

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

رساله دکتری تخصصی رشته ریاضی کاربردی - آنالیز عددی (Ph.D)

موضوع:
دستگاه‌های خطی شمول بازه‌ای و فازی

استادان راهنما:
دکتر توفیق الهویرنلو
دکتر سعید عباسبندی

استاد مشاور:
دکتر میرمظفر معصومی

نگارنده:
مجتبی قنبری

سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۲



Islamic Azad University
Science and Research Branch

Faculty of Science – Department of Applied Mathematics

Ph.D. Thesis
On Applied Mathematics

Subject:
Interval and Fuzzy Inclusion Linear Systems

Supervisors:
Dr. Tofiq Allahviranloo
Dr. Saied Abbasbandy

Advisor:
Dr. Mirmozaffar Masoumi

By:
Mojtaba Ghanbari

Winter 2013

سپاسگزاری

سپاس و ستایش به پیشگاه خداوند منان که توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را بر من عطا فرمود.

برخود وظیفه می‌دانم از اساتید ارجمندم پروفسور دکتر توفیق الهویرنلو و پروفسور دکتر سعید عباسبندی به پاس تمام زحماتی که در طی تدوین رساله برای اینجانب کشیده‌اند، از صمیم قلب نهایت سپاسگزاری را نمایم. رهنمودهای ایشان همواره راهگشای مشکلات بوده و این رساله حاصل راهنمایی‌های مستمر ایشان است و قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌شان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر میرمظفر معصومی که در طی دوران تحصیل و نیز به عنوان استاد مشاور در تهیه این رساله مرا یاری نموده‌اند، تشکر می‌نمایم.

همچنین از داوران رساله، جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان و جناب آقای دکتر فرهاد حسین زاده لطفی و جناب آقای دکتر محمد علی فریبرز عراقی تشکر می‌کنم.

مجتبی قنبری

تقدیم به

همسر عزیزم که وجودش گرمی بخش لحظات زندگی ام است.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
چکیده.....	۱
اهداف تحقیق.....	۲
فصل اول : مقدمات بازه‌ای	
۱-۱. عدد بازه‌ای.....	۴
۱-۲. اعمال حسابی روی اعداد بازه‌ای.....	۸
۱-۳. بردار عدد بازه‌ای.....	۱۱
۱-۴. ماتریس عدد بازه‌ای.....	۱۲
۱-۵. دستگاه خطی بازه‌ای.....	۱۴
فصل دوم : دستگاه خطی شمول بازه‌ای	
۲-۱. دستگاه خطی شمول بازه‌ای.....	۲۶
۲-۲. روابط بین مجموعه جواب‌ها.....	۲۷
۲-۳. ارائه ی یک روش.....	۳۳
فصل سوم : مقدمات فازی	
۳-۱. مجموعه‌ی فازی.....	۴۴
۳-۲. اعداد فازی.....	۴۹
۳-۳. حساب اعداد فازی براساس اصل گسترش.....	۵۳
۳-۴. حساب اعداد فازی براساس α -برش‌ها.....	۵۴
۳-۵. دستگاه خطی فازی.....	۵۵
فصل چهارم : دستگاه خطی شمول فازی	
۴-۱. دستگاه خطی شمول فازی.....	۶۵

۶۷		۲-۴. مجموعه فازی $\tilde{X}^*$
۷۲		۳-۴. مجموعه فازی $\tilde{X}_{\mathcal{A}}$
۷۴		۴-۴. روابط بین مجموعه‌های فازی $\tilde{X}_{\mathcal{A}}$ و $\tilde{X}^*$ ، $\overline{\mathcal{D}\mathcal{D}}$
۸۴		۵-۴. ارائه‌ی یک روش
۸۸		زمینه‌های باز کاری
۸۹		واژه‌نامه
۹۲		مراجع
۹۶		مقالات چاپ شده در دوره دکتری

چکیده

در این رساله، ابتدا توجه خود را به ریاضیات بازه‌ای معطوف کرده و مفهوم‌هایی مانند عدد بازه‌ای، حساب بازه‌ای و دستگاه خطی بازه‌ای را معرفی می‌کنیم. سپس به کمک مفهوم‌های تعریف شده، مفهوم جدیدی به نام «دستگاه خطی شمول بازه‌ای» را تعریف کرده و مجموعه جواب آنرا معرفی می‌کنیم. در ادامه به بررسی ارتباط میان جواب‌های دستگاه خطی شمول بازه‌ای و دستگاه خطی بازه‌ای می‌پردازیم و سپس به کمک این مفهوم جدید، روشی را جهت به دست آوردن جواب جبری برای یک دستگاه خطی بازه‌ای مطرح می‌کنیم. در نهایت همه‌ی بحث‌های فوق را به حالت فازی تعمیم می‌دهیم و به معرفی عدد فازی، حساب فازی و دستگاه خطی فازی می‌پردازیم. سپس مفهوم جدید دیگری به نام «دستگاه خطی شمول فازی» ارائه می‌دهیم و همانند قبل، به بررسی ارتباط میان جواب‌های این دستگاه با جواب‌های دستگاه خطی فازی می‌پردازیم. سرانجام این رساله را با ارائه‌ی یک روش که به محاسبه‌ی جواب جبری فازی یک دستگاه خطی فازی می‌پردازد به پایان می‌رسانیم.

کلمات کلیدی: عدد بازه‌ای، حساب بازه‌ای، دستگاه خطی بازه‌ای، دستگاه خطی شمول بازه‌ای، عدد فازی، حساب فازی؛ دستگاه خطی فازی، دستگاه خطی شمول فازی

اهداف مشخص تحقیق:

- (۱) تعریف دستگاه خطی شمول بازه‌ای و مجموعه جواب آن.
- (۲) بررسی ارتباط میان مجموعه جواب یک دستگاه خطی شمول بازه‌ای با جواب جبری یک دستگاه خطی بازه‌ای.
- (۳) تعریف یک دستگاه خطی شمول فازی و مجموعه جواب فازی آن.
- (۴) بررسی ارتباط میان مجموعه جواب یک دستگاه خطی شمول فازی با جواب جبری یک دستگاه خطی فازی.

فصل اول

مقدمات بازه‌ای

۱-۱ مقدمه

در مدل بندی پدیده‌های مختلف فیزیکی با دو نوع عدم قطعیت مواجه هستیم:

نوع اول: عدم قطعیت ناشی از ضعف دانش و ابزار بشری در شناخت پیچیدگی‌های یک پدیده می‌باشد. به عنوان مثال برای اندازه گیری دمای یک شهر در چندین نقطه از شهر دما سنج را بکار برده و در نهایت از آن‌ها میانگین گرفته می‌شود. مسلماً دمای به دست آمده با دمای واقعی آن شهر تفاوت دارد، زیرا اولاً تنها چند نقطه از آن شهر در محاسبات دخالت داده شده است، ثانیاً خطای شخص اندازه گیر و همچنین دستگاه‌ها باعث ایجاد عدم قطعیت در میزان دمای اعلام شده می‌گردد.

نوع دوم: مربوط به عدم صراحت و عدم شفافیت مربوط به یک پدیده یا ویژگی خاص می‌باشد. یک پدیده ممکن است ذاتاً غیر صریح و وابسته به قضاوت افراد باشد. به عنوان مثال ویژگی گرم بودن هوا از نظر افراد مختلف متفاوت است و هیچ تعریف واحدی برای آن وجود ندارد به طوری که یک نفر دمای ۳۰ درجه را گرم بداند و فرد دیگری ۴۰ درجه را.

بنابراین برای به دست آوردن یک مدل واقع گرایانه، می‌بایستی عدم قطعیت را در مدل در نظر بگیریم. یکی از روش‌های موجود برای تأثیر عدم قطعیت ذاتی، استفاده از ریاضیات بازه‌ای می‌باشد. در چند سال اخیر، این نوع ریاضیات در بررسی عدم قطعیت عددی در الگوریتم‌ها و مسائل عددی توسعه‌ی شگرفی داشته است. از طرف دیگر، مسائل بازه‌ای کاربرد فراوانی در علوم مهندسی دارند. این مسائل زمانی به وجود می‌آیند که اطلاعات مسأله نمی‌توانند به صورت دقیق اندازه‌گیری شوند، اما می‌توانند متعلق به دامنه‌ی مشخصی از اعداد باشند [۲۹، ۲۳]. در این بخش به معرفی بعضی از مفاهیم موجود در ریاضیات بازه‌ای می‌پردازیم.

۲-۱ عدد بازه‌ای

تعریف ۱-۲-۱: [۳۲] یک عدد بازه‌ای را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[x] = \{ t \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq t \leq \bar{x} \} := [\underline{x}, \bar{x}],$$

که در آن $\mathbb{R}$ بیانگر مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد و $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$ و $\underline{x} \leq \bar{x}$.

در تعریف فوق، $\underline{x}$ را کران پایین و $\bar{x}$ را کران بالای عدد بازه‌ای $[x]$ می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی اعداد بازه‌ای را با $\mathbb{IR}$ نشان می‌دهیم. واضح است که: $\mathbb{R} \subset \mathbb{IR}$. زیرا

$$\mathbb{R} = \{ [x] \in \mathbb{IR} : \underline{x} = \bar{x} \}.$$

تعریف ۱-۲-۲: [۳۲] عدد بازه‌ای $[x]$ را عدد بازه‌ای محض می‌نامیم هرگاه $\underline{x} < \bar{x}$. در این صورت می‌نویسیم: $[x] \in \mathbb{IR} \setminus \mathbb{R}$.

تعریف ۱-۲-۳: [۳۲] برای اعداد بازه‌ای دلخواه $[x]$ و $[y]$ داریم:

$$[x] = [y] \iff \underline{x} = \underline{y} \ \& \ \bar{x} = \bar{y}.$$

تعریف ۱-۲-۴: [۳۲] هرگاه $[x]$ و $[y]$ دو عدد بازه‌ای دلخواه باشند، آنگاه

$$[x] \leq [y] \iff \bar{x} \leq \underline{y}.$$

از تعریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\begin{aligned} [x] \leq [0] &:= [0,0] &\iff &\bar{x} \leq 0, \\ [x] \geq [0] &:= [0,0] &\iff &\underline{x} \geq 0. \end{aligned}$$

تعریف ۱-۲-۵: [۳۲] عدد بازه‌ای $[x]$ را متقارن گوئیم هرگاه: $\underline{x} + \bar{x} = 0$

تعریف ۱-۲-۶: [۳۲] نقطه‌ی میانی^۲ عدد بازه‌ای $[x]$ را با نماد $M[x]$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$M[x] = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}.$$

با توجه به تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای عدد بازه‌ای متقارن $[x]$ داریم: $M[x] = 0$.

تعریف ۱-۲-۷: [۵] پهنای^۳ عدد بازه‌ای $[x]$ را با نماد $W[x]$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

^۲Midpoint

$$W[x] = \bar{x} - \underline{x}.$$

تعریف ۸-۲-۱: [۵] شعاع^۴ عدد بازه‌ای $[x]$ را با نماد $R[x]$ نشان می‌دهیم و برابر است با:

$$R[x] = \frac{1}{2} W[x] = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2}.$$

با استفاده از مفاهیم فوق، می‌توانیم لم زیر را ارائه دهیم.

لم ۱-۲-۱: برای اعداد بازه‌ای دلخواه $[x]$ و $[y]$ داریم:

$$۱) [x] \cap [y] \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad |M[x] - M[y]| \leq R[x] + R[y],$$

$$۲) [y] \subseteq [x] \quad \Leftrightarrow \quad |M[x] - M[y]| \leq R[x] - R[y].$$

اثبات. ۱) لزوم: ابتدا فرض می‌کنیم که $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ و $a \in [x] \cap [y]$ در این صورت:

$$\left. \begin{array}{l} a \in [x] \Rightarrow |M[x] - a| \leq R[x] \\ a \in [y] \Rightarrow |M[y] - a| \leq R[y] \end{array} \right\} \Rightarrow |M[x] - a| + |M[y] - a| \leq R[x] + R[y].$$

از طرفی واضح است که:

$$|M[x] - M[y]| \leq |M[x] - a| + |M[y] - a|,$$

بنابراین

$$|M[x] - M[y]| \leq R[x] + R[y].$$

بنابراین قسمت لزوم بخش اول، ثابت شد.

کفایت: فرض می‌کنیم نامساوی سمت راست قسمت (۱) برقرار باشد. حال فرض خلف می‌کنیم که:

$$[x] \cap [y] = \emptyset. \text{ در این صورت دارای دو حالت می‌باشیم:}$$

حالت اول: هرگاه $[x] < [y]$. در این حالت واضح است که:

$$\begin{aligned} |M[x] - M[y]| &= |M[x] - \bar{x}| + |\bar{x} - \underline{y}| + |\underline{y} - M[y]| \\ &= R[x] + |\bar{x} - \underline{y}| + R[y] > R[x] + R[y]. \end{aligned}$$

که این، یک تناقض آشکار است.

حالت دوم: هرگاه $[y] < [x]$. اثبات این حالت، کاملاً مشابه حالت اول است. بنابراین اثبات بخش اول لم، تمام است.

(۲) لزوم: ابتدا فرض می‌کنیم که: $[y] \subseteq [x]$. اگر $M[y] = M[x]$ اثبات بدیهی است. در غیر این صورت، دارای دو حالت هستیم:

حالت اول: هرگاه $M[y] \in [\underline{x}, M[x]]$. به طور واضح در این قسمت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R[x] &= |\underline{x} - \underline{y}| + |\underline{y} - M[y]| + |M[y] - M[x]| \\ &= |\underline{x} - \underline{y}| + R[y] + |M[x] - M[y]|, \end{aligned}$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم:

$$R[x] - R[y] = |\underline{x} - \underline{y}| + |M[x] - M[y]| \Rightarrow |M[x] - M[y]| \leq R[x] - R[y].$$

حالت دوم: هرگاه $M[y] \in [M[x], \bar{x}]$. اثبات این حالت کاملاً مشابه اثبات حالت اول است. بنابراین قسمت لزوم بخش دوم، ثابت شد.

کفایت: فرض کنید که نامساوی سمت راست قسمت (۲) برقرار باشد. حال فرض خلف می‌کنیم که: $[y] \not\subseteq [x]$. بنابراین عضو $y^* \in [y]$ وجود دارد به طوری که $y^* \notin [x]$. در این صورت نتیجه می‌گیریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} |M[x] - y^*| > R[x] \\ |y^* - M[y]| \leq R[y] \end{array} \right\} \Rightarrow |M[x] - y^*| - |y^* - M[y]| > R[x] - R[y].$$

از طرفی واضح است که:

$$|M[x] - M[y]| \geq |M[x] - y^*| - |y^* - M[y]|.$$

بنابراین

$$|M[x] - M[y]| > R[x] - R[y],$$

که این، یک تناقض آشکار است. بنابراین، اثبات بخش دوم لم تمام است. ■

نتیجه ۱-۲-۱: با توجه به تعریف شعاع یک عدد بازه‌ای، از لم ۱-۲-۱ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$۱) [x] \cap [y] \neq \emptyset \Leftrightarrow 2|M[x] - M[y]| \leq W[x] + W[y],$$

$$۲) [y] \subseteq [x] \Leftrightarrow 2|M[x] - M[y]| \leq W[x] - W[y].$$

تعریف ۱-۲-۹: [۵] قدر مطلق^۰ عدد بازه‌ای $[x]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|[x]| = \max \{ |t| : t \in [x] \} = \max \{ |\underline{x}|, |\bar{x}| \}.$$

تعریف ۱-۲-۱۰: [۵] قدر مطلق کمینه‌ی^۱ عدد بازه‌ای $[x]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

^۰Absolute value

$$|[x]| = \min \{ |t| : t \in [x] \} = \begin{cases} \min \{ |\underline{x}|, |\bar{x}| \}, & 0 \notin [x], \\ 0, & 0 \in [x]. \end{cases}$$

تعریف ۱-۲-۱: [۶] تابع $d: \mathbb{IR} \times \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$d([x], [y]) = \max \{ |\underline{x} - \underline{y}|, |\bar{x} - \bar{y}| \},$$

را تابع فاصله یا متر روی مجموعه‌ی $\mathbb{IR}$ می‌نامیم.

۳-۱ اعمال حسابی روی اعداد بازه‌ای

تعریف ۱-۳-۱: [۳۲] هرگاه $[x]$ و $[y]$ دو عدد بازه‌ای دلخواه باشند، در این صورت اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[x] + [y] = \{x + y : x \in [x], y \in [y]\},$$

$$[x] - [y] = \{x - y : x \in [x], y \in [y]\},$$

$$[x] \cdot [y] = \{x \cdot y : x \in [x], y \in [y]\},$$

$$\frac{[x]}{[y]} = \left\{ \frac{x}{y} : x \in [x], y \in [y] \right\}, \quad 0 \notin [y].$$

نکته ۱-۳-۱: هرگاه $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ و $[y] = [\underline{y}, \bar{y}]$ دو عدد بازه‌ای دلخواه باشند و $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ آنگاه $[x] * [y]$ نیز یک عدد بازه‌ای به صورت زیر است:

$$[x] * [y] = \left[\min \{ \underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y} \}, \max \{ \underline{x} * \underline{y}, \underline{x} * \bar{y}, \bar{x} * \underline{y}, \bar{x} * \bar{y} \} \right],$$

البته در حالت تقسیم، می‌بایستی: $0 \notin [y]$.

با توجه به نکته‌ی فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$[x] + [y] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad [x] - [y] = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}],$$

$$[x] \cdot [y] = \left[\min \{ \underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y} \}, \max \{ \underline{x} \cdot \underline{y}, \underline{x} \cdot \bar{y}, \bar{x} \cdot \underline{y}, \bar{x} \cdot \bar{y} \} \right],$$

$$\frac{[x]}{[y]} = \left[\min \left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \right\}, \max \left\{ \frac{\underline{x}}{\underline{y}}, \frac{\underline{x}}{\bar{y}}, \frac{\bar{x}}{\underline{y}}, \frac{\bar{x}}{\bar{y}} \right\} \right], \quad \text{هرگاه } 0 \notin [y].$$

نکته ۱-۳-۲: با توجه به نکته ۱-۳-۱، هرگاه $[x] \in \mathbb{IR}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آنگاه ضرب اسکالر را می توان به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\lambda \cdot [x] = \{\lambda x : x \in [x]\} = \begin{cases} [\lambda \underline{x}, \lambda \bar{x}], & \text{اگر } \lambda \geq 0, \\ [\lambda \bar{x}, \lambda \underline{x}], & \text{اگر } \lambda < 0. \end{cases}$$

نکته ۱-۳-۳: با توجه به تعریف ۱-۳-۱ نتیجه می گیریم که عضو خشتی جمعی برابر است با $[0] = [0, 0]$ و عضو خشتی ضربی برابر است با $[1] = [1, 1]$.

نکته ۱-۳-۴: دستگاه های $(\mathbb{IR}, +)$ و $(\mathbb{IR}, \cdot)$ تشکیل گروه نمی دهند، زیرا هر عدد بازه ای دلخواه دارای عضو معکوس نسبت به اعمال جمع و ضرب نیست.

نکته ۱-۳-۵: مجموعه همه ی اعداد بازه ای با اعمال جمع و ضرب فوق، تشکیل یک فضای برداری نمی دهد، زیرا هر فضای برداری خود یک گروه می باشد. همچنین این مجموعه تشکیل یک میدان را نیز نمی دهد.

لم ۱-۳-۱: [۶] برای اعداد بازه ای دلخواه $[x]$ ، $[y]$ و $[z]$ داریم:

$$[x] \cdot ([y] + [z]) \subseteq [x] \cdot [y] + [x] \cdot [z].$$

اثبات. با توجه به نکته ی ۱-۳-۱ رابطه ی فوق به آسانی اثبات می شود.

لم ۱-۳-۲: [۶] فرض کنید $[x], [y], [z], [w] \in \mathbb{IR}$ بطوریکه: $[x] \subseteq [z]$ و $[y] \subseteq [w]$ و همچنین $*$ $\in \{+, -, \cdot, /\}$ ، آنگاه:
 $[x] * [y] \subseteq [z] * [w]$.

اثبات. با توجه به نکته ی ۱-۳-۱ رابطه ی فوق به آسانی اثبات می شود.

نکته ۱-۳-۶: با استفاده از تعاریف ۱-۲-۶، ۱-۲-۷ و ۱-۳-۱ نتیجه می گیریم که:

$$[x] = M[x] + R[x] \cdot [-1, 1] = [M[x] - R[x], M[x] + R[x]].$$

نکته ۱-۳-۷: [۶] هرگاه $[x], [y] \in \mathbb{IR}$ آنگاه:

$$۱) \left| \frac{1}{[y]} [x] \right| = \frac{1}{<[y]>} |[x]|, \quad \text{اگر } 0 \notin [y],$$

$$۲) |[x] + [y]| \leq |[x]| + |[y]|.$$

حال قضیه ی زیر را ارائه می دهیم.

قضیه ۱-۳-۱: هرگاه $a_1, a_2, \dots, a_n$ اعداد حقیقی دلخواه و $[x_1], [x_2], \dots, [x_n]$ اعداد بازه ای دلخواه باشند، آنگاه:

$$۱) W \sum_{i=1}^n a_i \cdot [x_i] = \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot W[x_i],$$

$$۲) M \sum_{i=1}^n a_i \cdot [x_i] = \sum_{i=1}^n a_i \cdot M[x_i],$$

$$۳) R \sum_{i=1}^n a_i \cdot [x_i] = \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot R[x_i].$$

اثبات. تعریف می کنیم:

$$\Omega^+ = \{i : a_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad \Omega^- = \{i : a_i < 0, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot [x_i] = \left[\sum_{i \in \Omega^+} a_i \underline{x_i} + \sum_{i \in \Omega^-} a_i \bar{x_i}, \sum_{i \in \Omega^+} a_i \bar{x_i} + \sum_{i \in \Omega^-} a_i \underline{x_i} \right].$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
W \sum_{i=1}^n a_i \cdot [x_i] &= \left(\sum_{i \in \Omega} + a_i \bar{x}_i + \sum_{i \in \Omega} - a_i \underline{x}_i \right) - \left(\sum_{i \in \Omega} + a_i \underline{x}_i + \sum_{i \in \Omega} - a_i \bar{x}_i \right) \\
&= \sum_{i \in \Omega} + a_i (\bar{x}_i - \underline{x}_i) - \sum_{i \in \Omega} - a_i (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n |a_i| (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \\
&= \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot W[x_i].
\end{aligned}$$

بنابراین اثبات قسمت (۱) تمام است. اثبات قسمت (۲) نیز کاملاً مشابه اثبات فوق است. همچنین با توجه به تعریف ۱-۲-۸ اثبات قسمت (۳) نیز واضح است. ■

۱-۴ بردار عدد بازه‌ای

تعریف ۱-۴-۱: [۶] بردار $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ را یک بردار عدد بازه‌ای^۶ (به طور مختصر، بردار بازه‌ای) می‌نامیم هرگاه:

$$i = 1, 2, \dots, n : [x_i] \in \mathbb{IR}.$$

نکته ۱-۴-۱: هرگاه برای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم: $[x_i] = [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$ ، آنگاه برای بردار بازه‌ای $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ داریم:

$$[x] = [\underline{x}, \bar{x}],$$

که در آن: $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)^T$ و $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$. همچنین می‌توان نوشت:

$$[x] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : i = 1, 2, \dots, n, x_i \in [x_i]\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای بازه‌ای را با $\mathbb{IR}^n$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{IR}^n$. زیرا

$$\mathbb{R}^n = \{[x] \in \mathbb{IR}^n : \underline{x} = \bar{x}\}.$$

همه‌ی تعاریفی که برای یک عدد بازه‌ای مطرح کرده ایم را می‌توانیم به صورت مؤلفه به مؤلفه برای یک بردار بازه‌ای نیز تعریف کنیم.

^۶Interval number vector

تعریف ۱-۴-۲: فرض کنید

$$[\mathbf{y}] = ([y_1], [y_2], \dots, [y_n])^T \quad \text{و} \quad [\mathbf{x}] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$$

دو بردار بازه‌ای دلخواه باشند، در این صورت:

(۱) بردار بازه‌ای $[\mathbf{x}]$ را یک بردار بازه‌ای محض می‌نامیم هرگاه:

$$\exists i = 1, 2, \dots, n : [x_i] \in \mathbb{IR} \setminus \mathbb{R},$$

در این صورت می‌نویسیم: $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n \setminus \mathbb{R}^n$.

$$[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}] \Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, n, : [x_i] = [y_i], \quad (۲)$$

$$[\mathbf{x}] \leq [\mathbf{y}] \Leftrightarrow \bar{\mathbf{x}} \leq \underline{\mathbf{y}}, \quad (۳)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}] \geq \mathbf{0} &\Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, n, : [x_i] \geq 0, \\ [\mathbf{x}] \leq \mathbf{0} &\Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, n, : [x_i] \leq 0, \end{aligned}$$

$$M[\mathbf{x}] = (M[x_1], M[x_2], \dots, M[x_n])^T = \frac{\underline{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}}{2}, \quad (۴)$$

$$W[\mathbf{x}] = (W[x_1], W[x_2], \dots, W[x_n])^T = \bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}, \quad (۵)$$

$$R[\mathbf{x}] = (R[x_1], R[x_2], \dots, R[x_n])^T = \frac{\bar{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}}{2}, \quad (۶)$$

$$|[\mathbf{x}]| = (|[x_1]|, |[x_2]|, \dots, |[x_n]|)^T, \quad (۷)$$

(۸) تابع فاصله‌ی متر را نیز می‌توانیم به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} D: \mathbb{IR}^n \times \mathbb{IR}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ D([\mathbf{x}], [\mathbf{y}]) &= \max_{i=1,2,\dots,n} d([x_i], [y_i]), \end{aligned}$$

که در آن تابع $d(\cdot, \cdot)$ ، متر روی اعداد بازه‌ای است (تعریف ۱-۲-۱۱ را ببینید).

$$[\mathbf{x}] \subseteq [\mathbf{y}] \Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, n, : [x_i] \subseteq [y_i]. \quad (۹)$$

۵-۱ ماتریس عدد بازه‌ای

تعریف ۱-۵-۱: [۶] ماتریس $[A] = ([a_{ij}])_{m \times n}$ را یک ماتریس عدد بازه‌ای^۸ (به طور مختصر، ماتریس بازه‌ای) می‌نامیم هرگاه:

$$i = 1, 2, \dots, m \text{ \& } j = 1, 2, \dots, n, : a_{ij} \in \mathbb{IR}.$$

در این صورت می‌نویسیم $[A] = [\underline{A}, \bar{A}]$ که در آن: $\underline{A} = (\underline{a_{ij}})_{m \times n}$ و $\bar{A} = (\bar{a_{ij}})_{m \times n}$. همچنین می‌توان نوشت:

$$[A] = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}.$$

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های بازه‌ای از اندازه‌ی $m \times n$ را با نماد $\mathbb{IR}^{m \times n}$ نشان می‌دهیم. همانند قبل، واضح است که $\mathbb{R}^{m \times n} \subset \mathbb{IR}^{m \times n}$ زیرا

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \{[A] \in \mathbb{IR}^{m \times n} : \underline{A} = \bar{A}\}.$$

تعریف ۲-۵-۱: [۱۰] ماتریس بازه‌ای $[A]$ را منظم^۹ می‌نامیم، هرگاه برای $A \in [A]$ ، ماتریس A نامنفرد باشد.

قضیه ۱-۵-۱: [۱۸, ۳۰] فرض کنید $[A] = [\underline{A}, \bar{A}]$ یک ماتریس بازه‌ای باشد به طوری که $\underline{A}$ و $\bar{A}$ ماتریس‌های نامنفرد باشند و $\underline{A}^{-1} \geq 0$ و $\bar{A}^{-1} \geq 0$. در این صورت $[A]$ ماتریس منظم می‌باشد و

$$[A]^{-1} = [\bar{A}^{-1}, \underline{A}^{-1}].$$

تعریف ۳-۵-۱: [۶] ماتریس رأسی ماتریس بازه‌ای $[A]$ را با نماد $V[A] = (v_{ij})_{m \times n}$ نشان می‌دهیم که در آن: $\bar{a_{ij}}$ یا $\underline{a_{ij}}$: $\forall i = 1, 2, \dots, m \text{ \& } j = 1, 2, \dots, n : v_{ij} =$

مشابه بردار بازه‌ای، می‌توان تعاریف قبلی را به صورت درایه به درایه برای یک ماتریس بازه‌ای تعریف کرد.

