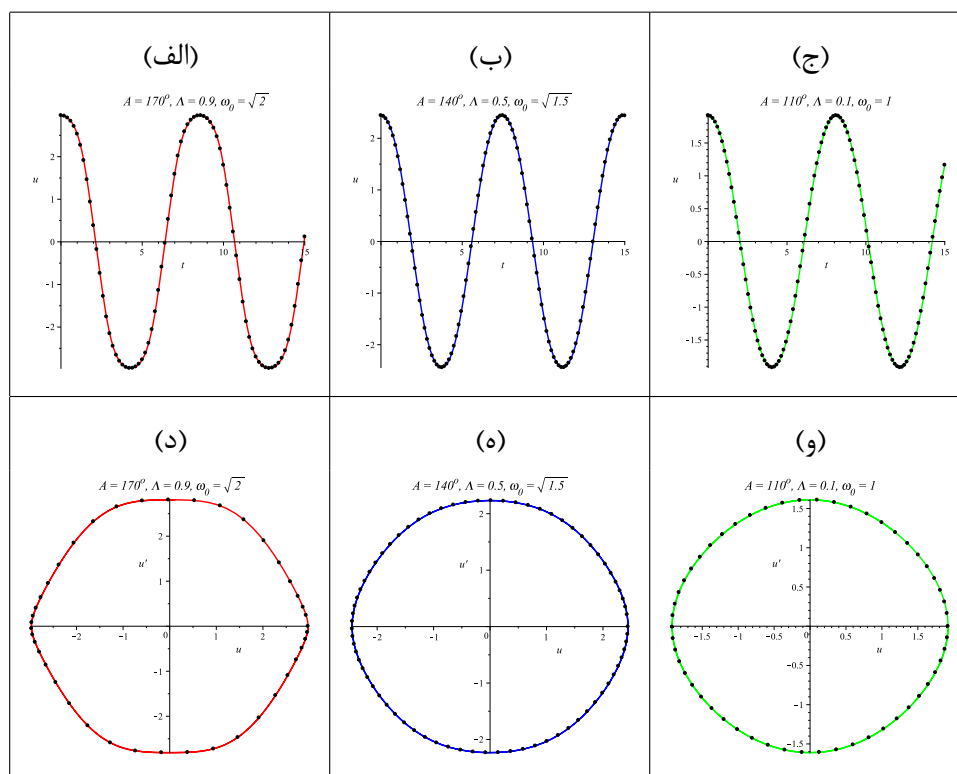
که در آن $u(t)$ جابجایی زاویه‌ای، A دامنه‌ی اولیه‌ی نوسان، $\omega_0^2 = g/l$ و $\Lambda = \Omega^2 l/g$ که در آن g ، l و Ω به ترتیب شتاب گرانش، طول میله متصل شده به جرم m و سرعت زاویه‌ای می‌باشند. محدوده‌ی ثابت مثبت Λ در مرجع [۱۰۹] به صورت $0 < \Lambda < 1$ فرض شده است. این مسئله را بر روی بازه‌ی $[0, 180]$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این جا یک مقایسه بین روش پیشنهادی ($\Delta_r = \Delta = 0.5$ ، $M = 20$ و $n = 10$) و روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم در حالت‌های زیر انجام شده است:

(۱) حالت اول: $(A, \Lambda, \omega_0) = (170^\circ, 0.9, \sqrt{2})$

(۲) حالت دوم: $(A, \Lambda, \omega_0) = (140^\circ, 0.5, \sqrt{1.5})$

(۳) حالت سوم: $(A, \Lambda, \omega_0) = (110^\circ, 0.1, 1)$

شکل‌های ۳.۴ الف- ج و ۳.۴ د - و به ترتیب بیان گر نمودارهای جابجایی و فاز برای این مسئله در حالت‌های فوق هستند. ملاحظه می‌شود که روش پیشنهادی برای حل این مسئله نتایج مناسبی را تولید می‌کند.



شکل ۳.۴: نمودارهای جابجایی (الف-ج) و فاز (د-و) : روش پیشنهادی (خط)، روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم (نقطه).

