
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات تهران

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی -آنالیز عددی **(Ph. D)**

موضوع

جواب های تحلیلی وعددی معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه طبیعی وکسری

اساتید راهنما

دکتر سعید عباسبندی

دکتر توفیق الهویرنلو

استاد مشاور

دکتر محمد علی فریبرزی عراقی

نگارش

محمد رضا بلوچ شهریاری

تابستان-۱۳۹1

خدای مهربان و بی همتا را شاکرم که بار دیگر مهر بی پایانش را در تدوین این رساله ، ارزانی حقیر داشت و با عنایات و تأییدات خود در جریان پژوهش راهگشا و کارسازم بود:

منم که دیده به دیدار دوست کردم باز — چه شکر گویمت ای کارساز بنده نواز

بی شک تهیه این رساله، ماحصل یاری بزرگوارانی بود که بر خود لازم می بینم که تشکر عمیق خود را نسبت به ایشان ابراز دارم.

بر خود فرض مسلّم می دانم ارادت بی کران و مراتب امتنان و سپاس ویژه خود را نثار اساتید فرزانه و بزرگوارم، جناب آقای پرفسور عباس بندی، جناب آقای پرفسور الهویرنلو که در جریان این پژوهش و نیز در طی تلمذ در محضرشان از انوار افکار و راهنمایی های شایسته ایشان بهره ها برده ام. باری تعالی بر توفیقاتشان بیفزاید. سزاوار است از ،مشاورت ها و نظرات ارزنده جناب آقای دکتر فریبرز عراقی که راهگشای بنده در تدوین این رساله بودند، کمال تشکر و قدر دانی نمایم. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای پرفسور حسین زاده لطفی ، جناب آقای دکتر عزتی و سرکار خانم دکتر افشار که زحمت داوری این رساله را عهده دار

شدند و با نظرات ارزشمند خود یاری ام نمودند، تشکر می کنم . همچنین بر من واجب است که خالصانه ترین و سبزترین سپاس خود را نثار برادران بزرگوارم جناب آقای حمیدرضا شهریاری ، علیرضا ، ایمان سازم ، خصوصا برادر ارشدم حمیدرضا شهریاری که همواره در تنگناها و مشکلات با صبر و شکیبایی یار و یاور بنده بودند . عزتشان افزون باد. از خواهران مهربانم و جناب آقای دکتر محمدرضایی و خواهرزاده ها و برادرزاده های عزیزم بخاطر حمایت های معنوی همیشگی شان صمیمانه تشکر می کنم. سعادت و بهروزی این عزیزان تمنای قلبی من از خداوند متعال است.

محمدرضا خ بلوچ شهریاری - تابستان 1391

با تمام وجود تقدیم به

پدر بزرگوارم،

که صدای گرم و پدرانه و معصومش زمزمه روح و جانم

است.

مادر آبی تر از آسمانم،

به پاس مهربانی ها، دعاهای مادرانه و روشنایی هایی که به زندگی ام داده است.

فهرست مطالب

چکیده

درابتدا مسئله مقدار اولیه فازی را تعریف و شرایط وجود جواب منحصر به فرد برای این مسئله ارائه خواهد شد . همچنین جوابهای مختلف مسائل مقدار اولیه فازی که به واسطه تعاریف متفاوت مشتق فازی ایجاد می شود مقایسه خواهند شد .سپس روشهای عددی برای حل مسائل مقدار اولیه فازی توضیح داده خواهد شد.

در ادامه، از آنجا که مشتقات و انتگرال‌های فازی از مرتبه کسری در بسیاری از مسائل کاربردی و فیزیکی ظاهر شده و دارای کاربردهای فراوانی هستند، که یکی از مهم‌ترین کاربردهای آنها تجزیه و تحلیل وحل معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری می‌باشد. در این پایان‌نامه، به بررسی تعاریف و خواص مشتق و انتگرال فازی از مرتبه کسری پرداخته و سپس به حل معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری و تابع گرین کسری با استفاده تبدیلات لاپلاس فازی می پردازیم. و نهایتا تعریف مشتق کسری موضعی فازی بیان کرده تعدادی از خواص پایه ای و قضایای آنها را بیان و اثبات می‌کنیم. و درانتها چند مثال از آنها را برای نشان دادن توانایی و اعتبار روش های بیان شده حل خواهیم نمود.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه طبیعی وکسری،**روش پیشگو -اصلاح کننده تصحیح یافته** ،مشتق تعمیم یافته، **مشتق** تعمیم یافته ریمان-لیوویل، **مشتق** تعمیم یافته دنباله ای ریمان-لیوویل، ،تبدیلات لاپلاس فازی، تابع فازی–مقدار

فصل اول

پیشگفتار

۱-۱- معرفی

هدف از این بخش معرفی بعضی از پیش‌نیازهای لازم در این پایان‌نامه و بیان تاریخچه‌ی پیدایش مشتقات و انتگرال‌های کسری است.

چون می‌خواهیم با کاربردهای مشتقات و انتگرال‌ها از مراتب کسری(محاسبات کسری) در معادلات دیفرانسیل فازی کار کنیم، بنابراین در فصل چهارم به معرفی مشتق و انتگرال فازی از مرتبه‌ی کسری و بیان تعاریف مختلف و کاربردهای گوناگون از آنها می‌پردازیم و سپس درانتهای این فصل به معرفی جواب‌های معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری پرداخته تا به هدف اصلی خود برسیم.

2-1- تاریخچه‌ی پیدایش

در سال ۱۶۹۵، هوپیتال[1] نامه‌ای به لایب‌نیتز[2] نوشت، مبنی بر این که $\frac{d^n y}{dx^n}$ وقتی $n=\frac{1}{2}$ است، چگونه توجیه می‌شود؟ و لایب‌نیتز[46] در پاسخ، رابطه‌ی نزدیک بین مشتقات و سری‌های نامتناهی (واگرا) را مطرح کرد و نوشت: " اگر چه سری‌های واگرا و هندسه رابطه‌ی دوری با هم دارند، در سری‌های واگرا تنها مجاز به استفاده از توان‌های صحیح مثبت و منفی هستیم و تا به حال استفاده از توان‌های کسری را نداشته‌ایم." او ادامه می‌دهد: " $d^{\frac{1}{2}}x$ مساوی $x\sqrt{\frac{dx}{x}}$ می‌باشد." و اظهار می‌دارد: " این یک پارادوکس آشکار از چیزی است که روزی نتایج مفیدی خواهد داد."

1- Hopital
2- Leibniz

در سال ۱۸۱۹، لاکروا[1] در کتاب هفتصد صفحه‌ای خود[42] دو صفحه را به بحث مشتق از مرتبه‌ی دلخواه اختصاص داد. او نشان داد که اگر $y = x^a$ آنگاه $\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}}$، به ویژه این نتیجه را بدست آوردکه $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}} x = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$، که این با نتایج حاصل از تعاریف مدرن ریمان[۵۰] نیز منطبق است.

در سال ۱۸۲۳، آبل[2][3] اولین کاربرد حساب دیفرانسیل کسری را در مسائل فیزیکی(خم‌همزمانی[3]، مسئله تعیین یک منحنی است به قسمی که اگر جسمی تحت تاثیر نیروی جاذبه بدون اصطکاک روی آن بلغزد، زمان حرکت آن مستقل از نقطه‌ی شروع حرکت باشد) ارائه داد و البته این مسئله را حل نکرد.

در سال ۱۸۸۴، لوران[4][47] نظریه‌ی عملگرهای تعمیم یافته D^{β} با حقیقی را ارائه و منتشر کرد(که شامل D^{β} با β گویا، گنگ، حقیقی و مختلط نیز می‌توانست باشد) و با مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه‌ی دلخواه مواجه شد.

در سال ۱۸۹۲، هوی‌ساید[5][27] مشتقات از مرتبه‌ی کسری را در نظریه‌ی انتقال خط خود بکار برد.

در سال ۱۹۳۶، جمانت[6][26] نظریه‌ی انتقال خط هوی‌ساید را ادامه داد و مشتقات کسری را در خاصیت کشسانی استفاده کرد.

در سال ۱۹۷۴، راس[7] "اولین کنفرانس دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه کسری و کاربردهای آن" را برگزار کرد و گزارش آن را در کتاب [55] به چاپ رساند.

---

[1]- Lacroix
[2]- Abel
[3] -Tautochrone
[4]- Laurent
[5]- Heaviside
[6]- Gemant
[7]- Ross

در سال ۱۹۹۳، کنت میلر[1] و راس[48] کتاب "مقدمه‌ای بر دیفرانسیل و انتگرال و معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی کسری " را ارائه دادند، که این کتاب روش‌های خوبی برای این موضوع ارائه می‌دهد.

در سال ۱۹۹۷، کولوانکار[2][38] در پایان‌نامه‌ی دکتری خود، به مطالعه در مورد ارتباط بین فرکتال‌ها و حساب دیفرانسیل و انتگرال موضعی از مرتبه‌ی کسری پرداخت.

در سال ۲۰۰۰، هلفر[3][۲۸] کتابی با عنوان " کاربردهایی از دیفرانسیل و انتگرال از مرتبه‌ی کسری در فیزیک" در ۹ بخش چاپ و منتشر کرد که هر بخش به کاربردهای ویژه‌ای می‌پردازد. و همچنین یکی از تاثیرگذار ترین کارها در محاسبات کسری کتاب پودلوبنی [53] و دیگری در سال ۲۰۰6، کتاب کیلبس [4][36] می باشد.

1-3- تابع گاما

فرض کنید $F(n)$ تابع فاکتوریل باشد. در این صورت برای هر عدد صحیح مثبت n داریم:

$$F(1)=1 \qquad , \qquad F(n)=nF(n-1) \qquad n=2,3,... \tag{1-1}$$

تابع گاما برای x مثبت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\,.$$

توجه کنید که

$$\frac{d}{dt}\left(t^x e^{-t}\right)=xt^{x-1}e^{-t}-t^x e^{-t}$$

حال اگر از طرفین این فرمول از $t=0$ تا $t=\infty$ انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\left[t^x e^{-t}\right]_0^\infty=x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt-\int_0^\infty t^x e^{-t}dt \qquad \Rightarrow 0=x\Gamma(x)-\Gamma(x+1)$$

بنابراین

$$.\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

1- Miller
2- Kolwankar
3- Hilfer
4-kilbass

تابع گاما را می‌توان به صورت زیر نیز برای هر x مثبت، تعریف کرد:

$$\begin{aligned}&\Gamma(1)=1\\&\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad\qquad x>0\end{aligned} \tag{2-1}$$

ابتدا (۱-۲) نشان می‌دهد که $\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$ و همچنین نشان می‌دهد که $\Gamma(x)$ وقتی $x=0$ است، تعریف نشده است. زیرا در غیر این صورت داریم:

$$0=0\Gamma(0)=\Gamma(1)=1$$

که تناقض است.

اگر بنویسیم $G(x)=\Gamma(x+1)$، خواهیم داشت:

$$G(1)=1 \qquad , \qquad G(x)=xG(x-1)$$

که از مقایسه آن با (۱-۱) در می‌یابیم که:

$$G(n)=F(n)=n!.$$

پس برای تمام اعداد مثبت صحیح n داریم:

$$n!=\Gamma(n+1).$$

حال با توجه به تعریف تابع گاما، تعریف زیر کاملا طبیعی است.

$$x!=\Gamma(x+1) \tag{3-1}$$

که با توجه به آن $0!=\Gamma(1)=1$ به کمک فرمول $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ می‌توان $x!$ را وقتی که مقدار x کسری است، محاسبه کنیم. به عنوان مثال

$$\left(\frac{7}{2}\right)!=\Gamma(\frac{7}{2}+1)=\frac{7}{2}\Gamma(\frac{7}{2})=\frac{7}{2}\Gamma(\frac{5}{2}+1)=\frac{7}{2}\frac{5}{2}\Gamma(\frac{5}{2})=\ldots=\frac{105}{16}\Gamma(\frac{1}{2})$$

و می‌دانیم که، با اعمال تغییر متغیر $t=u^2$:

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=2\int_0^\infty e^{-u^2}du=2\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$$

پس داریم:

$$.\left(\frac{7}{2}\right)! = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

و همچنین برای اعداد منفی x از تعریف زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}\ .$$

به عنوان مثال

$$.\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$$

و همچنین می‌توان ثابت کرد که(که به تعریف وایرشتراس معروف است)

$$.\Gamma(x)\Gamma(-x) = -\frac{\pi}{x\,Sin(\pi x)}$$

اویلر برای تابع گاما تعریف دیگری به صورت زیر ارائه کرد:

$$.\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}\right\}$$

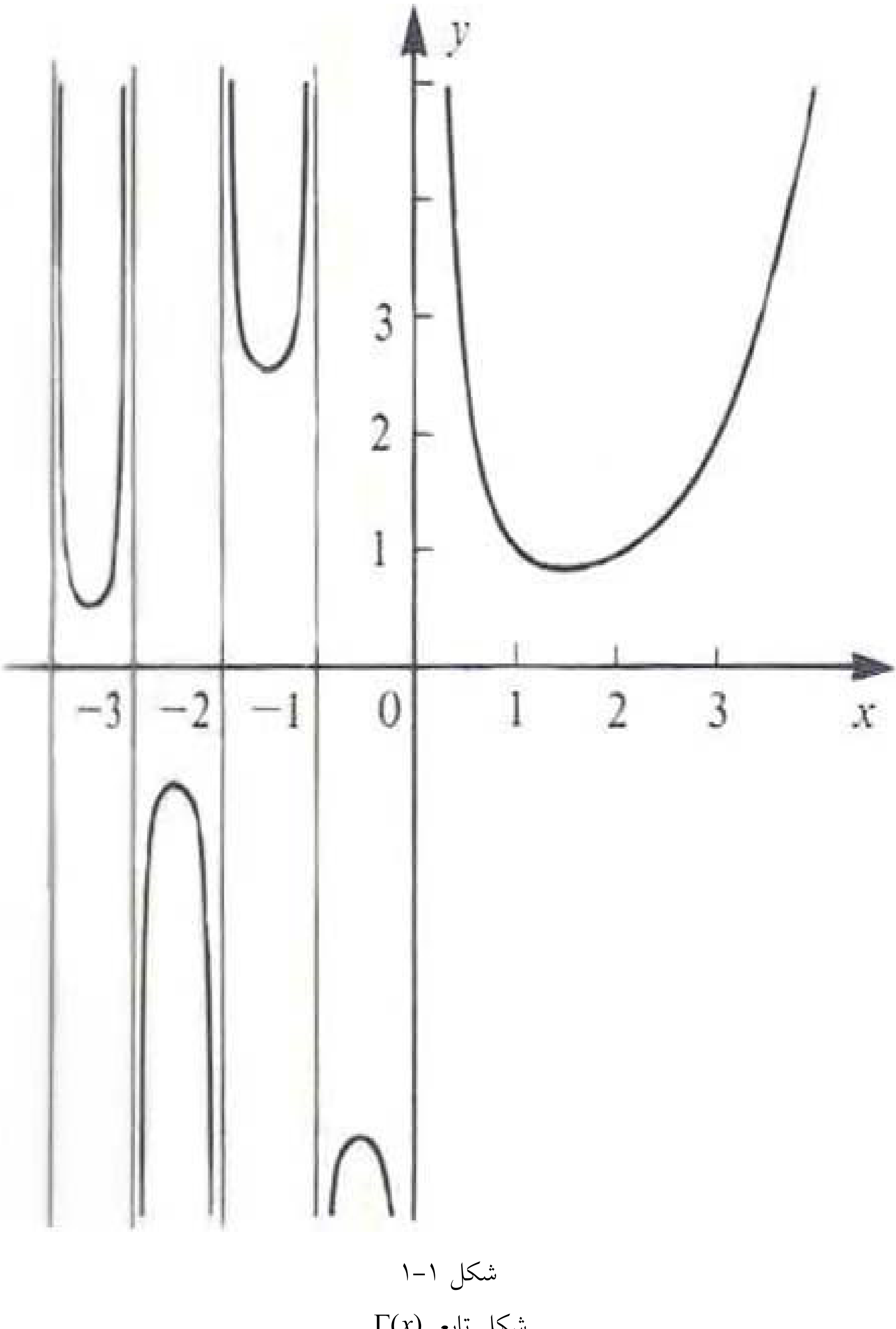
نمودار تابع گاما در شکل ۱-۱ رسم شده است. بنابراین می‌توانیم برای $a = 0,-1,-2,....$ بپذیریم که:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\Gamma(x)} = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

۱-4- تابع گامای ناقص

تابع گامای ناقص، $\gamma^*(v,x)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$.\gamma^*(v,x) = \frac{1}{\Gamma(v)x^v}\int_0^x \xi^{v-1}e^{-\xi}\,d\xi$$



شکل ۱–۱

شکل تابع $\Gamma(x)$

۱-۵- تابع بتا

تابع بتا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt \qquad x>0\ ,\ y>0$$

و دارای خواص زیر است:

۱- $B(x,y)=B(y,x)$

۲- $B(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{2x-1}(\theta)Cos^{2y-1}(\theta)\,d\theta$

۳- $B(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

۱-۶- تابع بتای ناقص

تابع بتای ناقص، $B_\tau(x,y)$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_\tau(x,y)=\int_0^x \xi^{x-1}(1-\xi)^{y-1}\,d\xi \qquad 0<\tau<1$$

۱-۷- **تابع** میتگ- لفلر

تابع میتگ- لفلر یک توسیع مستقیم از تابع نمایی e^x است و این تابع نقش اساسی در محاسبات کسری بازی می کند ونمایش یک پارامتر و دو پارامتر آن به صورت زیر است:

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\alpha>0$$

$$E_{\alpha,\beta}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\alpha>0,\beta>0\ .$$

فصل دوم

مقدمات و مفاهیم

۱-۲ مجموعه های فازی

مفهوم مجموعه و نظریه مجموعه ها ابزارهای قوی در ریاضیات هستند .در نظریه مجموعه ها، مجموعه به صورت گردایه ای از اشیاء کاملاً مشخص تعریف می شود و عضویت یا عدم عضویت یک شیء در مجموعه قطعی است، به عنوان مثال مجموعه افراد کلاس که قد آنها بالای ۱۸۰ سانتیمتر است . در بسیاری از مسائل واقعی حدود مجموعه ها کاملاً مشخص نیست مانند مجموعه افراد قدبلند در یک کلاس . در سال 1965 پرفسور زاده[۱] برای مجموعه هایی که حدودشان کاملاً مشخص نیست، مفهوم مجموعه فازی و عضویت جزئی ر ا مطرح کرد . او مفهوم مجموعه فازی را به صورت گردایه ای از اشیاء معرفی کرد که با درجه ای بین صفر و یک متعلق به مجموعه هستند که درجه یک بیانگر عضویت کامل و درجه صفر بیانگر عدم عضویت کامل در مجموعه است . این تعریف با به کارگیری مفهوم تابع عضویت انجام شد که به هر شیء عددی از بازه $[0,1]$ نسبت می دهد که بیانگر درجه عضویت آن شیء در مجموعه فازی است.

مجموعۀ فازی را با A نمایش می دهیم که در آن $A:X\to[0,1]$ و X یک مجموعۀ مرجع دلخواه است. برای $x\in X$ ، تابع عضویت در نقطۀ x را با $A(x)$ نمایش می دهیم. در واقع $A(x)$ به هر عضو از X یک عدد از بازۀ $[0,1]$ به عنوان درجۀ عضویت آن عنصر در مجموعۀ فازی A نسبت می دهد.

تعریف 2-1-1: مجموعه همه مجموعه های فازی، روی مجموعه مرجع $\mathbf{X}$ را مجموعه توانی فازی $\mathbf{X}$ گوییم و با $F(X)$ نشان می دهیم.

[۱]-Zadeh

تعریف 2-1-2: **فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیر مجموعه فازی از** آن باشد. **مجموعه نقاطی از X که برای** آن نقاط $A(x)>0$ ، تکیه‌گاه A نامیده می شود و با suppA نشان داده می شود.

تعریف 2-1-۳: **مقدار** $M=\sup_{x\in X}A(x)$ **ارتفاع مجموعه A** نامیده می شود اگر ارتفاع **مجموعه فازی A برابر یک باشد** ، آن گاه A **نرمال است** ، درغیراین صورت A را زیر **نرمال** می نامند.

۲-۲ α–برش ها و تحدب

α–برش ها به مانند پلی، مجموعه های فازی وکلاسیک را به هم متصل می کنند. آن ها در روابط بین مجموعه های فازی و مجموعه های کلاسیک نقش اصلی را ایفا می کنند.

تعریف 2-2-1: **زیر** مجموعه کلاسیک عناصری از X که درجه عضویت آن ها در مجموعه فازی **A حداقل به بزرگی** α $(\alpha>0)$ است، α– برش **A** ، نامیده می شود و با نماد $\mathbf{A}_\alpha$ نمایش داده می شود. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{A}_\alpha=\left\{x\in X \mid \mathbf{A}(x)\geq\alpha\right\}.$$

$\mathbf{A}_\alpha$ یک مجموعه کلاسیک است.

تعریف 2-2-2: مجموعه کلاسیک **A از** X **را محدب** گوییم اگر برای هر $x_1,x_2\in X$ و هر $\lambda\in[0,1]$ **داشته باشیم،**

$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in A$$

تعریف 2-2-3: مجموعه فازی **A را محدب** گوییم اگر برای هر α– برش **A به ازای** $0\leq\alpha\leq1$ **محدب باشد.**

تعریف 2-2-4: **[68]** مجموعه فازی **A روی** X **محدب** است اگروتنها اگر برای هر $x_1,x_2\in X$ و هر $\lambda\in[0,1]$ **داشته باشیم:**

$$A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\min\{A(x_1),A(x_2)\}$$

تبصره 2-2-5 :فرض کنید u یک مجموعه فازی در X **باشد،** آن گاه

الف) برای همه $0 \le \alpha \le \beta$, $[u]_\beta \subseteq [u]_\alpha \subseteq [u]_0$.

ب) اگر $\alpha_n \nearrow \alpha$ پس $[u]_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]_{\alpha_n}$.

ج)(قضیه نمایش Raleskoo) **فرض کنید** $M \subseteq X$ و همچنین **فرض کنید** $\{B_r | r \in [0,1]\}$ **خانواده ای از زیر مجموعه** M باشد که در (الف) و (ب) صدق می کند و $B_0 = M$ باشد. آن گاه یک **مجموعه فازی** u **در** X وجود دارد به طوری که برای همه $r \in [0,1]$, $[u]_r = B_r$. در ضمن

$$u(x) = \begin{cases} \sup\{r | x \in B_r\} & x \in M, \\ 0 & x \notin M. \end{cases}$$

$r-$برش های مجموعهٔ فازی A (یا مجموعهٔ تراز r وابسته به A) را با A_r نشان می دهیم.