^۸Interval number matrix

^۹Regular

تعریف ۱-۵-۴: فرض کنید $[A] = ([a_{ij}])_{m \times n}$ و $[B] = ([b_{ij}])_{m \times n}$ دو ماتریس بازه‌ای دلخواه باشند، در این صورت:

(۱) ماتریس بازه‌ای $[A]$ را یک ماتریس بازه‌ای محض می‌نامیم هرگاه:

$$\exists i = 1, 2, \dots, m \ \& \ \exists j = 1, 2, \dots, n : [a_{ij}] \in \mathbb{IR} \setminus \mathbb{R},$$

در این صورت می‌نویسیم: $[A] \in \mathbb{IR}^{m \times n} \setminus \mathbb{R}^{m \times n}$.

$$[A] = [B] \Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, m \ \& \ j = 1, 2, \dots, n : [a_{ij}] = [b_{ij}], \quad (۲)$$

$$[A] \leq [B] \Leftrightarrow \bar{A} \leq \underline{B}, \quad (۳)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$[A] \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, m \ \& \ j = 1, 2, \dots, n : [a_{ij}] \geq 0,$$

$$[A] \leq \mathbf{0} \Leftrightarrow i = 1, 2, \dots, m \ \& \ j = 1, 2, \dots, n : [a_{ij}] \leq 0,$$

$$M[A] = (M[a_{ij}])_{m \times n}, \quad (۴)$$

$$W[A] = (W[a_{ij}])_{m \times n}, \quad (۵)$$

$$R[A] = (R[a_{ij}])_{m \times n}, \quad (۶)$$

$$|[A]| = (|[a_{ij}]|)_{m \times n}. \quad (۷)$$

۶-۱ دستگاه خطی بازه‌ای

تعریف ۱-۶-۱: [۶] دستگاه $n \times n$ زیر را یک دستگاه خطی تمام بازه‌ای^۱ می‌نامیم.

$$\begin{cases} [a_{11}] [x_1] + [a_{12}] [x_2] + \dots + [a_{1n}] [x_n] = [b_1] \\ [a_{21}] [x_1] + [a_{22}] [x_2] + \dots + [a_{2n}] [x_n] = [b_2] \\ \vdots \\ [a_{n1}] [x_1] + [a_{n2}] [x_2] + \dots + [a_{nn}] [x_n] = [b_n] \end{cases} \quad (۱-۶-۱)$$

که در آن $[b_i], [a_{ij}] \in \mathbb{IR}$ ، برای $i, j = 1, 2, \dots, n$.

^۱Fully interval linear system

فرم ماتریسی دستگاه (۱-۶-۱) را به صورت

$$[A][x] = [b],$$

نشان می‌دهیم، که در آن: $[x] = ([x_1], \dots, [x_n])^T$ ، $[b] = ([b_1], \dots, [b_n])^T$ و

$$[A] = \begin{pmatrix} [a_{11}] & \cdots & [a_{1n}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [a_{n1}] & \cdots & [a_{nn}] \end{pmatrix}.$$

تعریف ۱-۶-۲: [۱۰] برای دستگاه معادلات تمام بازه‌ای (۱-۶-۱) می‌توان مجموعه جواب‌های زیر را تعریف کرد:

• مجموعه جواب متحده^{۱۱}:

$$\Sigma_{\exists\exists}([A], [b]) = \Sigma_{\exists\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n : (\exists A \in [A]) (\exists b \in [b]) (Ax = b)\},$$

• مجموعه جواب تحمل پذیر^{۱۲}:

$$\Sigma_{\forall\exists}([A], [b]) = \Sigma_{\forall\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall A \in [A]) (\exists b \in [b]) (Ax = b)\},$$

• مجموعه جواب کنترل پذیر^{۱۳}:

$$\Sigma_{\exists\forall}([A], [b]) = \Sigma_{\exists\forall} = \{x \in \mathbb{R}^n : (\exists A \in [A]) (\forall b \in [b]) (Ax = b)\}.$$

نکته ۱-۶-۱: از تعریف ۱-۶-۲ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\Sigma_{\exists\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n : [A]x \cap [b] \neq \emptyset\},$$

$$\Sigma_{\forall\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n : [A]x \subseteq [b]\},$$

$$\Sigma_{\exists\forall} = \{x \in \mathbb{R}^n : [A]x \supseteq [b]\},$$

قضیه ۱-۶-۱: برای دستگاه معادلات خطی تمام بازه‌ای (۱-۶-۱) داریم:

$$۱) \quad x \in \Sigma_{\exists\exists} \Leftrightarrow |M[A] \cdot x - M[b]| \leq R[A] \cdot |[x]| + R[b],$$

^{۱۱}United solution set

^{۱۲}Tolerable solution set

^{۱۳}Controllable solution set

$$۲) \quad x \in \sum_{\forall\exists} \Leftrightarrow |M[A] \cdot x - M[b]| \leq R[b] - R[A] \cdot |[x]|,$$

$$۳) \quad x \in \sum_{\exists\forall} \Leftrightarrow |M[A] \cdot x - M[b]| \leq R[A] \cdot |[x]| - R[b].$$

اثبات. با توجه به نکته ۱-۶-۱ و لم ۱-۲-۱، به آسانی قابل اثبات است. ■

نکته ۲-۶-۱: از تعریف ۱-۶-۱ نتیجه می گیریم که: $\sum_{\forall\exists} \subseteq \sum_{\exists\exists}$ و $\sum_{\exists\forall} \subseteq \sum_{\exists\exists}$.

قضیه ۲-۶-۱: مجموعه $\sum_{\exists\exists}$ ، مجموعه ای بسته است.

اثبات. هرگاه $\sum_{\exists\exists} = \emptyset$ ، آنگاه اثبات بدیهی است. در غیر این صورت، فرض کنید $x \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه‌ی حدی مجموعه $\sum_{\exists\exists}$ باشد. در این صورت، دنباله‌های $\{A^k\}_{k=0}^\infty$ ، $\{b^k\}_{k=0}^\infty$ و $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ وجود دارند به طوری که برای $k = 0, 1, \dots, n$ ، $A^k \in [A]$ ، $b^k \in [b]$ و $A^k x^k = b^k$ و نیز

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x.$$

از طرفی چون مجموعه‌های $[A]$ و $[b]$ فشرده می باشند، لذا زیر دنباله‌های $\{A^{k_j}\}_{j=0}^\infty$ ، $\{b^{k_j}\}_{j=0}^\infty$ وجود دارند به طوری که $A^{k_j} \rightarrow A \in [A]$ و $b^{k_j} \rightarrow b \in [b]$ و نیز $A^{k_j} x^{k_j} = b^{k_j}$. با توجه به اینکه $x^{k_j} \rightarrow x$ خواهیم داشت:

$$b = \lim_{j \rightarrow \infty} b^{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} A^{k_j} x^{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} A^{k_j} \cdot \lim_{j \rightarrow \infty} x^{k_j} = Ax,$$

این ایجاب می کند ■ $x \in \sum_{\exists\exists}$.

نکته ۳-۶-۱: برای دستگاه خطی تمام بازه‌ای (۱-۶-۱)، داریم:

$$\sum_{\forall\exists}([A], [b]) = \bigcap_{A \in [A]} \sum_{\forall\exists}(A, [b]).$$

قضیه ۳-۶-۱: برای مجموعه $\sum_{\forall\exists}$ تساوی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} \sum_{\forall\exists}([A], [b]) &= \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall A \in V[A]) (Ax \in [b])\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall A \in V[A]) (\exists b \in [b]) (Ax = b)\}. \end{aligned}$$

اثبات. اولاً با توجه به تعریف $\sum_{\forall\exists}([A], [b])$ ، واضح است که

$$\Sigma_{\forall\exists}([A], [b]) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall A \in V[A]) (Ax \in [b])\}.$$

برای اثبات عکس رابطه‌ی فوق، فرض می‌کنیم که $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ بطوریکه برای $A \in V[A]$ داشته باشیم:

$$Ax \in [b]. \quad (2-6-1)$$

حال فرض کنید $E \in [A]$ دلخواه باشد. با توجه به تعریف $V[A]$ نتیجه می‌گیریم که 2^{n^2} ضریب $0 \leq \lambda_A \leq 1$ وجود دارند بطوریکه:

$$\sum_{A \in V[A]} \lambda_A = 1, \quad E = \sum_{A \in V[A]} \lambda_A A.$$

یعنی ماتریس E به صورت یک ترکیب محدبی از ماتریس‌های انتهایی $[A]$ (یعنی $\underline{A}$ و $\overline{A}$) است. با توجه به توضیحات فوق، داریم:

$$Ex = \sum_{A \in V[A]} \lambda_A Ax.$$

اما با توجه به رابطه‌ی (2-6-1) نتیجه می‌گیریم $Ex \in [b]$ این یعنی آنکه $x \in \Sigma_{\forall\exists}([A], [b])$ و در نتیجه:

$$\Sigma_{\forall\exists}([A], [b]) \supseteq \{x \in \mathbb{R}^n : (\forall A \in V[A]) (Ax \in [b])\}. \blacksquare$$

نکته 2-6-1: با توجه به نکته 3-6-1 و قضیه 3-6-1، داریم:

$$\Sigma_{\forall\exists}([A], [b]) = \bigcap_{A \in V[A]} \Sigma_{\forall\exists}(A, [b]).$$

علاوه بر مجموعه جواب‌های متحده، تحمل پذیر و قابل کنترل، جواب دیگری را نیز می‌توان برای یک دستگاه معادلات خطی تمام بازه‌ای ارائه داد.

تعریف 3-6-1: [10] بردار بازه‌ای $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ را یک جواب جبری برای دستگاه معادلات خطی تمام بازه‌ای (1-6-1) می‌نامیم هرگاه با توجه به اعمال جمع و ضرب تعریف شده روی اعداد بازه‌ای، دقیقاً در آن صدق کند. یعنی

$$\sum_{j=1}^n [a_{ij}] [x_j] = [b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

قرارداد ۱-۶-۱: در این رساله جواب جبری را با نماد $[x_A] = ([x_{1A}], [x_{2A}], \dots, [x_{nA}])^T$ نشان می‌دهیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$[A][x_A] = [b].$$

همچنین واضح است که جواب جبری می‌تواند به صورت یک مجموعه به فرم زیر تلقی شود:

$$[x_A] = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T : i = 1, 2, \dots, n; \quad x_i \in [x_{iA}]\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

قرارداد ۲-۶-۱: در این رساله منظور از دستگاه خطی بازه‌ای دستگاهی است که ماتریس ضریب آن حقیقی مقدار و بردار سمت آن بازه‌ای مقدار باشد و نیز منظور از دستگاه خطی تمام بازه‌ای دستگاهی است که ماتریس ضریب و بردار سمت آن هر دو بازه‌ای مقدار باشند.

بنابراین با توجه به قرارداد ۲-۶-۱، یک دستگاه خطی بازه‌ای $n \times n$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} a_{11} [x_1] + a_{12} [x_2] + \dots + a_{1n} [x_n] = [b_1] \\ a_{21} [x_1] + a_{22} [x_2] + \dots + a_{2n} [x_n] = [b_2] \\ \vdots \\ a_{n1} [x_1] + a_{n2} [x_2] + \dots + a_{nn} [x_n] = [b_n]. \end{cases} \quad (۳-۶-۱)$$

فرم ماتریسی دستگاه (۳-۶-۱) را می‌توان به صورت زیر ارائه داد:

$$A[x] = [b],$$

که در آن $A = (a_{ij})_{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و

$$[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T, [b] = ([b_1], [b_2], \dots, [b_n])^T \in \mathbb{IR}^n.$$

نکته ۵-۶-۱: در این رساله، همواره فرض بر این است که ماتریس A نامنفرد می‌باشد، مگر آن که خلاف آن به طور صریح بیان شود.

قضیه ۴-۶-۱: برای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) داریم: $\sum_{\exists\exists} = \sum_{\forall\exists}$ و همچنین اگر

$$\sum_{\exists\forall} = \emptyset, [b] \in \mathbb{IR}^n \setminus \mathbb{R}^n$$

اثبات. با توجه به اینکه برای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱)، ماتریس ضریب یک ماتریس حقیقی مقدار است، لذا نمادهای سور وجودی ($\exists$) و سور عمومی ($\forall$) در تعاریف مجموعه‌های $\Sigma_{\forall\exists}$ و $\Sigma_{\exists\exists}$ معادل هم خواهند بود. این یعنی آنکه: $\Sigma_{\exists\exists} = \Sigma_{\forall\exists}$ از طرفی فرض خلف کنید که $\Sigma_{\exists\forall} \neq \emptyset$ و $x \in \Sigma_{\exists\forall}$ در این صورت با توجه به تعریف ۲-۶-۱، نتیجه خواهیم گرفت که برای $b \in [b]$ داریم: $Ax = b$ یا به عبارتی دیگر، با توجه به نامنفرد بودن A داریم:

$$\forall b \in [b] \Rightarrow x = A^{-1}b. \quad (۴-۶-۱)$$

حال با توجه به اینکه $[b]$ یک بردار بازه‌ای محض است، فرض می‌کنیم $b', b \in [b]$ و $b \neq b'$ در این صورت براساس رابطه (۴-۶-۱) داریم: $x = A^{-1}b'$ و $x = A^{-1}b$ که نتیجه می‌دهد:

$$A^{-1}b = A^{-1}b' \Rightarrow b = b'.$$

بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است. ■

نتیجه ۱-۶-۱: با توجه به قضیه ۴-۶-۱، نتیجه می‌گیریم که برای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) به جای مجموعه جواب‌های متحده، تحمل پذیر و کنترل پذیر، تنها می‌توان یک مجموعه به صورت زیر معرفی کرد:

$$\Sigma := \Sigma_{\exists\exists} = \Sigma_{\forall\exists} = \{x \in \mathbb{R}^n : (\exists b \in [b])(x = b)\}.$$

نکته ۶-۶-۱: هرگاه دستگاه بازه‌ای (۳-۶-۱) تبدیل به یک دستگاه حقیقی مقدار شود، یعنی بردار سمت راست نیز حقیقی مقدار باشد یا به عبارتی دیگر $[b] = b \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه نتیجه می‌گیریم که:

$$\Sigma_{\exists\exists} = \Sigma_{\forall\exists} = \Sigma_{\exists\forall} = A^{-1}b.$$

قضیه ۵-۶-۱: [۶] فرض کنید در دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱)، ماتریس A^{-1} به صورت زیر باشد:

$$A^{-1} = [a^1 \ a^2 \ \dots \ a^n],$$

که در آن a^j نشانگر ستون j ام ماتریس A^{-1} است. در این صورت داریم:

$$\Sigma = \{A^{-1}\underline{b} + \sum_{j=1}^n t_j a^j : 0 \leq t_j \leq w[b_j]\}.$$

اثبات. ابتدا فرض می‌کنیم که $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ و

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \underline{\mathbf{b}} + \sum_{j=1}^n t_j \mathbf{a}^j ; \quad 0 \leq t_j \leq W[b_j].$$

در این صورت با ضرب کردن طرفین در $\mathbf{A}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \underline{b_1} \\ \underline{b_2} \\ \vdots \\ \underline{b_n} \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + t_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b_1} + t_1 \\ \underline{b_2} + t_2 \\ \vdots \\ \underline{b_n} + t_n \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t_j \leq W[b_j].$$

از طرفی چون $0 \leq t_j \leq W[b_j]$ پس $\underline{b_j} + t_j \in [b_j]$ بنابراین از عبارت فوق نتیجه می‌شود که $\mathbf{Ax} \in [\mathbf{b}]$ و لذا $\mathbf{x} \in \Sigma$ از این موضوع نتیجه می‌گیریم که:

$$\Sigma \supseteq \{ \mathbf{A}^{-1} \underline{\mathbf{b}} + \sum_{j=1}^n t_j \mathbf{a}^j : 0 \leq t_j \leq W[b_j] \}.$$

به وسیله‌ی عکس روند بالا به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\Sigma \subseteq \{ \mathbf{A}^{-1} \underline{\mathbf{b}} + \sum_{j=1}^n t_j \mathbf{a}^j : 0 \leq t_j \leq W[b_j] \}.$$

بنابراین اثبات قضیه تمام است. ■

مشابه دستگاه خطی تمام بازه‌ای (۱-۶-۱)، برای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) نیز می‌توان جواب جبری را به صورت بردار بازه‌ای $[\mathbf{x}_A] = ([x_{1A}], [x_{2A}], \dots, [x_{nA}])^T$ تعریف کرد که دقیقاً در دستگاه (۳-۶-۱) صدق می‌کند. یعنی:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [x_{jA}] = [b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

یا به عبارتی دیگر:

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_A] = [\mathbf{b}].$$

نکته ۷-۶-۱: در دستگاه بازه‌ای (۳-۶-۱)، برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\underline{b_i} = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x_{jA}} + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x_{jA}}, \quad \overline{b_i} = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x_{jA}} + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x_{jA}},$$

که در آن

$$\Gamma_i^+ = \{j : a_{ij} \geq 0; j = 1, 2, \dots, n\}, \quad \Gamma_i^- = \{j : a_{ij} < 0; j = 1, 2, \dots, n\}$$

و همچنین برای $i = 1, 2, \dots, n$ $[x_{iA}] = [\underline{x}_{iA}, \overline{x}_{iA}]$.

تعریف ۱-۶-۴: [۳۱, ۳۹] ماتریس حقیقی مقدار $A = (a_{ij})_{n \times n}$ را «به طور کامل نامنفرد»^{۱۴} گوئیم هرگاه خود و ماتریس قدر مطلق آن، یعنی ماتریس $|A| = (|a_{ij}|)_{n \times n}$ ، هر دو نامنفرد باشند.

لم ۱-۶-۱: هرگاه دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) دارای جواب جبری یکتا باشد، آنگاه ماتریس ضریب A به طور کامل نامنفرد است.

اثبات. فرآیند اثبات این لم براساس روش فریدمن^{۱۵} [۲۴] می‌باشد. فرض کنید که دستگاه بازه‌ای (۳-۶-۱) دارای جواب جبری یکتا باشد. در این صورت ماتریس حقیقی $S = (s_{ij})_{2n \times 2n}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$if \ a_{ij} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} = a_{ij}, \\ s_{i,n+j} = 0, \\ s_{n+i,j} = 0, \\ s_{n+i,n+j} = a_{ij}, \end{cases} \quad \& \quad if \ a_{ij} < 0 \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} = 0, \\ s_{i,n+j} = a_{ij}, \\ s_{n+i,j} = a_{ij}, \\ s_{n+i,n+j} = 0. \end{cases}$$

در این صورت، ساختار ماتریس S به صورت زیر خواهد بود

$$S = \begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix}_{n \times n},$$

که در آن ماتریس E شامل درایه‌های نامنفی ماتریس A و ماتریس F شامل درایه‌های منفی ماتریس A هستند. بنابراین خواهیم داشت:

$$A = E + F, \quad |A| = E - F. \quad (۵-۶-۱)$$

با استفاده از بحث فوق، می‌توانیم دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) را با دستگاه خطی حقیقی زیر جایگزین کنیم.

^{۱۴}Completely nonsingular

^{۱۵}Friedman

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{b} \\ \bar{b} \end{pmatrix}, \quad (6-6-1)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \underline{x} &= (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)^T, & \bar{x} &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T, \\ \underline{b} &= (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)^T, & \bar{b} &= (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n)^T. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه دستگاه بازه‌ای (۳-۶-۱) دارای جواب جبری یکتا می‌باشد، بنابراین دستگاه حقیقی (۶-۶-۱) نیز دارای جواب یکتا می‌باشد. لذا ماتریس S نامنفرد است. از طرفی مطابق قضیه ۱ در [۲۴]، ماتریس S نامنفرد است اگر و تنها اگر ماتریس‌های $E + F$ و $E - F$ نامنفرد باشند. بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۵-۶-۱) اثبات تمام است. ■

نکته ۸-۶-۱: در حالت کلی، عکس لم ۱-۶-۱ صحیح نمی‌باشد. در حقیقت، هرگاه جواب دستگاه حقیقی (۶-۶-۱) تشکیل یک بردار بازه‌ای دهد، یعنی برای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم: $\underline{x}_i \leq \bar{x}_i$ ، آنگاه عکس لم ۱-۶-۱ برقرار می‌باشد.

اثبات. فرض کنید ماتریس A به طور کامل نامنفرد باشد و بردارهای حقیقی $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)^T$ و $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$ جواب دستگاه حقیقی (۶-۶-۱) باشد، به طوری که:

$$\underline{x}_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

چون ماتریس A به طور کامل نامنفرد است، با توجه به رابطه‌ی (۵-۶-۱) و قضیه ۱ در [۲۴]، ماتریس S نامنفرد می‌باشد و در نتیجه بردار $(\underline{x}, \bar{x})^T$ جواب یکتای دستگاه حقیقی (۶-۶-۱) است. بنابراین داریم:

$$E\underline{x} + F\bar{x} = \underline{x}, \quad F\underline{x} + E\bar{x} = \bar{x},$$

که در آن $E = (e_{ij})_{n \times n}$ و $F = (f_{ij})_{n \times n}$

$$e_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & a_{ij} \geq 0, \\ 0, & a_{ij} < 0, \end{cases} \quad f_{ij} = \begin{cases} 0, & a_{ij} \geq 0, \\ a_{ij}, & a_{ij} < 0, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

با توجه به فرض، بردار بازه‌ای $[x]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T; \quad [x_i] = [\underline{x}_i, \bar{x}_i] \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j] &= \sum_{j=1}^n (a_{ij} [\underline{x}_i, \overline{x}_i]) \\
 &= \left[\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_{jA} + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_{jA}, \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x}_{jA} + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_{jA} \right] \\
 &= \left[\sum_{j=1}^n e_{ij} \underline{x}_j + \sum_{j=1}^n f_{ij} \overline{x}_j, \sum_{j=1}^n e_{ij} \overline{x}_j + \sum_{j=1}^n f_{ij} \underline{x}_j \right] \\
 &= [\underline{b}_i, \overline{b}_i] \\
 &= [b_i].
 \end{aligned}$$

بنابراین بردار بازه‌ای $[x]$ جواب جبری دستگاه بازه‌ای (۱-۶-۳) است. همچنین یکتایی بردار $(\underline{x}, \overline{x})^T$ یکتایی $[x]$ را تضمین می‌کند. ■

مثال ۱-۶-۱: دستگاه خطی بازه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -2[x_1] + 3[x_2] = [2, 7], \\ [x_1] + [x_2] = [0, 3], \end{cases}$$

در این مثال، ماتریس A به طور کامل نامنفرد است، اما با این وجود دستگاه فوق دارای جواب جبری یکتا نمی‌باشد. در واقع به راحتی می‌توان نشان داد، برداری که در دستگاه فوق صدق می‌کند تشکیل یک بردار بازه‌ای نمی‌دهد. بنابراین دستگاه دارای جواب جبری نمی‌باشد.

نکته ۱-۶-۹: در لم ۱-۶-۱، فرض "یکتایی جواب" لازم است. به این معنی که اگر جواب جبری دستگاه بازه‌ای (۱-۶-۳) یکتا نباشد، آنگاه ماتریس A می‌تواند به طور کامل نامنفرد نباشد. برای اثبات این موضوع، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱-۶-۲: دستگاه خطی بازه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -[x_1] + [x_2] = [-2, 1], \\ [x_1] + [x_2] = [-1, 2], \end{cases}$$

دستگاه بازه‌ای فوق دارای نامتناهی جواب بهینه به صورت زیر می‌باشد:

$$[x_1] = [-1 + \delta, 2 - \delta], \quad [x_2] = [-\delta, \delta],$$

که در آن $\delta \in [0, \frac{3}{2}]$. توجه کنید که در دستگاه فوق، ماتریس A نامنفرد و ماتریس $|A|$ منفرد است. بنابراین ماتریس A بطور کامل نامنفرد نمی‌باشد، در حالی دستگاه بازه‌ای دارای جواب جبری غیریکتا است.

حل دستگاه‌های خطی تمام بازه‌ای یکی از مسائل مهم در آنالیز بازه‌ای می‌باشد. این مساله اولین بار توسط اوتلی^{۱۶} و پراگر^{۱۷} در سال ۱۹۶۴ مطرح شد [۳۵]. در رابطه با حل دستگاه‌های خطی تمام بازه‌ای، آلفلد^{۱۸} و مایر^{۱۹} [۵] برای کراندار کردن جواب‌های دستگاه‌های خطی تمام بازه‌ای با ماتریس ضرایب متقارن، روش مشهور چولسکی^{۲۰} را بکار گرفتند. همچنین آنها یک معیار جدید را برای شدنی بودن روش چولسکی در [۶] ارائه دادند. همچنین آنها در سال ۲۰۰۰، شرح مفصلی از کاربردهای حساب بازه‌ای را ارائه دادند و نیز روش‌های مختلفی را برای حل دستگاه‌های خطی بازه‌ای مطرح کردند [۷]. پولیاک^{۲۱} و نازین^{۲۲} در سال ۲۰۰۴ [۳۷] روشی را برای بعضی از مدل‌های خاص دستگاه‌های خطی بازه‌ای مطرح کردند که در آن یک جواب بازه‌ای بهینه بدون استفاده از برنامه ریزی خطی به دست می‌آید. در سال ۲۰۰۵، فریرا^{۲۳} [۲۲]، روش مطرح شده در [۲۱] را برای به دست آوردن جواب‌های دستگاه‌های معادلات چند جمله‌ای بازه‌ای مورد استفاده قرار داد. همچنین بعضی از روش‌های مستقیم و تکراری برای حل دستگاه‌های خطی بازه‌ای در [۳۱] مطرح شده است. در سال ۲۰۰۹، گرالوف^{۲۴} [۲۵] روش حذفی گاوس بازه‌ای را برای حل دستگاه خطی بازه‌ای در نظر گرفت. اخیراً، الهویرنلو و همکارانش در [۱۰] و نیز قنبری و همکارانش در [۲۷] دو روش جدید را جهت به دست آوردن جواب‌های جبری برای دستگاه‌های خطی بازه‌ای مطرح کردند. روش‌های دیگری نیز در این زمینه وجود دارد که در [۳۳, ۳۶, ۳۸] یافت می‌شود.

^{۱۶}Oetteli

^{۱۷}Prager

^{۱۸}Alefeld

^{۱۹}Mayer

^{۲۰}Cholesky

^{۲۱}Polyak

^{۲۲}Nazin

^{۲۳}Ferreira

^{۲۴}Garloff

فصل دوم

دستگاه خطی شمول بازه‌ای

۱-۲ مقدمه

در این فصل، دسته ای از مسائل به نام «دستگاه خطی شمول بازه‌ای»^{۲۵} را تعریف کرده و اقدام به معرفی مجموعه جواب آن می‌کنیم. همچنین به بررسی ارتباط میان مجموعه جواب یک دستگاه خطی شمول بازه‌ای و جواب جبری یک دستگاه خطی بازه‌ای می‌پردازیم. در نهایت، با توجه به مباحث صورت گرفته در این فصل، یک روش عملی را برای به دست آوردن جواب‌های جبری یکتای دستگاه‌های خطی بازه‌ای ارائه می‌دهیم. خاطر نشان می‌کنیم که تمامی نتایج به دست آمده در این فصل از مرجع [۱۱] می‌باشد.

۲-۲ دستگاه خطی شمول بازه‌ای

تعریف ۱-۲-۲: دستگاه خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \in [b_1], \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \in [b_2], \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \in [b_n], \end{cases} \quad (1-2-2)$$

که در آن ماتریس ضریب $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک ماتریس حقیقی-مقدار و $[b_i]$ ها اعداد بازه‌ای هستند را یک دستگاه خطی شمول بازه‌ای می‌نامیم.

فرم ماتریسی دستگاه (۱-۲-۲) به صورت زیر می‌باشد:

$$Ax \in [b],$$

که در آن بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ یک بردار حقیقی و بردار $[b] = ([b_1], [b_2], \dots, [b_n])^T$ یک بردار بازه‌ای می‌باشند.

تعریف ۲-۲-۲: مجموعه جواب^{۲۶} دستگاه خطی شمول بازه‌ای (۱-۲-۲) را با نماد $\mathcal{SS}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{SS} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \in [b_i]; i = 1, 2, \dots, n \}. \quad (2-2-2)$$

نکته ۱-۲-۲: از تعریف ۲-۲-۲ و نتیجه ۱-۶-۱، به راحتی می‌توان نشان داد که: $\Sigma = \mathcal{SS}$.

^{۲۵}Interval inclusion linear system

^{۲۶}Solution set

لم ۱-۲-۲: هرگاه در دستگاه خطی شمول بازه‌ای (۱-۲-۲) ماتریس ضریب A نامنفرد باشد، آنگاه $\mathcal{SS} \neq \emptyset$.

اثبات. برای $i = 1, 2, \dots, n$ را در بازه‌ی $[b_i]$ به دلخواه انتخاب می‌کنیم. با توجه به نامنفرد بودن ماتریس A بردار حقیقی $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ وجود دارد به طوری که $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$ در نتیجه $x \in \mathcal{SS}$. ■

نکته ۲-۲-۲: شرط نامنفرد بودن A برای ناتهی بودن $\mathcal{SS}$ یک شرط کافی می‌باشد، اما لازم نیست. برای مثال، دستگاه خطی شمول بازه‌ای 2×2 زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} 2x_1 + 12x_2 \in [8, 16], \\ x_1 + 6x_2 \in [1, 6]. \end{cases}$$

در این مورد، مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ برابر است با:

$$\mathcal{SS} = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x_1 + 6x_2 \leq 6\}.$$

واضح است که $\mathcal{SS} \neq \emptyset$ ، در حالی که A منفرد است.

۳-۲ روابط بین مجموعه جواب‌ها

در این قسمت، رابطه بین جواب جبری دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) و مجموعه جواب دستگاه خطی شمول بازه‌ای (۱-۲-۲) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۱-۳-۲: فرض کنید که $[x_A] = ([x_{1A}], [x_{2A}], \dots, [x_{nA}])^T$ جواب جبری دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) باشد. مجموعه‌ی $\mathcal{X}_A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{X}_A = \prod_{i=1}^n [x_{iA}] = \prod_{i=1}^n [\underline{x_{iA}}, \overline{x_{iA}}]. \quad (۱-۳-۲)$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathcal{X}_A \subseteq \mathcal{SS}.$$

همچنین هرگاه ماتریس A قطری و نامنفرد باشد، آنگاه: $\mathcal{X}_A = \mathcal{SS}$.

