به نام خدا

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی آنالیز عددی (Ph.D)

عنوان

روشهای نوین برای بدست آوردن جواب های دستگاه های خطی بازه ای و فازی

استاد راهنما

دکتر توفیق الهویرنلو

دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور

دکتر میر مظفر معصومی

نگارنده

الناز حقی

سال تحصیلی

۱۳۹۲-۱۳۹۱

تقدیم به پدر و مادر عزیزم :

که حضور سبزشان گرمابخش تمامی لحظات زندگی ام است.

تشکر و قدردانی

اکنون که به لطف خدا موفق به گذراندن مرحله دیگری از تحصیل شده ام، بر خود وظیفه می دانم از اساتید ارجمندم که یاریگر اینجانب بوده اند و قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده شان این مجموعه به انجام نمی رسید سپاسگذاری نمایم.

از استاد عزیزم جناب پروفسور الهویرنلو که در این سال ها از توجهات و رهنمون های علمی و اخلاقی ایشان بهره گرفتم، از صمیم قلبم نهایت تشکر را دارم.

از استاد بزرگوارم جناب پروفسور عباسبندی به پاس تمام زحماتی که در طی دوران تحصیل و همچنین تدوین پایان نامه برای اینجانب کشیده اند، سپاسگذاری می نمایم.

از استاد محترم جناب آقای دکتر معصومی که به عنوان استاد مشاور در تهیه این پایان نامه مرا یاری نمودند، تشکر می نمایم.

از اساتید گرامی جناب آقای دکتر حسین زاده و سرکار خانم دکتر افشار و جناب آقای دکتر فریبرزی عراقی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

همچنین از دوستان خوبم که در این مدت از کمک های بی دریغشان بهره مند بوده ام، تشکر می نمایم و امیدوارم در زندگی و تحصیل موفق و موید باشند.

از خانواده مهربانم که با تشویق ها و حمایتهایشان همراهی ام کرده اند، متشکرم.

الناز حقی

بهار ۱۳۹۲

فهرست مطالب

چکیده

در این رساله، ابتدا توجه خود را به ریاضیات بازه‌ای معطوف کرده و مفهوم‌هایی مانند عدد بازه‌ای، حساب بازه‌ای و دستگاه خطی بازه‌ای را معرفی می‌کنیم. ما یک روش جدید برای تخمین جواب جبری یک سیستم خطی بازه ای که ماتریس ضرایب حقیقی مقدار و بردار سمت راست بازه ای مقدار می باشد، معرفی می کنیم. در روش پیشنهادی، ما ابتدا روش حذفی گاوس را برای تعیین مجموعه جواب یک سیستم خطی بازه ای به کار می بریم. سپس با فاکتورهای محدود کننده یک مجموعه جواب محدود برای سیستم خطی بازه ای متناظر بدست می آوریم، که همان جواب جبری این سیستم خواهد بود.

همچنین به معرفی عدد فازی، حساب فازی و دستگاه خطی فازی که ماتریس ضرایب حقیقی مقدار و بردار سمت راست فازی مقدار می باشد، می پردازیم. سپس نزدیکترین جواب فازی متقارن برای یک سیستم خطی فازی $L-L$ متقارن را با بکار گیری یک متر جدید بدست می آوریم. در نهایت سیستم خطی فازی $L-L$ متقارن به یک مسأله برنامه ریزی غیر خطی تبدیل می شود که جواب بدست آمده از آن، بردار فازی جواب مورد مطلوب است.

کلمات کلیدی: عدد بازه‌ای، حساب بازه‌ای، دستگاه خطی بازه‌ای، عدد فازی، حساب فازی، دستگاه خطی فازی

فصل اول

مروری بر مفاهیم بازه ای

۱-۱ مقدمه

در مدل بندی پدیده های مختلف فیزیکی با دو نوع عدم قطعیت مواجه می شویم: نوع اول آنها عبارت است از عدم قطعیت ناشی از ضعف دانش و ابزار بشری در شناخت پیچیدگی های یک پدیده می باشد. همچنین نوع دوم آنها عبارت است از عدم صراحت و عدم شفافیت مربوط به یک پدیده یا ویژگی خاص می باشد. یک پدیده ممکن است ذاتاً غیرصریح و وابسته به قضاوت افراد باشد.

برای دست آوردن یک مدل واقع گرایانه، می بایستی عدم قطعیت را در مدل در نظر بگیریم. یکی از روش های موجود برای تاثیر عدم قطعیت ذاتی، استفاده از ریاضیات بازه ای می باشد. در چند سال اخیر این نوع ریاضیات در بررسی عدم قطعیت عددی در الگوریتم ها و مسائل عددی، توسعه ی شگرفی داشته است. از طرف دیگر مسائل بازه ای کاربرد فراوانی در علوم مهندسی دارند. این مسائل زمانی به وجود می آیند که اطلاعات مسأله نمی توانند به صورت دقیق اندازه گیری شوند، اما می توانند متعلق به دامنه ی مشخصی از اعداد باشند.

در این فصل به بررسی مفاهیمی در مورد اعداد بازه ای و محاسبات بین آنها می پردازیم. بدیهی است که جمع آوری اطلاعات و داده های دقیق برای توصیف رفتار سیستم های واقعی کاری بسیار مشکل می باشد. یکی از روش های موجود برای تاثیر عدم قطعیت ذاتی سیستم، استفاده از ریاضیات بازه ای می باشد. در چند سال اخیر، این نوع ریاضیات در بررسی عدم قطعیت عددی در الگوریتم ها و مسائل عددی توسعه ی شگرفی داشته است. از طرف دیگر، مسائل بازه ای کاربرد فراوانی در علوم مهندسی دارد. این مسائل زمانی به وجود می آیند که اطلاعات مسأله نمی توانند به صورت دقیق اندازه گیری شوند، اما می توانند متعلق به دامنه مشخصی از اعداد باشند [23,۲۸].

۱-۲ نظریه ریاضیات بازه ای

در این بخش مفاهیم مقدماتی، تعاریف لازم و نتایجی در زمینه محاسبات اعداد بازه ای ارائه می گردد.

تعریف ۱-۲-۱

[33] یک عدد بازه ای[1] را با نماد $[x]$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[x] = \{\, t \in \mathbb{R} \;:\; \underline{x} \le t \le \overline{x} \,\} = \left[\underline{x}, \overline{x}\right],$$

که در آن $\mathbb{R}$ بیانگر مجموعه اعداد حقیقی می باشد ، $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$ و $\underline{x} \le \overline{x}$.

در تعریف فوق $\underline{x}$ را کران پایین و $\overline{x}$ را کران بالای عدد بازه ای $[x]$ می نامیم. مجموعه ی همه ی اعداد بازه ای را با $\mathbb{IR}$ نشان می دهیم. واضح است که: $\mathbb{R} \subset \mathbb{IR}$. زیرا

$$\mathbb{R} = \{\, [x] \in \mathbb{IR} \;:\; \underline{x} = \overline{x} \,\}.$$

تعریف ۱-۲-۲

[33] عدد بازه ای $[x]$ را عدد بازه ای محض می نامیم هرگاه $\underline{x} < \overline{x}$. در این صورت می نویسیم:

$$[x] \in \mathbb{IR} \backslash \mathbb{R}$$

تعریف ۱-۲-۳

[۳۳] برای اعداد بازه ای دلخواه $[x]$ و $[y]$ داریم:

$$[x] = [y] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x} = \underline{y} \;\; \& \;\; \overline{x} = \overline{y}.$$

.

[1] Interval number

تعریف ۱-۲-٤

[۳۳] هرگاه $[x]$ و $[y]$ دو عدد بازه ای دلخواه باشند آنگاه

$$[x] \leq [y] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} \leq \underline{y}.$$

از تعریف فوق می توان نتیجه گرفت

$$[x] \leq [0] = [0,0] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} \leq 0,$$
$$[x] \geq [0] = [0,0] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x} \geq 0$$

تعریف ۱-۲-۵

[۳۳] عدد بازه ای $[x]$ را متقارن گوییم هرگاه:

$$\underline{x} + \overline{x} = 0$$

تعریف ۱-۲-٦

[۳۳] نقطه ی میانی[۲] عدد بازه ای $[x]$ را با نماد $Mid[x]$ نشان می دهیم و برابر است با:

$$Mid[x] = \frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}.$$

با توجه به تعاریف فوق می توان نتیجه گرفت که برای هر عدد بازه ای متقارن $[x]$ داریم:

$$Mid[x] = 0$$

تعریف ۱-۲-۷

[2] پهنای[۳] عدد بازه ای $[x]$ را با نماد $Wid[x]$ نشان می دهیم و برابر است با:

$$Wid[x] = \overline{x} - \underline{x}$$

[۲] Midpoint
[۳] Width

تعریف ۱-۲-۸

[2] شعاع[۴] عدد بازه ای $[x]$ را با نماد $R[x]$ نشان می دهیم و برابر است با:

$$R[x]=\frac{1}{2}Wid[x]=\frac{\overline{x}-\underline{x}}{2}.$$

لم ۱-۲-۱

برای اعداد بازه ی دلخواه $[x]$ و $[y]$ داریم:

۱) $[x]\cap[y]\neq\emptyset \quad\Leftrightarrow\quad |Mid[x]-Mid[y]|\leq R[x]+R[y],$

۲) $[y]\subseteq[x] \quad\Leftrightarrow\quad |Mid[x]-Mid[y]|\leq R[x]-R[y].$

اثبات

1) رفت: ابتدا فرض می کنیم که $[x]\cap[y]\neq\emptyset$ و $a\in[x]\cap[y]$. در این صورت:

$$\left.\begin{matrix} a\in[x]\Rightarrow|Mid[x]-a|\leq R[x] \\ a\in[y]\Rightarrow|Mid[y]-a|\leq R[y] \end{matrix}\right\}\Longrightarrow |Mid[x]-a|+|Mid[y]-a|\leq R[x]+R[y].$$

از طرفی واضح است که:

$$|Mid[x]-Mid[y]|\leq|Mid[x]-a|+|Mid[y]-a|,$$

و از آن داریم:

$$|Mid[x]-Mid[y]|\leq R[x]+R[y].$$

بنابراین قسمت رفت بخش اول ثابت شد.

برگشت: فرض می کنیم نامساوی سمت راست قسمت (۱) برقرار باشد. حال بنابرفرض خلف:

$[x]\cap[y]=\emptyset$ در این صورت دو حالت زیر را داریم:

حالت اول: هرگاه $[x]<[y]$ در این حالت واضح است که:

$$\begin{aligned}|Mid[x]-Mid[y]|&=|Mid[x]-\overline{x}|+\left|\overline{x}-\underline{y}\right|+\left|\underline{y}-Mid[y]\right| \\ &=R[x]+\left|\overline{x}-\underline{y}\right|+R[y]\geq R[x]+R[y].\end{aligned}$$

که یک تناقض آشکار است.

[۴] Radius

حالت دوم: هرگاه $[y] < [x]$. اثبات این حالت، کاملا مشابه حالت اول است. بنابراین اثبات بخش اول لم تمام است.

۲) رفت: ابتدا فرض می کنیم که: $[y] \subseteq [x]$. اگر $Mid[y] = Mid[x]$ اثبات بدیهی است. در غیر این صورت دو حالت زیر را داریم:

حالت اول: هرگاه $Mid[y] \in [\underline{x}, Mid[x]]$. به طور واضح در این قسمت خواهیم داشت:

$$R[x] = \left|\underline{x} - \underline{y}\right| + \left|\underline{y} - Mid[y]\right| + |Mid[y] - Mid[x]|$$
$$= \left|\underline{x} - \underline{y}\right| + R[y] + |Mid[x] - Mid[y]|,$$

که از آن نتیجه می گیریم:

$$R[x] - R[y] = |\underline{x} - \underline{y}| + |Mid[x] - Mid[y]$$
$$\Longrightarrow |Mid[x] - Mid[y]| \leq R[x] - R[y].$$

بنابراین قسمت رفت بخش دوم ثابت شد.

حالت دوم : هرگاه $Mid[y] \in [\, Mid[x], \overline{x}]$ اثبات مشابه است.

برگشت: فرض کنید که نامساوی سمت راست قسمت (۲) برقرار باشد. حال بنابر فرض خلف:

$[y] \nsubseteq [x]$ بنابراین $y^* \in [y]$ وجود دارد به طوری که: $y^* \notin [x]$. در این صورت نتیجه می گیریم:

$$\left.\begin{matrix} |Mid[x] - y^*| \geq R[x] \\ |y^* - Mid[y]| \leq R[y] \end{matrix}\right\} \Longrightarrow |Mid[x] - y^*| - |y^* - Mid[y]| \geq R[x] - R[y].$$

از طرفی واضح است که:

$$|Mid[x] - Mid[y]| \geq R[x] - R[y],$$

که یک تناقض آشکار است. بنابراین اثبات بخش دوم لم تمام است. ■

نتیجه ۱-۲-۱

با توجه به تعریف شعاع یک عدد بازه ای از لم ۱-۲-۱ می توان نتیجه گرفت که:

۱) $[x] \cap [y] \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad 2|Mid[x] - Mid[y]| \leq Wid[x] + Wid[y],$

۲) $[y] \subseteq [x] \quad \Leftrightarrow \quad 2|Mid[x] - Mid[y]| \leq Wid[x] - Wid[y].$

تعریف ۱-۲-۹

[2] قدر مطلق[۵] عدد بازه ای $[x]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$|[x]| = max\ \{|t| :\ \ t \in [x]\} = max\ \{\ |\underline{x}|, |\overline{x}|\ \}.$$

تعریف ۱-۲-۱۰

[2] قدر مطلق کمینه ی[۶] عدد بازه ای $[x]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$< [x] >= min\ \{\ |t| :\ \ t \in [x]\} = \begin{cases} min\ \{\ |\underline{x}|, |\overline{x}|\}, & \circ \notin [x], \\ \circ, & \circ \in [x]. \end{cases}$$

۱-۳ اعمال حسابی روی اعداد بازه ای

تعریف ۱-۳-۱

[33] هرگاه $[x]$ و $[y]$ دو عدد بازه ای دلخواه باشند در این صورت اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به صورت زیر تعریف می شوند:

$$[x] + [y] = \{x + y\ :\ \ x \in [x], y \in [y]\},$$
$$[x] - [y] = \{x - y\ :\ \ x \in [x], y \in [y]\},$$
$$[x] \cdot [y] = \{x \cdot y\ :\ \ x \in [x], y \in [y]\},$$
$$\frac{[x]}{[y]} = \left\{\frac{x}{y} :\ \ x \in [x], y \in [y]\right\}, \quad \text{هرگاه} \quad \circ \notin [y].$$

[۵] Absolute value
[۶] Minimal absolute value

نکته ۱-۳-۱

هرگاه $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ و $[y] = [\underline{y}, \overline{y}]$ دو عدد بازه ای دلخواه باشند و $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ آنگاه $[x] * [y]$ نیز یک عدد بازه ای به صورت زیر است:

$$[x] * [y] = \left[min\left\{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \overline{y}, \overline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}\right\}, max\ \{\underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \overline{y}, \overline{x} * \underline{y}, \overline{x} * \overline{y}\}\right]$$

البته در حالت تقسیم باید $0 \notin [y]$.

با توجه به نکته ی فوق می توان نتیجه گرفت:

$$[x] + [y] = \left[\underline{x} + \underline{y}, \overline{x} + \overline{y}\right], \qquad [x] - [y] = \left[\underline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \underline{y}\right],$$

$$[x] \cdot [y] = \left[min\ \left\{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\right\}, max\ \{\underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \overline{y}, \overline{x} \cdot \underline{y}, \overline{x} \cdot \overline{y}\}\right],$$

$$\frac{[x]}{[y]} = \left[min\ \left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\}, max\ \left\{\frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\overline{y}}, \frac{\overline{x}}{\underline{y}}, \frac{\overline{x}}{\overline{y}}\right\}\right], \qquad \text{هرگاه} \quad 0 \notin [y].$$

نکته ۱-۳-۲

با توجه به نکته *1*-۳-۱، هرگاه $[x] \in \mathbb{IR}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آنگاه ضرب اسکالر را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\lambda \cdot [x] = \{\lambda x \ : \ x \in [x]\} = \begin{cases} [\lambda \underline{x}, \lambda \overline{x}], & \text{اگر } \lambda \geq 0, \\ [\lambda \overline{x}, \lambda \underline{x}], & \text{اگر } \lambda < 0. \end{cases}$$

نکته ۱-۳-۳

با توجه به تعریف *1*-۳-۱ نتیجه می گیریم که عضو خنثی جمعی برابر است با $[0] = [0,0]$ و عضو خنثی ضربی برابر است با $[1] = [1,1]$.

نکته ۱-۳-٤

دستگاه های $(\mathbb{IR}, +)$ و $(\mathbb{IR}, \cdot)$ تشکیل گروه نمی دهند. زیرا هر عدد بازه ای دلخواه دارای عضو معکوس نسبت به اعمال جمع و ضرب نمی باشد.

نکته ۱-۳-٥

مجموعه همه ی اعداد بازه ای با اعمال جمع و ضرب فوق تشکیل یک فضای برداری نمی دهد زیرا هر فضای برداری خود یک گروه می باشد. همچنین این مجموعه تشکیل یک میدان نمی دهد.

لم ۱-۳-۱

[3] برای اعداد بازه ی دلخواه $[x]$، $[y]$ و $[z]$ داریم:

$$[x] \cdot ([y] + [z]) \subseteq [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z].$$

اثبات

با توجه به نکته ی ۱-۳-۱ رابطه ی فوق به آسانی اثبات می شود. ■

لم ۱-۳-۲

[3] فرض کنید $[x], [y], [z], [w] \in \mathbb{IR}$ بطوریکه $[x] \subseteq [z]$ و $[y] \subseteq [w]$ و همچنین $* \in \{+, -, \cdot, /\}$، آنگاه:

$$[x] * [y] \subseteq [z] * [w].$$

اثبات

با توجه به نکته ی ۱-۳-۱، رابطه ی فوق به آسانی اثبات می شود. ■

نکته ۱-۳-٦

با استفاده از تعاریف *1*-۲-۶، *1*-۲-۷ و *1*-۳-۱ نتیجه می گیریم که:

$$[x] = Mid[x] + R[x] \cdot [-1,1] = [Mid[x] - R[x], Mid[x] + R[x]].$$

نکته ۱-۳-۷

[*3*] هرگاه $[x], [y] \in \mathbb{R}$ آنگاه:

۱) $\left|\frac{1}{[y]}[x]\right| = \frac{1}{<[y]>}|[x]|, \quad$ اگر $\quad ۰ \notin [y],$

۲) $|[x] + [y]| \leq |[x]| + |[y]|.$

قضیه ۱-۳-۱

هرگاه a_1، a_2، ... ، a_n اعداد حقیقی دلخواه و $[x_1]$، $[x_2]$، ... ، $[x_n]$، اعداد بازه ای دلخواه باشند آنگاه:

۱) $Wid \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot [x_i] = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot Wid[x_i],$

۲) $Mid \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot [x_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot Mid[x_i],$

۳) $R \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot [x_i] = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot R[x_i].$

اثبات

تعریف می کنیم:

$$\Omega^+ = \{i \ : \ a_i \geq ۰, i = 1,2,\cdots,n\}, \qquad \Omega^- = \{i \ : \ a_i < ۰, i = 1,2,\cdots,n\}$$

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot [x_i] = \left[\sum_{i\in\Omega^+} a_i \underline{x_i} + \sum_{i\in\Omega^-} a_i \overline{x_i}, \sum_{i\in\Omega^+} a_i \overline{x_i} + \sum_{i\in\Omega^-} a_i \underline{x_i}\right]$$

بنابراین

$$Wid\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot[x_i]=\left(\sum_{i\in\Omega+} a_i\,\overline{x_i}+\sum_{i\in\Omega-} a_i\,\underline{x_i}\right)-\left(\sum_{i\in\Omega+} a_i\,\underline{x_i}+\sum_{i\in\Omega-} a_i\,\overline{x_i}\right)$$
$$=\sum_{i\in\Omega+} a_i\left(\overline{x_i}-\underline{x_i}\right)-\sum_{i\in\Omega-} a_i\left(\overline{x_i}-\underline{x_i}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}|a_i|\left(\overline{x_i}-\underline{x_i}\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot Wid[x_i].$$

بنابراین اثبات قسمت (۱)تمام است. اثبات قسمت (۲) نیز کاملا مشابه است. همچنین با توجه به تعریف۱-۲-۸ اثبات قسمت (۳) واضح است.■

۱-٤ بردار بازه ای

تعریف *1*-٤-۱

[3] بردار $[X]=([x_1],[x_2],\cdots,[x_n])^T$ را یک بردار عدد بازه ای[۷] (به طور مختصر، بردار بازه ای) می نامیم هرگاه:

$$\forall i=1,2,\cdots,n: \quad [x_i]\in\mathbb{IR}.$$

نکته ۱-٤-۱

هرگاه برای هر $i=1,2,\cdots,n$ داشته باشیم: $[x_i]=\left[\underline{x_i},\overline{x_i}\right]$ آنگاه برای بردار بازه ای $[X]=([x_1],[x_2],\cdots,[x_n])^T$ داریم:

$$[X]=\left[\underline{X},\overline{X}\right],$$

که در آن $\underline{X}=\left(\underline{x_1},\underline{x_2},\cdots,\underline{x_n}\right)^T$ و $\overline{X}=(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n})^T$.

همچنین می توان نوشت:

$$[X]=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n \quad : \quad \forall i=1,2,\cdots,n, x_i\in[x_i]\}\subseteq\mathbb{R}^n.$$

[۷] Interval number vector

مجموعه ی همه ی بردارهای بازه ای را با $\mathbb{IR}^n$ نشان می دهیم. واضح است که $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{IR}^n$ زیرا

$$\mathbb{R}^n = \{[X] \in \mathbb{IR}^n : \ \underline{X} = \overline{X}\}.$$

همه ی تعاریفی که برای یک عدد بازه ای مطرح کرده ایم را می توانیم به صورت مؤلفه به مؤلفه برای یک بردار بازه ای نیز داشته باشیم.

تعریف ۱-٤-۲

فرض کنید

$$[X] = ([x_1], [x_2], \cdots, [x_n])^T \quad \text{و} \quad [Y] = ([y_1], [y_2], \cdots, [y_n])^T$$

دو بردار بازه ای دلخواه باشند در این صورت:

۱) بردار بازه ای $[X]$ را یک بردار بازه ای محض می نامیم هرگاه:

$$\exists i = 1,2,\cdots,n \ : \ [x_i] \in \mathbb{IR}\backslash\mathbb{R},$$

در این صورت می نویسیم: $[X] \in \mathbb{IR}^n\backslash\mathbb{R}^n$.