اگر مجموعهٔ فازی A یک عدد فازی باشد، $r-$برش های A بازه های بسته اند که آن ها را به صورت زیر نشان می دهیم

$A_r = [a_1(r), a_2(r)]$

از آن جا که $r-$برش های اعداد فازی بازه های بسته است، بنابراین لازم است از اعمال ریاضی روی بازه ها اطلاع داشته باشیم.

تعریف 2-2-6: برپایهٔ مفهوم $r-$برش، می توان توصیفی برای یک مجموعهٔ فازی به وسیلهٔ مجموعه های معمولی ارائه کرد. برای هر $x \in X$

$$A(x) = \sup_{r \in [0,1]} \{ r \mid x \in A_r \}$$

۲-3 اعداد فازی[23]

تعریف2-3-1: **مجموعهٔ فازی u روی R را یک عدد فازی گوییم هرگاه**

الف) u نرمال باشد،

ب) u مجموعهٔ فازی محدب باشد.

ج) u از بالا نیمه پیوسته باشد، (تابع حقیقی u را در نقطه x نیمه پیوسته بالا می نامند، هرگاه $u(x) \ge \overline{\lim}_{t \to x} u(t), u(x) \ne +\infty$ باشد.)

د) $u_0 = \left\{ \overline{x \in R \mid u(x) > 0} \right\}$ درR فشرده باشد.

تعریف 2-3-2: یک عدد فازی u به شکل پارامتری، یک زوج مرتب $(\underline{u}, \overline{u})$ از تابع $\underline{u}(r), \overline{u}(r)$ ، $0 \le \alpha \le 1$ است ، که شرایط والزامات زیر را برآورده می کند:

1- $\underline{u}(r)$ یک تابع کراندار، صعودی یکنوا ، پیوسته از طرف چپ است ،

2- $\overline{u}(r)$ یک تابع کراندار، نزولی یکنوا ، پیوسته از طرف چپ است،

3- $0 \le r \le 1$ ، $\underline{u}(r) \le \overline{u}(r)$

تعریف 2-3-۳: یک عدد فازی u یک عدد فازی از نوع L-R نامیده می شود هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \le a, \\ l_u(x) & a < x \le b, \\ 1 & b \le x \le c, \\ r_u(x) & c < x \le d, \\ 0 & d < x. \end{cases}$$

که $l_u(x)$ و $r_u(x)$ به ترتیب توابع نانزولی وناصعودی هستند.

تعریف2-3-۴: یک عدد فازی u یک عدد فازی مثلثی نامیده می شود هرگاه **تابع عضویت** آن به شکل زیر باشد.

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ \dfrac{x-c}{b-c} & b\le x\le c\\ 0 & \text{در دیگر نقاط}\end{cases}$$

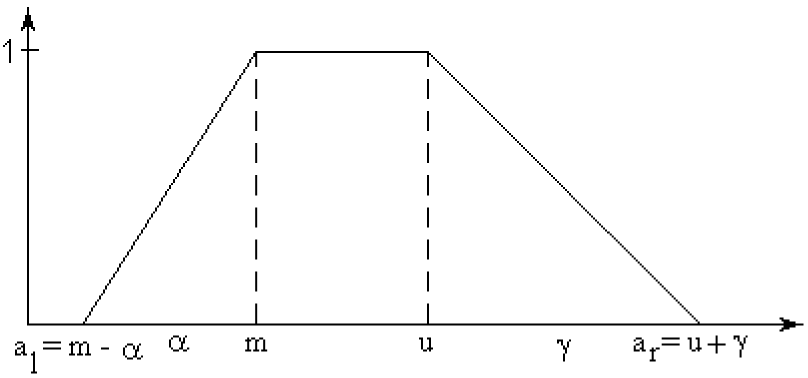
.

به طوری که α و γ **اعداد حقیقی** مثبتی هستند که به ترتیب گستردگی های چپ و راست نامیده می شوند. عدد فازی مثلثی u را به صورت u= (m,α,γ) نمایش می دهیم.

تعریف 4-۲-۳: یک عدد فازی u یک عدد فازی ذوزنقه ای نامیده می شود هرگاه تابع عضویت فرم زیر را داشته باشد:

$$A(x)=\begin{cases}0 & x\le m-\alpha,\\ \dfrac{x-m+\alpha}{\alpha} & m-\alpha<x\le b,\\ 1 & m\le x\le u,\\ \dfrac{m+\gamma-x}{\gamma} & u<x\le u+\gamma,\\ 0 & u+\gamma<x.\end{cases}$$

به طوری که α و γ **اعداد حقیقی** مثبتی هستند که به ترتیب گستردگی های چپ و راست نامیده می شوند. عدد فازی ذوزنقه ای u را به صورت u= (m,u,α,γ) نمایش می دهیم.



شکل **2**-۲ عددفازی ذوزنقه ای

اگر $\otimes$ هر یک از چهار عمل اصلی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم باشد و A و B دو مجموعهٔ معمولی (غیر فازی) باشند، آنگاه $A \otimes B$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$A \otimes B = \{a \otimes b \mid a \in A, b \in B\}.$$

۲-4 حساب بازه ای

اگر $A = [a,b]$ و $B = [c,d]$ دو بازه بسته باشند و $a,b,c,d \in R$ داریم

الف) $[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$.

ب) $[a,b] - [c,d] = [a-d, b-c]$.

ج) $[a,b] \times [c,d] = [\min(ac,ad,bc,bd), \max(ac,ad,bc,bd)]$.

د) $\frac{[a,b]}{[c,d]} = \left[\min\left(\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right), \max\left(\frac{a}{d},\frac{a}{c},\frac{b}{d},\frac{b}{c}\right)\right]$.

به شرط آنکه $0 \notin [c,d]$.

اگر λ یک عدد اسکالر باشد

$$\begin{cases} \lambda[a,b] = [\lambda a, \lambda b] & , \quad \lambda > 0, \\ \lambda[a,b] = [\lambda b, \lambda a] & , \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

1) اگر A و B اعداد فازی با تکیه گاه کراندار و * یک عمل دوتایی پیوسته روی R باشد، آنگاه

$$(A * B)_r = A_r * B_r$$

که در آن تکیه گاه A، مجموعهٔ نقاطی مانند u از R است که برای آن ها $A(u) > 0$.

اگر A و B دو مجموعه فازی باشند آنگاه می گوییم A کوچکتر از B است هرگاه به ازای هر x در تکیه گاه A

$$A(x) \le B(x)$$

و آن را به صورت $A \le B$ نشان می دهیم.

مثال۲-4-۱: فرض کنیم

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & , \quad -1 \le x \le 1, \\ \frac{3-x}{2} & , \quad 1 \le x \le 3, \\ 0 & , \quad 3 \le x . \end{cases} \quad \text{و} \quad B(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2} & , \quad 1 \le x \le 3, \\ \frac{5-x}{2} & , \quad 3 \le x \le 5, \\ 0 & , \quad 5 \le x . \end{cases}$$

می خواهیم $(A+B)(x)$ را بدست آوریم. داریم

$$A_r = \{x \mid A(x) \ge r\} = \left\{x \mid \frac{x+1}{2} \ge r, \frac{3-x}{2} \ge r\right\}$$

$$= [2r-1, 3-2r] = \{x \mid x \ge 2r-1, x \le 3-2r\} .$$

$$B_r = \{x \mid B(x) \ge r\} = \left\{x \mid \frac{x-1}{2} \ge r, \frac{5-x}{2} \ge r\right\}$$

$$= \{x \mid x \ge 2r+1, x \le 5-2r\} = [2r+1, 5-2r]$$

بنابراین با توجه به موارد قبل داریم

$$\left(A+B\right)_r=A_r+B_r=\left[2r-1,3-2r\right]+\left[2r+1,5-2r\right]=\left[4r,8-4r\right].$$

با استفاده از **تعریف 2-2-6**: داریم

$$\left(A+B\right)\left(x\right)=u=\sup_{x\in\left(A+B\right)_r} r$$

فرض می کنیم $x\in\left[4r,8-4r\right]$، بنابراین $r\le\frac{x}{4}, r\le 2-\frac{x}{4}$. چون $r\in\left[0,1\right]$ ، پس $u\in\left[0,1\right]$ بنابراین اگر $u=\frac{x}{4}$. داریم $1\le\frac{x}{4}\le 0$، و $2\le 2-\frac{x}{4}\le 1$. بنابراین در بازه $(0,4]$، u نمی تواند $2-\frac{x}{4}$ انتخاب شود. همینطور اگر $u=2-\frac{x}{4}$ داریم $2\le\frac{x}{4}\le 1$. بنابراین در بازه $(4,8]$ ، u نمی تواند $\frac{x}{4}$ انتخاب شود.

لذا داریم

$$(A+B)\left(x\right)=\begin{cases}\frac{x}{4} & , \quad 0<x\le 4\,,\\ 2-\frac{x}{4} & , \quad 4\le x\le 8\,,\\ 0 & , \quad 8\le x\ .\end{cases}$$

۲-5 متر هاسدورف[65]

فرض کنید $D:E\times E\to R_+\cup\{0\}$ به صورت زیر تعریف شود

$$D(u,v)=\sup_{r\in[0,1]} d\left(\left[u\right]_r,\left[v\right]_r\right).$$

که در آن d متر هاسدورف است وبه صورت زیر تعریف می شود،

$$d(u,v)=\sup_{r\in[0,1]}\max\{|\underline{u}(r)-\underline{v}(r)|,|\overline{u}(r)-\overline{v}(r)|\}.$$

با توجه به تعریف خواص زیر نتیجه می شود.

الف) $\left(E,D\right)$ یک فضای متریک کامل است.

ب) برای هر $u,v,w\in E$، $D(u\oplus w,v\oplus w)=D(u,v), D(u,v)=D(v,u)$

ج) برای هر $k \in R, u,v \in E$ $D(k \odot u, k \odot v) = |k| D(u,v)$

د) برای هر $u,v,w,e \in E$ $D(u \oplus v, w \oplus e) \le D(u,w) + D(v,e)$

و) برای هر $u,v \in E$ $D(u \oplus v, \tilde{0}) \le D(u,\tilde{0}) + D(v,\tilde{0})$

ه) برای هر $u,v \in E$ $D(u \oplus v, w \oplus e) \le D(u,w) + D(v,e)$.

که در اینجا داریم: $\tilde{o} = \chi_{\{0\}}$

۲-6 اصل گسترش

اصل گسترش یک رابطه اساسی است که این امکان را به ما می دهد تا دامنه و برد یک تابع را از نقاطی دامنه و برد به مجموعه های فازی روی آن ها توسعه دهیم. به عبارت دیگر به وسیله اصل گسترش هر تابع کلاسیک، را می توان به یک تابع فازی توسیع داد.

تعریف۲-6-1 : فرض **کنید** $f: X \to Y$ **تابعی از مجموعه کلاسیک** X **به مجموعه کلاسیک** Y **باشد.در تابع** $f: F(X) \to F(Y)$ **و** $f^{-1}: F(Y) \to F(X)$ **را به صورت**

به ازای هر $A \in F(X)$ $[f(A)](y) = \sup_{x|y=f(x)} A(x)$.

به ازای هر $B \in F(Y)$ $\left[f^{-1}(B)\right](y) = B(f(x))$.

تعریف می شوند ، طبق اصل گسترش زاده فازی شده گوییم. رابطه ای که توابع کلاسیک را فازی می کند، اصل گسترش زاده نامیم.

قضیه۲-6-1: اگر $g: R \times R \to R$ یک تابع باشد، آن گاه طبق اصل گسترش زاده می توانیم، با استفاده از تعریف زیر، تابع پیوسته g را به $E \times E \to E$ توسیع دهیم،

$$g(u,v)(z) = \sup_{z=g(x,y)} \min\{u(x), v(x)\},$$

و همچنین

$$[g(u,v)(z)]_r = g\left([u]_r, [v]_r\right),$$

برای هر $u,v \in R$ و $u,v \in E$ و $0 \le r \le 1$.

به خصوص بنا به اصل گسترش زاده وبا توجه به روابط بالا، جمع وضرب اسکالر در فضای اعداد فازی $F(X)$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$[u+v]_r=[u]_r+[v]_r\,,\quad [ku]_r=k\,[u]_r\,.$$

که در آن $k\in R$, $u,v\in F(X)$, $0\le r\le 1$.

۲-7 تابع فازی

تعریف۲-7-1: فرض کنید I یک بازه حقیقی و E مجموعه همه اعداد فازی باشد، یک تابع فازی مانند f تابعی به صورت $f:I\to E$ است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$f(t,x(t))[r]=\left[\underline{f}(t,x(t),r),\overline{f}(t,x(t),r)\right],\qquad t\in I\,,\quad 0\le r\le 1.$$

تعریف۲-7-2: اگر f یک تابع پیوسته از $R^+\times R$ به توی R باشد و x(t) یک عدد فازی باشد، آن گاه برای عدد فازی $f(t,x(t))$ که در آن $t\in R^+$ است، طبق اصل گسترش زاده، تعریف زیر را خواهیم داشت،

$$f(t,x(t))(s)=\sup\{x(\tau)\,|\,s=f(t,\tau)\},$$

واز آن نتیجه می شود،

$$f(t,x(t))[r]=\left[\underline{f}(t,x(t),r),\overline{f}(t,x(t),r)\right],$$

که در آن،

$$\begin{cases}\underline{f}(t,x(t),r)=\min\{f(t,u)\,|\,u\in[\underline{x}(t,r),\overline{x}(t,r)]\},\\ \overline{f}(t,x(t),r)=\max\{f(t,u)\,|\,u\in[\underline{x}(t,r),\overline{x}(t,r)]\}.\end{cases}$$

۲-8 مشتقات فازی

در این قسمت به بیان مشتق هاکوارا و مشتق تعمیم یافته می پردازیم.

2-8-1 مشتق هاکوارا

برای بیان مشتق هاکوارا، ابتدا بایستی تفاضل هاکوارا را بیان کرد.

تعریف۲-8- ۱ :[30] اگر یک عدد فازی C وجود داشته باشد که C+A=B , در این صورت C تفاضل هاکوارا بین A وB نامیده می شود و می نویسیم: $B \ominus A = C$

تعریف۲-8-۲:: یک نگاشت $y: I \to E^n$ در نقطه $x \in I$ مشتق پذیر هاکوارا می باشد اگر $y'(x) \in E^n$ وجود داشته باشد به طوریکه حدود زیر موجود باشد.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{y(x_0+h) \ominus y(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{y(x_0) \ominus y(x_0-h)}{h} = y'(x)$$

در این قسمت حدود در فضای متریک (E^n, d_∞) انجام می شود. در نقاط انتهایی I , ما فقط حدود یک طرفه را در نظر می گیریم.[35]

نگا شت $y: I \to E^n$ را در نظر بگیرید به طوری که y روی I مشتق پذیر باشد و نیز داشته باشیم

$$[y(x)]_r = [y_1(x,r), y_2(x,r)],\ \forall\, r \epsilon [0,1]$$

در این صورت مشتق هاکوارا $y'(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$[y'(x)]_r = [y_1'(x,r), y_2'(x,r)], x \in I$$

به شرطه آنکه تشکیل عدد فازی بدهد.

۲-8-2 مشتق تعمیم یافته[15]

تعریف۲-8-3: فرض کنید $F: I \to E$ و $t_0 \in I$, F مشتق پذیر تعمیم یافته در نقطه t_0 است اگر $F'(t_0)$ وجود داشته باشد به طوری که

(i) برای همه $h > 0$ به اندازه کافی کوچک, $F(t_0+h) \ominus F(t_0), F(t_0) \ominus F(t_0-h)$

وحدود زیر موجود باشند:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0+h) \ominus F(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) \ominus F(x_0-h)}{h} = F'(x_0)$$

یا

(ii) برای همه $h > 0$ به اندازه کافی کوچک, $F(t_0+h) \ominus F(t_0), F(t_0) \ominus F(t_0-h)$

وحدود زیر موجود باشند:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0+h) \ominus F(x_0)}{-h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(x_0) \ominus F(x_0-h)}{-h} = F'(x_0)$$

۲-9 معادلات دیفرانسیل فازی

دراین بخش تعریف معادلات دیفرانسیل فازی را ارئه می دهیم. معادلات دیفرانسیل در یک محیط فازی به عنوان یک راه برای مدل سازی ابهام پیشنهاد شده است.

تعریف۲-9-۱ : معادلات دیفرانسیل فازی به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \qquad (1-9-2)$$

فرض کنید $f : T \times E^n \to E^n$ پیوسته بود و $y_0 \in E^n$ باشد

لم۲-9-۲:[34]

یک نگاشت $y : T \to E^n$ یک جواب (2-۹- ۱) است اگر وفقط اگر y پیوسته باشد و در معادله انتگرال زیر برای هر $x \in T$ صدق کند:

$$y(x) = y_0 + \int_a^x f(s, y(s))ds,$$

اگر f تابع پیوسته بوده و در شرط لیپ شیتس صدق کند, آن گاه (2-9-1) دارای جواب منحصر به فرد است .

قضیه۲-9-۳ : فرض کنید $f : T \times E^n \to E^n$ پیوسته بوده و $k > 0$ موجود باشد به طوری که

$$D(f(t, y), f(t, \overline{y})) \le kD(y, \overline{y})$$

برای هر $x \in T$ و $y, \overline{y} \in E^n$. در این صورت (2-۹-۱) دارای جواب منحصر به فرد است. بعلاوه، جواب به طور پیوسته به مقدار اولیه بستگی دارد.

سیکالا [56] به طریق زیر معادله (2- 9- 1) را حل کرده است.

براساس اصل گسترش زاده، تابع $f(x, y)$ به صورت زیر بدست می آید:

در نتیجه:

$$[f(x, y, r)] = [f_1(x, y, r), f_2(x, y, r)], r \in [0,1]$$

$$f_1(x,y,r)=\min\{f(x,u)\,|\,u\in[y_1(x;r),y_2(x;r)]\},\ 0\le r\le 1,$$

$$f_2(x,y,r)=\max\{f(x,u)\,|\,u\in[y_1(x;r),y_2(x;r)]\},\ 0\le r\le 1.$$

تابع $y:[0,+\infty)$ یک جواب فازی معادله (2-۹-1) روی I است اگر

$$y_1(x,r)=\min\{f(x,u)\,|\,u\in[y_1(x;r),y_2(x;r)]\},\ 0\le r\le 1,$$

$$y_2(x,r)=\max\{f(x,u)\,|\,u\in[y_1(x;r),y_2(x;r)]\},\ 0\le r\le 1.$$

که $y_1(0,r)=y_{01}(r)$ و $y_2(0,r)=y_{02}(r)$, به ازای هر $x\in I$ بنابراین برای r ثابت شده، ما یک مسئله مقدار اولیه در R^2 داریم.

قضیه۲-9-4 : [15]

فرض کنیم f در شرط زیر صدق می کند

$$|f(x,v)-f(x,\bar{v})|\le g(x,|v-\bar{v}|),x\ge 0,v,\bar{v}\in R$$

که g روی $[0,\infty)$ یک تابع پیوسته است به طوری که $r\to g(x,r)$ نانزولی است، مسئله مقدار اولیه

$$\begin{cases} u'=g(x,u(x)), \\ u(0)=u_0\in E, \end{cases}$$

دارای یک جواب روی $[0,\infty)$ برای $u_0>0$ و $u(x)=0$ تنها جواب (۲- ۹-۱) برای $u_0=0$. در این صورت معادله دیفرانسیل فازی (۲- ۹-۱) دارای جواب منحصر به فرد است.

توجه ۲-9 -5: در حالت مشتق‌پذیری تعمیم یافته، برای معادله دیفرانسیل فازی $y'(t)=f(t,y)$ دو معادله انتگرال متفاوت بیان می شود که معادله انتگرال دوم به فرم زیر نوشته می شود:

$$y(x)=y_0\ominus(-1)\int_{x_0}^{x}f(s,y(s))ds$$

قضیه۲-9-6 : [15] فرض کنیم شرایط زیر برقرار است:

الف) قرار دهیم $y_0\in E,p,q>0,\ R_0=[x_0,x_0+p]\times\bar{B}(y_0,q)$

که

$$\bar{B}(y_0,q)=\{y\in E\ |\ D(y,y_0)\le q\}$$

بیان‌گر یک گوی بسته در E می باشد و همچنین فرض کنید $f: R_0 \to E$ یک تابع پیوسته باشد بطوری که $D(f(x,y),0)=\|f(x,y)\| \le M$ برای همه $(x,y) \in R_0$

ب) قرار دهید $g: [x_0, x_0+p] \times [0,q] \to E$ به طوری که $g(x_{10}) \equiv 0$ و $g(x,u) \le M_1$ به ازای هر $\bar{y}_n \in [x_0, x_0+d]$ و $0 \le u \le q$ به طوری که $g(x,u)$ نانزولی بر حسب G,u به گونه ای است که مسئله مقدار اولیه $u'(x)=g(t,u(x))$ و $u(0)=0$ تنها دارای جواب $u(x) \equiv 0$ روی $[x_0, x_0+p]$.

ج) فرض کنید $D(f(x,y),f(x,z)) \le g(x,D(y,z))$ به ازای هر $D(y,z) \le q, (x,y),(x,z),(y,z) \in R_0$.

د) $d>0$ وجود دارد به طوریکه برای $x \in [x_0, x_0+d]$ دنباله $\bar{y}_n \in [x_0, x_0+d]$ که به صورت زیر بیان می شود:.

$$\bar{y}_{n+1} = y_0 \ominus (-1)\int_{x_0}^{x} f(x,\bar{y}_n)dt$$
$$\bar{y}_0(x) = y_0$$

در این صورت معادله دیفرانسیل فازی

$$\begin{cases} y'(x) = f(t, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

دارای دو جواب (که یکی (1) - دیفرانسیل‌پذیر و دیگری (2) - دیفرانسیل‌پذیر می باشد) $y, \hat{y}$ می باشد و نیز داریم:

$$y, \hat{y} : [x_0, x_0+r] \times \bar{B}(y_0, q)$$

به طوری که $r = \min\left\{p, \frac{q}{M}, \frac{q}{M_1}, d\right\}$ و تکرارهای متوالی

$$y_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds,$$
$$y_0(x) = y_0$$

و

$$\begin{cases} \hat{y}_{n+1}(x) = y_0 \ominus (-1)\int_{x_0}^{x} f(s, \hat{y}_n(s))ds \\ \hat{y}_0(x) = y_0 \end{cases}$$

همگرا به دو جواب خواهند بود.

در اینجا لازم است برای تعریف انتگرال فازی، مقدماتی از انتگرال لبگ که در این قسمت مورد استفاده قرار می گیرد را ارائه دهیم.