اثبات. با توجه به اینکه بردار $[x_A]$ جواب جبری دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) می‌باشد، لذا

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [x_{jA}] = [b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (۲-۳-۲)$$

یا به عبارتی دیگر

$$\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j : x_j \in [x_{jA}], j = 1, 2, \dots, n\} = [\underline{b_i}, \overline{b_i}], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

حال فرض می‌کنیم که $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{X}_A$. در این صورت برای $j = 1, 2, \dots, n$ خواهیم داشت $\alpha_j \in [x_{jA}]$ و لذا از معادله فوق داریم:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \in [\underline{b}_i, \overline{b}_i] = [b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

لذا با توجه به تعریف مجموعه‌ی $\mathcal{SS}$ ، نتیجه خواهیم گرفت $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{SS}$ و بنابراین:

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{SS}.$$

اکنون فرض می‌کنیم که ماتریس A قطری و نامنفرد باشد. در این صورت از معادله‌ی (۲-۳-۲) داریم:

$$a_{ij} [x_j] = [b_i], \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

یا به عبارتی دیگر

$$[x_j] = \frac{1}{a_{ii}} [b_i] = \frac{1}{a_{ii}} [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

و در نتیجه

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_{ii}} [\underline{b}_i, \overline{b}_i].$$

از طرف دیگر، از معادله‌ی (۲-۲-۲) داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{SS} &= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n : a_{ii} x_i \in [b_i]; \quad i=1, 2, \dots, n \} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n : x_i \in \frac{1}{a_{ii}} [\underline{b}_i, \overline{b}_i]; \quad i=1, 2, \dots, n \right\} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_{ii}} [\underline{b}_i, \overline{b}_i]. \end{aligned}$$

بنابراین، اثبات تمام است. ■

در ادامه مثالی را در ارتباط با قضیه‌ی ۱-۳-۲ ارائه می‌دهیم.

مثال ۱-۳-۲: دستگاه خطی بازه‌ای 2×2

$$\begin{cases} [x_1] + 2[x_2] = [-2, 5], \\ [x_1] - [x_2] = [-2, 2], \end{cases} \quad (۳-۳-۲)$$

و دستگاه خطی شمول بازه‌ای 2×2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \in [-2, 5], \\ x_1 - x_2 \in [-2, 2], \end{cases} \quad (۴-۳-۲)$$

را در نظر بگیرید.

جواب جبری دستگاه (۳-۳-۲) برابر است با:

$$[x] = ([x_1], [x_2])^T = ([0, 1], [-1, 2])^T,$$

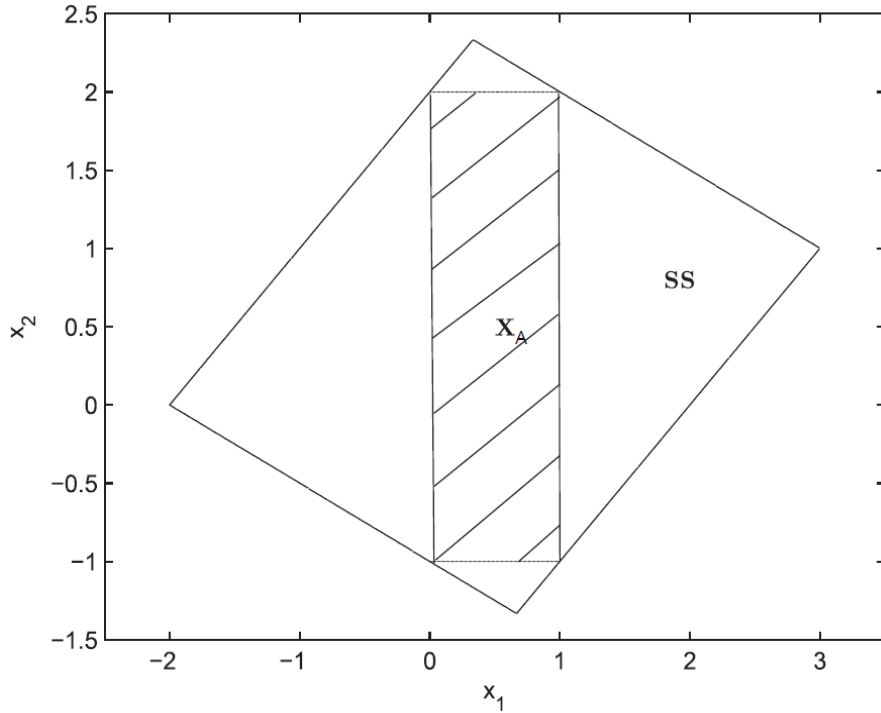
و در نتیجه

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = [0, 1] \times [-1, 2].$$

همچنین مجموعه جواب دستگاه شمول (۴-۳-۲) برابر است با:

$$\mathcal{SS} = \{ (x_1, x_2)^T \in R^2 : -2 \leq x_1 + 2x_2 \leq 5, \quad -2 \leq x_1 - x_2 \leq 2 \}.$$

با توجه به شکل ۱-۳-۲ به وضوح نتیجه می‌گیریم که: $\mathcal{X}_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{SS}$.



شکل ۲-۳-۱: نمایش نواحی $\mathcal{SS}$ و $\mathcal{X}_A$ ، برای دستگاه‌های (۲-۳-۳) و (۲-۳-۴).

حال فرض می‌کنیم که برای $i = 1, 2, \dots, n$ $z_i \in [b_i] = [\underline{b}_i, \overline{b}_i]$ با توجه به دستگاه خطی شمول بازه‌ای (۲-۲-۱)، دستگاه خطی حقیقی زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} a_{11} x_1^* + a_{12} x_2^* + \dots + a_{1n} x_n^* = z_1, \\ a_{21} x_1^* + a_{22} x_2^* + \dots + a_{2n} x_n^* = z_2, \\ \vdots \\ a_{n1} x_1^* + a_{n2} x_2^* + \dots + a_{nn} x_n^* = z_n. \end{cases} \quad (۲-۳-۵)$$

با فرض آن که ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ نامنفرد باشد و $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{D} = (d_{ij})_{n \times n}$ نتیجه خواهیم گرفت:

$$x_i^* = \sum_{j=1}^n d_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۲-۳-۶)$$

حال برای $i = 1, 2, \dots, n$ عدد بازه‌ای

$$[x_i^*] = \left\{ \sum_{j=1}^n d_{ij} z_j : z_j \in [b_j] = [\underline{b}_j, \overline{b}_j], \forall j = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (۲-۳-۷)$$

و مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Omega_i^+ = \{j : d_{ij} \geq 0, 1 \leq j \leq n\}, \quad \Omega_i^- = \{j : d_{ij} < 0, 1 \leq j \leq n\}. \quad (۲-۳-۸)$$

با استفاده از تعاریف (۲-۳-۷) و (۲-۳-۸) خواهیم داشت:

$$[x_i^*] = \sum_{j=1}^n d_{ij} [b_j] = \sum_{j=1}^n d_{ij} [\underline{b_j}, \overline{b_j}] = [\underline{x_i^*}, \overline{x_i^*}], \quad (9-3-2)$$

که در آن

$$\underline{x_i^*} = \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b_j} + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \overline{b_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10-3-2)$$

$$\overline{x_i^*} = \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \overline{b_j} + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \underline{b_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (11-3-2)$$

حال با استفاده از نمادگذاری‌های فوق، قضیه‌ی زیر را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲-۳-۲: فرض کنید ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد و $\mathcal{SS}$ مجموعه جواب دستگاه شمول (۱-۲-۲) باشد. همچنین فرض کنید که $[x_i^*]$ ، $1 \leq i \leq n$ ، اعداد بازه‌ای به دست آمده از معادلات (۷-۳-۲) تا (۱۱-۳-۲) باشند. در این صورت

$$\mathcal{SS} \subseteq \mathcal{X}^*,$$

که در آن

$$\mathcal{X}^* = \prod_{i=1}^n [x_i^*] = \prod_{i=1}^n [\underline{x_i^*}, \overline{x_i^*}].$$

همچنین هرگاه A یک ماتریس قطری (با اعضای قطری غیرصفر) باشد، آنگاه: $\mathcal{SS} = \mathcal{X}^*$.

اثبات. فرض کنید $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{SS}$. در این صورت از تعریف (۲-۲-۲) نتیجه می‌گیریم که برای $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \in [\underline{b_j}, \overline{b_j}],$$

و در نتیجه

$$\exists z_i \in [\underline{b_j}, \overline{b_j}]; \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j = z_i. \quad (12-3-2)$$

با قرار دادن $A^{-1} = D = (d_{ij})_{n \times n}$ از معادله‌ی (۱۲-۳-۲) داریم:

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} z_j, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

حال با توجه به معادله‌ی (۷-۳-۲) نتیجه می‌گیریم که: $\alpha_i \in [x_i^*]$ ، $1 \leq i \leq n$ و در نتیجه

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{X}^*.$$

این امر، ثابت می‌کند که: $\mathcal{SS} \subseteq \mathcal{X}^*$.

حال فرض کنید که A یک ماتریس قطری باشد. واضح است که در این صورت ماتریس D نیز یک

ماتریس قطری است و برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $d_{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$. از معادله‌ی (۷-۳-۲) داریم:

$$\begin{aligned} [x_i^*] &= \{d_{ii} z_j : z_i \in [b_i]\} \\ &= \left\{ \frac{1}{a_{ii}} z_j : z_i \in [\underline{b_j}, \overline{b_j}] \right\} \\ &= \frac{1}{a_{ii}} [\underline{b_j}, \overline{b_j}], \end{aligned}$$

و در نتیجه

$$\mathcal{X}^* = \prod_{i=1}^n \frac{1}{a_{ii}} [b_j, \overline{b_j}].$$

با توجه به قسمت دوم قضیه ۲-۳-۱، اثبات تمام است. ■

در ادامه مثالی را در ارتباط با قضیه ۲-۳-۲ ارائه می‌دهیم.

مثال ۲-۳-۲: با توجه دستگاه‌های خطی (۳-۳-۲) و (۴-۳-۲) از مثال ۱-۳-۲، دستگاه خطی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} x_1^* + 2x_2^* = z_1, \\ x_1^* - x_2^* = z_2. \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق، به دست می‌آوریم:

$$x_1^* = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_2), \quad x_2^* = \frac{1}{3}(z_1 - z_2),$$

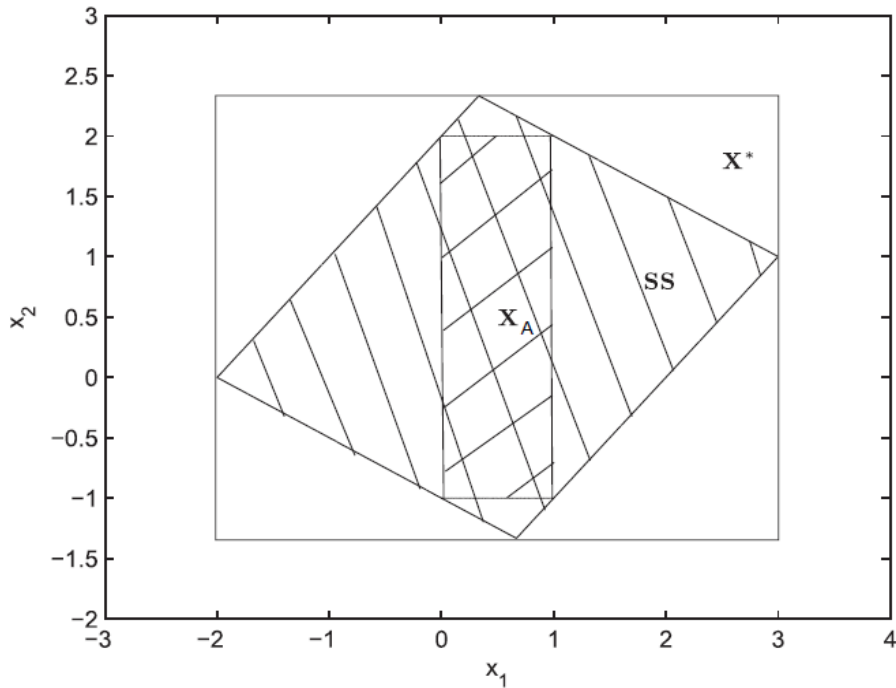
که در آن $z_1 \in [-2, 5]$ و $z_2 \in [-2, 2]$ از معادله‌ی (۴-۳-۲) داریم:

$$x_1^* = \frac{1}{3}([-2, 5] + 2[-2, 2]) = [-2, 3], \quad x_2^* = \frac{1}{3}([-2, 5] - [-2, 2]) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right].$$

بنابراین

$$\mathcal{X}^* = [-2, 3] \times \left[-\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right].$$

با توجه به شکل ۲-۳-۲ به وضوح نتیجه می‌گیریم که: $\mathcal{SS} \subseteq \mathcal{X}^*$.



شکل ۲-۳-۲: نمایش نواحی $\mathcal{SS}$ ، $\mathcal{X}^*$ و $\mathcal{X}_A$ ، برای دستگاه‌های (۳-۳-۲) و (۴-۳-۲).

نکته ۱-۳-۲: براساس قضایای ۱-۳-۲ و ۲-۳-۲ هرگاه A یک ماتریس قطری باشد، آنگاه

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} = \mathcal{SS} = \mathcal{X}^*,$$

و در غیر این صورت

$$\mathcal{X}_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{SS} \subset \mathcal{X}^*.$$

برای اهداف بعدی، لم زیر را ارائه می‌دهیم.

لم ۱-۳-۲: برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، داریم:

$$\underline{b}_i - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^* - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_j^* = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x}_j^* + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j^* - \overline{b}_i,$$

که در آن $\underline{x}_j^*$ و $\overline{x}_j^*$ توسط معادلات (۱۰-۳-۲) و (۱۱-۳-۲) به دست می‌آیند.

اثبات. با توجه به اینکه در معادلات (۱۰-۳-۲) و (۱۱-۳-۲)، $A^{-1} = D = (d_{ij})_{n \times n}$ ، بنابراین

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} d_{jk}) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \quad i = k = 1, 2, \dots, n.$$

از طرف دیگر، براساس معادلات (۱۰-۳-۲) و (۱۱-۳-۲) و نکته ۷-۶-۱، برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^* + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_j^* &= \left[\sum_{j \in \Gamma_i^+} \sum_{k \in \Omega_i^+} a_{ij} d_{jk} \underline{b}_k \right] + \left[\sum_{j \in \Gamma_i^+} \sum_{k \in \Omega_i^-} a_{ij} d_{jk} \overline{b}_k \right] \\ &\quad + \left[\sum_{j \in \Gamma_i^-} \sum_{k \in \Omega_i^+} a_{ij} d_{jk} \overline{b}_k \right] + \left[\sum_{j \in \Gamma_i^-} \sum_{k \in \Omega_i^-} a_{ij} d_{jk} \underline{b}_k \right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \Omega_i^+} a_{ij} d_{jk} \underline{b}_k - \sum_{j \in \Gamma_i^-} \sum_{k \in \Omega_i^+} a_{ij} d_{jk} \underline{b}_k \right] \\ &\quad + \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \Omega_i^-} a_{ij} d_{jk} \overline{b}_k - \sum_{j \in \Gamma_i^+} \sum_{k \in \Omega_i^-} a_{ij} d_{jk} \overline{b}_k \right] \\ &\quad + \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \Omega_i^+} a_{ij} d_{jk} \overline{b}_k - \sum_{j \in \Gamma_i^+} \sum_{k \in \Omega_i^+} a_{ij} d_{jk} \overline{b}_k \right] \\ &\quad + \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k \in \Omega_i^-} a_{ij} d_{jk} \underline{b}_k - \sum_{j \in \Gamma_i^-} \sum_{k \in \Omega_i^-} a_{ij} d_{jk} \underline{b}_k \right] \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} d_{jk} \underline{b}_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} d_{jk} \overline{b}_k \\ &\quad - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \left(\sum_{k \in \Omega_i^+} d_{jk} \overline{b}_k + \sum_{k \in \Omega_i^-} d_{jk} \underline{b}_k \right) \\ &\quad - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \left(\sum_{k \in \Omega_i^+} d_{jk} \underline{b}_k + \sum_{k \in \Omega_i^-} d_{jk} \overline{b}_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \underline{b}_k + \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \overline{b}_k - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x}_j^* - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j^* \\ &= \underline{b}_k + \overline{b}_k - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x}_j^* - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j^*. \end{aligned}$$

بدین ترتیب به راحتی حکم را نتیجه می‌گیریم. ■

۲-۴ ارائه‌ی یک روش

در این قسمت، می خواهیم چند شرط لازم و کافی جدید در مورد وجود و یکتایی جواب های جبری برای دستگاه های خطی بازه ای معرفی نماییم، که بررسی آن ها منتج به ارائه ی یک روش برای به دست آوردن این گونه جواب ها می شود.

تعریف ۲-۴-۱: فرض کنید $\mathcal{A}$ یک مستطیل n بعدی باشد، یعنی $\mathcal{A} = \prod_{i=1}^n [\underline{a}_i, \overline{a}_i]$ که در آن $[a_i, \overline{a}_i]$ ، $1 \leq i \leq n$ ، بازه های بسته روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ هستند. نقطه ی $(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ یک نقطه ی رأسی^{۲۷} برای مستطیل n بعدی $\mathcal{A}$ نامیده می شود، هرگاه

$$x_i \in \{\underline{a}_i, \overline{a}_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

واضح است که مستطیل n بعدی $\mathcal{A}$ دارای 2^n نقطه ی رأسی است.

حال برای مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ تعریف زیر را ارائه می دهیم.

تعریف ۲-۴-۲: برای مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ دستگاه خطی شمول بازه ای (۲-۲-۱)، هر یک از مجموعه های

$$\begin{aligned} M_{1,i} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \underline{b}_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ M_{2,i} &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \overline{b}_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

را یک مرز^{۲۸} برای $\mathcal{SS}$ می نامیم. واضح است که $\mathcal{SS}$ دارای $2n$ مرز می باشد.

در قضیه ی زیر می خواهیم نشان دهیم که چه زیر مجموعه هایی از $\mathcal{SS}$ می توانند یک جواب جبری برای دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۳) باشند.

قضیه ۲-۴-۱: برای مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ دستگاه خطی شمول بازه ای (۲-۲-۱)، فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{SS}$ به طوری که در خاصیت های زیر صدق می کند:

$$(۱) \quad \mathcal{A} \text{ یک مستطیل } n \text{ بعدی در } \mathbb{R}^n \text{ باشد، یعنی } \mathcal{A} = \prod_{i=1}^n [\underline{a}_i, \overline{a}_i].$$

(۲) هر مرز $\mathcal{SS}$ حداقل شامل یک نقطه از $\mathcal{A}$ باشد، یعنی اگر $M_{j,i}$ یک مرز دلخواه برای $\mathcal{SS}$ باشد،

$$\text{آنگاه نقطه ی } (\alpha_1^{j,i}, \alpha_2^{j,i}, \dots, \alpha_n^{j,i})^T \in \mathcal{A} \text{ وجود داشته باشد به طوری که}$$

$$(\alpha_1^{j,i}, \alpha_2^{j,i}, \dots, \alpha_n^{j,i})^T \in M_{j,i} \text{ که در آن } j = 1, 2 \text{ و } i = 1, 2, \dots, n.$$

^{۲۷}Vertex point

^{۲۸}Boundary

در این صورت بردار بازه‌ای $[\mathbf{x}] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ که در آن $[x_i] = [\underline{a_i}, \overline{a_i}]$ یک جواب جبری برای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) می‌باشد.

اثبات. با توجه به تعریف جواب جبری، کافی است نشان دهیم که

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j] = [b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

می‌دانیم که

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j] = \{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j : x_j \in [x_j], j = 1, 2, \dots, n \}.$$

حال فرض کنید $\alpha \in \sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j]$. در این صورت $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{A}$ وجود خواهد داشت به طوری که $\alpha = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j$. از طرف دیگر، چون $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{SS}$ بنابراین $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{SS}$ و در نتیجه با توجه به تعریف ۲-۲-۲، $\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \in [b_i]$ یا به عبارت دیگر $\alpha \in [b_i]$ لذا نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j] \subseteq [b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۱-۴-۲)$$

اکنون فرض کنید $\alpha \in [b_i]$ در این حالت $\lambda \in [0, 1]$ وجود دارد به طوری که

$$\alpha = \underline{b_i} + \lambda (\overline{b_i} - \underline{b_i}).$$

از طرف دیگر، با توجه به خاصیت دوم قضیه، برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\begin{aligned} \exists (\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)^T \in \mathcal{A}; \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j^i &= \underline{b_i}, \\ \exists (\gamma_1^i, \gamma_2^i, \dots, \gamma_n^i)^T \in \mathcal{A}; \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j^i &= \overline{b_i}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j^i + \lambda \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j^i - \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j^i \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\beta_j^i + \lambda (\gamma_j^i - \beta_j^i) \right) \end{aligned}$$

چون $\beta_j^i + \lambda (\gamma_j^i - \beta_j^i) \in [x_j]$ بنابراین $\gamma_j^i, \beta_j^i \in [\underline{a_i}, \overline{a_i}] = [x_i]$ و در نتیجه

$$\alpha \in \{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j : x_j \in [x_j], j = 1, 2, \dots, n \} = \sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j].$$

بنابراین

$$[b_i] \subseteq \sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۲-۴-۲)$$

به وسیله‌ی معادلات (۱-۴-۲) و (۲-۴-۲) اثبات قضیه به پایان می‌رسد. ■

در قضیه‌ی زیر، یک شرط لازم و کافی برای جواب جبری بودن یک بردار بازه‌ای دلخواه را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲-۴-۲: بردار بازه‌ای دلخواه $[\mathbf{x}] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ یک جواب جبری برای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) است اگر و تنها اگر مجموعه‌ی $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^n [x_i]$ در خاصیت‌های زیر صدق کند:

(۱) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{SS}$ ، که در آن مجموعه جواب دستگاه خطی شمول بازه‌ای (۱-۲-۲) می‌باشد.

(۲) هر مرز دلخواه $\mathcal{SS}$ حداقل شامل یک نقطه‌ی رأسی $\mathcal{X}$ باشد.

اثبات. لزوم: ابتدا فرض کنید که بردار بازه‌ای دلخواه $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ یک جواب جبری برای دستگاه خطی بازه‌ای (۱-۶-۳) باشد. با توجه به قضیه‌ی ۱-۳-۲ داریم: $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{SS}$ و بنابراین خاصیت اول برقرار شد. از طرف دیگر، چون بردار بازه‌ای $[x]$ یک جواب جبری است، داریم:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [x_j] = [b_i], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

و یا به عبارتی

$$\{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j : x_j \in [x_j], j = 1, 2, \dots, n\} = [\underline{b}_i, \overline{b}_i], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین

$$\exists (\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_n^i)^T \in \mathcal{X}; \quad \underline{b}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۳-۴-۲)$$

برای اثبات قسمت لزوم، کافی است نشان دهیم که نقطه‌ی $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_n^i)^T$ یک نقطه‌ی رأسی برای $\mathcal{X}$ است، یعنی برای $j = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم: $\alpha_j^i = \underline{x}_j$ یا $\alpha_j^i = \overline{x}_j$. برای اثبات این موضوع از فرض خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $1 \leq k \leq n$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha_k^i \neq \underline{x}_k$ و $\alpha_k^i \neq \overline{x}_k$ ، یعنی $\underline{x}_k < \alpha_k^i < \overline{x}_k$. حال با توجه به اینکه برای $j \neq k$ و $1 \leq j \leq n$ $\underline{x}_j \leq \alpha_j^i \leq \overline{x}_j$ ، لذا نتیجه خواهیم گرفت:

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_j < \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j^i < \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x}_j + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j. \quad (۴-۴-۲)$$

بنابراین به وسیله‌ی نکته‌ی ۱-۶-۷ و معادلات (۳-۴-۲) و (۴-۴-۲) به دست می‌آوریم:

$$\underline{b}_i < \underline{b}_i < \overline{b}_i,$$

که این یک تناقض آشکار است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است، یعنی

نقطه‌ی $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_n^i)^T$ یک نقطه‌ی رأسی برای $\mathcal{X}$ است. به طور مشابه می‌توان نقطه‌ی رأسی دیگری

مانند $(\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)^T$ یافت به طوری که $\sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j^i = \overline{b}_i$. بنابراین نشان دادیم که هر مرز

دلخواه $\mathcal{SS}$ حداقل شامل یک نقطه‌ی رأسی $\mathcal{X}$ است. لذا اثبات قسمت لزوم قضیه به پایان رسید.

کفایت: اکنون فرض کنید که مجموعه‌ی $\mathcal{X}$ در خاصیت‌های ۱ و ۲ قضیه صدق کند. در این صورت به

راحتی می‌توان مشاهده کرد که مفروضات قضیه‌ی ۱-۴-۲ برقرار است و لذا به راحتی می‌توان براساس

قضیه ۱-۴-۲ نتیجه گرفت که بردار بازه‌ای $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ یک جواب جبری برای

دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) است. ■

نکته ۲-۴-۱: براساس قضایای ۱-۴-۲ و ۲-۴-۲ به راحتی می توان نتیجه گرفت که هرگاه مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ زیر مجموعه ای نداشته باشد به طوری که در خاصیت ۱ قضیه ۱-۴-۲ و خاصیت ۲ قضیه ۲-۴-۲ صدق کند، آنگاه دستگاه خطی بازه ای (۳-۶-۱) فاقد جواب جبری می باشد. همچنین هرگاه مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ دارای نامتناهی زیر مجموعه هایی باشد به طوری که در خاصیت ۱ قضیه ۱-۴-۲ و خاصیت ۲ قضیه ۲-۴-۲ صدق کنند، آنگاه دستگاه خطی بازه ای (۳-۶-۱) نیز دارای نامتناهی جواب جبری می باشد.

نکته ۲-۴-۲: قضایای ۱-۴-۲ و ۲-۴-۲ یک شرط لازم و کافی را برای وجود و یکتایی جواب جبری دستگاه خطی بازه ای (۳-۶-۱) به صورت زیر ارائه می دهد:

«دستگاه خطی بازه ای (۳-۶-۱) دارای جواب جبری یکتاست هرگاه مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ دارای دقیقاً یک زیر مجموعه باشد که در خاصیت ۱ قضیه ۱-۴-۲ و خاصیت ۲ قضیه ۲-۴-۲ صدق کند.»

در ادامه قضیه ای را مطرح می کنیم که یک شرط لازم و کافی دیگر برای وجود و یکتایی جواب جبری دستگاه خطی بازه ای (۳-۶-۱) به دست می دهد. همچنین از فرآیند اثبات این قضیه، روشی برای یافتن جواب جبری دستگاه خطی بازه ای (۳-۶-۱) به دست می آوریم.

قضیه ۳-۴-۲: فرض کنید $E = (e_{ij})_{n \times n} = |A|$ ، یعنی $e_{ij} = |a_{ij}|$ و بردار حقیقی $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$ جواب دستگاه حقیقی $E\Theta = W$ باشد که در آن $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ و

$$w_i = \underline{b}_i - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^* - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_j^*, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5-4-2)$$

که $\underline{x}_j^*$ و $\overline{x}_j^*$ به ترتیب توسط معادلات (۱۰-۳-۲) و (۱۱-۳-۲) به دست می آید. در این صورت دستگاه خطی بازه ای (۳-۶-۱) دارای جواب یکتاست اگر و تنها اگر ماتریس A به طور کامل نامنفرد باشد و

$$0 \leq \theta_i \leq \frac{\overline{x}_i^* - \underline{x}_i^*}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6-4-2)$$

اثبات. لزوم: ابتدا فرض کنید که ماتریس A به طور کامل نامنفرد باشد و شرط (۶-۴-۲) نیز برقرار باشد. تعریف می کنیم

$$[x_i] = [\underline{x}_i^* + \theta_i, \overline{x}_i^* - \theta_i], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7-4-2)$$

شرط (۶-۴-۲) خوش تعریفی معادله (۷-۴-۲) را تضمین می کند، یعنی $\underline{x}_i^* + \theta_i \leq \overline{x}_i^* - \theta_i$. همچنین نامنفی بودن θ_i ها باعث می شود که

$$[x_i] = [\underline{x}_i^* + \theta_i, \overline{x}_i^* - \theta_i] \subseteq [\underline{x}_i^*, \overline{x}_i^*] = [x_i^*], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (8-4-2)$$

بنابراین اگر قرار دهیم $\mathcal{X}^* = \prod_{i=1}^n [x_i^*]$ و $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^n [x_i] = \prod_{i=1}^n [\underline{x}_i^* + \theta_i, \overline{x}_i^* - \theta_i]$ آنگاه نتیجه می گیریم $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^*$. در ادامه نشان می دهیم که بردار تعریف شدهی $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ جواب جبری یکتای دستگاه خطی بازه ای (۱-۶-۳) است. براساس قضیه ۲-۴ کافی است نشان دهیم:

$$(۱) \mathcal{X} \subseteq \mathcal{SS}$$

(۲) هر مرز دلخواه $\mathcal{SS}$ حداقل شامل یک نقطه ی رأسی $\mathcal{X}$ باشد.