۲.۳.۴ نوسانات جرم متصل به یک سیم الاستیک تحت کشش

حرکت یک ذره با جرم m متصل به مرکز یک سیم الاستیک کشیده با ضریب سختی k مطابق شکل ۴.۴ را در نظر گرفته و فرض کنید طول سیم الاستیک در زمانی که نیرو به آن وارد شود برابر $2a$ می‌باشد. در این جا فرض می‌کنیم که حرکت ذره یک بعدی بوده و این حرکت تنها در راستای محور x صورت گیرد. معادله‌ی حرکت برای این سیستم به صورت زیر به دست می‌آید [۱۰۵، ۱۰۴، ۱۰۱]:

$$m \frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2kx - \frac{2kax}{\sqrt{d^2 + x^2}} = 0, \quad x(0) = B, \quad \frac{dx}{d\tau}(0) = 0. \quad (36.4)$$

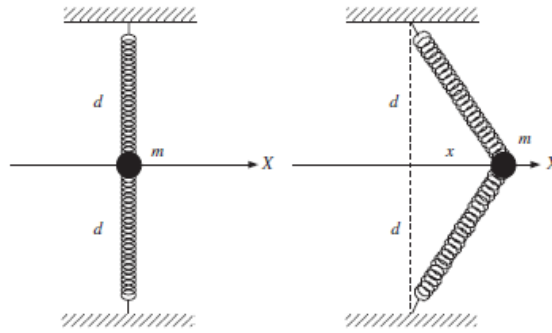
برای ساده‌سازی این معادله از تعویض متغیرهای

$$u = \frac{x}{d}, \quad t = \sqrt{\frac{2k}{m}} \tau, \quad (37.4)$$

داریم:

$$u'' + u - \frac{\lambda u}{\sqrt{1 + u^2}} = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = 0, \quad (38.4)$$

که در آن $A = \frac{B}{d}$ ، $\lambda = \frac{a}{d}$ و $0 < \lambda \leq 1$.



شکل ۴.۴: سیستم جرم متصل به یک سیم الاستیک تحت کشش [۱۰۴، ۱۰۵].

به منظور نشان دادن دقت روش آنالیز هوموتوپي-طيفي چندمرحله‌اي برای حل این مسئله، یک مقایسه بین روش پیشنهادی ($\Delta_r = \Delta = 2$ ، $M = 20$ و $n = 10$) و روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم در حالت‌های $(A, \lambda) = (0.5, 0.01)$ ، $(A, \lambda) = (1, 0.5)$ و $(A, \lambda) = (1/5, 1)$ روی بازه‌ی $[0, 30]$ انجام شده است. شکل‌های ۵.۴ الف- ج و ۵.۴ د - و به‌ترتیب بیان‌گر نمودارهای جابجایی و فاز برای این مسئله می‌باشند.