۲) $[X] = [Y] \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n, \ : \ [x_i] = [y_i]$

۳) $[X] \leq [Y] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{X} \leq \underline{Y}$

که نتیجه می دهد:

$$[X] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n, \quad : \ [x_i] \geq 0,$$
$$[X] \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n, \ : \ [x_i] \leq 0.$$

۴) $Mid[X] = (Mid[x_1], Mid[x_2], \cdots, Mid[x_n])^T = \frac{\underline{X}+\overline{X}}{2}.$

$$Wid[X] = (Wid[x_1], Wid[x_2], \cdots, Wid[x_n])^T = \overline{X} - \underline{X}. \quad (5$$

$$R[X] = (R[x_1], R[x_2], \cdots, R[x_n])^T = \frac{\overline{X} - \underline{X}}{2}.$$

$$|[X]| = (|[x_1]|, |[x_2]|, \cdots, |[x_n]|)^T. \quad (۶$$

$$[X] \subseteq [Y] \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n, \ : \ [x_i] \subseteq [y_i]. \quad (۷$$

۱-۵ ماتریس بازه ای

تعریف ۱-۵-۱

[3] ماتریس $[A] = \left([a_{ij}]\right)_{m\times n}$را یک ماتریس عدد بازه ای[^] (به طور مختصر، ماتریس بازه ای) می نامیم هرگاه:

$$\forall i = 1, 2, \cdots, m \ \wedge \ \forall j = 1, 2, \cdots, n, \ : \ a_{ij} \in \mathbb{IR}.$$

در این صورت می نویسیم $[A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ که در آن: $\underline{A} = \left(\underline{a_{ij}}\right)_{m\times n}$ و $\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)_{m\times n}$.

همچنین می توان نوشت:

$$[A] = \left\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \ : \ \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\right\} \subseteq \mathbb{IR}^{m\times n}.$$

مجموعه ی همه ی ماتریس های بازه ای از اندازه ی $m \times n$ را با نماد $\mathbb{IR}^{m\times n}$ نشان می دهیم. واضح است که $\mathbb{R}^{m\times n} \subset \mathbb{IR}^{\mathrm{m\times n}}$. زیرا

$$\mathbb{R}^{m\times n} = \left\{[\mathrm{A}] \in \mathbb{IR}^{\mathrm{m\times n}} : \ \underline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}}\right\}.$$

[^] Interval number matrix

تعریف ۱-۵-۲

[9] ماتریس بازه ای $[A]$ را منظم[۹] می نامیم هرگاه برای هر $A \in [A]$ ماتریس A نامنفرد باشد.

تعریف ۱-۵-۳

[3] ماتریس رأسی ماتریس بازه ای $[A]$ را با نماد $V[A] = (v_{ij})_{m\times n}$ نشان می دهیم که در آن

$$\forall i = 1,2,\cdots,m \ \wedge \ \forall j = 1,2,\cdots,n \ : \ v_{ij} = \underline{a_{ij}} \text{ یا } \overline{a_{ij}}.$$

مشابه بردار بازه ای می توان تعاریف قبلی را به صورت مولفه به مولفه برای یک ماتریس بازه ای تعریف کرد.

تعریف ۱-۵-٤

فرض کنید $[A] = ([a_{ij}])_{m\times n}$ و $[B] = ([b_{ij}])_{m\times n}$ دو ماتریس بازه ای دلخواه باشند در این صورت:

۱) ماتریس بازه ای $[A]$ را یک ماتریس بازه ای محض می نامیم هرگاه:

$$\exists i = 1,2,\cdots,m \ \wedge \ \exists j = 1,2,\cdots,n \ : \ [a_{ij}] \in \mathbb{IR}\backslash\mathbb{R},$$

در این صورت می نویسیم: $[A] \in \mathbb{IR}^{m\times n}\backslash\mathbb{R}^{m\times n}$.

۲) $[A] = [B] \iff \forall i = 1,2,\cdots,m \ \wedge \ \forall j = 1,2,\cdots,n \ : \ [a_{ij}] = [b_{ij}],$

۳) $[A] \leq [B] \iff \overline{A} \leq \underline{B}$

[۹] Regular

که نتیجه می دهد:

$$[A] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m \ \wedge \ \forall j = 1, 2, \cdots, n \ : \ \left[a_{ij}\right] \geq 0,$$

$$[A] \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i = 1, 2, \cdots, m \ \wedge \ \forall j = 1, 2, \cdots, n : \ \left[a_{ij}\right] \leq 0.$$

$$Mid[A] = \left(Mid\left[a_{ij}\right]\right)_{m\times n} \qquad (۴$$

$$Wid[A] = \left(Wid\left[a_{ij}\right]\right)_{m\times n} \qquad (۵$$

$$R[A] = \left(R\left[a_{ij}\right]\right)_{m\times n} \qquad (۶$$

$$|[A]| = \left(\left|\left[a_{ij}\right]\right|\right)_{m\times n} \qquad (۷$$

۱-٦ دستگاه خطی بازه ای

تعریف ۱-٦-۱

[3] دستگاه $n \times n$ زیر را یک دستگاه خطی تمام بازه ای[۱۰] می نامیم:

$$\begin{cases} [a_{11}]\,[x_1] + [a_{12}]\,[x_2] + \cdots + [a_{1n}]\,[x_n] = [b_1] \\ [a_{21}]\,[x_1] + [a_{22}]\,[x_2] + \cdots + [a_{2n}]\,[x_n] = [b_2] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ [a_{n1}]\,[x_1] + [a_{n2}]\,[x_2] + \cdots + [a_{nn}]\,[x_n] = [b_n] \end{cases} \qquad (۱-۶-۱)$$

که در آن $\forall\, i, j = 1, 2, \cdots, n \ ، [b_i], \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{IR}$.

فرم ماتریسی دستگاه (۱-۶-۱) را به صورت

$$[A][X] = [B],$$

[۱۰] Fully interval linear system

و نشان می دهیم، که در آن: $[X] = ([x_1], \cdots, [x_n])^T$، $[B] = ([b_1], \cdots, [b_n])^T$

$$[A] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & \cdots & [a_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}] & \cdots & [a_{nn}] \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱-۶-۲

[۹,۱۴] برای دستگاه معادلات تمام بازه ای (۱-۶-۱) می توان مجموعه جواب های زیر را تعریف کرد:

- مجموعه جواب متحده[۱۱]:

$$\sum_{\exists\exists}([A],[B]) = \sum_{\exists\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (\exists A \in [A])\ (\exists b \in [B])\ (Ax = b)\},$$

- مجموعه جواب تحمل پذیر[۱۲]:

$$\sum_{\forall\exists}([A],[B]) = \sum_{\forall\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (\forall A \in [A])\ (\exists b \in [B])\ (Ax = b)\},$$

- مجموعه جواب کنترل پذیر[۱۳]:

$$\sum_{\exists\forall}([A],[B]) = \sum_{\exists\forall} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (\exists A \in [A])\ (\forall b \in [B])\ (Ax = b)\}.$$

نکته ۱-۶-۱

از تعریف ۱-۶-۲ می توان نتیجه گرفت که:

$$\sum_{\exists\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ [A]x \cap [B] \neq \emptyset\}$$
$$\sum_{\forall\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ [A]x \subseteq [B]\}$$
$$\sum_{\exists\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ [A]x \supseteq [B]\}$$

[۱۱] United solution set
[۱۲] Tolerable solution set
[۱۳] Controllable solution set

قضیه ۱-۶-۱

برای دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای (۱-۶-۱) داریم:

۱) $x \in \sum_{\exists\exists} \Leftrightarrow |Mid[A] \cdot x - Mid[B]| \leq R[A] \cdot |[X]| + R[B],$

۲) $x \in \sum_{\forall\exists} \Leftrightarrow |Mid[A] \cdot x - Mid[B]| \leq R[B] - R[A] \cdot |[X]|,$

۳) $x \in \sum_{\exists\forall} \Leftrightarrow |Mid[A] \cdot \boldsymbol{x} - Mid[B]| \leq R[A] \cdot |[X]| - R[B].$

اثبات

با توجه به نکته ۱-۶-۱ و لم ۱-۲-۱، به آسانی قابل اثبات است.■

نکته ۱-۶-۲

از تعریف ۱-۶-۱ نتیجه می گیریم که:

$$\sum_{\forall\exists} \subseteq \sum_{\exists\exists} \quad و \quad \sum_{\exists\forall} \subseteq \sum_{\exists\exists} .$$

قضیه ۱-۶-۲

مجموعه $\sum_{\exists\exists}$ مجموعه ای بسته است.

اثبات

هرگاه $\sum_{\exists\exists} = \emptyset$ آنگاه اثبات بدیهی است. در غیر این صورت فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه ی حدی مجموعه $\sum_{\exists\exists}$ باشد. در این صورت دنباله های $\{A^k\}_{k=0}^{\infty}$، $\{b^k\}_{k=0}^{\infty}$ و $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ وجود دارند به طوری که برای هر $k = 0, 1, \cdots, n$، $A^k \in [A]$ ، $b^k \in [B]$, $A^k x^k = b^k$ و نیز

$$lim_{k\to\infty} x^k = x.$$

از طرفی چون مجموعه های $[A]$ و $[B]$ فشرده می باشند لذا زیر دنباله های $\{A^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$، $\{b^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$ وجود دارند به طوری که $A^{k_j} \longrightarrow A \in [A]$ و $b^{k_j} \longrightarrow b \in [B]$ و نیز $A^{k_j} x^{k_j} = b^{k_j}$.

با توجه به اینکه $x^{k_j} \longrightarrow x$ خواهیم داشت:

$$b = \lim_{j\to\infty} b^{k_j} = \lim_{j\to\infty} A^{k_j}x^{k_j} = \lim_{j\to\infty} A^{k_j} \cdot \lim_{j\to\infty} x^{k_j} = Ax$$

که از آن نتیجه می شود:

$$x \in \sum_{\exists\exists}$$

■

علاوه بر مجموعه جواب های متحده، تحمل پذیر و قابل کنترل جواب دیگری را نیز می توان برای یک دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای ارائه داد.

تعریف ۱-۶-۳

[۹] بردار بازه ای $[\boldsymbol{X}] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ را یک جواب جبری برای دستگاه معادلات خطی تمام بازه ای (۱-۶-۱) می نامیم هرگاه با توجه به اعمال جمع و ضرب تعریف شده روی اعداد بازه ای دقیقاً در آن صدق کند. یعنی

$$\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}]\,[x_j] = [b_i], \qquad \forall i = 1,2,\dots,n.$$

قرارداد ۱-۶-۱

در این پایان نامه جواب جبری را با نماد $[X_{\boldsymbol{A}}] = ([x_{1A}], [x_{2A}], \dots, [x_{nA}])^T$ نشان می دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$[A][X_A] = [B].$$

همچنین واضح است که جواب جبری می تواند به صورت یک مجموعه به فرم زیر تلقی شود:

$$[X_A] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \ : \ \forall i = 1,2,\dots,n; \quad x_i \in [x_{iA}]\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

قرارداد ۱-۶-۲

در این پایان نامه منظور از دستگاه خطی بازه ای دستگاهی است که ماتریس ضرایب آن حقیقی مقدار و بردار سمت آن بازه ای مقدار باشد. نیز منظور از دستگاه خطی تمام بازه ای دستگاهی است که ماتریس ضرایب و بردار سمت آن ، هر دو بازه ای مقدار باشند.

بنابراین با توجه به قرارداد ۱-۶-۲ ، یک دستگاه خطی بازه ای $n \times n$ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} a_{11}\,[x_1] + a_{12}\,[x_2] + \cdots + a_{1n}\,[x_n] = [b_1] \\ a_{21}\,[x_1] + a_{22}\,[x_2] + \cdots + a_{2n}\,[x_n] = [b_2] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\,[x_1] + a_{n2}\,[x_2] + \cdots + a_{nn}\,[x_n] = [b_n]. \end{cases} \qquad (۱-۶-۲)$$

فرم ماتریسی دستگاه (۱-۶-۲) را می توان به صورت زیر ارائه کرد:

$$A[X] = [B],$$

که در آن $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و

$$[X] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T \ , \ [B] = ([b_1], [b_2], \dots, [b_n])^T \in \mathbb{IR}^n.$$

نکته ۱-۶-۳

در این پایان نامه همواره فرض بر این است که ماتریس A نامنفرد می باشد، مگر آنکه به طور صریح بیان شود که نامنفرد نیست.

قضیه ۱-۶-۳

برای دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۲) داریم:

$$\sum_{\exists\exists} = \sum_{\forall\exists}$$

همچنین اگر $[B] \in \mathbb{IR}^n \backslash \mathbb{R}^n$ آنگاه $\sum_{\exists\forall} = \emptyset$.

اثبات

با توجه به اینکه برای دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۲) ماتریس ضرایب یک ماتریس حقیقی مقدار است لذا نمادهای سور وجودی ($\exists$) و سور عمومی ($\forall$) در تعاریف مجموعه های $\sum_{\exists\exists}$ و $\sum_{\forall\exists}$ معادل هم خواهند بود. این یعنی آنکه:

$\sum_{\exists\exists} = \sum_{\forall\exists}$. از طرفی بنا برفرض خلف $\sum_{\exists\forall} \neq \emptyset$ و $\boldsymbol{x} \in \sum_{\exists\forall}$. در این صورت با توجه به تعریف ۱-۶-۲ نتیجه خواهیم گرفت که برای هر $b \in [B]$ داریم:

$Ax = b$. به عبارتی دیگر، با توجه به نامنفرد بودن A، داریم:

$$\forall b \in [B] \implies x = A^{-1}b. \qquad (۳-۶-۱)$$

حال با توجه به اینکه $[B]$ یک بردار بازه ای محض است، فرض می کنیم $b, \acute{b} \in [B]$ و $b \neq \acute{b}$. در این صورت براساس رابطه (*3-6-1*) داریم $x = A^{-1}b$ و $x = A^{-1}\acute{b}$. که نتیجه می دهد:

$$A^{-1}b = A^{-1}b' \quad \implies \quad b = b'.$$

بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است.■

نتیجه ۱-٦-۱

با توجه به قضیه ۱-۶-۳ نتیجه می گیریم که برای دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۲) به جای مجموعه جواب های متحده و تحمل پذیر، تنها می توان یک مجموعه به صورت زیر معرفی کرد:

$$\mathrm{X_{ss}} = \sum_{\exists\exists} = \sum_{\forall\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ (\exists b \in [B])(Ax = b)\}$$

نکته ۱-٦-٤

هرگاه دستگاه بازه ای (۱-۶-۲) تبدیل به یک دستگاه حقیقی مقدار شود یعنی بردار سمت راست نیز حقیقی مقدار باشد $[B] = b \in \mathbb{R}^n$، آنگاه نتیجه می گیریم:

$$\sum_{\exists\exists} = \sum_{\forall\exists} = \sum_{\exists\forall} = A^{-1}b.$$

مشابه دستگاه خطی تمام بازه ای (۱-۶-۱)، برای دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۲) نیز می توان جواب جبری را به صورت بردار بازه ای $[X_A] = ([x_{1A}], [x_{2A}], \dots, [x_{nA}])^T$ تعریف کرد که دقیقاً در دستگاه (۱-۶-۲) صدق می کند. یعنی:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} [x_{jA}] = [b_i], \qquad \forall i = 1,2, \dots, n.$$

یا به عبارتی دیگر

$$A[X_A] = [B].$$

نکته ۱-٦-۵

در دستگاه بازه ای (۱-۶-۲) برای هر $i = 1,2, \dots, n$ داریم:

$$\underline{b_i} = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij}\, \underline{x_{jA}} + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij}\, \overline{x_{jA}}\,, \qquad \overline{b_i} = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij}\, \overline{x_{jA}} + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij}\, \underline{x_{jA}}\,,$$

که در آن

$$\Gamma_i^+ = \{j \ : \ a_{ij} \geq 0; \ j = 1,2, \cdots, n\}, \qquad \Gamma_i^- = \{j \ : \ a_{ij} < 0; \ j = 1,2, \cdots, n\}$$

و $[x_{iA}] = \left[\underline{x_{iA}}, \overline{x_{iA}}\right]$.

تعریف ۱-٦-٤

[۴۱] ماتریس حقیقی مقدار $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را به «طور کامل نامنفرد»[۱۴] گوییم هرگاه خود ماتریس و قدر مطلق آن یعنی ماتریس $|A| = (|a_{ij}|)_{n \times n}$، هر دو نامنفرد باشند.

[۱۴] Completely nonsingular

لم ۱-٦-۱

[۹] هرگاه دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۲) دارای جواب جبری یکتا باشد، آنگاه ماتریس ضریب A به طور کامل نامنفرد است.

اثبات

فرآیند اثبات این لم براساس روش فریدمن [۲۴] می باشد. فرض کنید که دستگاه بازه ای (۱-۶-۲) دارای جواب جبری یکتا است. در این صورت ماتریس حقیقی $S = (s_{ij})_{2n\times 2n}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$if\ a_{ij} \geq ۰ \Longrightarrow \begin{cases} s_{ij} = a_{ij}, \\ s_{i\,n+j} = ۰, \\ s_{n+i\,j} = ۰, \\ s_{n+i\,n+j} = a_{ij}, \end{cases} \quad \wedge \quad if\ a_{ij} < ۰ \Longrightarrow \begin{cases} s_{ij} = ۰, \\ s_{i\,n+j} = a_{ij}, \\ s_{n+i\,j} = a_{ij}, \\ s_{n+i\,n+j} = ۰. \end{cases}$$

در این صورت ساختار ماتریس S به صورت زیر خواهد بود:

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}_{2n\times 2n}$$

که در آن ماتریس E شامل درایه های نامنفی ماتریس A و ماتریس F شامل درایه های منفی ماتریس A هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$A = E + F, \qquad |A| = E - F. \qquad (۴-۶-۱)$$

با استفاده از بحث فوق، می توانیم دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۲) را با دستگاه خطی حقیقی زیر جایگزین کنیم.

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{B} \\ \overline{B} \end{pmatrix}, \qquad (۵-۶-۱)$$

که در آن

$$\underline{X} = \left(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n}\right)^T, \qquad \wedge \qquad \overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})^T,$$

$$\underline{B} = \left(\underline{b_1}, \underline{b_2}, \cdots, \underline{b_n}\right)^T, \qquad \wedge \qquad \overline{B} = \left(\overline{b_1}, \overline{b_2}, \cdots, \overline{b_n}\right)^T.$$

با توجه به اینکه دستگاه بازه ای (۱-۶-۲) دارای جواب جبری یکتا است. بنابراین دستگاه حقیقی (۱-۶-۵) نیز دارای جواب یکتا می باشد. لذا ماتریس S نامنفرد است. از طرفی قضیه ۱ در [۲۴]، ماتریس S نامنفرد است اگر و تنها اگر ماتریس های $E+F$ و $E-F$ نامنفرد باشند. بنابراین با توجه به رابطه ی (۱-۶-۴) اثبات تمام است.■

نکته ۱-۶-۶

[۹] در حالت کلی عکس لم ۱-۶-۱ صحیح نمی باشد. در حقیقت هرگاه جواب دستگاه حقیقی (۱-۶-۵) تشکیل یک بردار بازه ای دهد، یعنی برای هر $i=1,2,\dots,n$ داشته باشیم: $\underline{x_i} \le \overline{x_i}$، آنگاه عکس لم ۱-۶-۱ برقرار می باشد.

اثبات

فرض کنید ماتریس A به طور کامل نامنفرد باشد و بردارهای حقیقی $\underline{X}=\left(\underline{x_1},\underline{x_2},\cdots,\underline{x_n}\right)^T$ و $\overline{X}=(\overline{x_1},\overline{x_2},\cdots,\overline{x_n})^T$ جواب دستگاه حقیقی (۱-۶-۵) هستند، به طوری که

$$\underline{x_i} \le \overline{x_i}, \qquad \forall i=1,2,\dots,n$$

چون ماتریس A به طور کامل نامنفرد است، با توجه به رابطه ی (۱-۶-۴) و قضیه ۱ در [۲۴]، ماتریس S نامنفرد می باشد و در نتیجه بردار $\left(\underline{X},\overline{X}\right)^T$ جواب یکتای دستگاه حقیقی (۱-۶-۵) است. بنابراین داریم:

$$E\underline{X}+F\overline{X}=\underline{B}, \qquad F\underline{X}+E\overline{X}=\overline{B},$$

که در آن $E=\left(e_{ij}\right)_{n\times n}$ و $F=\left(f_{ij}\right)_{n\times n}$

$$e_{ij}=\begin{cases} a_{ij}, & a_{ij}\ge 0,\\ 0, & a_{ij}<0, \end{cases} \qquad f_{ij}=\begin{cases} 0, & a_{ij}\ge 0,\\ a_{ij}, & a_{ij}<0, \end{cases} \qquad i,j=1,2,\dots,n.$$

با توجه به فرض بردار بازه ای $[X]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[X]=([x_1],[x_2],\dots,[x_n])^T; \qquad [x_i]=\left[\underline{x_i},\overline{x_i}\right] \quad \forall i=1,2,\dots,n$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,[x_j] &= \sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\left[\underline{x_i},\overline{x_i}\right]\right)\\ &= \left[\sum_{j\in\Gamma_i^+} a_{ij}\,\underline{x_{jA}} + \sum_{j\in\Gamma_i^-} a_{ij}\,\overline{x_{jA}}\;,\sum_{j\in\Gamma_i^+} a_{ij}\,\overline{x_{jA}} + \sum_{j\in\Gamma_i^-} a_{ij}\,\underline{x_{jA}}\right]\\ &= \left[\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\underline{x_j} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\overline{x_j}, \sum_{j=1}^{n} e_{ij}\overline{x_j} + \sum_{j=1}^{n} f_{ij}\underline{x_j}\right]\\ &= \left[\underline{b_i},\overline{b_i}\right]\\ &= [b_i]\end{aligned}$$

بنابراین بردار بازه ای $[X]$ جواب جبری دستگاه بازه ای (۱-۶-۲) است. همچنین یکتایی بردار $\left(\underline{X}\,,\overline{X}\right)^T$، یکتایی $[X]$ را تضمین می کند.■

مثال ۱-٦-۱

دستگاه خطی بازه ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases}\;[x_1] + 2[x_2] = [5,6],\\ -2[x_1] + [x_2] = [-1,4],\end{cases}$$

به راحتی می توان بررسی کرد که ماتریس A به طور کامل نا منفرد است. اما با این وجود دستگاه فوق دارای جواب جبری یکتا نیست. در واقع بردار $([-1,2],[3,2])^T$ در دستگاه فوق صدق می کند اما به طور واضح $[3,2]$ تشکیل یک عدد بازه ای نمی دهد. بنابراین دستگاه دارای جواب جبری نمی باشد.

نکته ۱-٦-۷

[۹] درلم ۱-۶-۱ ، فرض یکتایی جواب لازم است. به این معنی که اگر جواب جبری دستگاه بازه ای (۱-۶-۲) یکتا نباشد آنگاه ماتریس A می تواند به طور کامل نامنفرد نباشد. برای اثبات این موضوع مثال زیر را داریم:

مثال ۱-٦-۲

دستگاه خطی بازه ای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} -[x_1] + [x_2] = [-1, 3], \\ [x_1] + [x_2] = [-3, 1], \end{cases}$$

دستگاه بازه ای فوق دارای نامتناهی جواب بهینه به صورت زیر می باشد:

$$[x_1] = [-3 + \delta, 1 - \delta], \qquad [x_2] = [-\delta, \delta],$$

که در آن $\delta \in [0, 2]$. توجه کنید که در دستگاه فوق ماتریس A نامنفرد و ماتریس $|A|$ منفرد است. بنابراین ماتریس A بطور کامل نامنفرد نمی باشد در حالی دستگاه بازه ای دارای جواب جبری غیریکتا است.