برای اثبات این دو خاصیت، فرض می کنیم که $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{X}$ در این صورت برای $j = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می گیریم که $\alpha_j \in [x_j] = [\underline{x}_j^* + \theta_j, \overline{x}_j^* - \theta_j]$ و بنابراین برای $i = 1, 2, \dots, n$ به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\underline{x}_j^* + \theta_j) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\overline{x}_j^* - \theta_j) &\leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \\ &\leq \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\overline{x}_j^* - \theta_j) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\underline{x}_j^* + \theta_j) \end{aligned} \quad (۹-۴-۲)$$

با توجه به اینکه $E = (e_{ij})_{n \times n} = |A|$ واضح است که

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \theta_j = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \theta_j - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \theta_j. \quad (۱۰-۴-۲)$$

حال با توجه به معادلات (۹-۴-۲) و (۱۰-۴-۲) نتیجه می گیریم:

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \theta_j + \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^* + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_j^* \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j, \quad (۱۱-۴-۲)$$

و

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \leq \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x}_j^* + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j^* - \sum_{j=1}^n e_{ij} \theta_j. \quad (۱۲-۴-۲)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرض قضیه، چون $E\Theta = W$ ، بنابراین برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \theta_j = w_i = \underline{b}_i - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^* - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_j^*, \quad (۱۳-۴-۲)$$

و همچنین با توجه به لم ۲-۳-۱، برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \theta_j = w_i = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \overline{x}_j^* + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j^* - \overline{b}_i. \quad (۱۴-۴-۲)$$

با جایگذاری معادله ی (۱۳-۴-۲) در معادله ی (۱۱-۴-۲) و نیز با جایگذاری معادله ی (۱۴-۴-۲) در معادله ی (۱۲-۴-۲) به دست خواهیم آورد:

$$\underline{b}_i \leq \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j \leq \overline{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین با توجه به تعریف مجموعه جواب $\mathcal{SS}$ نتیجه می گیریم که $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathcal{SS}$ و در

نتیجه $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{SS}$ بنابراین خاصیت اول ثابت شد. برای اثبات خاصیت دوم، فرض کنید $M_{1,i}$

$1 \leq i \leq n$ ، یک مرز دلخواه برای $\mathcal{SS}$ باشد. اثبات برای مرز $M_{2,i}$ به صورت مشابه می باشد. چون

بنابراین $E\Theta = W$ ، برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\sum_{j=1}^n e_{ij} \theta_j = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \theta_j - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \theta_j = \underline{b}_i - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^* - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \overline{x}_j^*,$$

بنابراین

$$\underline{b}_i = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\underline{x}_j^* + \theta_j) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\overline{x}_j^* - \theta_j).$$

حال تعریف می‌کنیم

$$\alpha_j^i = \begin{cases} \underline{x}_j^* + \theta_j, & a_{ij} \geq 0, \\ \overline{x}_j^* - \theta_j, & a_{ij} < 0, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم که نقطه $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_n^i)^T$ یک نقطه رأسی برای $\mathcal{DS}$ می‌باشد و نیز

$$\underline{b}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j^i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

یعنی آن که $(\alpha_1^i, \alpha_2^i, \dots, \alpha_n^i)^T \in M_{1,i}$ به طور مشابه می‌توانیم نقطه رأسی $(\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)^T$

بیابیم به طوری که $(\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)^T \in M_{2,i}$. بنابراین خاصیت دوم هم ثابت شد و در نتیجه بردار بازه‌ای $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ جواب جبری یکتای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) است. از طرف دیگر با توجه به اینکه ماتریس A به طور کامل نامنفرد می‌باشد، در می‌یابیم که ماتریس‌های A و $E = |A|$ نامنفرد می‌باشند و در نتیجه برای $\underline{x}_i^*, \overline{x}_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ یکتا هستند و بنابراین از معادله‌ی (۷-۴-۲) بردار بازه‌ای $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ را به صورت یکتا به دست می‌آوریم. بنابراین ثابت کردیم که بردار تعریف شده‌ی $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ جواب جبری یکتای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) است و اثبات قسمت لزوم به اتمام رسید.

کفایت : حال فرض می‌کنیم که بردار بازه‌ای $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ که در آن

$$[x_i] = [\underline{x}_i, \overline{x}_i], \text{ جواب جبری یکتای دستگاه خطی بازه‌ای (۳-۶-۱) باشد. آنگاه براساس لم ۱-۶-۱}$$

نتیجه می‌گیریم که ماتریس A به طور کامل نامنفرد است. از طرف دیگر چون ماتریس $E = |A|$ نامنفرد

می‌باشد، در این صورت دستگاه حقیقی $E\theta = W$ دارای جواب یکتای $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^T$

است. بنابراین کافی است تا نشان دهیم که θ_i ها در شرط (۶-۴-۲) صدق می‌کنند. با جایگذاری معادله‌ی

$$(۱۰-۴-۲) \text{ در معادلات (۱۳-۴-۲) و (۱۴-۴-۲) برای } i = 1, 2, \dots, n, \text{ به ترتیب داریم:}$$

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\underline{x}_j^* + \theta_j) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\overline{x}_j^* - \theta_j) = \underline{b}_i, \quad (۱۵-۴-۲)$$

و

$$\sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} (\overline{x}_j^* - \theta_j) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} (\underline{x}_j^* + \theta_j) = \overline{b}_i. \quad (۱۶-۴-۲)$$

چون برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\underline{b}_i \leq \overline{b}_i$ ، بنابراین از معادلات (۱۵-۴-۲) و (۱۶-۴-۲) نتیجه می‌گیریم

که

$$\underline{x}_i^* + \theta_i \leq \overline{x}_i^* - \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین

$$\theta_i \leq \frac{\bar{x}_i^* - x_i^*}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17-4-2)$$

اکنون با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم که برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\theta_i \geq 0$. فرض کنید

$$\exists k; 1 \leq k \leq n, \theta_k < 0,$$

و

$$\theta_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k.$$

در این صورت داریم

$$\begin{aligned} [x_k^*, \bar{x}_k^*] &\subset [x_k^* + \theta_k, \bar{x}_k^* - \theta_k], \\ [x_i^* + \theta_i, \bar{x}_i^* - \theta_i] &\subseteq [x_i^*, \bar{x}_i^*], \quad i = 1, 2, \dots, n, i \neq k. \end{aligned}$$

با جایگذاری $\mathcal{X}^* = \prod_{i=1}^n [x_i^*, \bar{x}_i^*]$ و $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^n [x_i^* + \theta_i, \bar{x}_i^* - \theta_i]$ نتیجه می

گیریم $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}^*$ ، که این یک تناقض می‌باشد. زیرا بردار بازه‌ای $[x] = ([x_1], [x_2], \dots, [x_n])^T$ یک

جواب جبری می‌باشد و با توجه به نکته‌ی ۲-۳-۱، باید داشته باشیم: $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{SS} \subseteq \mathcal{X}^*$. ■

براساس فرآیند اثبات قضیه‌ی ۲-۴-۳ و با فرض آنکه ماتریس A به طور کامل نامنفرد است، می‌توان یک الگوریتم برای به دست آوردن جواب جبری یکتای دستگاه خطی بازه‌ای (۱-۶-۳) ارائه داد. گام‌های این الگوریتم به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱: ابتدا دستگاه خطی $n \times n$ (۵-۳-۲) را تشکیل دهید و سپس حل نمایید.

گام ۲: با استفاده از معادلات (۷-۳-۲) تا (۱۱-۳-۲) برای $i = 1, 2, \dots, n$ عدد بازه‌ای $[x_i^*] = [\underline{x}_i^*, \bar{x}_i^*]$ را به دست بیاورید.

گام ۳: با استفاده از معادله‌ی (۵-۴-۲) بردار حقیقی $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ را محاسبه کنید.

گام ۴: دستگاه خطی $n \times n$ $E\Theta = W$ که در آن $E = |A|$ را حل کنید.

گام ۵: اگر شرط (۶-۴-۲) برقرار بود، آنگاه دستگاه خطی بازه‌ای مربوطه دارای جواب جبری یکتا بوده که به صورت معادله‌ی (۷-۴-۲) به دست می‌آید، در غیر این صورت دستگاه خطی بازه‌ای مربوطه دارای جواب جبری نیست.

باید توجه شود در حالتی که دستگاه بازه‌ای دارای جواب جبری نباشد، می‌توان به دنبال به دست آوردن یک جواب تقریبی برای آن باشیم که به طور تقریبی در آن صدق کند. البته این موضوع، مورد هدف این رساله نیست.

این فصل را با ارائه‌ی یک مثال عددی به پایان می‌رسانیم.

مثال ۲-۴-۱: دستگاه بازه‌ای 5×5 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} [x_1] + [x_2] - [x_3] + 2[x_4] - [x_5] = [3, 12], \\ -[x_1] + 2[x_2] + [x_3] - [x_4] + 3[x_5] = [-15, 1], \\ 5[x_1] - 2[x_2] - 3[x_3] + 4[x_4] + [x_5] = [1, 20], \\ [x_1] + [x_2] - [x_3] + [x_4] - [x_5] = [0, 8], \\ -3[x_1] - [x_2] + [x_3] + 3[x_4] + 6[x_5] = [-12, 15]. \end{cases} \quad (۲-۴-۱۸)$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که ماتریس A به طور کامل نامنفرد می‌باشد. با توجه به الگوریتم پیشنهادی، ابتدا دستگاه 5×5 زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_1^* + x_2^* - x_3^* + 2x_4^* - x_5^* = z_1, & z_1 \in [3, 12], \\ -x_1^* + 2x_2^* + x_3^* - x_4^* + 3x_5^* = z_2, & z_2 \in [-15, 1], \\ 5x_1^* - 2x_2^* - 3x_3^* + 4x_4^* + x_5^* = z_3, & z_3 \in [1, 20], \\ x_1^* + x_2^* - x_3^* + x_4^* - x_5^* = z_4, & z_4 \in [0, 8], \\ -3x_1^* - x_2^* + x_3^* + 3x_4^* + 6x_5^* = z_5. & z_5 \in [-12, 15]. \end{cases}$$

با حل دستگاه فوق به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{1}{74}(73z_1 + 25z_2 + 15z_3 - 115z_4 - 22z_5), \\ x_2^* &= \frac{1}{37}(10z_1 + 9z_2 - 2z_3 + 35z_4 - 2z_5), \\ x_3^* &= \frac{1}{74}(197z_1 + 33z_2 + 5z_3 - 285z_4), \\ x_4^* &= (z_1 - z_4), \\ x_5^* &= \frac{1}{37}(-15z_1 + 5z_2 + 3z_3 + 14z_4 + 3z_5). \end{aligned}$$

در نتیجه با استفاده از معادلات (۲-۳-۱۱) - (۲-۳-۷) داریم:

$$\begin{aligned} [x_1^*] &= [\underline{x}_1^*, \overline{x}_1^*] = \left[-\frac{1391}{74}, \frac{1465}{74}\right], \\ [x_2^*] &= [\underline{x}_2^*, \overline{x}_2^*] = \left[-\frac{175}{37}, \frac{175}{37}\right], \\ [x_3^*] &= [\underline{x}_3^*, \overline{x}_3^*] = \left[-\frac{2659}{74}, \frac{2881}{74}\right], \\ [x_4^*] &= [\underline{x}_4^*, \overline{x}_4^*] = [-5, 12], \\ [x_5^*] &= [\underline{x}_5^*, \overline{x}_5^*] = \left[-\frac{288}{37}, \frac{177}{37}\right]. \end{aligned}$$

حال با استفاده از (۲-۴-۵) بردار حقیقی $W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)^T$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
w_1 &= 3 - (\underline{x}_1^* + \underline{x}_2^* + 2\underline{x}_4^*) - (-\overline{x}_3^* - \overline{x}_5^*) = \frac{2969}{37}, \\
w_2 &= -15 - (2\underline{x}_2^* + \underline{x}_3^* + 3\underline{x}_5^*) - (-\overline{x}_1^* - \overline{x}_4^*) = \frac{3165}{37}, \\
w_3 &= 1 - (5\underline{x}_1^* + 4\underline{x}_4^* + \underline{x}_5^*) - (-2\overline{x}_2^* - 3\overline{x}_3^*) = \frac{9214}{37}, \\
w_4 &= 0 - (\underline{x}_1^* + \underline{x}_2^* + \underline{x}_4^*) - (-\overline{x}_3^* - \overline{x}_5^*) = \frac{2673}{37}, \\
w_5 &= -12 - (\underline{x}_3^* + 3\underline{x}_4^* + 6\underline{x}_5^*) - (-3\overline{x}_1^* - \overline{x}_2^*) = \frac{5541}{37}.
\end{aligned}$$

سرانجام با حل دستگاه حقیقی 5×5 , $E\Theta = W$ که در آن $E = |A|$ ، به دست می‌آوریم:

$$\Theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5)^T = \left(\frac{1391}{74}, \frac{138}{37}, \frac{2733}{74}, 8, \frac{177}{37} \right)^T.$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که بردار Θ در شرط (۲-۴-۶) صدق می‌کند، یعنی برای $i = 1, 2, 3, 4, 5$ داریم:

$$0 \leq \theta_i \leq \frac{\overline{x}_j^* - \underline{x}_j^*}{2}.$$

بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۲-۴-۳ و به وسیله‌ی معادله‌ی (۲-۴-۷)، می‌توانیم جواب جبری یکتای

دستگاه بازه‌ای (۲-۴-۱۸) را به صورت زیر ارائه دهیم:

$$\begin{aligned}
[x_1] &= \left[-\frac{1391}{74} + \frac{1391}{74}, \frac{1465}{74} - \frac{1391}{74} \right] = [0, 1], \\
[x_2] &= \left[-\frac{175}{37} + \frac{138}{37}, \frac{175}{37} - \frac{138}{37} \right] = [-1, 1], \\
[x_3] &= \left[-\frac{2659}{74} + \frac{2733}{74}, \frac{2881}{74} - \frac{2733}{74} \right] = [1, 2], \\
[x_4] &= [-5 + 8, 12 - 8] = [3, 4], \\
[x_5] &= \left[-\frac{288}{37} + \frac{177}{37}, \frac{177}{37} - \frac{177}{37} \right] = [-3, 0].
\end{aligned}$$

لازم به ذکر است که تمام محاسبات فوق با نرم‌افزار متلب صورت گرفته است.

فصل سوم

مقدمات فازی

مسائل دنیای واقعی به طور معمول ساختار پیچیده ای دارند که به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت در تعریف و درک آن ها است. برای مسائلی که پیچیدگی آنها کم و عدم قطعیت نیز ناچیز است می توان با استفاده از معادلات ریاضی ماهیت و رفتار سیستم را به طور دقیق مدل سازی و تحلیل کرد. اما برای مسائلی که پیچیدگی آنها کمی بیشتر است و عدم قطعیت نیز به طور نسبی زیاد است دیگر نمی توان تحلیل دقیق و قطعی از مسأله داشت. برای چنین مسائلی رویکرد نظریه ی فازی مطرح می شود. این نظریه راهکاری است که به وسیله آن می توان سیستم هایی پیچیده را که مدلسازی آنها با استفاده از ریاضیات و روش های مدل سازی کلاسیک^{۲۹} (غیرفازی) غیرممکن بوده و یا بسیار مشکل است، به آسانی و با انعطاف بسیار بیشتر، مدل سازی کرد. این نظریه که برای اولین بار توسط پرفسور لطفعلی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ [۴۱] مطرح گردید، توانست مقدمات مدل سازی اطلاعات نادقیق و استدلال تقریبی با معادله های ریاضی را فراهم کند که در نوع خود تحولی عظیم در ریاضیات و منطق کلاسیک (غیرفازی) است. نظریه فازی برای بیان و تشریح عدم قطعیت و عدم دقت در رویدادها به کار می رود که براساس منطق چند ارزشی بوجود آمده است. در جایی که پیچیدگی سیستم در حدی است که نمی توان با دقت و صراحت در مورد پارامترها، مشخصه ها و رفتار سیستم قضاوت کرد، مفهوم فازی جهت مدل سازی و تحلیل مطرح می شود. یک روش دیگر برای بیان عدم قطعیت با مدل ریاضی، نظریه احتمال است. در واقع، ماهیت عدم قطعیت با توجه به مسأله مورد بررسی می بایست توسط تحلیل گر مشخص شود، زیرا عدم اطمینان می تواند ناشی از «شانس (تصادفی بودن)»، «ابهام»، «کمبود دانش و آگاهی» یا از «عدم دقت» باشد. بنابراین امکان دارد عدم قطعیتی که در برخی پارامترهای یک مدل وجود دارد از نوع احتمالی نباشند.

نظریه فازی به بخش های مختلفی مانند ریاضیات فازی، منطق فازی، سیستم های فازی، تصمیم گیری فازی و هوش مصنوعی و رباتیک طبقه بندی می شود. ریاضیات فازی شامل مجموعه های فازی و عملیات ریاضی مرتبط با آنها است. در مجموعه های کلاسیک (غیرفازی)، حد و مرز مجموعه به طور دقیق و قطعی تعریف می شود. در مجموعه های کلاسیک، یک عنصر یا قطعاً عضو مجموعه است یا قطعاً عضو مجموعه نیست. لذا فرض اساسی در مجموعه های کلاسیک تعریف دقیق و قطعی حد و مرز مجموعه است و عضویت عناصر در مجموعه نیز دو حالت بیشتر ندارد. یک عنصر یا عضوی از مجموعه است یا نیست. اما در عمل موارد بسیاری وجود دارد که تعریف حد و مرز دقیق و قطعی برای مجموعه امکان پذیر نیست. به عنوان مثال برای مجموعه افراد چاق نمی توان حد و مرز مشخصی تعریف کرد، زیرا به طور دقیق نمی توان بر چاق بودن و یا نبودن یک شخص قضاوت کرد. لذا نیاز به مجموعه ای داریم که محدوده آن منعطف و به طور

^{۲۹}Classic

تقریبی (نادقیق) تعریف شود. به این نوع مجموعه ، مجموعه فازی گفته می شود. عضویت عناصر در مجموعه های فازی نیز با درجه عضویت که عددی بین صفر و یک است، بیان می شود.

در این فصل به معرفی مفاهیم و تعاریف ابتدایی ریاضیات فازی می پردازیم و سپس نظر خود را معطوف به دسته ی خاصی از مسائل فازی به نام «دستگاه های خطی فازی» می کنیم و به طرح چند نکته در این خصوص می پردازیم.

۲-۳ مجموعه ی فازی

تعریف ۱-۲-۳: [۴۲] فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد که اعضای آن در حالت کلی به صورت x نشان داده شوند. مجموعه ی جفت مرتب های

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) : x \in X\},$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ را مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ در X می نامیم.

در تعریف ۱-۲-۳، تابع $\mu_{\tilde{A}}$ را تابع عضویت^{۳۱} مجموعه ی فازی $\tilde{A}$ می نامیم که به هر $x \in X$ عددی در بازه ی $[0, 1]$ با نماد $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ، به عنوان درجه ی تعلق یا درجه ی عضویت x در مجموعه ی $\tilde{A}$ نسبت می دهد. هر چه مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نزدیکتر باشد، به معنای تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نیز هر چه مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد صفر نزدیکتر باشد، به معنای تعلق کمتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است.

همچنین واضح است که هر زیر مجموعه ی کلاسیک (غیر فازی) از مجموعه ی مرجع X ، می تواند به عنوان یک مجموعه ی فازی تلقی شود. زیرا تنها کافی است تابع عضویت را تابع مشخصه ی آن انتخاب کنیم.

قرارداد ۱-۲-۳: مجموعه ی همه ی مجموعه های فازی در X را با $\mathbb{F}(X)$ نشان می دهیم. همچنین در سرتاسر این رساله برای نشان دادن مجموعه های فازی از نماد $\sim$ در بالای نام مجموعه ها استفاده می کنیم، مانند $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و به همین ترتیب.

^{۳۱}Fuzzy set
^{۳۲}Membership function

تعریف ۲-۲-۳: [۴۲] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی دلخواهی در X باشد. در این صورت تکیه گاه^{۳۲} مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{supp}(\tilde{A}) = \overline{\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}.$$

تعریف ۳-۲-۳: [۴۲] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی دلخواهی در X باشد. در این صورت ارتفاع^{۳۳} مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(\tilde{A}) = \sup \{\mu_{\tilde{A}}(x) : x \in X\}.$$

همچنین هرگاه $h(\tilde{A}) = 1$ ، آنگاه می‌گوییم مجموعه فازی $\tilde{A}$ نرمال^{۳۴} است و در غیر این صورت می‌گوییم زیرنرمال^{۳۵} است. واضح است که اگر $0 < h(\tilde{A}) < 1$ ، آنگاه می‌توانیم با تعریف مجدد تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت $\frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{h(\tilde{A})}$ آنرا تبدیل به یک مجموعه‌ی فازی نرمال نماییم.

تعریف ۴-۲-۳: [۴۲] مجموعه‌ی $\tilde{A}$ را مجموعه‌ی فازی تهی^{۳۶} می‌نامیم، اگر برای $x \in X$ داشته باشیم

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = 0.$$

تعریف ۵-۲-۳: [۱۹] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه‌های فازی دلخواهی در X باشند. گوییم $\tilde{A}$ زیر مجموعه‌ی $\tilde{B}$ است و می‌نویسیم $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ ، هرگاه

$$\forall x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x).$$

تعریف ۶-۲-۳: [۱۹] فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ مجموعه‌های فازی دلخواهی در X باشند. گوییم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ با هم برابرند و می‌نویسیم $\tilde{A} = \tilde{B}$ ، هرگاه $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ و $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$. یا به عبارتی دیگر

$$\forall x \in X \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x).$$

در ادامه، برای مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ در X ، مجموعه‌های کلاسیک (غیرفازی) به نام $\mathcal{F}$ -برش‌ها را معرفی می‌کنیم. این مجموعه‌ها نقش بسیار مهمی را در مطالعه‌ی نظریه مجموعه‌ی فازی ایفا می‌کنند، زیرا هر

^{۳۲}Support

^{۳۳}Height

^{۳۴}Normal

^{۳۵}Subnormal

^{۳۶}Empty fuzzy set

مجموعه‌ی فازی دلخواه مانند $\tilde{A}$ را می‌توان به صورت یکتا توسط یک خانواده از چنین مجموعه‌هایی مشخص نمود. همچنین یک کاربرد دیگر از این مجموعه‌ها، در مطالعه‌ی حساب فازی^{۳۷} می‌باشد که در بخش‌های بعدی به صورت مفصل شرح داده خواهد شد.

تعریف ۷-۲-۳: [۱۹] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ی فازی دلخواهی در X باشد و $r \in [0,1]$ در این صورت r -برش‌های مجموعه فازی $\tilde{A}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\tilde{A}]_r = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\}, \quad r \in (0,1],$$

و برای $r = 0$ نیز تعریف می‌کنیم

$$[\tilde{A}]_0 = \text{supp}(\tilde{A}) = \overline{\{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}.$$

نکته ۱-۲-۳: فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X باشد، به راحتی می‌توان نشان داد:

(الف) اگر $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ ، آنگاه داریم $[\tilde{A}]_{r_2} \subseteq [\tilde{A}]_{r_1}$.

(ب) اگر $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله‌ی صعودی (نازولی) و همگرا به r در بازه‌ی $[0,1]$ باشد، آنگاه داریم

$$[\tilde{A}]_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} [\tilde{A}]_{r_k}.$$

در ادامه می‌خواهیم مفهوم «تحدب»^{۳۸} را برای مجموعه‌های فازی تعمیم دهیم. همانطور که بعداً مشاهده خواهیم کرد این مفهوم کاربرد مهمی در تعریف اعداد فازی و حساب فازی خواهد داشت. ابتدا تعریف «تحدب» را روی مجموعه‌های کلاسیک (غیرفازی) ارائه می‌دهیم.

تعریف ۸-۲-۳: مجموعه کلاسیک (غیرفازی) A از X را محدب^{۳۹} گوئیم هرگاه برای $x_1, x_2 \in A$ و هر

$$\lambda \in [0,1] \text{ داشته باشیم: } \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$$

تحدب برای مجموعه‌های فازی، براساس تحدب تمام r -برش‌های آن، که مجموعه‌هایی کلاسیک (غیرفازی) می‌باشند، به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۹-۲-۳: [۴۲] فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی در X باشد. آنگاه $\tilde{A}$ را یک مجموعه فازی محدب می‌نامیم هرگاه برای $r \in [0,1]$ $[\tilde{A}]_r$ مجموعه‌ای محدب در X باشد.

^{۳۷}Fuzzy arithmetic

^{۳۸}Convexity

^{۳۹}Convex

قضیه ۱-۲-۳: $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب در X است اگر و تنها اگر

$$\forall x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1] \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}.$$

اثبات. لزوم: فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب در X باشد و $x_1, x_2 \in X$ به طوری که

$$r = \mu_{\tilde{A}}(x_1) \leq \mu_{\tilde{A}}(x_2).$$

بنابراین خواهیم داشت $x_1, x_2 \in [\tilde{A}]_r$ و نیز با توجه به تحدب $\tilde{A}$ برای $\lambda \in [0,1]$ نتیجه خواهیم

گرفت $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in [\tilde{A}]_r$ که این امر ایجاب می کند که

$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq r = \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}.$$

کفایت: حال فرض کنید که تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{A}$ در نامساوی قضیه صدق کند. فرض می کنیم

$x_1 \in X$ و $r = \mu_{\tilde{A}}(x_1)$. در این صورت نتیجه می گیریم که $x_1 \in [\tilde{A}]_r$. همچنین واضح است که

برای $x_2 \in [\tilde{A}]_r$ خواهیم داشت $\mu_{\tilde{A}}(x_1) = r \leq \mu_{\tilde{A}}(x_2)$

بنابراین با توجه به فرض، نتیجه خواهیم گرفت

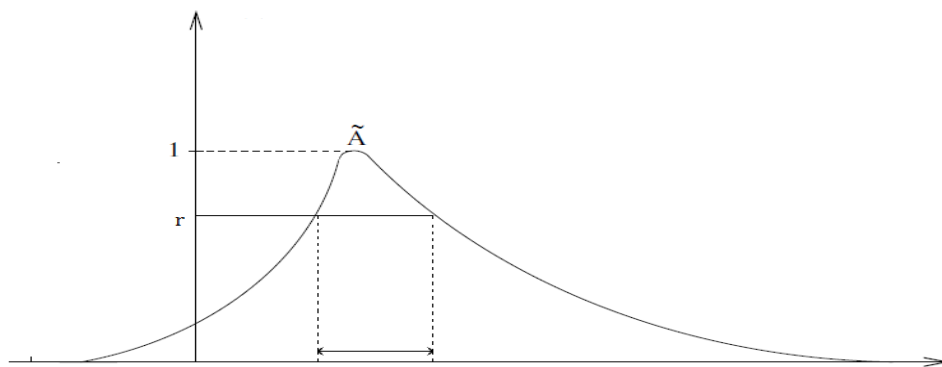
$$\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} = \mu_{\tilde{A}}(x_1) = r.$$

این یعنی آن که $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in [\tilde{A}]_r$. این امر محدب بودن $[\tilde{A}]_r$ را موجب می شود. با توجه

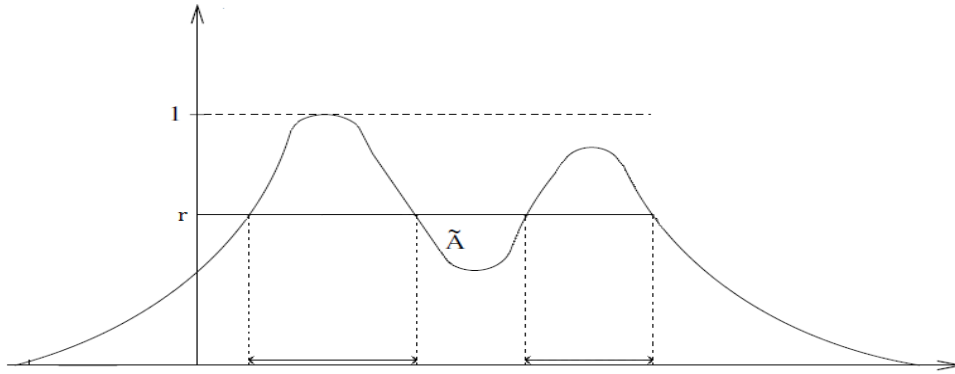
به دلخواه بودن x_1 و در نتیجه r ، تحدب $\tilde{A}$ را نتیجه می گیریم. ■

برای درک بهتر از مجموعه های فازی محدب و غیر محدب، در شکل های ۱-۲-۳ و ۲-۲-۳ به ترتیب یک

مجموعه ی فازی محدب و یک مجموعه ی فازی غیر محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را ارائه داده ایم.



شکل ۱-۲-۳: یک مجموعه فازی محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$.



شکل ۳-۲-۲: یک مجموعه فازی غیرمحدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$.

یکی از پایه ای ترین مفاهیم در نظریه مجموعه فازی که می تواند برای تعمیم مفاهیم ریاضیات کلاسیک (غیرفازی) به ریاضیات فازی مورد استفاده قرار بگیرد، «اصل گسترش»^{۴۰} می باشد. این مفهوم اولین بار توسط عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار در سال ۱۹۶۵ [۴۱] ارائه شد.

