

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش‌های عددی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی و کاربرد آن‌ها در معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما

دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور

دکتر داود رستمی

پژوهشگر

بابک آذرنوید

۱۳۹۴

نام خانوادگی دانشجو: آذرنوید

نام: بابک

عنوان: روش‌های عددی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی و کاربرد آن‌ها در معادلات دیفرانسیل

استاد راهنما: دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور: دکتر داود رستمی

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۴

تعداد صفحات: ۱۲۶

واژگان کلیدی: فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی، برآورد خطا، همگرایی، جواب‌های چندگانه، مسایل غیرخطی، مسایل منفرد، مسایل با شرایط مرزی غیرخطی، روش هم محلی بدون شبکه، تصویر متعامد، روش تیر اندازی، تکرار پیکارد، ماتریس عملیاتی مشتق، توابع کاردینال

چکیده

هدف ما بررسی برخی از روش‌های عددی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادلات دیفرانسیل است. در این زمینه آن دسته از روش‌های عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن‌ها خاصیت بازتولیدی هسته با توجه به فضای شامل آن، نقش اصلی را بازی می‌کند. در این رساله به کاربردهای روش‌های مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادلات دیفرانسیل خطی، غیرخطی، منفرد و مسایلی با چندگانگی جواب و بررسی خطای به کارگیری این روش‌ها می‌پردازیم. به منظور حل مسایل مقدار مرزی غیرخطی و منفرد روش‌های مناسبی با استفاده از ترکیب روش مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت، روش‌های تیراندازی و تکرار پیکارد ارائه شده است. برای حل مسایل وابسته به زمان و مسایل با بعد بالا روش هم محلی بدون شبکه با استفاده از هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت بررسی شده‌اند. در ضمن روش‌های پیشنهاد شده، همگرایی و خطای به کارگیری آن‌ها برای مسایل خطی و غیرخطی و خطای عملگر تصویر متعامد نیز ارائه شده است.

تقديم...

سپاس کنزاري...

بابک آذنوید
۱۳۹۴

مفهوم هسته بازتولیدی^۱ برای اولین بار در ابتدای قرن بیستم توسط زارمبا^۲ [۱] در طی بررسی مسایل مقدار مرزی برای توابع هارمونیک معرفی شد. پس از آن توسعه نظریه هسته بازتولیدی در سه مرحله عمده و به ترتیب توسط برگمن^۳ [۲]، مرسر^۴ [۳] و آرونشین^۵ [۴] انجام شد. در سال ۱۹۵۰ آرونشین کارهای قبلی در این زمینه را جمع آوری و همچنین تا حد زیادی برهان‌های ساده‌تری را برای قضایا ارایه کرد. در نظریه او خاصیت بازتولیدی هسته مهمترین نقش را دارد. هسته‌های بازتولیدی در بسیاری از علوم از جمله در علوم کامپیوتر، آمار و احتمال، پردازش سیگنال، فرایندهای تصادفی و سری‌های زمانی کاربردهای فراوانی دارند. در آنالیز عددی تحقیقات فراوانی در رابطه با کاربرد هسته‌های بازتولیدی در زمینه‌های درونیابی، تقریب داده‌های پراکنده، منظم سازی، حل معادلات دیفرانسیل، حل معادلات دیفرانسیل تصادفی و روشهای بدون شبکه ارایه شده‌اند. استفاده بهینه از داده‌های ارایه شده برای بازیابی اطلاعات یکی از مهمترین مزایای هسته‌های بازتولیدی است. هسته بازتولیدی همچنین در تولید فضاهای وابسته به داده و پایه‌های آن نقش عمده ای دارند. هسته بازتولیدی یک فضای هیلبرت^۶ در صورت وجود یکتا است، یعنی یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی به صورت یکتا توسط هسته خود مشخص می‌شود. تولید پیش شرط سازها، تغییر پایه‌های فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی، تقریب کاردینال‌های فضا، ترکیب با روشهای عددی حل معادلات دیفرانسیل از جمله تلاش‌های اخیر [۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱] به منظور بهبود روشهای مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی می‌باشد. با توجه به مطالب ذکر شده توسط آرونشین در [۴] توابع معین و مثبت و هسته‌های بازتولیدی نام‌های مختلف برای یک مفهوم هستند که با توجه به

^۱ Reproducing kernel

^۲ Zaremba

^۳ Bergman

^۴ Mercer

^۵ Aronszajn

^۶ Reproducing kernel Hilbert space (RKHS)

نحوه به‌کارگیری این مفهوم استفاده می‌شوند. هر تابع معین مثبت یک هسته بازتولیدی است [۴]. توابع پایه شعاعی مانند تابع پایه شعاعی گاوسی^۷ و تابع پایه شعاعی مترن^۸ از جمله توابع معین و مثبت هستند که در مسایل عددی کاربردهای فراوانی دارند. در بسیاری از مقالات ارایه شده در سال‌های اخیر روش ارایه شده توسط کوی^۹ [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶] بر اساس فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی، برای حل انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی به کار رفته است. روش پیشنهاد شده توسط کوی و سایر محققین تنها برای حل مسایل با جواب یکتا و با شرایط مرزی خطی دارای کاربرد می‌باشند. هدف ما در این رساله تعمیم این روش است به طوری که برای حل مسایل با شرایط مرزی غیر خطی و مسایلی با چندگانگی جواب قابل استفاده باشد. همچنین به مطالعه همگرایی و خطای روش‌های پیشنهاد شده برای حل مسایل خطی و غیر خطی می‌پردازیم. در ضمن بررسی خطای روش‌ها، برآورد خطایی نیز برای عملگر تصویر متعامد در فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی ارایه می‌دهیم. در سال‌های اخیر به منظور پرهیز از شبکه بندی دامنه مساله در مسایل با بعد بالا و دامنه پیچیده، روش‌های بدون شبکه ارایه شده و به دلیل مزایا و توانایی آنها در حل مسایل مختلف فیزیکی و مهندسی بسیار مورد توجه قرار گرفته شده‌اند. در این رساله یک روش هم محلی بدون شبکه مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت ارایه شده است. به این منظور ماتریس‌های عملیاتی مشتق با استفاده از توابع کاردینال فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی تولید شده‌اند. در ضمن معرفی این روش، یک الگوریتم مناسب و قابل استفاده بر روی فضاها با بعد بالا برای تولید توابع کاردینال^{۱۰} فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی ارایه شده است.

^۷Gaussian radial basis function^۸Matern radial basis function^۹Minggen Cui^{۱۰}Cardinal functions

فهرست مطالب

ذ فهرست شکل‌ها

ش فهرست جدول‌ها

۲ ۱ هسته‌های بازتولیدی

۳ ۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

۷ ۲.۱ هسته‌های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت و فضاهای محلی

۷ ۱.۲.۱ هسته‌های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت

۱۰ ۲.۲.۱ فضاهای محلی توابع معین مثبت اکید

۱۳ ۳.۱ فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_p^m[a, b]$

۲ بررسی خطای روش مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادلات

۱۷ دیفرانسیل خطی

۱۸ ۱.۲ مقدمه

۱۹ ۲.۲ تقریب جواب

۲۱ ۳.۲ برآورد خطا

۲۱ ۱.۳.۲ خطای قطع سری جواب دقیق

۲۴ ۲.۳.۲ خطای تقریب بر اساس مانده جواب تقریبی و بیشترین طول گام

۲۷ ۴.۲ نتایج عددی

۲۷ ۱.۴.۲ مساله مقدار مرزی مرتبه دوم دو نقطه‌ای

۲۷ ۲.۴.۲ مساله مقدار مرزی مرتبه پنجم دو نقطه‌ای

۳۴	۳	بررسی چندگانگی جواب در مسایل مقدار مرزی
۳۵	۱.۳	مقدمه
۳۷	۲.۳	تقریب جواب
۴۱	۳.۳	معادله غیرخطی براتو
۴۲	۴.۳	مدل غیرخطی واکنش-انتشار
۵۰	۵.۳	مساله مقدار مرزی غیرخطی سه نقطه‌ای
۵۴	۶.۳	نتیجه
۵۵	۴	حل مساله غیرخطی مرتبه چهار خمش تیر الاستیک با شرایط مرزی غیرخطی
۵۶	۱.۴	مقدمه
۵۸	۲.۴	روش حل مساله غیرخطی با شرایط مرزی غیرخطی
۶۵	۳.۴	مثال‌های عددی
۷۰	۴.۴	نتیجه
	۵	روش پیکارد-هسته بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل معادلات غیرخطی منفرد از نوع
۷۱		لین-امدن
۷۲	۱.۵	مقدمه
۷۳	۲.۵	تکرار پیکارد
۷۶	۳.۵	روش تقریب جواب و همگرایی
۷۹	۴.۵	مثال‌های عددی
۸۰	۱.۴.۵	معادله لین-امدن در حالت کلی
۸۴	۲.۴.۵	معادله لین-امدن از نوع دوم
۸۵	۵.۵	نتیجه
۸۶	۶	روش هم محلی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت
۸۷	۱.۶	مقدمه
۸۸	۲.۶	توابع کاردینال
۹۱	۳.۶	ماتریس عملیاتی مشتق
۹۵	۴.۶	کاربرد ماتریس عملیاتی مشتق و مثال‌های عددی
۱۱۰	۵.۶	نتیجه

۱۱۱	۷ پیشنهادها و کارهای آتی
۱۱۲	۱.۷ پیشنهادها و کارهای آتی
۱۱۴	مراجع

فهرست شکل‌ها

- ۱.۲ نمودار $|K(x, x) - K_N(x, x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ (در مقیاس لگاریتمی) در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$. . . ۲۸
- ۲.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u(x) - u_N(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$. . . ۲۸
- ۳.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u'(x) - u'_N(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$. . . ۲۹
- ۴.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u''(x) - u''_N(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$. . . ۲۹
- ۵.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u^{(3)}(x) - u_N^{(3)}(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$. . . ۳۰
- ۶.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u^{(4)}(x) - u_N^{(4)}(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$ ۳۰
- ۷.۲ نمودار $|K(x, x) - K_N(x, x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ (در مقیاس لگاریتمی) در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$. . . ۳۱
- ۸.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u(x) - u_N(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$. . . ۳۲
- ۹.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u'(x) - u'_N(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$. . . ۳۲
- ۱۰.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u''(x) - u''_N(x)|$ در فضای $W_{\cdot, 2}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$. . . ۳۲

- ۱۱.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u^{(3)}(x) - u_N^{(3)}(x)|$ ، در فضای $W_{\cdot,2}^m[0,1]$ به‌ازای $m=6,7$ و در بازه $[0,1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N=10, 20, \dots$ ۳۳
- ۱۲.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u^{(4)}(x) - u_N^{(4)}(x)|$ ، در فضای $W_{\cdot,2}^m[0,1]$ به‌ازای $m=6,7$ و در بازه $[0,1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N=10, 20, \dots$ ۳۳
- ۱۳.۲ خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u^{(5)}(x) - u_N^{(5)}(x)|$ ، در فضای $W_{\cdot,2}^m[0,1]$ به‌ازای $m=6,7$ و در بازه $[0,1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N=10, 20, \dots$ ۳۳
- ۱.۳ نمودار α نسبت به λ در رابطه $F_{15}(\alpha; \lambda) = u_{15}(1; \alpha, \lambda) = 0$ برای مساله براتو. نمودار با مفهوم تحلیلی مقدار بحرانی λ_c سازگار است. ۴۳
- ۲.۳ نمودار $F_n(\alpha; \lambda) = u_n(1; \alpha, \lambda)$ برای مساله براتو با $n=15$ و مقادیر مختلف λ . معادله برای $\lambda=2$ و $\lambda=3$ دو ریشه و برای $\lambda=3/5138$ یک ریشه دارد و برای $\lambda=4$ و $\lambda=5$ ریشه ندارد. ۴۴
- ۳.۳ رسم کانتور $F_n(\alpha; \lambda)$ برای مساله براتو با $\alpha \in [0, 10]$ و $\lambda \in [1, 6]$ و $n=15$. نمودار مفهوم تحلیلی مقدار بحرانی را تایید می‌کند. ۴۴
- ۴.۳ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه اول جواب مساله براتو با $\lambda=2$ و مقادیر مختلف $n=50, 100, 300$. ۴۵
- ۵.۳ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه دوم جواب مساله براتو با $\lambda=2$ و مقادیر مختلف $n=50, 100, 300$. ۴۵
- ۶.۳ نمودار α نسبت به ψ در رابطه $F_{15}(\alpha; \psi) = u_{15}(1; \alpha, \psi) - 1 = 0$ برای مساله واکنش-انتشار. نمودار با مفهوم تحلیلی مقادیر بحرانی $\psi^*(m)$ و $\psi_{max}(m)$ با مرتبه واکنش $m = -\frac{3}{4}$ و $m = -1$ سازگار است. ۴۸
- ۷.۳ نمودار $F_n(\alpha; \psi) = u_n(1; \alpha, \psi) - 1$ برای مساله واکنش-انتشار با $n=15$ ، $m = -\frac{3}{4}$ و مقادیر مختلف ψ . معادله برای $\psi = 0/3$ یک ریشه، برای $\psi = 0/6$ و $\psi = 0/8$ دو ریشه دارد و برای $\psi = 0/9$ ریشه ندارد. ۴۸
- ۸.۳ رسم کانتور $F_n(\alpha; \psi)$ برای مساله واکنش-انتشار با $\alpha \in [0, 1]$ ، $\psi \in [0, 1]$ و $n=15$. نمودار مفهوم تحلیلی مقادیر بحرانی $\psi^*(m) = 0/40$ و $\psi_{max}(m)$ را برای مرتبه واکنش $m = -\frac{3}{4}$ تایید می‌کند. ۴۹
- ۹.۳ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه اول جواب مساله (۱۷.۳) با مقادیر $n=100, 150, 300$ و $m = -\frac{3}{4}$ ، $\psi = 0/8$. ۴۹
- ۱۰.۳ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه دوم جواب مساله (۱۷.۳) با مقادیر $n=100, 150, 300$ و $m = -\frac{3}{4}$ ، $\psi = 0/8$. ۵۰

- ۱۱.۳ نمودار $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - u_n(\frac{1}{3}; \alpha)$ برای مساله (۲۰.۳) با $n = 5, 10, 15$. ۵۱
- ۱۲.۳ نمودار جواب تقریبی u_n برای مساله (۲۰.۳) با $n = 40$ ۵۱
- ۱۳.۳ مقایسه جواب تقریبی u_n با جواب تقریبی داده شده در [۳۹] برای مساله (۳) (۲۰). نمودار $u_n(x) - u_n^*(x)$ (در مقیاس لگاریتمی) برای $x \in [0, 1]$ با $n = 25, 50, 100$ ۵۱
- ۱۴.۳ (راست) نمودار $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - 2u_n(\frac{1}{3}; \alpha)$ برای مساله (۲۱.۳) با $n = 10$ و (چپ) نمودار دو جواب $u_{1,n}(x)$ و $u_{2,n}(x)$ به ترتیب متناظر با $\alpha_1 \in [33, 34]$ و $\alpha_2 \in [59, 60]$ به طوری که $36 \leq u_1(x), u_2(x) \leq 0$ ۵۳
- ۱۵.۳ نمودار $u_{3,n}$ برای مساله (۲۱.۳) با $n = 60$ متناظر با $\alpha_3 \in [13412, 13415]$ به طوری که $\frac{299}{97} \leq \max_{x \in [0, 1]} |u_3(x)| \leq 22535/91$ ۵۳
- ۱۶.۳ نمودار $\log_{10} |u_{2..}(x) - u_n(x)|$ برای شاخه اول جواب مساله (۲۱.۳) متناظر با $\alpha_2 \in [59, 60]$ و $x \in [0, 1]$ و $n = 100, 150$ ۵۳
- ۱۷.۳ نمودار $\log_{10} |u_{2..}(x) - u_n(x)|$ برای شاخه دوم جواب مساله (۲۱.۳) متناظر با $\alpha_2 \in [59, 60]$ و $n = 100, 150$ ۵۴
- ۱.۴ شکل تیر الاستیک تحت تاثیر نیروهای f و g که توسط مساله (۱.۴) مدل‌سازی شده است [۵۱]. ۵۷
- ۲.۴ نمودار خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{p,N}^6[0, 1]$ برای مثال (۲۳.۴) به ترتیب از راست به چپ با $n = 5, N = 10, 20, 50$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴). ۶۶
- ۳.۴ نمودار خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{p,N}^6[0, 1]$ برای مثال (۲۴.۴) به ترتیب از راست به چپ با $n = 5, N = 10, 20, 50$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴). ۶۷
- ۴.۴ نمودار خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{p,N}^6[0, 1]$ برای مثال (۲۵.۴) به ترتیب از راست به چپ با $n = 5, N = 10, 20, 50$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴). ۶۸
- ۱.۵ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۱۸.۵) با $m = 10, n = 0$ تکرار و $N = 10, 25, 50, 100$ ۸۱
- ۲.۵ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۱۸.۵) با $m = 10, n = 1$ تکرار و $N = 10, 25, 50, 100$ ۸۱
- ۳.۵ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۱۸.۵) با $m = 10, n = 5$ تکرار و $N = 10, 25, 50, 100$ ۸۲
- ۴.۵ نمودار $\log_{10} |R_x(x) - R_{N,x}(x)|$ برای مساله (۲۰.۵) با $N = 10, 25, 50, 100$ ۸۲

- ۵.۵ نمودار جواب‌های تقریبی مساله (۲۰.۵) در بازه $[0, 1]$ ۸۳
- ۶.۵ خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۲۱.۵) با $m = 10$ تکرار و مقادیر
مختلف $N = 10, 25, 50, 100$ ۸۴
- ۱.۶ خطای مطلق برای مساله (۱۸.۶) در $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ با $v = 0.01, \sigma = 1$ ۱۰۱
- ۲.۶ خطای مطلق برای مساله (۱۹.۶) در $(x, t) \in [0, 1] \times [1, 2/4]$ با $v = 0.005, \Delta t = 1$ و $N = 100$ ۱۰۳
- ۳.۶ توزیع پراکنده (تصادفی) نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۰.۶)
برای $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ با $v = 1, \Delta t = 0.0001$ و $N = 49$ در زمان
نهایی $T = 1$ ۱۰۵
- ۴.۶ توزیع یکنواخت نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۰.۶) برای $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ با $v = 1, \Delta t = 0.0001$ و $N = 49$ در زمان
نهایی $T = 1$ ۱۰۶
- ۵.۶ توزیع پراکنده (تصادفی) نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۱.۶)
برای $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ با $v = 1, \Delta t = 0.0001$ و $N = 49$ در زمان
نهایی $T = 1$ ۱۰۸
- ۶.۶ توزیع یکنواخت نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۱.۶) برای $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ با $v = 1, \Delta t = 0.0001$ و $N = 49$ در زمان
نهایی $T = 1$ ۱۰۹

فهرست جدول‌ها

۴۲	۱.۳	خطای مطلق شاخه اول جواب مساله (۱۵.۳) برای $\lambda = 2$ و با مقادیر مختلف n .
۴۳	۲.۳	خطای مطلق شاخه دوم جواب مساله (۱۵.۳) برای $\lambda = 2$ و با مقادیر مختلف n .
	۳.۳	خطای مطلق شاخه اول جواب مساله (۱۷.۳) برای $\psi = 0/8$ ، مرتبه واکنش
۴۷	$m = -\frac{3}{4}$	و با مقادیر مختلف n
	۴.۳	خطای مطلق شاخه دوم جواب مساله (۱۷.۳) برای $\psi = 0/8$ ، مرتبه واکنش
۴۷	$m = -\frac{3}{4}$	و با مقادیر مختلف n
	۱.۴	خطای مطلق مثال (۲۳.۴) با استفاده از $\Pi_N u_n(x) \in W_{2,N}^6[0, 1]$ با $n = 5$ و
۶۶		پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴)
	۲.۴	خطای مطلق مثال (۲۴.۴) با استفاده از $\Pi_N u_n(x) \in W_{2,N}^6[0, 1]$ با $n = 5$ و
۶۷		پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴)
	۳.۴	خطای مطلق مثال (۲۵.۴) با استفاده از $\Pi_N u_n(x) \in W_{2,N}^6[0, 1]$ با $n = 5$ و
۶۹		پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴)
	۴.۴	مقدار $E(\Pi_N v_n)$ برای جوابهای تقریبی $\Pi_1, u_5(x)$ ، $\Pi_2, u_5(x)$ و $\Pi_5, u_5(x)$ با
		پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴) . سطر آخر جدول مقدار C_N را در برآورد خطای
۶۹		(۲۱.۴) و (۱۶.۴) با $N = 10, 20, 50$ نشان می‌دهد.
	۵.۴	بیشترین خطای مطلق، $E_n = \max \Pi_N u_n(x) - u^*(x) $ برای $0 \leq x \leq 1$ بین
		جواب دقیق و جواب های تقریبی $\Pi_1, u_5(x)$ ، $\Pi_2, u_5(x)$ و $\Pi_5, u_5(x)$ با پنج
		تکرار از روش نیوتن (۵.۴) و مقایسه آنها با نتایج گزارش شده در مقاله های
۶۹		[۵۳، ۵۱، ۵۰]