۳.۳.۴ معادله‌ی ون در پل

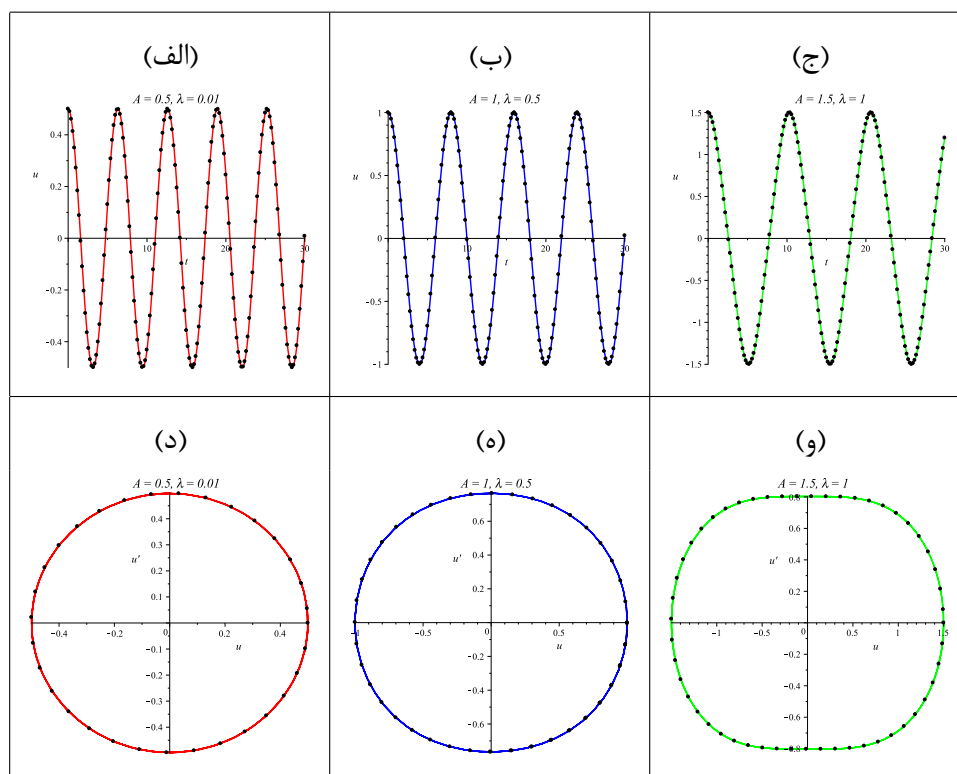
در این‌جا به بررسی معادله‌ی ون در پل^۱ و حل آن به‌وسیله‌ی روش آنالیز هوموتوپي-طيفي چندمرحله‌اي می‌پردازیم. این معادله یک مدل ریاضی از نوسانات خود پایدار یک مدار الکتریکی لامپ سه قطبی است [۱۰۶] و اولین بار در سال ۱۹۲۰ توسط یک فیزیک‌دان به‌نام بالتازار وندر پل^۲ معرفی گردید [۱۰۷]. معادله دیفرانسیل ون در پل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$u'' - \mu(1 - u^2)u' + u = 0, \quad u(0) = A, \quad u'(0) = B, \quad (39.4)$$

که در آن $\mu \geq 0$ یک پارامتر ثابت و معرف درجه‌ی غیرخطی بودن و قدرت میرایی مسئله است. برای $\mu = 0$ معادله‌ی (۳۹.۴) به معادله‌ی حرکت هماهنگ ساده‌ی $u'' + u = 0$ تبدیل می‌شود. هنگامی که $u > 1$

^۱ Van der Pol equation

^۲ Balthasar Van der Pol



شکل ۵.۴: نمودارهای جابجایی (الف-ج) و فاز (د-و) : روش پیشنهادی (خط)، روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم (نقطه).

عبارت $(1 - u^2)\mu$ مثبت بوده و سیستم دارای یک رفتار میرا (اتلاف انرژی) و هنگامی که $u < 1$ ، عبارت

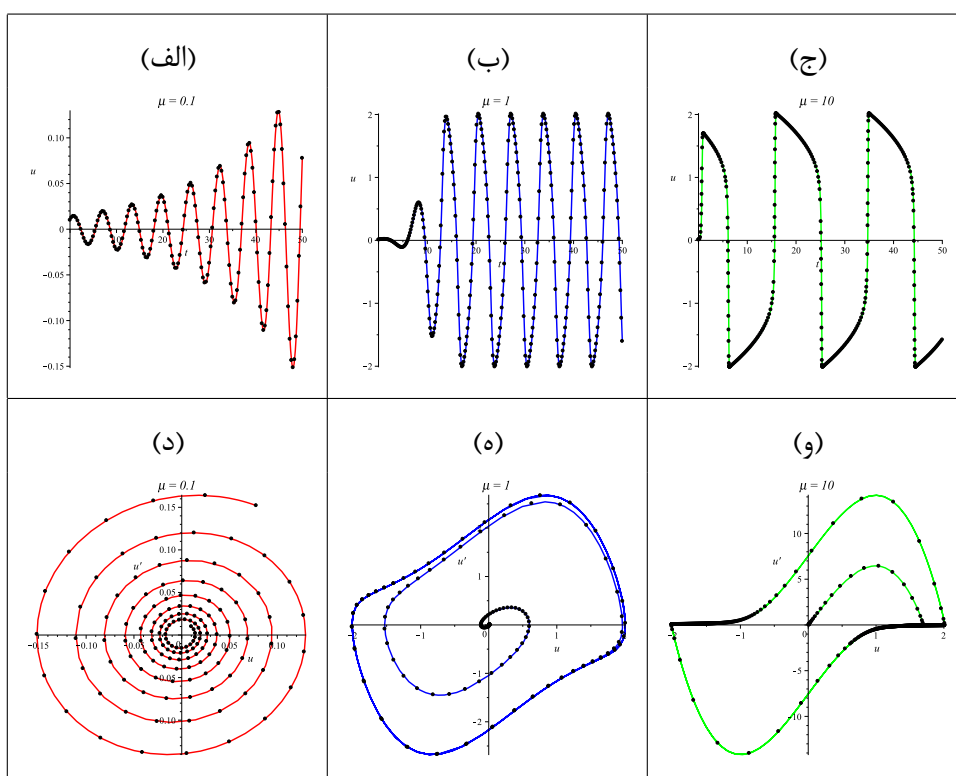
$(1 - u^2)\mu$ منفی بوده و سیستم دارای یک رفتار برونگه-یخته (جذب انرژی) می‌باشد.

