بسم الله الرحمن الرحيم

معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

با یاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظر به اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضاء هیات علمی واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.

۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه همکاران پژوهش.

۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب نقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.

۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹- اصل برائت: التزام به برائت جویی از هرگونه رفتار غیرحرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلایند.

دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

تعهدنامه اصالت رساله یا پایان نامه

اینجانب **فاطمه باباکردی** دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۹٤/۱۰/۱ از رساله خود تحت عنوان" **حل دستگاه معادلات ماتریسی و برداری دوآل کاملا فازی با استفاده از مسئله بهینه سازی** " با کسب نمره **.......** ودرجه **............** دفاع نموده ام بدینوسیله متعهدمی شوم:

۱) این رساله حاصل تحقیق وپژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده ودر مواردی که از دستاوردهای علمی وپژوهشی دیگران) اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و (... استفاده نموده ام، مطابق ضوابط ورویه موجود، نام منبع مورد استفاده وسایر مشخصات آن را درفهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

۲) این رساله قبلا "برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی) هم سطح، پائین تریا بالاتر (درسایر دانشگاه ها ومؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع
و ... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

٤) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی ازآن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط ومقررات رفتار نموده و درصورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام ونام خانوادگی: فاطمه باباکردی

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم تحقیقات

دانشکده: علوم، گروه ریاضی

رساله دکتری تخصصی رشته ریاضی کاربردی (ph.D)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان

حل دستگاه معادلات ماتریسی و برداری دوآل کاملا فازی با استفاده از مسئله بهینه سازی

استادان راهنما:

دکتر توفیق الهویرنلو

دکترسعید عباسبندی

استاد مشاور:

دکتر محمد ادبی تبار

نگارنده:

فاطمه باباکردی

دی ۹٤

سپاسگزاری

سپاس و ستایش خدای را جل و جلاله که آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حکمت او در دل شب تار، درخشان. آفریدگاری که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ی خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید.

برخود واجب می دانم طبق فرموده معصوم که " من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق" از زحمات صبورانه و راهنمایی های بی شائبه ی اساتید با کمالات و شایسته جناب آقای پروفسور دکتر توفیق الهویرنلو و پروفسور دکتر سعید عباسبندی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و از استاد صبور و با تقوا ، جناب آقای دکتر محمد ادبی تبار که زحمت مشاوره این رساله را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید و از اساتید فرزانه و دلسوز سرکار خانم دکتر مژده افشار، جناب آقای دکتر محسن رستمی و دکتر محمود اوتادی که زحمت داوری این رساله را متقبل شدند کمال تشکر و قدردانی را بجای آورم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تقدیم به:

به روح پر فتوح پدر عزیزم، استادی که مفید زیستن و جاودانه ماندن را به من آموخت و مادر دلسوز، مهربان و فداکارم که دعای روح پرورش بدرقه ی راهم و گرمای امید بخش وجودش در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده.. ۱

فصل اول :کلیات تحقیق

۱-۱ مقدمه.. ۳
۱-۲ بیان مسئله ۳
۱-۳ اهداف موضوع ٤
۱-٤ تاریخچه.. ٤
۱-۵ نوآوری.. ۵
۱-٦ تعاریف و اصطلاحات.. ۵
۱-۷ مروری بر فصل های آینده.. ۵

فصل دوم :مقدماتی برمفاهیم فازی و دستگاه معادلات خطی فازی

۲-۱ مقدمه.. ۸
۲-۲ اصل فازی ۹
۲-۳ مفاهیم فازی.. ۱۰
۲-٤ چند نمونه دستگاه معادلات خطی فازی و کارهای انجام شده در این زمینه.. ۱۵
۲-۵ جمع بندی فصل.. ۲٦

فصل سوم :روشی جدید برای حل دستگاه معادلات ماتریسی دوآل فازی

۳-۱ مقدمه.. ۲۸
۳-۲ حل دستگاه ماتریسی دوآل فازی ۲۸

۳–۳ مثالهای عددی.......... ۳۳
۳–٤ جمع بندی فصل.......... ۳۸

فصل چهارم :روشی جدید برای حل دستگاه معادلات ماتریسی دوآل کاملا فازی

٤–۱ مقدمه.......... ٤۱
٤–۲ حل دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی ٤۱
٤–۳ مثالهای عددی.......... ٤۹
٤–٤ جمع بندی فصل.......... ۵۲

فصل پنجم : نتیجه گیری و پیشنهادات

۵–۱ مقدمه.......... ۵٤
۵–۲ نتیجه گیری.......... ۵٤
۵–۳ پیشنهادات.......... ۵۵

واژه نامه.......... ۵٦
مراجع فارسی.......... ۵۸
مراجع انگلیسی.......... ۵۸
سایتها.......... ٦۰

چکیده

در این رساله، ابتدا دستگاه معادلات خطی فازی و فرم های مختلف آن را تعریف و برخی از روش های حل برای این نوع دستگاه ها به اختصار بیان می شود. سپس با بکارگیری تعریف ضرب ماتریس حقیقی درماتریس فازی، شبه نرم و مسئله ی مینیمم سازی، روشی کارآمد برای حل دستگاه ماتریسی دوآل فازی LR، مطرح می کنیم. سپس با کمک روش ارائه شده و با تعریف حاصلضرب دو ماتریس فازی LR، یک روش جدید برای حل دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی، ارائه می دهیم و در پایان با پیاده سازی آن روی چند مثال این رساله را به پایان می رسانیم.

کلمات کلیدی: اعداد فازی LR، مسئله ی بهینه سازی، تفاضل هاکوهارا، دستگاه ماتریسی دوآل LR، دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی.

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

وقتی در سال ۱۹۶۵ پروفسور لطفی عسگر زاده، استاد ایرانی الاصل دانشگاه کالیفرنیا، برکلی اولین مقاله ی خود در زمینه ی فازی تحت عنوان "مجموعه های فازی" منتشرکرد، هیچکس نمی توانست باور کند که این مقاله اولین جرقه از پرتو یک جهان بینی جدید در عرصه ی ریاضیات و علوم، اولین قدم معرفی بینشی نو و واقع گرایانه از جهان، در چهارچوب مفاهیمی کاملا بدیع، اما بسیار سازگار با طبیعت انسان باشد[1].

مدل های فازی که در چند سال اخیر، استفاده از آن در ریاضیات کاربردی، الگوریتم های عددی و علوم مهندسی توسعه داشته، این امکان را برای ما ایجاد می کند تا بتوانیم مدل هایی بسازیم که به لحاظ ساختار، مفهوم، بهره بری و همچنین نتیجه گیری به مدل های طبیعی نزدیکتر است. لذا شناخت، مطالعه و بررسی مدل های فازی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. از جمله ی این مدل ها دستگاه معادلات ماتریسی دوآل کاملا فازی است که کاربرد زیادی در سایر علوم دارد. از این رو در این رساله این نوع دستگاه در نظر گرفته شده و روشی ساده و کاربردی برای حل آن پیشنهاد شده است.

۱-۲ بیان مسئله

از جمله مسائل مهم در ریاضیات که کاربرد زیادی در علوم مختلف دارد دستگاه معادلات می باشد که به دو صورت خطی و غیرخطی می باشند و تا کنون تحقیقات و مقالات زیادی در این زمینه انجام شده است. اگر با متغیرهای زبانی، کیفی و نادقیق سروکار داشته باشیم، دستگاه معادلات فازی ظهور می کند، که به دو نوع دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی (فقط ماتریس سمت راست فازی) و دستگاه معادلات خطی کاملا فازی (ماتریس سمت راست و ماتریس ضرایب فازی) تقسیم می شوند و فرم های خاص دیگری نظیر دستگاه معادلات خطی سیلوستر فازی، دستگاه معادلات خطی دوآل فازی، دستگاه ماتریسی فازی و ... مطرح شده است. در اینجا این سوالات مطرح می شود که اولا چگونه جواب فازی برای دستگاه معادلات ماتریسی دوآل

کاملا فازی بدست آوریم ثانیا با بکارگیری تفاضل هاکوهارا چه ارتباطی بین دستگاه معادلات ماتریسی دوآل کاملا فازی و دستگاه معادلات ماتریسی کاملا فازی متناظر با آن وجوددارد.

۱-۳ اهمیت موضوع

بسیاری از مسائل کاربردی علوم مهندسی و اقتصادی به صورت دستگاهی از معادلات خطی مدل سازی می شوند. در صورتی که اطلاعات و داده های این مسائل بصورت مبهم باشند می توان آنها را بصورت دستگاه معادلات خطی ماتریسی دوآل کاملا فازی مدل بندی کرد. بنابراین ارائه ی راهکارها و تکنیکهای کار آمد برای حل چنین دستگاهی میتواند بسیار مفید و کاربردی باشد.

۱-۴ تاریخچه

محققان همواره به دنبال یافتن جوابهای فازی با کمترین خطا و بیشترین دقت با روش های ساده و کاربردی برای دستگاه های فازی بوده اند. از سال ۱۹۹۸ تا کنون کارهای زیادی در این زمینه انجام شده است. مینگ ما و همکاران در [4]، ابتدا سیستم فازی $A\tilde{X}=\tilde{B}$ را حل کردند، سپس سیستم خطی دوآل فازی به فرم $A\tilde{X}=B\tilde{X}+\tilde{Y}$ را در نظر گرفته و شرایط وجود و منحصربفردی جواب برای چنین سیستم هایی را مطرح و روش را برای حل این سیستم ها بکارگرفتند. موزیولی و همکاران در [5]، روی سیستم هایی به فرم

$$\tilde{A}_1\tilde{x}+\tilde{b}_1=\tilde{A}_2\tilde{x}+\tilde{b}_2 \qquad (۱)$$

کار کردند و اعلام داشتند که به علت عدم وجود تفاضل سیستم (۱) و

$$(\tilde{A}_1-\tilde{A}_2)\tilde{x}=(\tilde{b}_2-\tilde{b}_1) \qquad (۲)$$

یکسان نیستند و شرایطی را بیان کردند که تحت آن شرایط سیستم های (۱) و (۲) جوابهای یکسانی دارند. مصلح در [24] سیستم ماتریسی به فرم $A\tilde{X}=\tilde{B}$ را در حالتی که درایه های $\tilde{B}$ خطی تشکیل یافته بوسیله ی عناصر ساختار یافته ی فازی متقارن یکسان E می باشند را در نظر گرفت و جواب فازی مینیمال را برای این سیستم بدست آورد. الهویرنلو در [15] سیستم فازی $A\tilde{X}=\tilde{B}$ را در نظر گرفت و روشی کاربردی برای حل این سیستم ها ارائه کرد و در حالتی که این سیستم ها جوابهای دقیق ندارند، جواب تقریبی را تعریف و بدست آورد.

۱–۵ نوع آوری

۱. دستگاه ماتریسی دوآل فازی را حل می کنیم.

۲. دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی را با بکارگیری ابزارهایی نظیر شبه نرم و مسئله ی مینمم سازی حل می کنیم.

۳. با بکارگیری تفاضل هاکوهارا شرایطی را بیان می کنیم که دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی و دستگاه ماتریسی کاملا فازی متناظر با آن جوابهای فازی یکسانی دارند.

۴. شرایطی را بیان می کنیم که تحت آن دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی جواب حقیقی (کریسپ) دارد.

۱–۶ تعاریف و اصطلاحات

تعریف ۱–۱ دستگاه معادلات خطی به فرم $A\tilde{X}=\tilde{B}$ که درآن X,B فازی و A حقیقی باشد، دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی می نامیم.

تعریف ۱–۲ به سیستمی که کلیه ی پارامترهای آن به صورت ماتریس می‌باشند، معادله ی ماتریسی گفته می شود.

تعریف ۱–۳ به دستگاه معادلات خطی که مجهول در دو طرف تساوی وجود داشته باشد را دستگاه دوآل می نامیم.

تعریف ۱–۴ دستگاه معادلات خطی به فرم $A\tilde{X}+\tilde{B}=C\tilde{X}+\tilde{D}$ که در آن $\tilde{B},\tilde{D},\tilde{X}$ ماتریس های فازی، A,C ماتریس های حقیقی باشند را دستگاه ماتریسی دوآل فازی می نامیم.

تعریف ۱–۵ دستگاه معادلات خطی به فرم $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ که در آن $\tilde{A},\tilde{C},\tilde{B},\tilde{D},\tilde{X}$ ماتریس های فازی باشند را دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی می نامیم.

۱–۷ مروری برفصل های آینده

در فصل دوم تاریخچه و مفاهیم پایه ای ریاضیات فازی بیان می شود و دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی، کاملا فازی، دوآل و ماتریسی مورد بررسی قرار می گیرد.

در فصل سوم یک روش جدید برای حل دستگاه ماتریسی دوآل فازی LR معرفی می شود.

در فصل چهارم جواب فازی برای دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی بدست آورده و با بکارگیری تفاضل هاکوهارا شرایطی را بیان می کنیم که دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی با دستگاه ماتریسی کاملا فازی متناظر جوابهای فازی یکسانی دارند.

در فصل پنجم نتیجه گیری و پیشنهادات رساله بیان می شود.

فصل دوم

مقدماتی بر

مفاهیم فازی و

دستگاه معادلات خطی فازی

۲-۱ مقدمه

ریاضیات علم مدل بندی پدیده های محیط اطراف می باشد، هر چقدر بتوان مدل بندی بهتری از پدیده ها ارائه کرد و آنها را به همان رنگارنگی و تنوعی که در محیط طبیعی هستند مدل بندی کرد، نتایجی که از این علم حاصل میگردد نیز به واقعیت نزدیکتر می باشد.

ریاضیات فازی یک گام علمی بزرگ در راستای فرمول بندی این دید چند وجهی بشر است که می کوشد دانش مورد نیاز برای بسیاری از مسائل مورد مطالعه که به دو صورت متمایز ظاهر می‌شود:

۱. دانش عینی مثل مدل ها و معادلات و فرمول های ریاضی که از پیش تنظیم شده و برای حل و فصل مسائل معمولی فیزیک، شیمی، یا مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
۲. دانش شخصی مثل دانستنی‌هایی که تا حدودی قابل توصیف و بیان زبان شناختی بوده، ولی امکان کمی کردن آن ها با کمک ریاضیات سنتی معمولاً وجود ندارد. به این نوع دانش، دانش ضمنی یا دانش تلویحی (Tacit knowledge) گفته می‌شود.

را به صورتی منظم، منطقی، و ریاضیاتی با یکدیگر هماهنگ گرداند[26] .

یکی از مهمترین ابزارها در مهندسی و علوم پایه بکارگیری دستگاه معادلات می‌باشد که شامل بیشتر از یک معادله خطی است که هر معادله ی آن دارای چند متغیر می باشد که بسیاری از متغیرها به صورت کمی قابل اندازه گیری نبوده و یا اندازه گیری کمی آنها مشکل، وقت گیر و هزینه بر میباشد، از این رو بسیاری از متغیرها به صورت کیفی توصیف میشوند.

از طرف دیگر، در بسیاری از مفاهیم و پدیده های طبیعی ابهام وجود دارد و بهتر است این ابهامات در علوم نیز در نظر گرفته شوند [27] در این ارتباط از متغیرهای زبانی و قیود آن بسیار استفاده میشود، که به صورت مبهم و نادقیق هستند. به این متغیرها که کیفی، مبهم و نادقیق هستند متغیرهای فازی و به دستگاه معادلاتی که

در معادلات آن از متغیرهای فازی استفاده میشود، دستگاه معادلات خطی فازی می گویند و با توجه به متغیرهای فازی به کارگرفته شده در آن به دو دسته ی سمت راست فازی و کاملا فازی تقسیم میشوند.

بررسی و توسعه‌ی روش‌های حل دستگاه معادلات خطی فازی به دلیل کارایی و کاربردی بودن آن از اهمیت بالایی برخوردار است.

۲-۲ اصل فازی

مسائل دنیای واقعی به طور معمول ساختار پیچیده ای دارند که به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت در تعریف و درک آن ها است. از زمانی که انسان توانست فکر کند همواره با ابهام در مسائل مختلف اجتماعی، تکنیکی و اقتصادی مواجه بوده است. حتی اختراع کامپیوتر و توسعه کاربردی آن در تحلیل مسائل دنیای واقعی نیز نتوانست مشکل ابهام و عدم قطعیت را حل نماید. در بیان و تحلیل کامل یک مساله نیاز به اطلاعات کافی و دقیق است. حال اگر به دلایل مختلف اطلاعات کافی و دقیق در دسترس نباشد چه باید کرد؟ پاسخ این سوال بهره گیری از ظرفیت استدلال تقریبی انسان است، قابلیتی که کامپیوتر از آن بی بهره است. انسان علیرغم اطلاعات نا دقیق و ناکافی در مواجهه با مسائل پیچیده دنیای واقعی، رفتار و ماهیت سیستم را به طور تقریبی درک و تحلیل می نماید حال سوال اصلی این است: آیا راهی وجود دارد که کامپیوتر نیز همانند انسان بتواند به طور تقریبی مسائل را با اطلاعات نادقیق و ناکافی درک و تحلیل نماید؟ برای پاسخ به این سوال به اصل ناسازگاری پرفسور لطفی زاده که در سال ۱۹۷۳ مطرح گردید، توجه نمایید: هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد پیچیدگی سیستم کاهش یافته و دقت درک و تحلیل سیستم افزایش می یابد. زمانی که پیچیدگی سیستم کاهش یابد، دقت روش مدل سازی افزایش یافته و لذا ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم مهیا می شود.