محاسبات بازه ای ابزاری برای کراندار کردن خطاهای گرد کردن در برنامه های کامپیوتری می باشد(اوتلی و پراگر[15] 1964 [37]). همچنین محاسبات بازه ای در قالب یک روش عمومی برای بررسی عدم قطعیت عددی در الگوریتم ها و مسائل متعدد گسترش پیدا کرده است.

در این پایان نامه سیستم های با معادلات خطی بازه ای (ILS)[16] را به اختصار سیستم های خطی بازه ای می گوییم.

سیستم های زیادی در زمینه های متعددی از علوم مهندسی رایج می باشد. این سیستم ها اغلب در عمل به خصوص در شرایطی که داده ها بطور دقیق اندازه گیری نشده ولی میزان دقت آنها شناخته شده است، استفاده می شوند.(کرفوت و کری ئویچ[17] ۱۹۹۶[28] و فیدلر[18] و همکارانش در ۲۰۰۶ [23]). اکنون سیستم های ILS یک مساله مشکل ساز آنالیز بازه ای است. این مسائل اولین بار در اواسط سال ۱۹۶۰ توسط اوتلی و پراگر [37] در نظر گرفته شده اند. آنها برای برنامه های کاربردی متعدد به این سیستم ها اهمیت داده اند.

[15] Oettli & Prager
[16] Interval Linear System
[17] Kearfott & Kreinovich
[18] Fiedler

پس از آن این مسائل مورد توجه زیادی قرار گرفت و در زمینه ی مدل سازی سیستم های نامشخص گسترش پیدا کرد(کوپه و راست[۱۹] [۱۶] ، کرئویچ و همکارانش ۱۹۹۳ [29] ، نیومر[۲۰] ۱۹۹۰ [34] ، اوتلی ۱۹۶۵ [36]). در رابطه با حل سیستم های ILS در سال۱۹۹۳ [۲] آلفلد و مایر[۲۱] روش معروف چولسکی[۲۲] را برای کراندار کردن جواب دستگاه های خطی با ماتریس متقارن و بردار سمت راست بازه ای به کار برده اند. همچنین آنها به یک معیار جدید برای امکان پذیر بودن روش چولسکی رسیده اند (آلفلد و مایر۱۹۹۵ [۳]).

در سال ۱۹۹۸ [15] بیموند[۲۳] سیستم های ILS را توسط روش های محاسبات خطی حل کرد. در سال ۲۰۰۰ آلفلد و مایر [۴] برروی کاربردهای محاسبات بازه ای و همچنین صحت روش های حل دستگاه معادلات خطی و غیر خطی ، مسائل مقادیر ویژه جبری، مسائل مقدار اولیه برای ODE[۲۴] ها و مسائل مقدار مرزی بیضوی PDE[۲۵] های مرتبه ی دوم بحث کرده اند.

در سال 2003 [5] آلفلد و همکارانش معیار معروف اوتلی – پراگر را برای کلاس خاصی از ماتریس ها گسترش دادند. پولیاک و نازین[۲۶] در سال 2004 [38] تخمینی برای بعضی مدل های خاص از ابهام بازه ای که یک جواب بازه ای بهینه می دهد را بدون برنامه ریزی خطی ارائه کرده اند. فریررا[۲۷] و همکارانش در سال ۲۰۰۵ [22] این تقریب معرفی شده را برای محاسبه ی جواب سیستم های با معادلات چند جمله ای بازه ای به کار برده اند. بعضی روش های مستقیم و تکراری برای حل سیستم های ILS را می توان در تحقیقات مایر۲۰۰۷ [31] و مارکو[۲۸] ۱۹۹۹ [30] پیدا کرد.

---

[۱۹] Cope & Rust
[20] Neumaier
[21] Alefeld & Mayer
[22] Cholesky
[23] Beaumond
[24] Ordinary differential equation
[25] Partial differential equation
[26] Polyak & Nazin
[27] Ferreira
[28] Markov

در سال ۲۰۰۹ [25] گارلوف[۲۹] روشی ارائه کرده است که می تواند برای کلاس خاصی از ماتریس ها در روند محاسبات روش حذفی گاوس از تقسیم بر بازه های شامل صفر اجتناب کند. (نیکز و گرپسا[۳۰] ۲۰۰۹ [35] , پروکوپیو[۳۱] و همکارانش۲۰۰۹ [39] , سواستجانو و دیموا[۳۲] ۲۰۰۹ [40]).

در چهار چوب محاسبات بازه ای، مساله ی معروف کلاسیک در آنالیز عددی پیدا کردن جواب جبری برای یک سیستم ILS می باشد. اخیراً الهویرنلو وقنبری[۳۳] ۲۰۱۲ [9] یک راه حل برای سیستم های ILS با ماتریس ضرایب مربعی قطعی و بردار سمت راست بازه ای ارائه کرده اند و نیز یک روش جدید برای سیستم های خطی شمول معرفی کرده اند که جواب جبری یک سیستم ILS در آن محاسبه می شود.

همچنین آنها شرایط لازم و کافی برای منحصر به فردی جواب جبری یک سیستم ILS را بررسی کرده اند [10].

[29] Garloff
[30] Nikas & Grapsa
[31] Prokopyev
[32] Sevastjanov & Dymova
[33] Allahviranloo & Ganbari

فصل دوم

مروری بر مفاهیم فازی

2-۱ مقدمه

مسائل دنیای واقعی به طور معمول ساختار پیچیده ای دارند که دلیل آن، وجود ابهام و عدم قطعیت در تعریف و درک آن ها است. برای مسائلی که پیچیدگی آنها کم و عدم قطعیت نیز ناچیز است می توان با استفاده از معادلات ریاضی ماهیت و رفتار سیستم را به طور دقیق مدل سازی و تحلیل کرد. اما برای مسائلی که پیچیدگی آنها کمی بیشتر است و عدم قطعیت نیز به طور نسبی زیاد است دیگر نمی توان تحلیل دقیق و قطعی از مسأله داشت. برای چنین مسائلی رویکرد نظریه ی فازی مطرح می شود. این نظریه راهکاری است که به وسیله آن می‌توان سیستم‌های پیچیده را که مدلسازی آنها با استفاده از ریاضیات و روش‌های مدلسازی کلاسیک[۳۴] (غیرفازی) غیرممکن بوده و یا بسیار مشکل است، به آسانی و با انعطاف بسیار بیشتر مدلسازی کرد.

در سال ۱۹۶۵ زاده[۳۵] که در آن زمان رئیس گروه مهندسی برق دانشگاه کالیفرنیا دربرکلی بود مقاله یی تحت عنوان مجموعه های فازی در مجله اطلاعات و کنترل منتشر ساخت. زاده برچسب یا نام فازی را روی این مجموعه های گنگ یا چند ارزشی قرار داد.

در رابطه با لزوم طرح محاسبات فازی بدیهی است که جمع آوری اطلاعات و داده های دقیق برای توصیف رفتار سیستمهای واقعی کاری بسیار مشکل است. از این رو مدل سازی دقیق ریاضی با افزایش پیچیدگی سیستمها غیر ممکن می شود. با افزایش پیچیدگی سیستمها دقت مدل ریاضی کاهش می یابد و به جایی می رسد که نمی توان نظرات قابل قبول درباره دینامیک سیستم مطرح کرد. محاسبات فازی پاسخی برای مسائل پیچیده امروز است.

در این فصل به معرفی مفاهیم و تعاریف ابتدایی ریاضیات فازی می‌پردازیم و سپس نظر خود را معطوف به دسته‌ی خاصی از مسائل فازی به نام «دستگاه‌های خطی فازی» می‌کنیم و به طرح چند نکته در این خصوص می‌پردازیم.

[۳۴] Classic
[۳۵] Zade

2-2 نظریه مجموعه های فازی

دراین بخش مفاهیم مقدماتی، تعاریف لازم و نتایجی در زمینه نظریه مجموعه های فازی ازمراجع [42,43,44,45] ارائه می گردد. در نظریه مجموعه های قطعی عضویت یک عنصر به مجموعه، قطعی است. فرض کنید X یک مجموعه مرجع باشد، زیرمجموعه A از X عبارت است از عناصری از X که دقیقاً مشخص باشند. زیر مجموعه A را می توان با استفاده از مفهوم تابع مشخصه بیان کرد.

تعریف ۲-۲-۱

[43] فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد که اعضای آن در حالت کلی به صورت x نشان داده شوند. مجموعه ی جفت مرتب های

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \ : \ x \in X\}$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$، مجموعه ی فازی[۳۶] $\tilde{A}$ در X می نامیم.

در تعریف ۲-۲-۱ تابع $\mu_{\tilde{A}}$ را تابع عضویت[۳۷] مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ می نامیم که به هر $x \in X$ عددی در بازه ی $[0,1]$ با نماد $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عنوان در جه ی تعلق یا درجه ی عضویت x در مجموعه ی $\tilde{A}$ نسبت می دهد. هر چه مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نزدیکتر باشد به معنای تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نیز هر چه مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد صفر نزدیکتر باشد به معنای تعلق کمتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است.

همچنین واضح است که هر زیر مجموعه ی کلاسیک (غیر فازی) از مجموعه ی مرجع X می تواند به عنوان یک مجموعه ی فازی تلقی شود. زیرا تنها کافی است تابع عضویت را تابع مشخصه ی آن انتخاب کنیم.

قرارداد ۲-۲-۱

مجموعه ی همه ی مجموعه های فازی **در** X را با $\mathbb{F}(X)$ نشان می دهیم. همچنین در سرتاسر این پایان نامه برای نشان دادن مجموعه های فازی از نماد $\sim$ در بالای نام مجموعه ها استفاده می کنیم. مانند $\tilde{A}$، $\tilde{B}$.

[۳۶] Fuzzy set
[۳۷] Membership function

تعریف ۲-۲-۲

[۴۳] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه ی فازی دلخواهی در X باشد. در این صورت محمل[۳۸] مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$S(\tilde{A}) = supp(\tilde{A}) = \{\overline{x \in X \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0}\}.$$

و همچنین هسته[۳۹] مجموعه فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$C(\tilde{A}) = cor(\tilde{A}) = \{x \in X \ : \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

تعریف ۲-۲-۳

[۴۳] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه ی فازی دلخواهی در X باشد. در این صورت ارتفاع[۴۰] مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$h(\tilde{A}) = sup\{\mu_{\tilde{A}}(x) \ : \ x \in X\}.$$

همچنین هرگاه $h(\tilde{A}) = 1$، آنگاه می گوییم مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال[۴۱] است و در غیر این صورت می گوییم زیرنرمال[۴۲] است. واضح است که اگر $0 < h(\tilde{A}) < 1$ آنگاه می توانیم با تعریف مجدد تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت $\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{h(\tilde{A})}$ آن را تبدیل به یک مجموعه ی فازی نرمال نماییم.

تعریف ۲-۲-٤

[۴۳] مجموعه ی $\tilde{A}$ را مجموعه ی فازی تهی[۴۳] می نامیم، اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$$

[۳۸] Support
[۳۹] Core
[۴۰] Height
[۴۱] Normal
[۴۲] Subnormal
[۴۳] Empty

تعریف ۲-۲-۵

[۲۰] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه های فازی دلخواهی در X باشند. گوییم $\tilde{A}$ زیر مجموعه ی $\tilde{B}$ است و می نویسیم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ هرگاه

$$\forall x \in X \implies \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x).$$

تعریف ۲-۲-۶

[۲۰] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه های فازی دلخواهی در X باشند. گوییم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با هم برابرند و می نویسیم $\tilde{A} = \tilde{B}$ هرگاه $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ و $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$. یا به عبارتی دیگر

$$\forall x \in X \implies \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$

برای مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ در X، مجموعه های کلاسیک (غیرفازی) به نام r-برش ها را معرفی می کنیم. این مجموعه ها نقش بسیار مهمی را در مطالعه ی نظریه مجموعه فازی ایفا می کنند. زیرا هر مجموعه ی فازی دلخواه مانند $\tilde{A}$ را می توان به صورت یکتا توسط یک خانواده از چنین مجموعه هایی مشخص نمود. همچنین یک کاربرد دیگر از این مجموعه ها، در مطالعه ی حساب فازی[۴۴] می باشد که در بخش های بعدی به صورت مفصل شرح داده خواهد شد.

تعریف ۲-۲-۷

[۲۰] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه ی فازی دلخواهی در X باشد و $r \in [0,1]$. در این صورت r-برش ها ی مجموعه فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$[\tilde{A}]_r = \{x \in X \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\}, \quad \forall r \in (0,1],$$

و برای $r = 0$ نیز تعریف می کنیم

$$[\tilde{A}]_0 = supp(\tilde{A}) = \{\overline{x \in X \ : \ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0}\}.$$

در ادامه چگونگی به دست آوردن تابع عضویت یک مجموعه فازی از روی r-برش های آن را در قالب یک قضیه بیان می کنیم.

[۴۴] Fuzzy arithmetic

قضیه ۲-۲-۱

فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه ی فازی دلخواهی در X باشد. در این صورت داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = sup\left\{r \ : \ x \in \left[\tilde{A}\right]_r\right\}.$$

اثبات

ابتدا فرض کنید $\mu_{\tilde{A}}(x) = r'$ و $sup\left\{r \ : \ x \in \left[\tilde{A}\right]_r\right\} = r^*$. از $\mu_{\tilde{A}}(x) = r'$ نتیجه می گیریم $x \in \left[\tilde{A}\right]_{r'}$ و لذا

$$r' \leq sup\left\{r \ : \ x \in \left[\tilde{A}\right]_r\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad r' \leq r^*$$

همچنین از $sup\left\{r \ : \ x \in \left[\tilde{A}\right]_r\right\} = r^*$ نتیجه می گیریم $x \in \left[\tilde{A}\right]_{r^*}$ و لذا

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq r^* \qquad \Longrightarrow \qquad r' \geq r^*$$

بدین ترتیب قضیه ثابت شد. ■

نکته ۲-۲-۱

فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X باشد، به راحتی می توان نشان داد:

الف) اگر $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$، آنگاه داریم $\left[\tilde{A}\right]_{r_2} \subseteq \left[\tilde{A}\right]_{r_1}$.

ب) اگر $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله ی صعودی (نانزولی) و همگرا به r در بازه ی $[0, 1]$ باشد آنگاه داریم:

$$\left[\tilde{A}\right]_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\tilde{A}\right]_{r_k}.$$

در ادامه می خواهیم مفهوم «تحدب»[۴۵] را برای مجموعه های فازی تعمیم دهیم. همانطور که در ادامه مشاهده خواهیم کرد این مفهوم کاربرد مهمی در تعریف اعداد فازی و حساب فازی خواهد داشت. ابتدا تعریف مفهوم «تحدب» را روی مجموعه های کلاسیک (غیرفازی) ارائه می دهیم.

[۴۵] Convexity

تعریف ۲-۲-۸

مجموعه کلاسیک (غیرفازی) A از X را محدب[۴۶] گوییم هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in A$ و هر $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A.$$

تحدب برای مجموعه های فازی براساس تحدب تمام r-برش های آن که مجموعه هایی کلاسیک (غیرفازی) می باشند، به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۲-۲-۹

[۴۳] فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X باشد. آنگاه $\tilde{A}$ را یک مجموعه فازی محدب می نامیم هرگاه برای هر $r \in [0,1]$، $[\tilde{A}]_r$ مجموعه ای محدب در X باشد.

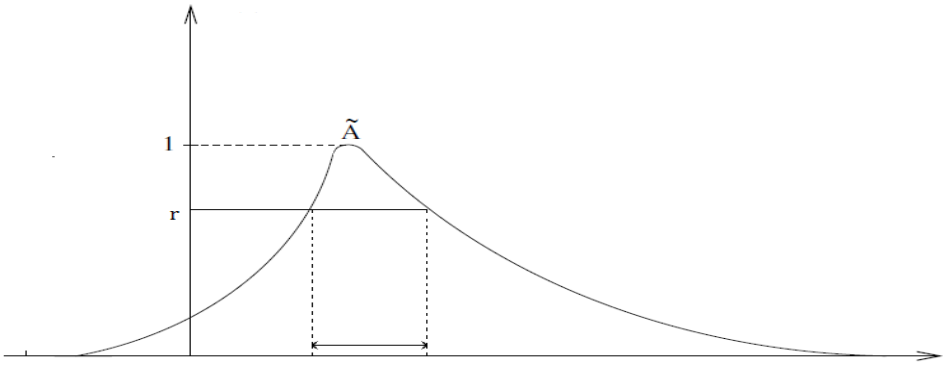
قضیه ۲-۲-۲

$\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب در X است اگر و تنها اگر

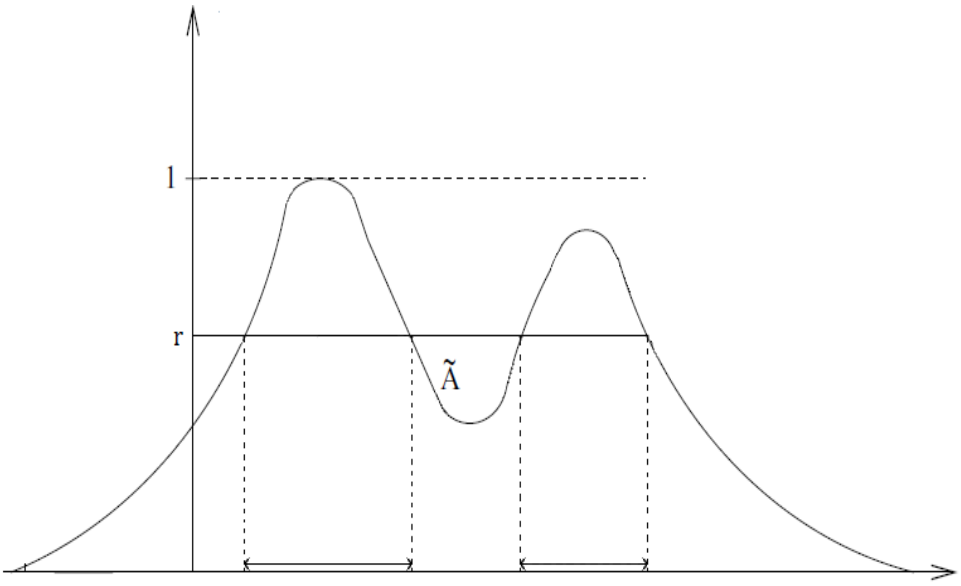
$$\forall x_1, x_2 \in X,\ \forall \lambda \in [0,1] \implies \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}.$$

برای درک بهتر در شکل های ۲-۲-۱و ۲-۲-۲ به ترتیب یک مجموعه ی فازی محدب و یک مجموعه ی فازی غیر محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را ارائه داده ایم.

[۴۶] Convex



شکل ۲-۲-۱ یک مجموعه فازی محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$



شکل ۲-۲-۲ یک مجموعه فازی غیرمحدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$

یکی از پایه ای ترین مفاهیم در نظریه مجموعه فازی که می تواند برای تعمیم مفاهیم ریاضیات کلاسیک (غیرفازی) به ریاضیات فازی مورد استفاده قرار بگیرد، «اصل گسترش»[۴۷] می باشد. این مفهوم اولین بار توسط زاده دانشمند ایرانی تبار در سال ۱۹۶۵ [۴۲] ارائه شد.

تعریف ۲-۲-۱۰

[۴۳] فرض کنید X حاصل ضرب کارتزین[۴۸] از مجموعه های مرجع X_1، X_2، ...، X_n باشد، یعنی $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ و نیز $\tilde{A}_1$، $\tilde{A}_2$، ...، $\tilde{A}_n$ به ترتیب مجموعه های فازی در X_1، X_2، ...، X_n باشند. همچنین فرض

[۴۷] Extension principle
[۴۸] Cartesian product

کنید که f نگاشتی از X به مجموعه ی مرجع Y باشد و $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. در این صورت اصل گسترش به ما اجازه می دهد تا مجموعه فازی $\tilde{B}$ در Y را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \ : \ y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X\},$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} sup_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in f^{-1}(y)}\{min_{i=1,2,\dots,n}\{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\}\}, & if\ f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ \circ & Otherwise, \end{cases}$$

و f^{-1} معکوس نگاشت f می باشد.

از تعریف فوق نتیجه می گیریم که هرگاه $n = 1$ آنگاه اصل گسترش به صورت زیر است:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) \ : \ y = f(x), \quad x \in X\}$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} sup_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_{\tilde{A}}(x)\}, & if\ f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ \circ & Otherwise. \end{cases}$$

۲-۳ اعداد فازی

تعریف 2-۳-۱

[۲۰] مجموعه فازی $\tilde{u}$ روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوییم هرگاه

الف) $\tilde{u}$ نرمال باشد،

ب) $\tilde{u}$ مجموعه ی فازی محدب باشد،

ج) $\mu_{\tilde{u}}$ نیمه پیوسته بالایی[۴۹] باشد (تابع حقیقی f را نیمه پیوسته بالایی می نامیم هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه ی $\{x \in \mathbb{R} \ : \ f(x) < \alpha\}$ مجموعه ای باز باشد)،

د) $supp(\tilde{u})$ مجموعه ای فشرده در $\mathbb{R}$ باشد.

[۴۹] Upper semi-continuous

در این پایان نامه مجموعه ی همه ی اعداد فازی را با $\mathbb{E}$ نشان می دهیم. واضح است که $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{E}$ زیرا مجموعه ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را می توان به صورت زیر تفسیر کرد:

$$\mathbb{R} = \left\{\chi_{\{x\}} \ : \ x \text{ یک عدد حقیقی دلخواه باشد}\right\}$$

که درآن $\chi_{\{x\}}$ همان تابع مشخصه ی عنصر x است. با توجه به تعریف *2-1-7*، برای هر $0 < r \leq 1$، r-برش های عدد فازی $\tilde{u}$ را به صورت $[\tilde{u}]_r = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \mu_{\tilde{u}}(x) \geq r\}$ و همچنین برای $r = 0$ به صورت $[\tilde{u}]_0 = supp(\tilde{u}) = \overline{\{x \in \mathbb{R} \ : \ \mu_{\tilde{u}}(x) > 0\}}$ تعریف می کنیم. با استفاده از خاصیت های (ج) و (د) تعریف *2*-۳-۱ به راحتی می توان نتیجه گرفت که برای هر $r \in [0,1]$، $[\tilde{u}]_r$ مجموعه هایی بسته و کراندار روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ می باشند. همچنین شرط (ب) ایجاب می کند که برای هر $r \in [0,1]$، $[\tilde{u}]_r$ مجموعه هایی محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ هستند. واضح است که برای هر $r \in [0,1]$، $[\tilde{u}]_r$ تشکیل بازه های بسته و کراندار روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ می دهند [۴۵]. در این پایان نامه برای هر $r \in [0,1]$، r-برش های عدد فازی $\tilde{u}$ را به صورت زیر نشان می دهیم:

$$[\tilde{u}]_r = \left[\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right]$$

لم زیر به این سوال پاسخ می دهد که "تحت چه شرایطی یک خانواده از مجموعه های ناتهی در $\mathbb{R}$، تشکیل r-برش های یک عدد فازی را می دهد؟".