تعریف۱-۲-۲۰: فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه ی S از زیرمجموعه های X را یک شبه حلقه گوییم اگر:

۱) $\emptyset \in S$

۲) اگر $A, B \in S$ آنگاه $A \cap B \in S$.

۳) اگر $A, B \in S$ آنگاه $c_1, c_2, \ldots, c_n \in S$ وجود دارند به طوریکه $A - B = \cup_{i=1}^{n} c_i$ و $c_i \cap c_j = \emptyset$ اگر $i \neq j$.

مثال۱-۲-۳: فرض کنید X یک مجموعۀ ناتهی باشد. آنگاه $S = \{\emptyset, X\}$ یک شبه حلقه است.

تعریف۱-۲-۲۱: فرض کنید S یک شبه حلقه از زیرمجموعه های یک مجموعه X باشد. تابع $\mu: S \to [0, \infty]$ یک اندازه روی S است اگر:

۱) $\mu(\emptyset) = 0$

۲) اگر $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset S$, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$ آنگاه $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

تعریف۱-۲-۲۲: فرض کنید $S = \{[a, b]: a, b \in R, a \leq b\}$. آنگاه S یک شبه حلقه است. تعریف می کنیم:

آنگاه λ یک اندازه است. λ را اندازه لبگ روی R می نامیم.

تعریف۱-۲-۲۳: فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. $E \subseteq X$ را اندازه پذیر گوییم اگر:

نکته۱-۲-۵: گردایه ی همه ی مجموعه های اندازه پذیر را با Λ نشان می دهیم. در واقع

تعریف۱-۲-۲۴: فرض کنید $f: X \to R$ یک تابع و (X, S, μ) یک فضای اندازه باشد. گوییم f اندازه پذیر است، اگر برای هر مجموعه ی باز O در R، $f^{-1}(O) \in \Lambda$ باشد.

تعریف: فرض کنید X یک مجموعه و $F \subseteq P(X)$ باشد، به طوریکه $\emptyset \in F$. همچنین $\mu: F \to [0, \infty)$ یک تابع باشد به طوریکه $\mu(\emptyset) = 0$. فرض کنید $A \subseteq X$ تعریف می کنیم:

$\mu^{*}(A$

تعریف ۱-۲-۲۵: یک فضای اندازه (X, S, μ) را متناهی گوییم اگر $\mu^{*}(A) < \infty$.

تعریف ۱-۲-۲۶: اگر تابع اندازه پذیر $\varphi: X \to R$ دارای برد متناهی باشد، آنگاه گوییم تابع φ یک تابع ساده است.

تعریف ۱-۲-۲۷: تابع ساده φ را تابع پله ای گوییم اگر φ دارای نمایشی به فرم $\varphi = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ باشد. جایی که B_j یک مجموعه ی اندازه پذیر با اندازه متناهی است. (یعنی $\mu^{*}(B_j) < \infty$) .

تعریف ۱-۲-۲۸: تابع $F: X \to R$ یک تابع بالایی نامیده می شود اگر دنباله $\{\varphi_n\}$ از توابع پله ای وجود داشته باشد به طوریکه:

۱) $\varphi_n \uparrow F$.

۲) $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu < \infty$.

تعریف ۱-۲-۲۹: فرض کنید F یک تابع بالایی و $\{\varphi_n\}$ یک دنباله از توابع پله ای باشد به طوریکه $\varphi_n \uparrow F$ و $\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \, d\mu < \infty$، آنگاه انتگرال لبگ F را به صورت زیر تعریف می کنیم:

تعریف ۱-۲-۳۰: تابع $F: X \to R$ را انتگرال پذیر لبگ گوییم اگر دو تابع بالایی u, v وجود داشته باشند به طوریکه:
$$F = u - v.$$
انتگرال لبگ F به صورت زیر تعریف می شود:

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل

فازی از مرتبه طبیعی

۳-۱ مقدمه

یکی از مباحث مهم ریاضیات، که کاربرد فراوانی نیز درعمل دارد حل معادلات دیفرانسیل است. در ریاضیات محض وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل معادلات دیفرانسیل و یادگیری فنون وروش های تحلیلی برای بدست آوردن جواب آن ها می شود .این کار با دسته بندی معادلات انجام می گیرد و نشان داده می شود که دسته خاصی از معادلات را می توان به روش تحلیلی حل کرده ، اما همانند وجود تابع اولیه برای توابع، معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارند که نمی توان باروش های تحلیلی موجود جواب آنها را بدست آورد. حتی اگر بتوان، گاهی اوقات، بعضی معادلات دیفرانسیل ساده جوابی بسیار پیچیده دارند .از این رواستفاده از روشهای عددی ، حتی درمواردی که جواب تحلیلی موجود است، توصیه می شود.

اخیرا ، نظریه معادلات دیفرانسیل فازی بسیار مورد توجه واقع شده است. معادلات دیفرانسیل در محیط فازی یک راه طبیعی مدل کردن عدم اطمینان در سیستم های دینامیکی می باشد. معادلات فازی خطی مرتبه اول یکی از ساده ترین معادلات دیفرانسیل فازی است که در بسیاری از مسائل کاربردی ظاهر می شود[43].

مشتق هاکوارا برای توابع فازی مقدار در [31] معرفی شده است و این سرآغازی برای بررسی مشتق پذیری هاکوارا برای توابع چند متغیره بوده است.اولین روش برای مدل کردن سیستم پویا تحت ابهام از تفاضل هاکوارا استفاده می کند. بر این اساس وجود و یکتایی جواب های معادله دیفرانسیل فازی مورد مطالعه قرار گرفته است[32, 44,43,36, 52] .

مشکل اصلی استفاده از مشتق هاکوارا برای حل معادلات دیفرانسیل فازی این است که جواب های بدست آمده دارای محمل صعودی می باشند. یعنی ابهام با گذر زمان در حال افزایش است. برای رفع چنین مشکلی، معادلات دیفرانسیل شمول معرفی شد.

تفسیر کردن معادلات دیفرانسیل فازی با چنین روشی نیز دارای مشکل اساسی است و آن این است که مفهوم مشتق پذیری در حالت فازی در نظرگرفته نمی شود.

برای حل چنین مشکلاتی، مشتق تعمیم یافته در [14] معرفی شد و در [15] بیشتر مورد مطالعه قرار گرفت. چنین مفهومی از مشتق پذیری حل معادلات دیفرانسیل فازی را بدون مشکلات روش های قبلی امکان پذیر می سازد.

۳-۲ روش های چندگامی[1]

در روشهای تک گامی y_{i+1} بر حسب y_i بدست می آمد .یعنی برای محاسبه تقریبی از $y(t_{i+1})$ تنها از اطلاعات موجود در نقطه t_i استفاده می شد، به همین خاطر این روشها برای مسائلی از نوع ایده آل هستند. اما، وقتی y_1 بدست می آید، اطلاعات موجود در t_1,t_0 را می توان به کار برد و به همین ترتیب با بدست آوردن y_i های جدیدتر می توان از اطلاعات بیشتری استفاده و y_{i+1}را حساب کرد.

اصولاً در یک روش چند گامی با استفاده از مقادیر قبلی yو یا y'، یک چند جمله ای تشکیل می دهیم که تابع مشتق را تقریب کند و آن را برای بازه بعدی برونیابی می کنیم .تعداد نقاط قبلی که مورد استفاده قرار می گیرند، درجه چندجمله ای و در نتیجه مرتبه دقت فرمول حاصل را مشخص می کند .معمولاً خطای کل روش حاصل مساوی h به توان درجه چند جمله ای به اضافه یک است .

تعریف۳-۲-۱: [1] یک روش m گامی برای حل کردن مسئله مقدار اولیه یک معادله تفاضلی برای پیدا کردن تقریب $y(t_{i+1})$ در نقاط گره ای t_{i+1} است که می تواند به صورت زیر نمایش داده شود:

$$y(t_{i+1})=a_{m-1}y(t_i)+a_{m-2}y(t_{i-1})+\dots+a_0y(t_{i+1-m})+hb_mf(t_{i+1},y_{i+1})+b_{m-1}f(t_i,y_i)+\dots+b_0f(t_{i+1-m},y_{i+1-m})$$

برای $i=m-1,m,\dots,N-1$ بطوری که $a=t_0\le t_1\le t_2\le\dots\le t_N=b, h=\frac{b-a}{N}$
$a_0,a_1,\dots,a_{m-1},b_0,b_1,\dots,b_m$ مقادیر ثابتی هستند .همچنین مقادیر آغازین زیر را داریم:

$y_0=\alpha_0,y_1=\alpha_1,\dots,y_{m-1}=\alpha_{m-1}.$

وقتی $b_m=0$ روش را صریح می گویند، زیرا معادله فوق y_{i+1} را فقط برحسب جمله های قبلی تعیین شده است. وقتی $b_m\neq 0$ روش را ضمنی می گویند، زیرا y_{i+1} در هر دو طرف معادله فوق ظاهر می شود.

تعریف۳-۲-۲: [1] برای معادله تفاضلی

$$y(t_{i+1})=a_{m-1}y(t_i)+a_{m-2}y(t_{i-1})+\dots+a_0y(t_{i+1-m})+hF(t_i,h,y_{i+1},y_i,\dots,y_{i+1-m})$$
$$y_0=\alpha_0,y_1=\alpha_1,\dots,y_{m-1}=\alpha_{m-1}$$

اگر $|\lambda_i|\le 1$ برای هر $i=1,2,\dots,m$ و همه ریشه ها با مقدار قدر مطلق 1 ریشه های ساده باشند،آنگاه می گوییم روش تفاضلی در شرط ریشه صدق می کند .یک روش چندگامی پایدار است اگر وفقط اگر در شرط ریشه صدق کند.

[1] Multi step

۳-۳ قضیه مشخصه تعمیم یافته برای FDEs تحت مشتق پذیری تعمیم یافته

مسئله مقدار اولیه فازی زیر در نظر می گیریم

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), t \in [t_0, T] \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \qquad (۱-۳)$$

می دانیم اگر $[y(t)]^r = [\underline{y}(t,r), \overline{y}(t,r)]$. (1) − دیفرانسیل‌پذیر باشد

آنگاه $[y'(t)]^r = [\underline{y}'(t,r), \overline{y'}(t,r)]$ مسئله(۳-۱) به دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t,r) = \underline{f}(t, y(t), r) = F(t, \underline{y}(t,r), \overline{y}(t,r)), \\ \overline{y}'(t,r) = \overline{f}(t, y(t), r) = G(t, \underline{y}(t,r), \overline{y}(t,r)), \\ \underline{y}(t_0, r) = \underline{y}_0(r), \overline{y}(t_0, r) = \overline{y}_0(r), \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

اگر y(t) (2) − دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه $[D_2 u(t)]^r = [\overline{y'}(t,r), \underline{y}'(t,r)]$ مسئله(۳-۱) به دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t,r) = \overline{f}(t, y(t), r) = G(t, \underline{y}(t,r), \overline{y}(t,r)), \\ \overline{y}'(t,r) = \underline{f}(t, y(t), r) = F(t, \underline{y}(t,r), \overline{y}(t,r)), \\ \underline{y}(t_0, r) = \underline{y}_0(r), \overline{y}(t_0, r) = \overline{y}_0(r), \end{cases} \qquad (۳-۳)$$

قضیه زیر ثابت می کند که تحت شرایطی مسئله مقدار اولیه فازی **(۳-۱)** با دستگاه های معادلات دیفرانسیل**(۳-۲) , (۳-۳)** هم ارز هستند.

قضیه۳-۳-1:[50] مسئله مقدار اولیه فازی (۳-۱) را در نظر می گیریم به طوری که $f: I \times E \to E$ درشرایط زیر صدق کند:

-(1) $[f(t,y)]^r = [\underline{f}(t, \underline{y}, \overline{y}, r), \overline{f}(t, \underline{y}, \overline{y}, r)]$

-(2) $\underline{f}(t,r)$ و $\overline{f}(t,r)$ توابع همپیوسته و روی هر مجموعه به طور یکنواخت کراندار باشند.

-(3) عددی مانند $L > 0$ وجودداشته باشد به طوری که

$$|\underline{f}(t, u_1, v_1) - \underline{f}(t, u_2, v_2)| \le L max|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2| \quad \forall r \in [0,1];$$
$$|\overline{f}(t, u_1, v_1) - \overline{f}(t, u_2, v_2)| \le L max|u_1 - u_2|, |v_1 - v_2| \quad \forall r \in [0,1].$$

آنگاه برای (1) - دیفرانسیل پذیر و (2) - دیفرانسیل پذیر مسئله مقدار اولیه فازی**(۳-۱)** با دستگاه معادلات دیفرانسیل هم ارزند.

این هم ارز بودن به این معنی است که هر جواب از یکی، همچنین جوابی برای دیگری است.

1-3-3 جواب های عددی معادلات دیفرانسیل با استفاده قضیه مشخصه تعمیم یافته

بر مبنای قضیه مشخصه تعمیم یافته یک معادله دیفرانسیل فازی را می توان با دو دستگاه معادلات دیفرانسیل معادل جایگزین کرد، که این دو دستگاه شامل چهار معادله دیفرانسیل کلاسیک هستند.
لذا می توان برای به دست آوردن دو جواب تقریبی فازی برای معادلات دیفرانسیل فازی، دو دستگاه معادلات دیفرانسیل معادل را با روش های عددی حل کنیم. تا کنون بر خی از روش های عددی برای معادلات دیفرانسیل فازی تحت مشتق هاکوارا بیان شده اند.
از طرفی می دانیم که معادلات دیفرانسیل معمولی **(۳-۲) و (۳-۳) با هر روش عددی کلاسیک** همگرا **قابل حل هستند،** لذادر این فصل سعی داریم روش های پیشگو - اصلاح کننده تصحیح شده کلاسیک را برای یافتن دو جواب فازی معادلات دیفرانسیل فازی با مشتق تعمیم یافته، گسترش دهیم.
برای بدست آوردن روش های چندگامی که معادلات دیفرانسیل فازی را تقریب بزند، ابتدا باید مسئله درونیابی اعداد فازی را تعریف کنیم.

2-3-3 درونیابی اعداد فازی

مسئله درونیابی برای مجموعه های فازی به صورت زیر است:
فرض می کنیم که در نقاط متمایز t , $f(t)$ به صورت مجموعه فازی ارائه شده باشد . هدف تقریب تابع $f(t)$ برای همه t ها در دامنه f می باشد . فرض می کنیم که $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ ، $n+1$ نقطه متمایز در R و $u_0, u_1, \ldots, u_n$، $n+1$ مجموعه فازی در $\mathbb{E}$باشند .یک چند جمله ای درونیاب فازی برای این داده ها یک تابع فازی پیوسته $f : R \to \mathbb{E}$ است که در شرایط زیر صدق کند:

$f(t_i) = u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ - (۱)

(۲) - اگر داده ها قطعی باشند ، آنگاه درونیاب f نیز یک چند جمله ای قطعی می باشد .

تابع f که در این شرایط صدق کند می تواند به صورت زیر ساخته شود:
فرض می کنیم که S_k خانواده اسپلاین های مرتبه k با گره های $t_i, i = 0, 1, \ldots, n$ را نشان دهد، یعنی اگر $s \in S_k$

(1)- s روی بازه $[t_0, t_n]$ متعلق به C^{k-1} باشد.

(2) – s یک چند جمله ای مرتبه k روی بازه $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,n-1$ باشد.

فرض کنیم که $x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ و $S_\chi(t)$ یک اسپلاین متعلق به S_k باشد به طوری که داده های (t_i, x_i), $i=0,1,\ldots,n$ را درونیابی کند .آنگاه درونیاب اسپلاین فازی مرتبه k، $F(t)$ ، که داده های (t_i, u_i), $u_i \in E^n$, $i=0,1,\ldots,n$ را درونیابی می کند که مجموعه $r-$ برش آن برای هر $0 \le r \le 1$ به صورت زیر می باشد :

$$[F(t)]^r = \{y \in R : y = p_x(t), x_i \in [u_i]^r\},\ 0 \le r \le 1$$

فرض کنیم $s_i \in S_k$ داده های (t_j, f_j) , $j=0,1,\ldots,n$, را درونیابی کند، که در اینجا $f_j = 1$ وقتیکه $j=i$ و در غیر اینصورت صفر است. آنگاه $S_\chi(t) = \sum_{i=0}^{n} \chi_i s_i(t)$ و $f(t) = \sum_{i=0}^{n} s_i(t) u_i(t)$ در نتیجه F روی $[t_0, t_n]$ پیوسته است و همچنین اگر همه $u_i \in E^n$ آنگاه برای هر $t \in [t_0, t_n]$ و $f(t) \in E^n$ خواهد بود.

قضیه۳-۳-۲: فرض کنیم که (t_i, u_i) , $i=0,1,2,\ldots,n$, داده شده باشند و همچنین فرض کنیم که هر $u_i = (u_i^{\,l}, u_i^{\,c}, u_i^{\,r})$ عضوی از $\mathbb{E}$ باشد .آنگاه برای هر $t \in [t_0, t_n]$ داریم:

$$f^{\,l}(t) = \sum_{s_i(t) \ge 0} s_i(t) u_i^{\,l} + \sum_{s_i(t) < 0} s_i(t) u_i^{\,r}$$

$$f^{\,c}(t) = \sum_{i=0}^{n} s_i(t) u_i^{\,c}$$

$$f^{\,r}(t) = \sum_{s_i(t) \ge 0} s_i(t) u_i^{\,r} + \sum_{s_i(t) < 0} s_i(t) u_i^{\,l}$$

اثبات: [9] را ببینید.

3-3-3 روش های صریح و ضمنی تصحیح یافته

این روشها با به کاربردن درونیاب اسپلاین (خطی) مرتبه اول به جای چند جمله ای درونیاب لاگرانژ حاصل می شوند. حال در بازه $I=[0,T]$ نقاط گره ای متساوی الفاصله $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=T$ در نظر می گیریم. فرض کنیم که $[Y_1]^r = [\underline{Y_1}(t,r), \overline{Y_1}(t,r)]$ و $[Y_2]^r = [\underline{Y_2}(t,r), \overline{Y_2}(t,r)]$ جوابهای دقیق $[y_1]^r = [\underline{y_1}(t,r), \overline{y_1}(t,r)]$ و $[y_2]^r = [\underline{y_2}(t,r), \overline{y_2}(t,r)]$ به ترتیب تقریب این دو جواب در نقاط گره ای $t_n = t_0 + nh, h = \frac{T}{N}$ می باشند.

با در نظر گرفتن **تعریف ۳-2-۱** تعدادی از روش های چندگامی **تصحیح یافته** با به کاربردن درونیاب اسپلاین (خطی) مرتبه اول به صورت زیر بدست می آیند:[9]

اگر y(t) (1) – دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه:

روش سه گامی آدمز – بشفورث[1]:

(۳-۳-1)

$$\begin{cases} \underline{y}(t_{i+2},r)=\underline{y}(t_{i-1},r)+\dfrac{h}{2}[\underline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+\underline{f}(t_i,y(t_i,r))+4\underline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))], \\ \overline{y}(t_{i+2},r)=\overline{y}(t_{i-1},r)+\dfrac{h}{2}[\overline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+\overline{f}(t_i,y(t_i,r))+4\overline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))], \\ \underline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_0,\underline{y}(t_i,r)=\alpha_1,\underline{y}(t_{i+1},r)=\alpha_2,\overline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_3,\overline{y}(t_i,r)=\alpha_4,\overline{y}(t_{i+1},r)=\alpha_5 \end{cases}$$

روش دو گامی آدمز – مولتون[2]:

(۳-۳-۲)

$$\begin{cases} \underline{y}(t_{i+2},r)=\underline{y}(t_{i-1},r)+\dfrac{h}{2}[\underline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+2\underline{f}(t_i,y(t_i,r))+\underline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))], \\ \overline{y}(t_{i+2},r)=\overline{y}(t_{i-1},r)+\dfrac{h}{2}[\overline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+2\overline{f}(t_i,y(t_i,r))+\overline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))], \\ \underline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_0,\underline{y}(t_i,r)=\alpha_1,\overline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_2,\overline{y}(t_i,r)=\alpha_3, \end{cases}$$

اگر y(t) (2) – دیفرانسیل‌پذیر باشد آنگاه:

روش سه گامی آدمز – بشفورث:

(۳-۳-۳)

$$\begin{cases} \overline{y}(t_{i+2},r)=\underline{y}(t_{i-1},r)+\dfrac{h}{2}[\underline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+\underline{f}(t_i,y(t_i,r))+4\underline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))], \\ \underline{y}(t_{i+2},r)=\overline{y}(t_{i-1},r)+\dfrac{h}{2}[\overline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+\overline{f}(t_i,y(t_i,r))+4\overline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))], \\ \underline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_0,\underline{y}(t_i,r)=\alpha_1,\underline{y}(t_{i+1},r)=\alpha_2,\overline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_3,\overline{y}(t_i,r)=\alpha_4,\overline{y}(t_{i+1},r)=\alpha_5 \end{cases}$$

روش دو گامی آدمز – مولتون:

[1] Adams-bashforth
[2] Adams-Moulton

(۴-۳-۳)

$$\begin{cases} \overline{y}(t_{i+2},r)=\underline{y}(t_{i-1},r)+\frac{h}{2}[\underline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+2\underline{f}(t_i,y(t_i,r))+\underline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))],\\ \underline{y}(t_{i+2},r)=\overline{y}(t_{i-1},r)+\frac{h}{2}[\overline{f}(t_{i-1},y(t_{i-1},r))+2\overline{f}(t_i,y(t_i,r))+\overline{f}(t_{i+1},y(t_{i+1},r))],\\ \underline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_0,\underline{y}(t_i,r)=\alpha_1,\overline{y}(t_{i-1},r)=\alpha_2,\overline{y}(t_i,r)=\alpha_3, \end{cases}$$

۴-3-3 روش سه گامی پیشگو -اصلاح کننده تصحیح یافته

الگوریتم IPC. روش سه گامی تحت (1) – دیفرانسیل‌پذیری.

تقریب می زنیم جواب معادله دیفرانسیل IVP داده شده به صورت زیر

$$\begin{cases} y'=f(t,y(t)),t\in[t_0,T]\\ y(t_0)=y_0, \end{cases}$$

با استفاده از روش سه گامی صریح تصحیح یافته به عنوان یک روش پیشگو کننده و یک تکرار از روش دو گامی تصحیح یافته به عنوان یک روش اصلاح کننده که درآن N یک عدد طبیعی است. و الگوریتم به صورت زیر ساخته شده است.