برای سیستم هایی که پیچیدگی آنها کم و عدم قطعیت نیز ناچیز است می توان با استفاده از معادلات ریاضی ماهیت و رفتار سیستم را به طور دقیق مدل سازی و تحلیل کرد. برای سیستم هایی که پیچیدگی آنها کمی بیشتر است و عدم قطعیت نیز به طور نسبی زیاد است دیگر نمی توان تحلیل دقیق و قطعی از سیستم داشت. در این سیستم ها امکان استفاده از روش های ابتکاری مدرن مانند شبکه عصبی و هوش مصنوعی وجود دارد. در شبکه های عصبی به دلیل قابلیت یادگیری سیستم، عدم قطعیت به مرور کاهش یافته و قابلیت تحلیل موثر سیستم افزایش می یابد. سرانجام برای سیستم هایی با پیچیدگی بالا و عدم قطعیت زیاد که اطلاعات کافی و دقیقی نیز در دسترس نیست رویکرد استدلال تقریبی فازی مطرح می شود که به سیستم های فازی معروف هستند. ورودی سیستم های فازی می توانند اطلاعات نادقیق (فازی) باشند و پردازش های سیستم نیز با بهره گیری از استدلال تقریبی و به طور فازی انجام می شوند.

با این مقدمه می توان چنین نتیجه گیری کرد: جایی که پیچیدگی سیستم در حدی است که نمی توان با دقت و صراحت در مورد پارامترها، مشخصه ها و رفتار سیستم قضاوت کرد، مفهوم فازی جهت مدل سازی و تحلیل مطرح می شود [2] .

۲-۳ مفاهیم فازی

تعریف ۲-۱ (تابع عضویت) [1]: اگر $\tilde{A}$ مجموعه ی فازی باشد، تابع عضویت، تابعی است که به هر عضو x از مجموعه ی مرجع X یک عدد $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نسبت می دهد که مبین درجه عضویت آن مجموعه ی فازی است.

$$\mu_{\tilde{A}} : X \to [0,1]$$

تعریف ۲-۲ (تعاریف اساسی) [1] : فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B}$ دو مجموعه فازی باشند در این صورت داریم:

$Supp(\tilde{A}) = \{x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$	**تکیه گاه**
$Core(\tilde{A}) = \{x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$	**هسته**
$h(\tilde{A}) = Sup_{x \in X} \ \mu_{\tilde{A}}(x)$	**ارتفاع**
$\exists \, x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) = h(\tilde{A}) = 1$	**مجموعه فازی نرمال**
$Card(\tilde{A}) = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)$	**کاردینالیتی اسکالر**
$\tilde{A}_{\alpha} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}, \alpha \in [0,1]$	**آلفا برش**

(جدول ۲-۱) تعاریف اساسی

تعریف ۲-۳ (اصل گسترش) [28,29] : این اصل ابزاری است برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیر فازی به گونه ای که به صورت کمیت های فازی در آیند. این اصل به ویژه در تعمیم عملگر های جبری بین اعداد و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است. فرض کنید f تابعی از X به Y باشد و $\tilde{A}$ یک مجموعه ی فازی روی Y باشد آنگاه $f(\tilde{A})$ نیز مجموعه فازی است که به صورت زیر بدست می آید:

$$f(\tilde{A})(y) = \begin{cases} \sup A(x) & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

تعریف ۲-٤ (اصل گسترش تعمیم یافته) [28] : فرض کنید تابع f تابعی از $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ به Y باشد و $\tilde{A}_i$ مجموعه ی فازی روی X_i باشد آنگاه $f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n)$ به صورت زیر خواهد بود.

$$f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, ..., \tilde{A}_n)(y) = \begin{cases} \sup\{\min(\tilde{A}_1(x_1), \tilde{A}_2(x_2), ..., \tilde{A}_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq ¤ \\ (x_1, x_2, ..., x_n) : f(x_1, x_2, ..., x_n) = y & \\ 0 & f^{-1}(y) = ¤ \end{cases}$$

. **تعریف ۲-٥ (اعدادفازی)**[28,1] : بسیاری از پدیده های کمی با یک عدد مطلق و صریح قابل نمایش نمی باشند. معمولا به مفاهیم مبهم که دارای اصطلاحاتی مانند تقریباً، حدوداً، نزدیک به، ... باشد، مجموعه های فازی نسبت داده میشود که اعداد فازی نوعی خاص از مجموعه‌های فازی هستند. بنابراین با درک مفهوم مجموعه فازی می‌توان اعداد فازی را بسادگی فرا گرفت. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ را یک عدد فازی گویند، اگر داشته باشیم:

۱) مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب باشد.

۲) $«_{\tilde{A}}(x)$ تک نرمال باشد یعنی دقیقاً یک $x \in \Re$ وجود داشته باشد که : $«_{\tilde{A}}(x) = 1$.

۳) $«_{\tilde{A}}(x)$ قطعه قطعه پیوسته باشد .

تعریف ۲-٦ (اعداد فازی LR): اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد :

$$«_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{a-x}{\sim}\right), & x \le a \quad \sim > 0 \\ R\left(\frac{x-a}{}\right) & x > a \quad > 0 \end{cases}$$

که در آن a را مقدار نمایی یا میانه و $\sim,$ را به ترتیب پهنا یا گستره چپ و راست و L,R را توابع چپ و راست می نامند، که L,R توابع غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ و $L(0) = R(0) = 1$ و عددفازی $\tilde{A}$ را بصورت $\tilde{A} = (a, \sim, \;)$ نمایش می دهند. عددفازی $\tilde{A} = (a, \sim, \;)$ مثبت (منفی) است اگروتنها اگر $a - \sim \ge 0$ $(a + \;\; \le 0)$ و نیز هرگاه $\sim = $ عددفازی $\tilde{A} = (a, \sim, \;)$ متقارن نامیده میشود.

تعریف ۲–۷ (عملگرهای جبری برای اعداد فازی LR) [1] : فرض کنید $\tilde{A}=(a,\sim,\ \ )$ و $\tilde{B}=(b,¥,¢)$ اعداد فازی LR باشند و r یک اسکالر باشد.

۱) ضرب عدد در اسکالر

$$(r\tilde{A})=\begin{cases}(ra,\ r\sim,\ r\ \ ), & r>0\\ (ra,\ -r\ \ ,\ -r\sim), & r<0\end{cases}$$

۲) جمع

$$\tilde{A}+\tilde{B}\approx(a+b,\ \sim+¥,\ \ \ +¢)$$

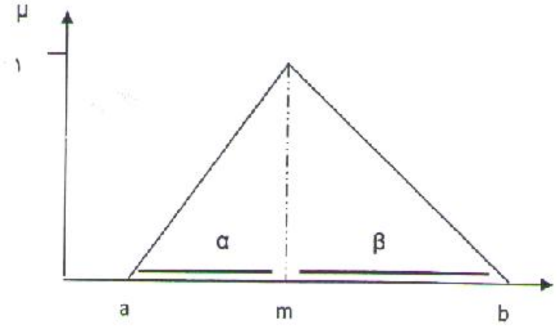
۳) ضرب

$$\tilde{A}\times\tilde{B}\approx\begin{cases}(ab,\ b\sim+a¥,\ a¢+b\ \ ), & \tilde{A}>0\ ,\ \tilde{B}>0\\ (ab,\ a¥-b\ \ ,\ a¢-b\sim), & \tilde{A}>0\ ,\ \tilde{B}<0\\ (ab,\ -b\ \ -a¢,\ -b\sim-a¥), & \tilde{A}<0\ ,\ \tilde{B}<0\\ (ab,b\sim-a¢,b\ \ -a¥), & \tilde{A}<0\ ,\ \tilde{B}>0\\ (ab,a¥-b\ \ ,a¢+b\ \ ), & \tilde{A}>0\ ,\ 0\in\tilde{B}\\ (ab,b\sim-a¢,-a¥-b\sim), & \tilde{A}<0\ ,\ 0\in\tilde{B}\\ (ab,b\sim-a¢,a¢+b\ \ ), & 0\in\tilde{A}\ ,\ \tilde{B}>0\\ (ab,a¥-b\ \ ,-a¥-b\sim), & 0\in\tilde{A}\ ,\ \tilde{B}<0\\ (ab,a¥-b\ \ ,a¢+b\ \ ) & 0\in\tilde{A}\ ,\ 0\in\tilde{B}\end{cases}$$

٤) تقسیم

$$\frac{\tilde{A}}{\tilde{B}}=\frac{(a,\sim,\ \ )}{(b,¥,¢)}\approx\left(\frac{a}{b},\frac{a¢+b\sim}{b^2},\frac{a¥+b\ \ }{b^2}\right)$$

تعریف ۲-۸ (داد فازی مثلثی) [1] : در اعداد LR اگر L,R توابعی خطی به صورت $L(x)=R(x)=1-x$ باشند، آن را مثلثی نامند و توسط سه تایی مرتب $(m,\sim,\ )$ که m مقدار مرکزی یا ممکن ترین مقدار و $\sim$, به ترتیب گستره چپ و راست می باشند نمایش داده می شود.



(شکل ۲-۱) عددفازی مثلثی

می توان یک عدد فازی مثلثی را به صورت (a_1,a_2,a_3) نشان داد که a_2، مقدار مرکزی، a_1، مقدار بدبینانه یا کمترین مقدار $(\text{«}_{\tilde{A}}(a_1)=0)$ و a_3، مقدار خوش بینانه یا بیشترین مقدار $(\text{«}_{\tilde{A}}(a_3)=0)$ می باشد. این نمایش با تابع عضویت زیر معرفی می شود.

$$\text{«}_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0, & x<a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1\le x\le a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2}, & a_2\le x\le a_3 \\ 0, & x>a_3 \end{cases}$$

تعریف ۲-۹ (اعداد فازی ذوزنقه ای) [1] : عدد فازی ذوزنقه ای A به صورت

$$A=(a_1,a_2,a_3,a_4)$$

تعریف میشود و تابع عضویت این عدد فازی به صورت زیر تفسیر می شود:

$$«_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0, & x<a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_1}, & a_1\le x<a_2 \\ 1, & a_2\le x\le a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4}, & a_3\le x<a_4 \\ 0 & x>a_4 \end{cases}$$

تعریف ۲-۱۰ (فرم پارامتری اعداد فازی) [1] : فرم پارامتری یک عدد فازی را با یک زوج مرتب به صورت $(\underline{u}(r),\overline{u}(r))$ که $0\le r\le 1$ نشان می دهند که

۱) $\underline{u}$ یک تابع غیر نزولی کراندار و از چپ پیوسته روی بازه $[0,1]$ است.

۲) $\overline{u}$ یک تابع غیر صعودی کراندار و از چپ پیوسته روی بازه $[0,1]$ است .

۳) $0\le r\le 1$ و $\underline{u}(r)\le\overline{u}(r)$.

تعریف ۲-۱۱ (تفاضل هاکوهارا): اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عددفازی باشند تفاضل هاکوهارای آنها را با $\tilde{A}-_H\tilde{B}$ نشان می دهیم که برابر $\tilde{C}$ است اگر و تنها اگر $\tilde{A}=\tilde{B}+\tilde{C}$. حال فرض کنید $\tilde{A}=(a,\sim,\ )$ و $\tilde{B}=(b,¢,¥)$ دو عدد فازی باشند آنگاه تفاضل هاکوهارای بین $\tilde{A},\tilde{B}$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A}-_H\tilde{B}=(a-b,\sim-¢,\quad -¥)$$

تعریف ۲-۱۲ (شبه نرم ماتریس): اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ یک ماتریس حقیقی مقدار باشد آنگاه شبه نرم A به صورت زیر تعریف می شود:

$$\|A\|=\max_{i,j}\{|a_{i,j}|\}$$

تعریف ۲-۱۳ (ماتریس فازی): اگر هر عضو ماتریس A، عدد فازی LR باشد، ماتریس A ماتریس فازی LR نامیده می شود و به صورت $\tilde{A}=[(a_{ij},\sim_{ij},\ {}_{ij})],i,j=1,2,\dots,n$ نمایش داده می شود.

تعریف ۲-۱۴ (مسئله ی بهینه سازی): مسئله ی

$$\begin{aligned} &\min \quad f(x) \\ &st: \quad x \in X \end{aligned}$$

مسئله ی بهینه سازی نامیده می شود که f یک تابع حقیقی مقدار روی R^n است و تابع هدف نامیده می شود و X یک زیرمجموعه ی غیرتهی از R^n است که بوسیله ی توابع حقیقی مقدار $g_1, g_2, ..., g_m$ روی R^n ارائه شده است و مجموعه ی محدودیت های زیر

$$\begin{aligned} &g_i(x) = b_i \qquad i = 1,2,...,m_1 \\ &g_i(x) \le b_i \qquad i = m_1 + 1,...,m \\ &x_i \ge 0 \qquad\quad i = 1,2,...,n \end{aligned}$$

X را تولید می کند. هر عضو $x \in X$ جواب های شدنی مسئله ی مینیمم سازی نامیده شده است و جواب شدنی x^* که f مینیموم آن را روی X بدست می آورد جواب بهینه و $f(x^*)$ مقدار بهینه نامیده شده است.

۲-۴ چند نمونه دستگاه معادلات خطی فازی و کارهای انجام شده در این زمینه

تعریف ۲-۱۵ (دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی): دستگاه معادلات خطی $n \times n$

$$\begin{cases} a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + ... + a_{1n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + ... + a_{2n}\tilde{x}_n = \tilde{b}_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + ... + a_{nn}\tilde{x}_n = \tilde{b}_n \end{cases}$$

(۲-۱)

که در آن $\tilde{b}_i, 1 \le i \le n$ و $\tilde{x}_j, 1 \le j \le n$ اعداد فازی و $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ اعدادحقیقی می باشند را دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی می نامیم.

روش الهویرنلو و قنبری [23] : در این کار الهویرنلو و قنبری دستگاه خطی سمت راست فازی به فرم (۲-۱) را در نظرگرفتند. برای حل این سیستم با استفاده از r-برش این سیستم به سیستم خطی بازه ای به فرم

$$\begin{cases} a_{11}[\tilde{x}_1]_r + a_{12}[\tilde{x}_2]_r + \ldots + a_{1n}[\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_1]_r \\ a_{21}[\tilde{x}_1]_r + a_{22}[\tilde{x}_2]_r + \ldots + a_{2n}[\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_2]_r \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}[\tilde{x}_1]_r + a_{n2}[\tilde{x}_2]_r + \ldots + a_{nn}[\tilde{x}_n]_r = [\tilde{b}_n]_r \end{cases}$$

(۲-۲)

تبدیل شد. برای حل سیستم بازه ای (۲-۲) ابتدا سیستم خطی اینکلوژن زیر را طرح کردند:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \in [\tilde{b}_1]_r \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \in [\tilde{b}_2]_r \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \in [\tilde{b}_n]_r \end{cases}$$

(۳-۲)

که SS_r مجموعه جواب سیستم خطی اینکلوژن است هرگاه:

$$SS_r = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \in [\tilde{b}_i], \quad i = 1,2,\ldots,n\}$$

و سپس ارتباط بین جوابهای سیستم خطی فازی و سیستم خطی اینکلوژن را بصورت قضیه ی زیر مطرح کردند.

قضیه: فرض کنید $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ جواب جبری سیستم (۲-۲) باشد که $[\tilde{x}_i]_r = [\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)]$، $r \in [0,1]$ و SS_r مجموعه جواب سیستم خطی اینکلوژن باشد در اینصورت برای هر $r \in [0,1]$ داریم، $X_r \subseteq SS_r$ که در آن $X_r = \prod_{i=1}^{n}[\tilde{x}_i]_r = \prod_{i=1}^{n}[\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)]$ می باشد. اگر $A = [a_{ij}], 1 \le i, j \le n$ قطری باشد برای هر $r \in [0,1]$ داریم، $X_r = SS_r$.

و بنابر قضیه ی فوق اعلام داشتند که برای بدست آوردن جواب سیستم خطی فازی باید ابتدا جواب سیستم خطی اینکلوژن را بیابیم.