لم *2*-۳-۱

[۲۷] خانواده ای دلخواه $\{u_r \ : \ 0 \leq r \leq 1\}$ از مجموعه های ناتهی در $\mathbb{R}$، تشکیل r-برش های یک عدد فازی را می دهد اگر و تنها اگر همه ی شرایط زیر برقرار باشد:

۱) برای هر $r \in [0,1]$، u_r ها بازه هایی بسته و کراندار به صورت $u_r = \left[\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right]$ روی $\mathbb{R}$ باشند.

۲) اگر $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$، آنگاه $u_{r_2} \subseteq u_{r_1}$.

۳) هرگاه $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله ای صعودی (غیرنزولی) و همگرا به r در بازه ی $[0,1]$ باشد آنگاه

$$\left[lim_{k\to\infty} \underline{u}(r_k), lim_{k\to\infty} \overline{u}(r_k)\right] = \left[\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right].$$

نکته 2-۳-۱

[۱۰] از لم 2-۳-۱ نتیجه می گیریم که اگر خانواده ی بازه های بسته ی زیر:

$$\{[\underline{u}(r), \overline{u}(r)] \ : \ 0 \leq r \leq 1\},$$

تشکیل r -برش های یک عدد فازی را بدهد آنگاه:

الف) شرط(۱) ایجاب می کند که توابع $\underline{u}$ و $\overline{u}$، توابعی کراندار نسبت به r روی بازه ی $[0, 1]$ می باشند و برای هر $r \in [0, 1]$، خواهیم داشت $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$.

ب) شرط (۲) ایجاب می کند که توابع $\underline{u}$ و $\overline{u}$ به ترتیب توابعی صعودی (نانزولی) و نزولی (ناصعودی) نسبت به r روی بازه ی $[0, 1]$ باشند.

ج) شرط (۳) ایجاب می کند که توابع $\underline{u}$ و $\overline{u}$ توابعی از چپ پیوسته نسبت به r روی بازه ی $[0, 1]$ می باشند.

با توجه به نکته ی 2-۳-۱ می توانیم تعریف دیگری از عدد فازی که به آن فرم پارامتری[۵۰] عدد فازی می گوییم ارائه می دهیم.

تعریف 2-۳-۲

[۲۴] یک عدد فازی $\tilde{u}$ به فرم پارامتری، یک زوج مرتب $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ از توابع $\underline{u}(r)$ و $\overline{u}(r)$، $0 \leq r \leq 1$ است، که در شرایط زیر صدق کنند:

۱) $\underline{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و صعودی(غیرنزولی) باشد،

۲) $\overline{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و نزولی (غیرصعودی)باشد،

۳) $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r), \quad 0 \leq r \leq 1$.

با توجه به تعاریف 2-۲-۵ و 2-۲-۶ می توان تعاریف زیر را ارائه داد:

[۵۰] Parametric Form

تعریف 2-۳-۳

اگر $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ دو عدد فازی دلخواه باشند، گوییم $\tilde{u}$ زیر مجموعه ی $\tilde{v}$ است و می نویسیم $\tilde{u} \subseteq \tilde{v}$ هرگاه برای هر $r \in [\circ, 1]$ داشته باشیم $[\tilde{u}]_r \subseteq [\tilde{v}]_r$.

تعریف 2-۳-٤

دو عدد فازی دلخواه $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ با هم برابرند و می نویسیم $\tilde{u} = \tilde{v}$ هرگاه برای هر $r \in [\circ, 1]$، داشته باشیم $[\tilde{u}]_r = [\tilde{v}]_r$.

در بیشتر مسائل، از یک دسته اعداد فازی خاص که آنها را اعداد فازی ذوزنقه ای[۵۱] می نامیم، استفاده می کنیم. این اعداد به صورت زیر تعریف می شوند:

تعریف 2-۳-۵

[43] عدد فازی $\tilde{u}$ را ذوزنقه ای می نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} \circ, & a < x, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1, & b \le x < c, \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d, \\ \circ. & d < x, \end{cases}$$

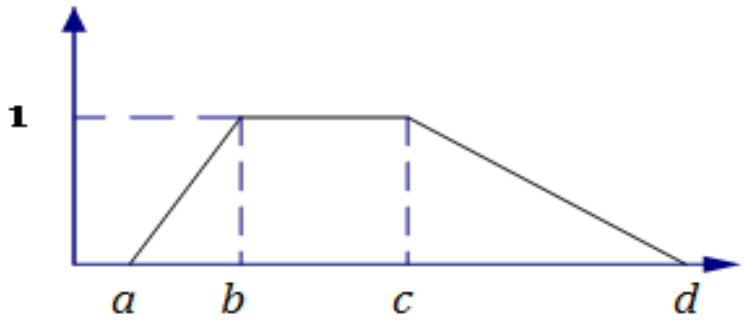
که در آن a، b، c و d اعداد حقیقی هستند. معمولا این نوع اعداد فازی را به صورت یک چهارتایی مرتب به فرم (a, b, c, d) نشان می دهیم. این عدد فازی در شکل 2-۳-۱ رسم شده است.

نکته 2-۳-۲

با توجه به تعریف r –برش یک عدد فازی، براحتی می توان r –برش های عدد فازی ذوزنقه ای $\tilde{u} =$ (a, b, c, d) را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{u}]_r = \left[\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right] = [a + (b-a)r, d - (d-c)r], \quad \forall r \in [\circ, 1].$$

[۵۱] Trapezoidal



شکل2-۳-۱ یک عدد فازی ذوزنقه ای

یک حالت خاص از اعداد فازی ذوزنقه ای، اعداد فازی مثلثی[۵۲] هستند. در حقیقت هرگاه در عدد فازی ذوزنقه ای $\tilde{u} = (a, b, c, d)$ داشته باشیم $b = c$ آنگاه عدد فازی $\tilde{u}$ تبدیل به یک عدد فازی مثلثی می شود. در حالت کلی یک عدد فازی مثلثی به صورت زیر تعریف می شود:

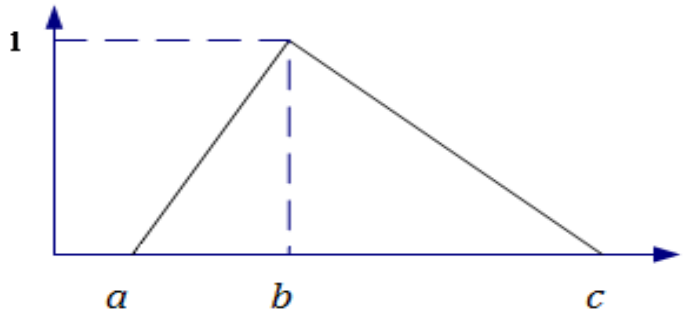
تعریف 2-۳-۶

[۴۳] عدد فازی $\tilde{u}$ را مثلثی می نامیم هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} ۰, & a < x, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ \dfrac{c-x}{c-b}, & b \le x \le c, \\ ۰. & c < x, \end{cases}$$

که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند. معمولا این نوع اعداد فازی را به صورت یک سه تایی مرتب به فرم (a, b, c) نشان می دهیم. این عدد فازی در شکل 2-۳-۲ رسم شده است.

[۵۲] Triangular



شکل 2-۳-۲ عدد فازی مثلثی

نکته 2-۳-۳

با توجه به تعریف r –برش یک عدد فازی، براحتی می توان r –برش های عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (a, b, c)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{u}]_r = \left[\underline{u}(r), \overline{u}(r)\right] = [a + (b - a)r, c - (c - b)r], \quad \forall r \in [0, 1].$$

تعریف 2-۳-۷

عدد فازی $L - R$ [43] $\tilde{u} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)_{LR}$ ، $a_1 \leq a_2$ و $\alpha, \beta > 0$ را یک عدد فازی $L - R$ نامیده می شود بطوریکه:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a_1 - x}{\alpha}\right) & x < a_1 \\ 1 & a_1 \leq x \leq a_2 \\ R\left(\frac{x - a_2}{\beta}\right) & a_2 < x \end{cases}$$

که a_1 و a_2 **به ترتیب** نقاط چپ و راست هسته هستند β و α به ترتیب پهنای چپ و راست هستند و توابع $L(0)$ و $R(0)$ ، که توابع حالت چپ و راست نامیده می شوند و صدق می کنند.

۱- $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ از $\mathbb{R}^+$ به $[0,1]$ ناصعودی هستند.

۲- $L(0) = R(0) = 1$ و $L(1) = R(1) = 0$

نکته 2-۳-٤

اگر در هر عدد فازی $\tilde{u}$ حداقل یکی از پهناهای چپ و راست صفر باشد آنگاه تعریف 2-۳-۷ را به صورت زیر گسترش می دهیم:

۱- اگر $\tilde{u} = (a_1, a_2; 0, \beta)_{LR}$ آنگاه :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ 1 & a_1 \le x \le a_2 \\ R\left(\frac{x - a_2}{\beta}\right) & a_2 < x \end{cases}$$

۲- اگر $\tilde{u} = (a_1, a_2; \alpha, 0)_{LR}$ آنگاه :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{a_1 - x}{\alpha}) & x < a_1 \\ 1 & a_1 \le x \le a_2 \\ 0 & a_2 < x \end{cases}$$

۳- اگر $\tilde{u} = (a_1, a_2; 0, 0)_{LR}$ آنگاه :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x < a_1 \\ 1 & a_1 \le x \le a_2 \\ 0 & a_2 < x \end{cases}$$

بنابراین، توسط نکته 2-۳-۴، اعداد قطعی و بازه های قطعی می توانند به عنوان اعداد فازی $L-R$ در نظر گرفته شوند. بخصوص، هنگامی که $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ توابع خطی هستند.

اگر $L(x)=R(x)=max\{0,1-x\}$ و $a_1<a_2$ ، عدد فازی $\tilde{u}$ ، عدد فازی ذوزنقه ای نامیده می شود. همچنین هنگامی که $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ توابع خطی هستند.

اگر $L(x)=R(x)=max\{0,1-x\}$ و $a_1=a_2$ ، عدد فازی $\tilde{u}$ ، عدد فازی مثلثی نامیده می شود.

به وضوح برای $\tilde{u}=(a_1,a_2;\alpha,\beta)_{LR}$ داریم :

$$C(\tilde{u})=[a_1,a_2] \qquad \text{و} \qquad S(\tilde{u})=[a_1-\alpha,a_2+\beta]$$

تعریف ۲-۳-۸

[43] یک عدد فازی $L-R$ $\tilde{u}=(a_1,a_2;\alpha,\beta)_{LR}$ ، یک عدد فازی متقارن نامیده می شود اگربرای هر

$$x\epsilon\mathbb{R}^+ \quad L(x)=R(x) \quad \text{و} \quad \alpha=\beta$$

در این حالت $\tilde{u}$ یک عدد فازی متقارن $L-L$ است.

تعریف ۲-۳-۹

[43] دو عدد فازی $L-R$

$$\tilde{u}=(a_1,a_2;\alpha,\beta)_{LR} \qquad \text{و} \qquad \tilde{v}=(b_1,b_2;\gamma,\eta)_{LR}$$

برابرند اگر و فقط اگر

$$a_1=b_1 \ , \ a_2=b_2 \ , \ \alpha=\gamma, \ \beta=\eta$$

تعریف ۲-۳-۱۰

[43] برای اعداد فازی $L-R$ جمع و ضرب اسکالر به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\tilde{u}+\tilde{v}=(a_1,a_2;\alpha,\beta)_{LR}+(b_1,b_2;\gamma,\eta)_{LR}$$

$$=(a_1+b_1,a_2+b_2;\alpha+\gamma,\beta+\eta)_{LR}$$

$$\lambda.\tilde{u}=\lambda.(a_1,a_2;\alpha,\beta)_{LR}=\begin{cases}(\lambda a_1,\lambda a_2;\lambda\alpha,\lambda\beta)_{LR} & \lambda\geq 0\\ (\lambda a_2,\lambda a_1;-\lambda\beta,-\lambda\alpha)_{RL} & \lambda<0\end{cases}$$

دقت شود که در این پایان نامه یک تابع ثابت $L(0)$ و یک تابع ثابت R (0) برای هر عدد فازی استفاده می کنیم. بنابراین از نوشتن اندیس"LR" برای اعداد فازی $L-R$ صرف نظر می کنیم.

در ادامه می خواهیم حساب اعداد فازی را از دو دیدگاه بررسی کنیم. دیدگاه اول با استفاده از اصل گسترش می باشد که در تعریف ۲-۲-۱۰ در مورد آن توضیح داده شد. دیدگاه دوم با استفاده از مفهوم r –برش یک عدد فازی و استفاده از حساب اعداد بازه ای می باشد که در تعریف ۱-۳-۱ به تفصیل در مورد آن بحث شد. همچنین در این بخش خواهیم دید که این دو دیدگاه کاملاً با هم هم ارز بوده و نتایج کاملاً یکسانی خواهند داد.

۲-٤ حساب اعداد فازی براساس اصل گسترش

فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعدد فازی دلخواهی باشند و * یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد، یعنی $*\in\{+,-,\times,/\}$. همچنین فرض کنید $\tilde{u}*\tilde{v}=\tilde{w}\in\mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از اصل گسترش می توان تابع عضویت عدد فازی $\tilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$\mu_{\tilde{w}}(t)=sup_{x*y=t}\{min\{\mu_{\tilde{u}}(x),\mu_{\tilde{v}}(y)\}\},\qquad \forall t\in\mathbb{R}.$$

بنابراین در حالت های جداگانه خواهیم داشت:

$$\mu_{\tilde{u}+\tilde{v}}(t)=sup_{x+y=t}\{min\{\mu_{\tilde{u}}(x),\mu_{\tilde{v}}(y)\}\},\qquad \forall t\in\mathbb{R},$$
$$\mu_{\tilde{u}-\tilde{v}}(t)=sup_{x-y=t}\{min\{\mu_{\tilde{u}}(x),\mu_{\tilde{v}}(y)\}\},\qquad \forall t\in\mathbb{R},$$
$$\mu_{\tilde{u}\times\tilde{v}}(t)=sup_{x\times y=t}\{min\{\mu_{\tilde{u}}(x),\mu_{\tilde{v}}(y)\}\},\qquad \forall t\in\mathbb{R},$$

$$\mu_{\tilde{u}/\tilde{v}}(t) = \ sup_{x/y=t}\{min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, \qquad \circ \notin supp(\tilde{v}), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد غیرصفر دلخواه باشد آنگاه ضرب اسکالر $\lambda \cdot \tilde{u}$ نیز یک عدد فازی است که تابع عضویت آن براساس اصل گسترش به صورت زیر می باشد:

$$\mu_{\lambda\cdot\tilde{u}}(t) = \sup_{\lambda\cdot x=t}\{\mu_{\tilde{u}}(x)\} = \mu_{\tilde{u}}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

۲-۵ حساب اعداد فازی براساس r -برش ها

فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعدد فازی دلخواهی باشند و * یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد، یعنی $*\in\{+,-,\times,/\}$. همچنین فرض کنید $\tilde{u} * \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از مفهوم r – برش ها و استفاده از حساب اعداد بازه ای، می توان برای هر $r \in [\circ, 1]$، r –برش های عدد فازی $\tilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$[\tilde{w}]_r = [\tilde{u}]_r * [\tilde{v}]_r = \{x * y \ : \ x \in [\tilde{u}]_r, y \in [\tilde{v}]_r\}$$

بنابراین در حالت های جداگانه با استفاده ار حساب اعداد بازه ای برای هر $r \in [\circ, 1]$ خواهیم داشت:

$$[\tilde{u} + \tilde{v}]_r = \left[\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \overline{u}(r) + \overline{v}(r)\right],$$
$$[\tilde{u} - \tilde{v}]_r = \left[\underline{u}(r) - \overline{v}(r), \overline{u}(r) - \underline{v}(r)\right],$$
$$[\tilde{u} \times \tilde{v}]_r = [min\{\underline{u}(r)\cdot\underline{v}(r), \underline{u}(r)\cdot\overline{v}(r), \overline{u}(r)\cdot\underline{v}(r), \overline{u}(r)\cdot\overline{v}(r)\},$$
$$max\{\underline{u}(r)\cdot\underline{v}(r), \underline{u}(r)\cdot\overline{v}(r), \overline{u}(r)\cdot\underline{v}(r), \overline{u}(r)\cdot\overline{v}(r)\}],$$

$$[\tilde{u}/\tilde{v}]_r = [min\{\underline{u}(r)/\underline{v}(r), \underline{u}(r)/\overline{v}(r), \overline{u}(r)/\underline{v}(r), \overline{u}(r)/\overline{v}(r)\}$$
$$max\{\underline{u}(r)/\underline{v}(r), \underline{u}(r)/\overline{v}(r), \overline{u}(r)/\underline{v}(r), \overline{u}(r)/\overline{v}(r)\}].$$

همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آنگاه ضرب اسکالر $\lambda \cdot \tilde{u}$ نیز یک عدد فازی است که r–برش های آن براساس حساب اعداد بازه ای به صورت زیر می باشد:

$$\left[\lambda \cdot \tilde{u}\right]_r = \lambda \cdot [\tilde{u}]_r = \begin{cases} \left[\lambda\underline{u}(r), \lambda\overline{u}(r)\right], & \lambda \geq \circ, \\ \left[\lambda\overline{u}(r), \lambda\underline{u}(r)\ \right], & \lambda < \circ, \end{cases} \qquad \forall r \in [\circ\ ,1].$$

نکته ۲-۵-۱

به راحتی می توان نشان داد که حساب اعداد فازی مبتنی بر اصل گسترش و r–برش با یکدیگر هم ارز بوده و نتایج کاملاً یکسانی می دهند. در این قسمت این هم ارزی را برای عمل جمع نشان می دهیم. برای سایر اعمال نیز به طور مشابه ثابت می شود. فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعدد فازی دلخواهی باشند و $\tilde{u}+\tilde{v}=\tilde{w}\in\mathbb{E}$. با استفاده از اصل گسترش برای $t\in\mathbb{R}$ داریم:

$$\mu_{\tilde{w}}(t)=sup_{x+y=t}\{min\{\mu_{\tilde{u}}(x),\mu_{\tilde{v}}(y)\}\}.$$

فرض کنید که سوپریمم در موقعیت x^* و y^* رخ دهد. در این صورت نتیجه خواهیم گرفت

$$\mu_{\tilde{w}}(t)=min\{\mu_{\tilde{u}}(x^*),\mu_{\tilde{v}}(y^*)\},\quad x^*+y^*=t$$

حال با استفاده از تعریف r–برش به دست می آوریم

$$\begin{aligned}[\tilde{w}]_r&=\{t:\mu_{\tilde{w}}(t)\geq r\}\\&=\{x^*+y^*:min\{\mu_{\tilde{u}}(x^*),\mu_{\tilde{v}}(y^*)\}\geq r\}\\&=\{x^*+y^*:\ \mu_{\tilde{u}}(x^*)\geq r,\mu_{\tilde{u}}(y^*)\geq r\}\\&=\{x^*+y^*:\ x^*\in[\tilde{u}]_r,\ y^*\in[\tilde{v}]_r\}\\&=[\tilde{u}]_r+[\tilde{v}]_r\end{aligned}$$

که این همان نتیجه ی است که از حساب اعداد فازی مبتنی بر r–برش حاصل می شود.

۲-۶ دستگاه خطی فازی

تعریف ۲-۶-۱

بردار $\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)^T$ که در آن $\tilde{x}_i$ ها اعداد فازی هستند را یک بردار عدد فازی[۵۳] یا به طور مختصر یک بردار فازی می نامیم.

[۵۳] Fuzzy number vector

تعریف ۲-۶-۲

[۲۴] دستگاه خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11}\,\tilde{x}_1 + a_{12}\,\tilde{x}_2 + \cdots + a_{1n}\,\tilde{x}_n = \tilde{b}_1, \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\,\tilde{x}_2 + \cdots + a_{2n}\,\tilde{x}_n = \tilde{b}_2, \\ \vdots \\ a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\,\tilde{x}_2 + \cdots + a_{nn}\,\tilde{x}_n = \tilde{b}_n, \end{cases} \qquad (۱-۶-۲)$$

که در آن ماتریس ضرایب $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و $\tilde{b}_i$، $1 \le i \le n$، اعداد فازی هستند را یک دستگاه خطی فازی[۵۴] می نامیم.

فرم ماتریس دستگاه خطی فازی (۲-۶-۱) به صورت

$$A\tilde{X} = \tilde{B},$$

می باشد که در آن $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ و $\tilde{B} = \left(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n\right)^T$ بردارهای فازی می باشند.

تعریف ۲-۶-۳

[۲۴] بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را یک جواب جبری فازی دستگاه (۲-۶-۱) می نامیم هرگاه به طور دقیق در آن صدق کند، یا به عبارتی دیگر

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{b}_i, \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

نکته ۲-۶-*1*

با توجه به تعاریف ۲-۳-*4* و ۲-۶-۳ و نیز با توجه به حساب اعداد فازی مبتنی بر r–برش ها، برای آنکه نشان دهیم بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ جواب جبری دستگاه (۲-۶-۱) می باشد، کافی است برای هر $r \in [0,1]$ ثابت کنیم که:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left[\tilde{x}_j\right]_r = \left[\tilde{b}_i\right]_r, \qquad \forall i = 1, 2, \dots, n. \qquad (۲-۶-۲)$$

[۵۴] Fuzzy linear system

لم زیر نتیجه ایی از قضایای 1 و3 از مرجع $[24]$ می باشد.

لم ۲-۶-۱

هرگاه دستگاه خطی فازی (۲-۶-۱) دارای جوای جبری فازی یکتا باشد، آنگاه ماتریس ضرایب مربوطه به طور کامل نامنفرد است.

نکته ۲-۶-2

عکس لم فوق برقرار نمی باشد. به طور مثال، دستگاه خطی فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} -2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases} \qquad (۲-۶-۲)$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ توسط r–برش هایشان به صورت زیر مشخص شده اند:

$$\left[\tilde{b}_1\right]_r = [r - 12, 12 - r], \qquad \left[\tilde{b}_2\right]_r = [r - 6, 6 - r].$$

در این مثال به راحتی می توان مشاهده کرد که ماتریس ضرایب A به طور کامل نامنفرد می باشد، اما با این وجود این دستگاه دارای هیچ جواب جبری نمی باشد. در واقع بردار

$$([-6 + 2r, 6 - 2r], [-r, r])^T$$

در دستگاه بازه ای (۲-۶-۲) صدق می کند ولی با توجه به لم ۲-۳-۱ خانواده ی بازه های بسته و کراندار $\{[-r, r] : 0 \le r \le 1\}$ تشکیل r–برش های یک عدد فازی را نمی دهند. زیرا شرط (2) برقرار نمی باشد.