به منظور بررسی دقت روش آنالیز هوموتوپي-طیفی چندمرحله‌ای برای حل این مسئله، یک مقایسه بین

روش پیشنهادی ($\Delta_r = \Delta = 0.5^\circ$ و $M = 15$ و $n = 15$) و روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم روی

بازه‌ی $[0, 5^\circ]$ انجام شده است. شکل‌های ۶.۴ الف-ج و ۶.۴ د-و به ترتیب بیان‌گر نمودارهای جابجایی و فاز

برای این مسئله می‌باشند.



شکل ۶.۴: نمودارهای جابجایی (الف-ج) و فاز (د-و) : روش پیشنهادی (خط)، روش رونگه- کوتای مرتبه‌ی چهارم (نقطه).

مراجع

- [1] K. Abbaoui, Y. Cherruault, Convergence of Adomian's method applied to nonlinear equations, Math. Comput. Model. 20 (1994) 69–73.
- [2] S. Abbasbandy, Y. Tan, S.J. Liao, Newton-homotopy analysis method for nonlinear equations, Appl. Math. Comput. 188 (2007) 1794-1800.
- [3] S. Abbasbandy, The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, Phys. Lett. A 360 (2006) 109-113
- [4] S. Abbasbandy, Extended Newton's method for a system of nonlinear equations by modified Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput. 170 (2005) 648-656.
- [5] S. Abbasbandy, Improving Newton–Raphson method for nonlinear equations by modified Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput. 145 (2003) 887–893.
- [6] S. Abbasbandy, Modified homotopy perturbation method for nonlinear equations and comparison with Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput. 172 (2006) 431–438.
- [7] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Boston and London, 1994.
- [8] M. Aslam Noor, M. Waseem, Some iterative methods for solving a system of nonlinear equations, Comput. Math. Appl. 57 (2009) 101-106.
- [9] M. Ayub, A. Rasheed, T. Hayat, Exact flow of a third grade fluid past a porous plate using homotopy analysis method, Int. J. Eng. Sci. 41 (2003) 2091-2103.

- [10] D.K.R. Babajee, M.Z. Dauhoo, M.T. Darvishi, A. Barati, A note on the local convergence of iterative methods based on Adomian decomposition method and 3-node quadrature rule, *Appl. Math. Comput.* 200 (2008) 452-458.
- [11] E. Babolian, J. Biazar, A.R. Vahidi, Solution of a system of nonlinear equations by Adimian decomposition method, *Appl. Math. Comput.* 150 (2004) 847- 854.
- [12] A.S. Bataineh, M.S.M. Noorani, I. Hashim, Solving systems of ODEs by homotopy analysis method, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* In press.
- [13] A.S. Bataineh, M.S.M. Noorani, I. Hashim, The homotopy analysis method for Cauchy reaction-diusion problems, *Phys. Lett. A* In press.
- [14] A.S. Bataineh, M.S.M. Noorani, I. Hashim, On a new reliable modification of homotopy analysis method, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 14 (2009) 371-378.
- [15] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, seventh ed., Books/Cole, Pacific Grove, CA, 2001.
- [16] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, A. Zang, *ISpectral methods in fluid dynamics*, Springer-Verlag, 1998.
- [17] M.S.H. Chowdhury, I. Hashim, O. Abdulaziz, Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method for purely nonlinear fin-type problems, *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 14 (2009) 409-423.
- [18] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton's method for functions of several variables, *Appl. Math. Comput.* 183 (2006) 199-208.
- [19] A. Cordero, J.R. Torregrosa, Variants of Newton's method using fifth-order quadrature formulas, *Appl. Math. Comput.* 190 (2007) 686-698.
- [20] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, An iterative method for solving nonlinear functional equations, *J. Math. Anal. Appl.* 316 (2006) 753-763.
- [21] M.T. Darvishi, A. Barati, A third-order Newton-type method to solve systems of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 187 (2007) 630-635.
- [22] M.T. Darvishi, A. Barati, Super cubic iterative methods to solve systems of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 188 (2007) 1678-1685.