- ۱.۵ انتگرال مربع خطای مانده برای مساله (۱۸.۵) با $m = 10$ تکرار و مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$ ۸۰
- ۲.۵ انتگرال مربع خطای مانده برای مساله (۲۰.۵) با $m = 10$ تکرار، مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$ و توابع غیر خطی مختلف $h(y)$ ۸۳
- ۳.۵ انتگرال مربع خطای مانده برای مساله لین-امدن از نوع دوم با $m = 10$ تکرار و مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$ ۸۵
- ۱.۶ بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۶.۶) و مساله (۱۷.۶) با مقادیر مختلف N ۹۸
- ۲.۶ بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۷.۶) و مقایسه با نتایج ارایه شده در [۸۰، ۹۸
- ۳.۶ بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۷.۶) و مقایسه با نتایج ارایه شده در [۸۰، ۹۸
- ۴.۶ بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.005, \sigma = 100, \Delta t = 1$ در $T = 1$ ۹۹
- ۵.۶ بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.01, \sigma = 100, \Delta t = 1$ در $T = 1$ ۹۹
- ۶.۶ مقایسه بیشترین خطای مطلق با گزارش های ارایه شده در [۸۶، ۸۵، ۸۴] برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.005, \sigma = 100, \Delta t = 0.01$ در $T = 1$ ۱۰۰
- ۷.۶ مقایسه بیشترین خطای مطلق با گزارش های ارایه شده در [۸۶، ۸۵، ۸۴] برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.01, \sigma = 100, \Delta t = 0.01$ در $T = 1$ ۱۰۰
- ۸.۶ خطای مطلق برای مساله (۱۹.۶) با $v = 0.005, \Delta t = 0.01$ در $T = 2/4$ ۱۰۲
- ۹.۶ خطای مطلق برای مساله (۱۹.۶) با $v = 0.01, \Delta t = 0.01$ در $T = 2/4$ ۱۰۲
- ۱۰.۶ مقایسه بیشترین خطای مطلق با گزارش های ارایه شده در [۹۰، ۸۹، ۸۸، ۸۷] برای مساله (۱۹.۶) با $v = 0.005$ ۱۰۴
- ۱۱.۶ گزارش L_∞ و خطای نسبی L_2 برای جواب تقریبی مساله (۲۰.۶) با مقادیر مختلف N, v, dt و زمان نهایی T ۱۰۴
- ۱۲.۶ گزارش L_∞ و خطای نسبی L_2 برای مساله (۲۱.۶) با مقادیر مختلف N, v, dt و زمان نهایی T ۱۰۷
- ۱۳.۶ گزارش L_∞ و خطای نسبی L_2 برای مساله (۲۲.۶) در $T = 1$ ۱۰۷
- ۱۴.۶ گزارش L_∞ و L_{rms} برای جواب تقریبی مساله (۲۲.۶) در $T = 1$ ۱۰۸

فصل ۱

هسته‌های بازتولیدی

در این فصل ابتدا تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای فصل‌های بعدی را بیان خواهیم نمود، سپس به معرفی برخی مفاهیم، ویژگی‌ها و قضایای اساسی هسته‌های بازتولیدی و مثال‌های مربوط به آن‌ها می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای برداری حقیقی X مجموعه‌ای از عناصر با دو عمل جمع و ضرب اسکالر است که برای $x, y, z \in X$ و $a, b \in \mathbb{R}$ دارای ویژگی‌های زیر باشند:

$$x + y \in X$$

$$x + y = y + x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$x + 0 = x, x \in X \text{ هر ازای هر } x \text{ وجود دارد به طوریکه}$$

$$x + (-x) = 0 \text{ به ازای هر } x, \text{ عضو یکتای } -x \in X \text{ وجود دارد به طوریکه}$$

$$ax \in X$$

$$1x = x, x \text{ به ازای هر } x$$

$$(ab)x = a(bx)$$

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

تعریف ۲.۱.۱. نرم یک فضای برداری حقیقی X تابعی به صورت $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوریکه

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, u, v \in X \text{ برای هر}$$

$$\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|, \alpha \in \mathbb{R} \text{ و } u \in X \text{ برای هر}$$

$$\|u\| \geq 0, u \in X \text{ برای هر}$$

$$\|u\| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } u = 0$$

یک نیم نرم روی X تابعی مانند $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ است که سه شرط اول را داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. فضای برداری X که به نرم $\|\cdot\|$ مجهز شده است را یک فضای برداری نرم‌دار می‌گوییم و آن را به صورت $(X, \|\cdot\|)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای برداری نرم‌دار باشد. دنباله $\{x_n\} \subset X$ را یک دنباله کوشی^۱ گوییم هرگاه،

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0.$$

واضح است که هر دنباله همگرا، کوشی است.

تعریف ۵.۱.۱. یک فضای برداری نرم‌دار را کامل گوییم اگر هر دنباله کوشی در آن به عضوی از آن فضا همگرا باشد. فضای برداری نرم‌دار کامل را فضای باناخ^۲ گوییم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی باشد. یک ضرب داخلی روی X تابعی مانند $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ می‌باشد به طوری که

$$\bullet \text{ برای هر } u, v \in X, (u, v) = (v, u);$$

$$\bullet \text{ برای هر } u, v, w \in X \text{ و } \alpha, \beta \in \mathbf{R}, (\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w);$$

$$\bullet \text{ برای هر } u \in X, (u, u) \geq 0;$$

$$\bullet (u, u) = 0 \text{ اگر و فقط اگر } u = 0.$$

فضای برداری X همراه با ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ را یک فضای ضرب داخلی^۳ گوییم.

تعریف ۷.۱.۱. دو عضو $u, v \in X$ متعامد گفته می‌شوند هرگاه $(u, v) = 0$. ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)$ یک نرم روی X به صورت زیر تعریف می‌کند

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)}, \quad \forall u \in X, \quad (1.1)$$

همچنین متریک روی X را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$d(u, v) = \|u - v\|. \quad (2.1)$$

فضای ضرب داخلی X با متریک تعریف شده یک فضای متریک است که فضای پیش-هیلبرت^۴ گفته می‌شود. هر فضای پیش-هیلبرت که علاوه بر آن کامل باشد یک فضای هیلبرت است. یک

^۱ Cauchy sequence

^۲ Banach space

^۳ Inner product space

^۴ Pre-Hilbert space

فضای پیش-هیلبرت X کامل است اگر هر دنباله کوشی نسبت به نرم X به عضوی از X همگرا باشد. در واقع فضای هیلبرت X یک فضای برداری حقیقی (مختلط) با ضرب داخلی است که نسبت به نرم ساخته شده بر روی ضرب داخلی کامل باشد.

گزاره ۸.۱.۱. در فضای هیلبرت X نامساوی کوشی-شوارتز^۵ برقرار است:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|, \quad \forall u, v \in X. \quad (3.1)$$

قضیه ۹.۱.۱. در فضای هیلبرت X ، برای هر تابعک خطی $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ گزاره‌های زیر هم ارزند:

- F روی X پیوسته است.
- F در $x = 0$ پیوسته است.
- عدد $C > 0$ وجود دارد به طوریکه به ازای هر $x \in X$ ، $|F(x)| \leq C\|x\|$.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید X' مجموعه همه تابعک‌های خطی کراندار روی X باشد، آن‌گاه X' یک فضای باناخ است و فضای دوگان X گفته می‌شود. نرم روی X' را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\|F\|_{X'} = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|}.$$

قضیه ۱۱.۱.۱. (قضیه نمایش ریتس^۶) برای هر تابعک خطی $F \in X'$ ، یک $x \in X$ یکتا وجود دارد به طوریکه

$$F(y) = (x, y), \quad \forall y \in X, \quad \|F\|_{X'} = \|x\|.$$

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱۲.۱.۱. یک مجموعه S در یک فضای ضرب داخلی X را متعامد گوئیم هرگاه 0 عضوی از S نباشد و هر دو عضو متمایز از S متعامد باشند. همچنین مجموعه S را متعامد یکه گوئیم هرگاه به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم $\|s\| = 1$. یک مجموعه متعامد S در یک فضای ضرب داخلی X را کامل گوئیم اگر برای $x \in X$ ،

$$\forall s \in S : (x, s) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

یک مجموعه کامل متعامد یکه را یک پایه متعامد یکه گوئیم.

^۵Cauchy-Schwarz inequality

^۶Riesz Representation Theorem

قضیه ۱۳.۱.۱. هر فضای ضرب داخلی دارای یک مجموعه کامل متعامد است. بنابراین دارای یک مجموعه کامل متعامد یکه است.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۴.۱.۱. (متعامد سازی گرام-اشمیت^۷) فرض کنید $x_1, x_2, \dots$ یک دنباله مستقل خطی در فضای ضرب داخلی X باشند. اگر دنباله $y_1, y_2, \dots$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$y_1 = x_1, y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_{n+1}, y_i)}{\|y_i\|^2} y_i, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.1)$$

آن‌گاه داریم

(۱) مجموعه $\{y_1, y_2, \dots\}$ متعامد است.

(۲) برای $n = 1, 2, \dots$ $Span\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = Span\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

علاوه بر آن اگر $z_1, z_2, \dots$ یک دنباله متعامد دیگر باشد که برای هر n ,

$$Span\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = Span\{z_1, z_2, \dots, z_n\},$$

آن‌گاه برای هر n یک عدد مانند $\lambda_n \neq 0$ وجود دارد به طوریکه $z_n = \lambda_n y_n$.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی و S مجموعه‌ای متعامد یکه در X باشد. گوئیم S یک پایه کامل متعامد یکه است هرگاه یک مجموعه متعامد یکه ماکسیمال باشد، یعنی اگر $\bar{S}$ مجموعه‌ای متعامد یکه باشد و $S \subset \bar{S}$ آن‌گاه $S = \bar{S}$.

قضیه ۱۶.۱.۱. فرض کنید S یک مجموعه متعامد یکه در فضای ضرب داخلی X باشد. در این صورت X پایه‌ای متعامد یکه دارد که شامل S است.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای هیلبرت و S مجموعه‌ای متعامد یکه در X باشد. در این صورت به ازای هر $x \in X$ سری $\sum_{u \in S} (x, u)u$ همگراست.

برهان. به [۱۷] مراجعه شود. $\square$

^۷Gram-Schmidt Orthogonalization

تعریف ۱۸.۱.۱. اگر $\{e_i\}_{i \in I}$ یک پایه متعامد یکه در یک فضای هیلبرت X و $x \in X$ یک بردار دلخواه باشد، آن‌گاه خانواده اسکالرهای $\{(x, e_i)\}_{i \in I}$ ضرایب فوریه^۸ x وابسته به پایه متعامد یکه $\{e_i\}_{i \in I}$ گفته می‌شوند.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، یک ماتریس حقیقی مرتبه n باشد، آن‌گاه:

• A را معین مثبت^۹ گویند، هرگاه $x^T A x > 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$.

• A را نیمه معین مثبت^{۱۰} گویند، هرگاه $x^T A x \geq 0$ برای هر $x \in \mathbb{R}^n$.

از آن جایی که ماتریس‌های معین مثبت دارای مقادیر ویژه مثبت^{۱۱} می‌باشند، لذا نامنفرد می‌باشند.

۲.۱ هسته‌های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت و فضاهای محلی

در این بخش ابتدا مفهوم هسته‌های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت^{۱۲} و فضاهای محلی^{۱۳} توابع معین مثبت بررسی می‌شوند سپس به معرفی یک دسته خاص از فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی، ویژگی‌ها و مثال‌های مربوط به آنها می‌پردازیم.

۱.۲.۱ هسته‌های بازتولید کننده فضاهای هیلبرت

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت حقیقی از توابع $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ و مجهز به ضرب داخلی $(\cdot, \cdot)_H$ باشد. آن‌گاه تابع $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را هسته بازتولیدی فضای هیلبرت H می‌نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$k(\cdot, \mathbf{x}) \in H, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

^۸Fourier coefficients

^۹Positive definite

^{۱۰}Semi-positive definite

^{۱۱}Eigen value

^{۱۲}Reproducing Kernel Hilbert Spaces

^{۱۳}Native Spaces

$$f(x) = (f, k(., x))_H, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall f \in H \quad (2)$$

توجه شود که عنوان هسته‌های بازتولیدی از خاصیت بازتولید کنندگی (۲) مشتق شده است. برخی از خواص اساسی هسته‌های بازتولیدی عبارتند از [۴، ۱۲، ۱۸]:

- هسته بازتولیدی یک فضای هیلبرت در صورت وجود یکتاست.
- وجود یک هسته بازتولیدی برای یک فضای هیلبرت H معادل این است که تابع‌های سنجش نقطه‌ای^{۱۴} δ_x تابع‌های خطی کران‌دار روی Ω باشند یعنی مقدار ثابت مثبت $M = M_x$ چنان موجود باشد که

$$|\delta_x f| = |f(x)| \leq M \|f\|_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall x \in \Omega.$$

- اگر تابع $k(., .)$ یک هسته بازتولیدی برای فضای H باشد، آن‌گاه
- $$\delta_x f = f(x) = (f, k(., x))_H$$
- رابطه فوق نشان می‌دهد تابع δ_x خطی است و بنابر رابطه کوشی-شوارتز کران‌دار نیز می‌باشد. زیرا:

$$\begin{aligned} |\delta_x f| = |f(x)| &= |(f, k(., x))_H| \\ &\leq \|f\|_H \|k(., x)\|_H. \end{aligned}$$

- اگر $k(x, y)$ هسته بازتولیدی فضای H روی Ω باشد، آن‌گاه برای هر $x \in \Omega$ داریم $k(x, x) \geq 0$ و $k(x, x) = 0$ اگر و فقط اگر $H = \{0\}$.
- اگر فضای هیلبرت H با هسته بازتولیدی k زیر فضایی از یک فضای هیلبرت بزرگتر مانند $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه رابطه

$$f(y) = (h(x), k(x, y))_H$$

تصویر f از تابع $h \in \mathcal{F}$ روی H را می‌دهد. در واقع $h = f + g$ که در آن g بر فضای H عمود است، یعنی

$$(h(x), k(x, y))_H = (f(x) + g(x), k(x, y))_H = (f(x), k(x, y))_H = f(y).$$

- اگر فضای هیلبرت H با هسته بازتولیدی k دارای دستگاه متعامد یکه $\{\phi_n\}$ باشد، آن‌گاه برای هر دنباله $\{\alpha_n\}$ از اعداد که در شرط زیر صدق کنند

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty,$$

^{۱۴} point evaluation functionals

داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| |\phi_n(x)| \leq \sqrt{k(x, x)} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2}.$$

مثال: فرض کنید H یک فضای هیلبرت n بعدی باشد که $\{e_i\}_{i=1}^n$ یک پایه متعامد یکه برای آن است. آن‌گاه $R(s, t) = \sum_{i=1}^n e_i(t) \overline{e_i(s)}$ هسته بازتولیدی فضای H است. در واقع برای هر $f \in H$ داریم:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(t). \\ (f(t), R(s, t))_H &= \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i(t), \sum_{i=1}^n e_i(t) \overline{e_i(s)} \right)_H \\ &= \sum_{i=1}^n a_i e_i(s) = f(s). \end{aligned}$$

قضیه ۲.۲.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت از توابع $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}$ با هسته بازتولیدی k باشد، آن‌گاه:

$$k(x, y) = (k(\cdot, y), k(\cdot, x))_H \quad (1) \quad x, y \in \Omega \text{ برای هر}$$

$$k(x, y) = k(y, x) \quad (2) \quad x, y \in \Omega \text{ برای هر}$$

$$(3) \quad \text{همگرایی در نرم فضای هیلبرت، همگرایی نقطه‌ای را نتیجه می‌دهد. یعنی}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_H \rightarrow 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - f_n(x)| \rightarrow 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

□

برهان. به [۴، ۱۸] مراجعه شود.

نکته: از خاصیت (۱) در قضیه قبل می‌توان مقدار M_x را برای تابع سنجش نقطه‌ای $\delta_x f$ به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} |\delta_x f| &= |(f, k(\cdot, x))_H| \\ &\leq \|f\|_H \|k(\cdot, x)\|_H = \|f\|_H \sqrt{(k(\cdot, x), k(\cdot, x))_H} \\ &= \|f\|_H \sqrt{k(x, x)}, \end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌شود

$$M_x = \sqrt{k(x, x)}.$$

قضیه ۳.۲.۱. اگر H یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی روی X و H یک زیر فضای بسته آن باشد، آن‌گاه H خود یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی است و هسته بازتولیدی آن $\Pi R_y(x)$ است که در آن $R_y(x)$ هسته بازتولیدی H و $\Pi: H \rightarrow H$ تصویر متعامد از H به H است.

برهان. به [۴] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید H یک فضای توابع هیلبرت هسته‌های بازتولیدی با هسته $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ بوده و همچنین فرض کنید H' فضای دوگان آن (در این جا منظور فضای تابع‌های خطی و کران‌دار روی H می‌باشد) باشد. آن‌گاه k معین مثبت می‌باشد. به علاوه k معین مثبت اکید می‌باشد اگر و تنها اگر تابع‌های سنجش نقطه‌ای δ_x بر H' مستقل خطی باشند.

برهان. به [۱۸] مراجعه شود. $\square$

قضیه فوق یک ارتباط مستقیم بین توابع معین مثبت اکید و هسته‌های بازتولیدی را نشان می‌دهد.

۲.۲.۱ فضاهای محلی توابع معین مثبت اکید

به کارگیری توابع معین مثبت به عنوان توابع پایه در درونیایی منجر به ظاهر شدن ماتریس‌های درونیاب معین مثبت خواهند شد. لذا معرفی و بررسی آن‌ها دارای اهمیت می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۱. تابع مقارن $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ را معین مثبت روی Ω گوئیم، اگر و فقط اگر ماتریس $A = (k(x_j, x_i))_{1 \leq j, i \leq n}$ برای تمام مجموعه‌های متناهی نقاط در Ω معین و مثبت باشد.

برای ساختن فضای محلی متناظر با یک هسته بازتولیدی k ، در گام اول باید اشاره شود که طبق **تعریف ۱.۲.۱** فضای هیلبرت H شامل همه توابع به فرم زیر می‌باشد:

$$f = \sum_{j=1}^N c_j k(\cdot, \mathbf{x}_j), \quad \mathbf{x}_j \in \Omega.$$

از طرفی با توجه به رابطه فوق و همچنین **قضیه ۲.۲.۱** نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} \|f\|_H = (f, f)_H &= \left(\sum_{j=1}^N c_j k(\cdot, \mathbf{x}_j), \sum_{j=1}^N c_j k(\cdot, \mathbf{x}_j) \right)_H \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j c_i (k(\cdot, \mathbf{x}_j), k(\cdot, \mathbf{x}_i))_H \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j c_i k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

بنابراین به راحتی می‌توان نرم فضای هیلبرت تابع f را به صورت فوق محاسبه کرد. در ادامه یک فضا از ترکیبات خطی متناهی

$$H_k(\Omega) = \text{span}\{k(\cdot, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \Omega\}$$

به همراه یک فرم دوخطی وابسته $(\cdot, \cdot)_k$ ،

$$\left(\sum_{j=1}^N c_j k(\cdot, \mathbf{x}_j), \sum_{i=1}^N d_i k(\cdot, \mathbf{y}_i) \right)_k = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N c_j d_i k(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i).$$

تعریف می‌کنیم. بنابراین هر عضو از فضای $H_k(\Omega)$ را می‌توان به فرم زیر نمایش داد

$$f = \sum_{j=1}^N c_j k(\cdot, \mathbf{x}_j).$$

توجه شود که در نمایش فوق نه تنها ضرایب c_j ها، بلکه مقادیر N و نقاط انتخابی $\mathbf{x}_j$ ها نیز با توجه به تغییر f ، تغییر می‌کنند.

قضیه ۶.۲.۱. اگر $k : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک هسته معین مثبت اکید و متقارن باشد آنگاه فرم دو خطی $(\cdot, \cdot)_k$ یک ضرب داخلی روی $H_k(\Omega)$ تعریف می‌کند. به علاوه، فضای $H_k(\Omega)$ یک فضای پیش-هیلبرت^{۱۵} با هسته بازتولیدی k می‌باشد.