نکته ۲-۶-۳

در لم ۲-۶-۱ فرض یکتایی جواب جبری بسیار ضروری است. به این معنی که اگر جواب جبری دستگاه خطی فازی (۲-۶-۱) یکتا نباشد آنگاه ماتریس ضرایب A لزوماً به طور کامل نامنفرد نمی باشد. به طور مثال دستگاه خطی فازی دو در دو زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases}$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ توسط r–برش هایشان به صورت زیر مشخص شده اند:

$$\left[\tilde{b}_1\right]_r = [3r - 11, 9 - 3r], \qquad \left[\tilde{b}_2\right]_r = [3r - 10, 10 - 3r].$$

دستگاه خطی فوق دارای نامتناهی جواب جبری فازی با r–برش های زیر است:

$$[\tilde{x}_1]_r = [r - 2 + \delta, 3 - r - \delta], \qquad [\tilde{x}_2]_r = [2r - 8 - \delta, 7 - 2r + \delta].$$

که در آن $\delta \in [-\frac{11}{2}, \frac{3}{2}]$. با این حال در این مثال ماتریس ضرایب به طور کامل نامنفرد نمی باشد.

یک شاخه از ریاضیات کاربردی که نقش عمده ای در زمینه های مختلف علوم دارد، سیستم های معادلات خطی می باشد که در آن برای برخی از پارامترهای سیستم اعداد فازی پیشنهاد شده است. بنابراین ضروری است که ما به توسعه ی روشهای عددی برای حل چنین سیستم هایی بپردازیم. یک مدل کلی برای حل سیستم های خطی فازی[55] (FLS) که در آن ماتریس ضرایب اعداد قطعی و ماتریس مقادیر شامل اعداد فازی دلخواه می باشند، توسط فریدمن[56] و همکارانش در [24] پیشنهاد شده است. براساس مدل فریدمن و همکارانش، اللهویرنلو و همکارانش در [7،6،8،11] برای حل سیستم های خطی فازی روش های عددی مختلفی را به کار برده اند. اخیرا اللهویرنلو و سلحشور[57] در [12] یک روش ساده و کاربردی برای بدست آوردن جواب های سیستم های خطی فازی متقارن پیشنهاد کرده اند. همچنین قنبری و مهدوی امیری[58] در [26] تخمینی با به کارگیری یک تابع رتبه بندی برای به دست آوردن جواب یک سیستم خطی فازی LR با ماتریس ضرایب قطعی پیشنهاد کرده اند.

[55] Fuzzy Linear System
[56] Friedman
[57] Salahshour
[58] Mahdavi Amiri

در ادامه ی این تحقیقات، دهقان[59] و همکارانش در [17,18] در رابطه با سیستم های خطی به طور کامل فازی بحث کرده اند که در این سیستم ها کلیه ی پارامترها اعداد فازی می باشند. آنها برخی از روشهای تکراری را برای این سیستم ها گسترش داده اند. اخیرا اللهویرنلو و سلحشور [13] یک روش جدید برای بدست آوردن جواب سیستم های خطی بطور کامل فازی متقارن بر پایه ی α- برش بدست آورده اند. برای تحقیق بیشتر مقالات [1،9،10،21] موجود است.

در این پایان نامه ما ایده دایموند[60] در [19] را در تعریف یک متر جدید برای اعداد فازی LR با تابع های $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ ثابت گسترش داده ایم. سپس با استفاده از معرفی یک متر روشی برای به دست آوردن نزدیک ترین جواب سیستم فازی خطی متقارن $(S-L-FLS)$[61] پیشنهاد کرده ایم.

[59] Dehghan
[60] Diamond
[61] Symmetric L-L Fuzzy Linear System

فصل سوم

تخمین جواب جبری برای سیستم های خطی بازه ای

۳-۱ مقدمه

در این بخش یک روش جدید برای تخمین جواب جبری یک سیستم خطی بازه ای ILS که ماتریس ضرایب حقیقی مقدار و بردار سمت راست بازه ای مقدار می باشد، معرفی می شود. در روش پیشنهادی ما ابتدا روش حذفی گاوس را برای تعیین مجموعه جواب یک سیستم خطی بازه ای به کار می بریم سپس با فاکتورهای محدود کننده یک مجموعه جواب محدود برای سیستم ILS متناظر بدست می آوریم، که همان جواب جبری این سیستم خواهد بود. علاوه بر آن، ما اثبات می کنیم که جواب بدست آمده توسط روش پیشنهادی در سیستم خطی بازه ای متناظر صادق است. در نهایت روش پیشنهادی توسط یک الگوریتم ارائه شده است.

۳-۲ مفاهیم اولیه

تعریف ۳-۲-۱

[۳] فاصله بین دو عدد بازه ای $[x] = [\underline{x}, \overline{x}]$ و $[y] = [\underline{y}, \overline{y}]$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$d([x],[y]) = max\left\{|\underline{x} - \underline{y}|, |\overline{x} - \overline{y}|\right\}$$

تعریف ۳-۲-۲

فاصله ی بین دو بردار بازه ای $[X] = \left([x_۱], [x_۲], \dots, [x_n]\right)^T$ و $[Y] = \left([y_۱], [y_۲], \dots, [y_n]\right)^T$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$D([X],[Y]) = max_{\ ۱\le i\le n}\ d([x_i].[y_i]) \qquad (۱\text{-}2\text{-}۳)$$

که تابع $d(\cdot,\cdot)$ درآن همان تعریف ۳-۲-۱ ، می باشد.

در این پایان نامه سیستم خطی ILS زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} a_{11}[x_1] + a_{12}[x_2] + \cdots + a_{1n}[x_n] = [b_1] \\ a_{21}[x_1] + a_{22}[x_2] + \cdots + a_{2n}[x_n] = [b_2] \\ \vdots \\ a_{n1}[x_1] + a_{n2}[x_2] + \cdots + a_{nn}[x_n] = [b_n] \end{cases} \qquad (۲-۲-۳)$$

که ماتریس ضرایب $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار $n \times n$ است و $[b_i] = 1 \le i \le n$ $[\underline{b_i}, \overline{b_i}]$ اعداد بازه ای هستند.

$$A[X] = [B] \qquad (۳-۲-۳)$$

که در آن $[X] = \left([x_1], [x_2], \dots, [x_n]\right)^T$ و $[B] = \left([b_1], [b_2], \dots, [b_n]\right)^T$ بردارهایی از اعداد بازه ای هستند.

می دانیم بردار بازه ای $[X_A] = \left([x_{1A}], [x_{2A}], \dots, [x_{nA}]\right)^T$ ، که در آن $[x_{iA}] = [\underline{x}_{iA}, \overline{x}_{iA}]$ ، یک جواب جبری ILS (۳-۲-۲) می باشد اگر

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[x_j] = [b_i] \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (۴-۲-۳)$$

یا

$$\sum_{j=1}^{n} \left(a_{ij}[\underline{x}_j, \bar{x}_j]\right) = [\underline{b}_i, \bar{b}_i] \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (۵-۲-۳)$$

بدیهی است:

$D(A[X_A\,],[B])=۰$

۳-۳ روش حذفی گاوس بازه ای

در این بخش روش حذفی گاوس بازه ای برای حل ILS یادآوری می کنیم سپس رابطه ی بین جواب جبری و مجموعه جواب بدست آمده از روش حذفی گاوس بازه ای را بررسی می کنیم.

روش حذفی گاوس بازه ای همان روش حذفی گاوس معمولی می باشد که در آن به جای اعداد حقیقی از بازه ها استفاده می شود وهمچنین عملگرهای بازه ای به جای عملگرهای حقیقی به کار می رود. (گارلوف ۲۰۰۹ [۲۵]، مایر۲۰۰۶ [۳۲]، سواستجانو۲۰۰۹ [۴۰]).

در این فصل در روش حذفی گاوس بازه ای، ماتریس ضرایب A حقیقی مقدار و نامنفرد است و بردار سمت راست $[B]$ بازه ای مقدار است.

ماتریس ضرایب سیستم با اعمال سطری مقدماتی به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل می شود.

$$a_{\mathrm{ij}}^{(k+۱)}=\ a_{\mathrm{ij}}^{(k)}-\frac{a_{\mathrm{ik}}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}a_{k\mathrm{j}}^{(k)}$$

(۱-۳-۳)

$$[b_{\mathrm{i}}]^{(k+۱)}=\ [b_{\mathrm{i}}]^{(k)}-\frac{a_{\mathrm{j}k}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}[b_k]^{(k)}$$

و

$a_{kk}^{(k)}\neq ۰$

$k = 1,2, \dots, n-1$

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}\ , [b_i]^{(1)} = [b_i]$

$i, j = k+1, k+2, \dots, n$

برای تعیین بازه جواب با جایگذاری پسرو به شکل زیر داریم:

$$[x_n] = \frac{1}{a_{nn}^{(n)}}[b_n]^{(n)} \qquad (۲\text{-}۳\text{-}۳)$$

$$[x_i] = \frac{1}{a_{ii}^{(i)}}\left\{[b_i]^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}[x_j]\right\} \qquad (۳\text{-}۳\text{-}۳)$$

$i = n-1, n-2, \dots, 1$

باید توجه شود که قواعد حساب بازه ای معمول در معادلات (۳-۳-۳)-(۳-۳-۱) استفاده شده است. علاوه براین اگر ماتریس A حقیقی مقدار و نامنفرد باشد آنگاه این روش حذفی گاوس بازه ای امکان پذیر می شود.

در این پایان نامه، مجموعه جواب بدست آمده از روش حذفی گاوس بازه ای را به شکل زیر نشان می دهیم:

$$[X_G] = \left([x_{1G}], [x_{2G}], \dots, [x_{nG}]\right)^T$$

که در آن $i = 1,2, \dots, n$ ، $[x_{iG}] = [\underline{x_{iG}}\ , \overline{x_{iG}}]$.

خواص مجموعه جواب بدست آمده توسط روش حذفی گاوس بازه ای در قضایای زیر آورده می شود.

قضیه ۳-۳-۱

فرض کنید ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد و بردار بازه ای

$$[x_{iG}] = [\underline{x_{iG}}\ , \overline{x_{iG}}]\ , \qquad [X_G] = \left([x_{1G}], [x_{2G}], \dots, [x_{nG}]\right)^T$$

که در آن جواب بدست آمده توسط روش حذفی گاوس بازه ای برای سیستم ILS (۳-۲-۲) می باشد آنگاه

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(\underline{x_{jG}} + \overline{x_{jG}}) = (\underline{b_i} + \bar{b}_i)\ , \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

و از آن

$$A\ Mid\ ([X_G]) = Mid\ ([B])$$

اثبات

قضیه را در حالت $n = 2$ ثابت می کنیم. اثبات برای $n \geq 3$ مشابه است .

سیستم $2 \times 2\ ILS$ را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} a_{11}[x_1] + a_{12}[x_2] = [b_1] \\ a_{21}[x_1] + a_{22}[x_2] = [b_2] \end{cases}$$

که در آن ماتریس ضرایب A نامنفرد است. اساس روش حذفی گاوس بازه ای با فرض $a_{11} \neq 0$ می باشد،

بنابراین داریم:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & [b_1] \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12} & [b_2] - \frac{a_{21}}{a_{11}}[b_1] \end{array}\right]$$

آنگاه از روش جایگذاری پسرو بدست می آوریم :

$$[x_{2G}] = \frac{a_{11}}{det(A)}\{[b_2] - \frac{a_{21}}{a_{11}}[b_1]\}$$

$$[x_{1G}] = \frac{1}{a_{11}}\{[b_1] - \frac{a_{12}a_{11}}{\det(A)}([b_2] - \frac{a_{21}}{a_{11}}[b_1])\}$$

بنابراین داریم :

$$\sum_{j=1}^{2} a_{1j}(\underline{x_{jG}} + \overline{x_{jG}})$$

$$= a_{11}(\underline{x_{1G}} + \overline{x_{1G}}) + a_{12}(\underline{x_{2G}} + \overline{x_{2G}})$$

$$= \{(\underline{b}_1 + \overline{b}_1) - \frac{a_{12}a_{11}}{det(A)}((\underline{b}_2 + \overline{b}_2) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\underline{b}_1 + \overline{b}_1))\}$$

$$+ \frac{a_{12}a_{11}}{\det(A)}((\underline{b}_2 + \overline{b}_2) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\underline{b}_1 + \overline{b}_1))$$

$$= (\underline{b}_1 + \overline{b}_1)$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{2j}(\underline{x_{jG}} + \overline{x_{jG}})$$

$$= a_{21}(\underline{x_{1G}} + \overline{x_{1G}}) + a_{22}(\underline{x_{2G}} + \overline{x_{2G}})$$

$$= \frac{a_{21}}{a_{11}}\{(\underline{b}_1 + \overline{b}_1) - \frac{a_{12}a_{11}}{det(A)}$$

$$\times ((\underline{b}_2 + \overline{b}_2) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\underline{b}_1 + \overline{b}_1))\}$$

$$+ \frac{a_{22}a_{11}}{d_{e+(A)}}((\underline{b}_2 + \overline{b}_2) - \frac{a_{21}}{a_{11}}(\underline{b}_1 + \overline{b}_1))$$

$$= (\underline{b}_1 + \overline{b}_1)\{\frac{a_{21}}{a_{11}} + \frac{a_{12}(a_{21})^2}{a_{11}det(A)} - \frac{a_{22}a_{21}}{det(A)}\}$$

$$+ (\underline{b}_2 + \overline{b}_2)\{\frac{a_{22}a_{11}}{det(A)} - \frac{a_{12}a_{21}}{det(A)}\}$$

$$= (\underline{b}_2 + \overline{b}_2).$$

اثبات تمام شده است.■

توسط قضیه ۳-۳-۱ ، ما می توانیم یک رابطه ی جدید بین مجموعه جواب بدست آمده با روش حذفی گاوس بازه ای و جواب جبری برای سیستم ILS (۳-۲-۲) بدست آوریم:

نتیجه ۳-۳-۱

فرض کنیم $[X_G] = \left([x_{۱G}], [x_{۲G}], \dots, [x_{nG}]\right)^T$ جواب بدست آمده با روش حذفی گاوس بازه ای و $[X_A] = \left([x_{۱A}], [x_{۲A}], \dots, [x_{nA}]\right)^T$ جواب جبری یکتا برای سیستم ILS (۳-۲-۲) باشند، آنگاه

$$Mid([X_G]) = Mid([X_A])$$

$$Mid([x_{iG}]) = Mid([x_{iA}]) \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

اثبات

چون $[X_A]$ یک جواب جبری برای سیستم ILS (۳-۲-۲) است آنگاه داریم:

$$A[X_A] = B$$

واضح است:

$$A\ Mid([X_A]) = Mid([B]) \qquad (۴-۳-۳)$$

از طرف دیگراز قضیه (۳-۳-۱) داریم :

$$A\ Mid([X_G]) = Mid\ ([B]) \qquad (۵-۳-۳)$$

علاوه براین چون سیستم ILS (۳-۲-۲) جواب جبری یکتا دارد از لم ۱-۶-۱ نتیجه می گیریم که ماتریس A نامنفرد است . بنابراین از معادلات (۳-۳-۴) و (۳-۳-۵) بدست می آوریم :

$$Mid([X_G]) = Mid([X_A]) \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

■

مثال ۳-۳-۱

سیستم 3×3 ILS زیر را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} [x_۱] + [x_۲] + [x_۳] = [۰, ۶] \\ -[x_۱] + [x_۲] + [x_۳] = [-۱, ۵] \\ [x_۱] - [x_۲] + ۳[x_۳] = [-۴, ۴] \end{cases}$$

که جواب جبری منحصر بفرد زیر را دارد:

$$[X_A] = ([x_{۱A}], [x_{۲A}], [x_{۳A}])^T = ([-۱, ۲], [۱, ۳], [۰, ۱])^T$$

حال از روش حذفی گاوس بازه ای بدست می آوریم :

$$[X_G] = ([x_{۱G}], [x_{۲G}], [x_{۳G}])^T = ([-12,13], [-\frac{17}{4}, \frac{33}{4}], [-\frac{11}{4}, \frac{15}{4}])^T$$

واضح است:

$$[x_{iA}] \subseteq [x_{iG}]$$

و

$$\sum_{j=۱}^{۳} a_{ij}(\underline{x_{iG}} + \overline{x_{iG}}) = (\underline{b_i} + \bar{b}_i) \qquad i = ۱, ۲, ۳$$

علاوه براین می توان نشان داد :

$$Mid([x_{۱G}]) = Mid([x_{۱A}]) = \frac{۱}{۲}$$

$$Mid([x_{۲G}]) = Mid([x_{۲A}]) = ۲$$

$$Mid([x_{۳G}]) = Mid([x_{۳A}]) = \frac{۱}{۲}$$

در بخش بعدی یک روش جدید برای بدست آوردن جواب جبری سیستم ILS (۳-۲-۲) ارائه می دهیم.

۳-٤ تخمین جواب جبری برای سیستم های خطی بازه ای

در بخش ۳-۳ نتیجه گرفتیم که نقطه میانی از جواب جبری با نقطه میانی از مجموعه جواب برابر است. حال با استفاده از نکته مذکور می توانیم یک روش جدید برای تخمین جواب جبری با محدود کردن مجموعه جواب سیستم ILS (۳-۲-۲) ارائه دهیم . در این روش پیشنهادی مجموعه جواب بدست آمده از روش حذفی گاوس بازه ای را محدود می کنیم تا یک بردار بازه ای که درسیستم ILS (۳-۲-۲) صدق می کند، بدست آوریم . روش پیشنهادی به صورت زیر است .

فرض کنیم $[X_G] = \left([x_{۱G}], [x_{۲G}], \dots, [x_{nG}]\right)^T$ مجموعه جواب بدست آمده توسط روش حذفی گاوس بازه ای باشد. واضح است که $[X_G]$ یک بردار بازه ای است . حال بردارجواب جدید را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$[X] = \begin{pmatrix} [x_۱] \\ [x_۲] \\ \vdots \\ [x_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\underline{x_{۱G}} + \theta_۱ , \overline{x_{۱G}} - \theta_۱\right] \\ \left[\underline{x_{۲G}} + \theta_۲ , \overline{x_{۲G}} - \theta_۲\right] \\ \vdots \\ \left[\underline{x_{nG}} + \theta_n , \overline{x_{nG}} - \theta_n\right] \end{pmatrix} \qquad (۱-۴-۳)$$

که در آن θ_i ، $i = ۱, ۲, \dots, n$ "فاکتورهای محدود کننده" نامیده می شوند و همچنین

$$۰ \le \theta_i \le \frac{\overline{x_{iG}} - \underline{x_{iG}}}{۲}, \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۲-۴-۳)$$

با توجه شرایط θ_i، $[X]$ یک بردار بازه ای است. برای مشخص کردن بردار جواب $[X]$ لازم است که مقدار فاکتورهای محدود کننده θ_i $i = ۱, ۲, \dots, n$ را بدست آوریم. در نهایت فرض می کنیم که بردار $[X]$ درسیستم ILS (۲-۲-3) صدق می کند. بنابراین داریم :

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}[x_j] = [b_i], \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

که از آن نتیجه می شود:

$$Wid(\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}[x_j]) = Wid([b_i]), \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

حال از قضیه ۱-۳-۱ داریم :

$$\sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}| Wid([x_j]) = Wid([b_i]) \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۳-۴-۳)$$

از طرف دیگر، با توجه به معادله (۳-۴-۱) بدست می آوریم:

$$Wid([x_i]) = Wid([x_{iG}]) - ۲\theta_i, \qquad j = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۴-۴-۳)$$

آنگاه ، از معادلات (۳-۴-۳) و (۳-۴-۴) نتیجه می شود :

$$\sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}| \theta_i = \frac{۱}{۲}\left\{\sum_{j=۱}^{n} |a_{ij}| Wid([x_{iG}]) - Wid([b_i])\right\}, \qquad (۵-۴-۳)$$

$$i = ۱, ۲, \dots, n$$

بنابراین، برای بدست آوردن $[X]$ ، ابتدا سیستم خطی (۳-۴-۵) را حل می کنیم سپس θ_i های بدست آمده را در معادله (۳-۴-۱) جایگذاری می کنیم. برای حل سیستم خطی (۳-۴-۵) می توانیم روش حذفی گاوس معمولی را استفاده کنیم . اگر جواب از سیستم (۳-۴-۵) در شرایط (۳-۴-۲) صدق کند آنگاه سیستم ILS

(۳-۲-۲) یک جواب جبری منحصر بفرد تعریف شده در معادله (۳-۴-۱) را دارد. در این صورت بردار جواب جدید $[X]$ را با $[X_A]$ نشان می رهیم .در غیر این صورت سیستم ILS (۳-۲-۲) جواب جبری ندارد.

در قضیه ۳-۴-۱ اثبات می کنیم که جواب بدست آمده توسط روش پیشنهادی ، یک جواب جبری است.

قضیه ۳-٤-۱

فرض کنید ماتریس ضرایب A بطور کامل نامنفرد باشد و جواب سیستم (۳-۴-۵) در شرایط (۳-۴-۲) صدق کند. آنگاه بردار بازه ای $[X]$ تعریف شده در معادله (۳-۴-۱) جواب جبری منحصر بفرد سیستم ILS (۳-۲-۲) است.

اثبات

مجموعه های زیر را تعریف می کنیم :

$$\Gamma_i^+ = \{j |\ a_{ij} \geq ۰, j = ۱, ۲, \dots, n\} \qquad (۶\text{-}۴\text{-}۳)$$

$$\Gamma_i^- = \{j |\ a_{ij} < ۰, \quad j = ۱, ۲, \dots, n\}$$

که در آن $i = ۱, ۲, \dots, n$.