روش ارائه شده برای حل سیستم اینکلوژن: آنها بر پایه ی سیستم (۲-۳) و با فرض $z_i \in [\tilde{b}_i]_r$ سیستم حقیقی زیر را تشکیل دادند

$$\begin{cases} a_{11}x_1^* + a_{12}x_2^* + \ldots + a_{1n}x_n^* = z_1 \\ a_{21}x_1^* + a_{22}x_2^* + \ldots + a_{2n}x_n^* = z_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1^* + a_{n2}x_2^* + \ldots + a_{nn}x_n^* = z_n \end{cases}$$

(۲-٤)

و با فرض نامنفرد بودن $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ و $A^{-1} = B = [b_{ij}]_{n\times n}$ ، جواب سیستم (۲-٤) را بصورت زیر مطرح کردند:

$$x_i^* = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j , \qquad i = 1,2,..,n$$

و جواب بازه ای سیستم (۲-٤) را به صورت زیر بدست آوردند:

$$[x_i^*]_r = \{ \ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j , z_j \in [\tilde{b}_j]_r = [\underline{b}_j(r), \bar{b}_j(r)] \ \} \qquad i = 1,2,..,n$$

و با بیان قضیه ی زیر ارتباط بین جوابهای سیستم خطی اینکلوژن (۲-۳) و سیستم حقیقی (۲-٤) را بیان کردند.

قضیه: فرض کنید $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ نامنفرد باشد، آنگاه برای هر $r \in [0,1]$، $SS_r \subseteq X_r^*$ که $X_r^* = \prod_{i=1}^{n} [\tilde{x}_i^*]_r = [\underline{x}_i^*, \bar{x}_i^*]$ حاصلضرب دکارتی r-برش های عدد فازی $\tilde{x}_i^*$ می باشد. همچنین اگر ماتریس A قطری باشد، برای هر $r \in [0,1]$ ، $SS_r = X_r^*$ می باشد.

و سرانجام در قضیه ی زیر شرایط وجود و منحصربفردی جواب سیستم خطی فازی را بیان کردند.

قضیه: فرض کنید $D = |A|$ و $\bar{\ }_r = (\bar{\ }_1(r), \bar{\ }_2(r), \ldots, \bar{\ }_n(r))^T$ ، جواب سیستم $D\bar{\ }_r = W_r$ باشد که در آن $W_r = (w_1(r), w_2(r), \ldots, w_n(r))^T$ ، $r \in [0,1]$ و $w_i(r) = \underline{y}_i(r) - \sum_{a_{ij} \geq 0} a_{ij}\underline{x}_j^* - \sum_{a_{ij} < 0} a_{ij}\bar{x}_j^*$ ، $i = 1,\ldots,n$. همچنین

فرض کنید

$$\left\{ [\tilde{x}_i]_r = [\underline{x}_i^* + {}^{-}{}_i(r), \bar{x}_i^* - {}^{-}{}_i(r)] \right\}$$

(۵-۲)

خانواده ی بازه های بسته باشند که برای هر $i = 1,...,n$ ، r-برش های عددفازی هستند آنگاه بردار عددفازی $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n)^T$ که r-برش های $\tilde{x}_i$ در معادله ی (۲-۵) تعریف شده اند، جواب جبری منحصربفرد سیستم خطی فازی (۲-۱) می باشد.

محدودیت روش پیشنهادی توسط الهویرنلو و قنبری در آن است که فقط برای دستگاههایی که جواب جبری دارند قابل استفاده است.

تعریف ۲-۱۶ (دستگاه خطی ماتریسی سمت راست فازی): دستگاه معادلات خطی $n \times n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1l} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \tilde{x}_{n2} & \dots & \tilde{x}_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1l} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_{m1} & \tilde{b}_{m2} & \dots & \tilde{b}_{ml} \end{pmatrix}$$

(۲-٦)

که در آن $\tilde{x}_{ij}, \tilde{b}_{ij}, 1 \le i, j \le n$ اعدادفازی و $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ اعدادحقیقی می باشند را دستگاه ماتریسی سمت راست فازی می نامیم.

روش مصلح [24] : در این کار مصلح دستگاه ماتریسی به فرم

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1l} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \tilde{x}_{n2} & \dots & \tilde{x}_{nl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1l} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_{m1} & \tilde{b}_{m2} & \dots & \tilde{b}_{ml} \end{pmatrix}$$

(۲-۷)

که در آن $a_{ij}, 1 \le i, j \le n$ اعداد حقیقی و $\tilde{b}_{ij}, 1 \le i, j \le n$ خطی تشکیل یافته بوسیله ی عناصر ساختار یافته ی فازی متقارن یکسان E را در نظر گرفته و جواب فازی مینیمال را که به صورت زیر تعریف می شود، برای این سیستم بدست آورد.

جواب فازی مینیمال:

۱. اگرسیستم ناپایدار باشد و جواب کمترین مربعات منحصر بفرد داشته باشد آنگاه این جواب، جواب مینیمال نیز هست.
۲. اگرسیستم ناپایدار باشد و مجموعه جواب کمترین مربعات داشته باشد آنگاه جواب مینیمال یک عضو از این مجموعه است که کمترین نرم اقلیدسی را دارد.

ابتدا سیستم (۲-۷) را به دو سیستم ماتریسی به صورت زیر تبدیل کرد:

$$\begin{cases} AX = B \\ A'Y = C \end{cases}$$

(۲-۸)

که درآن

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1l} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nl} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{ml} \end{pmatrix}$$

و

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{m1} & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1l} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nl} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{ml} \end{pmatrix}$$

که

$$\tilde{x}_{kj} = x_{kj} + y_{kj}E \quad k = 1,2,...,n \quad , \quad j = 1,2,...,l$$
$$\tilde{b}_{kj} = b_{kj} + c_{kj}E \quad k = 1,2,...,m \quad , \quad j = 1,2,...,l$$
$$\begin{cases} a_{ij} \geq 0 \Rightarrow a'_{ij} = a_{ij} \\ a_{ij} < 0 \Rightarrow a'_{ij} = -a_{ij} \end{cases}$$

و در نتیجه ی زیر جواب سیستم (۲-۸) را با استفاده معکوس تعمیم یافته بدست آورد.

نتیجه: فرض کنید A و A' از رتبه ی سطری کامل $(m \leq n)$ یا رتبه ی ستونی کامل $(n < m)$ باشند. جواب مینیمال سیستم (۲-۸) به صورت زیراست:

$$X = A^{2} B$$
$$Y = A^{2} C.$$

(۲-۹)

ولی جواب بدست آمده از (۲-۹) همیشه جواب فازی برای سیستم (۲-۸) نیست. بنابراین در قضایای زیر شرایطی را اعلام کرد که شرایط لازم و کافی برای وجود جواب فازی برای سیستم (۲-۸) را بیان می کند.

قضیه: اگرجواب x_{kj}, y_{kj} برای دستگاه (۲-۸) وجود داشته باشد، آنگاه معادله ی ماتریسی (۲-۷) جواب ماتریسی فازی $\tilde{x}_{kj} = x_{kj} + y_{kj}E$ دارد اگر و تنها اگر $y_{kj} \geq 0, k = 1,2,...,n, j = 1,2,...,l$.

قضیه: اگرجواب x_{kj}, y_{kj} برای دستگاه (۲-۸) وجود داشته باشد و $(A^{2})_{ij} \geq 0$ آنگاه معادله ی ماتریسی (۲-۷) جواب ماتریسی فازی $\tilde{x}_{kj} = x_{kj} + y_{kj}E$ دارد.

از معایب روش پیشنهادی این است که:

1. دستگاه ماتریسی سمت راست فازی را فقط در حالت ناپایدار و وقتیکه $\tilde{b}_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ خطی تشکیل یافته بوسیله ی عناصر ساختاریافته ی فازی متقارن یکسان E هستند، درنظرگرفته اند.
2. فقط جوابهای مینیمال برای دستگاه ماتریسی سمت راست فازی بدست آوررده اند.
3. فقط تحت شرایط خاص دستگاه ماتریسی سمت راست فازی دارای جواب فازی است.

تعریف ۲-۱۷ (دستگاه معادلات خطی دوآل فازی): به دستگاه معادلات خطی فازی که در آن $\tilde{X}$ (مجهول) در دو طرف تساوی وجود دارد، دستگاه معادلات خطی دوآل فازی می گوییم.

روش مینگ ما(Ming Ma) و همکاران [4] : دراین کار مینگ ما و همکاران سیستم خطی دوآل فازی به فرم

$$AX = BX + Y$$

(۲-۱۰)

که در آن $A=[a_{ij}]_{n\times n}\ , B=[b_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس های ضرایب حقیقی و Y بردار عدد فازی می باشد را درنظرگرفتند.

آنها در ابتدا با بیان قضیه ی زیر شرایط منحصربفردی جواب سیستم خطی دوآل فازی (۲-۱۰) را حالتی که ماتریس های $A=[a_{ij}]_{n\times n}\ , B=[b_{ij}]_{n\times n}$ نامنفرد هستند، بیان کردند.

قضیه: فرض کنید ماتریس های $A=[a_{ij}]_{n\times n}\ , B=[b_{ij}]_{n\times n}$ ماتریس نامنفرد باشند آنگاه سیستم خطی دوآل فازی به فرم (۲-۱۰) جواب منحصر بفرد دارد اگر و تنها اگر ماتریس $A-B$ معکوس پذیر با درایه های مثبت باشد.

در ادامه آنها پیشنهاد کردند که برای حل سیستم خطی دوآل فازی (۲-۱۰) کافیست آن را به فرم $SX' = TX' + Y'$ تبدیل کنیم که در آن ماتریس های $S=[s_{ij}]_{n\times n}, T=[t_{ij}]_{n\times n}$

$$\begin{array}{lll}
a_{ij} \ge 0 \Rightarrow s_{ij} = b_{ij}, & s_{i+n,j+n} = a_{ij} & \\
a_{ij} < 0 \Rightarrow s_{i,j+n} = -b_{ij}, & s_{i+n,j} = -a_{ij} & i,j = 1,2,...,n \\
b_{ij} \ge 0 \Rightarrow t_{ij} = b_{ij}, & t_{i+n,j+n} = b_{ij} & \\
b_{ij} < 0 \Rightarrow t_{i,j+n} = -b_{ij}, & t_{i+n,j} = -b_{ij} &
\end{array}$$

و بردارهای X', Y'

$$X' = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \\ -\overline{x}_1 \\ -\overline{x}_2 \\ \vdots \\ -\overline{x}_n \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \\ -\overline{y}_1 \\ -\overline{y}_2 \\ \vdots \\ -\overline{y}_n \end{bmatrix},$$

می باشند.

مینگ ما و همکاران در پایان قضیه ی زیر را مطرح کردند که وجود جواب فازی در حالت کلی را تضمین می کند.

قضیه: سیستم خطی دوآل فازی (۲-۱۰) جواب فازی منحصر به فرد دارد اگر و تنها اگر ماتریس $S-T$ معکوس پذیر با درایه های نامنفی باشد.

ایراد روش مینگ ما و همکاران این است که تنها در صورتی می تواند برای سیستم خطی دوآل فازی جواب فازی بدست آورد که ماتریس $S-T$ معکوس پذیر باشد.

تعریف ۲-۱۸ (دستگاه معادلات خطی کاملا فازی): دستگاه معادلات خطی $n\times n$

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{12}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{1m}\tilde{x}_m = \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{22}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{2m}\tilde{x}_m = \tilde{b}_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \tilde{a}_{n1}\tilde{x}_1 + \tilde{a}_{n2}\tilde{x}_2 + \ldots + \tilde{a}_{nm}\tilde{x}_m = \tilde{b}_n \end{cases}$$

(۲-۱۱)

که در آن $\tilde{b}_i, 1\le i\le n$ و $\tilde{x}_j, 1\le j\le m$ $\tilde{a}_{ij}, 1\le i,j\le n$ اعداد فازی می باشند را دستگاه معادلات خطی کاملا فازی می نامیم و با فرض $\tilde{A}=[\tilde{a}_{ij}]_{n\times m}, \tilde{X}=[\tilde{x}_j]_{m\times 1}, \tilde{B}=[\tilde{b}_i]_{n\times 1}$ به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$\tilde{A}\tilde{X} = \tilde{B} \qquad (۲-۱۲)$$

روش الهویرنلو و سلهشور [14] : در این روش الهویرنلو و همکاران دستگاه خطی کاملا فازی به فرم (۲-۱۲) را برای فرم پارامتری اعدد فازی و $i, j = 1,2,...,n$ درنظرگرفتند. آنها ابتدا ۱-برش سیستم به صورت زیر را حل کردند:

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(1) x_j = \tilde{b}_i(1) \qquad i = 1,2,...,n$$

(۲-۱۳)

و با حل دستگاه فوق $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ را بدست آورده و سیستم (۲-۱۲) را بصورت زیر در نظر گرفتند:

$$\begin{cases} [\underline{a}_{11}(r), \overline{a}_{11}(r)][x_1 - \sim_1(r), x_1 + \sim_1(r)] + ... + [\underline{a}_{1n}(r), \overline{a}_{1n}(r)][x_n - \sim_1(r), x_n + \sim_1(r)] = [\underline{b}_1(r), \overline{b}_1(r)] \\ [\underline{a}_{21}(r), \overline{a}_{21}(r)][x_1 - \sim_2(r), x_1 + \sim_2(r)] + ... + [\underline{a}_{2n}(r), \overline{a}_{2n}(r)][x_n - \sim_2(r), x_n + \sim_2(r)] = [\underline{b}_2(r), \overline{b}_2(r)] \\ \vdots \\ [\underline{a}_{n1}(r), \overline{a}_{n11}(r)][x_1 - \sim_n(r), x_1 + \sim_n(r)] + ... + [\underline{a}_{nn}(r), \overline{a}_{nn}(r)][x_n - \sim_n(r), x_n + \sim_n(r)] = [\underline{b}_n(r), \overline{b}_n(r)] \end{cases}$$

(۲-۱٤)

که در دستگاه فوق به دنبال یافتن $\sim_j, j = 1,2,...,n$ به عنوان گستره های جواب بودند. سپس آنها سه حالت زیر را برای درایه های ماتریس $\tilde{A}$ در نظر گرفتند.

$$\begin{array}{l} 1.\ I_1 = \{ \ (i,j) \in N_n \times N_n \big| \tilde{a}_{ij} > 0 \ \} \\ 2.\ I_1 = \{ \ (i,j) \in N_n \times N_n \big| \tilde{a}_{ij} < 0 \ \} \qquad N_n = \{1,2,...,n\}. \\ 3.\ I_1 \cup I_2 \end{array}$$

(۲-۱۵)

و در هر حالت جواب فازی سیستم را بدست آوردند، اما ما در اینجا فقط حالت سوم را مطرح می کنیم که دو حالت دیگر را پوشش می دهد. فرض کردند که $\tilde{a}_{ij}(r) > 0 \ \forall j \in N_s, \tilde{a}_{ij} < 0 \ \forall j \in N_n - N_s$ و در این حالت سیستم (۲-۱٤) به فرم زیر تبدیل شد:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{s} \underline{a}_{ij}(r)(x_j - \sim_i(r)) + \sum_{j=s+1}^{n} \underline{a}_{ij}(r)(x_j + \sim_i(r)) = \underline{b}_i(r) \\ \sum_{j=1}^{s} \overline{a}_{ij}(r)(x_j + \sim_i(r)) + \sum_{j=s+1}^{n} \overline{a}_{ij}(r)(x_j - \sim_i(r)) = \overline{b}_i(r) \end{cases} \qquad i = 1,2,...,n$$

(۱۶-۲)

و از دستگاه فوق بدست آوردند:

$$\sim_{i1}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)x_j-\underline{b}_i(r)}{\sum_{j=1}^{s}\underline{a}_{ij}(r)-\sum_{j=s+1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)}$$

$$\sim_{i2}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)x_j-\overline{b}_i(r)}{\sum_{j=1}^{s}\overline{a}_{ij}(r)-\sum_{j=s+1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)}$$

(۱۷-۲)

بنابراین ماکسیموم و مینیمم گستره های جواب به صورت زیر را بدست آوردند:

$$\begin{aligned}
&\sim_s^{-l}(r)=\min_{0\le r\le 1}\{\,|\sim_{i1}^{l}(r)|,|\sim_{i2}^{l}(r)|\,\},\\
&\sim_s^{-u}(r)=\min_{0\le r\le 1}\{\,|\sim_{i1}^{u}(r)|,|\sim_{i2}^{u}(r)|\,\}, \qquad 0\le r\le 1,\quad 1\le i\le n\\
&\sim_s^{+l}(r)=\max_{0\le r\le 1}\{\,|\sim_{i1}^{l}(r)|,|\sim_{i2}^{l}(r)|\,\},\\
&\sim_s^{+u}(r)=\min_{0\le r\le 1}\{\,|\sim_{i1}^{u}(r)|,|\sim_{i2}^{u}(r)|\,\}.
\end{aligned}$$

(۱۸-۲)

که درآن

$$\begin{aligned}
&\sim_{i1}^{l}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)x_j-\underline{b}_i(r)}{\sum_{j=1}^{s}\underline{a}_{ij}(1)-\sum_{j=s+1}^{n}\underline{a}_{ij}(0)}\\
&\sim_{i1}^{u}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}(r)x_j-\underline{b}_i(r)}{\sum_{j=1}^{s}\underline{a}_{ij}(0)-\sum_{j=s+1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)}\\
&\sim_{i2}^{l}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)x_j-\overline{b}_i(r)}{\sum_{j=1}^{s}\underline{a}_{ij}(0)-\sum_{j=s+1}^{n}\underline{a}_{ij}(1)} \qquad 0\le r\le 1, 1\le i\le n.\\
&\sim_{i1}^{u}(r)=\frac{\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}(r)x_j-\overline{b}_i(r)}{\sum_{j=1}^{s}\underline{a}_{ij}(1)-\sum_{j=s+1}^{n}\underline{a}_{ij}(0)}
\end{aligned}$$

(۲-۱۹)

بنابراین جواب ماکسیمال و مینیمال متقارن فازی، سیستم فازی را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\begin{cases} \widetilde{X}^{-l}(r) = (\widetilde{x}_1^{-l}(r),\dots,\widetilde{x}_n^{-l}(r))^t & s.t. \quad \widetilde{x}_i^{-l}(r) = [x_j - \sim_s^{-l}, x_j + \sim_s^{-l}(r)] \\ \widetilde{X}^{-u}(r) = (\widetilde{x}_1^{-u}(r),\dots,\widetilde{x}_n^{-u}(r))^t & s.t. \quad \widetilde{x}_i^{-u}(r) = [x_j - \sim_s^{-u}, x_j + \sim_s^{-u}(r)] \\ \widetilde{X}^{+l}(r) = (\widetilde{x}_1^{+l}(r),\dots,\widetilde{x}_n^{+l}(r))^t & s.t. \quad \widetilde{x}_i^{+l}(r) = [x_j - \sim_s^{+l}, x_j + \sim_s^{+l}(r)] \\ \widetilde{X}^{+u}(r) = (\widetilde{x}_1^{+u}(r),\dots,\widetilde{x}_n^{+u}(r))^t & s.t. \quad \widetilde{x}_i^{+u}(r) = [x_j - \sim_s^{+u}, x_j + \sim_s^{+u}(r)] \end{cases} \quad 0 \le r \le 1, \quad 1 \le i \le n$$

(۲-۲۰)

از معایب روش فوق این است که فقط قادر است جواب های مثبت یا منفی دستگاه را در حالتی که ضرایب دستگاه مثبت یا منفی هستند را بدست آورد.