برهان. به [۱۹] مراجعه شود. □

نکته: فضای پیش-هیلبرت یک فضای ضرب داخلی است که کامل ساز آن یک فضای هیلبرت باشد.

همان گونه که اشاره شد فضای $H_k(\Omega)$ یک فضای پیش-هیلبرت می‌باشد یعنی لزوماً کامل نیست. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که کامل ساز فضای $H_k(\Omega)$ متناظر به نرم $\|\cdot\|_k$ ، بدیهی ترین فضای هیلبرت متناظر به هسته بازتولیدی k باشد.

تعریف ۷.۲.۱. فضای محلی $\mathcal{N}_k(\Omega)$ متناظر به هسته بازتولیدی k یک فضای هیلبرت کامل ساز فضای پیش-هیلبرت $H_k(\Omega)$ است و از طرفی

$$\|f\|_k = \|f\|_{\mathcal{N}_k(\Omega)}, \quad \forall f \in H_k(\Omega).$$

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنید H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی روی مجموعه X با نرم‌های به ترتیب $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ ، همچنین $k_1(x, y)$ و $k_2(x, y)$ به ترتیب هسته‌های بازتولیدی آنها باشند. آنگاه $k(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y)$ هسته بازتولیدی فضای $H = \{f = f_1 + f_2 : f_1 \in H_1, f_2 \in H_2\}$ است. نرم روی H به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|^2 = \min \left(\|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2 \right),$$

که در آن مینیمم بر روی تمام تجزیه‌های $f = f_1 + f_2$ با $f_1 \in H_1$ و $f_2 \in H_2$ گرفته می‌شود.

برهان. به [۴] مراجعه شود. □

^{۱۵}Pre-Hilbert space

قضیه ۹.۲.۱. فرض کنید H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی روی مجموعه X با نرم‌های به ترتیب $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ ، همچنین $k_1(x, y)$ و $k_2(x, y)$ به ترتیب هسته‌های بازتولیدی آن‌ها باشند. اگر $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ ، آنگاه $k(x, y) = k_1(x, y) + k_2(x, y)$ هسته بازتولیدی فضای

$$H = \{f = f_1 + f_2 : f_1 \in H_1, f_2 \in H_2\},$$

است. نرم روی H به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|f\|^2 = \|f_1 + f_2\|^2 = \|f_1\|_1^2 + \|f_2\|_2^2,$$

و H_1 و H_2 زیر فضاهای متعامد H هستند.

برهان. به [۴] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی روی مجموعه‌های به ترتیب X_1 و X_2 ، با نرم‌های $\|\cdot\|_1$ و $\|\cdot\|_2$ باشند. همچنین فرض کنید $k_1(x, y)$ و $k_2(s, t)$ هسته‌های بازتولیدی آن‌ها باشند. آنگاه $H = H_1 \otimes H_2$ یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی روی $X_1 \times X_2$ و هسته بازتولیدی آن به فرم $k((x, s), (y, t)) = k_1(x, y)k_2(s, t)$ است.

برهان. به [۴] مراجعه شود. □

فضای هیلبرت H و نرم آن در قضیه قبل به صورت زیر است. فرض کنید $\{\phi_{1,n}\}$ و $\{\phi_{2,n}\}$ دنباله‌های کامل متعامد یکه در H_1 و H_2 باشند. فضای H از تمام توابع به فرم زیر تشکیل می‌شود:

$$f(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j} \phi_{1,i}(x) \phi_{2,j}(s), \quad (5.1)$$

که نرم آن در H به صورت زیر است:

$$\|f\|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{i,j}|^2. \quad (6.1)$$

قضیه فوق دارای کاربردهای فراوانی در روش‌های ارایه شده مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی می‌باشد که برای تولید هسته‌های با ابعاد بالاتر استفاده می‌شود. برای مشاهده جزئیات بیشتر از قضیه فوق به [۴] مراجعه فرمایید. خوانندگان علاقمند، برای مطالعه جزئیات بیشتر در رابطه با فضاهای محلی انواع متفاوت توابع معین و مثبت می‌توانند به [۴، ۱۲، ۱۸، ۱۹] مراجعه فرمایند.

قضیه ۱۱.۲.۱. (قضیه مرسر^{۱۶}) هسته معین مثبت و پیوسته $R_y(x)$ روی دامنه کراندار Ω دارای بسط توابع ویژه زیر است:

$$R_y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \varphi_n(y) \quad \forall x, y \in \Omega, \quad (7.1)$$

^{۱۶} Mercer's theorem

$$\lambda_n \varphi_n(x) = \int_{\Omega} R_y(x) \varphi_n(y) dy \quad \in \Omega, n \geq 0. \quad (8.1)$$

همچنین فرض کنید $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای محلی هیلبرت H روی Ω باشد، آنگاه

• $\{\varphi_n\}$ یک پایه متعامد یک‌ه برای H است.

• $\{\varphi_n\}$ یک پایه متعامد برای $L_2(\Omega)$ است.

$$\|\varphi_n\|_{L_2(\Omega)}^2 = \lambda_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

برهان. به [۲۰، ۱۸، ۴] مراجعه شود. □

۳.۱ فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_2^m[a, b]$

در این بخش به معرفی دسته‌ای از فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی، زیر فضاها و هسته‌های آن‌ها می‌پردازیم. در فصل‌های بعدی برای حل معادلات دیفرانسیل از فضای $W_2^m[a, b]$ استفاده می‌کنیم. در ادامه تعاریف و قضیه‌های مورد نیاز ارایه می‌شوند.

تعریف ۱.۳.۱. تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ به طور مطلق پیوسته است اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه، $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $a \leq x_1 < y_1 \leq \dots \leq x_n < y_n \leq b, n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(y_i) - f(x_i)| < \epsilon.$$

گزاره ۲.۳.۱. یک تابع به طور مطلق پیوسته روی بازه $[a, b]$ روی این بازه پیوسته است.

برهان. به [۱۲] مراجعه شود. □

گزاره ۳.۳.۱. فرض کنید تابع f بر بازه $[a, b]$ تعریف شده باشد، اگر $|f'(x)| \leq M, x \in [a, b]$ در این صورت f به طور مطلق پیوسته است.

برهان. به [۱۲] مراجعه شود. □

گزاره ۴.۳.۱. اگر تابع f بر بازه $[a, b]$ انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه $\int_a^x f(t) dt$ روی $[a, b]$ به طور مطلق پیوسته است.

برهان. به [۱۲] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید،

$$W_{\Psi}^m[a, b] = \{u(x) | u^{(m)} \in L^2[a, b] \text{ و } u^{(m-1)} \text{ به طور مطلق پیوسته است}\}$$

ضرب داخلی و نرم در فضای $W_{\Psi}^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای هر $u, v \in W_{\Psi}^m[a, b]$ داریم

$$(u(\cdot), v(\cdot))_{W_{\Psi}^m} = \sum_{i=0}^{m-1} u^{(i)}(a)v^{(i)}(a) + \int_a^b u^{(m)}(x)v^{(m)}(x)dx, \quad (9.1)$$

$$\|u\|_{W_{\Psi}^m} = \sqrt{(u(\cdot), u(\cdot))_{W_{\Psi}^m}}. \quad (10.1)$$

قضیه ۶.۳.۱. فضای تابعی $W_{\Psi}^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی است.

□

برهان. به [۱۲] مراجعه شود.

گزاره ۷.۳.۱. هسته بازتولیدی فضای $W_{\Psi}^m[a, b]$ به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m-1} c_i(y)x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=0}^{m-1} d_i(y)x^{i-1}, & x > y, \end{cases} \quad (11.1)$$

که در آن ضرایب $c_i(y), d_i(y)$ برای $i = 0, \dots, m-1$ از حل دستگاه خطی زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{\partial^i R_y(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} R_y(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, & i = 0, 1, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{m-i-1} R_y(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, & i = 0, 1, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^i R_y(y^-)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i R_y(y^+)}{\partial x^i}, & i = 0, 1, \dots, m-2 \\ (-1)^m \left(\frac{\partial^{m-1} R_y(y^-)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} R_y(y^+)}{\partial x^{m-1}} \right) = 1. \end{cases} \quad (12.1)$$

□

برهان. به [۱۲] مراجعه شود.

روش به دست آوردن هسته بازتولیدی فضای $W_{\Psi}^m[a, b]$ وزیر فضاهای آن به طور مفصل در

مرجع [۱۲] بیان شده است.

مثال: هسته بازتولیدی فضای $W_{\Psi}^1[0, 1]$ به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq y, \\ 1+y, & x > y. \end{cases} \quad (13.1)$$

مثال: هسته بازتولیدی فضای $W_2^3[0, 1]$ به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x^5}{120} + \frac{1}{12}x^2y^2(3+x) + xy\left(1 - \frac{x^4}{24}\right), & x \leq y, \\ 1 + \frac{y^5}{120} + \frac{1}{12}x^2y^2(3+y) + xy\left(1 - \frac{y^4}{24}\right), & x > y. \end{cases} \quad (14.1)$$

مثال: فضای $W_{2,2}^3[0, 1] = \{u(x) | u \in W_2^3[0, 1], u(0) = u'(0) = 0\} \subset W_2^3[0, 1]$ هسته بازتولیدی آن به صورت زیر است:

$$R_y(x) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{4} + \frac{x^3y^2}{12} - \frac{x^4y}{24} + \frac{x^5}{120}, & x \leq y, \\ \frac{y^2x^2}{4} + \frac{y^3x^2}{12} - \frac{y^4x}{24} + \frac{y^5}{120}, & x > y. \end{cases} \quad (15.1)$$

کوی^{۱۷} در [۱۲] نشان داده است $W_{2,2}^3[0, 1]$ یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی است و همچنین روش بدست آوردن هسته بازتولیدی آن را شرح داده است.

گزاره ۸.۳.۱. فرض کنید $R_y(x)$ هسته بازتولیدی فضای $W_2^m[a, b]$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \quad \text{برای } 0 \leq i+j \leq 2m-1 \text{ نسبت به } x \text{ یا } y \text{ عضو } L^2[a, b] \text{ است.}$$

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \quad \text{برای } 0 \leq i+j \leq 2m-2 \text{ نسبت به } x \text{ یا } y \text{ یک تابع به طور مطلق پیوسته در } [a, b] \text{ است.}$$

$$\frac{\partial^{i+j} R_y(x)}{\partial x^i \partial y^j} \quad \text{برای } 0 \leq i+j \leq m-1 \text{ نسبت به } x \text{ یا } y \text{ عضو } W_2^m[a, b] \text{ است.}$$

لم ۹.۳.۱. اگر $u \in W_2^m[a, b]$ ، آن‌گاه ثابت $c > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$|u(x)| \leq c\|u\|, |u^{(i)}(x)| \leq c\|u\|, \quad \forall x \in [a, b], 1 \leq i \leq m-1. \quad (16.1)$$

برهان. با توجه به خاصیت بازتولیدی $R_y(X)$ و همچنین نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$|u(x)| = |(u(y), R_y(x))| \leq \|u\| \|R_y(x)\|,$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} |u^{(i)}(x)| &= \left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} (u(y), R_y(x)) \right| \\ &= \left| (u(y), \frac{\partial^i R_y(x)}{\partial x^i}) \right| \\ &\leq \|u\| \left\| \frac{\partial^i R_y(x)}{\partial x^i} \right\| \leq c_i \|u\|, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m-1). \end{aligned}$$

^{۱۷}Minggen Cui

□ که در آن c_i ها اعداد ثابت هستند. قرار دهید $c = \max_{1 \leq i \leq m-1} \{c_i\}$.

قضیه ۱۰.۳.۱. فرض کنید $f_n, f \in W_{\mathbb{P}}^m[a, b], (n = 1, 2, \dots)$. اگر f_n در نرم فضای $W_{\mathbb{P}}^m[a, b]$ به تابع f همگرا باشد، آنگاه برای $k = 0, 1, \dots, m-1$ به طور یکنواخت به $f^{(k)}$ همگراست.

برهان. فرض کنید $R_y(x)$ هسته بازتولیدی $W_{\mathbb{P}}^m[a, b]$ باشد. آنگاه

$$f_n(x) - f(x) = (f_n(y) - f(y), R_y(x)),$$

$$f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x) = (f_n(y) - f(y), R_y(x))^{(k)}$$

$$= \frac{\partial^k}{\partial x^k} [(f_n(y) - f(y), R_y(x))]$$

$$= \left(f_n(y) - f(y), \frac{\partial^k}{\partial x^k} R_y(x) \right).$$

با استفاده از گزاره ۸.۳.۱ داریم $\frac{\partial^k}{\partial x^k} R_y(x) \in W_{\mathbb{P}}^m[a, b]$. همچنین با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم

$$|f_n^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)| \leq \|f_n^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)\| \left\| \frac{\partial^k}{\partial x^k} R_y(x) \right\| \leq C \|f_n^{(k)}(y) - f^{(k)}(y)\|.$$

□ با توجه به نامساوی بالا اثبات کامل است.

فصل ۲

بررسی خطای روش مبتنی بر هسته‌های
بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل
معادلات دیفرانسیل خطی

۱.۲ مقدمه

در بسیاری از مقالات در سال‌های اخیر روش ارایه شده توسط کوی^۱ بر اساس فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی برای حل انواع معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی به کار رفته است، به عنوان مثال می‌توانید به [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶] مراجعه کنید. در این روش جواب دقیق مساله به صورت یک سری نامتناهی به دست می‌آید و جواب تقریبی از قطع تعداد متناهی از جملات این سری حاصل می‌شود. در این فصل به بررسی خطای این روش برای حل معادلات دیفرانسیل خطی می‌پردازیم. ابتدا به بررسی خطای قطع در سری جواب می‌پردازیم. برآورد خطای ارایه شده به صورت درصدی از نرم جواب دقیق است که این درصد به طور دقیق قابل محاسبه بوده و نشان دهنده بدترین حالت رفتار جواب تقریبی است. کران خطای به دست آمده به کمک بررسی خطای قطع در واقع یک برآورد خطای پیشین^۲ است. علاوه بر این برآورد خطا دیگری ارایه شده است که بر اساس مانده جواب تقریبی^۳ و بیشترین طول گام نقاط انتخاب شده است. در کران خطای به دست آمده جواب دقیق مساله ظاهر نمی‌شود، بنابراین یک برآورد خطای پسین^۴ برای به کارگیری روش به دست آورده‌ایم. در این حالت وقتی که بیشترین طول گام نقاط انتخاب شده به سمت صفر میل می‌کند همگرایی جواب تقریبی به دست می‌آید. در ادامه معادلات دیفرانسیل خطی با شرایط مرزی یا شرایط اولیه را در حالت کلی زیر بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} Lu = f(x), a \leq x \leq b \\ Bu = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

که در آن L یک عملگر دیفرانسیلی خطی از مرتبه M به فرم زیر است:

$$Lu(x) = \sum_{k=0}^M p_k(x) u^{(k)}(x), \quad (2.2)$$

و B شرایط مرزی دیریکله^۵ یا نیومن^۶ است. فرض کنید $\{p_k(x)\}_{k=0, \dots, M}$ و f در $[a, b]$ پیوسته هستند و $p_M(x) > 0$ برای $x \in [a, b]$. از آنجا که با استفاده از تبدیل مناسب می‌توان مسایل با شرایط

^۱M. G. Cui

^۲A priori error estimate

^۳Residual of approximate solution

^۴A posteriori error estimate

^۵Dirichlet

^۶Neumann

غیرهمگن را به مساله معادل با شرایط همگن تبدیل کرد، بدون کاستن از کلیت ما شرایط همگن را بررسی می‌کنیم.

۲.۲ تقریب جواب

در این بخش به حل مساله (۱.۲) به کمک روش فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲.۲. فضای ضرب داخلی $W_{\gamma}^m[a, b]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$W_{\gamma}^m[a, b] = \{u(x) \mid u^{(m)} \in L^2[a, b], Bu = 0\}$ به طور مطلق پیوسته است و $u^{(m-1)}$ و $u^{(m)} \in L^2[a, b]$ ضرب داخلی و نرم فضای $W_{\gamma}^m[a, b]$ توسط رابطه‌های (۹.۱) و (۱۰.۱) داده شده است.

توجه کنید که گزاره (۸.۳.۱) و لم (۹.۳.۱) در $W_{\gamma}^m[a, b] \subset W_{\gamma}^m[a, b]$ نیز برقرار است [۱۲]. همچنین برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_{\gamma}^m[a, b]$ و روش به دست آوردن هسته بازتولیدی آن‌ها به [۴، ۱۸، ۱۲] مراجعه شود. در مساله (۱.۲)، برای $m > M$ قرار می‌دهیم $L : W_{\gamma}^m[a, b] \rightarrow W_{\gamma}^1[a, b]$ و فرض می‌کنیم عملگر خطی L دارای یک معکوس کراندار $L^{-1} : W_{\gamma}^1[a, b] \rightarrow W_{\gamma}^m[a, b]$ است. نرم L^{-1} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|L^{-1}\| = \sup_{v \in W_{\gamma}^1[a, b], v \neq 0} \frac{\|L^{-1}v\|_{W_{\gamma}^m[a, b]}}{\|v\|_{W_{\gamma}^1[a, b]}}. \quad (۳.۲)$$

برای مشاهده شرایط کافی برای وجود معکوس کراندار به [۲۱] مراجعه کنید. برای هر $x_i \in [a, b]$ قرار دهید $\varphi_i(\cdot) = r(x_i, \cdot)$ که در آن هسته بازتولیدی $W_{\gamma}^1[a, b]$ است. علاوه بر آن فرض کنید $\psi_i(\cdot) = (L^*\varphi_i)(\cdot)$ که L^* عملگر الحاقی L است. اثبات قضیه‌های زیر در مراجع [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶] ارایه شده‌اند.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[a, b]$ چگال باشد، آن‌گاه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه کامل برای $W_{\gamma}^m[a, b]$ است و $\psi_i(x) = L_y K(x, y)|_{y=x_i}$ که در آن $K(x, y)$ هسته بازتولیدی فضای $W_{\gamma}^m[a, b]$ است.

برهان. داریم

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= (L^*\varphi_i)(x) = ((L^*\varphi_i)(y), K(x, y))_{W_{\gamma}^m[a, b]} \\ &= (\varphi_i(y), L_y K(x, y))_{W_{\gamma}^1[a, b]} = L_y K(x, y)|_{y=x_i}. \end{aligned}$$

واضح است که $\psi_i(x) \in W_{\gamma}^m[a, b]$ برای هر $u \in W_{\gamma}^m[a, b]$ فرض کنید

$$(u(\cdot), \psi_i(\cdot))_{W_{\cdot, \gamma}^m} = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

یعنی

$$\begin{aligned} (u(x), \psi_i(x))_{W_{\cdot, \gamma}^m} &= (u(x), L_y K(x, y)|_{t=x_i})_{W_{\cdot, \gamma}^m} \\ &= L_y(u(x), K(x, y))_{W_{\cdot, \gamma}^m}|_{y=x_i} = (Lu)(x_i) = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

با توجه به اینکه $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال است داریم، $(Lu)(x) = 0$. بنابراین با توجه به وجود L^{-1} در $W_{\cdot, \gamma}^m[a, b]$ داریم $u \equiv 0$. $\square$

دستگاه متعامد یکه $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ را در $W_{\cdot, \gamma}^m[a, b]$ می‌توان با استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت روی $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ به صورت به زیر دست آورد.

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x), \quad i = 1, 2, \dots$$

قضیه ۳.۲.۲. اگر $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در $[a, b]$ چگال باشد، $f \in W_{\cdot, \gamma}^1[a, b]$ و همچنین جواب مساله (۱.۲) یکتا باشد، آنگاه جواب (۱.۲) را به صورت زیر داریم:

$$u(x) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k) \bar{\psi}_i(x). \quad (5.2)$$

برهان.

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i=1}^\infty (u(x), \bar{\psi}_i(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (u(x), L^* \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (Lu(x), \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (f(x), \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k) \bar{\psi}_i(x). \end{aligned}$$

$\square$

حال جواب تقریبی مساله را می‌توان با قطع سری $u(x)$ در رابطه (۵.۲) به‌ازای تعداد متناهی از جملات به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u_N(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f(x_j) \bar{\psi}_i(x). \quad (6.2)$$

الگوریتم روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مساله (۱.۲)

(۱) به دست آوردن هسته فضای هیلبرت $W_{\cdot, \cdot}^m[a, b]$ که در شرایط مرزی مساله صدق کند. توجه کنید که $m > M$ و هسته به صورت (۱۱.۱) است که ضرایب آن از حل یک دستگاه خطی مانند (۱۲.۱) به دست می‌آید.

(۲) به دست آوردن توابع $\psi_i(x) = L_y K(x, y)|_{y=x_i}$ با استفاده از نقاط $\{x_i\}_{i=1}^N$ در $[a, b]$.