می خواهیم نشان دهیم :

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}[x_j] = [b_i] \qquad i = ۱, ۲, \dots, n$$

در نهایت ، لازم است اثبات کنیم:

$$\sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}\, \underline{x_j} + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}\, \overline{x_j} = \underline{b_i} \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۷\text{-}۴\text{-}۳)$$

$$\sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}\, \overline{x_j} + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}\, \underline{x_j} = \bar{b}_i \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۸\text{-}۴\text{-}۳)$$

از معادله (۳-۴-۱) و (۳-۴-۵) و قضیه ۳-۳-1 ، داریم :

$$\sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}\ \underline{x_j} + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}\ \overline{x_j}$$

$$= \sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}(\underline{x_{jG}} + \theta_j) + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}(\overline{x_{jG}} - \theta_j)$$

$$= \sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}\underline{x_{jG}} + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}\ \overline{x_{jG}} + \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\theta_j$$

$$= \sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}\ \underline{x_{jG}} + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}\ \overline{x_{jG}}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|(\overline{x_{jG}} - \underline{x_{jG}})\right\} - \frac{1}{2}(\bar{b}_i - \underline{b}_i)$$

$$= \sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}\underline{x_{jG}} + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}\ \overline{x_{jG}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left\{\sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}(\overline{x_{jG}} - \underline{x_{jG}}) - \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}(\overline{x_{jG}} - \underline{x_{jG}})\right\}$$

$$- \frac{1}{2}(\bar{b}_i - \underline{b}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{j\epsilon\Gamma_i^+} a_{ij}(\underline{x_{jG}} + \overline{x_{jG}}) + \sum_{j\epsilon\Gamma_i^-} a_{ij}(\underline{x_{jG}} + \overline{x_{jG}})\right\}$$

$$- \frac{1}{2}(\bar{b}_i - \underline{b}_i)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\underline{x_{jG}} + \overline{x_{jG}}) + (\underline{b}_i - \bar{b}_i)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(\underline{b}_i + \bar{b}_i) + (\underline{b}_i - \bar{b}_i)\right\} = \underline{b}_i$$

بطور مشابه، می توانیم نشان دهیم که معادله (۳-۴-۸) برقرار است. از طرف دیگر، وقتی که A بطور کامل نامنفرد باشد آنگاه ماتریس هایA و $|A|$ نامنفرد هستند. بنابراین، بردار بازه ای $[X_G]$ وفاکتورهای θ_i $i = 1, 2, \dots, n$ منحصر بفرد هستند و در نتیجه $[X]$ منحصر بفرد است. ■

بردار بازه ای $[X]$ که یک جواب جبری یکتا می باشد را با $[X_A]$ نشان می دهیم.

براساس مطالب گفته شده، یک الگوریتم برای بدست آوردن جواب جبری از سیستم خطی بازه ای (۳-۲-۲) ارائه می دهیم :

مدل الگوریتم :

گام اول:

حل سیستم ILS (۳-۲-۲) با روش حذفی گاوس بازه ای و بدست آوردن مجموعه جواب $[X_G]$.

گام دوم :

حل سیستم خطی حقیقی (۳-۴-۵) توسط روش حذفی گاوس معمولی و بدست آوردن فاکتورهای محدودکننده θ_i، $i = ۱, ۲, \dots, n$.

گام سوم :

اگرفاکتورهای محدود کننده θ_i در شرایط (۳-۴-۲) برای هر $i = ۱, ۲, \dots, n$ صدق کند آنگاه بردار بازه ای [X] معرفی شده با معادله (۳-۴-۱) به عنوان جواب جبری منحصر بفرد است. در غیر این صورت سیستم ILS (۳-۲-۲) جواب جبری ندارد.

۳-۵ مثال های عددی

در این بخش ، چند مثال عددی در نظر می گیریم تا کارایی و توانایی روش مان را نشان دهیم.

مثال ۳-۵-۱

سیستم ILS 5×5 زیر را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} X_۱ + X_۲ - X_۳ + ۲X_۴ - X_۵ = [۳, ۱۲] \\ -X_۱ + ۲X_۲ + X_۳ - X_۴ + ۳X_۵ = [-۱۵, ۱] \\ ۵X_۱ - ۲X_۲ - ۳X_۳ + ۴X_۴ + X_۵ = [۱, ۲۰] \\ X_۱ + X_۲ - X_۳ + X_۴ - X_۵ = [۰, ۸] \\ -۳X_۱ - X_۲ + X_۳ + ۳X_۴ + ۶X_۵ = [-۱۲, ۱۵] \end{cases} \qquad (۱-۵-۳)$$

به آسانی می توان ثابت کرد که ماتریس A بطور کامل نامنفرد است . بنابراین ، بر طبق الگوریتم بیان شده، ابتدا سیستم بالا را با روش حذفی گاوس بازه ای حل می کنیم :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1/۰۰۰۰ & 1/۰۰۰۰ & -1/۰۰۰۰ & 2/۰۰۰۰ & -1/۰۰۰۰ & [3/۰۰۰۰, 12/۰۰۰۰] \\ ۰/۰۰۰۰ & 3/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & 1/۰۰۰۰ & 2/۰۰۰۰ & [-12/۰۰۰۰, 13/۰۰۰۰] \\ ۰/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & 2/۰۰۰۰ & -3/6667 & 10/6667 & [-87/۰۰۰۰, 35/3333] \\ ۰/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & -1/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & [-12/۰۰۰۰, 5/۰۰۰۰] \\ ۰/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & ۰/۰۰۰۰ & 12/3333 & [-154/6667, 117/6667] \end{array}\right]$$

حال با معادلات (۳-۳-۲) و (۳-۳-۳) جواب بازه ای $[X_G]$ را بدست می آوریم :

$$[X_G] = \begin{pmatrix} [X_{1G}] \\ [X_{2G}] \\ [X_{3G}] \\ [X_{4G}] \\ [X_{5G}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-151/45۰5, 152/45۰5] \\ [-14/36۰4, 14/36۰4] \\ [-1۰3/5495, 1۰6/5495] \\ [-5/۰۰۰۰, 12/۰۰۰۰] \\ [-12/54۰5, 9/54۰5] \end{pmatrix}$$

از معادله (۳-۴-۵) سیستم خطی قطعی زیر رادار یم:

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 2\theta_4 + \theta_5 = 294/9009 \\ \theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + 3\theta_5 = 319/3423 \\ 5\theta_1 + 2\theta_2 + 3\theta_3 + 4\theta_4 + \theta_5 = 1139/1622 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 = 286/9009 \\ 3\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + 3\theta_4 + 6\theta_5 = 653/5045 \end{cases}$$

با حل سیستم قطعی فوق به روش حذفی گاوس معمولی فاکتورهای محدودکننده زیر را بدست می آوریم :

$$\Theta = \left(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5\right)^T$$

$$= \left(151/4505, \quad 13/3604, 1004/5495, \quad 8/0000, 9/5405\right)^T$$

به آسانی می توان نشان داد که در شرایط زیر صدق می کند :

$$0 \leq \theta_i \leq \frac{\bar{x}_{iG} - \underline{x}_{iG}}{2} \qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

حال براساس گام سوم از الگوریتم بیان شده و با به کارگیری معادله (۳-۴-۱)، جواب جبری منحصر بفرد سیستم ILS (۳-۵-۱) را بدست می آوریم :

$$[X_A] = \begin{pmatrix} [x_{1A}] \\ [x_{2A}] \\ [x_{3A}] \\ [x_{4A}] \\ [x_{5A}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{x}_{1G} + \theta_1, \bar{x}_{1G} - \theta_1] \\ [\underline{x}_{2G} + \theta_2, \bar{x}_{2G} - \theta_2] \\ [\underline{x}_{3G} + \theta_3, \bar{x}_{3G} - \theta_3] \\ [\underline{x}_{4G} + \theta_4, \bar{x}_{4G} - \theta_4] \\ [\underline{x}_{5G} + \theta_5, \bar{x}_{5G} - \theta_5] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0/0000, 1/0000] \\ [-1/0000, 1/0000] \\ [1/0000, 2/0000] \\ [3/0000, 4/0000] \\ [-3/0000, 0/0000] \end{pmatrix}$$

که این جواب درسیستم ILS (۳-۵-۱) صدق می کند یعنی :

$$D(A[X_A], [B]) = 0$$

مثال ۳-۵-۲

سیستم ILS 3×3 زیر را در نظر می گیریم :

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = [۱۰, ۱۲] \\ -x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = [۱۶, ۲۱] \\ x_۱ + x_۲ + ۳x_۳ = [۲۰, ۲۸] \end{cases} \qquad (۳-۵-۲)$$

که درآن ماتریس ضرایب A بطور کامل نامنفرد است. براساس الگوریتم بیان شده، ابتدا سیستم را با روش حذفی گاوس بازه ای حل می کنیم :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & [1۰,12] \\ ۰ & 3 & 2 & [26,33] \\ ۰ & ۰ & 2 & [8,18] \end{array}\right]$$

بنابراین ، توسط معادله (۳-۳-۲) و (۳-۳-۳) جواب بازه ای $[X_G]$ را بدست می آوریم :

$$[X_G] = \begin{pmatrix} [x_{۱G}] \\ [x_{۲G}] \\ [x_{۳G}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [-۷ / ۳۳۳۳, ۵ / ۳۳۳۳] \\ [۲ / ۶۶۶۷, ۸ / ۳۳۳۳] \\ [۴ / ۰۰۰۰, ۹ / ۰۰۰۰] \end{pmatrix}$$

از معادله (۳-۴-۵) سیستم خطی قطعی زیر را داریم :

$$\begin{cases} \theta_۱ + \theta_۲ + \theta_۳ = ۱۰ / ۶۶۶۷ \\ \theta_۱ + ۲\theta_۲ + \theta_۳ = ۱۲ / ۰۰۰۰ \\ \theta_۱ + \theta_۲ + ۳\theta_۳ = ۱۲ / ۶۶۶۷ \end{cases}$$

با حل سیستم خطی قطعی فوق با روش حذفی گاوس معمولی بدست می آوریم :

$$\Theta = (\theta_۱ , \theta_۲ , \theta_۳)^T = (۸ / ۳۳۳۳ , ۱ / ۳۳۳۳ , ۱ / ۰۰۰۰)^T$$

می توان نشان داد که $\theta_۱$ در شرایط (۳-۴-۲) صدق نمی کند . زیرا :

$$\frac{\bar{x}_{۱G} - \underline{x}_{۱G}}{۲} = \frac{۵ / ۳۳۳۳ + ۷ / ۳۳۳۳}{۲} = ۶ / ۳۳۳۳ < \theta_{۱} = ۸ / ۳۳۳۳$$

بنابراین، براساس گام سوم از الگوریتم بیان شده سیستم ILS (۳-۵-۲) جواب جبری ندارد.

در واقع بردار

$$([x_{۱}], [x_{۲}], [x_{۳}])^{T} = ([۱, -۳], [۴, ۷], [۵, ۸])^{T}$$

در سیستم ILS (۳-۵-۲) صدق می کند اما یک بردار بازه ای نیست. زیرا $[۱, -۳]$ یک عدد بازه ای نیست.

فصل چهارم

نزدیکترین جواب فازی متقارن برای سیستم های خطی فازی متقارن

٤-١ مقدمه

در این فصل، نزدیکترین جواب فازی متقارن برای یک سیستم خطی فازی $L-L$ متقارن $(S-L-FLS)$ با بکار گیری یک متر جدید بدست می آوریم. در نهایت سیستم $S-L-FLS$ به یک مسأله برنامه ریزی غیر خطی تبدیل می شود.(NLP)

جواب بدست آمده از NLP، جواب بردار فازی مورد مطلوب است همچنین می توان نشان داد که اگر یک سیستم $S-L-FLS$ جواب فازی منحصر بفرد داشته باشند آنگاه جواب آن متقارن است. دو الگوریتم برای پیاده سازی روش با جزئیات آورده شده است.

٤-٢ یک متر جدید برای اعداد فازی $L-R$

در این بخش یک متر بین دو عدد فازی $L-R$ با استفاده از متر اقلیدسی تعریف می کنیم.

تعریف ٤-٢-١

برای دو اعداد بازه ای $A=\left[a_1,a_2\right]$ و $B=\left[b_1,b_2\right]$ ، متر اقلیدسی اصطلاح شده را بین آنها به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$d_{ME}(A,B)=\sqrt{\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{2}} \qquad (۱-۲-۴)$$

$$d_{ME}^2(A,B)=\frac{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}{2} \qquad (۲-۲-۴)$$

قضیه ٤-٢-١

تابع d_{ME} یک متر برای خانواده ای از اعداد بازه ای است.

اثبات

از آنجایی که متر اقلیدسی بکار گرفته در d_{ME} برای اعداد بازه ای یک متر است:

$$d_{\mathrm{ME}}\ (A,B) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, d_E\ (A,B)$$

$$d_E\ (A,B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

به وضوح d_{ME} نیز یک متر است.■

اگر $a_1 = a_2 = a$ و $b_1 = b_2 = b$ نتیجه می گیریم :

$$d_{ME}\ (A,B) = |a - b|$$

$$d_E\ (A,B) \neq |a - b|$$

بنابراین تابع d_{ME} خواص متر معمولی را در فضای قطعی حفظ می کند در حالیکه تابع d_{E} این خواص را ندارد. به این دلیل ما آن را " متراقلیدسی اصلاح شده" می نامیم.

حال d_{ME} را برای معرفی یک متر برای مجموعه اعداد فازی $L - R$ استفاده می کنیم.

تعریف ٤-٢-٢

فرض کنیم تابع حالت $L(0)$ و $R(0)$ ثابت باشند. دو عدد فازی $L - R$ $\tilde{A} = (a_1, a_2; \alpha, \beta)$ و

$\tilde{B} = (b_1, b_2; \gamma, \eta)$ را در نظر می گیریم. تابع فاصله بین دو عدد فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \sqrt{\frac{d_{ME}^2(s(\tilde{A}), s(\tilde{B})) + d_{ME}^2(c(\tilde{A}), c(\tilde{B}))}{2}} \qquad (۳-۲-۴)$$

یا

$$d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{d_{ME}^2(s(\tilde{A}), s(\tilde{B})) + d_{ME}^2(c(\tilde{A}), c(\tilde{B}))}{2} \qquad (۴-۲-۴)$$

آنگاه از معادلات (۴-۲-۲) و (۴-۲-۴) داریم:

$$d^2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{[(a_1 - b_1) - (\alpha - \gamma)]^2 + [(a_2 - b_2) + (\beta - \eta)]^2 + (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}{4} \qquad (۵-۲-۴)$$

نتیجه ٤-۲-۱

اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد قطعی باشند یعنی $\tilde{A} = (a, a; ۰, ۰)$ و $\tilde{B} = (b, b; ۰, ۰)$ آنگاه متر تعریف شده با متر معمولی در فضای قطعی یکسان می باشند. یعنی :

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = |a - b|$$

نتیجه ٤-۲-۲

اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو بازه ای قطعی باشند یعنی $\tilde{A} = (a_1, a_2; ۰, ۰)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2; ۰, ۰)$ آنگاه متر پیشنهاد شده با متر اقلیدسی اصلاح شده برابر است یعنی :

$$d(\tilde{A}, \tilde{B}) = d_{\mathrm{ME}}([a_1, a_2], [b_1, b_2])$$

در ادامه نشان می دهیم که تابع d تعریف شده در معادله (۴-۲-۳) ، یک متر برای مجموعه ای از اعداد فازی $L-R$ که $L(۰)$ و $R(۰)$ ثابت می باشد.

لم ٤-۲-۱

اگر $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$(ab+cd) \leq \sqrt{a^۲+c^۲} \times \sqrt{b^۲+d^۲}$$

اثبات

$$(a^۲+c^۲)\times(b^۲+d^۲)-(ab+cd)^2 = a^۲d^۲+c^۲b^۲-۲adcb = (ad-cd)^۲ \geq ۰$$

اثبات کامل شده است.■

لم ٤-۲-۲

اگر $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$(a+b)^۲+(c+d)^۲ \leq (\sqrt{a^۲+c^۲}+\sqrt{b^۲+d^۲})^۲$$

اثبات

داریم:

$$(\sqrt{a^۲+c^۲}+\sqrt{b^۲+d^۲})^۲ - (a+b)^۲-(c+d)^۲$$

$$= ۲(\sqrt{a^۲+c^۲}\times\sqrt{b^۲+d^۲}-(ab+cd))$$

توسط لم ۴-۲-۱ ، اثبات کامل شده است. ■

قضیه ٤-٢-٢

تابع d تعریف شده در معادله (۴-۲-۳) یک متر برای خانواده ای از همه اعداد فازی $L-R$ با $L(\circ)$ و $R(\circ)$ *ثابت* می باشد .

اثبات

طبق قضیه ۴-۲-۱ تابع d_{ME} یک متر برای خانواده ای از اعداد بازه ای است آنگاه اثبات می کنیم که تابع d در خواص زیر صدق می کند:

۱- $d(\widetilde{\mathrm{A}},\widetilde{\mathrm{B}}) \geq \circ$

۲- $d(\tilde{A},\tilde{B}) = \circ \Leftrightarrow \tilde{A} = \widetilde{\mathrm{B}}$

۳- $d(\tilde{A},\tilde{B}) = d(\tilde{B},\tilde{A})$

با توجه به اینکه توابع $L(\circ)$ و $R(\circ)$ ثابت هستند خاصیت (۲) برقرار است. حال تنها باید نشان دهیم که خواص نامساوی مثلثی برقرار است. با استفاده از قضیه ۴-۲-۱ و لم ۴-۲-۲ برای سه عدد فازی $L-R$ $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ داریم:

$$d^{۲}(\tilde{A},\tilde{C}) = \frac{d_{ME}^{۲}(s(\tilde{A}),s(\tilde{C}))}{۲} + \frac{d_{ME}^{۲}(c(\tilde{A}),c(\tilde{C}))}{۲}$$

$$\leq \frac{\left(d_{ME}(s(\tilde{A}),s(\tilde{B}))+d_{ME}(s(\tilde{B}),s(\tilde{C}))\right)^{۲}}{۲}$$

$$+ \frac{\left(d_{ME}(c(\tilde{A}),c(\tilde{B}))+d_{ME}(c(\tilde{B}),c(\tilde{C}))\right)^{۲}}{۲}$$

$$\leq \left(d(\tilde{A},\tilde{B}) + d(\tilde{B},\tilde{C})\right)^{2}$$

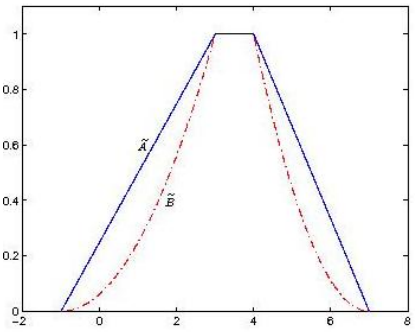
■

نتیجه 4-۲-۳

واضح است که دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجزا وجود دارد بطوریکه $d(\tilde{A},\tilde{B}) = ۰$ بنابراین تابع d تعریف شده در معادله (۴-۲-۳) یک متر برای خانواده ای از اعداد فازی نیست برای مثال اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ نشان داده شده در شکل ۴-۲-۱ را در نظر بگیرید

اگر $L(۰)$ و $R(۰)$ ثابت نباشند آنگاه $\tilde{A} \neq \tilde{B}$ در صورتیکه $d(\tilde{A},\tilde{B}) = ۰$.در واقع، تابع d یک شبه متر برای خانواده ای از اعداد فازی است.

بنابراین در قضیه ۴-۲-۲ لازم است که دو تابع حالت $L(۰)$ و $R(۰)$ ثابت هستند.



شکل ۴-۲-۱ اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$

قضیه ٤-۲-۳

برای تابع حالت ثابت $L(۰)$ و $R(۰)$، متر d در خواص زیر صدق می کند:

۱) اگر $L(x) = R(x)$ ، برای هر $x \in \mathbb{R}^+$ آنگاه

$$d(\tilde{A}-\tilde{C},\tilde{B}-\tilde{C}) = d(\tilde{A},\tilde{B})$$

۲) $$d(\tilde{A}+\tilde{C},\tilde{B}+\tilde{C}) = d(\tilde{A},\tilde{B})$$

۳) $$d(\lambda\tilde{A},\ \lambda\tilde{B}) = |\lambda|\, d(\tilde{A},\tilde{B}) \qquad \forall\lambda\epsilon\mathbb{R}$$

که $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ اعداد فازی $L-R$ هستند و

$\tilde{A}$ - $\tilde{C}$=$\tilde{A}$ + (-۱) $\tilde{C}$

اثبات

۱) فرض کنیم $\tilde{A}=(a_1,a_2;\alpha,\beta)$، $\tilde{B}=(b_1,b_2;\gamma,\eta)$، $\tilde{C}=(c_1,c_2;\delta,\theta)$ آنگاه داریم:

$$S(\tilde{A}-\tilde{C})=[a_1-c_2-\alpha-\theta,a_2-c_1+\beta+\delta]$$

$$S(\tilde{B}-\tilde{C})=[b_1-c_2-\gamma-\theta,b_2-c_1+\eta+\delta]$$

$$C(\tilde{A}-\tilde{C})=[a_1-c_2,a_2-c_1]$$

$$C(\tilde{B}-\tilde{C})=[b_1-c_2,b_2-c_1]$$

می توان نشان داد:

$$d_{ME}\ (S(\tilde{A}-\tilde{C}),S(\tilde{B}-\tilde{C}))=d_{ME}(S(\tilde{A}),S(\tilde{B}))$$

و

$$d_{ME}\ (C(\tilde{A}-\tilde{C}),C(\tilde{B}-\tilde{C}))=d_{ME}(C(\tilde{A}),C(\tilde{B}))$$

بنابراین

$$d(\tilde{A}-\tilde{C},\tilde{B}-\tilde{C})=d(\tilde{A},\tilde{B})$$

با توجه به اینکه اگر $L(x)\neq R(x)$ آنگاه توسط تعریف۲-۳-۱۰ $(\tilde{C})$(۱-) یک عدد فازی $R-L$ است بنابراین از فرمول جمع نشان داده شده در تعریف ۲-۳-۱۰ نمی توان استفاده کرد.

۲) اثبات همانند قسمت اول است.

۳) ابتدا فرض می کنیم $\lambda < ۰$ بنابراین داریم:

$$C(\lambda\tilde{A})=[\lambda a_۲, \lambda a_۱] \ , \qquad S(\lambda\tilde{A})=[\lambda a_۲ + \lambda\beta, \lambda a_۱ - \lambda\alpha]$$

$$C(\lambda\tilde{B})=[\lambda b_۲, \lambda b_۱] \ , \qquad S(\lambda\tilde{B})=[\lambda b_۲ + \lambda\eta, \lambda b_۱ - \lambda\gamma]$$

بنابراین

$$d^{۲}_{ME}(S(\lambda\tilde{A}), S(\lambda\tilde{B}))= \lambda^{۲} \frac{[(a_۲-b_۲)+(\beta-\eta)]^{۲}+[(a_۱-b_۱)-(\alpha-\gamma)]^{۲}}{۲} = \lambda^2 d^{۲}_{\mathrm{ME}}(S(\tilde{A}), S(\tilde{B}))$$

در نتیجه داریم:

$$d_{\mathrm{ME}}(S(\lambda\tilde{A}), S(\lambda\tilde{B})) = |\lambda| \ d_{ME} \ (S(\tilde{A}), S(\tilde{B}))$$

بطور مشابه

$$d_{ME}(C(\lambda\tilde{A}), C(\lambda\tilde{B})) = |\lambda| \ d_{ME} \ (C(\tilde{A}), C(\tilde{B}))$$

بنابراین

$$d(\lambda\tilde{A}, \lambda\tilde{B}) = |\lambda| d(\tilde{A}, \tilde{B})$$

اثبات برای $\lambda \geq ۰$ مشابه است. ■

تعریف ٤-۲-۳

یک بردار $\widetilde{X} = (\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \dots, \tilde{x}_n)^T$ ، که در آن $1 \leq i \leq n \ , \tilde{x}_i$ اعداد فازی $L-R$ هستند. بردار فازی $L-R$ نامیده می شود.