روش موزیولی و رینرت [4] : در این کار موزیولی و همکاران دستگاه معادلات خطی دوآل کاملا فازی به فرم

$$\widetilde{A}_1 \widetilde{X} + \widetilde{b}_1 = \widetilde{A}_2 \widetilde{X} + \widetilde{b}_2$$

(۲-۲۱)

که تمام پارامترها و متغیرها اعداد فازی مثلثی هستند را در نظر گرفتند. سپس دستگاه زیر را برای یافتن $[(\underline{x}_j)_\sim, (\overline{x}_j)_\sim]$، تشکیل دادند.

$$\sum_{j=1}^{n} [(\underline{a}_{ij})_\sim, (\overline{a}_{ij})_\sim] x_j = [(\underline{b}_i)_\sim, (\overline{b}_i)_\sim] \quad \sim \in [0,1], \quad 1 \le i \le n$$

(۲-۲۲)

حال باتوجه به تعریف برای بازه ها، $[p,q] = p + (q-p)\text{ª}\ ,\ \text{ª} \in [0,1]$ دستگاه (۲-۲۱) به صورت زیر تبدیل کردند:

$$\sum_{j=1}^{n} [(\underline{a}_{ij})_\sim + ((\overline{a}_{ij})_\sim - (\underline{a}_{ij})_\sim)\text{ª}_{ij}] x_j =$$
$$[(\underline{b}_i)_\sim + ((\overline{b}_i)_\sim - (\underline{b}_i)_\sim)\text{¢}_i] \quad \text{¢}_i, \text{ª}_{ij} \in \{0,1\} \quad , \quad 1 \le i \le n$$

(۲-۲۳)

و اعلام داشتند، اگر تمام ماتریسهای $(A)_0$ نامنفرد باشند آنگاه دستگاه (۲-۲۳) را حل کرده و مقادیر $x_j, 1 \le j \le n$ را بر اساس $¢_i, ª_{ij}, \sim, 1 \le i, j \le n$ بدست می آوریم. سپس برای یافتن ماکزیمم و مینیمم مقادیر تکیه گاه و ارتفاع جواب یعنی برای محاسبه ی ۱-برش و ۰-برش از $x_j, 1 \le j \le n$, ابتدا در حالت اول با فرض های $0 = \sim$ و $¢_i = 1, ¢_i = 0, ª_{ij} = 1, ª_{ij} = 0$ مقادیر $[(\bar{x}_j)_0, (\underline{x}_j)_0]$، $1 \le j \le n$ ، را محاسبه و سپس در حالت دوم با فرض های $\sim = 1$ $¢_i = 1, ¢_i = 0, ª_{ij} = 1, ª_{ij} = 0, 1 \le i, j \le n,$ مقادیر $[(\bar{x}_j)_1, (\underline{x}_j)_1]$، $1 \le j \le n$ را محاسبه کردند.

۲-۵ جمع بندی فصل

در این فصل ابتدا با اصل فازی آشنا شدیم و پس ازطرح کلیاتی درباره ی مجموعه های فازی، مفاهیم پایه ای ریاضیات فازی را تعریف کردیم و در پایان با بیان چند نمونه دستگاه معادلات خطی فازی و کارهای انجام گرفته روی این سیستم ها به دنبال ارائه ی ترکیبی از این سیستم ها به صورت دستگاه ماتریسی دوآل فازی و کاملا فازی در این رساله هستیم و سعی می کنیم روشی کاربردی ارائه دهیم که معایب روش های قبل را نداشته باشد، لذا در فصل آینده روشی جدید برای حل دستگاه ماتریسی دوآل فازی مطرح می کنیم.

فصل سوم

روشی جدید برای حل دستگاه معادلات ماتریسی دوآل فازی

۳-۱ مقدمه

مدل بندی بسیاری از مسائل جهان حقیقی منجر به دستگاه معادلات خطی می شود و به ویژه وقتی متغیرها، متغیرهای کیفی و نا دقیق یا به عبارت دیگر متغیرهای فازی هستند، دستگاه تشکیل یافته دستگاه معادلات خطی فازی می باشد، که این سیستم ها نقش مهمی در زمینه های مختلف بویژه مهندسی، فیزیک و ریاضیات ایفا می کنند. از اینرو در این فصل ما نوع خاصی از این سیستم ها به صورت دستگاه ماتریسی دوآل فازی LR را در نظر می گیریم و با حل سیستم ۱-برش برای بدست آوردن هسته ی جواب فازی و حل مسئله ی مینیمم سازی برای مینیمم کردن اختلاف گستره های چپ و راست و سرانجام بدست آوردن گستره های جواب فازی، این نوع سیستم ها را حل می کنیم.

۳-۲ حل دستگاه ماتریسی دوآل فازی

در این بخش ما دستگاه ماتریسی دوآل فازی LR که به فرم

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_{11},\sim_{11},\ _{11}) & \dots & (x_{1n},\sim_{1n},\ _{1n}) \\ (x_{21},\sim_{21},\ _{21}) & \dots & (x_{2n},\sim_{2n},\ _{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n1},\sim_{n1},\ _{n1}) & \dots & (x_{nn},\sim_{nn},\ _{nn}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (b_{11},\sim_{b_{11}},\ _{b_{11}}) & \dots & (b_{1n},\sim_{b_{1n}},\ _{b_{1n}}) \\ (b_{21},\sim_{b_{21}},\ _{b_{21}}) & \dots & (b_{2n},\sim_{b_{2n}},\ _{b_{2n}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (b_{n1},\sim_{b_{1n}},\ _{b_{n1}}) & \dots & (b_{nn},\sim_{b_{nn}},\ _{b_{nn}}) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_{11},\sim_{11},\ _{11}) & \dots & (x_{1n},\sim_{1n},\ _{1n}) \\ (x_{21},\sim_{21},\ _{21}) & \dots & (x_{2n},\sim_{2n},\ _{2n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (x_{n1},\sim_{n1},\ _{n1}) & \dots & (x_{nn},\sim_{nn},\ _{nn}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (d_{11},\sim_{d_{11}},\ _{d_{11}}) & \dots & (d_{1n},\sim_{d_{1n}},\ _{d_{1n}}) \\ (d_{21},\sim_{d_{21}},\ _{d_{21}}) & \dots & (d_{2n},\sim_{d_{2n}},\ _{d_{2n}}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (d_{n1},\sim_{d_{1n}},\ _{d_{n1}}) & \dots & (d_{nn},\sim_{d_{nn}},\ _{d_{nn}}) \end{pmatrix}$$

است و شکل ماتریسی آن به صورت $A\tilde{X}+\tilde{B}=C\tilde{X}+\tilde{D}$ می باشد را بررسی می کنیم که در آن ماتریس $A-C$ نامنفرد می باشد.

برای حل سیستم فوق ابتدا ۱-برش سیستم به صورت زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

با بکارگیری ضرب و جمع ماتریس و استفاده از تساوی ماتریس بدست می آوریم:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj} + b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_{kj} + d_{ij}, \qquad i,j=1,2,\dots,n$$

(۱-۳)

از حل (۳-۱) هسته های جواب فازی LR بدست می آیند. برای یافتن گستره ها، از آنجایی که تساوی دو ابهام عملا غیر ممکن است، از مسئله ی مینیمم سازی استفاده می کنیم. در این روش دو طرف را طوری برابر هم قرار می دهیم که فاصله ی ابهام های چپ و ابهام های راست دو طرف تساوی کمترین مقدار باشد. مسئله ی مینیموم سازی زیر را در نظر می گیریم:

$$Min\ \Big\{ \Big\| \sum_{a_{ik}\ge 0} a_{ik}\sim_{kj} - \sum_{a_{ik}<0} a_{ik}\ \ _{kj} + \sim_{b_{ij}} - \sum_{c_{ik}\ge 0} c_{ik}\sim_{kj} + \sum_{c_{ik}<0} c_{ik}\ \ _{kj} - \sim_{d_{ij}} \Big\|$$
$$+ \Big\| \sum_{a_{ik}\ge 0} a_{ik}\ \ _{kj} - \sum_{a_{ik}<0} a_{ik}\sim_{kj} + \ \ _{b_{ij}} - \sum_{c_{ik}\ge 0} c_{ik}\ \ _{kj} + \sum_{c_{ik}<0} c_{ik}\sim_{kj} - \ \ _{d_{ij}} \Big\| \Big\}$$
$$s.t \quad \sim_{kj},\ \ _{kj} \ge 0, \qquad i,j,k=1,2,\dots,n$$

(۲-۳)

در عبارت اول فاصله ی ابهام های چپ و در عبارت دوم فاصله ی ابهام های راست آمده است که با بکارگیری تعریف شبه نرم داریم:

$$Min\ \Big\{ \max_{i,j}\Big| \sum_{a_{ik}\ge 0} a_{ik}\sim_{kj} - \sum_{a_{ik}<0} a_{ik}\ \ _{kj} + \sim_{b_{ij}} - \sum_{c_{ik}\ge 0} c_{ik}\sim_{kj} + \sum_{c_{ik}<0} c_{ik}\ \ _{kj} - \sim_{d_{ij}} \Big|$$
$$+ \max_{i,j}\Big| \sum_{a_{ik}\ge 0} a_{ik}\ \ _{kj} - \sum_{a_{ik}<0} a_{ik}\sim_{kj} + \ \ _{b_{ij}} - \sum_{c_{ik}\ge 0} c_{ik}\ \ _{kj} + \sum_{c_{ik}<0} c_{ik}\sim_{kj} - \ \ _{d_{ij}} \Big| \Big\}$$
$$s.t \quad \sim_{kj},\ \ _{kj} \ge 0, \qquad i,j,k=1,2,\dots,n$$

(۳-۳)

و با قراردادن

$$z_1 = \sum_{a_{ik} \ge 0} a_{ik} \sim_{kj} - \sum_{a_{ik} < 0} a_{ik} \quad _{kj} + \sim_{b_{ij}} - \sum_{c_{ik} \ge 0} c_{ik} \sim_{kj} + \sum_{c_{ik} < 0} c_{ik} \quad _{kj} - \sim_{d_{ij}}$$

$$z_2 = \sum_{a_{ik} \ge 0} a_{ik} \quad _{kj} - \sum_{a_{ik} < 0} a_{ik} \sim_{kj} + \quad _{b_{ij}} - \sum_{c_{ik} \ge 0} c_{ik} \quad _{kj} + \sum_{c_{ik} < 0} c_{ik} \sim_{kj} - \quad _{d_{ij}}$$

(٤-٣)

خواهیم داشت:

$$Min \;\; z_1 + z_2$$

$$-z_1 \le \sum_{a_{ik} \ge 0} a_{ik} \sim_{kj} - \sum_{a_{ik} < 0} a_{ik} \quad _{kj} + \sim_{b_{ij}} - \sum_{c_{ik} \ge 0} c_{ik} \sim_{kj} + \sum_{c_{ik} < 0} c_{ik} \quad _{kj} - \sim_{d_{ij}} \le z_1$$

$$-z_2 \le \sum_{a_{ik} \ge 0} a_{ik} \quad _{kj} - \sum_{a_{ik} < 0} a_{ik} \sim_{kj} + \quad _{b_{ij}} - \sum_{c_{ik} \ge 0} c_{ik} \quad _{kj} + \sum_{c_{ik} < 0} c_{ik} \sim_{kj} - \quad _{d_{ij}} \le z_2$$

$$s.t \quad z_1, z_2, \sim_{kj}, \quad _{kj} \ge 0, \qquad i, j, k = 1,2,\ldots,n$$

(٥-٣)

گستره های جواب را با حل مسئله ی مینیموم سازی فوق پیدا می کنیم. سرانجام با اختصاص این گستره ها به جوابهای سیستم ۱-برش ، جواب فازی LR سیستم ماتریسی دوآل فازی را بدست می آوریم.

لم۳-۱: هر ترکیب محدب از دو جواب بهینه، یک جواب بهینه است.

اثبات. فرض کنید $(\sim'_{kj}, \ '_{kj}, z'_1, z'_2), (\sim''_{kj}, \ ''_{kj}, z''_1, z''_2)$ دو جواب بهینه باشند، ترکیب محدب آنها به صورت زیر است:

$$(\sim_{kj}, \ _{kj}, z_1, z_2) = \text{a}(\sim'_{kj}, \ '_{kj}, z'_1, z'_2) + (1-\text{a})(\sim''_{kj}, \ ''_{kj}, z''_1, z''_2) \qquad \text{a} \in [0,1]$$

بنابراین

$$\sim_{kj} = ª\sim'_{kj} + (1-ª)\sim''_{kj}$$
$$_{kj} = ª \ '_{kj} + (1-ª) \ ''_{kj}$$
$$z_1 = ªz'_1 + (1-ª)z''_1$$
$$z_2 = ªz'_2 + (1-ª)z''_2$$

(۳-۶)

ازطرفی چون $(\sim'_{kj}, \ '_{kj}, z'_1, z'_2)$ جواب شدنی برای مدل (۳-۵)، است داریم:

$$-z'_1 \le \sum_{a_{ik}\ge 0} a_{ik}\sim'_{kj} - \sum_{a_{ik}<0} a_{ik} \ '_{kj} + \sim'_{b_{ij}} - \sum_{c_{ik}\ge 0} c_{ik}\sim'_{kj} + \sum_{c_{ik}<0} c_{ik} \ '_{kj} - \sim'_{d_{ij}} \le z'_1$$

(۳-۷)

نامساوی فوق را یکبار در $ª$ $(ª \in [0,1])$ و یکبار $1-ª$ در ضرب می کنیم، داریم:

$$-ªz'_1 \le \sum_{a_{ik}\ge 0}(a_{ik}ª\sim'_{kj}) - \sum_{a_{ik}<0}(a_{ik}ª \ '_{kj}) + (ª\sim'_{b_{ij}}) - \sum_{c_{ik}\ge 0}(c_{ik}ª\sim'_{kj}) + \sum_{c_{ik}<0}(c_{ik}ª \ '_{kj}) - (ª\sim'_{d_{ij}}) \le ªz'_1$$
$$-(1-ª)z'_1 \le \sum_{a_{ik}\ge 0}(a_{ik}(1-ª)\sim'_{kj}) - \sum_{a_{ik}<0}(a_{ik}(1-ª) \ '_{kj}) + ((1-ª)\sim'_{b_{ij}}) - \sum_{c_{ik}\ge 0}(c_{ik}(1-ª)\sim'_{kj}) +$$
$$\sum_{c_{ik}<0}(c_{ik}(1-ª) \ '_{kj}) - ((1-ª)\sim'_{d_{ij}}) \le (1-ª)z'_1$$

(۳-۸)

با استفاده از معادلات بالا و (۳-۶) داریم:

$$-z_1 \le \sum_{a_{ik}\ge 0} a_{ik}\sim_{kj} - \sum_{a_{ik}<0} a_{ik} \ _{kj} + \sim_{b_{ij}} - \sum_{c_{ik}\ge 0} c_{ik}\sim_{kj} + \sum_{c_{ik}<0} c_{ik} \ _{kj} - \sim_{d_{ij}} \le z_1$$

به طور مشابه بدست می آوریم:

$$-z_2 \le \sum_{a_{ik}\ge 0} a_{ik} \ _{kj} - \sum_{a_{ik}<0} a_{ik}\sim_{kj} + \ _{b_{ij}} - \sum_{c_{ik}\ge 0} c_{ik} \ _{kj} + \sum_{c_{ik}<0} c_{ik}\sim_{kj} - \ _{d_{ij}} \le z_2$$

یعنی $(\sim_{kj}, \ _{kj}, z_1, z_2)$ شدنی است. حال نشان می دهیم $(\sim_{kj}, \ _{kj}, z_1, z_2)$ بهینه است. فرض کنیم z^* جواب بهینه است یعنی $z^* = z'_1 + z'_2$ و $z^* = z''_1 + z''_2$

بنابراین:

$$z_1 + z_2 = \alpha z'_1 + (1-\alpha) z''_1 + \alpha z'_2 + (1-\alpha) z''_2 = \alpha (z'_1 + z'_2) + (1-\alpha)(z''_1 + z''_2) =$$
$$\alpha z^* + (1-\alpha) z^* = z^*$$

بنابراین حکم برقراراست.