تعریف ۳-۲-۱۰: [۴۲] فرض کنید X حاصل ضرب کارترین^{۴۱} از مجموعه های مرجع $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشد، یعنی $X = \prod_{i=1}^n X_i$ و نیز $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ به ترتیب مجموعه های فازی در $X_1, X_2, \dots, X_n$ باشند. همچنین فرض کنید که f نگاشتی از X به مجموعه ی مرجع Y باشد و $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ در این صورت اصل گسترش به ما اجازه می دهد تا مجموعه فازی $\tilde{B}$ در Y را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) : y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X\},$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \{\min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{A}_i}(x_i)\}\}, & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

و f^{-1} معکوس نگاشت f می باشد.

از تعریف فوق نتیجه می گیریم که هرگاه $n = 1$ ، آنگاه اصل گسترش به صورت زیر تقلیل می یابد:

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) : y = f(x), x \in X\},$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_{\tilde{A}}(x)\}, & \text{if } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{Otherwise.} \end{cases}$$

^{۴۰}Extension principle

^{۴۱}Cartesian product

۳-۳ اعداد فازی

تعریف ۳-۳-۱: [۱۹] مجموعه فازی $\tilde{u}$ روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی گوئیم هرگاه

(الف) $\tilde{u}$ نرمال باشد،

(ب) $\tilde{u}$ مجموعه‌ی فازی محدب باشد،

(ج) $\mu_{\tilde{u}}$ نیمه پیوسته بالایی^{۴۲} باشد، (تابع حقیقی f را نیمه پیوسته بالایی می‌نامیم، هرگاه برای $\alpha \in \mathbb{R}$ مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$ مجموعه‌ای باز باشد)،

(د) $\text{supp}(\tilde{u})$ مجموعه‌ای فشرده در $\mathbb{R}$ باشد.

در این رساله، مجموعه‌ی همه‌ی اعداد فازی را با $\mathbb{E}$ نشان می‌دهیم. واضح است که $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{E}$ زیرا مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ را می‌توان به صورت زیر تفسیر کرد:

$$\mathbb{R} = \{x_{\{x\}} : x \text{ یک عدد حقیقی دلخواه باشد}\},$$

که در آن $x_{\{x\}}$ همان تابع مشخصه‌ی عنصر x است. با توجه به تعریف ۳-۲-۷، برای $0 < r \leq 1$ ، r -برش‌های عدد فازی $\tilde{u}$ را به صورت $[\tilde{u}]_r = \{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{u}}(x) \geq r\}$ و همچنین برای $r = 0$ به صورت $[\tilde{u}]_0 = \text{supp}(\tilde{u}) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{u}}(x) > 0\}}$ تعریف می‌کنیم. با استفاده از خاصیت‌های ج و د تعریف ۳-۳-۱ به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که برای $r \in [0, 1]$ ، $[\tilde{u}]_r$ مجموعه‌هایی بسته و کراندار روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ می‌باشند. همچنین شرط ب ایجاب می‌کند که برای $r \in [0, 1]$ ، $[\tilde{u}]_r$ مجموعه‌هایی محدب روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ هستند. این دو امر، به طور واضح مشخص می‌سازند که برای $r \in [0, 1]$ ، $[\tilde{u}]_r$ تشکیل بازه‌های بسته و کراندار روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ می‌دهند [۴۰]. در این رساله، برای $r \in [0, 1]$ ، r -برش‌های عدد فازی $\tilde{u}$ را به صورت

$$[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)],$$

نشان می‌دهیم.

لم زیر به این سوال پاسخ می‌دهد که «تحت چه شرایطی یک خانواده از مجموعه‌های ناتهی در $\mathbb{R}$ ، تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد؟».

لم ۳-۳-۱: [۲۸] خانواده‌ای دلخواه $\{u_r : 0 \leq r \leq 1\}$ از مجموعه‌های ناتهی در $\mathbb{R}$ ، تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد، اگر و تنها اگر همه‌ی شرایط زیر برقرار باشند:

^{۴۲}Upper semi-continuous

(۱) برای $r \in [0, 1]$ ، u_r ها بازه‌هایی بسته و کراندار به صورت $u_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)]$ روی $\mathbb{R}$ باشند.

(۲) اگر $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ ، آنگاه $u_{r_2} \subseteq u_{r_1}$.

(۳) هرگاه $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ دنباله ای صعودی (غیرنزولی) و همگرا به r در بازه $[0, 1]$ باشد، آنگاه

$$[\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{u}(r_k), \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}(r_k)] = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)].$$

نکته ۳-۳-۱: [۱۱] از لم ۳-۳-۱، نتیجه می گیریم که اگر خانواده‌ی بازه‌های بسته‌ی

$$\{[\underline{u}(r), \bar{u}(r)] : 0 \leq r \leq 1\},$$

تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را بدهد، آنگاه:

(الف) شرط ۱ ایجاب می‌کند که توابع $\underline{u}$ و $\bar{u}$ ، توابعی کراندار نسبت به r روی بازه $[0, 1]$ می

باشند و برای $r \in [0, 1]$ ، خواهیم داشت $\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r)$.

(ب) شرط ۲ ایجاب می‌کند که توابع $\underline{u}$ و $\bar{u}$ ، به ترتیب توابعی صعودی (نازولی) و نزولی (ناصعودی)

نسبت به r روی بازه $[0, 1]$ باشند.

(ج) شرط ۳ ایجاب می‌کند که توابع $\underline{u}$ و $\bar{u}$ ، توابعی از چپ پیوسته نسبت به r روی بازه $[0, 1]$ می

باشند.

با توجه به نکته‌ی ۳-۳-۱ می‌توانیم تعریف دیگری از عدد فازی که به آن فرم پارامتری^۳ عدد فازی می‌گوییم، ارائه دهیم.

تعریف ۳-۳-۲: [۲۴] یک عدد فازی $\tilde{u}$ به فرم پارامتری، یک زوج مرتب $(\underline{u}(r), \bar{u}(r))$ ، از توابع

$\underline{u}(r)$ و $\bar{u}(r)$ ، $0 \leq r \leq 1$ است، که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\underline{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و صعودی (غیرنزولی) باشد،

(۲) $\bar{u}(r)$ یک تابع کراندار، از چپ پیوسته و نزولی (غیرصعودی) باشد،

$$\underline{u}(r) \leq \bar{u}(r), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (۳)$$

با توجه به تعاریف ۳-۲-۵ و ۳-۲-۶ می‌توان تعاریف زیر را ارائه داد.

^۳Parametric form

تعریف ۳-۳-۳: فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ دو عدد فازی دلخواهی باشند. گوییم $\tilde{u}$ زیر مجموعه‌ی $\tilde{v}$ است و می‌نویسیم $\tilde{u} \subseteq \tilde{v}$ ، هرگاه برای $r \in [0, 1]$ داشته باشیم $[\tilde{u}]_r \subseteq [\tilde{v}]_r$.

تعریف ۳-۳-۴: دو عدد فازی دلخواه $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ با هم برابرند و می‌نویسیم $\tilde{u} = \tilde{v}$ ، هرگاه برای $r \in [0, 1]$ داشته باشیم $[\tilde{u}]_r = [\tilde{v}]_r$.

در بیشتر مسائل، از یک دسته اعداد فازی خاص که آنها را اعداد فازی ذوزنقه‌ای^{۴۴} می‌نامیم، استفاده می‌کنیم. این اعداد به صورت زیر تعریف می‌شوند.

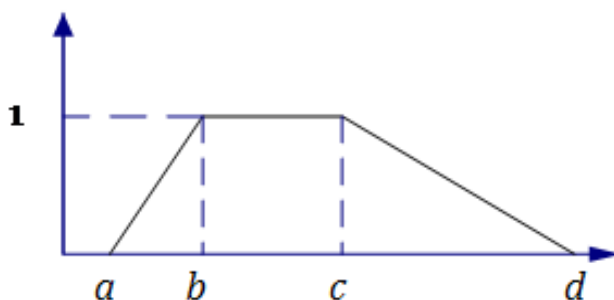
تعریف ۳-۳-۵: عدد فازی $\tilde{u}$ را ذوزنقه‌ای می‌نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0, & a < x, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d, \\ 0. & d < x, \end{cases}$$

که در آن a, b, c, d اعداد حقیقی هستند. معمولاً این نوع اعداد فازی را به صورت یک چهارتایی مرتب به فرم (a, b, c, d) نشان می‌دهیم. این عدد فازی در شکل ۳-۳-۱ رسم شده است.

نکته ۳-۳-۲: با توجه به تعریف r -برش یک عدد فازی، براحتی می‌توان r -برش‌های عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{u} = (a, b, c, d)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)] = [a + (b-a)r, d - (d-c)r], \quad r \in [0, 1].$$



شکل ۳-۳-۱: نمایش یک عدد فازی ذوزنقه‌ای.

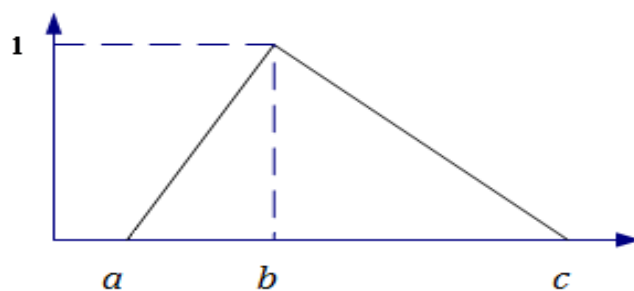
^{۴۴}Trapezoidal

یک حالت خاص از اعداد فازی دوزنقه ای، اعداد فازی مثلثی^{۴۵} هستند، در حقیقت هرگاه در عدد فازی دوزنقه ای $\tilde{u} = (a, b, c, d)$ داشته باشیم $b = c$ ، آنگاه عدد فازی $\tilde{u}$ تبدیل به یک عدد فازی مثلثی می شود. در حالت کلی یک عدد فازی مثلثی به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۳-۳-۶: عدد فازی $\tilde{u}$ را مثلثی می نامیم، هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{u}}(x) = \begin{cases} 0, & a < x, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{d-x}{d-c}, & b \leq x \leq c, \\ 0. & c < x, \end{cases}$$

که در آن a ، b و c اعداد حقیقی هستند. معمولاً این نوع اعداد فازی را به صورت یک سه تایی مرتب به فرم (a, b, c) نشان می دهیم. این عدد فازی در شکل ۳-۳-۲ رسم شده است.



شکل ۳-۳-۲: نمایش عدد فازی مثلثی.

نکته ۳-۳-۳: با توجه به تعریف r -برش یک عدد فازی، براحتی می توان r -برش های عدد فازی مثلثی $\tilde{u} = (a, b, c)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{u}]_r = [\underline{u}(r), \bar{u}(r)] = [a + (b - a)r, c - (c - b)r], \quad r \in [0, 1].$$

در زیر، چگونگی به دست آوردن تابع عضویت یک عدد فازی از روی r -برش های آن را در قالب یک قضیه بیان می کنیم.

^{۴۵}Triangular

قضیه ۳-۳-۱: فرض کنید $\tilde{A}$ عدد فازی دلخواهی باشد. در این صورت داریم:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\}.$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $\mu_{\tilde{A}}(x) = r'$ و $\sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\} = r^*$. از آنجا $\mu_{\tilde{A}}(x) = r'$ نتیجه می گیریم $x \in [\tilde{A}]_{r'}$ و لذا

$$r' \leq \sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\} \Rightarrow r' \leq r^*.$$

همچنین از آنجا که $\sup \{r : x \in [\tilde{A}]_r\} = r^*$ و $\tilde{A}$ عدد فازی است، نتیجه می گیریم $x \in [\tilde{A}]_{r^*}$. زیرا در غیر این صورت مجموعه $[\tilde{A}]_{r^*}$ تشکیل یک مجموعه باز را می دهد و این یک تناقض است. بنابراین

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \geq r^* \Rightarrow r^* \leq r'.$$

بدین ترتیب قضیه ثابت شد. ■

در ادامه می خواهیم حساب اعداد فازی را از دو دیدگاه بررسی کنیم. دیدگاه اول با استفاده از اصل گسترش می باشد که در تعریف ۳-۲-۱۰ در مورد آن توضیح داده شد. دیدگاه دوم با استفاده از مفهوم $-r$ برش یک عدد فازی و استفاده از حساب اعداد بازه ای می باشد که در تعریف ۱-۳-۱ که به تفصیل در مورد آن بحث شد. همچنین در این بخش خواهیم دید که این دو دیدگاه کاملاً با هم ارز بوده و نتایج کاملاً یکسانی خواهند داد.

۳-۴ حساب اعداد فازی براساس اصل گسترش

فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی دلخواهی باشند و $*$ یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد، یعنی $*$ $\in \{+, -, \times, /\}$. همچنین فرض کنید $\tilde{u} * \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از اصل گسترش، می توان تابع عضویت عدد فازی $\tilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$\mu_{\tilde{w}}(t) = \sup_{x*y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

بنابراین در حالت های جداگانه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{u}+\tilde{v}}(t) &= \sup_{x+y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u}-\tilde{v}}(t) &= \sup_{x-y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u} \times \tilde{v}}(t) &= \sup_{x \times y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & t \in \mathbb{R}, \\ \mu_{\tilde{u}/\tilde{v}}(t) &= \sup_{x/y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}, & y \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد غیرصفر دلخواه باشد، آنگاه ضرب اسکالر $\lambda \cdot \tilde{u}$ نیز یک عدد فازی است که تابع عضویت آن، براساس اصل گسترش، به صورت زیر می باشد:

$$\mu_{\lambda \cdot \tilde{u}}(t) = \sup_{\lambda \cdot x = t} \{\mu_{\tilde{u}}(x)\} = \mu_{\tilde{u}}\left(\frac{t}{\lambda}\right) \quad t \in \mathbb{R}.$$

۳-۵ حساب اعداد فازی براساس r -برش ها

فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی دلخواهی باشند و $*$ یکی از اعمال حسابی جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم باشد، یعنی $*$ $\in \{+, -, \times, /\}$. همچنین فرض کنید $\tilde{u} * \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$. در این صورت با استفاده از مفهوم r -برش ها و استفاده از حساب اعداد بازه ای، می توان برای $r \in [0, 1]$ r -برش های عدد فازی $\tilde{w}$ را به صورت زیر تعیین نمود:

$$[\tilde{w}]_r = [\tilde{u}]_r * [\tilde{v}]_r = \{x * y : x \in [\tilde{u}]_r, y \in [\tilde{v}]_r\}.$$

بنابراین در حالت های جداگانه با استفاده از حساب اعداد بازه ای، برای $r \in [0, 1]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} [\tilde{u} + \tilde{v}]_r &= [\underline{u}(r) + \underline{v}(r), \bar{u}(r) + \bar{v}(r)], \\ [\tilde{u} - \tilde{v}]_r &= [\underline{u}(r) - \bar{v}(r), \bar{u}(r) - \underline{v}(r)], \\ [\tilde{u} \times \tilde{v}]_r &= [\min \{\underline{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \underline{u}(r) \cdot \bar{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \bar{v}(r)\}, \\ &\quad \max \{\underline{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \underline{u}(r) \cdot \bar{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \underline{v}(r), \bar{u}(r) \cdot \bar{v}(r)\}], \\ [\tilde{u} / \tilde{v}]_r &= [\min \{\underline{u}(r) / \underline{v}(r), \underline{u}(r) / \bar{v}(r), \bar{u}(r) / \underline{v}(r), \bar{u}(r) / \bar{v}(r)\}, \\ &\quad \max \{\underline{u}(r) / \underline{v}(r), \underline{u}(r) / \bar{v}(r), \bar{u}(r) / \underline{v}(r), \bar{u}(r) / \bar{v}(r)\}]. \end{aligned}$$

همچنین اگر $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد، آنگاه ضرب اسکالر $\lambda \cdot \tilde{u}$ نیز یک عدد فازی است که r -برش های آن، براساس حساب اعداد بازه ای، به صورت زیر می باشد:

$$[\lambda \cdot \tilde{u}]_r = \lambda \cdot [\tilde{u}]_r = \begin{cases} [\lambda \underline{u}(r), \lambda \bar{u}(r)], & \lambda \geq 0, \\ [\lambda \bar{u}(r), \lambda \underline{u}(r)], & \lambda < 0, \end{cases} \quad r \in [0, 1].$$

نکته ۳-۵-۱: به راحتی می توان نشان داد که حساب اعداد فازی مبتنی بر اصل گسترش و r -برش با یکدیگر هم ارز بوده و نتایج کاملاً یکسانی می دهند. در این قسمت، این هم ارزی را برای عمل جمع نشان می دهیم. برای سایر اعمال نیز به طور مشابه ثابت می شود. فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی دلخواهی باشند و $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w} \in \mathbb{E}$ با استفاده از اصل گسترش برای $t \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\mu_{\tilde{w}}(t) = \sup_{x+y=t} \{\min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}\}.$$

فرض کنید که سوپریمم در موقعیت x^* و y^* رخ دهد. در این صورت نتیجه خواهیم گرفت

$$\mu_{\tilde{w}}(t) = \min\{\mu_{\tilde{u}}(x^*), \mu_{\tilde{v}}(y^*)\}, \quad x^* + y^* = t.$$

حال با استفاده از تعریف r -برش، به دست می آوریم

$$\begin{aligned}
[\tilde{w}]_r &= \{t : \mu_{\tilde{w}}(t) \geq r\} \\
&= \{x^* + y^* : \min \{\mu_{\tilde{u}}(x^*), \mu_{\tilde{v}}(y^*)\} \geq r\} \\
&= \{x^* + y^* : \mu_{\tilde{u}}(x^*) \geq r, \mu_{\tilde{v}}(y^*) \geq r\} \\
&= \{x^* + y^* : x^* \in [\tilde{u}]_r, y^* \in [\tilde{v}]_r\} \\
&= [\tilde{u}]_r + [\tilde{v}]_r.
\end{aligned}$$

که این همان نتیجه‌ی است که حساب اعداد فازی مبتنی بر $\mathcal{F}$ -برش به دست می‌دهد.

۶-۳ دستگاه خطی فازی

تعریف ۱-۶-۳: بردار $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ که در آن $\tilde{x}_i$ ها اعداد فازی هستند را یک بردار عدد فازی^{۴۶} یا به طور مختصر، یک بردار فازی می‌نامیم.

تعریف ۲-۶-۳: [۲۴] دستگاه خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11} \tilde{x}_1 + a_{12} \tilde{x}_2 + \dots + a_{1n} \tilde{x}_n = \tilde{b}_1, \\ a_{21} \tilde{x}_1 + a_{22} \tilde{x}_2 + \dots + a_{2n} \tilde{x}_n = \tilde{b}_2, \\ \vdots \\ a_{n1} \tilde{x}_1 + a_{n2} \tilde{x}_2 + \dots + a_{nn} \tilde{x}_n = \tilde{b}_n, \end{cases} \quad (۱-۶-۳)$$

که در آن ماتریس ضرایب $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و $\tilde{b}_i$ ، $1 \leq i \leq n$ ، اعداد فازی هستند را یک دستگاه خطی فازی^{۴۷} می‌نامیم.

فرم ماتریسی دستگاه خطی فازی (۱-۶-۳) به صورت

$$A\tilde{x} = \tilde{b},$$

می‌باشد، که در آن $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)^T$ بردارهای فازی می‌باشند.

تعریف ۳-۶-۳: [۲۴] بردار فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ را یک جواب جبری فازی دستگاه (۱-۶-۳) می‌نامیم هرگاه به طور دقیق در آن صدق کند، یا به عبارتی دیگر

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{x}_j = \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

^{۴۶}Fuzzy number vector

^{۴۷}Fuzzy linear system

نکته ۱-۶-۳: در این رساله قرارداد می‌کنیم که جواب جبری فازای دستگاه خطی فازای (۱-۶-۳) را با نماد $\tilde{x}_A = (\tilde{x}_{1A}, \tilde{x}_{2A}, \dots, \tilde{x}_{nA})^T$ نشان دهیم.

نکته ۲-۶-۳: با توجه به تعاریف ۳-۳-۳ و ۳-۶-۳ و نیز با توجه به حساب اعداد فازای مبتنی بر r -برش‌ها، برای آنکه نشان دهیم بردار فازای $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ جواب جبری دستگاه (۱-۶-۳) می‌باشد، کافی است برای $r \in [0, 1]$ ثابت کنیم که:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{x}_j]_r = [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۲-۶-۳)$$

لم زیر، نتیجه‌ای از قضایای ۱ و ۳ از مرجع [۲۴] می‌باشد.

لم ۱-۶-۳: هرگاه دستگاه خطی فازای (۱-۶-۳) دارای جوابی جبری فازای یکتا باشد، آنگاه ماتریس ضرایب مربوطه به طور کامل نامنفرد است.

نکته ۳-۶-۳: عکس لم فوق برقرار نمی‌باشد. به طور مثال، دستگاه خطی فازای 2×2 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -2\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases}$$

که در آن اعداد فازای $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ توسط r -برش‌هایشان به صورت زیر مشخص شده‌اند:

$$[\tilde{b}_1]_r = [r - 12, 12 - r], \quad [\tilde{b}_2]_r = [r - 6, 6 - r].$$

در این مثال به راحتی می‌توان مشاهده کرد که ماتریس ضرایب A به طور کامل نامنفرد می‌باشد، اما با این وجود این دستگاه دارای هیچ جواب جبری نمی‌باشد. در واقع بردار

$$([-6 + 2r, 6 - 2r], [-r, r])^T$$

در دستگاه بازه‌ای (۲-۶-۳) صدق می‌کند، ولی با توجه به لم ۱-۳-۳ خانواده‌ی بازه‌های بسته و کراندار $\{[-r, r] : 0 \leq r \leq 1\}$ تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را نمی‌دهند. زیرا شرط ۲ برقرار نمی‌باشد.

نکته ۴-۶-۳: در لم ۱-۶-۳ فرض «یکتایی جواب جبری» بسیار ضروری است. به این معنی که اگر جواب جبری دستگاه خطی فازی (۱-۶-۳) یکتا نباشد، آنگاه ماتریس ضرایب A لزوماً به طور کامل نامنفرد نمی‌باشد. به طور مثال دستگاه خطی فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases}$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ توسط r -برش‌هایشان به صورت زیر مشخص شده‌اند:

$$[\tilde{b}_1]_r = [3r - 11, 9 - 3r], \quad [\tilde{b}_2]_r = [3r - 10, 10 - 3r].$$

دستگاه خطی فوق دارای نامتناهی جواب جبری فازی با r -برش‌های زیر است:

$$[\tilde{x}_1]_r = [r - 2 + \delta, 3 - r - \delta], \quad [\tilde{x}_2]_r = [2r - 8 - \delta, 7 - 2r + \delta].$$

که در آن $\delta \in [-\frac{11}{2}, \frac{3}{2}]$. با این حال، در این مثال ماتریس ضرایب به طور کامل نامنفرد نمی‌باشد.

یک مدل کلی برای حل و به دست آوردن جواب جبری دستگاه خطی فازی $n \times n$ (۱-۶-۳)، اولین بار توسط فریدمن^{۴۸} و همکارانش در سال ۱۹۹۸ ارائه شد [۲۴]. در این روش، براساس فرم پارامتری اعداد فازی، دستگاه خطی فازی $n \times n$ (۱-۶-۳) را تبدیل به یک دستگاه خطی کلاسیک (غیرفازی) $2n \times 2n$ زیر می‌کنیم:

$$Sx = y, \quad (۳-۶-۳)$$

که در آن

$$x = \left(\underline{x}_1(r), \dots, \underline{x}_n(r), -\bar{x}_1(r), \dots, -\bar{x}_n(r) \right)^T,$$

^{۴۸}Friedman

$$y = (\underline{b}_1(r), \dots, \underline{b}_n(r), -\bar{b}_1(r), \dots, -\bar{b}_n(r))^T,$$

و نیز درایه‌های ماتریس $S = (s_{kl})_{2n \times 2n}$ به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{cases} \text{if } a_{ij} \geq 0 \Rightarrow & s_{ij} = a_{ij}, & s_{i+n,j+n} = a_{ij}, \\ \text{if } a_{ij} < 0 \Rightarrow & s_{i,j+n} = -a_{ij}, & s_{i+n,j} = -a_{ij}, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

با فرض نامنفرد بودن ماتریس S و با حل معادله‌ی (۳-۶-۳) به وسیله‌ی روش‌های موجود، می‌توانیم بردار x را محاسبه کنیم. فریدمن در مقاله‌ی خود [۲۴] جواب فازی برای دستگاه فازی اولیه‌ی (۱-۶-۳) را به صورت زیر تعریف نمود.

تعریف ۳-۶-۴: [۲۴] فرض کنید $X = \{(\underline{x}_i(r), -\bar{x}_i(r)) : 1 \leq i \leq n\}$ جواب یکنای دستگاه خطی کلاسیک (غیرفازی) (۲-۶-۳) باشد. بردار عدد فازی $U = \{(\underline{u}_i(r), \bar{u}_i(r)) : 1 \leq i \leq n\}$ که به صورت

$$\underline{u}_i(r) = \min\{\underline{x}_i(r), \bar{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \bar{x}_i(1)\},$$

$$\bar{u}_i(r) = \max\{\underline{x}_i(r), \bar{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \bar{x}_i(1)\},$$

تعریف می‌شود، یک جواب فازی برای دستگاه (۳-۶-۳) می‌باشد. اگر برای $i = 1, 2, \dots, n$ $(\underline{x}_i(r), \bar{x}_i(r))$ همه اعداد فازی باشند، آنگاه $\underline{u}_i(r) = \underline{x}_i(r)$ و $\bar{u}_i(r) = \bar{x}_i(r)$ که در این حالت U جواب فازی قوی^{۴۹} نامیده می‌شود. در غیر این صورت U را جواب فازی ضعیف^{۵۰} می‌نامیم.

نکته ۳-۶-۵: در تعریف فوق باید به این نکته دقت کرد که جواب قوی دقیقاً در دستگاه فازی (۱-۶-۳) صدق می‌کند، به این معنی که با جایگذاری آن در سمت راست، سمت چپ تساوی به دست می‌آید. اما جواب ضعیف ای گونه نمی‌باشد و در دستگاه مربوطه صدق نخواهد کرد.

نکته ۳-۶-۶: نکته‌ی بسیار مهم دیگری که در تعریف ۳-۶-۴ وجود دارد این است که براساس این تعریف فریدمن ادعا کرد که بردار U تعریف شده در بالا همواره یک بردار فازی است، یعنی همواره تشکیل یک

^{۴۹}Strong fuzzy solution

^{۵۰}Weak fuzzy solution

بردار با مولفه‌های عدد فازی را می‌دهد. در حالی که الهویرنلو [۱۲] در سال ۲۰۱۱ با یک مثال نقض جالب نشان داد که این ادعا همواره صحیح نمی‌باشد. او در مقاله‌ی خود مثال زیر را ارائه داد.

مثال ۳-۶-۱: دستگاه خطی فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases} \quad (3-6-4)$$

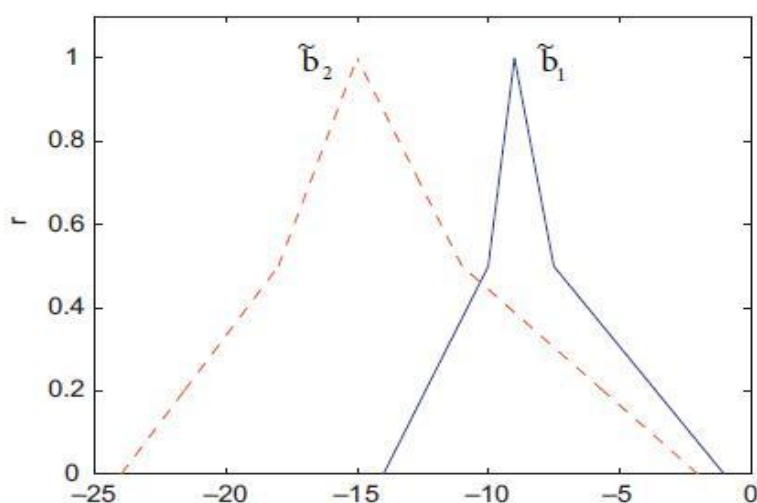
که در آن اعداد فازی $\tilde{b}_1 = (\underline{b}_1(r), \bar{b}_1(r))$ و $\tilde{b}_2 = (\underline{b}_2(r), \bar{b}_2(r))$ توسط فرم پارامتریشان به صورت زیر مشخص می‌گردند.

$$\underline{b}_1(r) = \begin{cases} 8r - 14, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2r - 11, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \quad \bar{b}_1(r) = \begin{cases} -1 - 13r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -6 - 3r, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

و

$$\underline{b}_2(r) = \begin{cases} 12r - 24, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 6r - 21, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \quad \bar{b}_2(r) = \begin{cases} -2 - 18r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -7 - 8r, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1. \end{cases}$$

در شکل ۳-۶-۱ اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ را رسم نموده ایم. از روی نمودار به راحتی می‌توان مشاهده کرد که $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ تمامی شرایط یک عدد فازی را دارا هستند.



شکل ۳-۶-۱: نمایش اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ از مثال ۳-۶-۱.