تعریف ٤-٢-٤

فاصله بین دو بردار فازی $L-R$ ، $\widetilde{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\dots,\tilde{x}_n)^T$ و $\widetilde{Y}=(\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\dots,\tilde{y}_n)^T$ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$D_p(\widetilde{X},\widetilde{Y})=(\sum_{i=1}^{n} d^p(\tilde{x}_i,\tilde{y}_i))^{\frac{1}{p}} \qquad (۶-۲-۴)$$

که در آن $p\geq 1$.

در این پایان نامه برای بدست آوردن فاصله بین دو بردار فازی $L-R$ در تعریف (۴-۲-۴) $p=2$ را در نظر می گیریم. در بخش بعدی با استفاده از متر معرفی شده، جواب دقیق متقارن یا جواب تقریبی متقارن را برای سیستم خطی فازی متقارن بدست می آوریم.

٤-٣ حل دستگاه خطی فازی $L-L$ متقارن

تعریف ٤-٣-١

فرض کنیم تابع حالت $L(0)$ ثابت است. دستگاه خطی $n\times n$

$$\begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1+a_{12}\tilde{x}_2+\cdots+a_{1n}\tilde{x}_n=\tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1+a_{22}\tilde{x}_2+\cdots+a_{2n}\tilde{x}_n=\tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{n1}\tilde{x}_1+a_{n2}\tilde{x}_2+\cdots+a_{nn}\tilde{x}_n=\tilde{b}_n \end{cases} \qquad (۱-۳-۴)$$

که ضرایب ماتریس $A = (a_{ij}) \quad 1 \le i,j \le n$، $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ، یک ماتریس قطعی $n \times n$ است و $\tilde{b}_{\mathrm{i}}\ 1 \le i \le n$ و اعداد فازی $L-L$ متقارن هستند.

سیستم فوق یک دستگاه خطی فازی $L-L$ متقارن نامیده می شود$(S-L-FLS)$.

شکل ماتریس سیستم خطی فوق برابر است با

$$A\tilde{X} = \tilde{B} \qquad (۲-۳-۴)$$

که در آن

$$\tilde{X} = (\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \dots, \tilde{x}_n)^T \ ، \ \tilde{B} = (\tilde{b}_۱, \tilde{b}_۲, \dots, \tilde{b}_n)^T$$

و $\tilde{b}_i$, $\tilde{x}_i$ اعداد فازی $L-L$ هستند.

$$\tilde{b}_{\mathrm{i}} = (b_۱^i, b_۲^i; \alpha_b^i, \alpha_b^i) \quad , \tilde{x}_{\mathrm{i}} = (x_۱^i, x_۲^i; \alpha_x^i, \beta_x^i) \qquad \mathrm{i} = ۱, ۲, \dots, n$$

تعریف ٤-۳-۲

بردار فازی $\tilde{X} = (\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را یک جواب برای سیستم $S-L-FLS$ (۴-۳-۱) گوئیم اگر و فقط اگر

$$\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j = \tilde{b}_i \ , \qquad i = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۳-۳-۴)$$

که در آن $\tilde{x}_{\mathrm{j}}$ ، $1 \le j \le n$ اعداد فازی هستند.

قضیه ٤-٣-١

اگر $\widetilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ جواب منحصر به فرد از $S - L - FLS$ (٤-٣-١) باشد آنگاه $\widetilde{X}$ یک بردار فازی $L - L$ متقارن است یعنی $\tilde{x}_j$، $1 \le i \le n$ اعداد فازی $L - L$ متقارن هستند.

اثبات

هدف اثبات $\alpha_x^i = \beta_x^i$ بازای هر $i = 1, 2, \dots, n$ می باشد.

اگر $\widetilde{X}$ یک جواب برای سیستم $S - L - FLS$ (٤-٣-١) باشد آنگاه

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{x}_j = \tilde{b}_i\,, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

داریم:

$$\sum_{j\in\Gamma i^+} a_{ij}\alpha_x^j - \sum_{j\in\Gamma i^-} a_{ij}\, \beta_b^j = \alpha_b^i \qquad (٤-٣-٤)$$

$$\sum_{j\in\Gamma i^+} a_{ij}\, \beta_x^j - \sum_{j\in\Gamma i^-} a_{ij}\, \alpha_x^j = \alpha_b^i \qquad (٥-٣-٤)$$

که در آنها برای هر $i = 1, 2, \dots, n$

$$\Gamma_i^+ = \left\{j: 1 \le j \le n, a_{ij} \ge 0\right\} \qquad (٦-٣-٤)$$

$$\Gamma_i^- = \left\{j: 1 \le j \le n, a_{ij} < 0\right\} \qquad (٧-٣-٤)$$

با استفاده از معادلات (٤-٣-٤) و(٤-٣-٥) داریم:

$$\sum_{j\in\Gamma i^+} a_{ij}\left(\alpha_x^j - \beta_x^j\right) + \sum_{j\in\Gamma i^-} a_{ij}\left(\, \alpha_x^j - \beta_x^j \,\right) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (٨-٣-٤)$$

با فرض

$$V = \left(v_1, v_2, \dots, v_n \right)^T \qquad v_j = \alpha_x^j - \beta_x^j \quad j = 1,2, \dots, n$$

داریم:

$A\,V = ۰$

چون سیستم (۴-۳-۱) جواب منحصر به فرد دارد ماتریس A نامنفرد است [24] و از آن $V = ۰$ یعنی $v_j = ۰$ برای هر $j = ۱, ۲, ..., ۱$. بنابراین اثبات کامل است. ■

حال فرض می کنیم که $\tilde{X} = (\tilde{x}_۱, \tilde{x}_۲, \dots, \tilde{x}_n)^T$ یک جواب منحصر به فرد برای سیستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) است آنگاه داریم:

$$\sum_{j\epsilon\Gamma i^+} a_{ij}\, x_۱^j + \sum_{j\epsilon\Gamma i^-} a_{ij} x_۲^j = b_۱^i \qquad (۴-۳-۹)$$

$$\sum_{j\epsilon\Gamma i^+} a_{ij}\, x_۲^i + \sum_{j\epsilon\Gamma i^-} a_{ij}\, x_۱^i = b_۲^i \qquad (۴-۳-۱۰)$$

$$\sum_{j\epsilon\Gamma i^+} a_{ij}\, \alpha_x^i - \sum_{j\epsilon\Gamma i^-} a_{ij}\, \alpha_x^i = \alpha_b^i \qquad (۴-۳-۱۱)$$

که مجموعه های Γ_i^+ و Γ_i^- به ترتیب در معادلات (۴-۳-۶) و (۴-۳-۷) تعریف شده اند.

همچنین برطبق قضییه (۴-۳-۱) $\tilde{X}$ یک بردار فازی $L - L$ متقارن است. حال فرض می کنیم:

$$\Lambda_b = (\alpha_b^1, \alpha_b^2, \dots, \alpha_b^n)^T \qquad \Lambda_x = (\alpha_x^1, \alpha_x^2, \dots, \alpha_x^n)^T$$
$$W = (w_۱, w_۲, \dots, w_n)^T \qquad C = (c_۱, c_۲, \dots, c_n)^T$$

که در آن

$$c_i = b_۱^i + b_۲^i, \qquad w_i = x_۱^i + x_۲^i, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

بنابراین از شکل معادلات (۴-۳-۱۱) - (۴-۳-۹) داریم:

$$AW = C, \qquad |A|\Lambda_x = \Lambda_b \qquad (۴-۳-۱۲)$$

چون سستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) یک جواب منحصر به فرد دارد ماتریس A و $|A|$ نامنفردند [24].
بنابراین با حل سیستم (۴-۳-۱۲) بردارهای W و Λ_x را بدست می آوریم .در نتیجه داریم:

$$x_2^i = w_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{i}}^{\mathrm{i}} , \qquad \mathrm{i} = ۱, ۲, \dots, n \qquad (۴-۳-۱۳)$$

از طرف دیگر واضح است که اگر $\tilde{X}$ یک جواب دقیق ازسیستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) باشد آنگاه

$$d\left(\left(A\tilde{X}\right)_i, \tilde{b}_i\right) = ۰ \qquad i = 1,2, \dots, n \qquad (۴-۳-۱۴)$$

بنابراین یک روش منطقی برای پیدا کردن جواب بردار فازی $L - L$ متقارن، مینیمم کردن فاصله بین بردار $A\tilde{X}$ و $\tilde{B}$ است.

فرض می کنیم:

$$(A\tilde{X})_i = \tilde{y}_{\mathrm{i}} = (y_{۱}^{\mathrm{i}}, y_{۲}^{\mathrm{i}}; \alpha_y^{\mathrm{i}}, \alpha_y^{\mathrm{i}}) \qquad (۴-۳-۱۵)$$

بنابراین

$$y_{۱}^{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^+} a_{\mathrm{ij}}\, x_{۱}^{\mathrm{j}} + \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^-} a_{\mathrm{ij}}\, x_{۲}^{\mathrm{j}} \qquad (۴-۳-۱۶)$$

$$y_{۲}^{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^+} a_{\mathrm{ij}}\, x_{۲}^{\mathrm{j}} + \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^-} a_{\mathrm{ij}}\, x_{۱}^{\mathrm{j}}$$

$$\alpha_y^{\mathrm{i}} = \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^+} a_{\mathrm{ij}}\, \alpha_x^{\mathrm{j}} - \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^-} a_{\mathrm{ij}}\, \alpha_x^{j} \qquad (۴-۳-۱۷)$$

با استفاده از تعریف (۴-۲-۴) و مطالب فوق، مساله مینیمم سازی را تعریف می کنیم وبا حل آن جواب بردار فازی $L - L$ متقارن را بدست می آوریم.

$$\begin{cases} min \quad Z = \sum_{i=1}^{n} d^{2}(\tilde{y}_i, \tilde{b}_i) \\ s.t. \\ x_1^i \le x_2^i \\ \alpha_x^i \ge max\{0, \alpha_x^{*i}\} \\ x_1^i, x_2^i; \quad \text{آزاد} \quad i=1,2,\dots,n \end{cases} \qquad (۱۸-۳-۴)$$

که در آن

$$d^{2}(\tilde{y}_i, \tilde{b}_i) = \frac{[(y_1^i - b_1^i) - (\alpha_y^i - \alpha_b^i)]^2 + [(y_2^i - b_2^i) + (\alpha_y^i - \alpha_b^i)]^2}{4} + \frac{(y_1^i - b_1^i)^2 + (y_2^i - b_2^i)^2}{4}$$

و α_y^i, y_2^i, y_1^i در معادلات (۴-۳-۱۶) و (۴-۳-۱۷) تعریف شده اند و همچنین

$$\Lambda_x^* = (\alpha_x^{*1}, \alpha_x^{*2}, \dots, \alpha_x^{*n})^T$$

جواب منحصر بفرد برای سیستم $|A|\Lambda_x = \Lambda_b$ است.

از طرف دیگر معادلات (۴-۳-۱۳) و (۴-۳-۱۶) و (۴-۳-۱۷) ، نتیجه می گیریم:

$$y_1^i = \sum_{j\in\Gamma i^+} a_{ij}\ x_1^j - \sum_{j\in\Gamma i^-} a_{ij}\ x_1^j + \sum_{j\in\Gamma i^-} a_{ij}\ w_j \qquad (۱۹-۳-۴)$$

$$y_2^i = \sum_{j\in\Gamma i^+} a_{ij}\ w_j + \sum_{j\in\Gamma i^-} a_{ij}\ x_1^j - \sum_{j\in\Gamma i^+} a_{ij}\ x_1^j \qquad (۲۰-۳-۴)$$

$$\alpha_y^i = \sum_{j\in\Gamma i^+} a_{ij}\ \alpha_x^j - \sum_{j\in\Gamma i^-} a_{ij}\ \alpha_x^j \qquad (۲۱-۳-۴)$$

دقت شود در معادلات (۴-۳-۲۱) – (۴-۳-۱۹) پارامتر x_2^i را حذف می کنیم.

حال در مساله مینیمم سازی قرار می دهیم:

$$\Omega_{۱}^{i} = (y_{۱}^{i} - b_{۱}^{i}) - (\alpha_{y}^{i} - \alpha_{b}^{i})$$

$$\Omega_{۲}^{i} = (y_{۲}^{i} - b_{۲}^{i}) - (\alpha_{y}^{i} - \alpha_{b}^{i})$$

$$\Omega_{۳}^{i} = (y_{۱}^{i} - b_{۱}^{i})$$

$$\Omega_{۴}^{i} = (y_{۲}^{i} - b_{۲}^{i})$$

از معادلات (۴-۳-۲۱) – (۴-۳-۱۹) بدست می آوریم:

$$\Omega_{۱}^{i} = \sum_{j\epsilon\Gamma i+} a_{ij} (x_{۱}^{j} - \alpha_{x}^{j}) - \sum_{j\epsilon\Gamma i-} a_{ij} (x_{۱}^{j} - \alpha_{x}^{j}) + \sum_{j\epsilon\Gamma i-} a_{ij} w_{j} - (b_{۱}^{i} - \alpha_{b}^{i}) \qquad (۴-۳-۲۲)$$

$$\Omega_{۲}^{i} = \sum_{j\epsilon\Gamma i-} a_{ij} (x_{۱}^{j} - \alpha_{x}^{j}) - \sum_{j\epsilon\Gamma i+} a_{ij} (x_{۱}^{j} - \alpha_{x}^{j}) + \sum_{j\epsilon\Gamma i+} a_{ij} w_{j} - (b_{۲}^{i} + \alpha_{b}^{i}) \qquad (۴-۳-۲۳)$$

$$\Omega_{۳}^{i} = \sum_{j\epsilon\Gamma i+} a_{ij} x_{۱}^{j} - \sum_{j\epsilon\Gamma i-} a_{ij} x_{۱}^{j} + \sum_{j\epsilon\Gamma i-} a_{ij} w_{j} - b_{۱}^{i} \qquad (۴-۳-۲۴)$$

$$\Omega_{۴}^{i} = \sum_{j\epsilon\Gamma i-} a_{ij} x_{۱}^{j} - \sum_{j\epsilon\Gamma i+} a_{ij} x_{۱}^{j} + \sum_{j\epsilon\Gamma i+} a_{ij} w_{j} - b_{۲}^{i} \qquad (۴-۳-۲۵)$$

بنابراین مساله مینیمم سازی (۴-۳-۱۷) به شکل زیر تغییر می کند:

$$\begin{cases} min \quad Z = \frac{۱}{۴} \sum_{i=۱}^{n} \left[(\Omega_{۱}^{i})^{۲} + (\Omega_{۲}^{i})^{۲} + (\Omega_{۳}^{i})^{۲} + (\Omega_{۴}^{i})^{۲} \right] \\ \quad s.t. \\ \quad x_{۱}^{i} \leq \frac{1}{2} w_{i} \\ \quad \alpha_{x}^{i} \geq max \{۰, \alpha_{x}^{*i}\} \\ \quad x_{۱}^{i}: \quad \text{آزاد} \quad i=۱,۲,\dots,n \end{cases} \qquad (۴-۳-۲۶)$$

با استفاده از قضیه زیر، مساله مینیمم سازی (۴-۳-۲۶) را می توان ساده تر نوشت:

قضیه ٤-٣-٢

برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$\Omega_1^{\text{i}} = -\ \Omega_2^{\text{i}}\ ,\quad \Omega_3^{\text{i}} = -\ \Omega_4^{\text{i}}$$

اثبات

داریم:

$$AW = C$$

آنگاه

$$\sum_{\text{j}=1}^{n} a_{\text{ij}} w_{\text{j}} = (b_1^{\text{i}} + b_2^{\text{i}})$$

یا

$$\sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^-} a_{\text{ij}}\, w_{\text{j}} - \ b_1^{\text{i}} = \ b_2^{\text{i}} - \ \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^+} a_{\text{ij}}\, w_{\text{j}}$$

حال بدست می آوریم:

$$\Omega_1^{\text{i}} = \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^+} a_{\text{ij}}(x_1^{\text{i}} - \alpha_x^{\text{i}}) - \ \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^-} a_{\text{ij}}\ (x_1^{\text{i}} - \alpha_x^{\text{i}}) + \ \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^-} a_{\text{ij}}\, w_{\text{j}} - (b_1^{\text{i}} - \alpha_b^{\text{i}})$$

$$= -[-\sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^+} a_{\text{ij}}(x_1^{\text{i}} - \alpha_x^{\text{i}}) + \ \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^-} a_{\text{ij}}\ (x_1^{\text{i}} - \alpha_x^{\text{i}}) - \ \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^-} a_{\text{ij}}\, w_{\text{j}} + b_1^{\text{i}} - \alpha_b^{\text{i}}]$$

$$= -[-\sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^+} a_{\text{ij}}\ (x_1^{\text{i}} - \alpha_x^{\text{i}}) + \ \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^-} a_{\text{ij}}\ (x_1^{\text{i}} - \alpha_x^{\text{i}}) + \ \sum_{\text{j}\epsilon\Gamma\text{i}^+} a_{\text{ij}}\, w_{\text{j}} - (b_2^{\text{i}} - \alpha_b^{\text{i}})]$$

$$= -\ \Omega_2^{\text{i}}$$

بطور مشابه اگر $AW = C$ آنگاه $\Omega_{۳}^{i} = -\Omega_{۴}^{i}$.

■

طبق قضییه (۴-۳-۱) ، می توانیم مساله مینیمم سازی (۴-۳-۲۶) را به صورت زیر داریم:

$$\begin{cases} min \quad Z = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{n}\left[(\Omega_{۱}^{i})^{۲} + (\Omega_{۳}^{i})^{۲}\right] \\ s.t. \\ \quad x_{۱}^{i} \leq \frac{۱}{۲} w_{i} \\ \quad \alpha_{x}^{i} \geq max\{۰, \alpha_{x}^{*i}\} \\ \quad x_{۱}^{i} \text{ آزاد } \quad i=۱,۲,...,n \end{cases} \qquad (۴-۳-۲۷)$$

مساله مینیمم سازی (۴-۳-۱۸) $۲n$ متغیر آزاد دارد در حالیکه مساله مینیمم سازی (۴-۳-۲۷)، n متغیر آزاد دارد. بنابراین حل (۴-۳-۲۷) خیلی مناسب تر از (۴-۳-۱۸) است.

حل (۴-۳-۱۷) و بکارگیری معادله (۴-۳-۱۳) می توانیم جواب بردار فازی $L - L$ متقارن را بدست آوریم.

اگر مقدار بهینه از مساله مینیمم سازی یعنی Z صفر باشد آنگاه جواب دقیق سیستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) را بدست می آوریم. از طرف دیگر اگر Z غیر صفر باشد آنگاه جواب تقریبی سیستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) را بدست می آوریم که در این حالت سیستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) جواب دقیق ندارد.

در ادامه اولین الگوریتم از روش پیشنهادی را برای حل سیستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) پیشنهاد می کنیم. شرط لازم برای آنکه یک سیستم FLS جواب منحصر به فرد داشته باشد آن است که ماتریس A و $|A|$ نامنفرد باشند [۲۸]. بنابراین در این الگوریتم فرض می کنیم که ماتریس A و $|A|$ نامنفرد هستند.

4-۳-۱ الگوریتم اول

گام اول:

سیستم خطی قطعی (۴-۳-۱۲) را تشکیل داده ، حل می کنیم و بردارهای W و Λ_x^* را بدست می آوریم.

گام دوم:

معادلات (۴-۳-۲۲) و (۴-۳-24) را تشکیل داده و مساله مینیمم سازی (۴-۳-27) را حل می کنیم و Z ، x_1^i و α_x^i را برای $i = 1, 2, \dots, n$ بدست می آوریم.

گام سوم:

توسط معادله (۴-۳-۱۳) بردار فازی $L - L$ متقارن $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را تشکیل می دهیم.

گام چهارم:

اگر $Z = 0$ آنگاه $\tilde{X}$ یک جواب دقیق است. در غیر این صورت $\tilde{X}$ یک جواب تقریبی است.

٤-۳-۲ الگوریتم دوم

در این بخش فرض می کنیم که بردار فازی $L - L$ متقارن $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ یک جواب دقیق از $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) است آنگاه در برنامه غیر خطی (۴-۳-۲۷) داریم:

$Z = 0$ بنابراین $\Omega_3^i = 0$ و $\Omega_1^i = 0$. در نتیجه

$$|A|R = K, \qquad |A|X_1 = M \qquad (۴-۳-۲۸)$$

به ترتیب

$$(R)_{\mathrm{i}} = x_{۱}^{\mathrm{i}} - \alpha_{x}^{\mathrm{i}} \ , \qquad (K)_{\mathrm{i}} = (b_{۱}^{\mathrm{i}} - \alpha_{b}^{\mathrm{i}}) - \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^{-}} a_{\mathrm{ij}}\ w_{\mathrm{j}} \qquad (۲۹-۳-۴)$$

$$(X_1)_i = x_{۱}^{\mathrm{i}} \ , \qquad (M)_{\mathrm{i}} = b_{۱}^{\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^{-}} a_{\mathrm{ij}}\ w_{\mathrm{j}} \qquad (۳۰-۳-۴)$$

برای $\mathrm{i} = ۱, ۲, \dots, n$

در نهایت فرض می کنیم:

$$\Lambda_b = M - K \quad , \qquad \Lambda_x = X_{۱} - R$$

بنابراین از معادلات (۴-۳-۳۰) - (۴-۳-۲۸) داریم:

$$|A|\Lambda_x = \Lambda_b \quad , \qquad |A|X_{۱} = M \qquad (۳۱-۳-۴)$$

که در آن

$$(\Lambda_x)_{\mathrm{i}} = \alpha_{x}^{\mathrm{i}} \quad , \qquad (\Lambda_b)_{\mathrm{i}} = \alpha_{b}^{\mathrm{i}}$$

و

$$(X_1)_i = x_{۱}^{\mathrm{i}} \quad , \qquad (M)_{\mathrm{i}} = b_{۱}^{\mathrm{i}} - \sum_{\mathrm{j}\epsilon\Gamma\mathrm{i}^{-}} a_{\mathrm{ij}}\, w_{\mathrm{j}}$$

برای هر $\mathrm{i} = ۱, ۲, \dots, n$.

براساس معادلات (۴-۳-۱۲) و (۴-۳-۳۱) و مساله مینیمم سازی (۴-۳-۲۷) و معادله (۴-۳-۱۳). ما دومین الگوریتم را به شکل زیر پیشنهاد می کنیم. مشابه الگوریتم ۱ فرض می کنیم که ماتریس A و $|A|$ نامنفردند.

گام اول:

سیستم خطی قطعی (۴-۳-۱۲) و (۴-۳-۳۱) را تشکیل داده، حل می کنیم و بردارهای W , Λ_x ، X_1 را بدست می آوریم.

گام دوم:

توسط معادله (۴-۳-۱۳) بردار $X_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)^T$ را بدست می آوریم و آنگاه بردار $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را تشکیل می دهیم.

گام سوم:

اگر $\tilde{X}$ عدد فازی $L - L$ متقارن است یعنی $\alpha_x^i \geq 0$ و $x_1^i \leq x_2^i$ آنگاه $\tilde{X}$ یک جواب دقیق است در غیر این صورت مسأله جواب دقیق ندارد.