لم ۳-۲: مجموعه جواب شدنی مدل (۳-۵)، محدب است.

اثبات: فرض کنید، مجموعه ی S جواب مدل (۳-۵) باشد و $\overline{X}_1, \overline{X}_2$ دو جواب باشند مطابق با لم۳-۱ هر ترکیب محدب از دو جواب، جواب است. بنابراین حکم کامل است.

قضیه ۳-۱: اگر مدل (۳-۵) بیش از دو جواب بهینه داشته باشد که جوابهای فازی برای سیستم $A\tilde{X} + \tilde{B} = C\tilde{X} + \tilde{D}$ هستند آنگاه ترکیب محدب این دو جواب فازی نیز جواب فازی برای سیستم فوق است.

اثبات: فرض کنید $\tilde{X}_1$ و $\tilde{X}_2$ دو جواب برای سیستم $A\tilde{X} + \tilde{B} = C\tilde{X} + \tilde{D}$ باشند، بنابراین داریم:

$$A\tilde{X}_1 + \tilde{B} = C\tilde{X}_1 + \tilde{D},$$
$$A\tilde{X}_2 + \tilde{B} = C\tilde{X}_2 + \tilde{D}$$

(۳-۹)

حال می خواهیم نشان دهیم $\tilde{Y} = \alpha \tilde{X}_1 + (1-\alpha)\tilde{X}_2$ ، جواب سیستم فوق است. ابتدا با ضرب معادله ی اول (۳-۹) در α و معادله ی دوم آن در $1-\alpha$ داریم:

$$\begin{cases} \alpha A\tilde{X}_1 + \alpha\tilde{B} = \alpha C\tilde{X}_1 + \alpha\tilde{D} \\ (1-\alpha)A\tilde{X}_2 + (1-\alpha)\tilde{B} = (1-\alpha)C\tilde{X}_2 + (1-\alpha)\tilde{D} \end{cases}$$

(۳-۱۰)

سپس با جمع دو معادله ی (۳-۱۰) بدست می آوریم:

$$A(\alpha\tilde{X}_1 + (1-\alpha)\tilde{X}_2) + \tilde{B} = C(\alpha\tilde{X}_1 + (1-\alpha)\tilde{X}_2) + \tilde{D}$$

یعنی $A\tilde{Y}+\tilde{B}=C\tilde{Y}+\tilde{D}$ لذا حکم برقراراست.

قضیه ۳-۲: اگر $\tilde{B}=\tilde{D}=0$ آنگاه سیستم ماتریسی دوآل فازی LR جواب حقیقی دارد.

اثبات: چون $\tilde{B}=\tilde{D}=0$ آنگاه سیستم $A\tilde{X}+\tilde{B}=C\tilde{X}+\tilde{D}$ به $A\tilde{X}=C\tilde{X}$ تبدیل میشود که یک سیستم حقیقی است، بنابراین جواب حقیقی دارد.

لم ۳-۳: اگر $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{n\times n}$ و $a_{ij}\geq c_{ij}$ برای $a_{ij}\geq 0, c_{ij}\geq 0$ و $a_{ij}\leq c_{ij}$ برای $a_{ij}\leq 0, c_{ij}\leq 0$ و همچنین $\tilde{D}-_{H}\tilde{B}$ وجود داشته باشد، آنگاه سیستم های فازی $A\tilde{X}+\tilde{B}=C\tilde{X}+\tilde{D}$ و $(A-C)\tilde{X}=(\tilde{D}-_{H}\tilde{B})$ جوابهای فازی یکسان دارند.

اثبات: $\tilde{X}$ جواب سیستم فازی $A\tilde{X}+\tilde{B}=C\tilde{X}+\tilde{D}$ است، اگر و تنها اگر

$$(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}+b_{ij},\sum_{a_{ik}\geq 0}a_{ik}\sim_{kj}-\sum_{a_{ik}<0}a_{ik}\quad_{kj}+\sim_{b_{ij}},\sum_{a_{ik}\geq 0}a_{ik}\quad_{kj}-\sum_{a_{ik}<0}a_{ik}\sim_{kj}+\quad_{b_{ij}})=$$
$$(\sum_{k=1}^{n}c_{ik}x_{kj}+d_{ij},\sum_{c_{ik}\geq 0}c_{ik}\sim_{kj}-\sum_{c_{ik}<0}c_{ik}\quad_{kj}+\sim_{d_{ij}},\sum_{c_{ik}\geq 0}c_{ik}\quad_{kj}-\sum_{c_{ik}<0}c_{ik}\sim_{kj}+\quad_{d_{ij}})$$

اگر و تنها اگر

$$(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}-c_{ik})x_{kj}+,\sum_{a_{ik},c_{ik}\geq 0}(a_{ik}-c_{ik})\sim_{kj}-\sum_{a_{ik},c_{ik}<0}(a_{ik}-c_{ik})\quad_{kj},\sum_{a_{ik},c_{ik}\geq 0}(a_{ik}-c_{ik})\quad_{kj}-\sum_{a_{ik},c_{ik}<0}(a_{ik}-c_{ik})\sim_{kj})=$$
$$(d_{ij}-b_{ij},\sim_{d_{ij}}-\sim_{b_{ij}},\quad_{d_{ij}}-\quad_{b_{ij}})$$

اگر و تنها اگر

$$(A-C)\tilde{X}=(\tilde{D}-_{H}\tilde{B})$$

آنگاه $\tilde{X}$ جواب سیستم فازی $(A-C)\tilde{X}=(\tilde{D}-_{H}\tilde{B})$ است.

۳-۳ مثال های عددی

مثال ۳-۱: دستگاه ماتریس دوآل فازی LR زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12}\\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(2,0,3) & (1,0,0)\\ (2,1,3) & (1,5,4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12}\\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(4,1,6) & (2,1,1)\\ (5,3,7) & (3,1,4)\end{bmatrix}$$

جواب دستگاه ۱-برش $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ با استفاده از مدل (۳-۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad z_1 + z_2 \\
& -z_1 \le \sim_{11} - 1 \le z_1 \\
& -z_1 \le 3\sim_{21} - 2 \le z_1 \\
& -z_1 \le \sim_{12} - 1 \le z_1 \\
& -z_1 \le 3\sim_{22} \le z_1 \\
& -z_2 \le \quad_{11} - 3 \le z_2 \\
& -z_2 \le 3 \quad_{21} - 4 \le z_2 \\
& -z_2 \le \quad_{12} - 1 \le z_2 \\
& -z_2 \le 3 \quad_{22} - 3 \le z_2 \\
& \sim_{ij}, \quad_{ij}, z_1, z_2 \ge 0, \quad i, j = 1,2
\end{aligned}
$$

با حل مسئله ی بهینه سازی فوق بدست می آوریم:

$$z_1 = z_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} (\sim_{11}, \quad_{11}) & (\sim_{12}, \quad_{12}) \\ (\sim_{21}, \quad_{21}) & (\sim_{22}, \quad_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,3) & (0,1) \\ (0.667,1.33) & (0,1) \end{bmatrix}$$

بنابراین سیستم دارای جواب جبری به صورت زیر است:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} (2,1,3) & (1,0,1) \\ (1,0.667,1.33) & (\frac{2}{3},0,1) \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر چون $a_{ij} \ge 0, c_{ij} \ge 0, a_{ij} \ge c_{ij}$ برای $i, j = 1,2$ ، لم ۳-۳ نتیجه می دهد که سیستم $(A-C)\tilde{X} = (\tilde{D} - \tilde{B})$ جواب یکسان با سیستم دوآل دارد، پس جواب این سیستم نیز $\tilde{X} = \begin{bmatrix} (2,1,3) & (1,0,1) \\ (1,0.667,1.33) & (\frac{2}{3},0,1) \end{bmatrix}$ می باشد.

مثال ۳-۲: دستگاه ماتریس دوآل فازی LR زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3,2,1) & (4,4,3) \\ (1,1,1) & (2,3,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2,4,2) & (1,3,2) \\ (3,2,3) & (4,1,1) \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه ۱-برش $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$ با استفاده از مدل (۳-۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z_1 + z_2 \\
&-z_1 \le 2\sim_{11} - 2\sim_{21} - 2 \le z_1 \\
&-z_1 \le 2\sim_{12} - 2\sim_{22} + 1 \le z_1 \\
&-z_1 \le \ _{11} - \sim_{11} - 4 \ _{21} - 1 \le z_1 \\
&-z_1 \le \ _{12} - \sim_{12} - 4 \ _{22} + 2 \le z_1 \\
&-z_2 \le 2 \ _{11} - 2 \ _{21} - 1 \le z_2 \\
&-z_2 \le 2 \ _{12} - 2 \ _{22} + 1 \le z_2 \\
&-z_2 \le \sim_{11} - \ _{11} - 4\sim_{21} - 2 \le z_2 \\
&-z_2 \le \sim_{12} - 4\sim_{22} - \ _{12} + 1 \le z_2 \\
&\sim_{ij}, \ _{ij}, z_1, z_2 \ge 0, \quad i, j = 1,2
\end{aligned}
$$

باحل مسئله ی بهینه سازی فوق بدست می آوریم:

$$
z_1 = 0, z_2 = 3, \quad \begin{bmatrix} (\sim_{11}, \ _{11}) & (\sim_{12}, \ _{12}) \\ (\sim_{21}, \ _{21}) & (\sim_{22}, \ _{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,2) & (0,0) \\ (0,0) & (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{bmatrix}
$$

بنابراین سیستم دارای جواب فازی به صورت زیر است:

$$
\tilde{X} = \begin{bmatrix} (0,1,2) & (-2,0,0) \\ (\frac{1}{2},0,0) & (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{bmatrix}
$$

مشاهده می کنیم، $(\tilde{D} -_H \tilde{B})$ وجود ندارد بنابراین نمی توانیم سیستم $(A-C)\tilde{X} = (\tilde{D} -_H \tilde{B})$ را بسازیم.

مثال ۳-۳: دستگاه ماتریس دوآل فازی LR زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1,2,1) & (2,3,5) \\ (-4,2,1) & (-2,2,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (2,4,3) & (-2,5,6) \\ (7,7,2) & (4,3,6) \end{bmatrix}
$$

جواب دستگاه ۱-برش $\begin{bmatrix} 10 & 10 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$ با استفاده از مدل (۳-۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z_1 + z_2 \\
&-z_1 \le \;_{11} + \;_{21} - 2 \le z_1 \\
&-z_1 \le \;_{12} + \;_{22} - 2 \le z_1 \\
&-z_1 \le \;_{21} - 5 \le z_1 \\
&-z_1 \le \;_{22} - 1 \le z_1 \\
&-z_2 \le \sim_{12} + \sim_{22} - 1 \le z_2 \\
&-z_2 \le \sim_{21} - 1 \le z_2 \\
&-z_2 \le \sim_{22} - 2 \le z_2 \\
&-z_2 \le \sim_{12} - 4\sim_{22} - \;_{12} + 1 \le z_2 \\
&\sim_{ij},\; \;_{ij}, z_1, z_2 \ge 0, \quad i, j = 1,2
\end{aligned}
$$

با حل مسئله ی بهینه سازی فوق بدست می آوریم:

$$
z_1 = \frac{3}{2},\, z_2 = \frac{1}{2}, \quad \begin{bmatrix} (\sim_{11},\; _{11}) & (\sim_{12},\; _{12}) \\ (\sim_{21},\; _{21}) & (\sim_{22},\; _{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,0) & (0,\frac{7}{2}) \\ (\frac{1}{2},\frac{7}{2}) & (\frac{3}{2},0) \end{bmatrix}
$$

بنابراین سیستم دارای جواب فازی به صورت زیراست:

$$
\tilde{X} = \begin{bmatrix} (10,2,0) & (10,0,\frac{7}{2}) \\ (-11,\frac{1}{2},\frac{7}{2}) & (-6,\frac{3}{2},0) \end{bmatrix}
$$

از طرف دیگر چون $a_{ij} \le 0, c_{ij} \le 0, a_{ij} \le c_{ij}$ برای $i, j = 1,2$ ، لم ۳-۳ نتیجه می دهد که سیستم $(A-C)\tilde{X} = (\tilde{D} - \tilde{B})$ جواب یکسان با سیستم دوآل دارد، پس جواب این سیستم نیز $\tilde{X} = \begin{bmatrix} (10,2,0) & (10,0,\frac{7}{2}) \\ (-11,\frac{1}{2},\frac{7}{2}) & (-6,\frac{3}{2},0) \end{bmatrix}$ می باشد.

مثال ۳-۴: دستگاه ماتریس دوآل فازی LR زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (3,0,2) & (4,1,2) \\ (1,1,0) & (2,5,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1,1,2) & (-4,4,3) \\ (0,2,1) & (12,5,5) \end{bmatrix}
$$

جواب دستگاه ۱-برش $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{-7}{4} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ با استفاده از مدل (۳-۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z_1 + z_2 \\
&-z_1 \le -3\sim_{11} - \sim_{21} - 1 \le z_1 \\
&-z_1 \le 2\sim_{11} + \sim_{21} - \quad {}_{21} - 1 \le z_1 \\
&-z_1 \le -3\sim_{12} - \sim_{22} - 3 \le z_1 \\
&-z_1 \le 2\sim_{12} + 2\sim_{22} - \quad {}_{22} \le z_1 \\
&-z_2 \le -3 \quad {}_{11} - \quad {}_{21} \le z_2 \\
&-z_2 \le 2 \quad {}_{11} + \quad {}_{21} - \sim_{21} - 1 \le z_2 \\
&-z_2 \le -3 \quad {}_{12} - \quad {}_{22} - 1 \le z_2 \\
&-z_2 \le 2 \quad {}_{12} + 2 \quad {}_{22} - \sim_{22} - 1 \le z_2 \\
&\sim_{ij}, \quad {}_{ij}, z_1, z_2 \ge 0, \quad i, j = 1,2
\end{aligned}
$$

باحل مسئله ی بهینه سازی فوق بدست می آوریم:

$$
z_1 = z_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} (\sim_{11}, \quad {}_{11}) & (\sim_{12}, \quad {}_{12}) \\ (\sim_{21}, \quad {}_{21}) & (\sim_{22}, \quad {}_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) \end{bmatrix}
$$

بنابراین سیستم دارای جواب جبری به صورت زیر است:

$$
\tilde{X} = \begin{bmatrix} (\frac{5}{4},0,0) & (\frac{3}{2},0,0) \\ (\frac{-7}{4},0,0) & (\frac{7}{2},0,0) \end{bmatrix}
$$

حالا ما فرم $(\tilde{D} -_H \tilde{B})$ $(A-C)\tilde{X} =$ از سیستم ماتریسی دوآل فازی فوق را می سازیم:

$$
\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2,1,0) & (-8,3,1) \\ (-1,1,1) & (10,0,1) \end{bmatrix}
$$

جواب دستگاه ۱-برش $\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{-7}{4} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ با استفاده از مدل (۳-۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
& Min \quad z_1 + z_2 \\
& -z_1 \le 3 \quad _{11} + \quad _{21} - 1 \le z_1 \\
& -z_1 \le 2\sim_{11} + 2\sim_{21} - 1 \le z_1 \\
& -z_1 \le 3 \quad _{12} + \quad _{22} - 3 \le z_1 \\
& -z_1 \le 2\sim_{12} + 2\sim_{22} \le z_1 \\
& -z_2 \le 3\sim_{11} + \sim_{21} \le z_2 \\
& -z_2 \le 2 \quad _{11} + 2 \quad _{21} - 1 \le z_2 \\
& -z_2 \le 3\sim_{12} + \sim_{22} - 1 \le z_2 \\
& -z_2 \le 2 \quad _{12} + 2 \quad _{22} - 1 \le z_2 \\
& \sim_{ij}, \quad _{ij}, z_1, z_2 \ge 0, \quad i, j = 1,2
\end{aligned}
$$

با حل مسئله ی بهینه سازی فوق بدست می آوریم:

$$
z_1 = 0.6, = z_2 = 0, \quad \begin{bmatrix} (\sim_{11}, \ \ _{11}) & (\sim_{12}, \ \ _{12}) \\ (\sim_{21}, \ \ _{21}) & (\sim_{22}, \ \ _{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0,0.4) & (0.267,0.8) \\ (0.2,0) & (0,0) \end{bmatrix}
$$

بنابراین سیستم دارای جواب جبری به صورت زیراست:

$$
\tilde{X} = \begin{bmatrix} (\frac{5}{4},0,0.4) & (\frac{3}{2},0.267,0.8) \\ (\frac{-7}{4},0.2,0) & (\frac{7}{2},0,0) \end{bmatrix}
$$

مشاهده میکنیم چون شرایط لم ۳-۳ برقرار نیست، سیستم های $A\tilde{X} + \tilde{B} = C\tilde{X} + \tilde{D}$ و $(A-C)\tilde{X} = (\tilde{D} - \tilde{B})$ جواب فازی یکسانی ندارند.