براساس روش فریدمن [۲۴]، می بایستی برای $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$ دستگاه کلاسیک (غیرفازی) 4×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8r - 14 \\ 12r - 24 \\ 1 + 13r \\ 2 + 18r \end{bmatrix},$$

و برای $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$ دستگاه کلاسیک (غیرفازی) 4×4

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ -\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r - 11 \\ 6r - 21 \\ 6 + 3r \\ 7 + 8r \end{bmatrix},$$

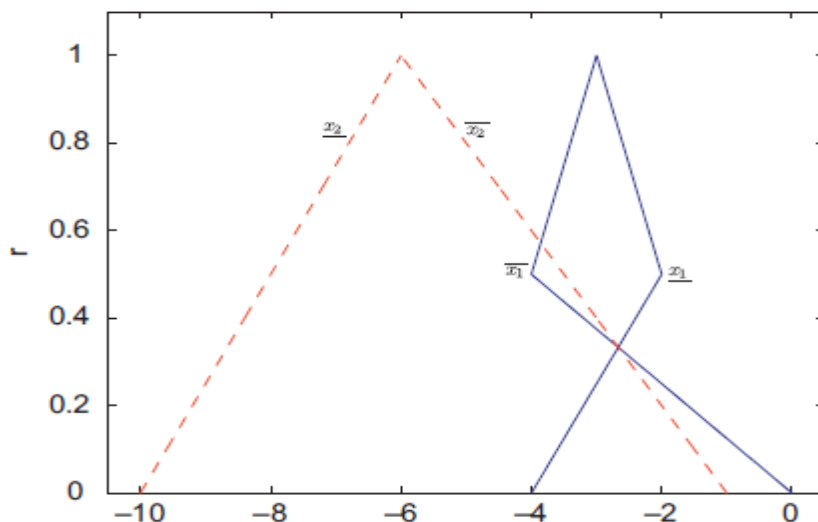
را حل نماییم. با حل دستگاه‌های خطی کلاسیک (غیرفازی) فوق به دست خواهیم آورد:

$$\underline{x}_1(r) = \begin{cases} 4r - 4, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -2r - 1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases} \quad \bar{x}_1(r) = \begin{cases} -8r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2r - 5, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

و

$$\underline{x}_2(r) = 4r - 10, \quad \bar{x}_2(r) = -1 - 5r.$$

به طور واضح $\tilde{x}_2 = (\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r))$ تشکیل فرم پارامتری یک عدد فازی را می‌دهد. اما $\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r))$ دارای چنین خاصیتی نیست. زیرا برای $r > \frac{1}{3}$ داریم $\bar{x}_1(r) < \underline{x}_1(r)$ و همچنین توابع $\underline{x}_1(r)$ و $\bar{x}_1(r)$ روی بازه‌ی $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ به ترتیب توابعی نزولی (غیرصعودی) و صعودی (غیرنزولی) می‌باشند. این دلایل موجب می‌شوند تا $\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r))$ تشکیل فرم پارامتری یک عدد فازی را ندهند. این موضوع در شکل ۳-۶-۲ به نمایش درآمده است.



شکل ۳-۶-۲: نمایش عدد فازی $\tilde{x}_2$ و عدد غیرفازی $\tilde{x}_1$.

حال با توجه به تعریف ۳-۶-۴ بردار عدد فازی $U = \{(\underline{u}_i(r), \bar{u}_i(r)) : 1 \leq i \leq 2\}$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم که به عنوان یک جواب فازی ضعیف برای دستگاه خطی فازی (۳-۶-۴) می‌تواند تلقی شود.

$$\underline{u}_1(r) = \min\{\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \bar{x}_1(1)\} = \begin{cases} 4r - 4, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{4}, \\ -3, & \text{if } \frac{1}{4} \leq r \leq \frac{3}{8}, \\ -8r, & \text{if } \frac{3}{8} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ 2r - 5, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

$$\bar{u}_1(r) = \max\{\underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \bar{x}_1(1)\} = \begin{cases} -8r, & \text{if } 0 \leq r \leq \frac{1}{3}, \\ 4r - 4, & \text{if } \frac{1}{3} \leq r \leq \frac{1}{2}, \\ -2r - 1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \end{cases}$$

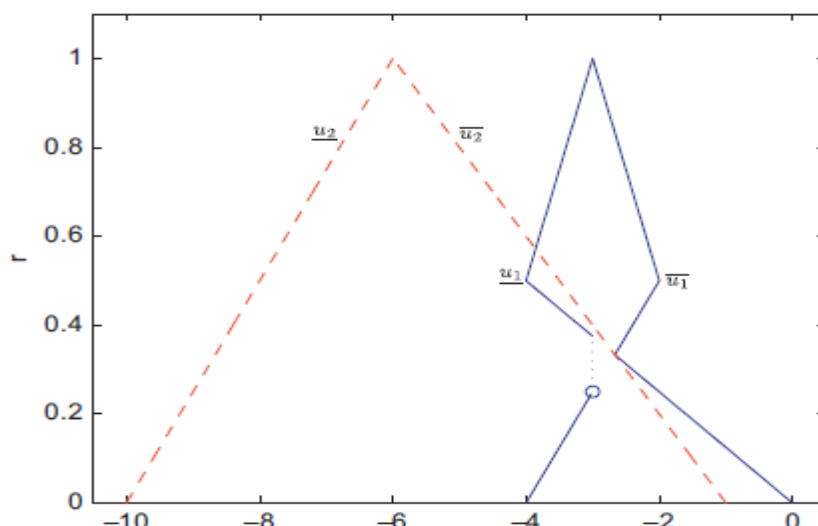
و

$$\underline{u}_2(r) = \min\{\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \bar{x}_2(1)\} = \underline{x}_2(r) = 4r - 10,$$

$$\bar{u}_2(r) = \max\{\underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \bar{x}_2(1)\} = \bar{u}_2(r) = -1 - 5r.$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\tilde{u}_2 = (\underline{u}_2(r), \bar{u}_2(r))$ در شرایط فرم پارامتری یک عدد فازی صدق می‌کند و بنابراین یک عدد فازی است. اما $\tilde{u}_1 = (\underline{u}_1(r), \bar{u}_1(r))$ چنین نمی‌باشد. در واقع، واضح

است که تابع $\underline{u}_1(r)$ در بازه $\left[\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right]$ نزولی (غیر صعودی) است و نیز تابع $\bar{u}_1(r)$ در بازه $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ صعودی (غیر نزولی) است. این شرایط ایجاب می کنند که $\tilde{u}_1 = (\underline{u}_1(r), \bar{u}_1(r))$ یک عدد فازی نباشد. این حقیقت را می توان از شکل ۳-۶-۳ به راحتی مشاهده کرد. بنابراین در این مثال نشان داده ایم که جواب فازی ضعیف تعریف شده توسط فریدمن در [۲۴] لزوماً یک بردار عدد فازی مقدار نیست.



شکل ۳-۶-۳: نمایش عدد فازی $\tilde{u}_2$ و عدد غیر فازی $\tilde{u}_1$.

بر اساس روش فریدمن، بسیاری از محققان روش های عددی مختلفی را برای حل دستگاه های خطی فازی مطرح کردند [۲, ۸, ۹, ۱۶, ۱۷]. در سال ۲۰۱۱، عزتی [۲۰] روش جدیدی را بر اساس روش نشانندن [۴۰] برای حل دستگاه های خطی فازی ارائه داد که در آن یک دستگاه خطی فازی $n \times n$ تبدیل به دو دستگاه خطی کلاسیک (غیر فازی) $n \times n$ می شود. در همان سال، الهویرنلو و همکارش [۱۴] یک روش ساده و عملی را جهت به دست آوردن جواب های فازی متقارن برای دستگاه های خطی فازی مبتنی بر حل دستگاه در ۱-برش مطرح ساخت. همچنین او و همکارانش در سال ۲۰۱۲، جواب های دقیق فازی و نیز نزدیکترین جواب های متقارن فازی را به وسیله ای ارائه ی یک متر جدید به دست آورد [۱۳, ۱۵]. اخیراً نیز یک روش جدید بر اساس محدود کردن مجموعه جواب یک دستگاه خطی فازی برای به دست آوردن جواب جبری در [۳۴] مطرح شده است. روش های زیادی جهت به دست آوردن جواب جبری یک دستگاه خطی فازی وجود دارد که بعضی از آنها در [۱, ۳, ۴] یافت می شوند.

فصل چهارم

دستگاه خطی شمول فازی

۱-۴ مقدمه

در این فصل، دسته‌ی جدیدی از مسائل فازی به نام «دستگاه خطی شمول فازی»^۱ را تعریف کرده و اقدام به معرفی مجموعه جواب فازی آن می‌کنیم. همچنین به بررسی ارتباط میان مجموعه جواب فازی یک دستگاه خطی شمول فازی و جواب جبری فازی یک دستگاه خطی فازی می‌پردازیم. در نهایت، با توجه به مطالب بیان شده، این فصل را با ارائه‌ی یک روش عملی برای به دست آوردن جواب‌های جبری فازی یکتای دستگاه‌های خطی فازی به پایان می‌رسانیم. در نهایت خاطر نشان می‌کنیم که تمامی نتایج به دست آمده در این فصل از مراجع [۱۱، ۲۶] می‌باشد.

۲-۴ دستگاه خطی شمول فازی

تعریف ۱-۲-۴: دستگاه خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \in \tilde{b}_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \in \tilde{b}_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \in \tilde{b}_n, \end{cases} \quad (۱-۲-۴)$$

که در آن ماتریس ضرایب $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار و $\tilde{b}_i$ ، $1 \leq i \leq n$ ، اعداد فازی هستند را یک دستگاه خطی شمول فازی می‌نامیم.

فرم ماتریسی دستگاه خطی شمول فازی (۱-۲-۴) را می‌توان به صورت زیر ارائه داد:

$$Ax \in \tilde{b},$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ یک بردار حقیقی مقدار و $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n)^T$ یک بردار عدد فازی مقدار می‌باشد.

مجموعه جواب فازی دستگاه (۱-۲-۴) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲-۲-۴: مجموعه‌ی فازی

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{(\mathbf{y}, \mu_{\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{y})) : \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \in \text{supp}(\tilde{b}_i), i = 1, 2, \dots, n, \} \quad (۲-۲-۴)$$

^۱Fuzzy inclusion linear system

با تابع عضویت

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{SS}}}(\mathbf{y}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{b}_i}(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j)\}, \quad (3-2-4)$$

مجموعه جواب فازی دستگاه خطی شمول فازی (۱-۲-۴) می باشد.

با توجه به تعریف r -برش یک مجموعه فازی، می توانیم r -برش مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$ را برای $r \in (0, 1]$ به صورت

$$[\widetilde{\mathcal{SS}}]_r = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\widetilde{\mathcal{SS}}}(\mathbf{y}) \geq r\},$$

و برای $r = 0$ به صورت

$$[\widetilde{\mathcal{SS}}]_0 = \text{supp}(\widetilde{\mathcal{SS}}) = \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\widetilde{\mathcal{SS}}}(\mathbf{y}) > 0\}},$$

تعریف کنیم. بنابراین برای $r \in (0, 1]$ نتیجه می گیریم:

$$[\widetilde{\mathcal{SS}}]_r = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \in [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad (4-2-4)$$

و همچنین برای $r = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} [\widetilde{\mathcal{SS}}]_0 &= \text{supp}(\widetilde{\mathcal{SS}}) \\ &= \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \in \text{supp}(\tilde{b}_i), \quad i = 1, 2, \dots, n\}}. \end{aligned} \quad (5-2-4)$$

در مثال زیر، یک دستگاه خطی شمول فازی 2×2 را مورد بررسی قرار داده و مجموعه جواب فازی آنرا مشخص و برای درک بهتر آنرا رسم می کنیم.

مثال ۱-۲-۴: دستگاه خطی شمول فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \in \tilde{b}_1, \\ x_1 + 2x_2 \in \tilde{b}_2, \end{cases} \quad (6-2-4)$$

که در آن تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\mu_{\tilde{b}_1}(t) = \begin{cases} \frac{t+11}{9}, & \text{if } t \in [-11, -2], \\ \frac{3-t}{5}, & \text{if } t \in [-2, 3], \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{b}_2}(t) = \begin{cases} \frac{t-5}{6}, & \text{if } t \in [5, 11], \\ \frac{18-t}{7}, & \text{if } t \in [11, 18], \\ 0, & \text{Otherwise.} \end{cases} \quad (7-2-4)$$

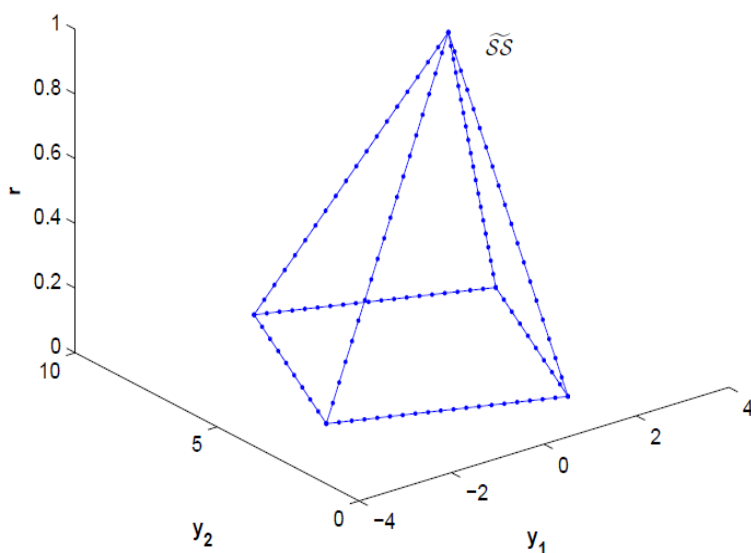
بر اساس معادلات (۴-۲-۴) و (۵-۲-۴)، می توانیم r -برش و تکیه گاه مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$ را به صورت زیر به دست آوریم

$$[\widetilde{\mathcal{SS}}]_r = \left\{ (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \begin{matrix} -11+9r \leq 3y_1 - y_2 \leq 3-5r \\ 5+6r \leq y_1 + 2y_2 \leq 18-7r \end{matrix}, \quad r \in (0, 1], \right.$$

و

$$[\widetilde{\mathcal{SS}}]_0 = \text{supp}(\widetilde{\mathcal{SS}}) = \overline{\left\{ (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} -11 \leq 3y_1 - y_2 \leq 3 \\ 5 \leq y_1 + 2y_2 \leq 18 \end{array} \right\}}.$$

برای درک بهتر از مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$ ، این مجموعه را در شکل ۴-۲-۱ رسم نموده ایم. همانطور که از شکل ۴-۲-۱ پیداست، مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$ به صورت یک هرم می باشد.



شکل ۴-۲-۱: رسم مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$ ، برای دستگاه خطی شمول فازی (۴-۲-۶).

۴-۳ مجموعه فازی $\widetilde{\mathcal{X}}^*$

چنین مجموعه های فازی را می توان برای یک دستگاه خطی فازی ارائه داد. برای تعریف مجموعه های فازی $\widetilde{\mathcal{X}}^*$ ، ابتدا مجموعه های فازی کوچکتری با نماد $\widetilde{\mathcal{X}}_i^*$ تعریف می کنیم. برای این کار، فرض کنید ماتریس ضرایب A نامنفرد بوده و $A^{-1} = D = (d_{ij})_{n \times n}$ در این صورت برای $i = 1, 2, \dots, n$ می توانیم مجموعه های فازی $\widetilde{\mathcal{X}}_i^*$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\widetilde{\mathcal{X}}_i^* = \{(y, \mu_{\widetilde{\mathcal{X}}_i^*}(y)) : \exists (b_1^*, b_2^*, \dots, b_n^*)^T \in \prod_{j=1}^n \text{supp}(\widetilde{b}_j) ; \sum_{j=1}^n d_{ij} b_j^* = y \in \mathbb{R}\}, \quad (1-3-4)$$

که در آن تابع عضویت $\mu_{\widetilde{\mathcal{X}}_i^*}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{X}}_i^*}(y) = \sup_{b_j^*} \left\{ \min_{j=1,2,\dots,n} \{ \mu_{\widetilde{b}_j}(b_j^*) \} : \sum_{j=1}^n d_{ij} b_j^* = y \right\}. \quad (2-3-4)$$

همچنین با توجه به تعریف r -برش یک مجموعه ی فازی، برای $i = 1, 2, \dots, n$ و برای $r \in (0, 1]$ داریم:

$$[\tilde{x}_i^*]_r = \{y \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{x}_i^*}(y) \geq r\},$$

و برای $r = 0$ داریم:

$$[\tilde{x}_i^*]_0 = \text{supp}(\tilde{x}_i^*) = \overline{\{y \in \mathbb{R} : \mu_{\tilde{x}_i^*}(y) > 0\}}.$$

حال به وسیله مجموعه‌های فازی $\tilde{x}_i^*$ ها، می‌توانیم مجموعه فازی دیگری به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\tilde{\mathcal{X}}^* = \{(\mathbf{y}, \mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y})) : \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \prod_{j=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_j^*)\}, \quad (3-3-4)$$

با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{x}_i^*}(y_i)\}. \quad (4-3-4)$$

تعریف می‌کنیم

$$[\tilde{\mathcal{X}}^*]_r = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y}) \geq r\}, \quad r \in (0, 1], \quad (5-3-4)$$

و همچنین

$$[\tilde{\mathcal{X}}^*]_0 = \text{supp}(\tilde{\mathcal{X}}^*) = \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y}) > 0\}}. \quad (6-3-4)$$

قضیه ۱-۳-۴: برای مجموعه فازی $\tilde{\mathcal{X}}^*$ داریم:

$$[\tilde{\mathcal{X}}^*]_r = \prod_{i=1}^n [\tilde{x}_i^*]_r, \quad r \in [0, 1],$$

به ویژه

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{X}}^*) = \prod_{i=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_i^*).$$

اثبات. از معادلات (۶-۳-۴) - (۱-۳-۴)، برای $r \in (0, 1]$ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{X}}^*]_r &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y}) \geq r\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{x}_i^*}(y_i) \geq r, \quad i=1,2,\dots,n\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_i \in [\tilde{x}_i^*]_r, \quad i=1,2,\dots,n\} \\ &= \prod_{i=1}^n [\tilde{x}_i^*]_r. \end{aligned}$$

همچنین برای $r = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{X}}^*]_0 &= \text{supp}(\tilde{\mathcal{X}}^*) = \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y}) > 0\}} \\ &= \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{x}_i^*}(y_i) > 0, \quad i=1,2,\dots,n\}} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_i \in \text{supp}(\tilde{x}_i^*), \quad i=1,2,\dots,n\} \\ &= \prod_{i=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_i^*) = \prod_{i=1}^n [\tilde{x}_i^*]_0. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات قضیه به پایان رسید. ■

قضیه ۲-۳-۴: هرگاه در دستگاه خطی فازی (۱-۶-۳) ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد و قرار دهیم $A^{-1} = D = (d_{ij})_{n \times n}$ در این صورت r -برش‌های مجموعه فازی $\tilde{X}^*$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$[\tilde{X}^*]_r = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} [\tilde{b}_j]_r, \quad r \in [0, 1],$$

یا به عبارتی دیگر

$$[\tilde{X}^*]_r = \left\{ (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n : i = 1, 2, \dots, n; \exists (b_{1_i}^*, b_{2_i}^*, \dots, b_{n_i}^*)^T \in \prod_{j=1}^n [\tilde{b}_j]_r; y_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} b_{j_i}^* \right\}$$

اثبات. فرض کنید $r \in [0, 1]$. با استفاده از معادلات (۲-۳-۴) و (۴-۳-۴) داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in [\tilde{X}^*]_r &\Leftrightarrow \mu_{\tilde{X}^*}(\mathbf{z}) \geq r \\ &\Leftrightarrow \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{\tilde{X}_i^*}(y_i) \right\} \geq r \\ &\Leftrightarrow \forall i=1,2,\dots,n, \mu_{\tilde{X}_i^*}(y_i) \geq r \\ &\Leftrightarrow \forall i=1,2,\dots,n, \exists (b_{1_i}^*, b_{2_i}^*, \dots, b_{n_i}^*)^T \in \prod_{j=1}^n \text{supp}(\tilde{b}_j); \\ &\quad \min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{\tilde{b}_j}(b_{j_i}^*) \right\} \geq r, \quad z_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} b_{j_i}^* \\ &\Leftrightarrow \forall i=1,2,\dots,n, \exists (b_{1_i}^*, b_{2_i}^*, \dots, b_{n_i}^*)^T \in \prod_{j=1}^n \text{supp}(\tilde{b}_j); \\ &\quad i=1,2,\dots,n, \mu_{\tilde{b}_j}(b_{j_i}^*) \geq r, z_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} b_{j_i}^* \\ &\Leftrightarrow \forall i=1,2,\dots,n, \exists (b_{1_i}^*, b_{2_i}^*, \dots, b_{n_i}^*)^T \in \prod_{j=1}^n [\tilde{b}_j]_r; \\ &\quad z_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} b_{j_i}^* \\ &\Leftrightarrow \mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} [\tilde{b}_j]_r, \end{aligned}$$

بنابراین قضیه ثابت شد. ■

از قضیه‌های ۱-۳-۴ و ۲-۳-۴ نتیجه می‌گیریم:

نتیجه ۱-۳-۴: برای مجموعه فازی $\tilde{X}^*$ داریم:

$$\text{supp}(\tilde{X}^*) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} \text{supp}(\tilde{b}_j) \quad (۱)$$

$$(۲) \quad \text{برای } r \in [0, 1] \text{ و برای } i = 1, 2, \dots, n, [\tilde{x}_i^*]_r = \sum_{j=1}^n d_{ij} [\tilde{b}_j]_r \text{ و در نتیجه}$$

$$\text{supp}(\tilde{x}_i^*) = \sum_{j=1}^n d_{ij} \text{supp}(\tilde{b}_j)$$

قضیه ۳-۳-۴: فرض کنید ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد. در این صورت برای $i = 1, 2, \dots, n$ خانواده‌ی بازه‌های $\{\tilde{x}_i^*\}_r : 0 \leq r \leq 1$ تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد.

اثبات. قرار می‌دهیم $A^{-1} = D = (d_{ij})_{n \times n}$ و نیز برای $i = 1, 2, \dots, n$

$$[\tilde{x}_i^*]_r = [\underline{x}_i^*(r), \overline{x}_i^*(r)], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1].$$

از نتیجه‌ی ۱-۳-۴ و معادله‌ی (۸-۳-۲) به دست می‌آوریم

$$\underline{x}_i^*(r) = \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \overline{b}_j(r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (۷-۳-۴)$$

$$\overline{x}_i^*(r) = \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \overline{b}_j(r) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \underline{b}_j(r), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۸-۳-۴)$$

براساس لم ۱-۳-۳ کافی است نشان دهیم:

(۱) $[\tilde{x}_i^*]_r$ بازه‌های بسته و کراندار برای $r \in [0, 1]$ می‌باشند.

(۲) هرگاه $0 \leq r_1 \leq r_2$ ، آنگاه باید داشته باشیم $[\tilde{x}_i^*]_{r_2} \subseteq [\tilde{x}_i^*]_{r_1}$.

(۳) هرگاه $\{r_k\}_{k=0}^\infty$ دنباله‌ی صعودی (نانزولی) و همگرا به r در بازه‌ی $[0, 1]$ باشد، آنگاه باید داشته باشیم

$$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_i^*(r_k), \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x}_i^*(r_k) \right] = [\underline{x}_i^*(r), \overline{x}_i^*(r)].$$

برای اثبات خاصیت ۱، چون برای $j = 1, 2, \dots, n$ ها اعداد فازی می‌باشند در این صورت

$$[\tilde{b}_j]_r = [\underline{b}_j(r), \overline{b}_j(r)]$$

روی $[0, 1]$ هستند و نیز برای $r \in [0, 1]$ $\underline{b}_j(r) \leq \overline{b}_j(r)$ لذا با توجه به معادله‌ی (۸-۳-۲) داریم:

$$\sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r) \leq \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \overline{b}_j(r), \quad \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \overline{b}_j(r) \leq \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \underline{b}_j(r),$$

که ایجاب می‌کند $\underline{x}_i^*$ و $\overline{x}_i^*$ توابعی کراندار روی $[0, 1]$ هستند و نیز برای $r \in [0, 1]$

$$\underline{x}_i^*(r) \leq \overline{x}_i^*(r)$$

برای اثبات خاصیت ۲، فرض می‌کنیم $0 \leq r_1 \leq r_2$ با توجه به عدد فازی بودن $\tilde{b}_j$ ها، نتیجه می‌گیریم

$$[\underline{b}_j(r_2), \overline{b}_j(r_2)] \subseteq [\underline{b}_j(r_1), \overline{b}_j(r_1)],$$

$$\underline{b}_j(r_1) \leq \underline{b}_j(r_2), \quad \overline{b}_j(r_2) \leq \overline{b}_j(r_1). \quad (۹-۳-۴)$$

با استفاده از معادلات (۸-۳-۲) و (۹-۳-۴) به دست می‌آوریم

$$\sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r_1) \leq \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r_2), \quad \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \overline{b}_j(r_1) \leq \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \overline{b}_j(r_2).$$

بنابراین

$$\sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r_1) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \overline{b}_j(r_1) \leq \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r_2) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \overline{b}_j(r_2),$$

به عبارتی دیگر

$$\underline{x}_i^*(r_1) \leq \underline{x}_i^*(r_2). \quad (10-3-4)$$

همچنین از معادلات (8-3-2) و (9-3-4) به دست می آوریم

$$\sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \underline{b}_j(r_2) \leq \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \underline{b}_j(r_1), \quad \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \bar{b}_j(r_2) \leq \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \bar{b}_j(r_1).$$

در این صورت نتیجه می گیریم

$$\sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \bar{b}_j(r_2) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \underline{b}_j(r_2) \leq \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \bar{b}_j(r_1) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \underline{b}_j(r_1),$$

یعنی

$$\overline{x}_i^*(r_2) \leq \overline{x}_i^*(r_1). \quad (11-3-4)$$

معادلات (10-3-4) و (11-3-4) ایجاب می کنند

$$[\tilde{x}_i^*]_{r_2} \subseteq [\tilde{x}_i^*]_{r_1}.$$

برای اثبات خاصیت ۳، با توجه به عدد فازی بودن $\tilde{b}_j$ ها، برای دنباله‌ی غیرنزولی $\{r_k\}_{k=0}^\infty$ و همگرا

به r ، نتیجه می گیریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{b}_j(r_k) = \underline{b}_j(r), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{b}_j(r_k) = \bar{b}_j(r).$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{x}_i^*(r_k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r_k) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \bar{b}_j(r_k) \right) \\ &= \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} (\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{b}_j(r_k)) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} (\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{b}_j(r_k)) \\ &= \sum_{j \in \Omega_i^+} d_{ij} \underline{b}_j(r) + \sum_{j \in \Omega_i^-} d_{ij} \bar{b}_j(r) \\ &= \underline{x}_i^*(r). \end{aligned}$$

به طور مشابه می توانیم نشان دهیم که

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{x}_i^*(r_k) = \overline{x}_i^*(r).$$

بنابراین اثبات قضیه به پایان می رسد. ■

در ادامه قصد آن را داریم تا با ارائه‌ی یک مثال عددی، مجموعه‌ی $\tilde{\mathcal{X}}^*$ را برای یک دستگاه خطی فازی 2×2 رسم نماییم.

مثال ۱-۳-۴: دستگاه خطی فازی 2×2 زیر را در نظر بگیرید.

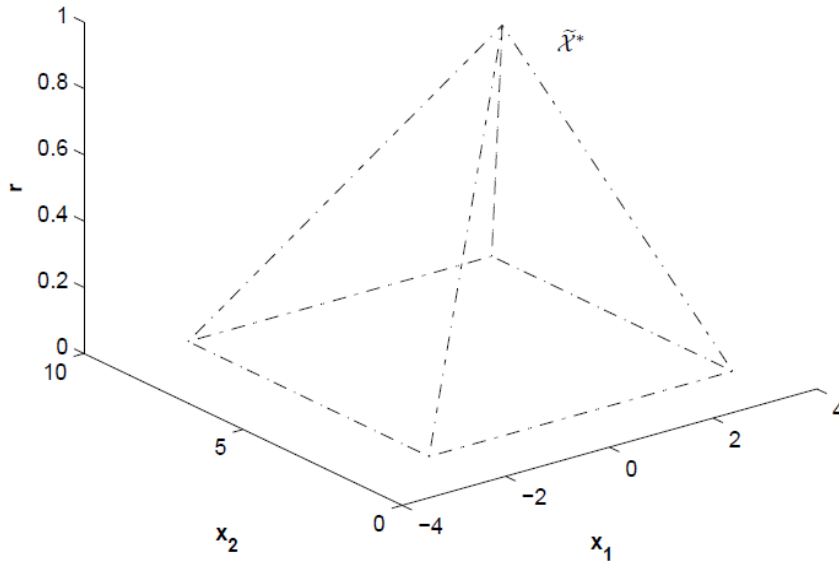
$$\begin{cases} 3\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{x}_1 + 2\tilde{x}_2 = \tilde{b}_2, \end{cases} \quad (12-3-4)$$

که در آن توابع عضویت اعداد فازی $\tilde{b}_1$ و $\tilde{b}_2$ توسط معادله‌ی (7-2-4) داده شده است. براساس قضیه‌ی

۲-۳-۴ نتیجه می گیریم

$$[\tilde{\mathcal{X}}^*]_r = \left[\frac{24r-17}{7}, \frac{24-17r}{7} \right] \times \left[\frac{12+23r}{7}, \frac{65-30r}{7} \right], \quad r \in [0, 1].$$

برای درک بهتر از مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{X}}^*$ ، این مجموعه را در شکل ۱-۳-۴ رسم نموده ایم. همانطور که از شکل ۱-۳-۴ پیداست، مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{X}}^*$ نیز به صورت یک هرم می باشد.