(۳) تولید توابع متعامد یکه $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^N$ با اعمال فرآیند گرام-اشمیت بر روی توابع $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^N$.

(۴) تقریب جواب مساله با N جمله از سری جواب (۵.۲) به صورت رابطه (۶.۲).

قضیه ۴.۲.۲. جواب تقریبی u_N و مشتقات آن $(1 \leq k \leq m-1)$ ، $u_N^{(k)}(x)$ وقتی که $N \rightarrow \infty$ به طور یکنواخت همگرا هستند.

۳.۲ برآورد خطا

در این بخش خطای تقریب (۶.۲) را بررسی می‌کنیم. ابتدا به بررسی خطای قطع در سری جواب می‌پردازیم. این برآورد خطا همگرایی جواب تقریبی را وقتی که $N \rightarrow \infty$ نتیجه می‌دهد. علاوه بر این برآورد خطا دیگری ارائه شده است که بر اساس مانده و بیشترین طول گام نقاط انتخاب شده است. در این حالت وقتی که بیشترین طول گام نقاط انتخاب شده به سمت صفر میل می‌کند همگرایی جواب تقریبی حاصل می‌شود.

۱.۳.۲ خطای قطع سری جواب دقیق

گزاره ۱.۳.۲. فرض کنید $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک پایه متعامد یکه برای $W_{\cdot, \cdot}^m[a, b]$ باشد. آنگاه هسته بازتولیدی $K(x, y) \in W_{\cdot, \cdot}^m[a, b]$ دارای نمایشی به فرم زیر است:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(y). \quad (۷.۲)$$

برهان. فرض کنید $f \in W_{\cdot, \cdot}^m[a, b]$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} (f(y), K(x, y))_{W_{\cdot, \cdot}^m} &= (f(y), \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(y))_{W_{\cdot, \cdot}^m} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} (f(y), \bar{\psi}_i(y))_{W_{\cdot, \cdot}^m} \bar{\psi}_i(x) = f(x). \end{aligned}$$

آخرین تساوی بسط فوریه $f \in W_{\cdot, \cdot}^m[a, b]$ بر حسب پایه متعامد یکه $\bar{\psi}_i \in W_{\cdot, \cdot}^m[a, b]$ است. با توجه به یکتایی هسته بازتولیدی اثبات کامل است. $\square$

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید

$$W_{\Psi,N}^m[\cdot, \cdot] = \text{span}\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N\}$$

و

$$K_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(y).$$

تصویر متعامد روی $W_{\Psi,N}^m[\cdot, \cdot]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi_N : W_{\Psi,N}^m[\cdot, \cdot] \rightarrow W_{\Psi,N}^m[\cdot, \cdot],$$

به طوری که برای هر $v \in W_{\Psi,N}^m[a, b]$ و برای هر $u \in W_{\Psi,N}^m[a, b]$ داریم:

$$(u - \Pi_N u, v)_{W_{\Psi,N}^m} = 0, \quad (۸.۲)$$

یا به طور معادل آن،

$$\Pi_N u = \sum_{i=1}^N (u, \bar{\psi}_i) \bar{\psi}_i(x). \quad (۹.۲)$$

گزاره ۳.۳.۲. تصویر متعامد $\Pi_N u$ بهترین تقریب $u \in W_{\Psi,N}^m[a, b]$ در $W_{\Psi,N}^m[a, b]$ است. به طوری که به ازای هر عضو دلخواه $v \in W_{\Psi,N}^m[a, b]$ داریم:

$$\|u - \Pi_N u\|_{W_{\Psi,N}^m} \leq \|u - v\|_{W_{\Psi,N}^m} \quad (۱۰.۲)$$

برهان. فرض کنید $v = \sum_{i=1}^N \hat{v}_i \bar{\psi}_i \in W_{\Psi,N}^m[\cdot, \cdot]$ تقریبی برای

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (u, \bar{\psi}_i)_{W_{\Psi,N}^m} \bar{\psi}_i = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{u}_i \bar{\psi}_i \in W_{\Psi,N}^m[a, b],$$

باشد، آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_N u\|_{W_{\Psi,N}^m} &= \sum_{i=N+1}^{\infty} \hat{u}_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N (\hat{u}_i - \hat{v}_i)^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} \hat{u}_i^2 = \|u - v\|_{W_{\Psi,N}^m}^2. \end{aligned}$$

□

برآورد خطای تصویر متعامد در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنید u_N جواب تقریبی (۱.۲) در $W_{\Psi,N}^m[a, b]$ باشد که توسط رابطه (۶.۲) بیان شده است و $u \in W_{\Psi,N}^m[a, b]$ جواب دقیق مساله (۱.۲) باشد. آن‌گاه

$$\max_{a \leq x \leq b} |u(x) - u_N(x)| \leq \mathfrak{C}_N \|u\|_{W_{\Psi,N}^m}, \quad (۱۱.۲)$$

که در آن $\mathfrak{C}_N = \max_{a \leq x \leq b} \mathcal{C}_N(x) = \max_{1 \leq x \leq N} |K(x, x) - K_N(x, x)|$ و با افزایش N به سمت صفر میل می‌کند.

برهان. برای هر $x \in [a, b]$ داریم:

$$\begin{aligned} \|K(x, \cdot)\|_{W_{\cdot, \gamma}^m}^{\gamma} &= (K(x, \cdot), K(x, \cdot))_{W_{\cdot, \gamma}^m} \\ &= K(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_i^{\gamma}(x). \end{aligned} \quad (12.2)$$

همچنین با استفاده از متعامد یک‌به‌یک بودن $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^N$ داریم:

$$\begin{aligned} \|K_N(x, \cdot)\|_{W_{\cdot, \gamma}^m}^{\gamma} &= (K_N(x, \cdot), K_N(x, \cdot))_{W_{\cdot, \gamma}^m} \\ &= (\sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(\cdot), \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(\cdot))_{W_{\cdot, \gamma}^m} \\ &= \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i^{\gamma}(x) = K_N(x, x). \end{aligned} \quad (13.2)$$

توجه کنید که $u_N = \Pi_N u$ با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز و متعامد یک‌به‌یک بودن $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^N$ برای هر $x \in [a, b]$ داریم:

$$\begin{aligned} |u(x) - \Pi_N u(x)| &= |\sum_{i=N+1}^{\infty} (u, \bar{\psi}_i) \bar{\psi}_i(x)| \\ &= |(u(y), \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x))| \\ &\leq \|u\| \|\sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x)\| \\ &= \|u\| |\sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i^{\gamma}(x)| = \|u\| |K(x, x) - K_N(x, x)|. \end{aligned}$$

قرار دهید $\mathcal{C}_N(x) = K(x, x) - K_N(x, x)$ و $\mathfrak{C}_N = \max_{\cdot \leq x \leq \cdot} \mathcal{C}_N(x)$. برای هر $x \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{N+1}(x) &= |K(x, x) - K_{N+1}(x, x)| \\ &= \|\sum_{i=N+2}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x)\| = |\sum_{i=N+2}^{\infty} \bar{\psi}_i^{\gamma}(x)| \\ &\leq |\sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i^{\gamma}(x)| = \mathcal{C}_N(x), \end{aligned}$$

آن‌گاه داریم

$$\mathfrak{C}_{N+1} = \max_{\cdot \leq x \leq \cdot} \mathcal{C}_{N+1}(x) \leq \max_{\cdot \leq x \leq \cdot} \mathcal{C}_N(x) = \mathfrak{C}_N.$$

همچنین با توجه به (12.2) و برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه و هر $N > n$ با n به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\mathcal{C}_N(x) = \sum_{i=N+1}^{\infty} (\bar{\psi}_i(x))^{\gamma} \leq \epsilon, \quad \forall x \in [0, 1],$$

همچنین برای $N > n$ داریم

$$\mathfrak{C}_N = \max_{0 \leq x \leq 1} \mathcal{C}_N(x) \leq \epsilon.$$

بنابراین $\{\mathfrak{C}_N\}_{N=1}^{\infty}$ یک دنباله مثبت نزولی است و به صفر همگراست. $\square$

برآورد خطای (۱۱.۲) بدترین حالت رفتار تصویر متعامد و همچنین تقریب را بیان می‌کند. خطا براساس درصدی از نرم جواب دقیق $u \in W_{\mathfrak{p}}^m[0, 1]$ داده شده است، که تنها کمیت نامعلوم در کران خطا است. وقتی که $N \rightarrow \infty$ ثابت $\mathfrak{C}_N = \max_{a \leq x \leq b} \mathcal{C}_N(x) = \max_{a \leq x \leq b} |K(x, x) - K_N(x, x)| \rightarrow 0$ توجه کنید که مقدار $\mathfrak{C}_N$ به طور دقیق قابل محاسبه بوده و اگر الگوریتم‌های به کار رفته در تقریب جواب دارای ضعف‌هایی مانند ناپایداری یا ناسازگاری یا به هر دلیل دیگر باشند، این ضعف خود را در مقدار $\mathfrak{C}_N$ نشان می‌دهد و مقدار آن بزرگ و غیر قابل قبول خواهد بود. برای مطالعه بیشتر در زمینه چنین برآورد خطایی می‌توان به مقاله ارایه شده توسط رابرت شابک^۷ [۲۲] مراجعه نمود.

۲.۳.۲ خطای تقریب بر اساس مانده جواب تقریبی و بیشترین طول گام

فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset [a, b]$ نقاط انتخاب شده برای تولید پایه‌های متعامد یک $\bar{\psi}_i$ باشند. در ادامه این بخش برآورد خطا بر اساس بیشترین طول گام h بیان می‌شود که:

$$h = \max_{1 \leq i \leq N} |x_{i+1} - x_i|, \quad x_0 = a, x_{N+1} = b.$$

لم ۵.۳.۲. فرض کنید تابع $g \in W_1^1[a, b]$ در نقاط $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset [a, b]$ صفر باشد. همچنین فرض کنید $g^{(\alpha+1)} \in L^1[a, b]$ ، $g \in C^\alpha[a, b]$ ، $N \geq \alpha + 1$ ، آن‌گاه

$$\|g\|_{W_1^1} \leq Ch^\alpha \max_{a \leq x \leq b} |g^{(\alpha)}(x)|, \quad (14.2)$$

که در آن $h = \max_{1 \leq i \leq N} |x_{i+1} - x_i|$ ، $x_0 = a$ ، $x_{N+1} = b$ و C یک عدد ثابت است.

برهان. برای هر $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ، $(i = 1, \dots, N)$ داریم:

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - g(x_i)| = \left| \int_{x_i}^x g'(t) dt \right| \\ &\leq |x - x_i| \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |g'(x)| \leq h \|g'\|_\infty. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $x \in [x_0, x_1]$ داریم

$$|g(x)| = |g(x) - g(x_1)| \leq |x - x_1| \max_{x_0 \leq x \leq x_1} |g'(x)| \leq h \|g'\|_\infty.$$

^۷ Robert Schaback

اعمال قضیه رول^۸ بر روی g در بازه $[x_i, x_{i+1}]$ نتیجه می‌دهد که $g'(t_i) = 0$ که در آن $t_i \in (x_i, x_{i+1})$ و $i = 1, \dots, N-1$. برای هر $x \in [a, b]$ ثابت t_i ای وجود دارد به طوری که $|x - t_i| < 2h$

و

$$|g'(x)| = |g'(x) - g'(t_i)| =$$

$$\left| \int_{t_i}^x g''(t) dt \right| \leq |x - t_i| \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} |g''(x)| \leq 2h \|g''\|_{\infty},$$

آن‌گاه داریم $|g(x)| \leq 2h^2 \|g''\|_{\infty}$. به طور مشابه، ثابت C_1 وجود دارد به طوری که

$$|g(x)| \leq C_1 h^{\alpha+1} \|g^{(\alpha+1)}\|_{\infty},$$

و

$$|g'(x)| \leq C_1 h^{\alpha} \|g^{(\alpha+1)}\|_{\infty}.$$

به سادگی می‌توان ثابت C را یافت به طوری که

$$\|g\|_{W_1^{\alpha}} = \left((g(a))^2 + \int_a^b (g'(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq Ch^{\alpha} \max_{a \leq x \leq b} |g^{(\alpha+1)}(x)|.$$

□

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنید u_N جواب تقریبی (۱.۲) در $W_{1,N}^m[a, b]$ باشد که توسط رابطه (۶.۲) بیان شده است و $u \in W_{1,N}^m[a, b]$ جواب دقیق مساله (۱.۲) باشد. فرض کنید L دارای معکوس کراندار L^{-1} است. اگر $a < x_1 \leq \dots \leq x_N < b$ و همچنین اگر $1 \leq \alpha \leq m$ و $f, p_0, \dots, p_M \in C^{\alpha}[a, b]$ و $f^{(\alpha+1)}, p_0^{(\alpha+1)}, \dots, p_M^{(\alpha+1)} \in L^2[a, b]$ و $m \geq M + 1$ و $N \geq \alpha + 1$ به طوری که $m \geq M + 1$ و $N \geq \alpha + 1$ آن‌گاه

$$\|u^{(k)} - u_N^{(k)}\|_{\infty} \leq Ch^{\alpha} \max_{a \leq x \leq b} |R_N^{(\alpha+1)}(x)|, \quad 0 \leq k \leq m-1, \quad (15.2)$$

که در آن $R_N(x) = Lu_N(x) - f(x)$ خطای مانده در $x \in [a, b]$ یک عدد ثابت و h بیشترین طول گام است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که Lu_N تابع f را در نقاط X درونیابی می‌کند:

^۸Roll's theorem

$$\begin{aligned}
 Lu_N(x_l) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f(x_j) L\bar{\psi}_i(x_l) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f(x_j) (L\bar{\psi}_i, \varphi_l) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f(x_j) (\bar{\psi}_i, L^* \varphi_l) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f(x_j) (\bar{\psi}_i, \psi_l).
 \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^s \beta_{sl} Lu_N(x_l) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f(x_j) (\bar{\psi}_i, \sum_{l=1}^s \beta_{sl} \psi_l) \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i \beta_{ij} f(x_j) (\bar{\psi}_i, \bar{\psi}_s) \\
 &= \sum_{j=1}^s \beta_{sj} f(x_j).
 \end{aligned}$$

اگر $s = 1$ ، آن‌گاه $Lu_N(x_1) = f(x_1)$

اگر $s = 2$ آن‌گاه

$$\beta_{21} Lu_N(x_1) + \beta_{22} Lu_N(x_2) = \beta_{21} f(x_1) + \beta_{22} f(x_2).$$

واضح است که $Lu_N(x_2) = f(x_2)$. علاوه بر آن با استفاده از استقرا به سادگی می‌توان نشان داد که

$$Lu_N(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

قرار دهید $R_N(x) = Lu_N(x) - f(x)$. با استفاده از گزاره (۸.۳.۱) به سادگی می‌توان دید که برای $1 \leq \alpha \leq 2m - 2M - 2$ داریم $R_N \in C^\alpha[a, b]$ و $R_N^{(\alpha+1)} \in L^2[a, b]$. آن‌گاه از لم (۵.۳.۲) داریم

$$\|R_N\|_{W_2^1} \leq Ch^\alpha \max_{a \leq x \leq b} |R_N^{(\alpha+1)}(x)|.$$

توجه کنید که $u - u_N = L^{-1} R_N$ ، آن‌گاه ثابت $\mathcal{L}$ وجود دارد به طوری که:

$$\begin{aligned}
 \|u - u_N\|_{W_{2,\gamma}^m} &= \|L^{-1} R_N\|_{W_{2,\gamma}^m} \\
 &\leq \|L^{-1}\| \|R_N\|_{W_2^1} \leq C \mathcal{L} h^\alpha \max_{a \leq x \leq b} |R_N^{(\alpha+1)}(x)|.
 \end{aligned}$$

آن‌گاه با استفاده از لم (۹.۳.۱) داریم

$$\|u^{(k)} - u_N^{(k)}\|_{\infty} \leq C d \mathcal{L} h^{\alpha} \max_{a \leq x \leq b} |R_N^{(\alpha+1)}(x)|, \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

□

نامساوی فوق اثبات قضیه را کامل می‌کند.

۴.۲ نتایج عددی

در این بخش به منظور بررسی عملی خطا و مقایسه آن با قضیه‌های ارائه شده در بخش‌های قبلی، روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت را بر روی دو مساله مقدار مرزی خطی به کار می‌بریم.

۱.۴.۲ مساله مقدار مرزی مرتبه دوم دو نقطه‌ای

مساله مقدار مرزی خطی دو نقطه‌ای مرتبه دو زیر را در نظر بگیرید:

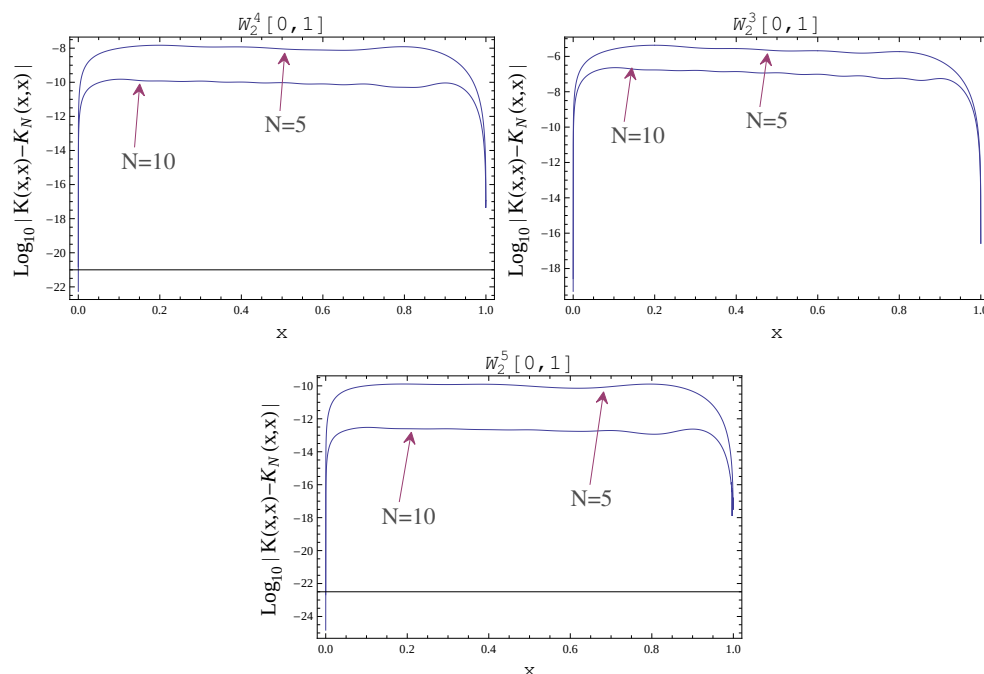
$$\begin{cases} u''(x) + 200e^x u'(x) + 300 \sin(x) u(x) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = a, u(1) = b, \end{cases}$$

که در آن a, b و f چنان داده شده‌اند که جواب دقیق $u(x) = \sinh(x)$ است.

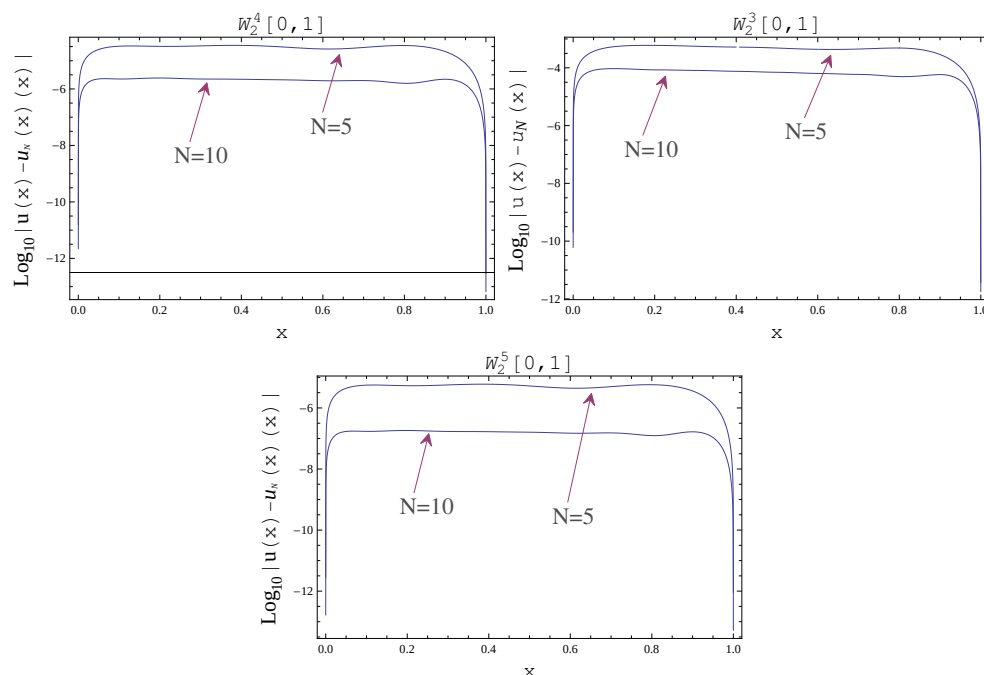
نتایج اعمال روش بر روی مساله (۱.۴.۲) به شرح زیر است. شکل (۱.۲) نمودار $\log_{10} |C_N(x)|$ در فضای $W_{\infty}^m[0, 1]$ به ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ با $N = 5, 10$ در قضیه (۴.۳.۲)، برای فضای $W_{\infty}^m[0, 1]$ به ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ با $N = 5, 10$ در شکل‌های (۲.۲)، (۳.۲)، (۴.۲)، (۵.۲) و (۶.۲) نمودار خطای مطلق جواب تقریبی و مشتقات تا مرتبه چهارم آن در مقیاس لگاریتمی رسم شده است.