مرحله ۱–فرض کنید

$$h=\frac{T-t_0}{N}$$

$$\underline{w}(t_0,r)=\alpha_0,\underline{w}(t_1,r)=\alpha_1,\underline{w}(t_2,r)=\alpha_2,$$

$$\overline{w}(t_0,r)=\alpha_3,\overline{w}(t_1,r)=\alpha_4,\overline{w}(t_2,r)=\alpha_5.$$

مرحله 2– فرض کنید $i=1$

مرحله 3 – فرض کنید

$$\begin{cases} \underline{w}^{(0)}(t_{i+2},r)=\underline{w}(t_{i-1},r)+\frac{h}{2}[\underline{f}(t_{i-1},w(t_{i-1},r))+\underline{f}(t_i,w(t_i,r))+4\underline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))],\\ \overline{w}^{(0)}(t_{i+2},r)=\overline{w}(t_{i-1},r)+\frac{h}{2}[\overline{f}(t_{i-1},w(t_{i-1},r))+\overline{f}(t_i,w(t_i,r))+4\overline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))], \end{cases}$$

مرحله 4 - فرض کنید

$t_{i+2}=t_0+(i+2)h$

مرحله5 - فرض کنید

$$\begin{cases}\underline{w}(t_{i+2},r)=\underline{w}(t_i,r)+\frac{h}{2}[\underline{f}(t_i,w(t_i,r))+2\underline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))+\underline{f}(t_{i+2},w^{(0)}(t_{i+2},r))]\\ \overline{w}(t_{i+2},r)=\overline{w}(t_i,r)+\frac{h}{2}[\overline{f}(t_i,w(t_i,r))+2\overline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))+\overline{f}(t_{i+2},w^{(0)}(t_{i+2},r))]\end{cases}$$

مرحله6 - $i=i+1$

مرحله 7 - اگر $i\le N-2$ برو مرحله 3

مرحله ۸ - الگوریتم پایان یافته است. و $(\underline{w}(T,r),\overline{w}(T,r))$ تقریب هایی برای جواب دقیق $(\underline{Y}(T,r),\overline{Y}(T,r))$. است.

الگوریتم IPC. روش سه گامی تحت (2) - دیفرانسیل‌پذیری.

مرحله ۱-فرض کنید

$$h=\frac{T-t_0}{N}$$

$$\underline{w}(t_0,r)=\alpha_0,\underline{w}(t_1,r)=\alpha_1,\underline{w}(t_2,r)=\alpha_2,$$

$$\overline{w}(t_0,r)=\alpha_3,\overline{w}(t_1,r)=\alpha_4,\overline{w}(t_2,r)=\alpha_5.$$

مرحله 2- فرض کنید $i=1$

مرحله 3 - فرض کنید

$$\begin{cases}\overline{w}^{(0)}(t_{i+2},r)=\underline{w}(t_{i-1},r)+\frac{h}{2}[\underline{f}(t_{i-1},w(t_{i-1},r))+\underline{f}(t_i,w(t_i,r))+4\underline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))]\\ \underline{w}^{(0)}(t_{i+2},r)=\overline{w}(t_{i-1},r)+\frac{h}{2}[\overline{f}(t_{i-1},w(t_{i-1},r))+\overline{f}(t_i,w(t_i,r))+4\overline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))]\end{cases}$$

مرحله 4 - فرض کنید

$t_{i+2}=t_0+(i+2)h$

مرحله5 - فرض کنید

$$\begin{cases} \overline{w}(t_{i+2},r)=\underline{w}(t_i,r)+\frac{h}{2}[\underline{f}(t_i,w(t_i,r))+2\underline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))+\underline{f}(t_{i+2},w^{(0)}(t_{i+2},r))] \\ \underline{w}(t_{i+2},r)=\overline{w}(t_i,r)+\frac{h}{2}[\overline{f}(t_i,w(t_i,r))+2\overline{f}(t_{i+1},w(t_{i+1},r))+\overline{f}(t_{i+2},w^{(0)}(t_{i+2},r))] \end{cases}$$

مرحله6 - $i=i+1$

مرحله 7 - اگر $i\le N-2$ برو مرحله 3

مرحله ۸ - الگوریتم پایان یافته است. و $(\underline{w}(T,r),\overline{w}(T,r))$ تقریب هایی برای جواب دقیق $(\underline{Y}(T,r),\overline{Y}(T,r))$. است .

۳-۴ همگرایی[۱] و پایداری[۲]

در بازه $I=[0,T]$ نقاط گره ای متساوی الفاصله $0=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_N=T$ در نظر می گیریم. فرض کنیم که جوابهای دقیق $[Y_1]^r=[\underline{Y_1}(t,r),\overline{Y_1}(t,r)]$ و $[Y_2]^r=[\underline{Y_2}(t,r),\overline{Y_2}(t,r)]$ به ترتیب تقریب زده شده با $[y_1]^r=[\underline{y_1}(t,r),\overline{y_1}(t,r)]$ و $[y_2]^r=[\underline{y_2}(t,r),\overline{y_2}(t,r)]$ وجواب ها در نقاط گره ای $t_n=t_0+nh, h=\frac{T}{N}$ محاسبه می شوند.

و در فرمول های بدست آمده برای روش های آدامز بشفورث، آدامز -مولتن تصحیح یافته منحنی های چند ضلعی

$$\underline{y}(t,h,r)=\{[t_0,\underline{y}_0(r)],[t_1,\underline{y}_1(r)],\ldots,[t_N,\underline{y}_N(r)]\}$$
$$\overline{y}(t,h,r)=\{[t_0,\overline{y}_0(r)],[t_1,\overline{y}_1(r)],\ldots,[t_N,\overline{y}_N(r)]\},$$

به ترتیب تقریبهایی برای $[Y_1]^r=[\underline{Y}_1(t,r),\overline{Y}_1(t,r)$ و $[Y_2]^r=[\underline{Y_2}(t,r),\overline{Y_2}(t,r)]$ روی بازه $t_0\le t\le t_N$ می باشند . و لم زیر همگرایی این تقریب ها را نشان می دهد. یعنی:

$$\lim_{h\to 0}\underline{y}_1(t,h,r)=\underline{Y}_1(t,r),\lim_{h\to 0}\overline{y}_1(t,h,r)=\overline{Y}_1(t,r)$$
$$\lim_{h\to 0}\underline{y}_2(t,h,r)=\underline{Y}_2(t,r),\lim_{h\to 0}\overline{y}_2(t,h,r)=\overline{Y}_2(t,r)$$

لم۳-۴-۱: فرض کنیم دنباله اعداد $\{w_n\}_{n=0}^{N}$ در شرایط زیر صدق کند.

$$w_{n+1}\le Aw_n+Bw_{n-1}+C, 0\le n\le N-1$$

که در آن A , B, C **ثابت های مثبت و مفروض هستند.** آنگاه:

[1] Convergence
[۲] Stability

$$|w_n| \le (A^{n-1} + \beta_1 A^{n-3}B + \beta_2 A^{n-5}B^2 + \ldots + \beta_s B^{[n/2]})|w_1| + (A^{n-2} + \gamma_1 A^{n-4}B^2 + \ldots + \gamma_t AB^{[n/2]})|w_0|$$
$$+(A^{n-2} + A^{n-3} + \ldots + 1)C + (\delta_1 A^{n-4} + \delta_2 A^{n-5} + \ldots + \delta_m A + 1)BC + (\xi_1 A^{n-6} + \xi_2 A^{n-7} + \ldots + \xi_l A + 1)B^2C$$

$$+(\lambda_1 A^{n-8} + \lambda_2 A^{n-9} + \ldots + \lambda_p A + 1)B^3C + \ldots, n \text{ odd}$$

و

$$(A^{n-1} + \beta_1 A^{n-3}B + \beta_2 A^{n-5}B^2 + \ldots + \beta_s B^{[n/2]-1})|w_1| + (A^{n-2} + \gamma_1 A^{n-4}B^2 + \ldots + \gamma_t AB^{[n/2]})|w_0|$$
$$+(A^{n-2} + A^{n-3} + \ldots + 1)C + (\delta_1 A^{n-4} + \delta_2 A^{n-5} + \ldots + \delta_m A + 1)BC + (\xi_1 A^{n-6} + \xi_2 A^{n-7} + \ldots + \xi_l A + 1)B^2C$$
$$+(\lambda_1 A^{n-8} + \lambda_2 A^{n-9} + \ldots + \lambda_p A + 1)B^3C + \ldots, n \text{ even}$$

جائیکه $\beta_s, \gamma_t, \delta_m, \xi_l, \lambda_p$ **ثابت ها هستند**. برای هر s, t, m, l. و p.

اثبات: با استفاده استقرا ریاضی ساده می باشد.

قضیه۳-٤-2 : برای $0 \le r \le 1$ ثابت ودلخواه داده شده، تقر یب های دو گامی ضمنی تصحیح یافته معادلات(3-3-۲),(3-3-4) همگرا به جواب های دقیق $\underline{Y}_1(t,r), \overline{Y}_1(t,r)$ و $\underline{Y}_2(t,r), \overline{Y}_2(t,r)$ است. برای هر $\underline{Y}_1, \overline{Y}_1, \underline{Y}_2, \overline{Y}_2 \in C^3[t_0, T]$.

قضیه۳-٤-3: برای $0 \le r \le 1$ ثابت ودلخواه داده شده، تقر یب های سه گامی صریح تصحیح یافته معادلات(3-3-۱),(3-3- ۳) همگرا به جواب های دقیق $\underline{Y}_1(t,r), \overline{Y}_1(t,r)$ و $\underline{Y}_2(t,r), \overline{Y}_2(t,r)$ است. برای هر $\underline{Y}_1, \overline{Y}_1, \underline{Y}_2, \overline{Y}_2 \in C^3[t_0, T]$.

قضیه۳-4-4: روش سه گامی صریح و روش دو گامی ضمنی تصحیح یافته ارائه شده پایدارند.

اثبات:[8] را ببینید.

مثال ۳-4-5: [50] مسئله مقدار اولیه فازی را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} y'(t) = -\lambda \odot y(t) \\ \underline{y}(0,r) = (r-1), \\ \overline{y}(0,r) = (1-r), \end{cases}$$

که در اینجا $0 \le r \le 1$ و $\lambda = 1$, $I = [0,0.1]$ می باشد. جواب دقیق در نقطه $t = 0.1$ مسئله مقدار اولیه فازی (FIVP) فوق با استفاده فرمول(۳-۲) تحت (1) - دیفرانسیل پذیری به صورت زیر است.

$$y(t,r) = [(r-1)e^t, (1-r)e^t]$$

جواب دقیق تحت (۲)- دیفرانسیل پذیری به صورت زیر است.

$y(t,r)=[(r-1)e^{(-t)},(1-r)e^{(-t)}]$

حال مسئله مقدار اولیه فازی (FIVP) فوق را با استفاده روش **پیشگو -اصلاح کننده تصحیح یافته در بازه** $I=[0,0.1]$ با $\lambda=1$ حل کرده و سپس جواب تقریبی به دست آمده را با جواب دقیق مقایسه کرده و خطای حاصل را برای $N=10$ به ترتیب در جداول(۳-۱)و(۳-۲) آورده شده است.

جدول ۳-۱ مقایسه جواب واقعی با جواب تقریبی با $N=10$ تحت (1) – دیفرانسیل پذیری

r	$\underline{y_1}$	$\underline{Y_1}$	Error	$\overline{y_1}$	$\overline{Y_1}$	Error
0	-1.105202	-1.105170	0.319865e-4	1.105202	1.105170	0.319865e-4
0.1	-0.994682	-0.994653	0.287879e-4	0.994682	0.994653	0.287879e-4
0.2	-0.884162	-0.884136	0.255892e-4	0.884162	0.884136	0.255892e-4
0.3	-0.773642	-0.773619	0.223906e-4	0.773642	0.773619	0.223906e-4
0.4	-0.663121	-0.663102	0.191919e-4	0.663121	0.663102	0.191919e-4
0.5	-0.552601	-0.552585	0.159932e-4	0.552601	0.552585	0.159932e-4
0.6	-0.442081	- 0.442068	0.127946e-4	0.442081	0.442068	0.127946e-4
0.7	-0.331560	-0.331551	0.095959e-4	0.331560	0.331551	0.095959e-4
0.8	-0.221040	-0.221034	0.063973e-4	0.221040	0.221034	0.063973e-4
0.9	-0.110520	-0.110517	0.031986e-4	0.110520	0.110517	0.031986e-4
1	0	0	0	0	0	0

جدول ۳-۲ مقایسه جواب واقعی با جواب تقریبی با $N=10$ تحت (2) – دیفرانسیل پذیری

r	$\underline{y_2}$	$\underline{Y_2}$	Error	$\overline{y_2}$	$\overline{Y_2}$	Error
0	-0.904893	-0.904837	0.562770e-4	0.904893	0.904837	0.562770e-4
0.1	-0.814404	-0.814353	0.506493e-4	0.814404	0.814353	0.506493e-4
0.2	-0.723914	-0.723869	0.450216e-4	0.72364	0.723869	0.450216e-4
0.3	-0.633425	-0.633386	0.393939e-4	0.633425	0.633386	0.393939e-4
0.4	-0.542936	-0.542902	0.337662e-4	0.542936	0.542902	0.337662e-4
0.5	-0.452446	-0.452418	0.281385e-4	0.452446	0.452418	0.281385e-4
0.6	-0.361957	-0.361934	0.225108e-4	0.361957	0.361934	0.225108e-4
0.7	-0.271468	-0.271451	0.168831e-4	0.271468	0.271451	0.168831e-4
0.8	-0.180978	-0.180967	0.112554e-4	0.180978	0.180967	0.112554e-4
0.9	-0.090489	-0.090483	0.056277e-4	0.090489	0.090483	0.056277e-4
1	0	0	0	0	0	0

فصل چهارم

معادله دیفرانسیل فازی

از

مرتبه کسری

۱-4 مقدمه

مفهوم عملگر مشتق‌گیری $D=\frac{d}{dx}$ برای تمام کسانی که محاسبات معمولی را مطالعه کرده‌اند، آشنا است و در آنالیز ریاضی با مشتق nام تابع $f(x)$ یعنی $D^n f(x)=\frac{d^n f(x)}{dx^n}$ در صورتی که n یک عدد صحیح مثبت باشد، آشنا شده‌ایم (اگر n عدد صحیح مثبت باشد $D^{-n}f(x)=\frac{1}{D^n}f(x)$ را انتگرال مرتبه n ام $f(x)$ درنظر می‌گیریم).

حال سؤالی که مطرح می‌شود این است که: اگر داشته باشیم $D^{\beta}f(x)=\frac{d^{\beta}f(x)}{dx^{\beta}}$ که درآن β یک عدد دلخواه (گویا، گنگ یا مختلط) باشد، مقدار $D^{\beta}f(x)$ تحت هر نوع مشتق پذیری در محیط فازی چقدر است؟ در این فصل به صورت اجمالی به این سوال پاسخ خواهیم داد.

محاسبات کسری در ابتدا برای حل معادلات انتگرالی آبل استفاده شد ولی بعدها محاسبات کسری و معادلات دیفرانسیل کسری کاربردهای فراوانی در علوم مختلف پیدا کرد که از جمله می توان به موارد زیر اشاره کرد: مسئله خم‌همزمانی و محاسبه‌ی عملگر هوی‌ساید در فیزیک، فلوهای جریان و طراحی دریچه-های سدها در مکانیک و عمران، تجزیه و تحلیل نمودارهای زلزله در زمین‌شناسی[21,27,35,38, 17,20].

در این فصل ابتدا انتگرال فازی ریمان- لیوویل از مرتبه کسری را مطرح و سپس مشتق پذیری فازی ریمان-لیوویل از مرتبه کسری را بیان می‌کنیم و همچنین جوابهای معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری تحت **دنباله ی مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل مورد بررسی قرار می‌گیرد. بدین منظور، **تبدیلات لاپلاس** فازی **دنباله ی مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل را به دست می آوریم. در این راستا

بسیاری از مفاهیم پایه ای و نتایج جدیدی در محیط فازی بیان می شوند. درانتها چند مثال برای نشان دادن توانایی و اعتبار روش ها ارائه خواهیم نمود.

4-۲- **انتگرال و مشتق** پذیری ریمان-لیوویل [۱]

در این بخش تعاریف انتگرال های ریمان-لیوویل و مشتقات ریمان-لیوویل با استفاده از تفاضل هاکوارا بیان می شوند. در این بخش $L^F[a,b]\bigcap C^F[a,b]$ بیانگر فضای تمام توابع فازی- مقدار پیوسته و لبگ اندازه پذیر روی $[a,b]$ است.

تعریف 4-2-۱: **فرض کنیم** $f\in C^F[a,b]\bigcap L^F[a,b]$. انتگرال ریمان-لیوویل تابع فازی- مقدار f به صورت زیر می باشد:

$$\left(I_{a+}^{\beta}f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x\frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\beta}},\ x>a,0<\beta\le 1$$

قضیه 4-2-2: فرض کنید $f\in C^F[a,b]\bigcap L^F[a,b]$ **تابعی فازی-مقدار باشد. نمایش r-برش** $\left(I_{a+}^{\beta}f\right)(x)$ **به صورت زیر تعریف می شود.**

$$\left(I_{a+}^{\beta}f\right)(x;r)=\left[\left(I_{a+}^{\beta}\underline{f}\right)(x;r),\left(I_{a+}^{\beta}\overline{f}\right)(x;r)\right],\ 0\le r\le 1$$

که

$$\left(I_{a+}^{\beta}\underline{f}\right)(x;r)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x\frac{\underline{f}(t;r)dt}{(x-t)^{1-\beta}},\ 0\le r\le 1, \qquad (۱-2-٤)$$

$$\left(I_{a+}^{\beta}\overline{f}\right)(x;r)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x\frac{\overline{f}(t;r)dt}{(x-t)^{1-\beta}},\ 0\le r\le 1. \qquad (۲-۲-٤)$$

[1] Reimann- Liouville

تعریف 4-2-3: **فرض کنیم** $f(x)\in C^{(n)\mathbb{F}}[a,b]\cap L^{\mathbb{F}}[a,b]$ **و** $n=[R(\beta)]+1$

$\Phi^{(\beta,n)}(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\beta-n+1}}$، f **در نقطه** x_0 **دارای مشتق ریمان-لیوویل از مرتبه** $0<\beta<1$

می باشد هرگاه $({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}f)(x_0)\in\mathbb{E}$ موجود باشد به طوری که برای $h>0$ و به اندازه کافی کوچک، لااقل

یکی از عبارت های زیر برقرار باشد:

$$1)\qquad ({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}f)(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{\Phi^{(n-1)}(x_0+h)\ominus\Phi^{(n-1)}(x_0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\Phi^{(n-1)}(x_0)\ominus\Phi^{(n-1)}(x_0-h)}{h}$$

(۳-۲-۴)

$$2)\qquad ({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}f)(x_0)=\lim_{h\to0^+}\frac{\Phi^{(n-1)}(x_0)\ominus\Phi^{(n-1)}(x_0+h)}{-h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\Phi^{(n-1)}(x_0-h)\ominus\Phi^{(n-1)}(x_0)}{-h}$$

(4-۲-۴)

برای بیان ساده تر، تابع f را $[\beta-1]^{RL}$–دیفرانسیل پذیر می گوییم هرگاه f در تعریف **4-2-۳ حالت (1)** صدق کند. به صور مشابه f را $[\beta-2]^{RL}$– دیفرانسیل پذیر می گوییم هرگاه f در تعریف **4-2-۳ حالت** (2) **صدق کند.**

قضیه 4-۲-۴: $f(x)\in C^{(n)\mathbb{F}}[a,b]\cap L^{\mathbb{F}}[a,b]$, $x_0\in(a,b)$ **و** $(n=[Re(\beta)]+1)$ آنگاه

(۱) -فرض کنیم $[\beta-1]^{RL}$– دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت

$$({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}f)(x_0;r)=\left[{}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\underline{f}(x_0,r),{}^{RL}D_{a^+}^{\beta}\overline{f}(x_0,r)\right] \qquad \textbf{(5-۲-۴)}$$

(۲) -فرض کنیم $[\beta-2]^{RL}$– دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت

$$(D_{a+}^{\beta} f)(x_0;r)=\left[{}^{RL}D_{a+}^{\beta}\overline{f}(x_0;r), {}^{RL}D_{a+}^{\beta}\underline{f}(x_0,r)\right] \qquad \textbf{(6-۲-۴)}$$

که

$${}^{RL}D_{a+}^{\beta}\underline{f}(x_0;r)=\left[\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{\underline{f}(t;r)dt}{(x-t)^{\beta-n+1}}\right]_{x=x_0} \qquad \textbf{(7-۲-۴)}$$

$${}^{RL}D_{a+}^{\beta}\overline{f}(x_0;r)=\left[\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x\frac{\overline{f}(t,r)dt}{(x-t)^{\beta-n+1}}\right]_{x=x_0} \qquad \textbf{(8-۲-۴)}$$

نتیجه4-2-5 :برای حالت $\beta=n\in\mathbb{N}$ **مشتق**‌پذیری ریمان-لیوویل **فازی کسری به مشتق**‌پذیری تعمیم یافته تقلیل می یابد[37].

لم4-2- 6: فرض کنیم $f\in C^{\mathbb{F}}[a,b]\cap L^{\mathbb{F}}[a,b]$, $f_{m-\alpha}\in AC^{\mathbb{F}m}([a,b])$, آنگاه داریم:

(۱) اگر f تابع $[\beta-1]^{RL}[1-\beta]$– دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه:

$$\left(I_{a+}^{\beta}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f\right)(x)=f(x)\ominus\sum_{j=1}^{m}\frac{f_{n-\beta}^{(m-j)}(a)}{\Gamma(\beta-j+1)}(x-a)^{\beta-j}$$

(۲) اگر f تابع $[\beta-2]^{RL}[2-\beta]$– دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه:

$$\left(I_{a+}^{\beta}\,{}^{RL}D_{a+}^{\beta}f\right)(x)=-\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{f_{n-\beta}^{(m-j)}(a)}{\Gamma(\beta-j+1)}(x-a)^{\beta-j}\right)\ominus(-f(x))$$

به شرطه انکه تفاضل هاکوارا بیان شده وجود داشته باشد.