- [23] M.T. Darvishi, A. Barati, A fourth-order method from quadrature formulae to solve systems of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 188 (2007) 257-261.
- [24] A. Golbabai, M. Javidi, A new family of iterative methods for solving system of nonlinear algebraic equations, *Appl. Math. Comput.* 190 (2007) 1717-1722.
- [25] A. Golbabai, M. Javidi, Newton-like iterative methods for solving system of nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 192 (2007) 546-551.
- [26] D. Gottlieb, S. A. Orzag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, SIAM-CBMS, Philadelphia, PA, 1979.
- [27] J.H. He, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Appl. Math. Comput.* 156 (2004) 527–539.
- [28] P.J. Hilton, *An introduction to homotopy theory*, Cambridge University Press, 1953.
- [29] A.S. Householder, *The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation*, McGraw-Hill, New York, 1970.
- [30] S.J. Liao, An approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special example, *Int. J. Non-Linear Mech.* 30 (1995) 371-380.
- [31] S.J. Liao, A new analytic algorithm of Lane-Emden equation, *Appl. Math. Computation*, 142 (2003) 1–16.
- [32] S.J. Liao, A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters (Part 2): an application in fluid mechanics, *Int. J. Non-Linear Mech.* 32 (5) (1997) 815-822.
- [33] S.J. Liao, An explicit totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems, *Int. J. Non-Linear Mech.* 34 (4) (1999) 759-778.
- [34] S.J. Liao, A second-order approximate analytical solution of a simple pendulum by the process analysis method, *J. Appl. Mech.*, 59 (1992) 970–975.
- [35] S.J. Liao, A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special example, *Int. J. Non-Linear Mech.* 30 (1995) 371–380.
- [36] S.J. Liao, A.T. Chwang, Application of homotopy analysis method in nonlinear oscillations, *J. Appl. Mech.*, 65 (1998) 914–922.

- [37] S.J. Liao, An analytic approximate technique for free oscillations of positively damped systems with algebraically decaying amplitude, *Int. J. Non-Linear Mech.* 38 (2003) 1173–1183.
- [38] S.J. Liao, An analytic approximate approach for free oscillations of self-excited systems, *Int. J. Non-Linear Mech.* 39 (2004) 271–280.
- [39] S.J. Liao, A uniformly valid analytic solution of 2D viscous flow past a semi-infinite flat plate, *J. Fluid Mech.*, 385 (1999) 101–128.
- [40] S.J. Liao, An analytic approximation of the drag coefficient for the viscous flow past a sphere, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 37 (2002) 1–18.
- [41] S.j. Liao, *Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method*, Boca Raton: CRC Press, Chapman and Hall, 2003.
- [42] S.J. Liao, On the homotopy analysis method for nonlinear problems, *Appl. Math. Comput.* 47 (2004) 499–513.
- [43] S.J. Liao, A new branch of solutions of boundary-layer flows over an impermeable stretched plate, *Int. J. Heat Mass Transfer* 48 (2005) 2529–2539.
- [44] S.J. Liao, A. Campo, Analytic solutions of the temperature distribution in Blasius viscous flow problems, *J. Fluid Mech.* 453 (2002) 411–425.
- [45] S.J. Liao, An explicit analytic solution to the Thomas-Fermi equation, *Appl. Math. Comput.*, 144 (2003) 495–506.
- [46] S.J. Liao, Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Appl. Math. Comput.* 169 (2005) 1186–1194.
- [47] S.J. Liao, I. Pop, Explicit analytic solution for similarity boundary layer equations, *Int. J. Heat Mass Transfer* 47 (2004) 75–78.
- [48] S.J. Liao, *The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems*, Ph.D. Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992.
- [49] T. Hayat, M. Khan, M. Ayub, On the explicit analytic solutions of an Oldroyd 6-constant fluid, *Int. J. Eng. Sci.* 42 (2004) 123–135.