شکل ۱-۳-۴: رسم مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{X}}^*$ ، برای دستگاه خطی فازی (۷-۳-۴).

۴-۴ مجموعه فازی $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$

در این قسمت، مجموعه فازی دیگری که با نماد $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$ مشخص می شود را معرفی می کنیم. این مجموعه فازی براساس جواب جبری یک دستگاه خطی فازی ساخته می شود. برای این کار، فرض کنید بردار عدد فازی مقدار $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathcal{A}} = (\tilde{x}_{1A}, \tilde{x}_{2A}, \dots, \tilde{x}_{nA})^T$ جواب جبری دستگاه خطی فازی (۱-۶-۳) باشد. تعریف می کنیم:

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}} = \{(\mathbf{y}, \mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y})) : \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \prod_{i=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_{iA})\}, \quad (۱-۴-۴)$$

با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{x}_{iA}}(y_i)\}. \quad (۲-۴-۴)$$

همانند قبل تعریف می کنیم

$$[\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}]_r = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) \geq r \}, \quad r \in (0, 1], \quad (۳-۴-۴)$$

و همچنین

$$[\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}]_0 = \text{supp}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}) = \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) > 0\}}. \quad (1-1-1)$$

قضیه ۱-۱-۱: برای مجموعه فازی $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$ داریم:

$$[\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}]_r = \prod_{i=1}^n [\tilde{x}_{iA}]_r, \quad r \in [0, 1],$$

به ویژه

$$\text{supp}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}) = \prod_{i=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_{iA}).$$

اثبات. از معادلات (1-1-1) - (1-1-1)، برای $r \in (0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}]_r &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) \geq r\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{x}_{iA}}(y_i) \geq r, \quad i=1,2,\dots,n\} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_i \in [\tilde{x}_{iA}]_r, \quad i=1,2,\dots,n\} \\ &= \prod_{i=1}^n [\tilde{x}_{iA}]_r. \end{aligned}$$

همچنین برای $r = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}]_0 &= \text{supp}(\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}) = \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) > 0\}} \\ &= \overline{\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mu_{\tilde{x}_{iA}}(y_i) > 0, \quad i=1,2,\dots,n\}} \\ &= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : y_i \in \text{supp}(\tilde{x}_{iA}), \quad i=1,2,\dots,n\} \\ &= \prod_{i=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_{iA}) = \prod_{i=1}^n [\tilde{x}_{iA}]_0. \end{aligned}$$

بنابراین اثبات قضیه به پایان رسید. ■

در مثال زیر، مجموعه فازی $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$ را برای یک دستگاه خطی فازی 2×2 رسم می‌کنیم.

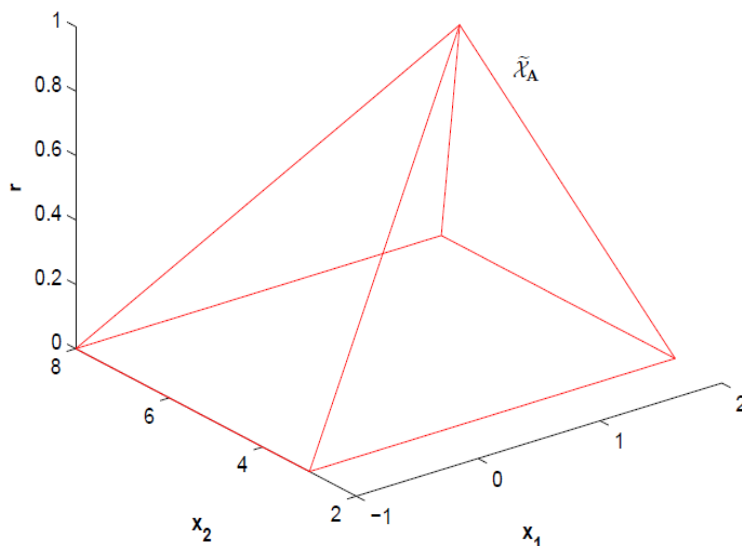
مثال ۱-۱-۱: دستگاه خطی فازی 2×2 (۷-۳-۱) ارائه شده در مثال ۱-۳-۱ را در نظر بگیرید. تابع عضویت جواب جبری این دستگاه به صورت زیر می‌باشد.

$$\mu_{\tilde{x}_{1A}}(t) = \begin{cases} \frac{t+1}{2}, & \text{if } t \in [-1, 1], \\ 2-t, & \text{if } t \in [1, 2], \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases} \quad \mu_{\tilde{x}_{2A}}(t) = \begin{cases} \frac{t-3}{2}, & \text{if } t \in [3, 5], \\ \frac{8-t}{3}, & \text{if } t \in [5, 8], \\ 0, & \text{Otherwise,} \end{cases}$$

و در نتیجه با استفاده از قضیه ۱-۱-۱ نتیجه می‌گیریم

$$[\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}]_r = [-1 + 2r, 2 - r] \times [3 + 2r, 8 - 3r], \quad r \in [0, 1].$$

برای درک بهتر از مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$ ، این مجموعه را در شکل ۱-۴-۴ رسم نموده ایم. همانطور که از شکل ۱-۴-۴ پیداست، مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$ نیز به صورت یک هرم می باشد.



شکل ۱-۴-۴: رسم مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$ برای دستگاه خطی فازی (۷-۳-۴).

۵-۴ روابط بین مجموعه های فازی $\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}$ ، $\tilde{\mathcal{X}}^*$ و $\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$

در این قسمت می خواهیم به بررسی روابط میان مجموعه های فازی تعریف شده در قسمت های قبلی بپردازیم.

قضیه ۱-۵-۴: هرگاه در دستگاه خطی شمول فازی (۱-۲-۴) یا در دستگاه خطی فازی (۱-۶-۳) ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد، آنگاه:

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}} \subseteq \tilde{\mathcal{X}}^*.$$

اثبات. براساس تعریف ۵-۲-۳ کافی است نشان دهیم:

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) \leq \mu_{\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{y}) \leq \mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y}).$$

ابتدا نامساوی چپ را ثابت می کنیم. فرض کنید $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \prod_{i=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_{iA})$ در

غیر این صورت، معادلات (۱-۴-۴) و (۲-۴-۴) ایجاب می کنند که $\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) = 0$ و بنابراین اثبات

نامساوی چپ بدیهی است. حال فرض کنید

$$\mu_{\tilde{x}_{iA}}(y_i) = r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (۱-۵-۴)$$

و

$$r^* = \min_{i=1,2,\dots,n} \{r_i\}. \quad (2-5-4)$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{iA}}(y_i)\} = \min_{i=1,2,\dots,n} \{r_i\} = r^*. \quad (4-4-4)$$

از معادلات (1-5-4) و (2-5-4) داریم

$$\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{iA}}(y_i) \geq r^* \Rightarrow y_i \in [\tilde{\mathcal{X}}_{iA}]_{r^*}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4-5-4)$$

از طرف دیگر چون $\tilde{\mathbf{x}}_A = (\tilde{x}_{1A}, \tilde{x}_{2A}, \dots, \tilde{x}_{nA})^T$ جواب جبری دستگاه خطی فازی (3-6-1) می باشد،

لذا $A \tilde{\mathbf{x}}_A = \tilde{\mathbf{b}}$ و در نتیجه

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{x}_{jA}]_{r^*} = [\tilde{b}_i]_{r^*}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5-5-4)$$

با استفاده از معادلات (4-5-4) و (5-5-4)، برای $i = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می گیریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \in [\tilde{b}_i]_{r^*} \Rightarrow \mu_{\tilde{b}_i}(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j) \geq r^*. \quad (6-5-4)$$

از نقطه نظر دیگر، واضح است که $\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \in \text{supp}(\tilde{b}_i)$ و لذا از معادله (3-2-4) داریم

$$\mu_{\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{y}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{b}_i}(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j)\} \geq r^*. \quad (7-5-4)$$

حال از معادلات (3-5-4) و (7-5-4) به دست می آوریم

$$\mu_{\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}}(\mathbf{y}) \leq \mu_{\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{y}),$$

که ایجاب می کند

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}. \quad (8-5-4)$$

بنابراین نامساوی سمت چپ قضیه ثابت شد.

حال نامساوی سمت راست را نشان می دهیم، یعنی

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \mu_{\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{y}) \leq \mu_{\tilde{\mathcal{X}}^*}(\mathbf{y}).$$

فرض کنید $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ و همچنین برای $i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \in \text{supp}(\tilde{b}_i). \quad (9-5-4)$$

در غیر این صورت معادلات (2-2-4) و (3-2-4) ایجاب می کنند که $\mu_{\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{y}) = 0$ و بنابراین اثبات

نامساوی راست بدیهی است. از معادله (9-5-4) نتیجه می گیریم

$$\exists b_i^* \in \text{supp}(\tilde{b}_i); \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = b_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین

$$\mu_{\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{S}}}(\mathbf{y}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{b}_i}(\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j)\} = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{b}_i}(b_i^*)\}. \quad (10-5-4)$$

از طرف دیگر اگر $A^{-1} = D = (d_{ij})_{n \times n}$ در این صورت

$$y_i = \sum_{j=1}^n d_{ij} b_j^*, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین از معادله‌ی (۲-۵-۴) برای $i = 1, 2, \dots, n$ نتیجه می‌گیریم $y_i \in \text{supp}(\tilde{x}_i^*)$ و در نتیجه براساس قضیه ۱-۳-۴ داریم: $y \in \text{supp}(\tilde{X}^*)$ و بنابراین

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{X}^*}(y) &= \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{\tilde{x}_i^*}(y_i) \right\} \\ &= \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \sup_{b'_j} \left\{ \min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{\tilde{b}_j}(b'_j) \right\} : \sum_{j=1}^n d_{ij} b'_j = y_i \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (۱۱-۵-۴)$$

از طرف دیگر برای $i = 1, 2, \dots, n$ واضح است که

$$\begin{aligned} \sup_{b'_j} \left\{ \min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{\tilde{b}_j}(b'_j) \right\} : \sum_{j=1}^n d_{ij} b'_j = y_i \right\} &\geq \\ \min_{j=1,2,\dots,n} \left\{ \mu_{\tilde{b}_j}(b_j^*) : \sum_{j=1}^n d_{ij} b_j^* = y_i \right\}, \end{aligned} \quad (۱۲-۵-۴)$$

از معادلات (۱۲-۵-۴) - (۱۰-۵-۴) نتیجه می‌گیریم

$$\mu_{\widetilde{\mathcal{SS}}}(\mathbf{y}) \leq \mu_{\tilde{X}^*}(\mathbf{y}),$$

که ایجاب می‌کند

$$\widetilde{\mathcal{SS}} \subseteq \tilde{X}^*. \quad (۱۳-۵-۴)$$

با توجه به معادلات (۸-۵-۴) و (۱۳-۵-۴) اثبات قضیه به پایان می‌رسد. ■

در ادامه مثالی در رابطه با قضیه‌ی ۱-۵-۴ ارائه می‌دهیم.

مثال ۱-۵-۴: دستگاه خطی شمول فازی (۶-۲-۴) از مثال ۱-۲-۴ و دستگاه خطی فازی (۱۲-۳-۴) از مثال ۱-۳-۴ را در نظر بگیرید. در شکل ۱-۵-۴ مجموعه‌های فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$ ، $\tilde{X}^*$ و $\tilde{X}_{\mathcal{A}}$ را توأمآ رسم نموده ایم. از شکل ۱-۵-۴ واضح است که

$$\tilde{X}_{\mathcal{A}} \subseteq \widetilde{\mathcal{SS}} \subseteq \tilde{X}^*.$$

تعریف ۱-۵-۴: برای مجموعه فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$ و برای $i = 1, 2, \dots, n$ تعریف می‌کنیم مجموعه‌ی

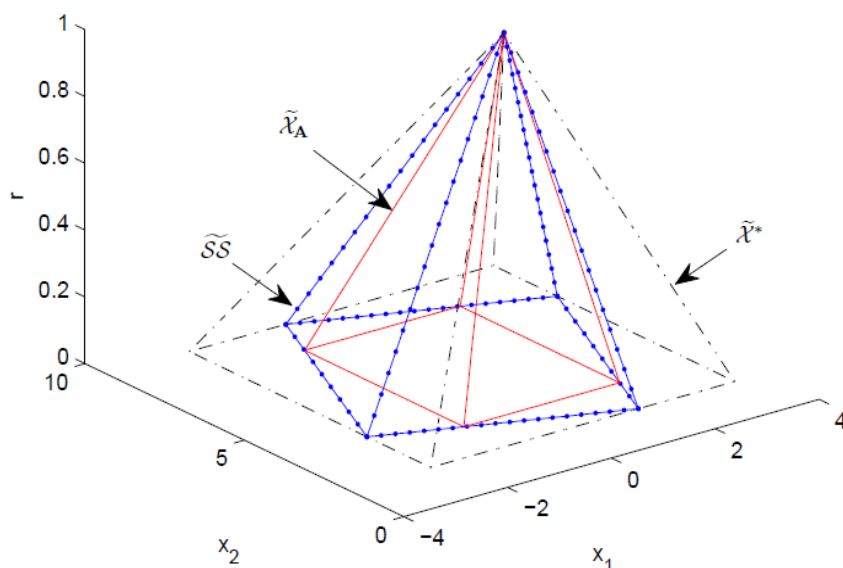
$$L_i(r) = \left\{ (x_1, x_1, \dots, x_1)^T \in [\widetilde{\mathcal{SS}}]_r : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \underline{b}_i(r) \right\}, \quad r \in [0, 1],$$

را به عنوان r -مرز پایینی و مجموعه‌ی

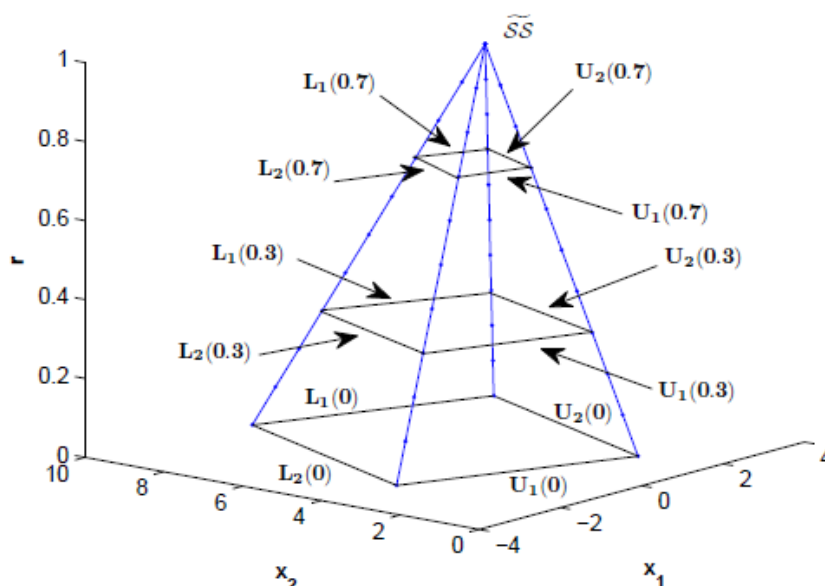
$$U_i(r) = \left\{ (x_1, x_1, \dots, x_1)^T \in [\widetilde{\mathcal{SS}}]_r : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \overline{b}_i(r) \right\}, \quad r \in [0, 1],$$

را به عنوان r -مرز بالایی مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{SS}}$.

از تعریف فوق، واضح است که برای $r \in [0, 1]$ مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{SS}}$ دارای n ، مرز پایینی و دارای n ، مرز بالایی است. برای یک درک شهودی از تعریف ۴-۵-۱ مجموعه جواب فازی $\tilde{\mathcal{SS}}$ مثال ۴-۲-۱ را در نظر بگیرید. در شکل ۴-۵-۲ بعضی از r -مرزهای پایینی و بعضی از r -مرزهای بالایی $\tilde{\mathcal{SS}}$ برای $r = 0, 0.3, 0.7$ مشخص شده‌اند.



شکل ۴-۵-۱: نمایش مجموعه‌های فازی $\tilde{\mathcal{SS}}$ ، $\tilde{\mathcal{X}}^*$ و $\tilde{\mathcal{X}}_A$ ، برای دستگاه‌های (۴-۲-۶) و (۴-۳-۷).



شکل ۴-۵-۲: رسم بعضی از r -مرزهای پایینی و بعضی از r -مرزهای بالایی $\tilde{\mathcal{SS}}$ از مثال ۴-۲-۱.

در قضیه‌ی زیر به این سوال پاسخ می‌دهیم که «چه زیر مجموعه‌هایی از مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{S}}$ می‌توانند یک جواب جبری برای دستگاه خطی فازی مربوطه تشکیل دهند؟»

قضیه ۴-۵-۲: فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{I}$ زیر مجموعه‌ی دلخواهی از مجموعه جواب فازی $\widetilde{\mathcal{S}}$ دستگاه خطی شمول فازی (۴-۲-۱) باشد، یعنی $\tilde{I} \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}$ ، به طوری که:

(۱) برای $[\tilde{I}]_r$ ، $r \in [0, 1]$ یک مستطیل n -بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی $[\tilde{I}]_r = \prod_{i=1}^n [\tilde{\gamma}_i]_r$ که در آن برای $\tilde{\gamma}_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ یک عدد فازی است.

(۲) برای $r \in [0, 1]$ هر r -مرز پایینی دلخواه و هر r -مرز بالایی دلخواه $\widetilde{\mathcal{S}}$ ، حداقل شامل یک نقطه از $[\tilde{I}]_r$ باشد. یعنی $r \in [0, 1]$ نقاط $\alpha(r) = (\alpha_1^r, \alpha_2^r, \dots, \alpha_n^r)^T \in [\tilde{I}]_r$ و $\beta(r) = (\beta_1^r, \beta_2^r, \dots, \beta_n^r)^T \in [\tilde{I}]_r$ وجود دارند به طوری که $\alpha(r) \in L_i(r)$ و $\beta(r) \in U_i(r)$.

در این صورت بردار فازی $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_n)^T$ جواب جبری دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) می‌باشد.

اثبات. باید نشان دهیم $A \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{b}}$ برای این منظور، کافی است نشان دهیم:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{\gamma}_j]_r = [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1]. \quad (۴-۵-۱۴)$$

در رابطه با اثبات معادله‌ی (۴-۵-۱۴)، واضح است که

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{\gamma}_j]_r = \{ \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j : \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in [\tilde{I}]_r \}, \quad r \in [0, 1].$$

فرض کنید $r \in [0, 1]$ و $z \in \sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{\gamma}_j]_r$ ، در این صورت بردار $(z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in [\tilde{I}]_r$ وجود دارد به طوری که

$$z = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j. \quad (۴-۵-۱۵)$$

از طرف دیگر، چون $\tilde{I} \subseteq \widetilde{\mathcal{S}}$ ، در این صورت

$$[\tilde{I}]_r \subseteq [\widetilde{\mathcal{S}}]_r.$$

بنابراین

$$(z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in [\widetilde{\mathcal{S}}]_r,$$

و لذا از معادله‌ی (۴-۲-۴) نتیجه گیریم

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \in [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۱۶-۵-۴)$$

معادلات (۱۵-۵-۴) و (۱۶-۵-۴) ایجاب می کنند $z \in [\tilde{b}_i]_r$ و بنابراین

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{y}_j]_r \subseteq [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1]. \quad (۱۷-۵-۴)$$

حال فرض کنید که $r \in [0, 1]$ و $z \in [\tilde{b}_i]_r$ در این صورت

$$\exists \lambda \in [0, 1]; \quad z = \underline{b}_i(r) + \lambda (\bar{b}_i(r) - \underline{b}_i(r)). \quad (۱۸-۵-۴)$$

از طرف دیگر با توجه به فرض قضیه، چون هر r -مرز پایینی دلخواه و هر r -مرز بالایی دلخواه $\widetilde{\mathcal{DS}}$ حداقل شامل یک نقطه از $[\tilde{I}]_r$ می باشد، در این صورت برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$\exists (\alpha_1^r, \alpha_2^r, \dots, \alpha_n^r)^T \in [\tilde{I}]_r; \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j^r \in L_i(r) \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j^r = \underline{b}_i(r), \quad (۱۹-۵-۴)$$

$$\exists (\beta_1^r, \beta_2^r, \dots, \beta_n^r)^T \in [\tilde{I}]_r; \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j^r \in U_i(r) \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} \beta_j^r = \bar{b}_i(r), \quad (۲۰-۴-۴)$$

از معادلات (۲۰-۴-۴)-(۱۸-۵-۴) نتیجه می گیریم

$$z = \sum_{j=1}^n a_{ij} (\alpha_j^r + \lambda(\beta_j^r - \alpha_j^r)).$$

همچنین چون برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، $\beta_j^r, \alpha_j^r \in [\tilde{y}_j]_r$ لذا $\alpha_j^r + \lambda(\beta_j^r - \alpha_j^r) \in [\tilde{y}_j]_r$ و بنابراین

$$z \in \{\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j : y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in [\tilde{I}]_r\}. \quad (۲۱-۵-۴)$$

از معادله (۲۱-۵-۴) برای $r \in [0, 1]$ به دست می آوریم

$$z \in \sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{y}_j]_r \Rightarrow [\tilde{b}_i]_r \subseteq \sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{y}_j]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۲۲-۵-۴)$$

با استفاده از معادلات (۱۷-۵-۴) و (۲۲-۵-۴) اثبات قضیه کامل می شود. ■

در قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای آن که یک بردار عدد فازی مقدار، جواب جبری یک دستگاه خطی فازی باشد را ارائه می کنیم.

قضیه ۳-۵-۴: فرض کنید $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ یک بردار عدد فازی دلخواه باشد. مجموعه‌ی فازی $\tilde{\Gamma}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{\Gamma} = \{(\mathbf{y}, \mu_{\tilde{\Gamma}}(\mathbf{y})) : \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \prod_{i=1}^n \text{supp}(\tilde{x}_i)\},$$

با تابع عضویت

$$\mu_{\tilde{\Gamma}}(\mathbf{y}) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{\mu_{\tilde{x}_i}(y_i)\}.$$

در این صورت

$$[\tilde{\Gamma}]_r = \prod_{i=1}^n [\tilde{x}_i]_r \quad \text{برای } r \in [0, 1] \text{ داریم:}$$

(ب) بردار عدد فازی $\tilde{\mathbf{x}}$ جواب جبری دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) است اگر و تنها اگر:

$$\tilde{\Gamma} \subseteq \widetilde{\mathcal{SS}} \quad (۱)$$

(۲) برای $r \in [0, 1]$ هر r -مرز پایینی دلخواه و هر r -مرز بالایی دلخواه $\widetilde{\mathcal{SS}}$ ، حداقل شامل یک نقطه رأسی از $[\tilde{\Gamma}]_r$ باشد.

اثبات. برهان قسمت الف کاملاً شبیه به برهان قضیه‌ی ۴-۴-۱ است. بنابراین تنها قسمت ب را ثابت می‌کنیم.

لزوم: ابتدا فرض می‌کنیم که بردار عدد فازی $\tilde{\mathbf{x}}$ جواب جبری دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) باشد. در این صورت از معادلات (۴-۴-۱) و (۴-۴-۲) در می‌یابیم که $\tilde{\Gamma} = \tilde{\mathcal{X}}_{\mathcal{A}}$ و براساس قضیه‌ی ۴-۵-۱ داریم

$$\tilde{\Gamma} \subseteq \widetilde{\mathcal{SS}}.$$

بنابراین خاصیت ۱ از قسمت ب ثابت شد. از طرف دیگر، چون بردار عدد فازی $\tilde{\mathbf{x}}$ جواب جبری دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) است بنابراین

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} [\tilde{x}_j]_r = [\tilde{b}_i]_r, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad r \in [0, 1].$$

و لذا با توجه به قسمت الف، داریم

$$[\tilde{b}_i]_r = [\underline{b}_i(r), \bar{b}_i(r)] = \{\sum_{j=1}^n a_{ij} z_j : (z_1, z_2, \dots, z_n)^T \in [\tilde{\Gamma}]_r\}, \quad r \in [0, 1].$$

پس برای $i = 1, 2, \dots, n$ داریم

$$\exists (z_1^i(r), z_2^i(r), \dots, z_n^i(r))^T \in [\tilde{I}]_r; \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j^i(r) = \underline{b}_i(r), \quad r \in [0, 1],$$

در نتیجه نقطه‌ی $(z_1^i(r), z_2^i(r), \dots, z_n^i(r))^T$ متعلق به r -مرز پایینی $\tilde{\mathcal{S}}$ است. حال با استفاده از برهان خلف نشان می‌دهیم که این نقطه، یک نقطه‌ی رأسی برای $[\tilde{I}]_r$ است، یعنی نشان می‌دهیم که برای $r \in [0, 1]$ و برای $j = 1, 2, \dots, n$ یا $z_j^i(r) = \underline{x}_j(r)$ یا $z_j^i(r) = \bar{x}_j(r)$ فرض کنید چنین نباشد، یعنی $1 \leq k \leq n$ و $0 \leq r^* \leq 1$ وجود داشته باشند بطوریکه $z_k^i(r^*) \neq \underline{x}_k(r^*)$ و نیز $z_k^i(r^*) \neq \bar{x}_k(r^*)$ بنابراین خواهیم داشت

$$\underline{x}_k(r^*) < z_k^i(r^*) < \bar{x}_k(r^*). \quad (23-5-4)$$

از طرف دیگر واضح است که

$$\underline{x}_j(r^*) \leq z_j^i(r^*) \leq \bar{x}_j(r^*), \quad j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n. \quad (24-5-4)$$

از معادلات (23-5-4) و (24-5-4) نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j(r^*) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_j(r^*) &< \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j^i(r^*) &< \\ \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \bar{x}_j(r^*) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j(r^*) \end{aligned} \quad (25-5-4)$$

که در آن مجموعه‌های Γ_i^+ و Γ_i^- در نکته‌ی ۱-۶-۷ تعریف شده‌اند. سرانجام با استفاده از معادله‌ی (۲۵-۵-۴) ما به دست می‌آوریم

$$\underline{b}_i(r^*) < \underline{b}_i(r^*) < \bar{b}_i(r^*).$$

واضح است که نامساوی فوق یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل و حکم ثابت است یعنی نقطه‌ی $(z_1^i(r), z_2^i(r), \dots, z_n^i(r))^T$ یک نقطه‌ی رأسی برای $[\tilde{I}]_r$ است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که هر r -مرز بالایی دلخواه $\tilde{\mathcal{S}}$ ، حداقل شامل یک نقطه رأسی از $[\tilde{I}]_r$ می‌باشد. بنابراین خاصیت ۲ از قسمت ب نیز ثابت شد و در نتیجه اثبات قسمت لزوم به پایان رسید.

کفایت: حال فرض کنید که خاصیت‌های ۱ و ۲ قسمت ب برقرار باشند. در این صورت براساس قسمت الف نتیجه می‌گیریم که برای $r \in [0, 1]$ یک مستطیل n -بعدی است و لذا با توجه به قضیه‌ی ۲-۵-۴، بردار فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ جواب جبری دستگاه خطی فازی (۱-۶-۳) است. ■

نکته ۴-۵-۱: مطابق قضایای ۴-۵-۲ و ۴-۵-۳، هرگاه مجموعه جواب فازی $\overline{SD}$ دارای زیر مجموعه ای که در خاصیت ۱ قضیه ۴-۵-۲ و خاصیت ۲ قضیه ۴-۵-۳ صدق کند، آنگاه دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) دارای هیچ جواب جبری نیست. همچنین هرگاه $\overline{SD}$ دارای نامتناهی زیر مجموعه‌هایی باشد که در خاصیت ۱ قضیه ۴-۵-۲ و خاصیت ۲ قضیه ۴-۵-۳ صدق کند، آنگاه دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) نیز دارای نامتناهی جواب جبری است.

همچنین براساس قضایای ۴-۵-۲ و ۴-۵-۳، می‌توان یک شرط لازم و کافی جهت وجود و یکتایی جواب جبری برای یک دستگاه خطی فازی به صورت زیر ارائه داد:

نکته ۴-۵-۲: دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) دارای جواب جبری یکتاست اگر و تنها اگر مجموعه جواب فازی $\overline{SD}$ دارای دقیقاً یک زیر مجموعه که در خاصیت ۱ قضیه ۴-۵-۲ و خاصیت ۲ قضیه ۴-۵-۳ صدق کند، باشد.

نکته ۴-۵-۳: فرض کنید Γ یک مستطیل n -بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد به طوری که در یک هرم $2n$ -طرفه^۲ مانند Δ نشانده شده است، یعنی $\Gamma \subseteq \Delta$. همچنین فرض کنید هر طرف یا مرز Δ حداقل شامل یک نقطه‌ی رأسی Γ باشد. در این صورت می‌توانیم این مستطیل n -بعدی Γ را تنها به وسیله‌ی $2n$ نقطه‌ی رأسی آن، مشخص کنیم. به عبارت دیگر، هرگاه نقطه‌ی $A_i = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i)^T \in \mathbb{R}^n$ ، $i = 1, 2, \dots, 2n$ ، آن نقطه‌ی رأسی Γ باشد که روی i -امین مرز یا i -امین طرف هرم Δ است، آنگاه می‌توان مستطیل n -بعدی Γ را به صورت زیر مشخص کرد:

$$\Gamma = \{(y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n : \min_{i=1,2,\dots,n} \{a_j^i\} \leq y_j \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \{a_j^i\}\}.$$

باید توجه شود که مستطیل n -بعدی Γ کلاً دارای 2^n نقطه‌ی رأسی است، اما با توجه به فرضیات بالا می‌توانیم مستطیل n -بعدی Γ را تنها به وسیله‌ی $2n$ نقطه‌ی رأسی آن، مشخص کنیم.