۲.۴.۲ مساله مقدار مرزی مرتبه پنجم دو نقطه‌ای

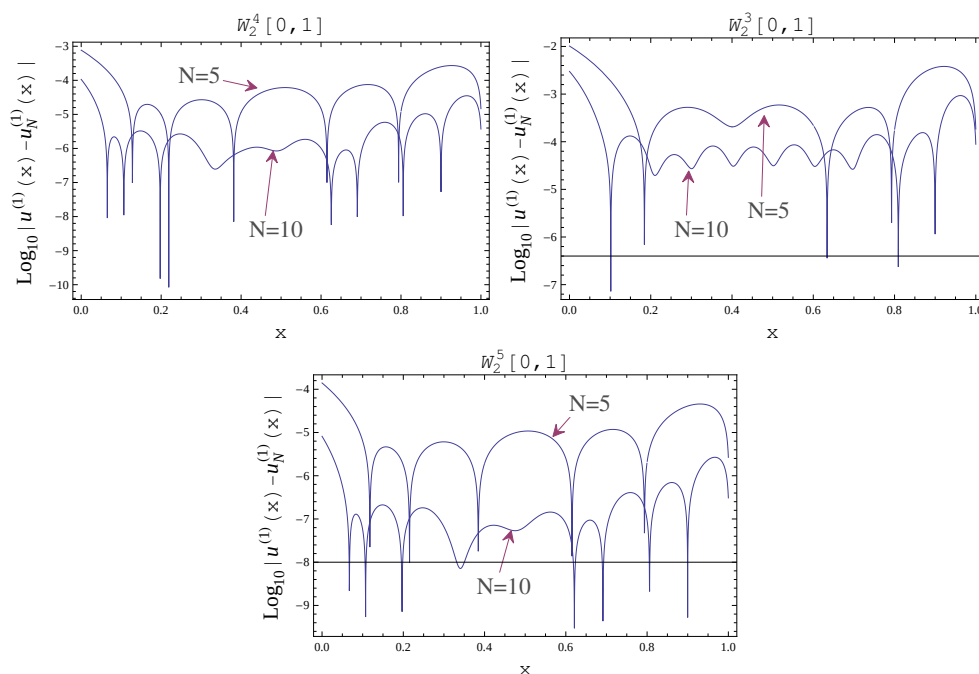
مساله مقدار مرزی خطی دو نقطه‌ای مرتبه پنج زیر را در نظر بگیرید:



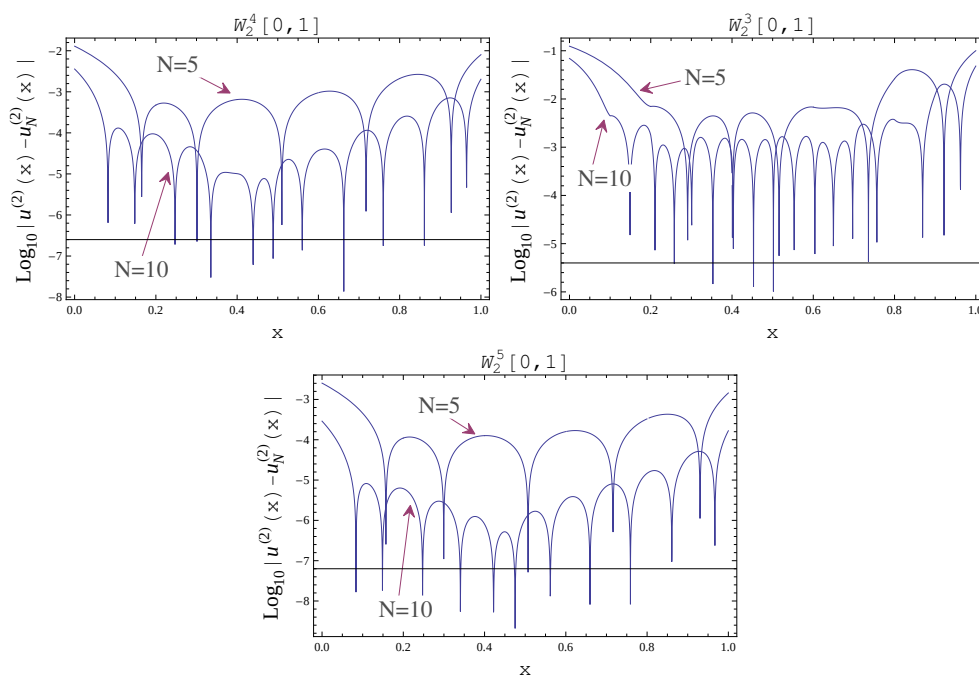
شکل ۱.۲: نمودار $\log_{10} |K(x, x) - K_N(x, x)|$ (در مقیاس لگاریتمی) در فضای $W_{2,\nu}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$.



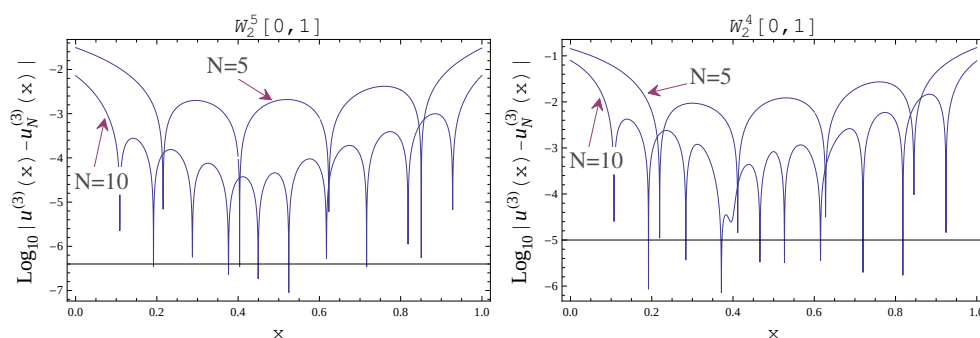
شکل ۲.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $\log_{10} |u(x) - u_N(x)|$ در فضای $W_{2,\nu}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$.



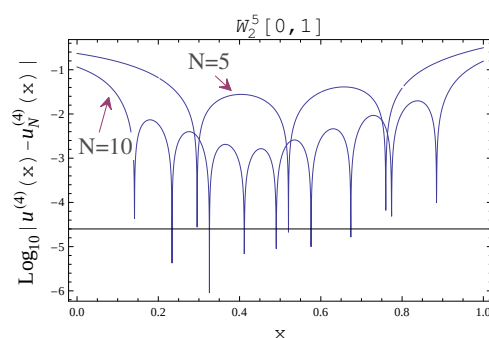
شکل ۳.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u'(x) - u_N'(x)|$ ، در فضای $W_{2,\gamma}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$.



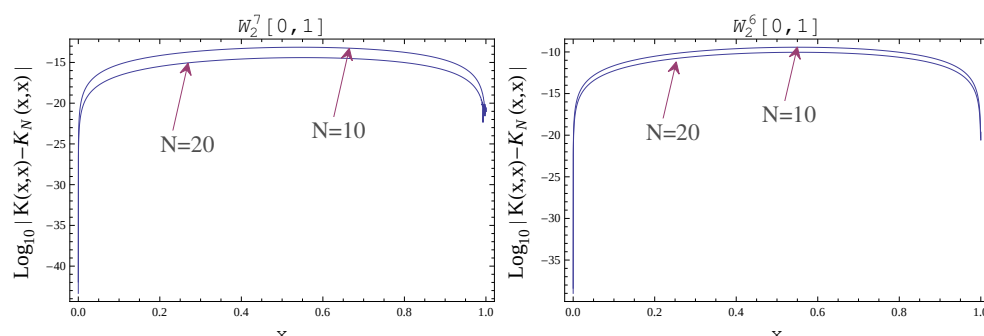
شکل ۴.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u''(x) - u_N''(x)|$ ، در فضای $W_{2,\gamma}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$.



شکل ۵.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u^{(3)}(x) - u_N^{(3)}(x)|$ در فضای $W_{2,p}^m[0, 1]$ به ازای $m = 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$.



شکل ۶.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|u^{(4)}(x) - u_N^{(4)}(x)|$ در فضای $W_{2,p}^m[0, 1]$ به ازای $m = 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱.۴.۲) با $N = 5, 10$.

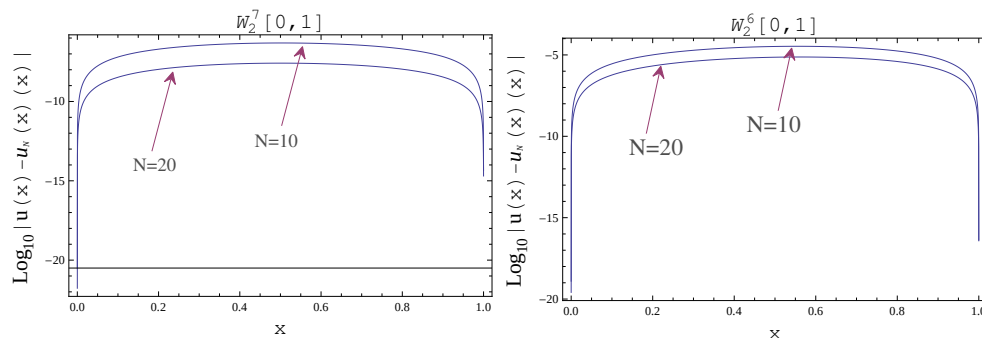


شکل ۷.۲: نمودار $\log_{10} |K(x, x) - K_N(x, x)|$ (در مقیاس لگاریتمی) در فضای $W_{2,p}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 3, 4, 5$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$.

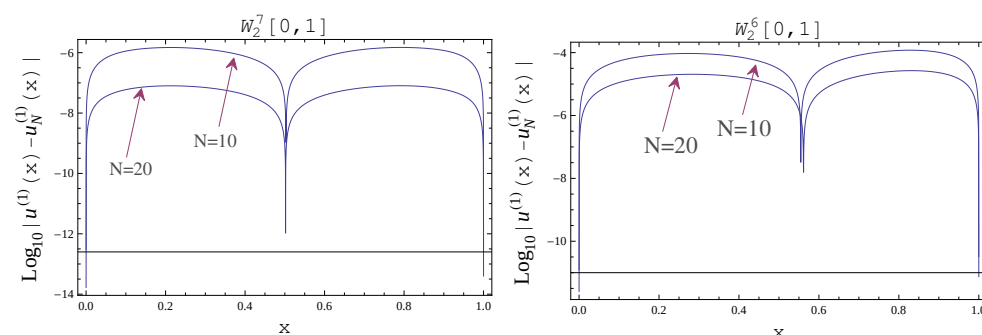
$$\left\{ \begin{array}{l} u^{(5)}(x) + u(x) = g(x), \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \\ u'(0) = 1, u'(1) = -e, \\ u^{(3)}(0) = -3, \end{array} \right. \quad (16.2)$$

که در آن g چنان داده شده است که جواب دقیق $u(x) = x(1-x)e^x$ باشد.

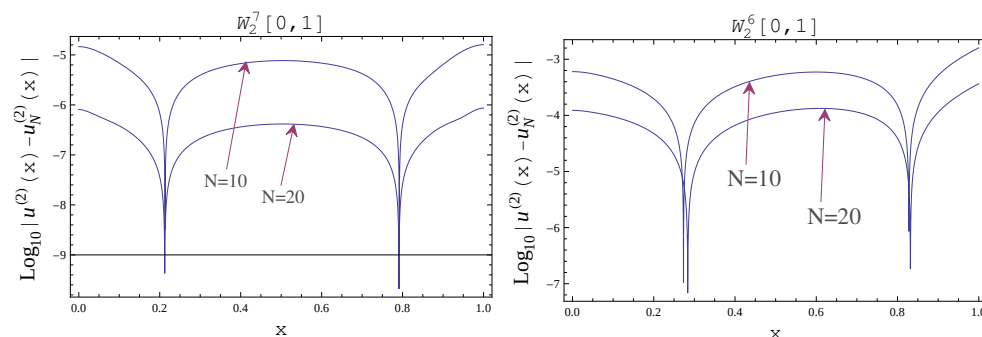
نتایج اعمال روش بر روی مساله (۱۶.۲) به شرح زیر است. شکل (۷.۲) نمودار $\log_{10} |C_N(x)|$ در قضیه (۴.۳.۲)، برای فضای $W_{2,p}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ با $N = 10, 20$ است. در شکل‌های (۸.۲)، (۹.۲)، (۱۰.۲)، (۱۱.۲)، (۱۲.۲) و (۱۳.۲) نمودار خطای مطلق جواب تقریبی و مشتقات تا مرتبه پنجم آن در مقیاس لگاریتمی رسم شده است. با توجه به نتایج گزارش شده همان‌طور که انتظار می‌رود با بالا رفتن درجه همواری فضای تقریب همگرایی سریع‌تر بوده و نتایج بهتری حاصل می‌شود که به طور کامل با قضیه‌های ارایه شده در این فصل سازگار است.



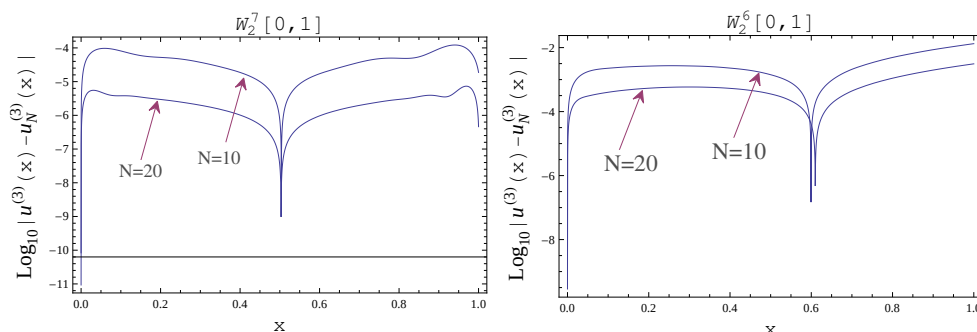
شکل ۸.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $\text{Log}_{10} |u(x) - u_N(x)|$ ، در فضای $W_{2,\gamma}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$.



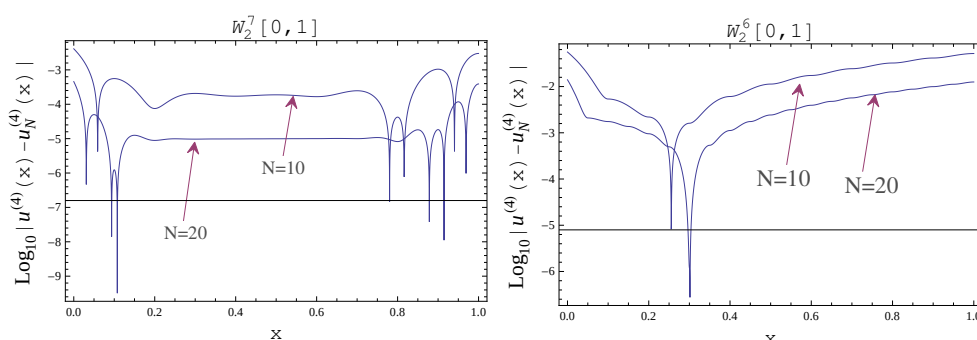
شکل ۹.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $\text{Log}_{10} |u'(x) - u'_N(x)|$ ، در فضای $W_{2,\gamma}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$.



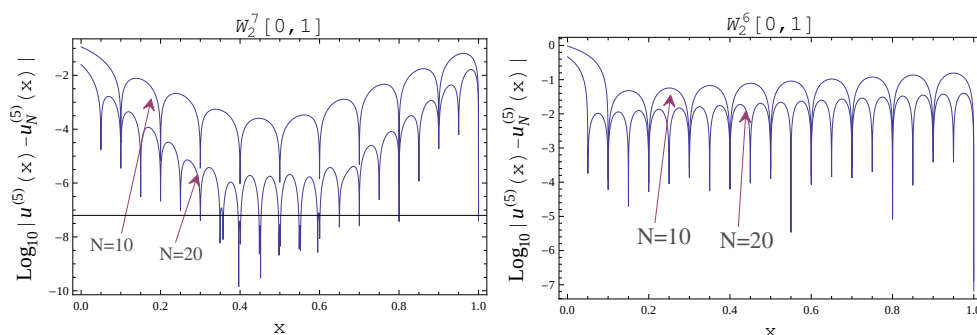
شکل ۱۰.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $\text{Log}_{10} |u''(x) - u''_N(x)|$ ، در فضای $W_{2,\gamma}^m[0, 1]$ به‌ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$.



شکل ۱۱.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|Log_{10}|u^{(3)}(x) - u_N^{(3)}(x)||$ در فضای $W_{2,p}^m[0, 1]$ به ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$.



شکل ۱۲.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|Log_{10}|u^{(4)}(x) - u_N^{(4)}(x)||$ در فضای $W_{2,p}^m[0, 1]$ به ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$.



شکل ۱۳.۲: خطای مطلق در مقیاس لگاریتمی $|Log_{10}|u^{(5)}(x) - u_N^{(5)}(x)||$ در فضای $W_{2,p}^m[0, 1]$ به ازای $m = 6, 7$ و در بازه $[0, 1]$ برای مساله (۱۶.۲) با $N = 10, 20$.