- [50] T. Hayat, M. Khan, M. Ayub, Couette and Poiseuille flows of an Oldroyd 6-constant fluid with magnetic field, *J. Math. Anal. Appl.* 298 (2004) 225-244.
- [51] T. Hayat, M. Khan, S. Asghar, Homotopy analysis of MHD flows of an Oldroyd 8-constant fluid, *Acta Mech.* 168 (2004) 213-232.
- [52] T. Hayat, M. Khan, Homotopy solutions for a generalized second-grade fluid past a porous plate, *Non-linear Dyn.* 42 (2005) 395-405.
- [53] T. Hayat, M. Khan, M. Ayub, On non-linear flows with slip boundary condition, *ZAMP* 56 (2005) 1012-1029.
- [54] T. Yamamoto, Historical development in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods, *J. Comput. Appl. Math.* 124 (2000) 1–23.
- [55] X.Y. Wu, D.S. Fu, New High-order convergence iteration methods without employing derivatives for solving nonlinear equations, *Comput. Math. Appl.* 41 (2001) 489–495.
- [56] N. Ujevic, A method for solving nonlinear equations, *Appl. Math. Comput.* 174 (2006) 1416–1426.
- [57] C. Wang, On the explicit analytic solution of cheng-chang equation, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46 (2003) 1855–1860.
- [58] A.M. Wazwaz, S.M. ElSayed, A new modification of the Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators, *Appl. Math. Comput.* 122 (2001) 393–405.
- [59] S.H. Crandall, *Engineering Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1956.
- [60] B. Van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio. Rev.* 1 (1920) 701-710. 754-762.
- [61] B. Van der Pol, On "relaxation-oscillations", *Phil. Mag.* 2 (1926) 978-992.
- [62] R. Vichnevetsky, Use of functional approximation methods in the computer solution of initial value partial differential equation problems, *IEEE Trans. Comp.* 18 (1969) 499–512.

- [63] A.B. Finlayson, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles with Application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer*, Academic Press Inc., New York, 1972.
- [64] A.B. Finlayson, L.E. Scriven, The method of weighted residuals: a review, *Appl. Mech. Rev.* 19 (1966) 735-748.
- [65] R.A. Frazer, W.P. Jones, S.W. Skan, *Approximations to functions and to the solutions of differential equations*, ARC RM 1799, 1937.
- [66] M.K. Jain, An extremal point collocation method for fluid flow problems, *Appl. Sci. Res. A* 11 177-188, 1962.
- [67] C. Lanczos, Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions, *J. Math. Phys.* 17 (1938) 123-129.
- [68] J.C. Slater, Electronic energy bands in metals, *Phys. Rev.* 45 794–801, 1934.
- [69] M. Picone, Sul Metodo delle Minime Potenze Ponderate e sul Metodo di Ritz per il Calcolo Approssimato nei Problemi della Fisica-Matematica, *Rend. Circ. Mat. Palermo* 52 (1928) 225-253.
- [70] M. Becker, *The principles and applications of variational methods*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [71] W.F. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Vol. 2, Academic Press Inc., New York, 1972.
- [72] W.J. Duncan, Galerkin's method in mechanics and differential equations, *ARC R & M* 52 (1937) 484–516.
- [73] W.J. Duncan, Note on Galerkin's method for the treatment of problems concerning elastic bodies *Phil. Mag.* 25 (1938) 628–633.
- [74] W.J. Duncan, D.D. Lindsay, *Methods for calculating the frequencies of overtones* Great Britain Aero Res. Comm. Rep. and Memo 1888, 1939.
- [75] L. Collatz, *The Numerical Treatment of Differential Equations* Springer-Verlag, Berlin, 1960.