۳-۴ جمع بندی فصل

برای روش ارائه شده در این فصل، به منظور حل دستگاه ماتریسی دوآل فازی LR ، می توان خواص زیر را برشمرد:

۱) برای دستگاه ماتریسی دوآل فازی LR ، جواب فازی بدست می آورد.

۲) استفاده از آن آسان است.

۳) روش را میتوان برای انواع دستگاه معادلات فازی بکار برد.

البته این روش مانند روش های دیگر در ریاضیات دارای معایبی نیز هست. در ادامه ی این رساله روش را برای حل دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی بکارمی بریم.

فصل چهارم

روشی جدید برای حل دستگاه معادلات ماتریسی دوآل کاملا فازی

۴-۱ مقدمه

یافتن جواب های فازی برای دستگاه معادلات خطی تمام فازی همواره مورد توجه نویسندگان بوده است، اینکه بتوان روشی ارائه کرد که کمترین ابهام را داشته و تضمین کند که سیستم کاملا فازی، جواب فازی دارد، از اهمیت ویژه ای برخورداراست. در این فصل ما روشی کارا برای حل دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی ارائه می کنیم که با بکارگیری ابزارهایی نظیرنرم ماتریسی و مسئله ی بهینه سازی همواره جواب فازی برای سیستم بدست می آورد.

۴-۲حل دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی

میخواهیم دستگاه ماتریسی دوآل کاملا فازی به فرم زیر را حل کنیم

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \tilde{x}_{n2} & \dots & \tilde{x}_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1n} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \dots & \tilde{b}_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \dots & \tilde{c}_{1n} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \dots & \tilde{c}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{c}_{n1} & \tilde{c}_{n2} & \dots & \tilde{c}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12} & \dots & \tilde{x}_{1n} \\ \tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22} & \dots & \tilde{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{x}_{n1} & \tilde{x}_{n2} & \dots & \tilde{x}_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \dots & \tilde{d}_{1n} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \dots & \tilde{d}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{d}_{n1} & \tilde{d}_{n2} & \dots & \tilde{d}_{nn} \end{pmatrix}$$

(۱-٤)

که در آن

$$\tilde{d}_{ik}=(d_{ik},\sim_{d_{ik}},\ \ {}_{d_{ik}}),\tilde{c}_{ik}=(c_{ik},\sim_{c_{ik}},\ \ {}_{c_{ik}}),\tilde{a}_{ik}=(a_{ik},\sim_{a_{ik}},\ \ {}_{a_{ik}}),\tilde{x}_{kj}=(x_{kj},\sim_{kj},\ \ {}_{kj}),\tilde{b}_{ij}=(b_{ij},\sim_{b_{ij}},\ \ {}_{b_{ij}})$$

و ، $i,j,k=1,2,\dots,n$ و بافرض $\tilde{A}=[\tilde{a}_{ik}],\ \tilde{X}=[\tilde{x}_{kj}],\ \tilde{B}=[\tilde{b}_{ij}],\ \tilde{C}=[\tilde{c}_{ik}],\ \tilde{D}=[\tilde{d}_{ij}]$، به صورت نمادین

به فرم $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ نمایش داده می شود. فرض بر این است که $A-C$ نامنفرداست (A یک تراز $\tilde{A}$ و C یک تراز $\tilde{C}$ است).

برای حل سیستم (٤-١) ابتدا ١-برش سیستم به صورت زیر را حل می کنیم:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}$$

داریم:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}+b_{ij}=\sum_{k=1}^{n} c_{ik}x_{kj}+d_{ij}, \qquad i,j=1,2,\dots,n \tag{٤-٢}$$

تعریف ۴-۱: اگر در عدد فازی $\tilde{u}=(a,\sim,\ )$ داشته باشیم، $a=0, a-\sim\le 0, a+\ \ \ge 0$، آنگاه $\tilde{u}$ را صفر فازی می نامیم.

در ادامه ی حل سیستم (٤-١) سه حالت را درنظر می گیریم.

حالت اول. اگر $x_{kj}>0$، آنگاه $\tilde{x}_{kj}=(x_{kj},\sim_{kj},\ _{kj})$ را مثبت درنظر گرفته و باید $x_{kj}-\sim_{kj}\ge 0$ باشد.

حالت دوم. اگر $x_{kj}<0$، آنگاه $\tilde{x}_{kj}=(x_{kj},\sim_{kj},\ _{kj})$ را منفی درنظر گرفته و باید $x_{kj}+\ _{kj}\le 0$ باشد.

حالت سوم. اگر $x_{kj}=0$، آنگاه $\tilde{x}_{kj}=(x_{kj},\sim_{kj},\ _{kj})$ را صفر درنظر می گیریم و می گوییم $\tilde{x}_{kj}\approx 0$، از اینرو باید $x_{kj}-\sim_{kj}\le 0, x_{kj}+\ _{kj}\ge 0$ باشد.

اکنون با توجه به حالاتی که در بالا تعریف کردیم و با استفاده (٤-١) برای بدست آوردن گستره ها باید سیستم زیر را حل کنیم.

$$\sum_{\tilde a_{ik}>0,x_{kj}>0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde a_{ik}<0,x_{kj}>0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{0\in\tilde a_{ik},x_{kj}>0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde a_{ik}>0,x_{kj}<0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde a_{ik}<0,x_{kj}<0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{0\in\tilde a_{ik},x_{kj}=0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde a_{ik}>0,x_{kj}=0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde a_{ik}<0,x_{kj}=0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{0\in\tilde a_{ik},x_{kj}=0}\tilde a_{ik}\tilde x_{kj}+\tilde b_{ij}=$$

$$\sum_{\tilde c_{ik}>0,x_{kj}>0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde c_{ik}<0,x_{kj}>0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{0\in\tilde c_{ik},x_{kj}>0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde c_{ik}>0,x_{kj}<0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde c_{ik}<0,x_{kj}<0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{0\in\tilde c_{ik},x_{kj}=0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde c_{ik}>0,x_{kj}=0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{\tilde c_{ik}<0,x_{kj}=0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\sum_{0\in\tilde c_{ik},x_{kj}=0}\tilde c_{ik}\tilde x_{kj}+\tilde d_{ij}$$

(۳-٤)

حال با استفاده از جمع و ضرب اعداد فازی LR و برابرقراردادن طرفین (٤-۳) اگر برای هر $k, j = 1,2,...,n$
با حل سیستم (٤-۱) داشته باشیم $x_{kj} > 0$ داریم:

$$\sum_{\tilde a_{ik}>0}(a_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{a_{ik}})+\sum_{\tilde a_{ik}<0or0\in\tilde a_{ik}}(\sim_{aik}x_{kj}-a_{ik}\quad_{kj})+\sim_{b_{ij}}=\sum_{\tilde c_{ik}>0}(c_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{c_{ik}})+\sum_{\tilde c_{ik}<0or0\in\tilde c_{ik}}(\sim_{cik}x_{kj}-c_{ik}\quad_{kj})+\sim_{d_{ij}}$$

$$\sum_{\tilde a_{ik}>0}(a_{ik}\quad_{kj}+x_{kj}\quad_{a_{ik}})+\sum_{\tilde a_{ik}<0or0\in\tilde a_{ik}}(\quad_{aik}x_{kj}-a_{ik}\sim_{kj})+\quad_{b_{ij}}=\sum_{\tilde c_{ik}>0}(c_{ik}\quad_{kj}+x_{kj}\quad_{c_{ik}})+\sum_{\tilde c_{ik}<0or0\in\tilde c_{ik}}(\quad_{cik}x_{kj}-c_{ik}\sim_{kj})+\quad_{d_{ij}}$$

با بکارگیری شبه نرم، برای یافتن گستره ها مسئله ی بهینه سازی زیر را حل می کنیم:

$$Min\left\{\left\|\sum_{\tilde a_{ik}>0}(a_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{a_{ik}})+\sum_{\tilde a_{ik}<0or0\in\tilde a_{ik}}(\sim_{aik}x_{kj}-a_{ik}\quad_{kj})+\sim_{b_{ij}}-\sum_{\tilde c_{ik}>0}(c_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{c_{ik}})-\sum_{\tilde c_{ik}<0or0\in\tilde c_{ik}}(\sim_{cik}x_{kj}-c_{ik}\quad_{kj})-\sim_{d_{ij}}\right\|+\right.$$
$$\left.\left\|\sum_{\tilde a_{ik}>0}(a_{ik}\quad_{kj}+x_{kj}\quad_{a_{ik}})+\sum_{\tilde a_{ik}<0or0\in\tilde a_{ik}}(\quad_{aik}x_{kj}-a_{ik}\sim_{kj})+\quad_{b_{ij}}-\sum_{\tilde c_{ik}>0}(c_{ik}\quad_{kj}+x_{kj}\quad_{c_{ik}})-\sum_{\tilde c_{ik}<0or0\in\tilde c_{ik}}(\quad_{cik}x_{kj}-c_{ik}\sim_{kj})-\quad_{d_{ij}}\right\|\right\}$$

$$s.t.\qquad 0\le\sim_{kj}\le x_{kj}\;,\quad{}_{kj}\ge 0$$

(٤-٤)

و با استفاده از تعریف شبه نرم مسئله ی بهینه سازی (٤-٤) به صورت زیر در می آید:

$$Min\left\{\max_{i,j}\left|\sum_{\tilde a_{ik}>0}(a_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{a_{ik}})+\sum_{\tilde a_{ik}<0or0\in\tilde a_{ik}}(\sim_{aik}x_{kj}-a_{ik}\quad_{kj})+\sim_{b_{ij}}-\sum_{\tilde c_{ik}>0}(c_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{c_{ik}})-\sum_{\tilde c_{ik}<0or0\in\tilde c_{ik}}(\sim_{cik}x_{kj}-c_{ik}\quad_{kj})-\sim_{d_{ij}}\right|+\right.$$
$$\left.\max_{i,j}\left|\sum_{\tilde a_{ik}>0}(a_{ik}\quad_{kj}+x_{kj}\quad_{a_{ik}})+\sum_{\tilde a_{ik}<0or0\in\tilde a_{ik}}(\quad_{aik}x_{kj}-a_{ik}\sim_{kj})+\quad_{b_{ij}}-\sum_{\tilde c_{ik}>0}(c_{ik}\quad_{kj}+x_{kj}\quad_{c_{ik}})-\sum_{\tilde c_{ik}<0or0\in\tilde c_{ik}}(\quad_{cik}x_{kj}-c_{ik}\sim_{kj})-\quad_{d_{ij}}\right|\right\}$$

$$s.t.\qquad 0\le\sim_{kj}\le x_{kj}\;,\quad{}_{kj}\ge 0$$

(٥-٤)

اگر در مسئله ی بهینه سازی (٤ـ٥) قراردهیم:

$$z_1 = \max_{i,j}\left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\sim_{kj} + x_{kj}\sim_{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}}(\sim_{a\,ik}x_{kj} - a_{ik}\ \ _{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\sim_{kj} + x_{kj}\sim_{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}}(\sim_{c\,ik}x_{kj} - c_{ik}\ \ _{kj}) - \sim_{d_{ij}}\right|,$$

$$z_2 = \max_{i,j}\left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\ \ _{kj} + x_{kj}\ \ _{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}}(\ \ _{a\,ik}x_{kj} - a_{ik}\sim_{kj}) + \ \ _{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\ \ _{kj} + x_{kj}\ \ _{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}}(\ \ _{c\,ik}x_{kj} - c_{ik}\sim_{kj}) - \ \ _{d_{ij}}\right|$$

داریم:

$$Min \quad z_1 + z_2$$

$$s.t. \quad -z_1 \le \left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\sim_{kj} + x_{kj}\sim_{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}}(\sim_{a\,ik}x_{kj} - a_{ik}\ \ _{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\sim_{kj} + x_{kj}\sim_{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}}(\sim_{c\,ik}x_{kj} - c_{ik}\ \ _{kj}) - \sim_{d_{ij}}\right| \le z_1$$

$$-z_2 \le \left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\ \ _{kj} + x_{kj}\ \ _{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}}(\ \ _{a\,ik}x_{kj} - a_{ik}\sim_{kj}) + \ \ _{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\ \ _{kj} + x_{kj}\ \ _{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}}(\ \ _{c\,ik}x_{kj} - c_{ik}\sim_{kj}) - \ \ _{d_{ij}}\right| \le z_2$$

$$0 \le \sim_{kj} \le x_{kj}\ , \quad \ \ _{kj} \ge 0$$

(٤ـ٦)

بنابراین گستره های جواب فازی مثبت با حل مسئله ی بهینه سازی (٤ـ٦) بدست می آیند.

حال اگر برای هر $k, j = 1,2,...,n$ با حل سیستم (٤ـ١) داشته باشیم $x_{kj} < 0$، جواب فازی منفی را بدست می آوریم. مشابه روش قبل برای به دست آوردن گستره های جوابهای فازی منفی مسئله ی بهینه سازی زیر را حل می کنیم:

$$Min \quad z_1 + z_2$$

$$s.t. \quad -z_1 \le \left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}}(a_{ik}\sim_{kj} - x_{kj}\ \ _{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0}(-a_{ik}\ \ _{kj} - \ \ _{a_{ik}}x_{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}}(c_{ik}\sim_{kj} - x_{kj}\ \ _{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0}(-c_{ik}\ \ _{kj} - \ \ _{c\,ik}x_{kj}) - \sim_{d_{ij}}\right| \le z_1$$

$$-z_2 \le \left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\ \ _{kj} - x_{kj}\sim_{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}}(-\sim_{a\,ik}x_{kj} - a_{ik}\sim_{kj}) + \ \ _{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\ \ _{kj} - x_{kj}\sim_{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}}(-\sim_{c\,ik}x_{kj} - c_{ik}\sim_{kj}) - \ \ _{d_{ij}}\right| \le z_2$$

$$\sim_{kj} \ge 0\ ,\ 0 \le \ \ _{kj} \le -x_{kj}$$

(٤ـ٧)

که در آن

$$z_1 = \max_{i,j}\left\{\left| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}} (a_{ik}\sim_{kj} - x_{kj}\ {}_{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0} (-a_{ik}\ {}_{kj} - {}_{a_{ik}}x_{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}} (c_{ik}\sim_{kj} - x_{kj}\ {}_{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0} (-c_{ik}\ {}_{kj} - {}_{c_{ik}}x_{kj}) - \sim_{d_{ij}} \right|\right\},$$

$$z_2 = \max_{i,j}\left\{\left| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0} (a_{ik}\ {}_{kj} - x_{kj}\sim_{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}} (-\sim_{a_{ik}}x_{kj} - a_{ik}\sim_{kj}) + {}_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0} (c_{ik}\ {}_{kj} - x_{kj}\sim_{c_{ik}}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}} (-\sim_{c_{ik}}x_{kj} - c_{ik}\sim_{kj}) - {}_{d_{ij}} \right|\right\}.$$

اگر برای هر $k, j = 1,2,...,n$ با حل سیستم (٤-١) داشته باشیم $x_{kj} = 0$، جواب صفرفازی را بدست می آوریم که برای بدست آوردن گستره های جواب صفرفازی مسئله ی بهینه سازی زیر را حل می کنیم:

$$\begin{aligned} & Min \quad z_1 + z_2 \\ s.t. \quad & -z_1 \le \left| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}} (a_{ik}\sim_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0} (-a_{ik}\ {}_{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0 or\ 0\in\tilde{c}_{ik}} (c_{ik}\sim_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0} (-c_{ik}\ {}_{kj}) - \sim_{d_{ij}} \right| \le z_1 \\ & -z_2 \le \left| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0} (a_{ik}\ {}_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0\ or 0\in\tilde{a}_{ik}} (-a_{ik}\sim_{kj}) + {}_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0} (c_{ik}\ {}_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0\ or 0\in\tilde{c}_{ik}} (-c_{ik}\sim_{kj}) - {}_{d_{ij}} \right| \le z_2 \\ & \sim_{kj} \ge 0, \quad {}_{kj} \ge 0 \end{aligned}$$