گزاره**4-2-7** : **فرض کنیم** $n-1<\alpha\leq n$ ، $m-1<\beta\leq m$ $(n,m\in N)$ **و** n > $\alpha+\beta<n$ **و فرض کنید** $f(x)\in L^{\mathbb{F}}(a,b)$ **و** $f_{m-\alpha}\in AC^{\mathbb{F}m}([a,b])$ **بنابراین** اگر $D^{\beta}f(x)$ تابع $[1-\alpha]^{RL}-$ دیفرانسیل پذیر باشد، **داریم:**

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\beta}f\right)(x)=\left(D_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(x)\ominus\sum_{j=1}^{m}\left(D^{\beta-j}f\right)(a^+)\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}$$

اگر $D^{\beta}f(x)$ تابع $[2-\alpha]^{RL}-$ دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه:

$$\left(D_{a^+}^{\alpha}D_{a^+}^{\beta}f\right)(x)=-\left(\sum_{j=1}^{m}\left(D^{\beta-j}f\right)(a^+)\frac{(x-a)^{-j-\alpha}}{\Gamma(1-j-\alpha)}\right)\ominus\left(-D_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(x)$$

به شرطه انکه تفاضل هاکوارا بیان شده وجود داشته باشد.

4-3-دنباله ی مشتق پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل[1]

در این بخش، با استفاده قاعده ترکیب برای مشتق پذیری ریمان-لیوویل، جا یگزین می کنیم دنباله ی مشتقات ریمان-لیوویل کسری تعریف شده به صورت $\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\sigma_m}f\right)$ با استفاده معادلات(**۴-2-3**) , **(۴-2-4) مشخص شده** به طوری که:

$$D_{0^+}^{\sigma_k}\equiv D_{0^+}^{\alpha_k}D_{0^+}^{\alpha_{k-1}}...D_{0^+}^{\alpha_1}$$

$$D_{0^+}^{\sigma_k-1}\equiv D_{0^+}^{\alpha_k-1}D_{0^+}^{\alpha_{k-1}}...D_{a^+}^{\alpha_1}$$

که

$$\sigma_k=\sum_{j=1}^{k}\alpha_j,\quad (k=1,...,m)$$

[1] The sequential fractional H-differentiability

$0 < \alpha_j \leq 1, \quad (j = 1,...,m)$

و

$f(x) \in C^{\mathbb{F}m}[a,b] \cap L^{\mathbb{F}}[a,b]$

4-4- تبدیلات لاپلاس فازی

فرض کنید f یک تابع فازی–مقدار و p یک پارامتر حقیقی است.

تعریف 4-4-1: تبدیل لاپلاس فازی برای تابع فازی–مقدار $f(t;r) = \left[\underline{f}(t,r), \overline{f}(t,r)\right]$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{F}(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \odot e^{-pt} dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} f(t) \odot e^{-pt} dt$$

معادله برای $r \in [0,1]$، داریم:

$$\hat{F}(p;r) = \left(\lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} \underline{f}(t;r) e^{-pt} dt, \lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} \overline{f}(t;r) e^{-pt} dt \right)$$

به شرط آنکه حدود فوق موجود باشند.

تعریف 4-۴-2: یک تابع فازی–مقدار $f(t)$ تعریف شده از مرتبه‌ی نمایی α گوییم هرگاه وجود داشته باشد ثابت‌هایی مثبت مانند T, M به‌طوری‌که برای هر $t \geq T$

$$D(f(t), \tilde{0}) \leq M e^{\alpha t}$$

4-4-۱ خواص پایه ای

در این قسمت، برخی خواص مهم تبدیلات لاپلاس فازی مورد بررسی قرار می گیرد.

۱)- خطی بودن. یکی از پایه ای ترین خواص عملگر تبدیلات لاپلاس فازی L خطی بودن آن است.

یعنی:

$$L[(c_1 \odot f(t)) \oplus (c_2 \odot g(t))] = (c_1 \odot L[f(t)]) \oplus (c_2 \odot L[g(t)])$$

برای ثابت‌های دلخواه c_1, c_2.

و همچنین می‌نویسیم:

$$f(t) = L^{-1}\left\{\hat{F}(p)\right\}$$

توجه کنید که L^{-1} خطی است، یعنی:

$$L^{-1}\left\{a \odot \hat{F}(p) \oplus b \odot \hat{G}(p)\right\} = a \odot f(t) \oplus b \odot g(t)$$

۲)- همگرایی یکنواخت. اگر تابع فازی-مقدار f کران دار قطعه ای پیوسته از مرتبه‌ی نمایی α باشد و آنگاه تبدیلات لاپلاس فازی $\hat{F}(p) = L[f(t)]$ برای $P > \alpha$ وجود دارد دارای همگرایی یکنواخت باشد.

۳)-قضیه پیچش. یکی از خاصیت‌های خیلی مفید از تبدیل لاپلاس در قضیه پیچش است. قضیه نشان می‌دهد که تبدیل لاپلاس از پیچش دو تابع، ضرب تبدیلات لاپلاس آنها است. بنابراین اگر $\hat{F}(p)$ و $\hat{G}(p)$ تبدیلات لاپلاس از تابع فازی-مقدار $f(t)$ و $g(t) \geq 0$ باشند، آنگاه

$$L\left\{\int_0^t f(t-\xi) \odot g(\xi) d\xi\right\} = \hat{F}(p) \odot \hat{G}(p)$$

4-4-۲ **تبدیلات لا**پلاس فازی از **دنباله ی مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل

قضیه4-4-3:(قضیه مشتق)

فرض کنید $f \in C^{\mathbb{F}m}[0,\infty) \cap L^{\mathbb{F}}[0,\infty)$ آن گاه:

(۱) اگر $D_{a^+}^{\alpha_{k-1}} f$, $(k = 2,3...,m)$ تابع $[(1)-\sigma_k]^{RL}-$ دیفرانسیل پذیر باشد، آن گاه:

$$\mathbf{L}\left[\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\sigma_m} f\right)(x)\right] = p^{\sigma_m}\mathbf{L}[f(t)] \ominus \left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m - \sigma_{m-k}}\left[D_{0^+}^{\sigma_{m-k}-1} f\right]\right)(0) \quad \textbf{(1-4-۴)}$$

(۲) اگر $D_{a^+}^{\alpha_k -1} f$، $(k=2,3...,m)$ تابع $[\sigma_k-(2)]^{RL}$– دیفرانسیل پذیر باشد، آن گاه:

(2-۴-4)

$$\mathbf{L}\left[\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\sigma_m} f\right)(x)\right] = -\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m - \sigma_{m-k}}\left[D_{0^+}^{\sigma_{m-k}-1} f\right]\right)(0) \ominus \left(-p^{\sigma_m}\mathbf{L}[f(t)]\right)$$

به شرطه آنکه تفاضل هاکوارا بیان شده وجود داشته باشد.

اثبات: در نظر می‌گیریم تبدیلات لاپلاس فازی برای حالت $[\alpha-(1)]^{RL}$–دیفرانسیل پذیری و **داریم:**

$$\mathbf{L}\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\alpha} f\right)(x)\right] = p^{\alpha}\mathbf{L}[f(t)] \ominus \left({}^{RL}D_{a^+}^{\alpha-1} f\right)(0) \quad \textbf{(۳-۴-۴)}$$

بنابراین با استفاده (۴-۴-۳) با بکار بردن m مرتبه و برای $r\in[0,1]$ دلخواه داریم:

$$p^{\sigma_m}\mathbf{L}[f(t)] \ominus \left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m - \sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1} f\right]\right)(0,r) = \left(f_1(t;r), f_2(t;r)\right)$$

که

$$f_1(t;r) = p^{\sigma_m}\ell[\underline{f}(x,r)] - \left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m - \sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}\underline{f}\right]\right)(0,r)$$

$$f_2(t;r) = p^{\sigma_m}\ell[\overline{f}(x,r)] - \left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m - \sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}\overline{f}\right]\right)(0,r)$$

چون $(k=2,3...,m)$ $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_k-1} f$، $[\sigma_k-(1)]^{RL}$– دیفر انسیل‌پذیر است، داریم:

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m} f\right)(x,r) = \left[\left(\underline{\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m} f}\right)(x,r), \left(\overline{D_{a^+}^{\sigma_m} f}\right)(x,r)\right]$$

$$= \left[\left(\underline{D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}} f}\right)(x,r), \left(\overline{D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}} f}\right)(x,r)\right]$$

$$=\left[\left(\underline{D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}f}\right)(x,r),\left(\overline{D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}f}\right)(x,r)\right]$$

بنابراین داریم:

$$\ell\left[\left(\overline{\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f}\right)(x,r)\right)]=\ell\left[\left(\overline{D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}f}\right)(x,r)\right]$$

$$=\ell\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}\overline{f}\right)(x,r)\right]=p^{\alpha_m}\ell\left[\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}\overline{f}\right)(x,r)\right]-\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\alpha_{m-1}}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}\overline{f}\right)(0,r)\right]$$

$$=p^{\alpha_m}\ell\left[\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}\overline{f}\right)(x,r)\right]-\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}\overline{f}\right)(0,r)\right]$$

$$=p^{\alpha_m+\alpha_{m-1}}\ell\left[\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-2}}\overline{f}\right)(x,r)\right]-\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}\overline{f}\right)(0,r)\right]-p^{\alpha_m}\left[\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}-1}\overline{f}\right)(0,r)\right]-\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}\overline{f}\right)(0,r)\right]$$

.

.

.

$$=\ell\left[\left(\overline{{}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f}\right)(x,r)\right)]=\ell\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\overline{f}\right)(x,r)\right)]=p^{\sigma_m}\ell[\overline{f}(x,r)]-\left(\sum_{k=0}^{m-1}p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}\overline{f}\right]\right)(0,r),$$

و

$$\ell\left[\left(\underline{{}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f}\right)(x,r)\right)]=\ell\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\underline{f}\right)(x,r)\right)]=p^{\sigma_m}\ell[\underline{f}(x,r)]-\left(\sum_{k=0}^{m-1}p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}\underline{f}\right]\right)(0,r)$$

بنابراین نتیجه می گیریم که

$$p^{\sigma_m}\mathbf{L}[f(t)]\ominus\left(\sum_{k=0}^{m-1}p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}f\right]\right)(0;r)=\left(\ell\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\underline{f}\right)(x,r)\right],\ell\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\overline{f}\right)(x,r)\right]\right)$$

با توجه خاصیت خطی بودن L, داریم:

$$p^{\sigma_m}\mathbf{L}[f(t)]\ominus\left(\sum_{k=0}^{m-1}p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}f\right]\right)(0;r)=\mathbf{L}\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\underline{f}\right)(x,r),\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\overline{f}\right)(x,r)\right]$$

$$=L\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f\right)(x;r)\right]$$

حال فرض کنید $(k=2,3...,m)$ $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_{k-1}}f$, $[(2)-\sigma_k]$ $^{RL}-$دیفرانسیل باشد. و **برای** $r\in[0,1]$

دلخواه داریم:

$$-\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k-1}}f\right]\right)(0)\ominus\left(-p^{\sigma_m}\mathbf{L}\left[f(t)\right]\right)=\left(-f_2(t;r),-f_1(t;r)\right)$$

که

$$-f_1(t;r)=-\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\underline{\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k-1}}f}\right]\right)(0,r)+p^{\sigma_m}\,\ell[\underline{f}(x,r)]$$

$$-f_2(t;r)=-\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\overline{\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k-1}}f}\right]\right)(0,r)+p^{\sigma_m}\,\ell[\overline{f}(x,r)]$$

چون $(k=2,3...,m)$ $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha_{k-1}}f$, $[(2)-\sigma_k]$ $^{RL}-$ دیفر انسیل‌پذیر است، داریم:

$$\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f\right)(x,r)=\left[\left(\underline{{}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f}\right)(x,r),\left(\overline{{}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f}\right)(x,r)\right]$$

$$=\left[\left(\underline{{}^{RL}D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}f}\right)(x,r),\left(\overline{{}^{RL}D_{a^+}^{\alpha_m}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-1}}f}\right)(x,r)\right]$$

بنابراین داریم:

$$-\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k-1}}f\right]\right)(0)\ominus\left(-p^{\sigma_m}\mathbf{L}\left[f(x;r)\right]\right)$$

$$=\left[p^{\sigma_m}\,\ell[\overline{f}(x,r)]-\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k-1}}\overline{f}\right]\right)(0,r),p^{\sigma_m}\,\ell[\underline{f}(x,r)]-\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k-1}}\underline{f}\right]\right)(0,r)\right].$$

لذا خواهیم داشت:

$$-\left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_{m-k-1}}f\right]\right)(0;r)\ominus\left(-p^{\sigma_m}\mathbf{L}\left[f(t)\right]\right)=\left[\ell\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\overline{f}\right)(x;r)\right],\left[\ell\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}\underline{f}\right)(x;r)\right]\right]$$

$$=L\left[\left({}^{RL}\mathcal{D}_{a^+}^{\sigma_m}f\right)(x;r)\right]$$

اثبات کامل است. ■

نتیجه4-۴ -٤: **حالت خاص معادلات (۴-۴-1)و(۴-4-2) برای** $f(x)$, m **مرتبه** مشتق پذیر ریمان-لیوویل و $f \in C^{\mathbb{F}m}[0,\infty)\cap L^{\mathbb{F}}[0,\infty)$. با قرار دادن $(k=2,3,...,m)$ $\alpha_1=\mu,\alpha_k=1,$ روش تبدیلات لاپلاس فازی تحت مشتق پذیری ریمان-لیوویل بدست می آید[57].

4-5- FSFDEs تحت **دنباله ی مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل

معادله دیفرانسیل دنباله ای فازی از مرتبه کسری $(k=1,...,m)$ $\sigma_k,$ زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \left(D_{a^+}^{\sigma_m} y \right)(x) = f[x, y(x)] \\ \left(D_{a^+}^{\sigma_{k-1}} y \right)(0) = b_k \in \mathbb{E}, \quad k=1,...,m, \end{cases} \qquad \textbf{(1-5-۴)}$$

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\sigma_k} \equiv D_{0^+}^{\alpha_k} D_{0^+}^{\alpha_{k-1}} ... D_{0^+}^{\alpha_1}$$

$$D_{0^+}^{\sigma_k - 1} \equiv D_{0^+}^{\alpha_k - 1} D_{0^+}^{\alpha_{k-1}} ... D_{0^+}^{\alpha_1}$$

به طوری که

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j, \quad (k=1,...,m)$$

$$0 < \alpha_j \le 1, \quad (j=1,...,m)$$

و

$$f(x) \in C^{\mathbb{F}m}[a,b] \cap L^{\mathbb{F}}[a,b]$$

در ادامه، به توضیح روش تبدیلات لاپلاس فازی برای حل معادله **(۴-5-1)** می پردازیم.

4-5 -1: تعیین جواب ها

در این قسمت، قصد داریم معادله **(۴-5-1)** را با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس فازی حل کنیم. برای این منظور با به کار گیری روش تبدیلات لاپلاس فازی در دو طرف معادله**(۴-5-1)** خواهیم داشت:

$$L\left[\left(D_{a^+}^{\sigma_m} y\right)(x)\right] = L[f(x, y(x))] \qquad \textbf{(2-5-۴)}$$

سپس براساس نوع مشتق پذیری ریمان-لیوویل خواهیم داشت:

حالت 1) اگر $(k = 2,3...,m)$, $D_{a^+}^{\alpha_k - 1} f$ $[(1)-\sigma_k]$ $^{RL}[(1)-\sigma_k]$–دیفرانسیل‌پذیر باشد. در این صورت نمایش r–برشی معادله (4-5-2) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \ell[\underline{f}(x, y(x); r)] = p^{\sigma_m} \ell[\underline{y}(x, r)] - \left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m - \sigma_{m-k}} \left[D_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1} \underline{y}\right]\right)(0, r), 0 \le r \le 1, \\ \ell[\overline{f}(x, y(x); r)] = p^{\sigma_m} \ell[\overline{y}(x, r)] - \left(\sum_{k=0}^{m-1} p^{\sigma_m - \sigma_{m-k}} \left[D_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1} \overline{y}\right]\right)(0, r), 0 \le r \le 1, \end{cases} \qquad (3\text{-}5\text{-}4)$$

که

$$\underline{f}(x, y(x); r) = \min\left\{f(x, u) \mid u \in \left[\underline{y}(x; r), \overline{y}(x; r)\right]\right\}, 0 \le r \le 1$$

$$\overline{f}(x, y(x); r) = \max\left\{f(x, u) \mid u \in \left[\underline{y}(x; r), \overline{y}(x; r)\right]\right\}, 0 \le r \le 1$$

برای (4-5-3)، **ساده سازی** زیر را انجام می دهیم:

$$\ell[\underline{y}(x; r)] = H_1(p; r), 0 \le r \le 1$$

$$\ell[\overline{y}(x; r)] = K_1(p; r), 0 \le r \le 1$$

که در اینجا $H_1(p;r)$ و $K_1(p;r)$ جواب های دستگاه (4-5-3) می باشد.

در ادامه با به کار گیری معکوس تبدیلات لاپلاس فازی، خواهیم داشت:

$$\underline{y}(x,r)=\ell^{-1}\left[H_1(p;r)\right], 0\le r\le 1$$

$$\overline{y}(x;r)=\ell^{-1}\left[K_1(p;r)\right], 0\le r\le 1$$

حالت2) اگر $(k=2,3...,m)$, $^{RL}D_{a^+}^{\alpha_k-1}f$ $[(2)-\sigma_k]$–دیفرانسیل‌پذیر باشد. در این صورت نمایش

r –برشی معادله (2-5-4) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases}\ell[\underline{f}(x,y(x);r)]=p^{\sigma_m}\ell[\underline{y}(x,r)]-\left(\sum_{k=0}^{m-1}p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[D_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}\underline{y}\right]\right)(0,r),\\ \ell[\overline{f}(x,y(x);r)]=p^{\sigma_m}\ell[\overline{y}(x,r)]-\left(\sum_{k=0}^{m-1}p^{\sigma_m-\sigma_{m-k}}\left[D_{a^+}^{\sigma_{m-k}-1}\overline{y}\right]\right)(0,r).\end{cases}$$

مشابه قبل ساده سازی زیر را اعمال می کنیم:

$$\ell[\underline{y}(x;r)]=H_2(p;r)$$

$$\ell[\overline{y}(x;r)]=K_2(p;r)$$

نهایتا جواب به صورت زیر به دست می آید:

$$\underline{y}(x;r)=\ell^{-1}[H_2(p;r)], 0\le r\le 1$$

$$\overline{y}(x;r)=\ell^{-1}[K_2(p;r)], 0\le r\le 1$$

مثال 4-5-1:

معادله دیفرانسیل دنباله ای فازی از مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}^{RL}D_{0^+}^{\alpha}\left(^{RL}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x)=\lambda\odot y(x), 0<\alpha,\beta<1\\ ^{RL}D_{0^+}^{\alpha-1}\left(^{RL}D_{0^+}^{\beta}y\right)(0,r)=b_1\in\mathbb{E},\quad \left(^{RL}D_{0^+}^{\beta-1}y\right)(0,r)=b_2\in\mathbb{E}.\end{cases}$$

که در اینجا $\alpha+\beta=0.5$ و $\alpha_1=\alpha$, $\alpha_2=\beta$ و $m=2$. بنابراین $\sigma_1=\alpha$, $\sigma_2=\alpha+\beta$ **است.**

حالت 1) اگر $\lambda \in \mathbb{R}^{+} = (0,+\infty)$ باشد، آنگاه:

$$L\left[{}^{RL}D_{0^+}^{\alpha}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta} y \right)(x) \right] = L[\lambda \odot y(x)]$$

با فرض اینکه $D^{\beta} f(x)$، $[(1)-\alpha]^{RL}$–دیفرانسیل پذیر باشد داریم:

$$\begin{cases} \lambda \ell[\underline{y}(x;r)] = p^{\alpha+\beta}\ell\left[\underline{y}(x,r)\right] - p^{\beta}\underline{b_2}(r) - \underline{b_1}(r), \\ \lambda \ell[\overline{y}(x;r)] = p^{\alpha+\beta}\ell\left[\overline{y}(x;r)\right] - p^{\beta}\overline{b_2}(r) - \overline{b_1}(r), \end{cases}$$

پس از ساده سازی داریم:

$$\begin{cases} (p^{\alpha+\beta}-\lambda)\ell[\underline{y}(x;r)] = p^{\beta}\underline{b_2}(r) + \underline{b_1}(r), \\ (p^{\alpha+\beta}-\lambda)\ell[\overline{y}(x;r)] = p^{\beta}\overline{b_2}(r) + \overline{b_1}(r), \end{cases}$$

با استفاده از معکوس تبدیلات لاپلاس فازی، داریم:

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \underline{b_2}(r)\ell^{-1}\left[\dfrac{p^{\beta}}{p^{\alpha+\beta}-\lambda}\right] + \underline{b_1}(r)\ell^{-1}\left[\dfrac{1}{p^{\alpha+\beta}-\lambda}\right], 0 \le r \le 1, \\ \overline{y}(x;r) = \overline{b_2}(r)\ell^{-1}\left[\dfrac{p^{\beta}}{p^{\alpha+\beta}-\lambda}\right] + \overline{b_1}(r)\ell^{-1}\left[\dfrac{1}{p^{\alpha+\beta}-\lambda}\right], 0 \le r \le 1, \end{cases}$$

نهایتا جواب فرم r–برشی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \underline{b_2}(r)(x^{\alpha-1})E_{\alpha+\beta,\alpha}\left[\lambda x^{\alpha+\beta}\right] + \underline{b_1}(r)(x^{\alpha+\beta-1})E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left[\lambda x^{\alpha+\beta}\right], 0 \le r \le 1, \\ \overline{y}(x;r) = \overline{b_2}(r)(x^{\alpha-1})E_{\alpha+\beta,\alpha}\left[\lambda x^{\alpha+\beta}\right] + \overline{b_1}(r)(x^{\alpha+\beta-1})E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left[\lambda x^{\alpha+\beta}\right], 0 \le r \le 1. \end{cases} \quad \textbf{(4-5-4)}$$

حالت $\mathbf{2}$) اگر $\lambda \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$ باشد، در این صورت با فرض $[(2)-\alpha]^{RL}$–دیفرانسیل پذیری

$D^{\beta} f(x)$، جواب را مشابه (4-5-4) به دست می آوریم.

در حالت خاص، فرض کنید $\beta = 0$ و $\alpha = 0.5$, $\lambda = 1$, $(b_2 = \tilde{0})$, $b_1(r) = (1+r, 3-r)$ **در این صورت**

با استفاده از حالت (1) جواب به صورت :

$$y(x) = (1+r, 3-r) \odot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + e^{x} erfc(-\sqrt{x}) \right)$$

با استفاده از حالت (2) و $\lambda = -1$، داریم:

$$y(x) = (1+r, 3-r) \odot \left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - e^{x} erfc(\sqrt{x}) \right)$$

که

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-t^2} dt$$

که تابع $erfc(x)$، تابع خطا است.