- [76] C.A.J. Fletcher , Computational Galerkin Methods, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [77] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamic, Springer-Verlag, New York, 1987.
- [78] J. Shen, T. Tang, L.L. Wang, Spectral methods Algorithms, Analysis and Application, 1st ed. Berlin: Springer. 2010.
- [79] J.S. Hesthaven, S. Gottlieb, D. Gottlieb, Spectral Methods for Time-Dependent Problems, Cambridge University Press, 2006.
- [80] J.P. Boyd, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Dover Publications, Inc., 2000.
- [81] J.P. Boyd, Orthogonal rational functions on a semi-infinite interval, J. Comput. Phys. 70 (1987) 63-88.
- [82] J.P. Boyd, Spectral methods using rational basis functions on an infinite interval, J. Comput. Phys. 69 (1987) 112-142.
- [83] Cl. Christov, A complete orthogonal system of functions in $L^2(-\infty, +\infty)$ space, SIAM J. Appl. Math. 42 (1982) 1337-1344.
- [84] D. Funaro, Computational aspects of pseudo-spectral Laguerre approximations, Appl. Numer. Math. 6 (1990) 447-457.
- [85] D. Funaro, O. Kavian, Approximation of some diffusion evolution equations in unbounded domains by Hermite functions, Math. Comp. 57 (1991) 597-619.
- [86] C. Grosch, S. Orszag, Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinates transforms, J. Comput. Phys. 25 (1977) 273-296.
- [87] B.Y. Guo, Error estimation of Hermite spectral method for nonlinear partial differential equations, Math. Comput. 227 (1999) 1067-1078.
- [88] B.Y. Guo, Spectral Methods and Their Applications, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998.
- [89] B.Y. Guo, J. Shen, Laguerre-Galerkin method for nonlinear partial differential equations on a semi-infinite interval, Numer. Math. 86 (2000) 635-654.

- [90] C. Grosch, S. Orszag, Numerical solution of problems in unbounded regions: coordinates transforms, *J. Comput. Phys.* 25 (1977) 273-296.
- [91] Y. Maday, B. Pernaud-Thomas, H. Vandevein, Reappraisal of Laguerre type spectral methods, *La. Rech. Aerospatiale.* 6 (1985)13-35.
- [92] Cl. Christov, A complete orthogonal system of functions in $L^2(-\infty, +\infty)$ space, *SIAM J. Appl. Math.* 42 (1982) 1337-1344.
- [93] K. Parand, A. Taghavi, Rational scaled generalized Laguerre function collocation method for solving the Blasius equation, *J. Comput. Appl. Math.* 233 (2009) 980-989.
- [94] G. Szego, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc., Rhode Island, 1939.
- [95] B.Y. Guo, J. Shen, Z.Q. Wang, A rational approximation and its applications to differential equations on the half line, *J. Sci. Comput.* 15 (2000) 117–147.
- [96] J.P. Boyd, Rational Chebyshev spectral methods for unbounded solutions on an infinite interval using polynomial-Growth special basis functions. *Comput. Math. Appl.* 41 (2001) 1293-1315.
- [97] K. Parand, M. Shahini, Rational Chebyshev pseudo-spectral approach for solving Thomas-Fermi equation, *Phys. Lett. A.* 373 (2009) 210-213.
- [98] K. Parand, M. Shahini, M. Dehghan, Rational Legendre pseudospectral approach for solving nonlinear differential equations of Lane–Emden type, *J. Comput. Phys.* 228 (2009), 8830–8840.
- [99] B. Fornberg, *A Practical Guide to Pseudospectral Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [100] R.P. Agarwal, S.R. Grace, D. O'Regan, *Oscillation Theory for Second Order Dynamic Equations*, vol. 5 of Series in Mathematical Analysis and Applications, Taylor and Francis, London, UK, 2003.
- [101] R.E. Mickens, *Oscillations in Planar Dynamic Systems*, Scientific, Singapore, 1966.
- [102] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley, New York, 1979.