فصل ۳

بررسی چندگانگی جواب در مسایل مقدار

مرزی

۱.۳ مقدمه

در این فصل به بررسی چندگانگی جواب مسایل مقدار مرزی با استفاده از روش مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت می‌پردازیم. مسایل مقدار مرزی نقش اساسی در نظریه و کاربرد معادلات دیفرانسیل بازی می‌کنند. همچنین برای توصیف بسیاری از پدیده‌های علوم فیزیک، شیمی، بیولوژی و غیره به کار می‌روند. یافتن جواب تقریبی تحلیلی برای مسایل غیرخطی مرزی در علوم مهندسی و فیزیک دارای اهمیت زیادی می‌باشد. در این جا هدف ما بررسی وجود جواب، پیش بینی تعداد جواب‌ها و محاسبه جواب‌های تقریبی تحلیلی برای مسایل غیرخطی مرتبه دوم، دو نقطه‌ای و سه نقطه‌ای است. مسایل مقدار مرزی غیرخطی ممکن است جواب نداشته باشند یا دارای یک یا بیشتر از یک جواب باشند [۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶]. در مقالات روش‌های زیادی برای حل تقریبی مسایل مقدار مرزی غیرخطی ارائه شده است، اما علی‌رغم وجود جواب‌های چندگانه برای برخی از این مسایل، روش‌های ذکر شده معمولاً فقط به یکی از شاخه‌های جواب همگرا هستند. پیش بینی چندگانگی جواب و همچنین تقریب مناسب همه شاخه‌های جواب مسایل مقدار مرزی غیرخطی دارای اهمیت فراوانی است. عباس‌بندی^۱ و همکارانش در [۲۳، ۲۴] براساس روش تحلیلی هموتوبی روشی را برای پیش بینی چندگانگی جواب مسایل مقدار مرزی غیرخطی ارائه کرده‌اند. لیاو^۲ [۲۵، ۲۶] روش تحلیلی هموتوبی را برای به دست آوردن شاخه‌های جدید برخی از مسایل مقدار مرزی غیرخطی به کار برده است. در ادامه به معرفی یک روش جدید براساس ترکیب هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت و روش تیراندازی به منظور پیش بینی چندگانگی جواب و همچنین به دست آوردن یک تقریب قابل قبول برای تمام شاخه‌های جواب مسایل مقدار مرزی غیرخطی می‌پردازیم. در سال‌های اخیر در مقاله‌های فراوانی به کاربردهای مختلف هسته‌های بازتولیدی و بهبود آن‌ها در روش‌های عددی پرداخته شده است. به عنوان نمونه می‌توان حل عددی مسایل با مشتقات جزئی از طریق روش‌های گالرکین^۳ و هم محلی^۴ [۲۷، ۲۸]، تقریب مسایل با مشتقات جزئی تصادفی [۲۹]، حل عددی معادلات انتگرالی [۳۰، ۳۱] و کاربردهایی در یادگیری ماشین^۵ [۳۲] را مشاهده کرد. روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت به صورت موفقیت آمیزی بر روی بسیاری مسایل غیرخطی به کار رفته‌اند، به عنوان مثال دستگاه غیرخطی مسایل مقدار مرزی و مسایل با نقطه

^۱ Abbasbandy^۲ Liao^۳ Galerkin^۴ Collocation^۵ Machine Learning

بازگشت منفرد [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۳۳] را ببینید. اما همگرایی روش‌های ذکر شده وابسته به وجود و یکتایی جواب مساله مقدار مرزی غیرخطی است و نمی‌توان آن‌ها را به طور مستقیم برای حل مسایلی که دارای چندگانگی جواب هستند به کار برد. با توجه به اینکه مسایل مقدار اولیه در نظریه معادلات دیفرانسیل بیشتر و بهتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند به جای حل مساله مقدار مرزی به حل مساله مقدار اولیه متناسب با آن می‌پردازیم. بدین ترتیب که یک مساله مقدار اولیه متناسب با مساله مورد بررسی که وجود و یکتایی جواب آن شناخته شده یا قابل بررسی است را حل می‌کنیم و با استفاده از روش تیراندازی جواب مساله مقدار مرزی را می‌یابیم. با ترکیب دو روش تیراندازی و هسته‌های بازتولیدی یک روش تکراری مناسب برای مسایل مقدار مرزی غیرخطی مرتبه دو، دو نقطه‌ای و سه نقطه‌ای بدست می‌آوریم. این روش قابل تعمیم بر روی مسایل مرتبه بالاتر و با شرایط مرزی پیچیده‌تر می‌باشد. علاوه بر آن همگرایی روش تکراری پیشنهاد شده را بررسی می‌کنیم. در اینجا به طور خاص مساله مقدار مرزی غیرخطی مرتبه دوم زیر

$$u'' = f(x, u, u'); x \in [a, b], \quad (۱.۳)$$

تحت یکی از انواع شرایط مرزی زیر را بررسی می‌کنیم، شرط مرزی دونقطه‌ای

$$u(a) = u_0, \quad u(b) = u_1, \quad (۲.۳)$$

$$u'(a) = u_0, \quad u(b) = u_1, \quad (۳.۳)$$

یا شرط سه نقطه‌ای

$$u(a) = u_0, \quad u(b) = \rho u(\eta), \quad (۴.۳)$$

که در آن η و ρ هر دو ثابت‌های داده شده‌اند. در انتهای فصل برای نشان دادن کارایی محاسباتی و توانایی روش برای یافتن چندگانگی جواب و تقریب شاخه‌های جواب، مثال‌هایی عددی ارائه شده‌اند. روش پیشنهاد شده را برای برخی مسایل غیرخطی که به طور دقیق قابل حل هستند از جمله مساله غیرخطی براتو^۶ [۳۴، ۳۵، ۳۶] و معادله غیرخطی واکنش-انتشار^۷ [۲۳، ۳۷، ۳۸] به کار برده‌ایم. برای نشان دادن توانایی روش پیشنهاد شده، روش را بر روی دو مساله غیرخطی مقدار مرزی سه نقطه‌ای که جواب دقیق آن‌ها و همچنین وجود، یکتایی و چندگانگی جواب در آن‌ها نامعلوم است به کار می‌بریم. نتایج بدست آمده با نتایج گزارش شده در [۳۹] به طور کامل سازگار است. علاوه بر آن اطلاعات بیشتری در مورد وجود و چندگانگی جواب در این مسایل به دست می‌آید. همچنین تقریب شاخه‌های مختلف جواب را به دست می‌آوریم. در آخرین مثال یک شاخه جدید از جواب را به دست می‌آوریم که نشان دهنده برتری روش پیشنهاد شده نسبت به روش

^۶ Bratu's equation

^۷ Reaction-diffusion equation

تحلیلی ارایه شده در مقاله [۳۹] است. در عمل سادگی و کارایی، امتیازات قابل توجه روش ارایه شده است که از قرار دادن فرض‌ها و شرایط پیچیده روی مساله مانند روش‌های تحلیلی محض مانند جواب‌های پایینی و بالایی^۸ [۴۰، ۴۱، ۴۲] پرهیز می‌کند.

۲.۳ تقریب جواب

برای مساله مقدار مرزی غیرخطی (۱.۳) با یکی از شرایط مرزی (۲.۳)، (۳.۳) یا (۴.۳) روش تقریب به شرح زیر است. ما به جای مساله مقدار مرزی، مساله مقدار اولیه زیر را حل می‌کنیم

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u'); & x \in [a, b], \\ u(a) = u_0, u'(a) = \alpha, \end{cases} \quad (5.3)$$

که در آن α مجهول است و باید با توجه به شرط مرزی تعویض شده، تعیین شود. در اینجا فرض می‌کنیم که جواب مساله مقدار اولیه (۵.۳) موجود و یکتا می‌باشد و علاوه بر آن به طور پیوسته به مقادیر اولیه وابسته باشد. وجود، یکتایی و وابستگی به شرایط اولیه در مسایل مقدار اولیه به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفته شده است به عنوان مثال به [۲۱، ۴۳، ۴۴] رجوع کنید. حال باید جواب تقریبی مساله مقدار اولیه (۵.۳) را با دقت مناسب بدست آوریم و همچنین α را باید طوری تعیین کنیم که جواب $u(x; \alpha)$ در شرایط مرزی صدق کند. به این منظور از روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای حل مساله مقدار اولیه (۵.۳) استفاده می‌کنیم و برای پرهیز از محاسبات پارامتری در تکرارهای روش هسته‌های بازتولیدی به جای استفاده از یک مقدار α از یک دنباله $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ استفاده می‌کنیم به طوری که $u(b; \alpha_n) \rightarrow u_1$ وقتی که $n \rightarrow \infty$. برای یک α معین جواب تقریبی مساله (۵.۳) به صورت زیر به دست می‌آید. قرار دهید $Lu \equiv u''(x)$ ، بعد از همگن سازی (برای مشاهده همگن سازی به این صورت می‌توان به مرجع [۱۲] مراجعه نمود). مساله مقدار اولیه (۵.۳) را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\begin{cases} Lu = f(x, u, u'; \alpha); & x \in [a, b], \\ u(a) = 0, u'(a) = 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

برای حل مساله (۶.۳)، فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_1^3[a, b]$ و $W_1^2[a, b]$ مشابه (۵.۳.۱) تعریف می‌شوند، برای مشاهده جزئیات بیشتر به [۱۲] مراجعه کنید. در ادامه به منظور ساده سازی

^۸Lower and Power Solution

قرار می‌دهیم $a = 0$ و $b = 1$.

تعریف ۱.۲.۳. فضای ضرب داخلی $W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1] = \{u(x) | u^{(2)} \text{ و } u^{(3)} \in L^2[0, 1], u(0) = 0, u'(0) = 0\}$
ضرب داخلی و نرم فضای $W_{\beta,\gamma}^{3,p}[a, b]$ توسط رابطه‌های (۹.۱) و (۱۰.۱) داده شده است.

در مرجع [۱۲] نشان داده شده است که $W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1]$ و $W_{\beta,\gamma}^1[0, 1]$ فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی هستند. هسته بازتولیدی $R_x(\cdot) \in W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1]$ به صورت زیر است.

$$R_x(y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{4} + \frac{x^2 y^3}{12} - \frac{x y^4}{24} + \frac{y^5}{120}, & y \leq x, \\ \frac{x^5}{120} - \frac{x^6 y}{24} + \frac{(3x^2 + x^3)y^2}{12}, & y > x. \end{cases} \quad (۷.۳)$$

روش به دست آوردن هسته $R_x(y)$ در مراجع [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۳۳] به طور مفصل شرح داده شده است. در مساله (۶.۳) در صورتی که $u \in W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1]$ و $f \in W_{\beta,\gamma}^1[0, 1]$ واضح است که عملگر $L : W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1] \rightarrow W_{\beta,\gamma}^1[0, 1]$ یک عملگر خطی کراندار است. برای هر $x_i \in [0, 1]$ ثابت، قرار دهید $\varphi_i(\cdot) = r_{x_i}(\cdot)$ ، که در آن $r_x(\cdot)$ هسته بازتولیدی $W_{\beta,\gamma}^1[0, 1]$ است. علاوه بر آن فرض کنید $\psi_i(\cdot) = (L^* \varphi_i)(\cdot)$ که در آن L^* عملگر الحاق L است. فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال باشد، با توجه به قضیه (۲.۲.۲)، $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک دستگاه کامل برای $W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1]$ است و همچنین داریم $\psi_i(x) = L_y R_x(y)|_{y=x_i}$. دستگاه متعامد $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ روی فضای $W_{\beta,\gamma}^{3,p}[0, 1]$ را می‌توان با استفاده از فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت روی $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots). \quad (۸.۳)$$

به منظور تاکید روی وابستگی جواب (۶.۳) به مقدار اولیه مشتق α جواب را به صورت $u(x; \alpha)$ می‌نویسیم. برای هر α ثابت جواب (۶.۳) با روش تکراری فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی به صورت زیر تولید می‌شود.

$$\begin{cases} u_0(x) = 0, \\ B_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, u_{k-1}(x_k), u'_{k-1}(x_k); \alpha), \\ u_n(x; \alpha) = \sum_{i=1}^n B_i \bar{\psi}_i(x). \end{cases} \quad (۹.۳)$$

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید $\|u_n\|_{W_{\beta,\gamma}^{3,p}}$ در (۹.۳) کراندار و مساله (۶.۳) دارای جواب یکتا باشد. اگر $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال باشد، آنگاه جواب تقریبی n جمله ای $u_n(\cdot; \alpha)$ که توسط رابطه (۹.۳)

تعریف می‌شود به جواب دقیق $u(., \alpha)$ مساله (۶.۳) همگراست و

$$u(x; \alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x),$$

که در آن B_i توسط رابطه (۹.۳) داده شده است.

برهان. برای یک α ثابت از رابطه (۹.۳) داریم

$$u_{n+1}(x; \alpha) = u_n(x; \alpha) + B_{n+1} \bar{\psi}_{n+1}(x)$$

و از یکامتعامد بودن $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1}^{\infty}$ داریم

$$\|u_{n+1}\|^2 = \|u_n\|^2 + (B_{n+1})^2$$

که نتیجه می‌دهد $\|u_{n+1}\|^2 \geq \|u_n\|^2$. از آنجا که $\|u_n\|$ کراندار است، $\|u_n\|$ همگراست و از کامل بودن $W_{\beta, \gamma}^3[0, 1]$ داریم $u_n(., \alpha) \rightarrow \bar{u}(., \alpha)$ در نرم $\|\cdot\|_{W_{\beta, \gamma}^3}$ همگراست. حال نشان می‌دهیم $\bar{u}(., \alpha)$ جواب مساله (۶.۳) است. با حد گرفتن از رابطه (۹.۳) داریم $\bar{u}(x; \alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$ از آنجا که $\bar{\psi}_i \in W_{\beta, \gamma}^3[0, 1]$ واضح است که تابع $\bar{u}(., \alpha)$ در شرایط اولیه (۶.۳) صدق می‌کند. حال داریم

$$\begin{aligned} B_n &= (\bar{u}, \bar{\psi}_n) \\ &= (\bar{u}, \sum_{j=1}^n \beta_{nj} \psi_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_{nj} (\bar{u}, \psi_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_{nj} (\bar{u}, L^* \varphi_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_{nj} (L\bar{u}, \varphi_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \beta_{nj} (L\bar{u})(x_j; \alpha). \end{aligned} \quad (10.3)$$

با توجه به تعریف B_n در (۹.۳) و (۱۰.۳)، به سادگی می‌توان دید که

$$(L\bar{u})(x_j; \alpha) = f(x_j, u_{j-1}(x_j; \alpha), u'_{j-1}(x_j; \alpha); \alpha), \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (11.3)$$

از آنجا که $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ چگال است برای هر $\bar{x} \in [0, 1]$ ، زیر دنباله ای مانند $\{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $x_{n_j} \rightarrow \bar{x}$. از رابطه (۱۱.۳) و پیوستگی توابع $u(., \alpha)$ و $u'(., \alpha)$ نتیجه می‌گیریم $(L\bar{u})(\bar{x}; \alpha) = f(\bar{x}, \bar{u}(\bar{x}; \alpha), \bar{u}'(\bar{x}; \alpha); \alpha)$. این نتیجه می‌دهد که $\bar{u}(x; \alpha)$ جواب مساله (۶.۳) است. از یکتایی جواب مساله (۶.۳) نتیجه می‌گیریم که $\bar{u}(x; \alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\psi}_i(x)$

□

روش تیراندازی برای مساله (۱.۳) با شرایط مرزی (۲.۳) روشی برای یافتن ریشه معادله $u(x) \equiv u(x; \alpha^*)$ باشد، آنگاه $F(\alpha) = u(1; \alpha) - u_1$ ریشه $\alpha = \alpha^*$ است. اگر $u(1; \alpha) = u_1$ جواب مساله (۱.۳) با شرایط مرزی (۲.۳) است. همچنین برای هر جواب $u(x)$ از مساله (۱.۳) و (۲.۳) مقدار $\alpha = u'(0)$ ریشه‌ای برای $F(\alpha)$ است. بنابراین مساله ما به یافتن ریشه‌های $F(\alpha)$ تقلیل می‌یابد. چندگانگی جواب را می‌توان با استفاده از تعداد ریشه‌های $F(\alpha)$ پیش‌بینی کرد. اگر ریشه‌ای نداشته باشد یا یک یا بیش از یک ریشه داشته باشد آنگاه مساله مقدار مرزی به ترتیب بدون جواب است یا یک یا چند جواب دارد. ریشه‌ها مقادیر $u'(0)$ به ازای شاخه‌های مختلف جواب هستند و $u(x; \alpha)$ شاخه‌های جواب متناظر با ریشه‌ها را به ما می‌دهد. برای یک پارامتر α محاسبه $u_n(1; \alpha)$ و حل $u_n(1; \alpha) = u_1$ با مقادیر بزرگ n بسیار وقت‌گیر است و در حقیقت عملی نیست. به منظور حل این مشکل ما از روش دوبخشی تکراری برای یافتن α_n ، ریشه‌های $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - u_1$ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ به طوری که $u_n(1; \alpha_n) \rightarrow u(1; \alpha^*) = u_1$.

قضیه ۳.۲.۳. اگر $F(\alpha) = u(1; \alpha) - u_1$ در یک بازه مانند I دارای یک ریشه ساده باشد، آنگاه جواب تقریبی n جمله‌ای $u_n(x; \alpha_n)$ به یک جواب دقیقی $u(x)$ مساله مقدار مرزی (۱.۳) و (۲.۳) همگراست که برای این جواب $u'(0) \in I$.

برهان. فرض کنید برای دو عدد μ_1 و μ_2 داشته باشیم $u(1; \mu_1) < u_1$ و $u(1; \mu_2) > u_1$ پس $0 < N$ وجود دارد به طوری که برای هر $n > N$ داریم $u_n(1; \mu_1) < u_1$ و $u_n(1; \mu_2) > u_1$. سپس با استفاده از روش دوبخشی بر روی $u_n(1; \alpha)$ می‌توان $\alpha_n \in [\mu_1, \mu_2]$ را طوری یافت که $u_n(1; \alpha_n) = u_1$ یا به عبارتی $F_n(\alpha_n) = 0$. ادعا می‌کنیم که برای هر $k > n$ ، $(u_k(1; \alpha_n) - u_1) > 0$ یا به عبارتی $F_k(\alpha_n) > 0$ ، در نتیجه ریشه $F(\alpha)$ متعلق به بازه $[\mu_1, \alpha_n]$ یا $[\alpha_n, \mu_2]$ است. از قضیه (۲.۲.۳) و برای هر $k > n$ به اندازه کافی بزرگ داریم

$$|u(1; \alpha_n) - u_k(1; \alpha_n)| \leq |u(1; \alpha_n) - u_n(1; \alpha_n)|,$$

همچنین داریم

$$|(u(1; \alpha_n) - u_1) - (u_k(1; \alpha_n) - u_1)| \leq |(u(1; \alpha_n) - u_1) - (u_n(1; \alpha_n) - u_1)|,$$

بنابراین

$$|F(\alpha_n) - F_k(\alpha_n)| \leq |F(\alpha_n) - F_n(\alpha_n)|,$$

سپس با استفاده از این حقیقت که $u_n(1; \alpha_n) = u_1$ یعنی $F_n(\alpha_n) = 0$ داریم

$$|F(\alpha_n) - F_k(\alpha_n)| \leq |F(\alpha_n)|. \quad (۱۲.۳)$$

فرض کنید ادعای ما درست نباشد، یعنی فرض کنیم

$$F_k(\alpha_n) = (u_k(1; \alpha_n) - u_1) < 0, \quad F(\alpha_n) = (u(1; \alpha_n) - u_1) > 0,$$

حالت دیگر به طور مشابه قابل بررسی است. بنابراین داریم

$$|F(\alpha_n) - F_k(\alpha_n)| \leq F(\alpha_n),$$

همچنین داریم

$$-F(\alpha_n) \leq F(\alpha_n) - F_k(\alpha_n) \leq F(\alpha_n),$$

از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که

$$-F(\alpha_n) + F_k(\alpha_n) \leq F(\alpha_n) \leq F(\alpha_n) + F_k(\alpha_n), \quad (13.3)$$

نامساوی سمت راست با فرض متناقض است. با توجه به روش به دست آوردن دنباله $\{\alpha_n\}$ ، دنباله دارای دو زیر دنباله $\{\gamma_n\}$ و $\{\beta_n\}$ است به طوری که

$$\mu_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots < \alpha^* < \dots < \beta_n < \dots < \beta_2 < \beta_1 < \mu_2, \quad (14.3)$$

دنباله‌ها یکنوا و کراندار بوده و در نتیجه هر کدام به ریشه $F(\alpha)$ همگرا هستند. بنابراین اگر $F(\alpha)$ دارای یک ریشه ساده در $[\mu_1, \mu_2]$ باشد آنگاه هر دو دنباله $\{\gamma_n\}$ و $\{\beta_n\}$ و بنابراین دنباله $\{\alpha_n\}$ به ریشه $F(\alpha)$ در $[\mu_1, \mu_2]$ همگرا هستند و با توجه به طور پیوسته وابسته بودن جواب مساله مقدار اولیه مساله (5.3) به شرایط اولیه $u_n(x; \alpha_n)$ به جوابی از مساله مقدار مرزی (1.3)، (2.3) همگراست که برای این جواب $u'(\cdot) \in [\mu_1, \mu_2]$. $\square$

3.3 معادله غیرخطی براتو

مساله براتو⁹ یک مساله مقدار مرزی غیرخطی است که به عنوان محکی برای بررسی دقت و کارایی روش‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرد [23، 24، 35، 36]. مساله براتو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0; & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \end{cases} \quad (15.3)$$

که در آن $\lambda > 0$. مساله براتو دارای جواب تحلیلی به صورت

⁹Bratu equation

جدول ۱.۳: خطای مطلق شاخه اول جواب مساله (۱۵.۳) برای $\lambda = 2$ و با مقادیر مختلف n .

x	n=10	n=25	n=50	n=100	n=300
0.1	3.51522×10^{-5}	3.17467×10^{-5}	9.84916×10^{-6}	2.62919×10^{-6}	3.01616×10^{-7}
0.2	1.69633×10^{-4}	7.0923×10^{-5}	1.96864×10^{-5}	5.09309×10^{-6}	5.75709×10^{-7}
0.3	3.79574×10^{-4}	1.03015×10^{-4}	2.7622×10^{-5}	7.06917×10^{-6}	7.9476×10^{-7}
0.4	5.36299×10^{-4}	1.24653×10^{-4}	3.28584×10^{-5}	8.35947×10^{-6}	9.36894×10^{-7}
0.5	6.23551×10^{-4}	1.33622×10^{-4}	3.48209×10^{-5}	8.8233×10^{-6}	9.86705×10^{-7}
0.6	6.3221×10^{-4}	1.28675×10^{-4}	3.32792×10^{-5}	8.4071×10^{-6}	9.38537×10^{-7}
0.7	5.62266×10^{-4}	1.10517×10^{-4}	2.83979×10^{-5}	7.15635×10^{-6}	7.9775×10^{-7}
0.8	4.22589×10^{-4}	8.09214×10^{-5}	2.06982×10^{-5}	5.20516×10^{-6}	5.7951×10^{-7}
0.9	2.288×10^{-4}	4.29856×10^{-5}	1.09452×10^{-5}	2.74751×10^{-6}	3.05545×10^{-7}

$$u(x) = -2 \ln \left[\frac{\cosh\left((x - \frac{1}{4})\frac{\theta}{4}\right)}{\cosh\left(\frac{\theta}{4}\right)} \right], \quad (۱۶.۳)$$

است که در آن θ جواب $\theta = \sqrt{2\lambda} \cosh(\frac{\theta}{4})$ می‌باشد. این مساله به ترتیب دارای یک، صفر و دو جواب است، هرگاه $\lambda = \lambda_c$ ، $\lambda > \lambda_c$ و $\lambda < \lambda_c$ که در آن λ_c مقدار بحرانی است. در مقالات [۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶] مقدار بحرانی λ_c به صورت $\lambda_c = 3/51383.0719$ محاسبه گردیده است. ما روش پیشنهادی را بر روی مساله (۱۵.۳) اعمال کرده‌ایم و نتایج به شرح زیر می‌باشد. نمودار (۱.۳) نقش پارامتر λ را در چندگانگی جواب نشان می‌دهد. نمودار (۳.۳) تصویر $F_n(\alpha; \lambda)$ را برای $\alpha \in [0, 10]$ و $\lambda \in [1, 6]$ با $n = 15$ نمایش می‌دهد. در شکل (۲.۳) نمودار $F_n(\alpha; \lambda) = u_n(1; \alpha, \lambda)$ را برای $\lambda = 4$ ، $\lambda = 3/5138$ ، $\lambda = 3$ ، $\lambda = 2$ و $\lambda = 5$ می‌بینیم که نشان می‌دهد مساله برای $\lambda = 2$ و $\lambda = 3$ دارای دوگانگی جواب و برای $\lambda = 3/5138$ دارای جواب یکتا و برای $\lambda = 4$ و $\lambda = 5$ بدون جواب است که این نتایج با مفهوم تحلیلی λ_c سازگاری کامل دارد. برای یک حالت معین $\lambda = 2$ نتایج در جدول‌های (۱.۳) و (۲.۳) ارائه شده‌اند. همچنین خطای مطلق جواب تقریبی در مقایسه با جواب دقیق در مقیاس لگاریتمی یعنی $\log_{10}(|u(x) - u_n(x)|)$ در $x \in [0, 1]$ برای شاخه‌های اول و دوم جواب با $n = 50, 100, 300$ در نمودارهای (۴.۳) و (۵.۳) ارائه شده‌اند. برای مقادیر دیگر λ نتایج مشابهی مشاهده می‌شود.