مثال 4-5-۲

معادله دیفرانسیل دنباله ای فازی از مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} {}^{RL}D_{0^+}^{\alpha_2} \left({}^{RL}D_{0^+}^{\alpha_1} y \right)(x) = \lambda \odot y(x) + x + 1, 0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1 \\ {}^{RL}D_{0^+}^{\alpha_2 - 1} \left({}^{RL}D_{0^+}^{\alpha_1} y \right)(0, r) = b_1(r), \quad \left({}^{RL}D_{0^+}^{\alpha_1 - 1} y \right)(0, r) = b_2(r). \end{cases}$$

جائیکه $m = 2$ **و** $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

حالت(1) اگر $\lambda \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ باشد، آنگاه:

مشابه مثال قبل با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس فازی داریم:

$$L\left[{}^{RL}D_{0^+}^{\alpha_2}\left({}^{RL}D_{0^+}^{\alpha_1} y \right)(x) \right] = L\left[(\lambda \odot y(x) + x + 1) \right]$$

با فرض اینکه $D^{\alpha_1} f(x)$، $[(1)-\alpha_2]^{RL}$–دیفرانسیل پذیر باشد داریم:

$$\begin{cases} \lambda \ell[\underline{y}(x;r)] + \ell[x] + \ell[1] = p^{\alpha_1+\alpha_2} \ell\left[\underline{y}(x,r) \right] - p^{\alpha_2} \underline{b_2}(r) - \underline{b_1}(r), \\ \lambda \ell[\overline{y}(x;r)] + \ell[x] + \ell[1] = p^{\alpha_1+\alpha_2} \ell\left[\overline{y}(x;r) \right] - p^{\alpha_2} \overline{b_2}(r) - \overline{b_1}(r), \end{cases}$$

پس از ساده سازی داریم:

$$\begin{cases} (p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda) \ell[\underline{y}(x;r)] = \ell[x] + \ell[1] + p^{\alpha_2} \underline{b_2}(r) + \underline{b_1}(r), 0 \le r \le 1, \\ (p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda) \ell[\overline{y}(x;r)] = \ell[x] + \ell[1] + p^{\alpha_2} \overline{b_2}(r) + \overline{b_1}(r), 0 \le r \le 1, \end{cases}$$

سپس با انجام عمل معکوس تبدیلات لاپلاس فازی داریم:

$$\underline{y}(x;r) = \ell^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda)} \right] + \ell^{-1}\left[\frac{1}{p(p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda)} \right] + \underline{b_2}(r) \ell^{-1}\left[\frac{p^{\alpha_2}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda} \right] + \underline{b_1}(r) \ell^{-1}\left[\frac{1}{p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda} \right],$$

$$\overline{y}(x;r) = \ell^{-1}\left[\frac{1}{p^2(p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda)} \right] + \ell^{-1}\left[\frac{1}{p(p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda)} \right] + \overline{b_2}(r) \ell^{-1}\left[\frac{p^{\alpha_2}}{p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda} \right] + \overline{b_1}(r) \ell^{-1}\left[\frac{1}{p^{\alpha_1+\alpha_2} - \lambda} \right],$$

نهایتا جواب فرم r–برشی به صورت زیر خواهد بود:

(5-5-4)

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \underline{b_2}(r)(x^{\alpha-1}) E_{\alpha,\alpha_1}\left[\lambda x^{\alpha} \right] + \underline{b_1}(r)(x^{\alpha-1}) E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda x^{\alpha} \right] + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda (x-t)^{\alpha} \right](t+1), \\ \overline{y}(x;r) = \overline{b_2}(r)(x^{\alpha-1}) E_{\alpha,\alpha_1}\left[\lambda x^{\alpha} \right] + \overline{b_1}(r)(x^{\alpha-1}) E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda x^{\alpha} \right] + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left[\lambda (x-t)^{\alpha} \right](t+1). \end{cases}$$

حالت 2) اگر $\lambda \in \mathbb{R}^- = (-\infty,0)$ باشد، در این صورت با فرض $[(ii)-\alpha_2]^{RL}$–دیفرانسیل پذیری

$D^{\alpha_1}f(x)$، جواب را مشابه (4-5-5) به دست می آوریم.

در حالت خاص، فرض کنید $\alpha_1 = 0$ و $\alpha_2 = 0.5$, $\lambda = 1$, $b_2 = \tilde{0}$, $b_1(r) = (1+r, 3-r)$.دراین صورت

جواب به دست‌آمده مشابه مثال قبل می باشد.

٤-6- تعیین توابع گرین[1] کسری بااستفاده **تبدیلات لا**پلاس فازی

4-6-۱- FSFDEs تحت **دنباله ی مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل

معادله دیفرانسیل دنباله ای فازی از مرتبه کسری $\sigma_k,\ (k=1,\ldots,m)$ با شرایط همگن زیر را در نظر

بگیرید:

(1-6-4)

$$\begin{cases} L_x y(x) = f(x), \qquad ,\left(D_{0^+}^{\sigma_k - 1} y\right)(0) = b_k = \tilde{0} \in \mathbb{E}, k = 1,\ldots,m, \\ L_x y(x) \equiv \left(D_{0^+}^{\sigma_m} y\right)(x) \oplus \sum_{k=1}^{m-1} P_k(x) \odot \left(D_{0^+}^{\sigma_k} y\right)(x) \oplus P_0(x) \odot y(x) \end{cases}$$

که در آن L_x یک عملگر دنباله ی مشتق‌گیری کسری خطی است که ضرایب $p_i(x)$ $(i=1,\ldots,m)$،

توابعی پیوسته روی یک بازه‌ی I هستند.حال با استفاده قاعده ترکیب برای مشتق پذیری ریمان-

لیوویل، جا یگزین می کنیم دنباله ی مشتقات ریمان-لیوویل کسری تعریف شده به صورت $\left(D_{a^+}^{\sigma_m} y\right)$ و

$\left(D_{0^+}^{\sigma_k} y\right)(x), (k = 1,\ldots,m-1)$ که با استفاده معادلات(**4**– **2**–3), (**4-2-4**)**مشخص شده** به

طوری که:

$$D_{0^+}^{\sigma_k} \equiv D_{0^+}^{\alpha_k} D_{0^+}^{\alpha_{k-1}} \ldots D_{0^+}^{\alpha_1},$$

$$D_{0^+}^{\sigma_k - 1} \equiv D_{0^+}^{\alpha_k - 1} D_{0^+}^{\alpha_{k-1}} \ldots D_{0^+}^{\alpha_1},$$

جائیکه

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j, (k = 1,\ldots,m),$$

[1] Green’s Functions

$0 < \alpha_j \leq 1, (j = 1, \ldots, m),$

تابع گرین کسری $G = (G_1, G_2)$ تحت هر نوع مشتق پذیری در شرایط زیر صدق می کند

الف) $L_x G(x,\tau) = \tilde{0}$ برای هر $\tau \in (0,t)$

ب) $\lim_{\tau \to x-0}\left(D_{0^+}^{\sigma_k - 1} G(x,\tau)\right) = \delta_{k,m}, k = 0,1,\ldots,m,$ که $\delta_{k,m}$ دلتا کرونکر است.

ج) $\lim_{\tau,x \to +0}\left(D_{0^+}^{\sigma_k} G(x,\tau)\right) = \tilde{0}, k = 0,1,\ldots,m-1$

که توابع گرین کسری معادله(4-6-1) نامیده می شود

جواب یکتای فازی تحت هر نوع مشتق پذیری برای معادله (4-6-1) برای هر $x \in I$ به صورت زیر است:

$$y(x) = \int_0^x G_1(x,\tau) \odot f(\tau) d\tau$$

یا

$$y(x) = \int_0^x G_2(x,\tau) \odot f(\tau) d\tau$$

که G تابع گرین کسری مربوط به عملگر L_x تحت هر نوع مشتق پذیری است.

در قسمت بعد با استفاده از تبدیل لاپلاس فازی و قضیه‌ی پیچش(کانولوشن یا تلفیق) نیز می‌توانیم همین جواب ها را بدست آوریم.

نتیجه4-6-1 :در حالت خاص اگر $p_i(x)$ در معادل(4-6-1)**ثابت باشند. یعنی:**

$$P_i(x) \equiv a_i \quad , 0 \leq i \leq n$$

بنابراین تابع گرین کسری $G(x;\tau)$ یک تابعی که فقط تفاضل آن در یک آرگومان است، یعنی:

$G(x;\tau) = G(x-\tau).$

قضیه4-6-2:(قضیه کانولوشن[1])

[1] Convolution

فرض کنیم $f(x)$ تابع پیوسته فازی-مقدار و تابع $g(x) \geq 0$ باشد. فرض کنیم

$(f(x) \odot g(x)) \odot e^{(-px)}$ انتگرال پذیر ریمان ناسره فازی روی بازه $[0,\infty)$ باشد. بنابراین

$$L[f(x) * g(x)] = F(p) \odot G(p)$$

به طوری که

$$L^{-1}[F(p) \odot G(p)] = f(x) * g(x) = \int_0^x f(x-t) \odot g(t) dt$$

$$= \left(\int_0^x \underline{f}(x-t,r) g(t) dt, \int_0^x \overline{f}(x-t,r) g(t) dt \right)$$

اثبات: فرض کنید $L[f(x)] = F(p)$ و $L[g(t)] = G(p)$ بنابراین

$$F(p) \odot G(p) = \left[\int_0^\infty f(x) \odot e^{-px} dx \right] \odot \left[\int_0^\infty e^{-pt} g(t) dt \right]$$

چون در انتگرال گیری، انتگرال اول وابسته به متغیر انتگرال دوم نمی باشد. داریم:

$$F(p) \odot G(p) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(x+t)} \odot f(x) \odot g(t) dx dt$$

$$= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-p(x+t)} \odot f(x) dx \right] \odot g(t) dt$$

فرض کنید $x + t = s$ بنابراین

$$F(p) \odot G(p) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-ps} \odot f(\quad s-t \quad) ds \right] \odot g(t) dt$$

اکنون با حفظ ترتیب انتگرال گیری داریم:

$$F(p) \odot G(p) = \int_0^\infty (\left[\int_0^s e^{-ps} \odot f \quad s-t) \odot g(t) dt \right] ds = \int_0^\infty e^{-ps} \odot \left[\int_0^s f(s-t) \odot g(t) \right] ds$$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-ps} \left[\int_0^s \underline{f}(s-t;r) g(t) \right] ds, \int_0^\infty e^{-ps} \left[\int_0^s \overline{f}(s-t;r) g(t) \right] ds \right)$$

همچنین با استفاده تعریف تبدیل لاپلاس فازی و برای هر $r\in[0,1]$ داریم:

$$\ell[\underline{f}(x,r)*g(x)]=\left(\int_0^\infty e^{-ps}\left[\int_0^s \underline{f}(s-t;r)g(t)\right]ds\right),\ell[\overline{f}(x,r)*g(t)]=\left(\int_0^\infty e^{-ps}\left[\int_0^s \overline{f}(s-t;r)g(t)\right]ds\right)$$

بنابراین، داریم:

$$L[f(x)*g(x)]=(\ell[\underline{f}(x,r)*g(x)],\ell[\overline{f}(x,r)*g(x)]$$

اثبات کامل است. ■

قضیه 4-6-3:(قضیه مشتق)

فرض کنید $f(x)\in C^{\mathbb{F}}[0,\infty)\bigcap L^{\mathbb{F}}[0,\infty)$، آن گاه:

(۱)-اگر f, تابعی $[(i)-\beta]^{RL}$– دیفرانسیل پذیر باشد، آن گاه:

$$\mathbf{L}\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}f\right)(x)\right]=p^{\beta}\mathbf{L}[f(t)]\ominus\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-1}f\right)(0)$$

(2)- اگر f, تابعی $[(ii)-\beta]^{RL}$– دیفرانسیل پذیر باشد، آن گاه:

$$\mathbf{L}\left[\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta}f\right)(x)\right]=-\left({}^{RL}D_{a^+}^{\beta-1}f\right)(0)\ominus\left(-p^{\beta}\mathbf{L}[f(t)]\right)$$

به شرطه آنکه تفاضل هاکوارا بیان شده وجود داشته باشد.

اثبات در [57] ببینید

4-7-توابع گرین کسری تحت **دنباله ی مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل

اکنون،پیشنهاد می کنیم یافتن جواب های خاص معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری خطی با ضرایب **ثابت** تحت **دنباله ی مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل که تقلیل می یابد به پیدا کردن توابع گرین کسری با استفاده از تبدیل لاپلاس فازی است.

معادله دیفرانسیل دنباله ای فازی از مرتبه کسری $(k=1,\dots,m)$ σ_k, با شرایط اولیه همگن زیر را در نظر بگیرید:

$$L_x y(x) = f[x, y(x)], \left(D_{0^+}^{\sigma_k - 1} y \right)(0) = b_k = \tilde{0} \in \mathbb{E}, k = 1,\dots,m,$$

$$L_x y(x) \equiv \left(D_{0^+}^{\sigma_m} y \right)(x) \oplus \sum_{k=1}^{m-1} a_k \odot \left(D_{0^+}^{\sigma_k} y \right)(x) \oplus a_0 \odot y(x) \qquad (1\text{-}7\text{-}4)$$

با

$$D_{0^+}^{\sigma_k} \equiv D_{0^+}^{\alpha_k} D_{0^+}^{\alpha_{k-1}} \dots D_{0^+}^{\alpha_1}$$
$$D_{0^+}^{\sigma_k - 1} \equiv D_{0^+}^{\alpha_k - 1} D_{0^+}^{\alpha_{k-1}} \dots D_{0^+}^{\alpha_1},$$

جائیکه

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j, (k = 1, \dots, m$$

$$0 < \alpha_j \leq 1, (j = 1, \dots, m),$$

و

$$f(x) \in C^{(m)\mathbb{F}}[a,b] \bigcap L_1^{\mathbb{F}}[a,b]$$

۴-۷-۱ **ساختن جواب ها**(توابع گرین کسری) **با استفاده** از **تبدیلات لاپلاس** فازی

در این قسمت، قصد داریم معادله **(1-7-4)** را با استفاده از روش تبدیلات لاپلاس فازی و معکوس آن، و قضیه‌ی پیچش(کانولوشن یا تلفیق) جواب های خاص FSFDE (1-7-4) به دست آوریم . برای این منظور با به کار گیری روش تبدیلات لاپلاس فازی در دو طرف معادله**(1-7-4)** خواهیم داشت:

$$L\left[\left(D_{0^+}^{\sigma_m} y \right)(x) \oplus \sum_{k=1}^{m-1} a_k \odot \left(D_{0^+}^{\sigma_k} y \right)(x) \oplus a_0 \odot y(t) \right] = L[f(x, y(x))]. \qquad (2\text{-}7\text{-}4)$$

سپس براساس نوع مشتق پذیری ریمان-لیوویل خواهیم داشت:

حالت 1) اگر $(k=2,3...,m)$ $\ \ D_{a^+}^{\alpha_k-1}f\ ,\ [(1)-\sigma_k]^{RL}$–دیفرانسیل‌پذیر باشد. در این صورت نمایش r

–برشی معادله (4-7-2) به صورت زیر خواهد بود:

(4-7-3)

$$\ell[\underline{f}(x,y(x);r)]=p^{\sigma_m}\ell[\underline{y}(x,r)]-\sum_{j=1}^{m}p^{\sigma_m-\sigma_j}\underline{b}_j+\sum_{k=1}^{m-1}\left[a_k p^{\sigma_k}\ell\ \underline{y}(x;r)-\sum_{j=1}^{k}\underline{b}_j p^{\sigma_k-\sigma_j}\right]+a_0\ell\left[\underline{y}(x;r)\right],$$

$$\ell[\overline{f}(x,y(x);r)]=p^{\sigma_m}\ell[\overline{y}(x,r)]-\sum_{j=1}^{m}p^{\sigma_m-\sigma_j}\overline{b}_j+\sum_{k=1}^{m-1}\left[a_k p^{\sigma_k}\ell\ \overline{y}(x;r)-\sum_{j=1}^{k}\overline{b}_j p^{\sigma_k-\sigma_j}\right]+a_0\ell\left[\overline{y}(x;r)\right].$$

که

$$\underline{f}(x,y(x);r)=\min\left\{f(x,u)\,|\,u\in\left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\},0\le r\le 1$$

$$\overline{f}(x,y(x);r)=\max\left\{f(x,u)\,|\,u\in\left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\},0\le r\le 1$$

برای (4-7-3)، **ساده سازی** زیر را انجام می دهیم:

$$\ell[\underline{y}(x;r)]=H_1(p;r),0\le r\le 1$$

$$\ell[\overline{y}(x;r)]=K_1(p;r),0\le r\le 1$$

جایی که $H_1(p;r)$ و $K_1(p;r)$ جواب های دستگاه **(4-7-3)** می باشد.

در ادامه با به کار گیری معکوس تبدیلات لاپلاس فازی، و قضیه‌ی پیچش(کانولوشن یا تلفیق) و با استفاده شرایط اولیه همگن جواب های خاص $\underline{y}(x;r)$ و $\overline{y}(x;r)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\underline{y}(x,r)=\ell^{-1}\left[H_1(p;r)\right]=\int_0^x G_1(x-\tau)\underline{f}(\tau;r)d\tau,0\le r\le 1$$

$$\overline{y}(x;r)=\ell^{-1}\left[K_1(p;r)\right]=\int_0^x G_1(x-\tau)\overline{f}(\tau;r)d\tau,0\le r\le 1$$

حالت2) اگر $(k=2,3...,m)$, $D_{a^+}^{\alpha_k-1}f$ $[(2)-\sigma_k]$ ^{RL}–دیفرانسیل‌پذیر باشد. در این صورت نمایش r –برشی معادله(3-7-2) به صورت زیر خواهد بود:

$$\ell[\underline{f}(x,y(x);r)]=p^{\sigma_m}\ell[\underline{y}(x,r)]-\sum_{j=1}^{m}p^{\sigma_m-\sigma_j}\underline{b}_j+\sum_{k=1}^{m-1}\left[a_k p^{\sigma_k}\ell\ \underline{y}(x;r)-\sum_{j=1}^{k}\underline{b}_j p^{\sigma_k-\sigma_j}\right]+a_0\ell\left[\underline{y}(x;r)\right],$$

$$\ell[\overline{f}(x,y(x);r)]=p^{\sigma_m}\ell[\overline{y}(x,r)]-\sum_{j=1}^{m}p^{\sigma_m-\sigma_j}\overline{b}_j+\sum_{k=1}^{m-1}\left[a_k p^{\sigma_k}\ell\ \overline{y}(x;r)-\sum_{j=1}^{k}\overline{b}_j p^{\sigma_k-\sigma_j}\right]+a_0\ell\left[\overline{y}(x;r)\right].$$

که

$$\underline{f}(x,y(x);r)=\min\left\{f(x,u)\,|\,u\in\left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\},0\le r\le 1$$

$$\overline{f}(x,y(x);r)=\max\left\{f(x,u)\,|\,u\in\left[\underline{y}(x;r),\overline{y}(x;r)\right]\right\},0\le r\le 1$$

مشابه قبل ساده سازی زیر را اعمال می کنیم:

$$\ell[\underline{y}(x;r)]=H_2(p;r)$$

$$\ell[\overline{y}(x;r)]=K_2(p;r)$$

نهایتا با به کار گیری معکوس تبدیلات لاپلاس فازی، و قضیه‌ی پیچش(کانولوشن یا تلفیق) و با استفاده شرایط اولیه همگن جواب های خاص $\underline{y}(x;r)$ و $\overline{y}(x;r)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\underline{y}(x,r)=\ell^{-1}\left[H_2(p;r)\right]=\int_0^x G_2(x-\tau)\underline{f}(\tau;r)d\tau,0\le r\le 1$$

$$\overline{y}(x;r)=\ell^{-1}\left[K_2(p;r)\right]=\int_0^x G_2(x-\tau)\overline{f}(\tau;r)d\tau,0\le r\le 1$$

نتیجه 4-7-1: نوع مشتقپذیری (**مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل یا دنباله ی **مشتق** پذیری کسری فازی ریمان –لیوویل) **معادله دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری در تعیین** توابع گرین کسری مهم نیست، برای اینکه طبق شرط (ب) تعریف توابع گرین کسری همه مشتقات اضافه صفر هستند.

مثال 4-7-2: (تابع گرین کسری برای FFDE با یک جمله)

معادله دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a\odot\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x)=f(x),0<\beta<1 \\ \\ \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-1}y\right)(0)=\tilde{0} \end{cases} \qquad \textbf{(4-7-4)}$$

با به کار گیری روش تبدیلات لاپلاس فازی در دو طرف معادله(**4-7-4**) خواهیم داشت:

$$L\left[a\odot\left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x)\right]=L\left[f(x)\right]$$

با استفاده شرط اولیه همگن، وتبدیل لاپلاس معکوس عبارت زیر را می یابیم:

$$g_1(p)=\frac{1}{ap^{\beta}}$$

وتبدیل لاپلاس معکوس آن به صورت زیر می باشد

$$G_1(x)=\ell^{-1}\left[\frac{1}{ap^{\beta}}\right]=\frac{1}{a}\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$$

بنابراین با استفاده قضیه‌ی پیچش و **نهایتا فرم r–برشی جواب به صورت زیر خواهد بود:**

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \frac{1}{a\Gamma(\beta)}\int_0^t \frac{\underline{f}(\tau;r)d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}} = \frac{1}{a}\left(I_{0+}^{\beta}\underline{f}\right)(x;r), 0 \le r \le 1, 0 < \beta < 1, \\ \overline{y}(x;r) = \frac{1}{a\Gamma(\beta)}\int_0^t \frac{\overline{f}(\tau;r)d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}} = \frac{1}{a}\left(I_{0+}^{\beta}\overline{f}\right)(x;r), 0 \le r \le 1, 0 < \beta < 1. \end{cases}$$

مثال 4-7-3: (توابع گرین کسری برای FFDE با دوجمله)

معادله دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} a \odot \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x) = b \odot y(x) + f(x), 0 < \beta < 1 \\ \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-1}y\right)(0) = \tilde{0} \end{cases}$$

که در اینجا a, b **ثابت های حقیقی مقدار می باشد.**

حالت 1) اگر $b \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$ باشد، آنگاه:

$$L\left[a \odot \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta}y\right)(x)\right] = L\left[b \odot y(x) + f(x)\right]$$

با فرض $[(i)-\beta]^{RL}$**-دیفرانسیل** پذیری برایy، داریم:

$$\begin{cases} b\ell[\underline{y}(x;r)] + \ell[\underline{f}(x;r)] = ap^{\beta}\ell\left[\underline{y}(x,r)\right] - \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-1}\underline{y}\right)(0,r), \\ b\ell[\overline{y}(x;r)] + \ell[\overline{f}(x;r)] = ap^{\beta}\ell\left[\overline{y}(x;r)\right] - \left({}^{RL}D_{0^+}^{\beta-1}\overline{y}\right)(0,r), \end{cases}$$

با استفاده شرط اولیه همگن، وتبدیل لاپلاس معکوس عبارت زیر را می یابیم:

$$g_1(p) = \frac{1}{ap^{\beta} - b} = \frac{1}{a}\frac{1}{ap^{\beta} - \frac{b}{a}}$$

وتبدیل لاپلاس معکوس آن به صورت زیر می باشد:

$$G_1(x) = \frac{1}{a}x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\frac{b}{a}x^{\beta}\right]$$

با استفاده از معکوس تبدیلات لاپلاس فازی، داریم:

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \ell^{-1}\left[\frac{1}{a}\frac{\underline{f}(x;r)}{ap^{\beta}-\frac{b}{a}}\right], 0 \le r \le 1, \\ \overline{y}(x;r) = \ell^{-1}\left[\frac{1}{a}\frac{\overline{f}(x;r)}{ap^{\beta}-\frac{b}{a}}\right], 0 \le r \le 1 \end{cases}$$

نهایتا فرم r–برشی جواب با استفاده قضیه‌ی پیچش **به صورت زیر خواهد بود:**

$$\begin{cases} \underline{y}(x;r) = \int_0^x G_1(x-\tau)\underline{f}(\tau;r)d\tau = \frac{1}{a}x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\frac{b}{a}x^{\beta}\right]\underline{f}(x;r), 0 \le r \le 1, \\ \overline{y}(x;r) = \int_0^x G_1(x-\tau)\overline{f}(\tau;r)d\tau = \frac{1}{a}x^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left[\frac{b}{a}x^{\beta}\right]\overline{f}(x;r), 0 \le r \le 1. \end{cases}$$

حالت 2) اگر $b \in \mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$، در این صورت با فرض $^{RL}[(ii)-\beta]$–دیفرانسیل پذیری y، تابع گرین کسری را مشابه حالت قبل به دست می آوریم.