(٤-٨)

که در آن

$$z_1 = \max_{i,j}\left\{\left| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}} (a_{ik}\sim_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0} (-a_{ik}\ {}_{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0 or\ 0\in\tilde{c}_{ik}} (c_{ik}\sim_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0} (-c_{ik}\ {}_{kj}) - \sim_{d_{ij}} \right|\right\},$$

$$z_2 = \max_{i,j}\left\{\left| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0} (a_{ik}\ {}_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0\ or 0\in\tilde{a}_{ik}} (-a_{ik}\sim_{kj}) + {}_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0} (c_{ik}\ {}_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0\ or 0\in\tilde{c}_{ik}} (-c_{ik}\sim_{kj}) - {}_{d_{ij}} \right|\right\}.$$

در حالت کلی اگر با حل سیستم (٤-١) بعضی از x_{kj} ها مثبت، بعضی از x_{kj} ها منفی و بعضی از x_{kj} ها صفر باشند، برای بدست آوردن گستره های جواب فازی مسئله ی بهینه سازی زیر را حل می کنیم:

$$Min \quad z_1 + z_2$$

$$s.t. \quad -z_1 \le \Big| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}>0} (a_{ik} \sim_{kj} + x_{kj} \sim_{a_{ik}}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}>0} (\sim_{a_{ik}} x_{kj} - a_{ik} \quad _{kj}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}<0} (a_{ik} \sim_{kj} - x_{kj} \quad _{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0, x_{kj}<0} (-a_{ik} \quad _{kj} - \quad _{a_{ik}} x_{kj}) +$$

$$\sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}) x_{kj}=0} (a_{ik} \sim_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0, x_{kj}=0} (-a_{ik} \quad _{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}>0} (c_{ik} \sim_{kj} + x_{kj} \sim_{c_{ik}}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}>0} (\sim_{c_{ik}} x_{kj} - c_{ik} \quad _{kj}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}<0} (c_{ik} \sim_{kj} - x_{kj} \quad _{c_{ik}}) -$$

$$\sum_{\tilde{c}_{ik}<0, x_{kj}<0} (-c_{ik} \quad _{kj} - \quad _{c_{ik}} x_{kj}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}) x_{kj}=0} (c_{ik} \sim_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0, x_{kj}=0} (-c_{ik} \quad _{kj}) - \sim_{d_{ij}} \Big| \le z_1$$

$$-z_2 \le \Big| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}>0} (a_{ik} \quad _{kj} + x_{kj} \quad _{a_{ik}}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}>0} (\quad _{a\,ik} x_{kj} - a_{ik} \sim_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}<0} (a_{ik} \quad _{kj} - x_{kj} \sim_{a_{ik}}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}<0} (-\sim_{a\,ik} x_{kj} - a_{ik} \sim_{kj}) +$$

$$\sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}=0} (a_{ik} \quad _{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0\, or\, 0\in\tilde{a}_{ik}} (-a_{ik} \sim_{kj}) + \quad _{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}>0} (c_{ik} \quad _{kj} + x_{kj} \quad _{c_{ik}}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}>0} (\quad _{c\,ik} x_{kj} - c_{ik} \sim_{kj}) -$$

$$\sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}<0} (c_{ik} \quad _{kj} - x_{kj} \sim_{c_{ik}}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}<0} (-\sim_{c\,ik} x_{kj} - c_{ik} \sim_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}=0} (c_{ik} \quad _{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0\, or\, 0\in\tilde{c}_{ik}} (-c_{ik} \sim_{kj}) - \quad _{d_{ij}} \Big| \le z_2$$

$$0 \le \sim_{kj} \le x_{kj} \;, \quad _{kj} \ge 0 \qquad if \;\; x_{kj} > 0$$
$$\sim_{kj} \ge 0 \;, 0 \le \quad _{kj} \le -x_{kj} \qquad if \;\; x_{kj} < 0$$
$$\sim_{kj} \ge 0 \;, \quad _{kj} \ge 0 \qquad if\, x_{kj} = 0$$

(۴–۹)

که در آن

$$z_1 = \max_{i,j} \Big| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}>0} (a_{ik} \sim_{kj} + x_{kj} \sim_{a_{ik}}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}>0} (\sim_{a_{ik}} x_{kj} - a_{ik} \quad _{kj}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}<0} (a_{ik} \sim_{kj} - x_{kj} \quad _{a_{ik}}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0, x_{kj}<0} (-a_{ik} \quad _{kj} - \quad _{a_{ik}} x_{kj}) +$$

$$\sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}) x_{kj}=0} (a_{ik} \sim_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0, x_{kj}=0} (-a_{ik} \quad _{kj}) + \sim_{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}>0} (c_{ik} \sim_{kj} + x_{kj} \sim_{c_{ik}}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}>0} (\sim_{c_{ik}} x_{kj} - c_{ik} \quad _{kj}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}<0} (c_{ik} \sim_{kj} - x_{kj} \quad _{c_{ik}}) -$$

$$\sum_{\tilde{c}_{ik}<0, x_{kj}<0} (-c_{ik} \quad _{kj} - \quad _{c_{ik}} x_{kj}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}) x_{kj}=0} (c_{ik} \sim_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0, x_{kj}=0} (-c_{ik} \quad _{kj}) - \sim_{d_{ij}} \Big|$$

$$z_2 = \max_{i,j} \Big| \sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}>0} (a_{ik} \quad _{kj} + x_{kj} \quad _{a_{ik}}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}>0} (\quad _{a\,ik} x_{kj} - a_{ik} \sim_{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}<0} (a_{ik} \quad _{kj} - x_{kj} \sim_{a_{ik}}) + \sum_{(\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}), x_{kj}<0} (-\sim_{a\,ik} x_{kj} - a_{ik} \sim_{kj}) +$$

$$\sum_{\tilde{a}_{ik}>0, x_{kj}=0} (a_{ik} \quad _{kj}) + \sum_{\tilde{a}_{ik}<0\, or\, 0\in\tilde{a}_{ik}} (-a_{ik} \sim_{kj}) + \quad _{b_{ij}} - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}>0} (c_{ik} \quad _{kj} + x_{kj} \quad _{c_{ik}}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}>0} (\quad _{c\,ik} x_{kj} - c_{ik} \sim_{kj}) -$$

$$\sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}<0} (c_{ik} \quad _{kj} - x_{kj} \sim_{c_{ik}}) - \sum_{(\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}), x_{kj}<0} (-\sim_{c\,ik} x_{kj} - c_{ik} \sim_{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}>0, x_{kj}=0} (c_{ik} \quad _{kj}) - \sum_{\tilde{c}_{ik}<0\, or\, 0\in\tilde{c}_{ik}} (-c_{ik} \sim_{kj}) - \quad _{d_{ij}} \Big|$$

قضیه ۴-۱: اگرمدل (٤-٩) بیش از دو جواب بهینه داشته باشد که جواب فازی برای سیستم $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ هستند آنگاه سیستم فوق تعداد نامتناهی جواب فازی دارد.

اثبات. مشابه با اثبات قضیه ی ۳-۱.

قضیه ۴-۲: فرض کنید $\tilde{X}$ یک جواب جبری سیستم $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ باشد. آنگاه آن مقدار بهینه ی مسئله ی مینیمم سازی با صفر می باشد.

اثبات. فرض کنید $\tilde{X}=(x_{kj},\sim_{kj},\ _{kj})$ یک جواب جبری برای سیستم $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ باشد، در اینصورت داریم:

$$\sum_{\tilde{a}_{ik}>0,x_{kj}>0}(a_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{a_{ik}})+\sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}),x_{kj}>0}(\sim_{a_{ik}}x_{kj}-a_{ik}\ _{kj})+\sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik}),x_{kj}<0}(a_{ik}\sim_{kj}-x_{kj}\ _{a_{ik}})+\sum_{\tilde{a}_{ik}<0,x_{kj}<0}(-a_{ik}\ _{kj}-\ _{a_{ik}}x_{kj})+\sum_{(\tilde{a}_{ik}>0 or 0\in\tilde{a}_{ik})x_{kj}=0}(a_{ik}\sim_{kj})+$$

$$\sum_{\tilde{a}_{ik}<0,x_{kj}=0}(-a_{ik}\ _{kj})+\sim_{b_{ij}}=\sum_{\tilde{c}_{ik}>0,x_{kj}>0}(c_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{c_{ik}})+\sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}),x_{kj}>0}(\sim_{c_{ik}}x_{kj}-c_{ik}\ _{kj})+\sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik}),x_{kj}<0}(c_{ik}\sim_{kj}-x_{kj}\ _{c_{ik}})+\sum_{\tilde{c}_{ik}<0,x_{kj}<0}(-c_{ik}\ _{kj}-\ _{c_{ik}}x_{kj})+$$

$$\sum_{(\tilde{c}_{ik}>0 or 0\in\tilde{c}_{ik})x_{kj}=0}(c_{ik}\sim_{kj})+\sum_{\tilde{c}_{ik}<0,x_{kj}=0}(-c_{ik}\ _{kj})+\sim_{d_{ij}}\quad ,$$

$$\sum_{\tilde{a}_{ik}>0,x_{kj}>0}(a_{ik}\ _{kj}+x_{kj}\ _{a_{ik}})+\sum_{(\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}),x_{kj}>0}(\ _{a\,ik}x_{kj}-a_{ik}\sim_{kj})+\sum_{\tilde{a}_{ik}>0,x_{kj}<0}(a_{ik}\ _{kj}-x_{kj}\sim_{a_{ik}})+\sum_{(\tilde{a}_{ik}<0 or 0\in\tilde{a}_{ik}),x_{kj}<0}(-\sim_{a\,ik}x_{kj}-a_{ik}\sim_{kj})+\sum_{\tilde{a}_{ik}>0,x_{kj}=0}(a_{ik}\ _{kj})+$$

$$\sum_{\tilde{a}_{ik}<0\ or\ 0\in\tilde{a}_{ik}}(-a_{ik}\sim_{kj})+\ _{b_{ij}}=\sum_{\tilde{c}_{ik}>0,x_{kj}>0}(c_{ik}\ _{kj}+x_{kj}\ _{c_{ik}})+\sum_{(\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}),x_{kj}>0}(\ _{c\,ik}x_{kj}-c_{ik}\sim_{kj})+\sum_{\tilde{c}_{ik}>0,x_{kj}<0}(c_{ik}\ _{kj}-x_{kj}\sim_{c_{ik}})+\sum_{(\tilde{c}_{ik}<0 or 0\in\tilde{c}_{ik}),x_{kj}<0}(-\sim_{c\,ik}x_{kj}-c_{ik}\sim_{kj})+$$

$$\sum_{\tilde{c}_{ik}>0,x_{kj}=0}(c_{ik}\ _{kj})+\sum_{\tilde{c}_{ik}<0\ or\ 0\in\tilde{c}_{ik}}(-c_{ik}\sim_{kj})+\ _{d_{ij}}$$

بنابراین با بکارگیری مدل (٤-٩) بدست می آوریم $z_1=z_2=0$ پس $z^*=z_1+z_2=0$ لذاحکم برقرار است.

قضیه ۴-۳: اگر $(\tilde{A}-_H\tilde{C}),(\tilde{D}-_H\tilde{B})$ وجود داشته باشند و $(\tilde{a}_{ij}-\tilde{c}_{ij})>0$ برای $\tilde{a}_{ij}>0$ و $\tilde{c}_{ij}>0$، $(\tilde{a}_{ij}-\tilde{c}_{ij})<0$ برای $\tilde{a}_{ij}<0$ و $\tilde{c}_{ij}<0$ و $0\in(\tilde{a}_{ij}-\tilde{c}_{ij})$ برای $0\in\tilde{a}_{ij}$ و $0\in\tilde{c}_{ij}$، آنگاه سیستم های فازی $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ و $(\tilde{A}-_H\tilde{C})\tilde{X}=(\tilde{D}-_H\tilde{B})$ جوابهای فازی یکسان دارند.

اثبات. برای سیستم ۱-برش داریم:

$$AX+B=CX+D\rightarrow(A-C)X=(D-B)$$

چون $(A-C)$ نامنفرد است، برای ۱-برش حکم برقراراست. حال چون $(\tilde{a}_{ij}-\tilde{c}_{ij})>0$ برای $\tilde{a}_{ij}>0$ و $\tilde{c}_{ij}>0$ ،$(\tilde{a}_{ij}-\tilde{c}_{ij})<0$ برای $\tilde{a}_{ij}<0$ و $\tilde{c}_{ij}<0$ و $0\in(\tilde{a}_{ij}-\tilde{c}_{ij})$ برای $0\in\tilde{a}_{ij}$ و $0\in\tilde{c}_{ij}$ پس مسئله ی مینیمم سازی برای سیستم های $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ و $(\tilde{A}-_H\tilde{C})\tilde{X}=(\tilde{D}-_H\tilde{B})$ قیدهای یکسانی دارد، لذا گستره های جواب فازی این دو سیستم نیز برابرند. پس حکم برقراراست.

قضیه ۴-۴: اگر $(\tilde{A}-_H\tilde{C}),(\tilde{B}-_H\tilde{D})$ وجود داشته باشند و $\tilde{A},\tilde{C},(\tilde{A}-_H\tilde{C})>0$ یا $\tilde{A},\tilde{C},(\tilde{A}-_H\tilde{C})<0$ یا $a_{ik}=c_{ik}=0$ آنگاه سیستم فازی (٤-١) جواب حقیقی (قطعی) دارد.

اثبات. ابتدا فرض می کنیم $(\tilde{A}-_H\tilde{C}),(\tilde{B}-_H\tilde{D})$ وجود داشته باشند و $\tilde{A},\tilde{C},(\tilde{A}-_H\tilde{C})>0$ و $x_{kj}>0$ بنابراین با بکارگیری مدل (٤-٧) داریم:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad z_1+z_2\\
&s.t.\quad -z_1\le\left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{a_{ik}})+\sim_{b_{ij}}-\sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{c_{ik}})-\sim_{d_{ij}}\right|\le z_1\\
&\qquad -z_2\le\left|\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\ {}_{kj}+x_{kj}\ {}_{a_{ik}})+\ {}_{b_{ij}}-\sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\ {}_{kj}+x_{kj}\ {}_{c_{ik}})-\ {}_{d_{ij}}\right|\le z_2\\
&\qquad \sim_{kj}\ge 0,\ 0\le\ {}_{kj}\le -x_{kj}
\end{aligned}
$$

(٤-١٠)

از طرفی

$$
\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{a_{ik}})+\sim_{b_{ij}}-\sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\sim_{kj}+x_{kj}\sim_{c_{ik}})-\sim_{d_{ij}}=\sum_{\tilde{a}_{ik}>0,\tilde{c}_{ik}>0}((a_{ik}-c_{ik})\sim_{kj}+(\sim_{a_{ik}}-\sim_{c_{ik}})x_{kj})+(\sim_{b_{ij}}-\sim_{d_{ij}})
$$

$$
\sum_{\tilde{a}_{ik}>0}(a_{ik}\ {}_{kj}+x_{kj}\ {}_{a_{ik}})+\ {}_{b_{ij}}-\sum_{\tilde{c}_{ik}>0}(c_{ik}\ {}_{kj}+x_{kj}\ {}_{c_{ik}})-\ {}_{d_{ij}}=\sum_{\tilde{a}_{ik}>0,\tilde{c}_{ik}>0}((a_{ik}-c_{ik})\ {}_{kj}+(\ {}_{a_{ik}}-\ {}_{c_{ik}})x_{kj})+(\ {}_{b_{ij}}-\ {}_{d_{ij}})
$$

و $(\tilde{B}-_H\tilde{D})$ موجود و مثبت است، بنابراین $(\sim_{b_{ij}}-\sim_{d_{ij}}),(\ {}_{b_{ij}}-\ {}_{d_{ij}})>0$ و $(\tilde{A}-_H\tilde{C})$ وجود دارد یعنی $(a_{ik}-c_{ik}),(\sim_{a_{ik}}-\sim_{c_{ik}}),(\ {}_{a_{ik}}-\ {}_{c_{ik}})>0$ ، لذا بااستفاده از مدل (٤-١٠) بدست می آوریم:

$$
\sim_{kj}=\ {}_{kj}=0
$$

یعنی سیستم جواب حقیقی (قطعی) دارد.

اثبات برای بقیه ی حالات مشابه است و حذف شده است.