^۲2n-sided pyramid

در ادامه، تابع عضویت جواب جبری یک دستگاه خطی فازی را بوسیله‌ی آن نقاط رأسی که روی r -مرزهای پایینی و r -مرزهای بالایی مجموعه جواب دستگاه خطی شمول فازی مربوطه قرار دارد را در قالب قضیه‌ی زیر ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴-۵-۴: فرض کنید $\tilde{F} \subseteq \widetilde{\mathcal{DS}}$ به طوری که در خاصیت‌های زیر صدق کند:

(۱) برای $[\tilde{F}]_r, r \in [0, 1]$ یک مستطیل n -بعدی در $\mathbb{R}^n$ باشد، یعنی

$$[\tilde{F}]_r = \prod_{i=1}^n [\tilde{\gamma}_i]_r = \prod_{i=1}^n [\underline{\gamma}_i(r), \overline{\gamma}_i(r)],$$

که در آن برای $\tilde{\gamma}_i, i = 1, 2, \dots, n$ یک عدد فازی است.

(۲) برای $i = 1, 2, \dots, n$ و برای $r \in [0, 1]$ نقاط رأسی $(\alpha_1^i(r), \alpha_2^i(r), \dots, \alpha_n^i(r))^T$

و $(\beta_1^i(r), \beta_2^i(r), \dots, \beta_n^i(r))^T$ از $[\tilde{F}]_r$ وجود داشته باشند به طوری که به ترتیب روی i -امین r -مرز پایینی و i -امین r -مرز بالایی $\widetilde{\mathcal{DS}}$ قرار گرفته باشند.

در این صورت تابع عضویت جواب جبری دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) به صورت زیر می‌باشد.

$$\mu_{\tilde{x}_{jA}}(y) = \sup\{r : \min_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\} \leq y \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\}\},$$

برای $j = 1, 2, \dots, n$

اثبات. با توجه به خاصیت‌های ۱ و ۲ و بر اساس نکته‌ی ۴-۵-۲ نتیجه می‌گیریم که دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) دارای جواب جبری یکتا به صورت زیر می‌باشد.

$$\tilde{x}_A = (\tilde{x}_{1A}, \tilde{x}_{2A}, \dots, \tilde{x}_{nA})^T = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \dots, \tilde{\gamma}_3)^T,$$

و بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۴-۴-۱ نتیجه می‌گیریم

$$[\tilde{F}]_r = [\tilde{x}_A]_r, \quad r \in [0, 1].$$

از طرفی با توجه به فرض، برای $[\tilde{F}]_r \subseteq [\widetilde{\mathcal{DS}}]_r, r \in [0, 1]$ و لذا به کمک نکته‌ی ۴-۵-۳ به دست می‌آوریم:

$$[\tilde{F}]_r = \{(y_1, y_2, \dots, y_n)^T : \min_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\} \leq y_j \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\}\}.$$

از معادلات فوق نتیجه می‌گیریم که

$$[\tilde{x}_A]_r = \{(y_1, y_2, \dots, y_n)^T : \min_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\} \leq y_j \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\}\}.$$

حال براساس قضیه ۴-۴-۱، برای $j = 1, 2, \dots, n$ و برای $r \in [0, 1]$ خواهیم داشت

$$[\tilde{x}_{jA}]_r = [\min_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\}, \max_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\}]. \quad (۲۶-۵-۴)$$

سرانجام به وسیله معادله (۲۶-۵-۴) تابع عضویت جواب جبری دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) برای $j = 1, 2, \dots, n$ می تواند به صورت زیر ارائه گردد.

$$\mu_{\tilde{x}_{jA}}(y) = \sup\{r : \min_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\} \leq y \leq \max_{i=1,2,\dots,n} \{\alpha_j^i(r), \beta_j^i(r)\}\}. \blacksquare$$

مباحثی که تا کنون در مورد دستگاه های خطی فازی و دستگاه های خطی شمول فازی بیان شده اند، بیشتر حالت نظری داشتند تا عملی. در بخش بعدی، با ادغام مطالبی که در مورد دستگاه های خطی بازه ای و فازی و نیز مباحثی که در خصوص دستگاه های خطی شمول بازه ای و فازی بیان شد، به ارائه ی یک روش عملی برای به دست آوردن جواب جبری یک دستگاه خطی فازی می پردازیم. البته باید خاطر نشان کرد که روش مورد نظر تنها برای دستگاه هایی که دارای جواب جبری یکتا هستند، کاربرد دارد.

۶-۴ ارائه ی یک روش

دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف ۳-۳-۴ با تساوی قرار دادن r -برش های سمت چپ و راست دستگاه خطی فازی (۳-۶-۱) به دست خواهیم آورد:

$$\begin{cases} a_{11} [\tilde{x}_1]_r + a_{12} [\tilde{x}_2]_r + \dots + a_{1n} [\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_1]_r, \\ a_{21} [\tilde{x}_1]_r + a_{22} [\tilde{x}_2]_r + \dots + a_{2n} [\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_2]_r, \\ \vdots \\ a_{n1} [\tilde{x}_1]_r + a_{n2} [\tilde{x}_2]_r + \dots + a_{nn} [\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_n]_r, \end{cases} \quad r \in [0, 1]. \quad (۱-۶-۴)$$

همانطور که مشاهده می کنیم، برای حل یک دستگاه خطی فازی، کافی است خانواده ای از دستگاه های خطی بازه ای در ترازهای $r^{\circ 3}$ حل شوند. در این قسمت، روشی را که در فصل دوم برای به دست آوردن جواب جبری یک دستگاه خطی بازه ای ارائه داده ایم را روی دستگاه (۴-۶-۱) در هر تراز r اجرا می کنیم. برای این کار، دستگاه خطی شمول بازه ای در تراز r را به صورت زیر معرفی می کنیم.

تعریف ۴-۶-۱: دستگاه خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \in [\tilde{b}_1]_r, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \in [\tilde{b}_2]_r, \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n \in [\tilde{b}_n]_r, \end{cases} \quad r \in [0, 1], \quad (۴-۶-۲)$$

که در آن ماتریس ضرایب $A = (a_{ij})_{n \times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار است و خانواده‌ی بازه‌های $\{[\tilde{b}_i]_r : 0 \leq r \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی می‌دهند، را یک دستگاه خطی شمول بازه‌ای در تراز r می‌گوییم.

همانند فصل دوم و با توجه به تعریف ۲-۲-۲، می‌توانیم مجموعه جواب در تراز r را به صورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۴-۶-۲: مجموعه‌ی

$$\mathcal{SS}_r = \{(y_1, y_1, \dots, y_1)^T : \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \in [\tilde{b}_i]_r, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad r \in [0, 1],$$

را مجموعه جواب دستگاه خطی شمول بازه‌ای (۴-۶-۲) در تراز r می‌گوییم.

همانند لم ۲-۲-۱، می‌توانیم لم زیر را ارائه دهیم.

لم ۴-۶-۱: هرگاه ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد، آن گاه برای $r \in [0, 1]$ خواهیم داشت:

$$\mathcal{SS}_r \neq \emptyset.$$

نکته ۴-۶-۱: با توجه به معادله‌ی (۱-۵-۴) و تعریف ۴-۶-۲ برای $r \in [0, 1]$ نتیجه می‌گیریم:

$$\mathcal{SS}_r = [\widetilde{\mathcal{SS}}]_r.$$

در ضمن، به وسیله‌ی معادلات (۷-۳-۴) و (۸-۳-۴) به راحتی می‌توان برای $j = 1, 2, \dots, n$ ، $\underline{x}_j^*(r)$ و $\bar{x}_j^*(r)$ را برای دستگاه خطی شمول بازه‌ای در تراز r (۲-۶-۴) به دست آورد. همچنین مشابه لم ۲-۲-۲ می‌توان لم زیر را ارائه دهیم.

لم ۲-۶-۴: فرض کنید ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد. در این صورت برای $r \in [0, 1]$ و هر $i = 1, 2, \dots, n$ داریم:

$$\underline{b}_i(r) - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^*(r) - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_j^*(r) = \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \bar{x}_j^*(r) + \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \underline{x}_j^*(r) - \bar{b}_i(r).$$

در قضیه‌ی زیر، همانند قضیه‌ی ۳-۴-۲ روشی را برای به دست آوردن جواب جبری یکتا در هر تراز r ارائه می‌دهیم. بعد از جمع آوری تمام جواب‌های جبری در همه‌ی ترازها، هرگاه خانواده‌ی بازه‌های به دست آمده تشکیل عدد فازی داد در این صورت جواب به دست آمده را به عنوان جواب جبری یکتای فازی قبول می‌کنیم. در غیر این صورت دستگاه فازی مربوطه دارای جواب جبری یکتای فازی نیست.

قضیه ۱-۶-۴: فرض کنید $|A| = E = (e_{ij})_{n \times n}$ و بردار $\theta_r = (\theta_1(r), \theta_2(r), \dots, \theta_n(r))^T$ جواب دستگاه $E\theta_r = W_r$ باشد که در آن $W_r = (w_1(r), w_2(r), \dots, w_n(r))^T$ و

$$w_i(r) = \underline{b}_i(r) - \sum_{j \in \Gamma_i^+} a_{ij} \underline{x}_j^*(r) - \sum_{j \in \Gamma_i^-} a_{ij} \bar{x}_j^*(r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (۳-۶-۴)$$

و نیز فرض کنید برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، خانواده‌ی بازه‌های بسته‌ی

$$\{[\tilde{x}_i]_r = [\underline{x}_i^*(r) + \theta_i(r), \bar{x}_i^*(r) - \theta_i(r)] : r \in [0, 1]\}, \quad (۴-۶-۴)$$

تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را بدهد. در این صورت بردار عدد فازی $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ که برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، r -برش‌های آن به صورت معادله‌ی (۴-۶-۴) تعیین می‌شود، جواب جبری یکتای فازی دستگاه خطی فازی (۱-۶-۳) می‌باشد.

اثبات. اثبات قضیه در هر تراز r ، کاملاً شبیه به اثبات قضیه‌ی ۳-۴-۲ است.

روش ارائه شده در قضیه‌ی فوق برای آن دسته از دستگاه‌های خطی فازی کاربرد دارد که دارای جواب جبری یکتای فازی باشند. به عنوان یک نمونه، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴-۶-۱: دستگاه خطی فازی 3×3 زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} 2\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = \tilde{b}_1, \\ -\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - 2\tilde{x}_3 = \tilde{b}_2, \\ \tilde{x}_1 - 3\tilde{x}_2 + \tilde{x}_3 = \tilde{b}_3, \end{cases}$$

که در آن اعداد فازی $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ و $\tilde{y}_3$ به وسیله‌ی r -برش‌هایشان به صورت زیر مشخص شده‌اند:

$$[\tilde{b}_1]_r = [r - 2, 2 - 3r], \quad [\tilde{b}_2]_r = [1 + 2r, 7 - 4r], \quad [\tilde{b}_3]_r = [r - 3, -2r],$$

به آسانی می‌توان بررسی کرد که ماتریس ضرایب به طور کامل نامنفرد می‌باشد. براساس معادلات (۷-۳-۳) و (۴-۳-۸) خواهیم داشت:

$$[\tilde{x}_1^*]_r = [\underline{x}_1^*(r), \bar{x}_1^*(r)] = \frac{1}{7}[64r - 71, 71 - 78r],$$

$$[\tilde{x}_2^*]_r = [\underline{x}_2^*(r), \bar{x}_2^*(r)] = \frac{1}{7}[47r - 26, 82 - 61r],$$

$$[\tilde{x}_3^*]_r = [\underline{x}_3^*(r), \bar{x}_3^*(r)] = \frac{1}{7}[66r - 80, 59 - 73r].$$

همچنین از معادله‌ی (۴-۶-۳) به دست می‌آوریم

$$w_1(r) = \underline{b}_1(r) - (2\underline{x}_1^*(r) + \underline{x}_3^*(r)) - (-\bar{x}_2^*(r)) = \frac{206}{7}(1 - r),$$

$$w_2(r) = \underline{b}_2(r) - (\underline{x}_2^*(r)) - (-\bar{x}_1^*(r) - 2\bar{x}_3^*(r)) = \frac{208}{7}(1 - r),$$

$$w_3(r) = \underline{b}_3(r) - (\underline{x}_1^*(r) + \underline{x}_3^*(r)) - (-3\bar{x}_2^*(r)) = \frac{208}{7}(1 - r).$$

سرانجام با حل دستگاه حقیقی 3×3 $E\Theta_r = W_r$ برای $r \in [0, 1]$ به دست می‌آوریم

$$\Theta_r = (\theta_1(r), \theta_2(r), \dots, \theta_n(r))^T = \left(\frac{57}{7}(1 - r), \frac{33}{7}(1 - r), \frac{59}{7}(1 - r) \right)^T.$$

حال با استفاده از معادله‌ی (۴-۶-۴) نتیجه خواهیم گرفت

$$[\tilde{x}_1]_r = [\underline{x}_1^*(r) + \theta_1(r), \bar{x}_1^*(r) - \theta_1(r)] = [r - 2, 2 - 3r],$$

$$[\tilde{x}_2]_r = [\underline{x}_2^*(r) + \theta_2(r), \bar{x}_2^*(r) - \theta_2(r)] = [1 + 2r, 7 - 4r],$$

$$[\tilde{x}_3]_r = [\underline{x}_3^*(r) + \theta_3(r), \bar{x}_3^*(r) - \theta_3(r)] = [r - 3, -2r].$$

براساس لم ۳-۳-۱ به راحتی می‌توان مشاهده کرد که خانواده‌ی بازه‌های بسته

$$\{[\tilde{x}_i]_r : r \in [0, 1]\},$$

برای $i = 1, 2, 3$ تشکیل r -برش‌های یک عدد فازی را می‌دهد. بنابراین در این مثال دارای جواب جبری یکتای فازی هستیم که r -برش‌های آن به صورت بالا می‌باشد. در نهایت خاطر نشان می‌کنیم که در این مثال، تمامی محاسبات را به کمک نرم‌افزار متلب انجام داده‌ایم.

زمینه‌های باز کاری

در این رساله دستگاه‌های خطی شمول بازه‌ای و فازی مربعی معرفی شده و رابطه‌ی بین مجموعه جواب این گونه دستگاه‌ها، با جواب جبری دستگاه‌های خطی بازه‌ای و فازی مورد بررسی قرار گرفتند. یکی از زمینه‌هایی که می‌توان روی آنها کارهای جدیدی انجام داد، بررسی خاصیت‌های مجموعه جواب دستگاه‌های خطی شمول بازه‌ای و فازی می‌باشد، اینکه آیا همواره مجموعه‌هایی محدب و کراندار هستند؟ همچنین می‌توان تمامی کارهای صورت گرفته در این رساله را به دستگاه‌های غیرمربعی تعمیم داد. در ضمن، می‌توان با استفاده از مفهوم «شمول» مطرح شده در این رساله، مسائل بهینه سازی شمول بازه‌ای و فازی، مسائل انتگرال شمول بازه‌ای و فازی و ... را تعریف کرد و مجموعه جواب آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.

واژه‌نامه

Union	اجتماع
Heigh	ارتفاع
Fuzzy reasoning	استدلال فازی
Intersection	اشتراک
Extension principle	اصل گسترش
Interval number vector	بردار عدد بازه‌ای
Fuzzy number vector	بردار عدد فازی
Completely nonsingular	به طور کامل نامنفرد
Width	پهنا
Membership function	تابع عضویت
Characteristic function	تابع مشخصه
Convexity	تحدب
Level	تراز
Support	تکیه گاه
Empty	تهی
Weak fuzzy solution	جواب فازی ضعیف
Strong fuzzy solution	جواب فازی قوی
Cartesian product	حاصل ضرب کارتزین
Fuzzy arithmetic	حساب فازی
Membership degree	درجه عضویت

Fully interval linear system	دستگاه خطی تمام بازه‌ای
Interval inclusion linear system	دستگاه خطی شمول بازه‌ای
Fuzzy inclusion linear system	دستگاه خطی شمول فازی
Fuzzy linear system	دستگاه خطی فازی
Subnormal	زیر نرمال
Radius	شعاع
Interval number	عدد بازه‌ای
Fuzzy number	عدد فازی
Trapezoidal fuzzy number	عدد فازی ذوزنقه‌ای
Triangular fuzzy number	عدد فازی مثلثی
Absolute value	قدر مطلق
Minimal absolute value	قدر مطلق کمینه
Interval number matrix	ماتریس عدد بازه‌ای
Solution set	مجموعه جواب
Tolerable solution set	مجموعه جواب تحمل پذیر
Controllable solution set	مجموعه جواب کنترل پذیر
United solution set	مجموعه جواب متحده
Fuzzy set	مجموعه فازی
Convex fuzzy set	مجموعه فازی محدب
Normal fuzzy set	مجموعه فازی نرمال
Classic set	مجموعه کلاسیک

Universal set	مجموعه مرجع
Boundary	مرز
Fuzzy logic	منطق فازی
Regular	منظم
Normal	نرمال
Vertex point	نقطه‌ی رأسی
Midpoint	نقطه‌ی میانی
Mapping	نگاشت
Upper semi-continuous	نیمه پیوسته بالایی
$2n$ -sided pyramid	هرم $2n$ طرفه

- [1] S. Abbasbandy, M. Alavi, A method for solving fuzzy linear system, Iranian Journal of Fuzzy Systems 2 (2005) 37–43.
- [2] S. Abbasbandy, R. Ezzati, A. Jafarian, LU decomposition method for solving fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 172 (2006) 633–643.
- [3] S. Abbasbandy, A. Jafarian, Steepest descent method for system of fuzzy linear equations, Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 823–833.
- [4] S. Abbasbandy, A. Jafarian, R. Ezzati, Conjugate gradient method for fuzzy symmetric positive definite system of linear equations, Applied Mathematics and Computation 171 (2005) 1184–1191.
- [5] G. Alefeld, G. Mayer, The Cholesky method for interval data, Linear Algebra Appl. 194 (1993) 161–182.
- [6] G. Alefeld, G. Mayer, On the symmetric and unsymmetric solution set of interval systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 16 (1995) 1223–1240.
- [7] G. Alefeld, G. Mayer, Interval analysis: theory and applications, Journal of Computational and Applied Mathematics 121 (2000) 421–464.
- [8] T. Allahviranloo, Numerical methods for fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 155 (2004) 493–502.
- [9] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Solving fuzzy linear systems by homotopy perturbation method, Int. J. Comput. Cognit. 8 (2) (2010) 24–30.
- [10] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A new approach to obtain algebraic solution of interval linear systems, Soft Computing 16 (2012) 121–133.
- [11] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory, Applied Mathematical Modelling 36 (2012) 5360–5379.
- [12] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A.A. Hosseinzadeh, E. Haghi, R. Nuraei, A note on “Fuzzy linear systems”, Fuzzy Sets and Systems 177 (2011) 87–92.

- [13] T. Allahviranloo, E. Haghi, M. Ghanbari, The nearest symmetric fuzzy solution for a symmetric fuzzy linear system, *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, 20(1) (2012) 151–172.
- [14] T. Allahviranloo, S. Salahshour, Fuzzy symmetric solution of fuzzy linear systems, *J. Comput. Appl. Math.* 235 (16) (2011) 4545–4553.
- [15] T. Allahviranloo, R. Nuraei, M. Ghanbari, E. Haghi, A. A. Hosseinzadeh, A new metric for L–R fuzzy numbers and its application in fuzzy linear systems, *Soft Computing* 16 (2012) 1743–1754.
- [16] M. Amirfakhrian, Numerical solution of a fuzzy system of linear equations with polynomial parametric form, *Int. J. Comput. Math.* 84(7) (2007) 1089–1097.
- [17] B. Asady, S. Abbasbandy, M. Alavi, Fuzzy general linear systems, *Applied Mathematics and Computation* 169 (2005) 34–40.
- [18] S. Corsaro, M. Marino, Interval Linear Systems: the State of the Art, *Computational Statistics* 21 (2006) 365–383.
- [19] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy numbers: an overview, in: J. Bezdek (Ed.), *Analysis of Fuzzy Information*, CRC Press, 1987, pp. 112–148.
- [20] R. Ezzati, Solving fuzzy linear systems, *Soft Comput.* 15 (1) (2011) 193–197.
- [21] J.A. Ferreira, F. Patricio, F. Oliveira, A priori estimate for the zeros of interval polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* 136 (2001) 271–281.
- [22] J.A. Ferreira, F. Patricio, F. Oliveira, On the computation of solutions of systems of interval polynomial equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 173 (2005) 295–302.
- [23] M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik, J. Rohn, K. Zimmermann (Eds.), *Linear Optimization Problems with Inexact Data*, Springer, 2006.
- [24] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Fuzzy linear systems, *Fuzzy Sets and Systems* 96 (1998) 201–209.
- [25] J. Garloff, Interval Gaussian elimination with pivot tightening, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 30 (2009) 1761–1772.

- [26] M. Ghanbari, T. Allahviranloo, Fuzzy inclusion linear systems, *Fuzzy Sets and Systems*, submitted for publication.
- [27] M. Ghanbari, T. Allahviranloo, E. Haghi, Estimation of algebraic solution by limiting the solution set of an interval linear system, *Soft Comput* 16 (2012) 2135–2142.
- [28] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Systems* 12 (1984) 215–229.
- [29] B. Kearfott, V. Kreinovich (Eds.), *Applications of Interval Computations*, Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [30] J. Kuttler, A Fourth-order Finite-Difference Approximation for the Fixed Membrane Eigenproblem, *Math. Comp.* 25 (1971) 237–256.
- [31] S. Markov, An iterative method for algebraic solution to interval equations, *Applied Numerical Mathematics* 30 (1999) 225–239.
- [32] R.E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.
- [33] I.A. Nikas, T.N. Grapsa, Bounding the zeros of an interval equation, *Applied Mathematics and Computation* 213 (2009) 466–478.
- [34] R. Nuraei, T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Finding an inner estimation of the solution set of a fuzzy linear system, *Applied Mathematical Modelling* 37 (2013) 5148–5161.
- [35] W. Oettli, W. Prager, Compatibility of approximate solution of linear equations with given error bounds for coefficients and right-hand sides, *Numer. Math.* 6 (1964) 405–409.
- [36] O.A. Prokopyev, S. Butenko, A. Trapp, Checking solvability of systems of interval linear equations and inequalities via mixed integer programming, *European Journal of Operational Research* 199 (2009) 117–121.
- [37] B.T. Polyak, S.A. Nazin, Interval solutions for interval algebraic equations, *Mathematics and Computers in Simulation* 66 (2004) 207–217.
- [38] P. Sevastjanov, L. Dymova, A new method for solving interval and fuzzy equations: Linear case, *Information Sciences* 179 (2009) 925–937.
- [39] S. Shary, Algebraic approach in the “outer problem” for interval linear equations, *Reliable Computing* 3 (2) (1997) 103–135.

- [40] C. Wu, M. Ming, On embedding problem of fuzzy number space: Part 1, Fuzzy Sets and Systems 44 (1991) 33–38.
- [41] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338–353.
- [42] H. J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

مقالات:

- [1] T. Alahviranloo, M. Ghanbari, Solving Fuzzy Linear Systems by Homotopy Perturbation Method, International Journal of Computational Cognition, 8(2) (2010) 24-30.
- [2] M. Ghanbari, Numerical Solution of Fuzzy Linear Volterra Integral Equations of the Second Kind by Homotopy Analysis Method, International Journal of Industrial Mathematics, 2(2) (2010) 73-87. **(ISC)**
- [3] T. Allahviranloo, M. Khezerloo, M. Ghanbari S. Khezerloo, The Homotopy Perturbation Method for Fuzzy Volterra Integral Equations, International Journal of Computational Cognition, 8(2) (2010) 31-37.
- [4] T. Alahviranloo, M. Ghanbari, Discrete homotopy analysis method for the nonlinear Fredholm integral equations, Ain Shams Engineering Journal, 2 (2011) 133-140.
- [5] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, A.A. Hosseinzadeh, E. Haghi, R. Nuraei, A note on “Fuzzy linear systems”, Fuzzy Sets and Systems, 77 (2011) 87-92. **(ISI)**
- [6] M. Ghanbari T. Alahviranloo, A New Application of Homotopy Analysis Method, Thai Journal of Mathematics, 10(1) (2012) 43-57.
- [7] M. Ghanbari , Approximate Analytical Solutions of Fuzzy Linear Fredholm Integral Equations by HAM, International Journal of Industrial Mathematics, 4(1) (2012) 53-67. **(ISC)**
- [8] T. Alahviranloo, M. Ghanbari, A new approach to obtain algebraic solution of interval linear systems, Soft Computing, 6 (2012) 121-133. **(ISI)**
- [9] T. Allahviranloo, R. Nuraei, M. Ghanbari, E. Haghi, A.A. Hosseinzadeh, A new metric for L-R fuzzy numbers and its application in fuzzy linear systems, Soft Computing, 16(10) (2012) 1743-1754. **(ISI)**
- [10] T. Alahviranloo, M. Ghanbari, On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory, Applied Mathematical Modelling, 36 (2012) 5360-5379. **(ISI)**
- [11] T. Allahviranloo, E. Haghi, M. Ghanbari, The nearest symmetric fuzzy solution for a symmetric fuzzy linear system, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, 20(1) (2012) 151-172. **(ISI)**

- [12] M. Ghanbari, T. Allahviranloo, E. Haghi, Estimation of algebraic solution by limiting the solution set of an interval linear system, *Soft Computing*, 16(12) (2012) 2135-2142. **(ISI)**
- [13] M. Ghanbari, Solution of the first order linear fuzzy differential equations by some reliable methods, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, 2012 (2012) 1-20. **(ISC)**
- [14] R.Nuraei, T. Allahviranloo, M. Ghanbari, Finding an inner estimation of the solution set of a fuzzy linear system, *Applied Mathematical Modelling*, 37(7) (2013) 5148-5161. **(ISI)**
- [15] M. Matinfar, M. Ghanbari, R.Nuraei, Numerical solution of linear fuzzy Volterra integro-differential equations by variational iteration method, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* 4 (2013) 575-586. **(ISI)**
- [16] S. Abbasbandy, R. Nuraei, M. Ghanbari, Revision of sign distance method for ranking of fuzzy numbers, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Accepted, In Press. **(ISI)**
- [17] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, M. Ghanbari, The series solutions of evolution equations by different semi-analytical methods, *Journal of Science Islamic Azad University*, Accepted, In Press. **(ISC)**
- [18] M. Ghanbari, R. Nuraei, Revision of a fuzzy distance measure, *International Journal of Industrial Mathematics*, Accepted, In Press. **(ISC)**
- [19] M. Ghanbari, R. Nuraei, Convergence of a semi-analytical method on the fuzzy linear systems, *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, Accepted, In Press. **(ISI)**
- [20] T. Allahviranloo, M. Ghanbari, R. Nuraei, An application of a semi analytical method on linear fuzzy Volterra integral equations, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, Accepted, In Press. **(ISC)**
- [21] M. Ghanbari, R. Nuraei, Note on “New solutions of LR fuzzy linear systems using ranking functions and ABS algorithms”, *Journal of Fuzzy Information and Engineering*, Accepted, In Press.
- [22] M. Ghanbari, R. Nuraei, A new computational method for solving the first order linear fuzzy Fredholm integro-differential equations, *Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing*, Accepted, In Press. **(ISC)**
- [23] M. Matinfar, M. Ghanbari, R.Nuraei, He's variational iteration method for

Solving linear Fredholm fuzzy integral equations of the second kind, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, Accepted, In Press. **(ISI)**

کنفرانس ها:

- [1] M. Ghanbari, R. Nuraei, An improvement on a ranking method, The 11 th Iranian Conference on Fuzzy Systems , University of Sistan and Baluchestan , Zahedan, Iran.
- [2] M. Ghanbari, E. Haghi, R. Nuraei, A.A.Hosseinzadeh, A new metric distance for L-R fuzzy numbers, The 11 th Iranian Conference on Fuzzy Systems , University of Sistan and Baluchestan , Zahedan, Iran.

Ph.D. Thesis On Applied Mathematics

Subject: *Interval and Fuzzy Inclusion Linear Systems*

Abstract

In this thesis, we first focus on interval mathematics and introduce several concepts, for instance, interval number, interval arithmetic and interval linear system. Then, we define a new concept, namely “interval inclusion linear system”, using the defined concepts and also we define a set as its solution set. In continuation, we investigate the relation between the solutions of an interval inclusion linear system and an interval linear system, and then we propose a method for obtaining the algebraic solution of an interval linear system by the defined concepts. Finally, we extend all above discussions in the case of fuzzy mathematics, and define several concepts, for instance, fuzzy number, fuzzy arithmetic and fuzzy linear system. Then, we define another new concept, namely “fuzzy inclusion linear system” and the same as before, we investigate the relation between the solutions of this system and a fuzzy linear system. At last, we end this thesis by introducing a method for obtaining fuzzy algebraic solution of a fuzzy linear system.

Keywords. Interval number, Interval arithmetic, Interval linear system, Interval inclusion linear system, Fuzzy number, Fuzzy arithmetic, Fuzzy linear system, Fuzzy inclusion linear system.

By: *Mojtaba Ghanbari*