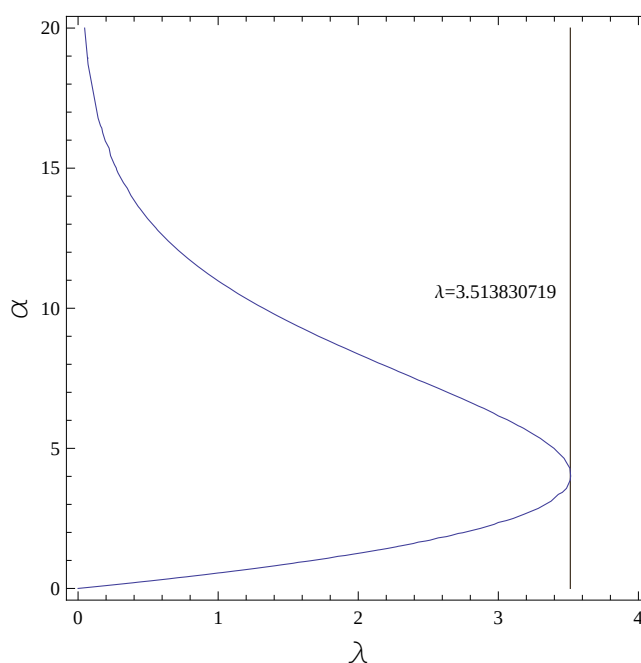
۴.۳ مدل غیرخطی واکنش-انتشار

مدل غیرخطی واکنش-انتشار^{۱۰} بررسی شده در مقالات [۲۳، ۳۷، ۳۸] یک فرآیند واکنش-انتشار پایدار در جسم متخلخل را شرح می‌دهد. در حالت متغیرهای بدون بعد مساله مقدار مرزی زیر را

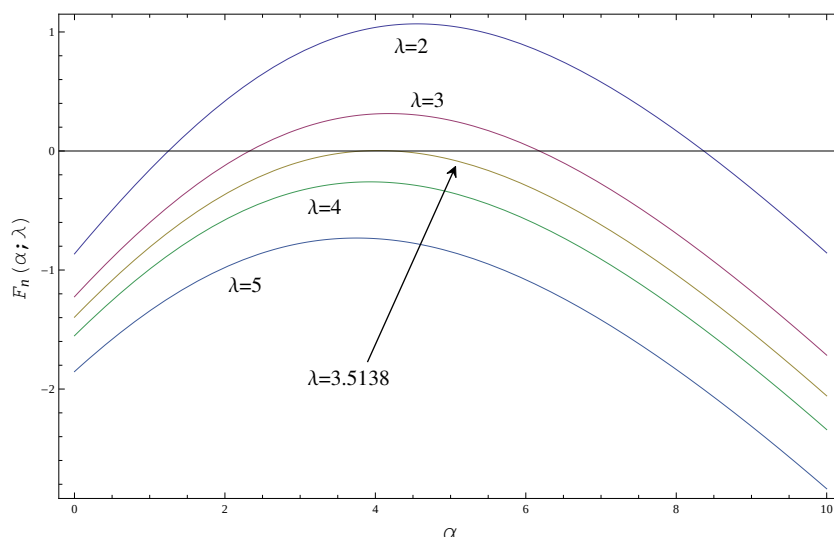
^{۱۰} reaction-diffusion model

جدول ۲.۳: خطای مطلق شاخه دوم جواب مساله (۱۵.۳) برای $\lambda = 2$ و با مقادیر مختلف n .

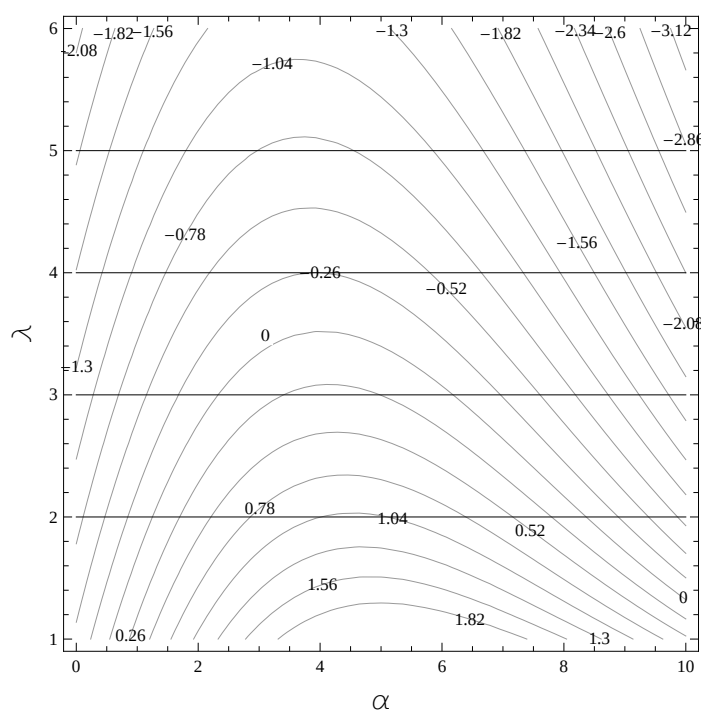
x	n=10	n=25	n=50	n=100	n=300
0.1	0.0152501	0.00191021	4.25384×10^{-4}	9.92813×10^{-5}	1.04815×10^{-5}
0.2	0.0228265	0.00315066	7.15593×10^{-4}	1.68237×10^{-4}	1.78358×10^{-5}
0.3	0.0235488	0.00347116	7.91016×10^{-4}	1.85756×10^{-4}	1.96533×10^{-5}
0.4	0.0152907	0.00263852	6.17452×10^{-4}	1.46493×10^{-4}	1.55936×10^{-5}
0.5	0.00256216	0.00147277	4.13236×10^{-4}	1.06535×10^{-4}	1.19899×10^{-5}
0.6	0.00484163	0.00123032	4.3877×10^{-4}	1.24091×10^{-4}	1.47638×10^{-5}
0.7	0.00430354	0.00159073	5.54154×10^{-4}	1.56126×10^{-4}	1.85567×10^{-5}
0.8	0.00137065	0.00158389	5.19739×10^{-4}	1.43799×10^{-4}	1.69325×10^{-5}
0.9	1.78414×10^{-4}	9.85974×10^{-4}	3.11219×10^{-4}	8.51028×10^{-5}	9.95879×10^{-6}



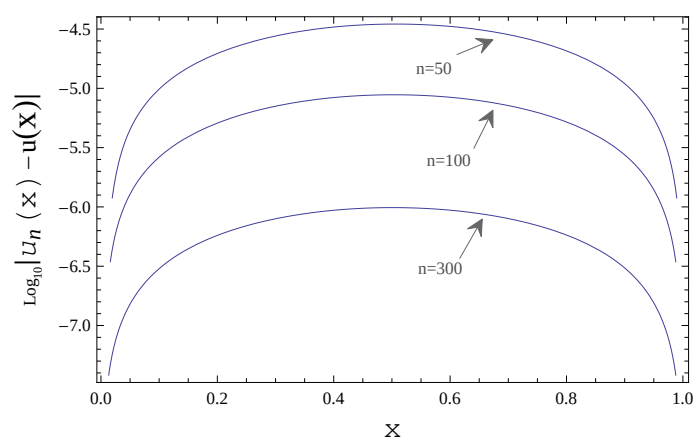
شکل ۱.۳: نمودار α نسبت به λ در رابطه $F_{15}(\alpha; \lambda) = u_{15}(1; \alpha, \lambda) = 0$ برای مساله براتو. نمودار با مفهوم تحلیلی مقدار بحرانی λ_c سازگار است.



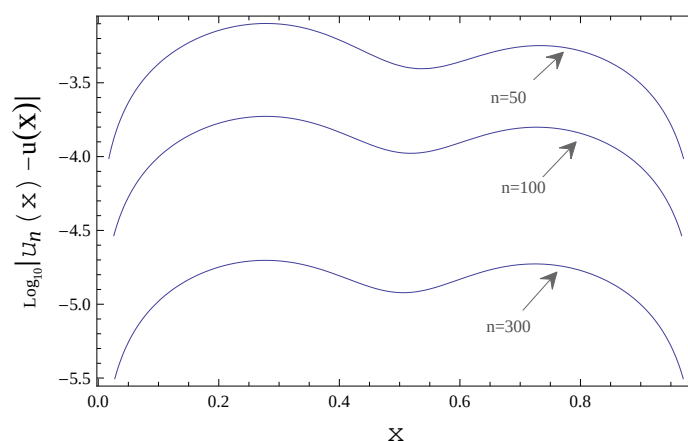
شکل ۲.۳: نمودار $F_n(\alpha; \lambda) = u_n(1; \alpha, \lambda)$ برای مساله براتو با $n = 15$ و مقادیر مختلف λ . معادله برای $\lambda = 2$ و $\lambda = 3$ دو ریشه و برای $\lambda = 3.5138$ یک ریشه دارد و برای $\lambda = 4$ و $\lambda = 5$ ریشه ندارد.



شکل ۳.۳: رسم کانتور $F_n(\alpha; \lambda)$ برای مساله براتو با $\alpha \in [0, 10]$ و $\lambda \in [1, 6]$ و $n = 15$. نمودار مفهوم تحلیلی مقدار بحرانی را تایید می‌کند.



شکل ۴.۳: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه اول جواب مساله براتو با $\lambda = 2$ و مقادیر مختلف $n = 50, 100, 300$.



شکل ۵.۳: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه دوم جواب مساله براتو با $\lambda = 2$ و مقادیر مختلف $n = 50, 100, 300$.

خواهیم داشت

$$\begin{cases} u''(x) - \psi^2 u^m = 0; & x \in [0, 1], \\ u'(0) = 0, u(1) = 1. \end{cases} \quad (17.3)$$

برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد این مساله و حالت بدون بعد آن می‌توان به [۳۸] مراجعه نمود. جواب دقیق تحلیلی و به طور ضمنی این مساله برای تمام مقادیر پارامترها در مقاله [۳۸] ارایه شده است. در حالت مرتبه واکنش $m = -1$ مساله برای $0.765152 \leq \psi < \psi_{max}(m)$ دارای دوگانگی جواب و برای $\psi > \psi_{max}(m)$ بدون جواب است. در حالت مرتبه واکنش $-1 < m < 0$ مساله به ترتیب دارای جواب یکتا برای $0 \leq \psi < \psi^*(m)$ ، دو جواب برای $\psi^*(m) \leq \psi < \psi_{max}(m)$ و همچنین برای $\psi > \psi_{max}(m)$ بدون جواب است. به منظور آزمودن روش پیشنهاد شده ما فقط مساله را در حالتی که مرتبه واکنش آن $m = -\frac{3}{4}$ است بررسی می‌کنیم. در این حالت مقادیر بحرانی $\psi^*(m)$ و $\psi_{max}(m)$ در مقاله [۳۸] به صورت $\psi^*(m) = 0.40$ و $\psi_{max}(m) = 0.839768$ داده شده‌اند. ما مساله (۱۷.۳) را با مساله مقدار اولیه زیر جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} u''(x) - \psi^2 u^m = 0; & x \in [0, 1], \\ u(0) = \alpha, u'(0) = 0, \end{cases} \quad (18.3)$$

که در آن α باید با توجه به شرط $u(1) = 1$ تعیین شود. در این حالت برای یک ψ ثابت ریشه‌های $F_n(\alpha; \psi) = u_n(1; \alpha, \psi) - 1$ تقریب‌هایی از $u(0)$ برای شاخه‌های مختلف جواب هستند. ما روش ارایه شده را بر روی (۱۷.۳) به کار برده ایم و نتایج آن به شرح زیر است. نمودار (۶.۳) نقش ψ را در چندگانگی جواب در حالت $m = -\frac{3}{4}$ و $m = -1$ نشان می‌دهد. در شکل (۷.۳) نمودار $F_{15}(\alpha; \psi)$ را برای $\psi = 0.3, \psi = 0.6, \psi = 0.8, \psi = 0.9$ رسم کرده‌ایم که نشان می‌دهد مساله دارای یک جواب یکتای غیر بدیهی برای $\psi = 0.3$ و دوگانگی جواب برای $\psi = 0.6$ و $\psi = 0.8$ است و همچنین برای $\psi = 0.9$ بدون جواب است. این نمودارها با مفهوم مقادیر بحرانی $\psi^*(m)$ و $\psi_{max}(m)$ برای حالت $m = -\frac{3}{4}$ کاملاً سازگار است. در مقاله [۳۸] نشان داده شده است که در حالت $m = -\frac{3}{4}$ و $\psi = 0.8$ مساله دارای جواب ضمنی زیر است

$$x = \frac{2\sqrt{2}c_0^{\frac{1}{4}}}{35\psi} \sqrt{\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{1}{4}} - 1} \left[16 + 8\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{1}{4}} + 6\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{1}{2}} + 5\left(\frac{u}{c_0}\right)^{\frac{3}{4}} \right], \quad (19.3)$$

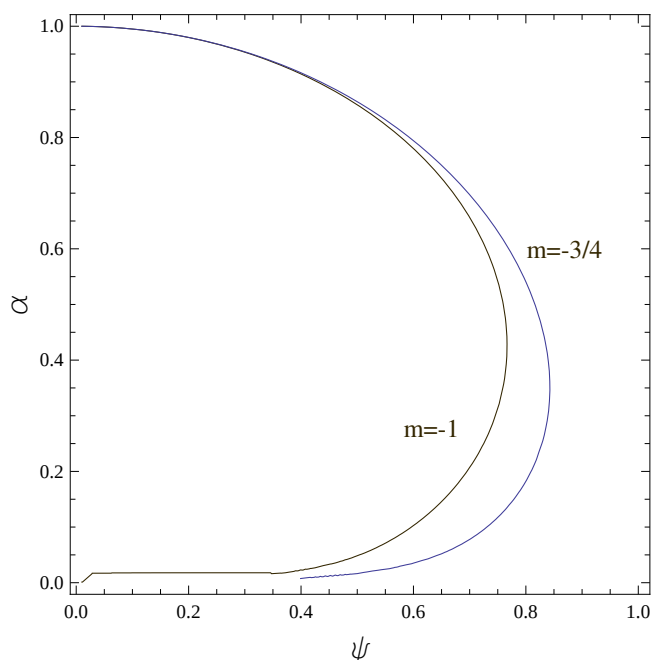
که در آن برای شاخه اول جواب $c_0 = 0.18367516$ و برای شاخه دوم جواب $c_0 = 0.53304788$. در این حالت خاص خطای مطلق به ترتیب برای شاخه‌های اول و دوم جواب در جدول های (۳.۳)، (۳.۳) و نمودارهای (۹.۳) و (۱۰.۳) در مقیاس لگاریتمی ارایه شده‌اند.

جدول ۳.۳: خطای مطلق شاخه اول جواب مساله (۱۷.۳) برای $\psi = ۰/۸$ ، مرتبه واکنش $m = -\frac{۳}{۴}$ و با مقادیر مختلف n .

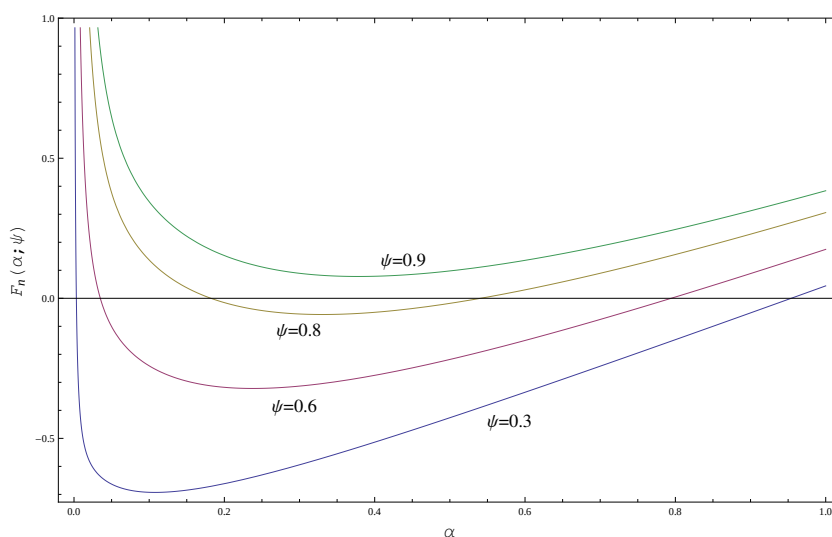
x	n=10	n=25	n=50	n=100	n=300
0.1	0.00206381	9.67382×10^{-4}	3.02236×10^{-4}	8.33097×10^{-5}	9.83545×10^{-6}
0.2	0.00226077	9.88984×10^{-4}	3.08849×10^{-4}	8.51206×10^{-5}	1.00486×10^{-5}
0.3	0.00221527	9.54158×10^{-4}	2.97263×10^{-4}	8.18539×10^{-5}	9.65812×10^{-6}
0.4	0.00207173	8.74195×10^{-4}	2.71618×10^{-4}	7.4716×10^{-5}	8.81079×10^{-6}
0.5	0.00184051	7.62172×10^{-4}	2.36227×10^{-4}	6.49212×10^{-5}	7.65174×10^{-6}
0.6	0.00154228	6.28675×10^{-4}	1.94464×10^{-4}	5.3403×10^{-5}	6.29143×10^{-6}
0.7	0.00119623	4.81431×10^{-4}	1.48667×10^{-4}	4.0801×10^{-5}	4.80507×10^{-6}
0.8	8.17222×10^{-4}	3.25486×10^{-4}	1.00379×10^{-4}	2.75347×10^{-5}	3.24176×10^{-6}
0.9	4.15974×10^{-4}	1.64282×10^{-4}	5.06052×10^{-5}	1.38755×10^{-5}	1.63322×10^{-6}

جدول ۴.۳: خطای مطلق شاخه دوم جواب مساله (۱۷.۳) برای $\psi = ۰/۸$ ، مرتبه واکنش $m = -\frac{۳}{۴}$ و با مقادیر مختلف n .