بنابراین، توابع گرین کسری $G_1(x), G_2(x)$ تحت هر نوع **مشتق** پذیری، نقش کلیدی در جواب های معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه کسری بازی می کند.

4–۸– مشتق پذیری **کسری موضعی فازی** ($FLFD$)[۱]

مشتق کسری فازی در بخش قبلی تعریف شد و دیدیم که این مشتقات در بعضی لحاظ با مشتقات از مرتبه‌ی صحیح متفاوت است. برای دیدن این موضوع اولاً، بجز وقتی که β یک عدد صحیح مثبت است، مشتق βام غیرموضعی است به طوری که به حد پایین c وابسته است، و همین طور بعضی تعاریف دیگر که از مشتق کسری فازی بیان شد غیرموضعی هستند. دوماً، مشتق کسری فازی از یک تابع ثابت فازی صفر فازی

[1]-Fuzzy local fractional H-differentiability

نیست. بنابراین مقدار مشتق کسری فازی یک تابع فازی که یک مقدار ثابت فازی به آن اضافه شده است، تغییر می‌کند.

زمانی که عملگر مشتق کسری موضعی فازی را می‌سازیم، سعی می‌کنیم مشکل هر دو قسمت بالا را حل کنیم. این کار ما را به انتخاب حد پایینی‌ای به خوبی جمع کردن ثابتی بعد از عمل مشتق‌گیری فازی، مجبور می‌کند. بیشتر انتخاب‌ها به صورت زیر است[20, 38, 39, 40]:

۱) از تابع فازی، مقدار تابع را در نقطه‌ای که می‌خواهیم خواص موضعی‌اش را مطالعه کنیم، با استفاده تفاضل هاکوارا کم می‌کنیم، این کار مقدار تابع را در آن نقطه، صفر فازی می‌شود. بنابراین اثر مقادیر ثابت فازی از بین می‌رود.

۲) انتخاب حد پایینی به طوری که مقدار خود تابع فازی رادر نقطه‌ای که می‌خواهیم بررسی کنیم، نتیجه بدهد.

توابع نامنظم به کرّات در فرآیندهای فیزیکی تولید می‌شوند، از جمله جریان‌های آشفته، سیگنال‌های آشوبناک و غیره. اینها و مثال‌های ساده‌تر دیگر نشان می‌دهند که سیگنال‌های منظم در سیستم‌های فیزیکی می‌توانند از یک نقطه به نقطه‌ی دیگر تغییر کند، برای مدل‌بندی این سیگنال‌ها، از توابع و اندازه‌های چند فرکتالی استفاده می‌شود.

چندین تقریب دیگر برای مطالعه‌ی رفتار نقطه‌وار توابع نامنظم وجود دارد. اخیراً، تبدیلات موجک‌ها برای این هدف استفاده شده است که بعضی موفقیت‌ها نیز داشته است. در زیر، نشان می‌دهیم که *FLFD*، تعریف شده دراین فصل ، یک ابزاری است که می‌تواند برای مشخص‌سازی، توابع نامنظم و فرکتالی استفاده شود.

از آنجا مشتقات و انتگرال‌های کسری موضعی در بسیاری از مسائل کاربردی و فیزیکی ظاهر شده و دارای کاربردهای فراوانی هستند، که یکی از مهم‌ترین کاربردهای آنها تجزیه و تحلیل فرکتال‌ها می‌باشد، زیرا فرکتال‌ها توابعی نامنظم بوده و برای تجزیه و تحلیل آنها نمی‌توان از مشتقات و انتگرال‌های معمولی استفاده کرد، در حالی‌که در فرکتال‌ها، به راحتی می‌توان از مشتقات و انتگرال‌های موضعی کسری استفاده کرد.

در ادامه به بررسی تعاریف و خواص مشتق و انتگرال موضعی کسری فازی پرداخته و تعدادی از خواص و قضایای آنها را بیان و اثبات می‌کنیم.

۴-۸-۱ انتگرال و مشتق پذیری موضعی فازی از مرتبه‌ی کسری[1]

در این بخش تعاریف انتگرال های موضعی فازی و مشتقات موضعی از مرتبه کسری با استفاده از تفاضل هاکوارا بیان می شوند.

تعریف ۴-۸-۱: فرض کنیم $f \in C^F[a,b] \cap L^F[a,b]$ انتگرال موضعی فازی از مرتبه کسری β تابع فازی- مقدار f روی بازه $[a,b]$ به صورت زیر می باشد:

$$({}_aI_b^{\beta} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_a^b f(t) \odot (dt)^{\beta}$$

قضیه ۴-۸-۲: فرض کنید $f \in C^F[a,b] \cap L^F[a,b]$ تابعی فازی-مقدار باشد. نمایش r-برش $\left(I_{a+}^{\beta} f\right)(x)$ به صورت زیر تعریف می باشد.

$$(I_a^{\beta} f)(x;r) = \left[(I_a^{\beta} \underline{f})(x;r), (I_a^{\beta} \overline{f})(x;r)\right],\ 0 \le r \le 1$$

که

$$(I_a^{\beta} \underline{f})(x;r) = \frac{1}{\Gamma(1+\beta)} \int_a^x \underline{f}(t;r)(dt)^{\beta}$$

---

[1] Fuzzy local fractional integral

$$(I_a^{\beta}\overline{f})(x;r)=\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^x \overline{f}(t;r)(dt)^{\beta}$$

اثبات: چون $f(t)\in E$ است بنابراین برای $(0<\beta<1)$ قرار می دهیم:

$$A_r=:\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\left[\int_a^x \underline{f}(t;r)(dt)^{\beta},\int_a^x \overline{f}(t;r)(dt)^{\beta}\right]$$

برای $r_1\le r_2$ ما داریم $\underline{f}(t;r_1)\le\underline{f}(t;r_2)$ و $\overline{f}(t;r_1)\ge\overline{f}(t;r_2)$ به طوری که $A_{r_1}\supseteq A_{r_2}$. چون

$$\underline{f}(t;0)\le\underline{f}(t;r_n)\le\underline{f}(t;1)$$

داریم:

$$\begin{cases}|\underline{f}(t;r_n)|\le\max\{|\underline{f}(t;0)|,|\underline{f}(t;1)|=:g_1(t)\\ |\overline{f}(t;r_n)|\le\max\{|\overline{f}(t;0)|,|\overline{f}(t;1)|=:g_2(t)\end{cases}$$

برای $r_n\in(0,1]$ و $i=1,2$، به وضوح g_i انتگرال پذیر لبگ روی $[a,x]$ است. بنابراین، اگر $r_n\uparrow r$ با

استفاده قضیه هم‌گرایی تسلط لبگ، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^x \underline{f}(t;r_n)(dt)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^x \underline{f}(t;r)(dt)^{\beta},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^x \overline{f}(t;r_n)(dt)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^x \overline{f}(t;r)(dt)^{\beta}.$$

لذا اثبات کامل است. ■

تعریف 4-8-3: فرض کنیم $f\in C^F[a,b]\bigcap L^F[a,b]$ **و** $x_0\in(a,b)$ **و**

$\Phi(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_{x_0}^x\frac{f(t)\ominus f(x_0)dt}{(x-t)^{\beta}}$، f **در نقطه** x_0 **دارای مشتق موضعی فازی از مرتبه**

$0<\beta<1$ **می باشد هرگاه** $(\mathcal{D}^{\beta}f)(x)|_{x=x_0}\in\mathbb{E}$ موجود باشد به طوری که برای $h>0$و به اندازه کافی

کوچک، لااقل یکی از عبارت های زیر برقرار باشد:

$$1)\,(\mathcal{D}^{\beta}f\,)(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0+h)\ominus\Phi(x_0)}{h}\ \Big)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0-h)}{h}\ \Big)$$

یا

$$2)\,(\mathcal{D}^{\beta}f\,)(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0+h)}{-h}\ \Big)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0-h)\ominus\Phi(x_0)}{-h}\ \Big)$$

یا

$$3)\,(\mathcal{D}^{\beta}f\,)(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0+h)\ominus\Phi(x_0)}{h}\ \Big)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0-h)\ominus\Phi(x_0)}{-h}\ \Big)$$

یا

$$4)\,(\mathcal{D}^{\beta}f\,)(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0+h)}{-h}\ \Big)=\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ \lim_{h\to 0^+}\frac{\Phi(x_0)\ominus\Phi(x_0-h)}{h}\ \Big)$$

برای بیان ساده تر، تابع f را $[(1)-\beta]^{LF}$–دیفرانسیل پذیر می گوییم هرگاه f در تعریف **4-8-3 حالت (1)** صدق کند. مشابها f را $[(2)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر می گوییم هرگاه f در تعریف **4-8- 3 حالت(2) صدق کند.**

نتیجه4-8-4:به ساد گی می توان **مشتق موضعی فازی بر حسب مشتق ریمان-لیوویل فازی به صورت زیر بیان کرد:**

$$(\mathcal{D}^{\beta}f\,)(x_0)\ =\lim_{x\to x_0^+}\Big(\ {}^{RL}D_x^{\beta}\{\ f\,(x)\ominus f\,(x_0)\ \}\ \Big)$$

قضیه4-8-5 : $f\ \in\ C^{\mathbb{F}}[a,b]\cap L^{\mathbb{F}}[a,b]$ **,** $x_0\in(a,b)$ **و** $0<\beta<1$ آن گاه:

(1)- -فرض کنیم $[(1)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت

$$(\ \mathcal{D}^{\beta}f\,)(x_0,r)=[(\ \mathcal{D}^{\beta}\underline{f})(x_0,r),(\ \mathcal{D}^{\beta}\overline{f}\,)(x_0,r)],\ \ 0\le r\le 1$$

(2)-فرض کنیم $[(2)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت

$$(\mathcal{D}^{\beta} f)(x_0, r) = [(\mathcal{D}^{\beta}\overline{f})(x_0, r), (\mathcal{D}^{\beta}\underline{f})(x_0, r)],\quad 0 \le r \le 1$$

که

$$(\mathcal{D}^{\beta}\underline{f})(x_0, r) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} \frac{\underline{f}(t;r) - \underline{f}(x_0;r) dt}{(x-t)^{\beta}}$$

$$(\mathcal{D}^{\beta}\overline{f})(x_0, r) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} \frac{\overline{f}(t;r) - \overline{f}(x_0;r) dt}{(x-t)^{\beta}}$$

اثبات: فرض کنیم f $[(1)-\beta]^{RL}$–**دیفرانسیل** پذیر باشد **و** $x_0 \in (a,b)$، بنابراین داریم:

$$(\mathcal{D}^{\beta} f)(x_0, r) = \lim_{x \to x_0^+} \left({}^{RL}D_x^{\beta}[f(x) \ominus f(x_0)] \right)$$

$$= \lim_{x \to x_0^+} \left({}^{RL}D_x^{\beta}[\underline{f}(x,r) - \underline{f}(x_0,r), \overline{f}(x,r) - \overline{f}(x_0,r)] \right)$$

با استفاده خاصیت خطی بودن عملگر ${}^{RL}D_x^{\beta}$، و نوع مشتق پذیری f و عبور دادن حد $\lim_{x \to x_0^+}$ ، داریم:

$$\left[\lim_{x \to x_0^+} {}^{RL}\left(D_x^{\beta}(\underline{f}(x,r) - \underline{f}(x_0,r)) \right), \lim_{x \to x_0^+} \left({}^{RL}D_x^{\beta}(\overline{f}(x,r) - \overline{f}(x_0,r)) \right) \right]$$

$$(\mathcal{D}^{\beta} f)(x_0, r) = [(\mathcal{D}^{\beta}\underline{f})(x_0, r), (\mathcal{D}^{\beta}\overline{f})(x_0, r)]$$

اثبات کامل است. ■

قضیه4–8-6:فرض کنید $f \in C^F[a,b] \cap L^F[a,b]$ **تابعی فازی-مقدار موضعی مشتق** پذیر از مرتبه $0 < \beta < 1$ در هر نقطه $x \in (a,b)$ باشد که در حالت **(3)** تعریف **4–۸–۳** و یا حالت **(4)** تعریف**4–۸–۳** صدق می کند. در این صورت $(\mathcal{D}^{\beta} f)(x_0) \in \mathbb{R}$ به ازای هر $x \in (a,b)$

نتیجه4–۸–۷:برای $\beta = 1$، $KG-FLFD$ به مشتق تعمیم یافته فازی تبدیل می‌شود، که بررسی این مطلب کار ساده‌ای است. که این نشانگر این مطلب است که ساختار مشتق کسری موضعی فازی که مشتق

تعمیم یافته فازی را برای مراتب کسری فازی تعمیم می‌دهد، طبیعت عملگر مشتق‌گیری فازی را حفظ می-کند.

تعریف 4-۸-۸: اگر وجود داشته باشد رابطه

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon^{\beta}$$

با $|x - x_0| < \delta$، و وجود داشته باشد $\delta > 0$ و $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$. بنابراین، **تابع فازی-مقدار** f پیوسته موضعی کسری فازی روی بازه (a,b) نامیده می شود. وبا نماد $f(x) \in C_{\beta}^{F}(a,b)$ **نشان داده می شود.**

لم 4-۸-۹: اگر $0 < \beta < 1$ **و** $f(x) \in C_{\beta}^{F}[a,b] \bigcap L^{F}[a,b]$، در تقریبا همه جا روی [a,b] **روابط زیر برقرار است:**

(1)- -فرض کنیم $[(1)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت

$$(\mathcal{D}^{\beta} I_a^{\beta} f)(x;r) = [\underline{f}(x;r), \overline{f}(x;r)] \quad 0 \le r \le 1$$

(2)-فرض کنیم $[(2)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت

$$(\mathcal{D}^{\beta} I_a^{\beta} f)(x;r) = [\overline{f}(x;r), \underline{f}(x;r)] \quad 0 \le r \le 1$$

اثبات: با استفاده تعریف (4-۸-۳) و قضیه (4-۸-۵) به دست می‌آوریم

$$(I_a^{\beta} f)(x;r) = [I_a^{\beta} \underline{f}(x;r), I_a^{\beta} \overline{f}(x;r)] \quad 0 \le r \le 1$$

با استفاده خاصیت خطی بودن عملگر $\mathcal{D}^{\beta}$ برای حالت $[(1)-\beta]^{LF}$–دیفرانسیل پذیری داریم:

$$\mathcal{D}^{\beta}(I_a^{\beta} f(x;r)) = [\mathcal{D}^{\beta} I_a^{\beta} \underline{f}(x;r), \mathcal{D}^{\beta} I_a^{\beta} \overline{f}(x;r)] = [\underline{f}(x;r), \overline{f}(x;r)]$$

و برای حالت $[(2)-\beta]^{LF}$–دیفرانسیل پذیری داریم:

$$\mathcal{D}^{\beta}(I_a^{\beta} f(x;r)) = [\mathcal{D}^{\beta} I_a^{\beta} \overline{f}(x;r), \mathcal{D}^{\beta} I_a^{\beta} \underline{f}(x;r)] = [\overline{f}(x;r), \underline{f}(x;r)]$$

اثبات کامل است. ■

لم4-۸-۱۰: فرض کنید $f(x)\in C_\beta^F[a,b]\bigcap L^F(a,b)$ و $0<\beta<1$, برای حالت $[(1)-\beta]^{LF}$–

دیفرانسیل پذیری **بنابراین داریم:**

$$({}_0I_a^\beta\mathcal{D}^\beta f)(x)=f(x)\ominus f(0)$$

و برای حالت $[(2)-\beta]^{LF}$–دیفرانسیل پذیری داریم:

$$({}_0I_a^\beta\mathcal{D}^\beta f)(x)=-(f(0))\ominus(-f(x))$$

به شرطه انکه تفاضل هاکوارا بیان شده وجود داشته باشد. و علاوه

$$-f(x)=[-\overline{f}(x;r),-\underline{f}(x;r)]$$

اثبات: در حقیقت، با محاسبه مستقیم برای حالت $[(1)-\beta]^{LF}$–دیفرانسیل پذیری داریم :

$$(I_a^\beta\mathcal{D}^\beta f)(x;r)=[(I_a^\beta\mathcal{D}^\beta\underline{f})(x;r),(I_a^\beta\mathcal{D}^\beta\overline{f})(x;r))]=[\underline{f}(x;r)-\underline{f}(x_0;r),\overline{f}(x;r)-\overline{f}(x_0;r)]$$

و برای حالت $[(2)-\beta]^{LF}$–دیفرانسیل پذیری داریم:

$$(I_a^\beta\mathcal{D}^\beta f)(x;r)=[(I_a^\beta\mathcal{D}^\beta\overline{f})(x;r),(I_a^\beta\mathcal{D}^\beta\underline{f})(x;r))]=[\overline{f}(x;r)-\overline{f}(x_0;r),\underline{f}(x;r)-\underline{f}(x_0;r)]$$

■

برای هر **r** اثبات کامل است.

4-۹- نتایج حاصل از حساب کسری موضعی فازی

تعریف4-۹-1 : تابع فازی-مقدار $f(x)$ ، که در خاصیت هولدر از نمای β ، $(0<\beta<1)$ صدق

می کند. **اگر** برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$d(f(x),f(y)) < C\,|x-y|^{\beta}$$

تابع وایرشتراس ، را به عنوان یک مثال از یک تابع پیوسته اما هیچ‌جا مشتق‌پذیر، و خواص مشتق‌پذیری کسری موضعی آن موردمطالعه قرارگرفته، یک تابع فرکتالی است، یعنی در هر نقطه نمای هولدر یکسان دارد، ولی توابع زیادی وجود دارند که در هر نقطه‌ای نمای هولدر متفاوت دارند، که به این توابع، توابع چند فرکتالی می‌گوییم. این توابع می‌توانند برای مدل‌بندی پدیده‌های مختلفی در سیستم‌های فیزیکی استفاده شود.

تعریف 4-۹-2: تابع فازی-مقدار $f:\mathbb{R}\to E, x\to f(x)$ پیوسته از مرتبه β ، $(0<\beta<1)$ یا $\beta-$ پیوسته روی بازه $[a,b]$ گوییم، هرگاه

$$d(f(x),f(y)) = O((x-y)^{\beta}), \qquad x,y\in\mathbb{R}$$

گزاره **4-۹-۳: فرض کنید تابع فازی-مقدار** پیوسته $f(x)^{((k+1)\beta)} \in C_{\beta}^{F}(a,b)$ ، $f:R\to\mathbb{E}$ و $f^{(k\beta)}$ مشتق پذیر موضعی فازی از مرتبه کسری $k\beta$ در نزدیکی نقطه $x=x_0$ داشته باشد, برای هر عدد k مثبت و هر $0<\beta<1$, اگر f , $[(1)-\beta]^{LF}-$ دیفرانسیل پذیر باشدو نماد $\Gamma(1+\beta k)=(\beta k)!$ در این صورت:

$$f(x;r)=\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{\underline{f}^{(k\beta)}(x_0;r)}{\Gamma(1+\beta k)}(x-x_0)^{k\beta},\sum_{k=0}^{n}\frac{\overline{f}^{(k\beta)}(x_0;r)}{\Gamma(1+\beta k)}(x-x_0)^{k\beta}\right]$$

اگر f , $[(2)-\beta]^{LF}-$ دیفرانسیل پذیر باشد، در این صورت:

$$f(x;r)=[f_1(x;r),f_2(x;r)]$$

$$f_1(x;r)=[\sum_{k=1,even}^{n}\frac{\underline{f}^{(k\beta)}(x_0;r)}{\Gamma(1+\beta k)}(x-x_0)^{k\beta}+\sum_{k=1,odd}^{n}\frac{\overline{f}^{(k\beta)}(x_0;r)}{\Gamma(1+\beta k)}(x-x_0)^{k\beta}]$$

$$f_2(x,r)=[\sum_{k=1,even}^{n}\frac{\overline{f}^{(k\beta)}(x_0;r)}{\Gamma(1+\beta k)}(x-x_0)^{k\beta}+\sum_{k=1,odd}^{n}\frac{\underline{f}^{(k\beta)}(x_0;r)}{\Gamma(1+\beta k)}(x-x_0)^{k\beta}]$$

نتیجه4-۹-۴ : فرض کنید تابع پیوسته $E_\beta:\mathbb{R}\to\mathbb{E}$, **تابع** میتگ**- لفلر نامیده می شود وبا نماد زیر نمایش داده می شود:**

$$E_\beta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+\beta k)},\quad 0<\beta<1$$

و علاوه رابطه فوق در فضای فرکتال به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$E_\beta(x^\beta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\beta k}}{\Gamma(1+\beta k)},\quad 0<\beta<1$$

که تابعی پیوسته ولزوما مشتق پذیر نمی باشد.