گام چهارم:

برای به دست آوردن جواب تقریبی متقارن معادلات (۴-۳-۲۲) و (۴-۳-۲۴) را تشکیل می دهیم، مسأله مینیمم سازی (۴-۳-۲۷) را حل می کنیم و x_1^i و α_x^i را برای $i = 1, 2, \dots, n$ بدست می آوریم.

گام پنجم:

توسط معادله (۴-۳-۱۳) بردار $X_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)^T$ را بدست می آوریم و سپس بردار اعداد فازی $L- L$ متقارن $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را به عنوان یک جواب تقریبی فازی متقارن تشکیل می دهیم.

باید توجه کرد که اساس الگوریتم دوم آن است که اگرسیستم $S - L - FLS$ (۴-۳-۱) جواب دقیق داشته باشد آنگاه نیازی به حل مسأله مینیمم سازی (۴-۳-۲۷) برای بدست آوردن جواب نیست.

٤-4 مثالهای عددی

در این بخش تابع حالت $L(۰)$ ثابت به شکل زیراست :

$$L(x) = R(x) = max\{۰, ۱ - x\} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

بنابراین در مثالهای زیر اعداد فازی مورد نظر اعداد فازی مثلثی یا اعداد فازی ذوزنقه ای هستند.

مثال ٤-٤-١

سیستم $S - L - FLS$ 3×3 زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} -\tilde{x}_۱ - \tilde{x}_۲ + \tilde{x}_۳ = (۲, ۷; ۶, ۶) \\ ۲\tilde{x}_۱ + \tilde{x}_۲ - ۲\tilde{x}_۳ = (-۷, ۱; ۱۱, ۱۱) \\ -۳\tilde{x}_۱ + ۲\tilde{x}_۲ - \tilde{x}_۳ = (-۱۲, -۳; ۱۱, ۱۱) \end{cases} \qquad (۱-۴-۴)$$

طبق الگوریتم دوم و با حل دستگاه های زیر

$$|A|X_۱ = M \qquad |A|\Lambda_x^* = \Lambda_b \qquad AW = C$$

بدست می آوریم:

$$X_۱ = (۱, -۱, ۲)^T \qquad \Lambda_x^* = (۲, ۱, ۳)^T, \qquad W=(۳, ۰, ۶)^T$$

همچنین از معادله (۴-۳-۱۳) داریم:

$$X_۲ = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)^T = (۲, ۱, ۴)^T$$

واضح است $\alpha_x^{*i} \geq ۰$ و $x_۱^{\mathrm{i}} \leq x_۲^{\mathrm{i}}$ برای i=۱,۲,۳ . بنابراین بردار فازی $L-L$ متقارن

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} (x_1^1, x_2^1; \alpha_x^1, \alpha_x^1) \\ (x_1^2, x_2^2; \alpha_x^2, \alpha_x^2) \\ (x_1^3, x_2^3; \alpha_x^3, \alpha_x^3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۱, ۲; ۲, ۲) \\ (-۱, ۱; ۱, ۱) \\ (۲, ۴; ۳, ۳) \end{bmatrix}$$

جواب دقیق محاسبه شده برای سیستم $S-L-FLS$ (۴-۴-۱) می باشد.

مثال 4-٤-۲

سیستم $S-L-FLS$ 3×3 زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \tilde{x}_۱ - ۲\tilde{x}_۲ + \tilde{x}_۳ = (-۴, ۱; ۵, ۵) \\ -\tilde{x}_۱ - \tilde{x}_۲ + \tilde{x}_۳ = (-۵, -۲; ۴, ۴) \\ -۲\tilde{x}_۱ + \tilde{x}_۲ + \tilde{x}_۳ = (-۲, -۱; ۲, ۲) \end{cases} \quad (۴-۴-۲)$$

طبق الگوریتم دوم با حل دستگاه های

$$AW = C \quad ، \quad |A|\Lambda_{\mathrm{x}}^* = \Lambda_{\mathrm{b}} \quad ، \quad |A|X_۱ = M$$

داریم:

$$X_۱ = (۳, ۱, -۱)^{\mathrm{T}} \quad ، \quad \Lambda_x^* = (۲, ۱, ۱,)^{\mathrm{T}} \, ، \quad W = (۴, ۴, ۱)^T$$

همچنین از معادله (۴-۳-۱۳) داریم:

$$X_۲ = (x_2^1, x_2^2, x_2^3)^T = (۱, ۳, ۲)^T$$

واضح است که اگر $x_1^1 \nleq x_2^1$ آنگاه $\tilde{x}_1$ یک عدد فازی نیست. در نتیجه بردار $\tilde{X}$ یک بردار فازی نیست بنابراین مسأله جواب دقیق ندارد. برای پیدا کردن جواب تقریبی متقارن باید Ω_1^i و Ω_3^i برای i=۱, ۲, ۳ را تشکیل داده و برنامه مینیمم سازی (۴-۳-۲۷) را حل کنیم. از معادلات (۴-۳-۲۲) و (۴-۳-۲۴) داریم:

$$\Omega_1^1 = ۲(x_1^1 - \alpha_x^1) + ۲(x_1^2 - \alpha_x^2) + (x_1^3 - \alpha_x^3) + ۱$$

$$\Omega_1^2 = (x_1^1 - \alpha_x^1) + (x_1^2 - \alpha_x^2) + (x_1^3 - \alpha_x^3) + ۱$$

$$\Omega_1^3 = ۲(x_1^1 - \alpha_x^1) + (x_1^2 - \alpha_x^2) + (x_1^3 - \alpha_x^3)$$

$$\Omega_3^1 = x_1^1 + ۲x_1^2 + x_1^3 - ۴$$

$$\Omega_3^2 = x_1^1 + x_1^2 + ۲x_1^3 - ۳$$

$$\Omega_3^3 = ۲x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 - ۶$$

حال باید مسأله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} min \quad Z = \frac{۱}{۲}\left[(\Omega_1^1)^۲ + (\Omega_1^2)^۲ + (\Omega_1^3)^۲ + (\Omega_3^1)^۲ + (\Omega_3^2)^۲ + (\Omega_3^3)^۲\right] \\ s.t. \\ \quad x_1^1 \le ۲ \ , \quad x_1^2 \le ۲ \ , \quad x_1^3 \le \frac{۱}{۲} \\ \quad \alpha_x^1 \ge ۲ \ , \quad \alpha_x^2 \ge ۱ \ , \quad \alpha_x^3 \ge ۱ \end{cases}$$

مسأله می نی مم سازی فوق را با استفاده از نرم افزار $GAMS$ حل کرده ایم و جواب بهینه را بدست آورده ایم:

$$x_1^1 = ۲ \qquad x_1^2 = ۰/۸۳۳۳ \qquad x_1^3 = ۰/۵$$

$\alpha_x^1 = ۲$ $\alpha_x^2 = ۱$ $\alpha_x^3 = ۱$

مقدار بهینه برابر است با $Z = ۰/ 583$.

از طرف دیگر از معادله (۴-۳-۱۳) داریم:

$x_2^1 = ۲$, $x_2^2 = ۳ / ۱۶۶۷$, $x_2^3 = ۰/ ۵$

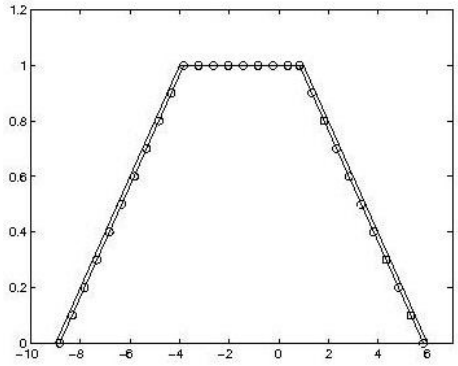
واضح است که $\alpha_x^{\mathrm{i}} \geq ۰$ و $x_۱^{\mathrm{i}} \leq x_۲^{\mathrm{i}}$ برای $i = 1,2,3$ بنابراین بردار فازی $L - L$ متقارن زیر

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} (۲, ۲; ۲, ۲) \\ (۰/ ۸۳۳۳, ۳ / ۱۶۶۷; ۱, ۱) \\ (۰/ ۵, ۰/ ۵; ۱, ۱) \end{bmatrix}$$

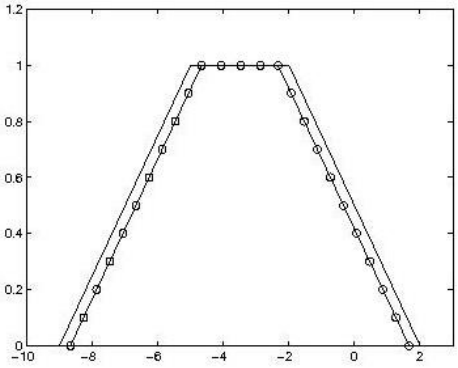
یک جواب تقریبی متقارن برای سیستم $S - L - FLS$ (۴-۴-۲) است که داریم:

$$d(A\tilde{X}, \tilde{B}) = \sqrt{Z} = ۰/ ۷۶۳۷$$

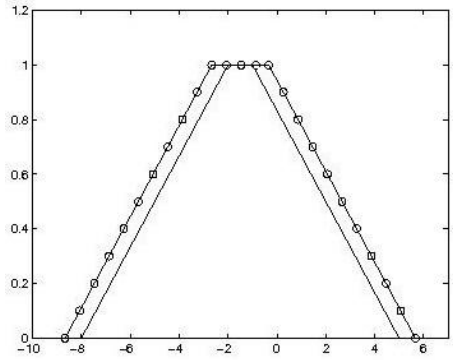
همچنین جواب بدست آمده از سیستم $S - L - FLS$ را در سیستم اصلی $S - L - FLS$ (۴-۴-۲) قرار می دهیم تا تفاوت بین مقدار سطر i ام $((A\tilde{X})_i)$ و درایه ی i ام بردار سمت راست $\tilde{B}$ $(\tilde{b}_{\mathrm{i}})$ را بررسی کنیم. برای توضیح بیشتر شکل های ۴-۴-۱ و۴-۴-۲و ۴-۴-۳ مشاهده می شود.



شکل۴-۴-۱ مقایسه ی $\tilde{b}_1$، (-) و سطر اول $(\widetilde{AX})_1$، (o-).



شکل ۴-۴-۲ مقایسه ی $\tilde{b}_2$،(-) و سطر دوم $(\widetilde{AX})_2$(o-).



شکل ۴-۴-۳ مقایسه ی $\tilde{b}_3$، (-) و سطر سوم $(\widetilde{AX})_3$، (o-).

فصل پنجم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ مقدمه

این فصل در رابطه با نتیجه کلی و لزوم ارائه کارهای جدید انجام شده در این پایان نامه وهمچنین موضوعات قابل بررسی در آینده است.

۵-۲ نتیجه گیری

حل دستگاه های خطی تمام بازه ای یکی از مسائل مهم در آنالیز بازه ای می باشد. در این پایان نامه در فصل چهارم روش جدیدی برای تخمین جواب جبری برای یک سیستم خطی بازه ای ILS معرفی گردید.

همچنین در فصل پنجم ، روش جدیدی برای تعیین نزدیکترین جواب فازی متقارن برای یک سیستم خطی فازی $L-L$ متقارن $(S-L-FLS)$ فازی با بکار گیری یک متر جدید بدست آورده شد.

پیاده سازی روش های گفته شده در پایان نامه برای مثال ها توسط الگوریتم های ارائه شده در بخش های ۳-۳-۱، ۴-۳-۱ و۴-۳-۲ انجام شده است.

۵-۳ پیشنهادات

همان طور که بیان شد در هر دو موضوع مورد بحث یعنی تعیین جواب جبری برای یک سیستم خطی بازه ای و تعیین نزدیکترین جواب فازی متقارن برای یک سیستم خطی فازی ، تنها بردار سمت راست به ترتیب بازه ای و فازی می باشند. پیشنهاد این است که بتوان روش های مذکور را برای سیستم های خطی با ماتریس های ضرایب بازه ای و فازی در صورت امکان تعمیم داد.

همچنین پیشنهاد می شود در صورت امکان برای سیستم های خطی با ماتریس ضرایب $m \times n$

نیز روش های مذکور را بررسی کرد.

مقالات:

1- The nearest symmetric fuzzy solution for a symmetric fuzzy linear system

T. Allahviranloo, E. Haghi, M. Ghanbari

An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 20 (1), 151-172. (2012)

2- Estimation of algebraic solution by limiting the solution set of an interval linear system

M. Ghanbari, T. Allahviranloo, E. Haghi

Soft Computing, Vol. 16 (12), 2135-2142. (2012)

3- A new metric for L–R fuzzy numbers and its application in fuzzy linear systems

T. Allahviranloo, R. Nuraei, M. Ghanbari, E. Haghi, A. A. Hosseinzadeh

Soft Computing, Vol. 16 (10), 1743–1754. (2012)

4- A note on “Fuzzy linear system”

T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A. A. Hosseinzadeh, E. Haghi, R. Nuraei

Fuzzy set and systems, 177. 87–92. (2011)

5- Solving Fuzzy Heat Equation by Fuzzy Laplace transformation

Soheil Salahshour and Elnaz Haghi

Communications in Computer and Information Science, Vol. 1(81), 512-521. (2010)

6- An Approach for Solving Fuzzy Fredlholm Integro-Difference Equations with Mixed Argument

A. Gomashi, E. Haghi, M. Abbasi

Int. J. Industrial Mathematics Vol. 2(2), 143-152. (2010)

واژه نامه

اجتماع.....Union

ارتفاع.....Heigh

استدلال فازی.....Fuzzy reasoning

اشتراک.....Intersection

اصل گسترش.....Extension principle

بردار عدد بازه ای.....Interval number vector

بردار عدد فازی.....Fuzzy number vector

به طور کامل نامنفرد.....Completely nonsingular

پهنا.....Width

تابع عضویت.....Membership function

تابع مشخصه.....Characteristic function

تحدب.....Convexity

تراز.....Levels

تهی.....Empty

جواب فازی ضعیف.....Weak fuzzy solution

جواب فازی قوی.....Strong fuzzy solution

حاصل ضرب کارتزین.....Cartesian product

Fuzzy arithmetic ..... حساب فازی

Membership degree ..... درجه عضویت

Fully interval linear system ..... دستگاه خطی تمام بازه ای

Interval inclusion linear system ..... دستگاه خطی شمول بازه ای

Fuzzy inclusion linear system ..... دستگاه خطی شمول فازی

Fuzzy linear system ..... دستگاه خطی فازی

Subnormal ..... زیر نرمال

Radius ..... شعاع

Interval number ..... عدد بازه ای

Fuzzy number ..... عدد فازی

Trapezoidal fuzzy number ..... عدد فازی ذوزنقه ای

Triangular fuzzy number ..... عدد فازی مثلثی

Distance ..... فاصله

Absolute value ..... قدرمطلق

Minimal absolute value ..... قدر مطلق کمینه

Interval number matrix ..... ماتریس عدد بازه ای

Metric ..... متر

Solution set ..... مجموعه جواب

Tolerable solution set ..... مجموعه جواب تحمل پذیر

Controllable solution set..... مجموعه جواب کنترل پذیر

United solution set..... مجموعه جواب متحده

Fuzzy set..... مجموعه فازی

Convex fuzzy set..... مجموعه فازی محدب

Normal fuzzy set..... مجموعه فازی نرمال

Classic set..... مجموعه کلاسیک

Universal set..... مجموعه مرجع

Support..... محمل

Boundary..... مرز

Fuzzy logic..... منطق فازی

Regular..... منظم

Normal..... نرمال

Vertex point..... نقطه ی رأسی

Midpoint..... نقطه ی میانی

Mapping..... نگاشت

Upper semi-continuous..... نیمه پیوسته بالایی

2n-sided pyramid..... هرم $2n$ طرفه

Core..... هسته

References:

[1] S. Abbasbandy, R. Ezzati, A. Jafarian, LU decomposition method for solving fuzzy system of linear equations, Applied Mathematics and Computation. 172 (2006) 633-643.

[2] G. Alefeld, G. Mayer, The Cholesky method for interval data, Linear Algebra Appl. 194 (1993) 161-182.

[۳] G. Alefeld, G. Mayer, On the symmetric and unsymmetric solution set of interval systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 16 (1995) 1223-1240.

[4] G. Alefeld, G. Mayer, Interval analysis: theory and applications, Journal of Computational and Applied Mathematics. 121 (2000) 421-464.

[5] G. Alefeld, V. Kreinovich, G. Mayer, On the solution sets of particular classes of linear interval systems, J. Comput. Appl. Math. 152 (2003) 1-15.

[6] T. Allahviranloo, Numerical methods for fuzzy system of linear equations, Applied Mathematics and Computation. 155 (2004) 493-502.

[7] T. Allahviranloo, M. Afshar Kermani, Solution of a fuzzy system of linear equation, Applied Mathematics and Computation. 175 (2006) 519-531.

[8] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Solving Fuzzy Linear Systems by Homotopy Perturbation Method, International Journal of Computational Cognition. 8(2) (2010) 24-30.

[9] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A new approach to obtain algebraic solution of interval linear systems, Soft Computing. 16 (2012) 121-133.

[10] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory, Applied Mathematical Modelling. 36 (2012) 5360-5379.

[11] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A.A. Hosseinzadeh, E. Haghi, R. Nuraei, A note on "Fuzzy linear systems", Fuzzy Sets and Systems. 177(1) (2011) 87-92.

[12] T. Allahviranloo, S. Salahshour, Fuzzy symmetric solution of fuzzy linear systems, Journal of Computational and Applied Mathematics. 235(16) (2011) 4545-4553.

[13] T. Allahviranloo, S. Salahshour, M. Khezerloo, Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems, Journal of Computational and Applied Mathematics. 235 (16) (2011) 4652-4662.

[14] R. Baker Kearfott, Rigorous Global Search: Continuous Problems, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands. (1996).

[15] O. Beaumont, Solving interval linear systems with linear programming techniques, Linear Algebra and its Applications. 281 (1998) 293-309.

[16] J.E. Cope, B.W. Rust, Bounds on solutions of linear systems with inaccurate data, SIAM J. Numer. Anal. 16 (1979) 950-963.

[١7] M. Dehghan, B. Hashemi, Iterative solution of fuzzy linear systems, Applied Mathematics and Computation. 175 (2006) 645-674.

[18] M. Dehghan, B. Hashemi, M. Ghatee, Computational methods for solving fully fuzzy linear systems, Applied Mathematics and Computation. 179 (2006) 328-343.

[19] P. Diamond, Fuzzy least squares, Information Sciences. 46 (1988) 141-149.

[20] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy numbers: an overview, in: J. Bezdek (Ed.), Analysis of Fuzzy Information, CRC Press. (1987) 112-148.

[٢1] Ezzati, Solving fuzzy linear systems, Soft Computing. 15 (2010) 193-197.

[22] J.A. Ferreira., F.Patricio, F.Oliveira, On the computation of solutions of systems of interval polynomial equations, Journal of Computational and Applied Mathematics. 173 (2005) 295-302.

[23] M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik, J. Rohn, K. Zimmermann (Eds.), Linear Optimization Problems with Inexact Data, Springer. (2006).

[24] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Systems. 96 (1998) 201-209.

[25] J. Garloff, Interval Gaussian elimination with pivot tightening, SIAM J. MATRIX ANAL. APPL. 30 (2009) 1761-1772.

[26] R. Ghanbari, N. Mahdavi-Amiri, New solutions of *L-R* fuzzy linear systems using ranking functions and ABS algorithms, Applied Mathematical Modelling. 34 (11) (2010) 3363-3375.

[27] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems 12 (1984) 215–229.

[28] B. Kearfott, V. Kreinovich (Eds.), Applications of Interval Computations, Kluwer Academic Publishers. (1996).

[29] V. Kreinovich, A.V. Lakeev, S.I. Noskov, Optimal solution of interval linear systems is intractable (NP-hard), Interval Comput. 1 (1993) 6-14.

[30] S. Markov, An iterative method for algebraic solution to interval equations, Applied Numerical Mathematics. 30 (1999) 225-239.

[31] G. Mayer, On regular and singular interval systems, Journal of Computational and Applied Mathematics. 199 (2007) 220-228.

[32] G. Mayer, A contribution to the feasibility of the interval Gaussian algorithm, Reliab. Comput. 12 (2006) 79-98.

[33] R.E. Moore, Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[34] A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations, Cambridge University Press, Cambridge. (1990).

[35] I.A. Nikas, T.N. Grapsa, Bounding the zeros of an interval equation, Applied Mathematics and Computation. 213 (2009) 466-478.

[36] W. Oettli, On the solution set of a linear system with inaccurate coefficients, SIAM J. Numer. Anal. 2 (1965) 115-118.

[37] W. Oettli, W. Prager, Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, Numer. Math. 6 (1964) 405-409.

[38] B.T. Polyak, S.A. Nazin, Interval solutions for interval algebraic equations, Mathematics and Computers in Simulation. 66 (2004) 207-217.

[39] O.A. Prokopyev, S. Butenko, A. Trapp, Checking solvability of systems of interval linear equations and inequalities via mixed integer programming, European Journal of Operational Research. 199 (2009) 117-121.

[40] P. Sevastjanov, L. Dymova, A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case, Information Sciences 179 (2009) 925-937.

[41] S. Shary, Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations, Reliable Computing. 3 (2) (1997) 103-135.

[٤2] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control. 8 (1965) 338-353.

[43] H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston. (1996).

مراجع فارسی:

[۴۴] الهویرنلو توفیق، طاهری نرگس، ۱۳۸۷، مجموعه فازی و خواص آن، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات.

[۴۵] منهاج محمد باقر، ۱۳۸۶، محاسبات فازی، انتشارات دانش نگار.

Novel methods to obtain the solutions of interval and fuzzy linear systems

Abstract

In this thesis, first we will discuss about the interval mathematics and introduce the concept of interval number, interval arithmetic and interval linear system. We introduce a new method for estimation the algebraic solution of an interval linear system where coefficient matrix is real-valued and right-hand side vector is interval-valued. In the proposed method, we first apply the interval Gaussian elimination method. Then by the limiting factors we obtain a limited solution set for related interval linear system that will be algebraic solution for this system.

Also we introduce a fuzzy number, fuzzy arithmetic, and the fuzzy linear system where coefficient matrix is real-valued and right-hand side vector is fuzzy-valued. Then we obtain the nearest symmetric fuzzy solution for a symmetric L-L fuzzy linear system by a new metric. Finally symmetric L-L fuzzy linear system is transformed to a non-linear programming problem that the obtained solution is favorite fuzzy number vector solution.

Keywords: Interval number, interval arithmetic, interval linear system, fuzzy number, fuzzy arithmetic, fuzzy linear system

Elnaz Haghi

Islamic Azad University
Science and Research Branch

Ph.D Thesis in Applied Mathematics

Subject:

Novel methods to obtain the solutions of interval and fuzzy linear systems

Supervisors:

Prof. Tofigh Allahviranloo
Prof. Saeid Abbasbandy

Advisor:

Dr. Mir Mozaffar Masumi

By:

Elnaz Haghi

July 2013