- [103] S.K. Lai, C.W. Lim, Z. Lin, W. Zhang, Analytical analysis for large-amplitude oscillation of a rotational pendulum system, *Appli. Math. Comput.* 217 (2011) 6115-6124.
- [104] A. Beléndez, A. Hernández, T. Beléndez, M.L. Álvarez, S. Gallego, M. Ortuño, C. Neipp, Application of the harmonic balance method to a nonlinear oscillator typified by a mass attached to a stretched wire, *J. Sound. Vibr.* 302 (2007) 1018-1029.
- [105] D.D. Ganji, N. Ranjbar Malidarreh, M. Akbarzade, Comparison of energy balance period with exact period for arising nonlinear oscillator equations, *Acta. Appl. Math.* 108 (2009) 353-362.
- [106] B. Van der Pol, A theory of the amplitude of free and forced triode vibrations, *Radio. Rev.* 1 (1920) 701-710. 754-762.
- [107] B. Van der Pol, On "relaxation-oscillations", *Phil. Mag.* 2 (1926) 978-992.
- [108] Wikipedia, The Free Encyclopedia, www.wikipedia.org.
- [109] S.J. Liao, A.T. Chwang, Application of homotopy analysis method in nonlinear oscillations, *J. Appl. Mech.-Trans. ASME.* 65 (1998) 914-922.
- [110] S.S. Motsa, P. Sibanda, S. Shateyi, A new spectral-homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15 (2010) 2293-2302.
- [111] S.S. Motsa, P. Sibanda, F.G. Awad, S. Shateyi, A new spectral-homotopy analysis method for the MHD Jeffery Hamel problem, *Computers and Fluids* 39 (2010) 1219-1225.
- [112] Yabushita K., Yamashita M., Tsuboi K., An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method. *J. Phys. A: Math Theor* 2007,40: 8403-8416.
- [113] S.J. Liao, An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15 (2010) 2003-2016.
- [114] R.E. Kidder, *J. Appl. Mech.* 27, 329 (1957).

- [115] H.T. Davis, Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, Dover Publications, New York, 1962.
- [116] R.P. Agarwal, D. O. Regan, Stud. Appl. Math. 108, 245 (2002).
- [117] A.M. Wazwaz, Appl. Math. Comput. 118, 123 (2001).
- [118] M. Muskat, The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, J. Edwards, Michigan:Ann Arbor, 1946.
- [119] S. Abbasbandy, Acta Phys. Pol. A 121, 581 (2012).
- [120] J. A. Rad, K. Parand, Int. J. Math. Comp. Sci. 6, 184 (2010).
- [121] A. Taghavi, K. Parand, H. Fani, Int. J. Comput. Math. Sci. 3, 40 (2009).

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Boundary layer	لایه‌ی مرزی
Chebyshev polynomials	چندجمله‌ای‌های چبیشف
Contorolling convergence parameter	پارامتر کنترل‌کننده‌ی همگرایی
Collocation method	روش هم‌مکانی
Completeness	کامل بودن
Deformation equation	معادله دگردهیسی
Degree of precision	درجه‌ی دقت
Domain truncation method	روش برش دامنه
Exponential accuracy	دقت نمایی
Galerkin method	روش گالرکین
Global methods	روش‌های فراگیر
Homotopy analysis method	روش آنالیز هوموتوپی
Integrand	انتگرالده
Jacobi polynomials	چندجمله‌ای‌های ژاکوبی
Laminar	آرام
Least squares method	روش کمترین مربعات
Legendre polynomials	چندجمله‌ای‌های لژاندر
Local methods	روش‌های موضعی
Orthogonal projection	تصویر متعامد
Porous media	مواد متخلخل
Positive scaling factor	پارامتر مقیاس‌گر مثبت
Pseudo-spectral methods	روش‌های شبه طیفی
Similarity solution	حل تشابهی
Similarity transformations	تبدیلات تشابهی
Spectral convergence	همگرایی طیفی
Spectral methods	روش‌های طیفی
Navier-Stokes equations	معادلات ناویر - استوکس

Strongly nonlinear oscillators	نوسان گرهای به شدت غیرخطی
Sturm-Liouville problems	مسائل شتورم-لیوویل
Tau method	روش تاو
Van der Pol equation	معادله ی ون در پل
Velocity gradients	گرادیان سرعت
Weighted residuals method	روش باقی مانده های وزنی

Science and Research Branch, Islamic Azad University

Faculty of Science

Department of Mathematics

Thesis submitted

for the degree of Doctor of Philosophy

Title:

**On the homotopy analysis and spectral methods for
solving strongly nonlinear differential equations on the
large domain**

Supervisors:

E. Babolian & S. Abbasbandy

Advisor:

Sh. Javadi

By:

S.M. Hosseini Harat

Feb 2015