4-۹-1 **معادلات دیفرانسیل کسری** موضعی فازی **تحت مشتق** پذیری **کسری** موضعی

اکنون قصد داریم فرم معادل انتگرالی **معادله دیفرانسیل کسری** موضعی فازی ارائه می دهیم. ابتدا در نظر می گیریم **معادله دیفرانسیل کسری** موضعی فازی به صورت زیر:

$$\begin{cases}(\mathcal{D}^\beta y)(x)=f[x,y(x)]\\ y(x_0)=y_0\in E\end{cases}\qquad (\mathbf{4}\text{-۹-۱})$$

که در اینجا $f(x)\in C_\beta^F[a,b]\cap L^F[a,b]$، **تابع فازی-مقدار** پیوسته و $x_0\in[a,b]$باشد.

لم4-۹-1: فرض کنید $0<\beta<1$ **و** $x_0\in\mathbb{R}$, **معادله دیفرانسیل کسری** موضعی فازی(FLFDEs) (**4-9-1**) معادل یکی از معادله انتگرالی زیر می باشد:

اگر y , $[(1)-\beta]^{LF}-$ دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت:

$$y(x)=y(x_0)+\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))(dt)^{\beta},\ \ x\in[x_0,b]$$ **(۲-9 -4)**

اگر y , $[(2)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت:

(3-9-4)

$$y(x)=y(x_0)\ominus\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}(-1)\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))(dt)^{\beta},\ \ x\in[x_0,b]$$

به شرطه انکه تفاضل هاکوارا بیان شده وجود داشته باشد.

اثبات: فرض کنید y, $[(1)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر باشد، با استفاده لم (**4-8-10**) و تعریف (**4-8**–۱) ، داریم:

$$I_a^{\beta}(\mathcal{D}^{\beta}y)(x)=I_a^{\beta}\left(f[x,y(x)]\right)$$

پس

$$y(x)\ominus y(x_0)=\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^{x}f(t,y(t))(dt)^{\beta}$$

بنابراین نتیجه می گیریم

$$y(x)=y(x_0)+\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^{x}f(t,y(t))(dt)^{\beta}$$

اگر y , $[(2)-\beta]^{LF}$– دیفرانسیل پذیر باشد، با استفاده لم (**4**–**8**– **10**) و تعریف (**4**–**8**–۱)، داریم:

$$I_a^{\beta}(\mathcal{D}^{\beta}y)(x)=I_a^{\beta}\left(f[x,y(x)]\right),$$

لذا

$$(-y(x_0))\ominus(-y(x))=\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}\int_a^{x}f(t,y(t))(dt)^{\beta},$$

نهایتا داریم:

$$y(x)=y(x_0)\ominus\frac{1}{\Gamma(1+\beta)}(-1)\int_a^x f(t,y(t))(dt)^{\beta}.$$

اثبات کامل است. ■

4-10- مثالها

مثال ۴-10-1

معادله دیفرانسیل موضعی فازی از مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}\dfrac{d^{\beta}y(x)}{dx^{\beta}}=\lambda c^{\beta}y(x), \quad c>0, x>0, 0<\beta<1,\\ y(x_0)=y_0\in E\end{cases}$$

حالت(1) اگر $\lambda\in\mathbb{R}^+=(0,+\infty)$ باشد، تحت $[\beta-(1)]^{LF}$– دیفرانسیل پذیری و به کار بردن معادله

(4-9-۲)داریم:

$$\begin{cases}\underline{y}(x;r)=\underline{y}(x_0;r)E_{\beta}[c^{\beta}t^{\beta}],\\ \overline{y}(x;r)=\overline{y}(x_0;r)E_{\beta}[c^{\beta}t^{\beta}].\end{cases} \qquad (4-10-1)$$

حالت(2) اگر $\lambda\in\mathbb{R}^-=(-\infty,0)$ باشد، تحت $[\beta-(2)]^{LF}$–دیفرانسیل پذیری و به کار بردن معادله

(4-9-3) داریم:

$$\begin{cases}\underline{y}(x;r)=\underline{y}(x_0;r)E_{\beta}[-c^{\beta}t^{\beta}],\\ \overline{y}(x;r)=\overline{y}(x_0;r)E_{\beta}[-c^{\beta}t^{\beta}].\end{cases} \qquad (4-10-2)$$

جائیکه E_{β} تابع میتگ- لفلر با بعد فرکتال β **به صورت زیر تعریف می شود**

$$E_{\beta}(x^{\beta})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{\beta k}}{\Gamma(1+\beta k)}$$

اکنون جواب (**4- 10-1**) به وسیله $y_1(x;r)$ و جواب (**4- 10-2**) به وسیله $y_2(x;r)$ نشان می دهیم.

بنابراین با استفاده نتایج به دست آمده، داریم:

$$\begin{cases} y_1(x;r) = mE_\beta[c^\beta t^\beta], \\ y_2(x;r) = mE_\beta[-c^\beta t^\beta]. \end{cases} \qquad (\mathbf{4\text{-}10\text{-}3})$$

با قرار دادن شرایط اولیه در رابطه (**4- 10-3**) ، جواب های معادله **دیفرانسیل کسری موضعی** به صورت زیر است:

$$\begin{cases} y_1(x;r) = y_0 E_\beta[c^\beta t^\beta], \\ y_2(x;r) = y_0 E_\beta[-c^\beta t^\beta]. \end{cases}$$

درهر نقطه $x = x_0$, داده شده، بسط تیلورکسری موضعی فازی تابع $y(x)$ به صورت زیر است:

اگر $y(x)$، $[(1)-\beta]^{LF}-$ دیفرانسیل پذیر باشد بنابراین:

$$E_\beta(c^\beta x^\beta;r) = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{c^{k\beta}\,\underline{E}_\beta(c^\beta x_0^\beta)(x-x_0)^{\beta k}}{\Gamma(1+k\beta)}, \sum_{k=0}^{n} \frac{c^{k\beta}\,\overline{E}_\beta(c^\beta x_0^\beta)(x-x_0)^{\beta k}}{\Gamma(1+k\beta)}\right],$$

واگر $y(x)$، $[(2)-\beta]^{LF}-$دیفرانسیل پذیر باشد بنابراین:

$$E_\beta(-c^\beta x^\beta;r) = \left[E_{\beta,1}(-c^\beta x^\beta;r), E_{\beta,2}(-c^\beta x^\beta;r)\right],$$

$$E_{\beta,1}(-c^\beta x^\beta;r) = \left[\sum_{k=0,keven}^{n} \frac{c^{k\beta}\,\underline{E}_\beta(-c^\beta x_0^\beta)(x-x_0)^{\beta k}}{\Gamma(1+k\beta)} + \sum_{k=0,kodd}^{n} (-1)^k \frac{c^{k\beta}\,\overline{E}_\beta(-c^\beta x_0^\beta)(x-x_0)^{\beta k}}{\Gamma(1+k\beta)}\right],$$

$$E_{\beta,2}(-c^\beta x^\beta;r) = \left[\sum_{k=0,keven}^{n} \frac{c^{k\beta}\,\overline{E}_\beta(-c^\beta x_0^\beta)(x-x_0)^{\beta k}}{\Gamma(1+k\beta)} + \sum_{k=0,kodd}^{n} (-1)^k \frac{c^{k\beta}\,\underline{E}_\beta(-c^\beta x_0^\beta)(x-x_0)^{\beta k}}{\Gamma(1+k\beta)}\right],$$

جائیکه $E_{\beta,1}$, $E_{\beta,2}$ **توابع فرم r–برشی هستند که برای هر** $x_1, x_2 > 0$ **در** خاصیت نمای هولدر صدق می کند:

$$d(E_\beta(c^\beta x_1^\beta), E_\beta(c^\beta x_2^\beta)) \le m\,|\,x_1 - x_2\,|^\beta, \qquad \textbf{(4 -10 -4)}$$

$$d(E_\beta(-c^\beta x_1^\beta), E_\beta(-c^\beta x_2^\beta)) \le m\,|\,x_1 - x_2\,|^\beta\ . \qquad \textbf{(۵ -10 -4)}$$

با استفاده روابط **(4– 10- 4)** و **(4– 10- ۵)** و **توابع** $E_{\beta,1}$ و $E_{\beta,2}$ **جواب های معادله دیفرانسیل**

تحت هر نوع مشتق پذیری، پیوسته هستند و در خاصیت فرکتالی صدق می کند.

فصل پنجم

نتایج و

در این پایان نامه حل**تحلیلی وعددی معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه طبیعی وکسری مورد بررسی قرار** گرفت. بدین منظور از روش های **عددی** پیشگو-اصلاحگر تصحیح یافته برای حل **معادلات دیفرانسیل فازی از مرتبه طبیعی تحت هر نوع مشتق** پذیری استفاده شد. همچنین **مثالی با جزئیات حل شده است. در این راستا مشتق تعمیم یافته در حالت کسری** پیشنهاد شد وخواص وقضایای آن وحل معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری با استفاده تبدیلات لاپلاس فازی مورد بررسی قرار گرفت. و نهایتا مشتقات و انتگرال‌های کسری موضعی در بسیاری از مسائل کاربردی و فیزیکی ظاهر شده و دارای کاربردهای فراوانی هستند، که یکی از مهم‌ترین کاربردهای آنها تجزیه و تحلیل فرکتال‌ها می‌باشد، زیرا فرکتال‌ها توابعی نامنظم بوده و برای تجزیه و تحلیل آنها نمی‌توان از مشتقات و انتگرال‌های معمولی استفاده کرد، در حالی‌که در فرکتال‌ها، به راحتی می‌توان از مشتقات و انتگرال‌های موضعی کسری استفاده کرد.

پیشنهادات:

سوال اساسی این جا مطرح می شود که در محاسبات کسری چگونه می توان نوع صحیح مشتق پذیری را بدست آورد؟ نقاط تعویض مشتق پذیری را در حالت طبیعی وکسری را چگونه می توان تعیین کرد؟ اگر عاملی اضافه شود چه تغییری در حل مساله ایجاد می شود؟.

مقالات زیر از این رساله استخراج شده‌اند یاتحت عناوین زیر در دست بررسی و داوری می باشد:

[1] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, M. R. Balooch Shahryari, S. Salahshour**,** Fuzzy local fractional differential equations**,IJIM(2012).**

[2]M. R. Balooch Shahryari**,** T. Allahviranloo**,Linear K-step methods for solving Nth-order fuzzy differential equations** under generalized differentiability**,TheWorkon shop on fuzzy Mathematical and its Applications, mazanderan University, I. R. Iran, (2011).**

[3] M. R. Balooch Shahryari ,S. Salahshour**,** Improved predictor-corrector method for solving fuzzy differential equations under generalized differentiability, ISPAC(2012).

[4] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, M. R. Balooch Shahryari, S. Salahshour**, Numerical solutions of Nth-order fuzzy differential equations** under generalized differentiability**, Submitted.**

[5] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, M. R. Balooch Shahryari, S. Salahshour**,** Fuzzy Laplace transforms method for solving fuzzy sequential fractional differential equations**, Submitted.**

[6] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, M. R. Balooch Shahryari, S. Salahshour**,** Fractional Green's functions for fuzzy fractional differential equations by fuzzy fractional differential equations by fuzzy Laplace transforms under Caputo's H-differentiability**, Submitted.**

[7] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, M. R. Balooch Shahryari, S. Salahshour**,** Fractional Green's functions for fuzzy fractional differential equations by fuzzy Laplace transforms**, Submitted.**

[8] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, M. R. Balooch Shahryari, S. Salahshour, **System of fractional differential equations under uncertainty, Submitted.**

[9] S. Abbasbandy, T. Allahviranloo, M. R. Balooch Shahryari, S. Salahshour, **Application of fuzzy two-dimensional differential transform method for solving fuzzy partial differential equations, Sumitted.**

واژه نامه

Array	آرایه
$\alpha-$cut	آلفا برش
Strong $\alpha-$cut	آلفا برش قوی
Union	اجتماع
Fuzzy reasoning	استدلال فازی
Approximation reasoning	استدلال تقریبی
Infrence	استنتاج
Intersection	اشتراک
Extension Principle	اصل توسیع
Fuzzy numerical	اعداد فازی
Stability	پایدار ی
Shape function	تابع شکل
Membershipe function	تابع عضویت
Characteristic function	تابع مشخصه
Support	تکیه گاه
Composition of fuzzy relations	ترکیب رابطه های فازی
Fuzzy constant	ثابت فازی
Arthmetic of fuzzy sets	حساب اعداد فازی
Approximation solution	جواب تقریبی
Exact solution	جواب دقیق
Absoulate error	خطای مطلق
Membership degree	درجه عضویت
Recursive relation	رابطه بازگشتی
Fuzzy relations	رابطه های فازی
Predictor-Corrector method	روش پیشگو-اصلاحگر
Explicit	صریح
Implicit	ضمنی
Convex fuzzy sets	مجموعه فازی محدب
Normal fuzzy sets	مجموعه فازی نرمال

Universal set……………………………………………………………… مجموعه مرجع
Fuzzy differential equation…………………………………………….. معادله دیفرانسیل فازی
Generalized differentiability………………………………………….. مشتق پذیری تعمیم یافته
Fractional Riemann-Liouvill……………………………….. مشتق پذیری کسری ریمان- لیوویل

منابع

[1] بوردن ر.ال، فیرز د.، رینولدز آ.، آنالیز عددی، ترجمه عالم زاده ع.ا.، بابلیان ا.، امیدوار، . انتشارات
ققنوس، تهران، 1379

[2] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, Homotopy analysis method for multiple solutions of the fractional Sturm-Liouville problems, Numer. Algor. DOI 10.1007/s11075-009-9351-7.

[3] N.H. Abel, Solution de quelques a l'aide d'integrales defines; Ocuvers Completes; Vol. 1; Grondahl, Christiania; Norway; 1881

[4] R.P. Agrawal, V. Lakshmikantham, J.J. Nieto, On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty, Nonlinear Anal. 72 (2010) 2859-2862.

[5] T. Allahviranloo, M.B. Ahmadi, Fuzzy Laplace transforms, Soft Computing 14 (2010) 235-243.

[6] T. Allahviranloo, S. Salahshour, S. Abbasbandy, Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty, Soft Comput. DOI: 10.1007/s00500-011-0743-y

[7] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, S. Salahshour, A. Hakimzadeh, A new method for solving fuzzy linear differential equations, Computing 92 (2011) 181-197.

[8] T. Allahviranloo, S. Salahshour, A new approach for solving first order fuzzy differential equations, Communications in Computer and Information Science, 2010, Volume 81, Part 5, Part 7, 522-531.

[9] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, N. Ahmady, E. Ahmady, Improved predictor-corrector method for solving fuzzy initial value problem, Information Sciences,179 (2009) 945-955

[10] A. Arara, M. Benchohra, N. Hamidi, J.J. Nieto, Fractional order differential equations on an unbounded domain, Nonlinear Anal. 72 (2010) 580-586.

[11] S. Arshad, V. Lupulescu, On the fractional differential equations with uncertainty, Nonlinear Analysis 74 (2011) 3685-3693.

[12] A. Babakhan, V.D. Gejji, On calculus of local fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl., 270 (2002) 66-79.

[13] R.L. Bagley, On the fractional order initial value problem and its engineering applications, in: Fractional Calculus and Its Applications (Ed. K. Nishimoto), Tokyo, College of Engineering, Nihon University, 1990, pp. 12-20.

[14] B. Bede, S.G. Gal, Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 151 (2005) 581-599.

[15] B. Bede, I. J. Rudas, A. L. Bencsik, First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability, Information Sciences, 177 (2007) 1648-1662.

[16] H. Beyer, S. Kempfle, Definition of physically consistent damping laws with fractional derivatives, ZAMM 75 (1995) 623-635.

[١7] A. Carpinteri , B. Chiaia, P.Cornetti, On the mechanics of quasi-brittle materials with a fractal microstructure, Engineering Fracture Mechanics, 70 (2003) 2321-2349.

[18] Y. Chalco-Cano, H. Roman-Flores, On new solutions of fuzzy differential equations, Chaos, Solitons and Fractals 38 (2006) 112-119.

[١9] Y. Chen, H.L. An, Numerical solutions of coupled Burgers equations with time-space fractional derivatives, Appl. Math. Comput. 200 (2008) 87-95.

[20] Y. Chen, Y. Yan, K.W. Zhang, On the local fractional derivative, J. Math. Anal. Appl. 362 (2010) 17-33.

[21] E.N. Economou, Green's Function in Quantum Physics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[22] K. Diethelm, N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 265 (2002) 229-248.

[23] P. Diamond, P.Kloeden, Metric space of fuzzy functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 91 (1983) 552-558.

[24] **F**alconer K.; Fractal Geometry; John Wiley; New York; 1990.

[25] M. Friedman, M.Ming, A. Kandel, Numerical solution of fuzzy differential and integral equations, Fuzzy Sets and System 106 (1999) 35-48.

[26]A. **G**emant, A method of analyzing experimental result obtained from elastoviscous bodies; Physics 7; PP. (1936)311-317.

[27] O. Heaviside, Electrical Papers, Macmillan; London; 1892.

[28] R. Hilfer, Applications of Fractional calculus in Physics; World Scientific; Singapore; 2000

[٢9] G. Jumarie, Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of non-differentiable functions further results, Comput. Math. Appl. 51 (2006) 1367-1376 .

[30] G. Jumarie, Lagrangian mechanics of fractional order, Hamilton–Jacobi fractional PDE and Taylor's series of nondifferentiable functions, 32 (2007) 969-987.

[31] O. Kaleva, Fuzzy differential equations, fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 301-317.

[32] O. Kaleva, Interpolation of fuzzy data, Fuzzy Sets and Systems 60 (1994) 63-70.

[33] O. Kaleva, The Cauchy problem for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 35 (1990) 389-396.

[34] A. Kandel, Fuzzy dynamical systems and the nature of their solutions, in: P. P. Wang, S. K. Chang (Eds), Fuzzy Sets Theory and Application to Policy Analysis and Information Systems,Plenum Press, New York, 1980, PP,. 93-122.

[35] A. Kandel, W.J. Byatt, Fuzzy differential equations, in:Proceeding of the Interational Conference on Cybernetics and Society, Tokyo, Novermber 1978, PP. 1213-12160.

[36] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science B.V, Amesterdam, 2006.

[37] A. Khastan , J. J. Nieto, A boundary value problem for second order fuzzy differential equations, Nonlinear Analysis 72 (2010) 3583-3593.

[38] Kolwankar K.M. Kolwankar, "Studies of Fractal Structures and Processes Using Methods of Fractional Calculus"; WWW.arXiv:chao-dyn/9811008V14Nov 1998.

[39] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal, Local fractional derivatives and fractal functions of several variables, preprint, 1998.

[40] K.M. Kolwankar, A.D. Gangal, Local fractional calculus: a calculus for fractal space–time, In Proceedings of Fractals: Theory and Applications in Engineering, Delft, The Netherlands: Springer, 1 (1999) 71-81 .

[41] K.M. Kolwankar, J. Lévy Véhel, Measuring functions smoothness with local fractional derivatives, Fract. Calc. Appl. Anal. 4 (2001) 49–68.

[42] S.F. Lacroix, Traite du calcul differential et du calcul integral. 2nd ed., Courcier; Paris; pp. (1819) 409-410;

[43] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Scientific Pub, Cambridge, UK, 2009.

[44] V. Lakshmikantham, R.N. Mohapatra, Theory of Fuzzy Differential Equations and Applications, Taylor & Fracncis, London, 2003.

[45] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Anal. 69 (2008) 2677-2682.

[46] G.W. Leibniz; Letter from Hanover; Germany; to G.F.A. L'Hopital, September 30; 1695; in Mathematische Schriften, 1849; reprinted 1962, Olms verlag; Hidesheim; Germany; Vol. 2, PP. 301-302; 1965

[47] H. Laurent, Sur le calcul des derives a indices quelconques, Nouv. Ann. Math.; Vol. 3; PP. 240-252; 1884

[48] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, *John Wiley and Sons,* Inc., New, York, 1993.

[49] M. Ma, M. Friedman, A. Kandel, Numerical solution of fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems 105 (1999) 133-138.

[50] G.G. Nieto, A. Khastan, K. Ivaz, Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 3 (2009) 700-707.

[51] I. Perfilieva, Fuzzy Transforms: Theory and Applications, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 993-1023.

[52] I. Perfilieva, H. De Meyer, B. De Baets, Cauchy problem with fuzzy initial condition and its approximate solution with the help of fuzzy transform. WCCI 2008, Proceedings 978-1-4244-1819-0- Hong Kong IEEE Computational Intelligence Society, (2008) 2285-2290.

[53] I. Pudlubny, Fractional Differential Equation, Academic Press, San Diego, 1999.

[54] M.L. Puri, D. Ralescu, Fuzzy random variables, J. Math. Anal. Appl. 114 (1986) 409-422.

[55] B. Ross, editor, proceeding of the International Conference on Fractionl Calculus and Its Applications; University of New Haven; West Haven; Conn., June 1974; Springer-verlag; New York; 1975

[56] J. Sabatier, O.P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado, Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering, *Springer*, 2007.

[57] S. Salahshour, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, Solving fuzzy fractional differential equations by fuzzy Laplace transforms, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (in press) doi:10.1016/j.cnsns.2011.07.005.

[58] S. Seikkala, On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 319-330.

[59] S.J. Song, E. Stanley Lee, Approximate solutions, existence, and uniqueness of the Cauchy problem of fuzzy differential equations, J. Math. Anal. Appl. 202 (1996) 629-644.

[60] S. Song, C. Wu, Existence and uniqueness of solutions to Cauchy problem of fuzzy differential equations, Fuzzy Set and System 110 (2000) 55-67.

[61] X. Yang, F.Gao. Fundamentals of local fractional iteration of the continuously nondifferentiable functions derived from local fractional calculus. In: Proc. of CSIE2011, Springer, 2011.

[62] X. Yang, L.Li, R.Yang. Problems of Local fractional definite integral of the one-variable nondifferentiable function, World Sci-Tech R,D, 31 (4), (2009) 722-724.

[63] C. Yu, G. Guozhu Gao, Some results on a class of fractional functional differential equations, *Commun. Appl. Nonlinear Anal.* 11, 3 (2004) 67-75.

[64] G.V. Welland, On the fractional differentiation of a function of several variables, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968) 487–500.

[65] C. Wu, M. Ma, Embedding problem of fuzzy number space: part I, , Fuzzy Set and System 44 (1991) 33-38.

[66] H.C. Wu, The improper fuzzy Riemann integral and its numerical integration, Information Sciences 111 (1999) 109-137.

[67] J. Xu, Z. Liao, Z. Hu, A class of linear differential dynamical systems with fuzzy initial condition, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 2339-2358.

[68] X. Zhang, Some results of linear fractional order time-delay system *Appl. Math. Comp.* 197, 1 (2008) 407-411.

[69] H.J. Zimmermann, Fuzzy set theory and its applications, Kluwer Academi Publishers, Dordrecht.