۴-۳ مثال های عددی

مثال ۴-۱: دستگاه دوآل کاملا فازی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases}(0.5,0.2,0.3)\tilde{x}_1+(0.4,0.2,0.1)\tilde{x}_2+(0.3,0.2,0.2)=(0.4,0.1,0.1)\tilde{x}_1+(0.3,0.2,0.1)\tilde{x}_2+(1,0.4,0.4)\\ (0.3,0.2,0.2)\tilde{x}_1+(0.7,0.1,0.2)\tilde{x}_2+(0.5,0.2,0.1)=(0.2,0.1,0.1)\tilde{x}_1+(0.3,0.1,0.1)\tilde{x}_2+(1.5,0.3,0.6)\end{cases}$$

با حل دستگاه ۱- برش بدست می آوریم:

$$x_1=6,\ x_2=1$$

چون $x_1, x_2>0$ ما از مدل (٤-٦) استفاده می کنیم، داریم:

$$\begin{aligned}&Min\quad z_1+z_2\\ &-z_1\le 0.1\sim_1+0.1\sim_2+0.4\le z_1\\ &-z_1\le 0.1\sim_1+0.4\sim_2+0.5\le z_1\\ &-z_2\le 0.1\ \ _1+0.1\ \ _2+1\le z_2\\ &-z_2\le 0.1\ \ _1+0.4\ \ _2+0.2\le z_2\\ &0\le\sim_1\le 6\\ &0\le\sim_2\le 1\\ &\ _1,\ \ _2, z_1, z_2\ge 0\end{aligned}$$

با حل مسئله ی بهینه سازی بالا بدست می آوریم:

$$\sim_1=\sim_2=\ \ _1=\ \ _2=0,\quad z_1=0.5,\ z_2=1$$

بنابراین دستگاه دارای جواب حقیقی (قطعی) به صورت زیر است:

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}(6,0,0)\\(1,0,0)\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر $\tilde{a}_{ij}, \tilde{c}_{ij}, (\tilde{a}_{ij}-_H\tilde{c}_{ij})>0$، بنابراین از قضیه ٤-٣ نتیجه می گیریم که سیستم $(\tilde{A}-_H\tilde{C})\tilde{X}=(\tilde{D}-_H\tilde{B})$ یعنی:

$$\begin{cases}(0.1,0.1,0.2)\tilde{x}_1+(0.1,0,0)\tilde{x}_2=(0.7,0.2,0.2)\\(0.1,0.1,0.1)\tilde{x}_1+(0.4,0,0.1)\tilde{x}_2=(1,0.1,0.5)\end{cases}$$

جواب یکسان با دستگاه دوآل دارد، یعنی:

$$\tilde{X}=\begin{bmatrix}(6,0,0)\\(1,0,0)\end{bmatrix}$$

مثال ۴-۲: دستگاه دوآل ماتریسی کاملا فازی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{bmatrix}(-1,1,1) & (1,1,1)\\(1,1,0) & (2,0,0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12}\\\tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(3,1,0) & (2,1,1)\\(0,1,1) & (1,1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1,1,1) & (-1,0,0)\\(3,1,0) & (2,0,0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}_{11} & \tilde{x}_{12}\\\tilde{x}_{21} & \tilde{x}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(3,2,1) & (2,0,3)\\(0,2,0) & (1,1,1)\end{bmatrix}$$

جواب دستگاه ۱- برش $\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ ، بنابراین با بکارگیری مدل (٤-٨) داریم:

$$\begin{aligned}&Min \quad z_1+z_2\\&-z_1\le \ {}_{11}+\sim_{21}-\sim_{11}-\ {}_{21}-1\le z_1\\&-z_1\le \ {}_{12}+\sim_{22}-\sim_{12}-\ {}_{22}+1\le z_1\\&-z_1\le -2\sim_{11}-1\le z_1\\&-z_1\le -2\sim_{12}\le z_1\\&-z_2\le \sim_{11}+\ {}_{21}-\ {}_{11}-\sim_{21}\le z_2\\&-z_2\le \sim_{12}+\ {}_{22}-\ {}_{12}-\sim_{22}-2\le z_2\\&-z_2\le -2\ {}_{11}+1\le z_2\\&-z_1\le -2\ {}_{12}\le z_1\\&\sim_1,\sim_2,\ {}_1,\ {}_2,z_1,z_2\ge 0\end{aligned}$$

با حل مسئله ی بهینه سازی بالا بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix}(\sim_{11},\ {}_{11}) & (\sim_{12},\ {}_{12})\\(\sim_{21},\ {}_{21}) & (\sim_{22},\ {}_{22})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0,0.5) & (0,0)\\(0,0.5) & (0,0.2)\end{bmatrix},\quad z_1=1,z_2=0$$

بنابراین دستگاه دارای جواب فازی به صورت زیراست:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} (0,0,0.5) & (0,0,0) \\ (0,0,0.5) & (0,0,0.2) \end{bmatrix}$$

مشاهده می کنیم که $(\tilde{B} -_H \tilde{D}), (\tilde{D} -_H \tilde{B})$ وجود ندارند بنابراین شرایط قضیه های ٤-٣ و ٤-٤ برقرارنیست.

مثال ۴-۳: دستگاه دوآل کاملا فازی زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} (-5,1,3)\tilde{x}_1 + (-2,2,1)\tilde{x}_2 + (4,2,1) = (-3,1,1)\tilde{x}_1 + (-1,1,0)\tilde{x}_2 + (1,1,0) \\ \\ (-2,1,0)\tilde{x}_1 + (-3,1,1)\tilde{x}_2 + (3,1,2) = (-1,1,0)\tilde{x}_1 + (-2,0,1)\tilde{x}_2 + (1,0,0) \end{cases}$$

باحل دستگاه ۱- برش بدست می آوریم:

$$x_1 = x_2 = 1$$

چون $x_1, x_2 > 0$ ما از مدل (٤-٦) استفاده می کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} & Min \quad z_1 + z_2 \\ & -z_1 \le 2 \;\; _1 + \;\; _2 + 3 \le z_1 \\ & -z_1 \le \;\; _1 + \;\; _2 + 3 \le z_1 \\ & -z_2 \le 2\sim_1 + \sim_2 + 4 \le z_2 \\ & -z_2 \le \sim_1 + \sim_2 + 3 \le z_2 \\ & \quad 0 \le \sim_1 \le 1 \\ & \quad 0 \le \sim_2 \le 1 \\ & \quad _1, \;\; _2, z_1, z_2 \ge 0 \end{aligned}$$

با حل مسئله ی مینیمم سازی بالا بدست می آوریم:

$$\sim_1 = \sim_2 = \;\; _1 = \;\; _2 = 0, \quad z_1 = 3, z_2 = 4$$

بنابراین دستگاه دارای جواب حقیقی (قطعی) به صورت زیراست:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} (1,0,0) \\ (1,0,0) \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر $(\tilde{B} -_H \tilde{D})$ وجود دارد و $0 < ((\tilde{A},\tilde{C},(\tilde{A}-\tilde{C}))$، بنابراین مشاهده می کنیم قضیه ی ٤-٤ برقرار است.

۴-۴ جمع بندی فصل

در این فصل با بکارگیری ابزارهایی نظیر جمع و ضرب ماتریسهای فازی، شبه نرم و مسئله ی بهینه سازی روشی کاربردی برای حل سیستم ماتریسی دوآل فازی به فرم $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B} = \tilde{C}\tilde{X} + \tilde{D}$ پیشنهاد کردیم. سپس شرایطی را بیان کردیم که تحت آن سیستم های فازی $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B} = \tilde{C}\tilde{X} + \tilde{D}$ و $(\tilde{A} -_H \tilde{C})\tilde{X} = (\tilde{D} -_H \tilde{B})$ دارای جوابهای فازی یکسان می باشند. از مزایای روش پیشنهادی این است که برای سیستم فازی همیشه جواب فازی پیدا می کند. البته این روش نیز مانند روشهای دیگر در ریاضیات دارای معایبی می باشد.

فصل پنجم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۵-۱ مقدمه

این فصل در رابطه با نتایج کلی و لزوم ارائه ی راه کارهای جدید انجام شده در این رساله و همچنین ارائه ی پیشنهادات قابل بررسی در آینده است.

۵-۲ نتیجه گیری

از جمله مسائل مهم ریاضیات فازی دستگاه معادلات خطی فازی می باشد. لذا مطالعه ی این دستگاه ها و حل آنها همواره مورد توجه محققین بوده است، که منجر به ارائه ی روشهایی برای این دستگاه ها شده است. در این رساله با بکارگیری ابزارهایی نظیر نرم ماتریسی و مسئله ی بهینه سازی روشی کارآمد برای حل دستگاه معادلات خطی دوآل کاملا فازی به فرم (۱) $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ که در آن $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{X}$ ماتریس های فازی LR می باشند، پیشنهاد کردیم. در روش پیشنهادی ارائه شده در رساله ابتدا با حل ۱-برش سیستم (۱)، هسته ی جواب فازی LR بدست آورده شده است. برای یافتن گستره های جواب فازی LR با محاسبه ی ماتریس های سمت راست و سمت چپ تساوی سیستم (۱)، با بکارگیری نرم ماتریسی تفاضل گستره های راست و چپ را مینیمم شده است. سپس تعدادی قضایا در مورد جواب فازی LR بدست آمده از مسئله ی مینیموم سازی و شرایطی که تحت آن سیستم های فازی $\tilde{A}\tilde{X}+\tilde{B}=\tilde{C}\tilde{X}+\tilde{D}$ و $(\tilde{A}-_H\tilde{C})\tilde{X}=(\tilde{D}-_H\tilde{B})$ جواب ها ی فازی یکسانی دارند، مطرح شده است.

از مزایای این روش یافتن آن است که می توان آن را برای هر نوع دستگاه معادلات خطی فازی بکاربرد بطوریکه هسته ی جواب فازی LR با سیستم حقیقی یکسان است. از دیگر مزایای این روش آن است که می توان به سادگی جواب جبری را برای سیستم های فازی که دارای جواب جبری هستند، بدست آورد.

۳-۵ پیشنهادات

همان طور که بیان شد روش ارائه شده در رساله قادر به محاسبه ی جواب فازی LR برای سیستم های ماتریسی دوآل کاملا فازی LR می باشد. حال پیشنهادات ما برای آینده بصورت زیراست:

۱) جواب های فازی بدست آمده برای سیستم های فازی دوآل کاملا فازی با روش پیشنهادی و جوابهای فازی بدست آمده توسط موزیولی در [7] مقایسه کنیم.

۲) ارائه ی یک روش بهتر یا توسعه ی روش پیشنهادی، برای هر نوع سیستم معادلات خطی فازی.

واژه نامه

Fuzzy dual matrix system	دستگاه ماتریسی دوآل فازی
Hukuhara difference	تفاضل هاکوهارا
Quasi norm	شبه نرم
Element	عنصر
Optimization problem	مسئله ی بهینه سازی
Feasible solution	جواب شدنی
Optimal value	مقداربهینه
Linearity	خطی سازی
Spread	گستره
1-cut	۱-برش
Convex combination	ترکیب محدب
Solution set	مجموعه جواب
Infinite	نامتناهی
Inverse	معکوس
Nonsingular.	نامنفرد
Tolerable solution set	مجموعه جواب تحمل پذیر
Controllable solution set	مجموعه جواب کنترل پذیر
United solution set	متحده مجموعه جواب

Symmetrical fuzzy structured element	عنصرساختاریافته فازی متقارن
Inconsistent	ناپایدار
Minimal solution	جواب مینیمال
Approximate solution	جواب تقریبی
LR fuzzy number	عددفازی LR
Nonnegative	نامنفی
Fully fuzzy linear system.	دستگاه خطی کاملا فازی

مراجع فارسی

[1] الهویرنلو توفیق و طاهری نرگس، (۱۳۸۷)، مجموعـه فـازی و خـواص آن ، انتشـارات دانشـگاه آزاد اسلامی، تهران، واحد علوم و تحقیقات.

[2] شوندی حسن، (۱۳۸۵)، مجموعه های فازی و کـاربرد آن در مهندسـی صـنایع و مـدیریت ، تهـران، گسترش علوم پایه.

مراجع انگلیسی

[3] M. Friedman, M. Ming, A. Kandel, Fuzzy Linear Systems, Fuzzy Sets Syst. 96 (1998) 201- 209.

[4] Ma. Ming, M. Friedman, A. Kandel, Duality in fuzzy linear systems, Fuzzy Sets and Systems 109 (2000) 55-58.

[5] S. Muzzilio, H. Reynaerts, Fuzzy linear system of the form A1x+b1 = A2x+b2, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 939-951.

[6] T. Allahviranloo, Numerical Methods for fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput 155 (2004) 493-502.

[7] T. Allahviranloo, Successive over relaxation iterative method for fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput 162 (2005) 189-196.

[8] T. Allahviranloo, The Adomian decomposition method for fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 163 (2005) 553563.

[9] T. Allahviranloo, E. Ahmady, N. Ahmady, Kh. Shams Alketaby, Block Jacobi two stage method with GaussSiedel ineer iterations for fuzzy system of linear equations, Appl. Math. Comput. 175 (2006) 12171228.

[10] T. Allahviranloo, M. Afshar Kermani, Solution of a fuzzy system of linear equation, Appl. Math. Comput. 175 (2006) 519531.

[11] S. Abbasbandy, R. Ezzati, A. Jafarian, LU decomposition method for solving fuzzy system of equations, Appl. Math. Comput 172 (2006) 633-643.

[12] S. Abbasbandy, A. Jafarian, Steepest decent method for system of fuzzy linear equations, Appl. Math. Comput 175 (2006) 823-833.

[13] T. Allahviranloo, S. Salahshour, Fuzzy symmetric solution of fuzzy linear systems, Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (16) (2011) 4545-4553.

[14] T. Allahviranloo, S. Salahshour, M. Khezerloo, Maximal- and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems, Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (16) (2011) 46524662.

[15] T. Allahviranloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, M. Khorasani Kiasari, M. Khezerloo, On the fuzzy solution of LR fuzzy linear systems, Applied Mathematical Modeling (2012).

[16] F. Abramovich, M. Wagenknecht, Y.I. Khurgin, Solution of LR-type fuzzy system of linear algebraic equations, s.l.: Busefal 35 (1988) 86-99.

[17] R. Goetschel, W. Voxman, Elementary calculus, Fuzzy Sets Syst. 18 (1986) 3143.

[18] H.J. Zimmermann, Fuzzy Set Theory and its Applications, third ed., Kluwer Academic, Norwell, 1996.

[19] D. Dubois, H. Prade, Systems of linear fuzzy constraints, Fuzzy Sets Syst. 3 (1980) 3748.

[20] M. Fiedler, J. Nedoma, J. Ramik, J. Rohn, K. Zimmerann, Linear optimization problems with inexact data, Springer, USA, 2006.

[21] L.A.Zadeh , From circuit theory to systems theory, Proc. Institution of Radio Enginees 1962.

[22] L.X. Wangand, J.M. Mendel, Fuzzy basis functions, universal approximaxion, and orthogonal least squares learning, IEEE Trans. On Neural Networks, 1992.

[23] T. Allahviranloo , M. Ghanbari, On the algebraic solution of fuzzy linear systems based on interval theory, Applied Mathematical Modelling (2012).

[24] M. Mosleh, Minimal solution of linear formed fuzzy matrix equations, Ispacs (2012).

[25] B. Bedea, L .Stefanini, Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, Fuzzy Sets and Systems (2014).

سایتها

[26] https://fa.wikipedia.org/wiki.#منطق_فازی/D9.85.D9.82.D8.AF.D9.85.D9.87

[27] http://www.civilica.com/Printable-NCUIMWR03_071-سیمای-منطق-فازی-و-کاربرد-آن-در-مدیریت-منابع-آب-و-خاک.html

[28] http://research.iaun.ac.ir/pd/kh-soleimani/pdfs/UploadFile_4127.pdf

[29] http://idochp2.irandoc.ac.ir/FulltextManager/fulltext15/th/146/146337.pdf

Solving fully fuzzy matrix and vector dual system of equations with optimization problem

Abstract

In this thesis, at first fuzzy linear equations system and its different forms are defined and some of solving methods for these systems are shortly explained. Then, by using the definition of real matrix multiplication in fuzzy matrix, quasi norm and minimization problem, we suggest an efficient method to solve LR fuzzy dual matrix system. Afterwards, through the presented method and defining the product of two LR fuzzy matrices; we propose a new method to solve the fully fuzzy dual matrix system; and, we finally complete the thesis by solving some examples.

Fatemeh Babakordi

Islamic Azad University

Science And Research Branch

Faculty of Science-Department of Applied Mathematic

Ph.D. Thesis

On Applied Mathematical

Subject:

Solving fully fuzzy matrix and vector dual system of equations with optimization problem

Supervisors:

Tofigh Allahviranloo. Ph.D

Saied Abbasbandy. Ph.D

Advisor:

Dr. Mohammad Adabitabar Firozja

By:

Fatemeh Babakordi

Winter 2015