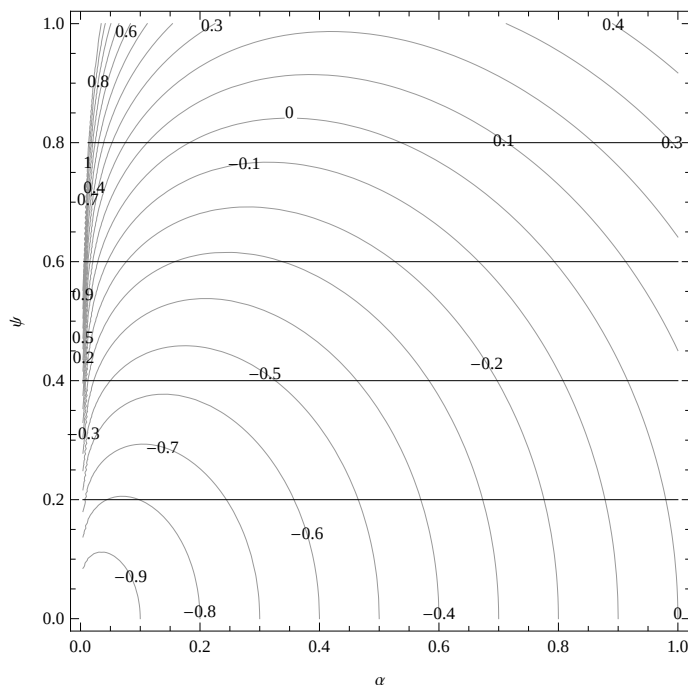
x	n=10	n=25	n=50	n=100	n=300
0.1	0.00737935	0.00137498	3.60694×10^{-4}	9.22912×10^{-5}	1.04108×10^{-5}
0.2	0.00679932	0.00126829	3.32661×10^{-4}	8.5112×10^{-5}	9.60043×10^{-6}
0.3	0.00612971	0.00114297	2.99753×10^{-4}	7.66877×10^{-5}	8.64983×10^{-6}
0.4	0.00537648	0.0010022	2.6281×10^{-4}	6.72331×10^{-5}	7.58318×10^{-6}
0.5	0.00455769	8.49349×10^{-4}	2.22712×10^{-4}	5.69732×10^{-5}	6.42583×10^{-6}
0.6	0.00369047	6.87601×10^{-4}	1.80291×10^{-4}	4.61203×10^{-5}	5.2017×10^{-6}
0.7	0.00278989	5.19736×10^{-4}	1.36273×10^{-4}	3.48596×10^{-5}	3.93163×10^{-6}
0.8	0.00186843	3.48049×10^{-4}	9.1256×10^{-5}	2.33439×10^{-5}	2.63283×10^{-6}
0.9	9.35966×10^{-4}	1.74343×10^{-4}	4.57121×10^{-5}	1.16935×10^{-5}	1.31885×10^{-6}



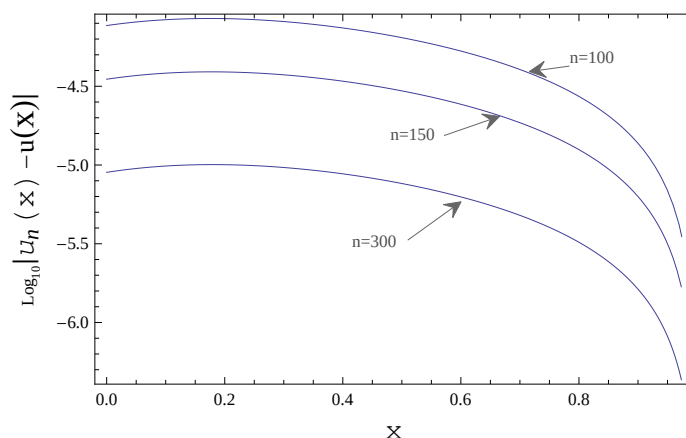
شکل ۶.۳: نمودار α نسبت به ψ در رابطه $F_{15}(\alpha; \psi) = u_{15}(1; \alpha, \psi) - 1 = 0$ برای مساله واکنش-انتشار. نمودار با مفهوم تحلیلی مقادیر بحرانی $\psi^*(m)$ و $\psi_{max}(m)$ با مرتبه واکنش $m = -\frac{3}{4}$ و $m = -1$ سازگار است.



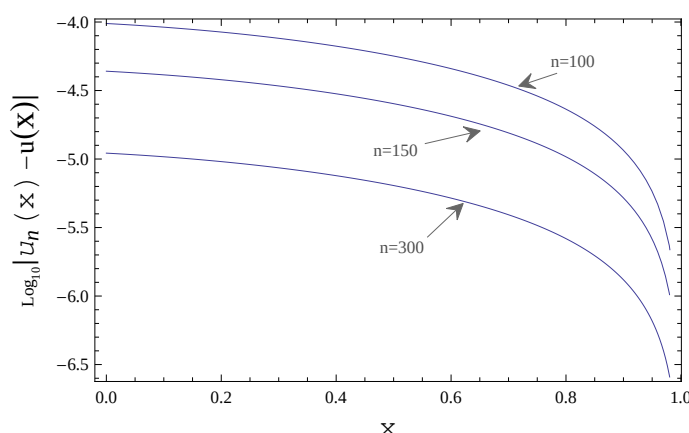
شکل ۷.۳: نمودار $F_n(\alpha; \psi) = u_n(1; \alpha, \psi) - 1$ برای مساله واکنش-انتشار با $n = 15$ ، $m = -\frac{3}{4}$ ، و مقادیر مختلف ψ . معادله برای $\psi = 0.3$ یک ریشه، برای $\psi = 0.6$ و $\psi = 0.8$ دو ریشه دارد و برای $\psi = 0.9$ ریشه ندارد.



شکل ۸.۳: رسم کانتور $F_n(\alpha; \psi)$ برای مساله واکنش-انتشار با $\alpha \in [0, 1]$ ، $\psi \in [0, 1]$ و $n = 15$. نمودار مفهوم تحلیلی مقادیر بحرانی $\psi^*(m) = 0.40$ و $\psi_{max}(m) = 0.839768$ را برای مرتبه واکنش $m = -\frac{3}{4}$ تایید می‌کند.



شکل ۹.۳: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه اول جواب مساله (۱۷.۳) با مقادیر $\psi = 0.8, -\frac{3}{4}$ و $m = 100, 150, 300$.



شکل ۱۰.۳: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) شاخه دوم جواب مساله (۱۷.۳) با مقادیر $n = 100, 150, 300$ و $m = -\frac{3}{4}, \psi = 0.8$.

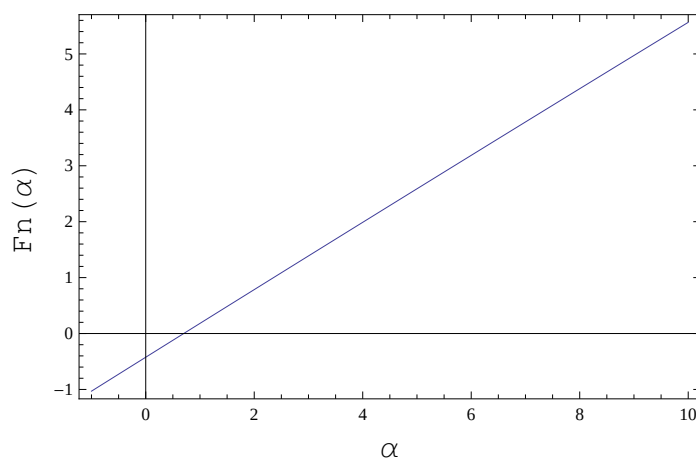
۵.۳ مساله مقدار مرزی غیرخطی سه نقطه‌ای

در این بخش دو مساله مقدار مرزی غیرخطی مرتبه دوم سه نقطه‌ای را بررسی می‌کنیم. وجود و یکتایی یا چندگانگی جواب و همچنین جواب دقیق برای این مسائل نامعلوم هستند، اما برخی اطلاعات در مقاله [۳۹] در مورد جواب‌های این مسائل ارائه شده است.

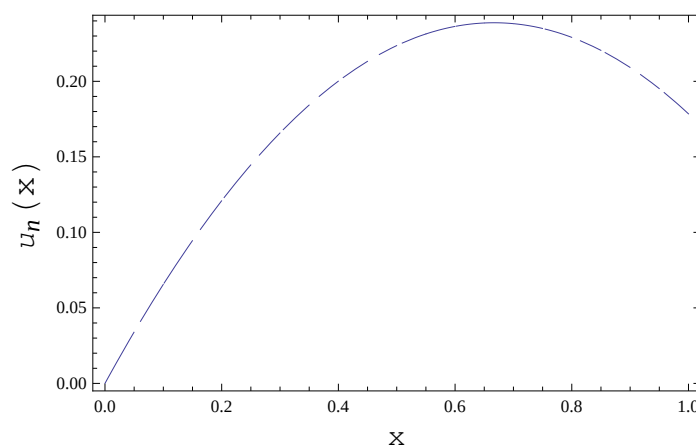
مثال: مساله مقدار مرزی غیرخطی سه نقطه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u''(x) + \frac{3}{8}u(x) + \frac{2}{1.89}(u'(x))^2 + 1 = 0; & x \in [0, 1], \\ u(0) = \alpha, u(1) = u(\frac{1}{3}). \end{cases} \quad (20.3)$$

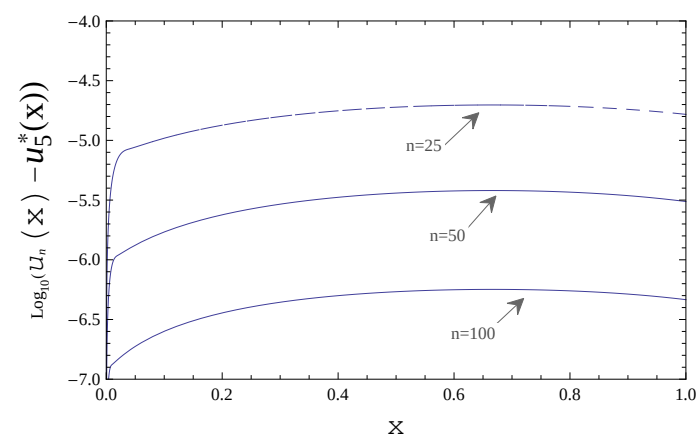
این مساله در [۳۹] بررسی شده است و نویسنده، وجود یک جواب مثبت مقعر u را اثبات کرده است که در $0 \leq x \leq 1$ ، $4 \leq |u(x)| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq 33$ و $0 \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u'(x)| \leq 33$ قرار دارد و همچنین یک طرح تکراری برای تقریب این جواب ارائه داده است. ما روش پیشنهاد شده در فصل‌های قبلی را بر روی این مساله به کار برده‌ایم و نتایج آن به شرح زیر است. در شکل (۳.۱۱) نمودار $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - u_n(\frac{1}{3}; \alpha)$ برای $n = 5, 10, 15$ رسم شده است که نشان می‌دهد مساله دارای یک جواب است. از آنجا که جواب دقیق نامعلوم است ما در این مثال جواب تقریبی را با جواب تقریبی داده شده در مقاله [۳۹] مقایسه می‌کنیم. شکل (۱۲.۳) نمودار جواب تقریبی و شکل (۱۳.۳) نمودار $\log_{10} |u_n(x) - u_5^*(x)|$ در $x \in [0, 1]$ را برای مقادیر مختلف n نشان می‌دهد و $u_5^*(x)$ تکرار پنجم جواب تقریبی در مقاله [۳۹] است. نتایج به‌دست آمده به طور کامل با نتایج گزارش شده در [۳۹] سازگار است.



شکل ۱۱.۳: نمودار $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - u_n(\frac{1}{4}; \alpha)$ برای مساله (۲۰.۳) با $n = 5, 10, 15$.



شکل ۱۲.۳: نمودار جواب تقریبی u_n برای مساله (۲۰.۳) با $n = 40$.



شکل ۱۳.۳: مقایسه جواب تقریبی u_n با جواب تقریبی داده شده در [۳۹] برای مساله (۲۰.۳). نمودار $u_n(x) - u_5^*(x)$ (در مقیاس لگاریتمی) برای $x \in [0, 1]$ با $n = 25, 50, 100$.

مثال: مساله مقدار مرزی غیرخطی سه نقطه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x), u'(x)) = 0; & x \in [0, 1], \\ u(0) = \alpha, u(1) = 2u(\frac{1}{3}), \end{cases} \quad (21.3)$$

که در آن

$$f(x, u(x), u'(x)) = \begin{cases} 9\sqrt{u}, & 0 \leq u \leq 36, \\ 180\sqrt{u - 35/91}, & 36 \leq u \leq \infty. \end{cases}$$

این مساله در مقاله [39] بررسی شده است و نویسنده نشان داده است که مساله دارای دو جواب مثبت مقعر u_1 و u_2 است به طوری که شاخه‌های اول و دوم جواب به ترتیب در نامساوی‌های زیر صدق می‌کنند،

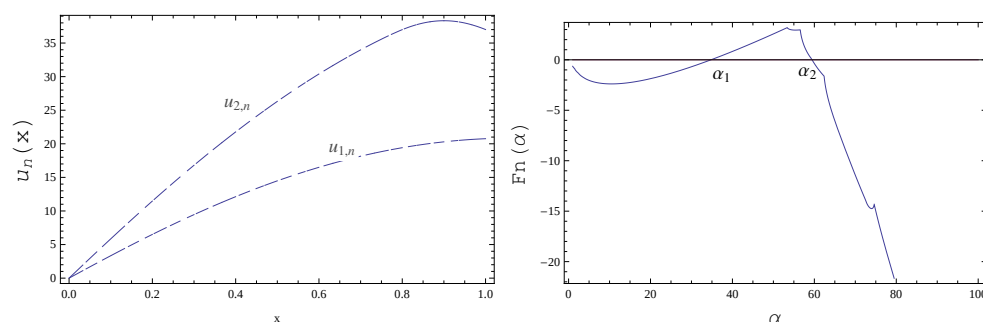
$$\frac{3}{8} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u_1(x)| \leq 36,$$

$$\frac{299/97}{4} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u_2(x)| \leq 22535/91.$$

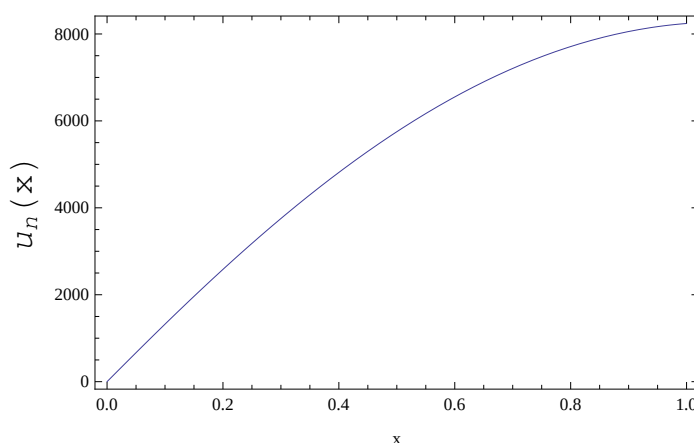
ما روش ارایه شده در بخش‌های قبل را بر روی این مساله به کار برده ایم و نتایج به شرح زیر است. در شکل (14.3) نمودار $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - 2u_n(\frac{1}{3}; \alpha)$ برای $n = 10$ و $0 \leq \alpha \leq 100$ رسم شده است که نشان می‌دهد مساله دارای دو جواب متناظر با دو ریشه $\alpha_1 \in [33, 34]$ و $\alpha_2 \in [59, 60]$ است. جواب‌های مثبت متناظر با این ریشه‌ها در شکل (14.3) رسم شده است که نشان می‌دهد برای هر دو ریشه داریم $\frac{3}{8} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u_i(x)| \leq 36, (i = 1, 2)$. نویسنده در مقاله [39] وجود حداقل یک جواب را نشان می‌دهد به طوری که $\frac{3}{8} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq 36$ ، اما روش ما وجود دو جواب با این ویژگی را نشان می‌دهد. در واقع ما چندگانگی جواب مساله (21.3) را نشان داده و یک شاخه جدید جواب را یافته‌ایم. ریشه سوم $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - 2u_n(\frac{1}{3}; \alpha)$ در $\alpha_3 \in [13412, 13415]$ وجود دارد که به ما جواب سوم مساله (21.3) را می‌دهد به طوری که برای این جواب داریم

$$\frac{299/97}{4} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |u_3(x)| \leq 22535/91.$$

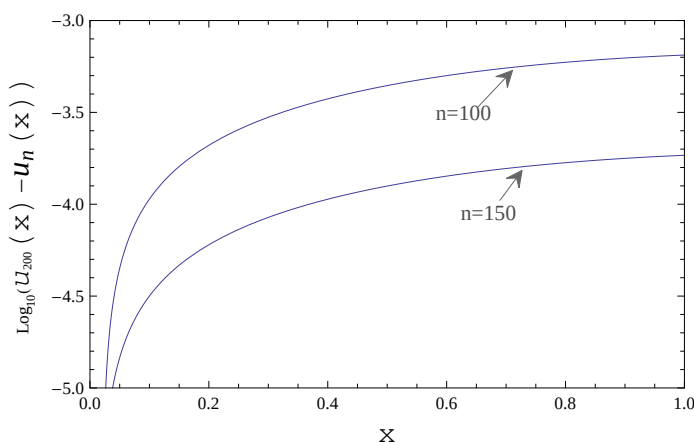
در شکل (15.3) نمودار جواب مثبت مقعر $u_3(x)$ رسم شده است. نتایج به دست آمده نتایج گزارش شده در [39] را تایید می‌کند و علاوه بر آن اطلاعات بیشتری درباره شاخه‌های جواب مساله به ما می‌دهد. ما مقایسه جواب‌های تقریبی u_{100} و u_{150} با جواب تقریبی u_{200} برای شاخه اول جواب را در شکل (16.3) و برای شاخه دوم را در شکل (17.3) در مقیاس لگاریتمی رسم کرده‌ایم.



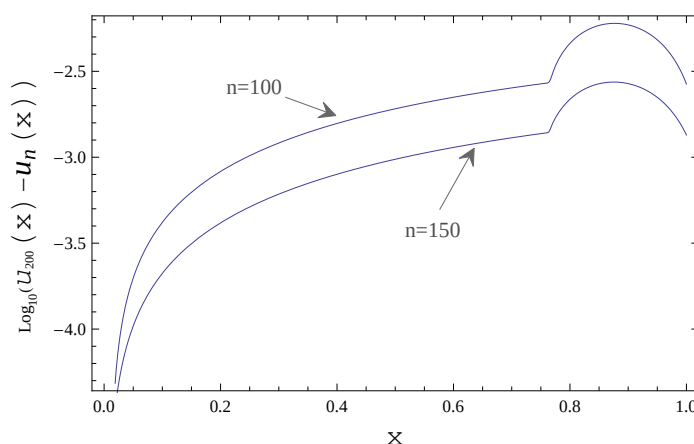
شکل ۱۴.۳: (راست) نمودار $F_n(\alpha) = u_n(1; \alpha) - 2u_n(\frac{1}{3}; \alpha)$ برای مساله (۲۱.۳) با $n = 10$ و (چپ) نمودار دو جواب $u_{1,n}(x)$ و $u_{2,n}(x)$ به ترتیب متناظر با $\alpha_1 \in [33, 34]$ و $\alpha_2 \in [59, 60]$ به طوری که $0 \leq u_1(x), u_2(x) \leq 36$.



شکل ۱۵.۳: نمودار $u_{3,n}$ برای مساله (۲۱.۳) با $n = 60$ متناظر با $\alpha_3 \in [13412, 13415]$ به طوری که $\frac{299,97}{2} \leq \max_{x \in [0,1]} |u_3(x)| \leq 22535/91$.



شکل ۱۶.۳: نمودار $\text{Log}_{10} |u_{200}(x) - u_n(x)|$ برای شاخه اول جواب مساله (۲۱.۳) متناظر با $n = 100, 150$ و $x \in [0, 1]$ ، $\alpha_2 \in [59, 60]$.



شکل ۱۷.۳: نمودار $\text{Log}_{10} |u_{200}(x) - u_n(x)|$ برای شاخه دوم جواب مساله (۲۱.۳) متناظر با $\alpha_2 \in [59, 60]$ و $n = 100, 150$.

۶.۳ نتیجه

در این فصل ما یک روش عملی را برای بررسی وجود و چندگانگی جواب مسایل مقدار مرزی ارایه کردیم که علاوه بر آن تمام شاخه‌های جواب یک جواب تقریبی تحلیلی محاسبه می‌کند که در برخی موارد که روش‌های تحلیلی محض بی نتیجه هستند نتایج مناسبی را به ما می‌دهد. ترکیب دو روش عملی قوی، روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت و روش تیراندازی به ما یک روش قوی ارایه می‌دهد. به کار بردن روش تکراری پیشنهاد شده ساده است و همگرایی روش را نیز اثبات کرده‌ایم. روش را بر روی چهار مساله مقدار مرزی غیرخطی دونقطه‌ای و سه نقطه‌ای به کار برده‌ایم. نتایج قابل توجهی که در این مسایل به دست آمده است نشان دهنده قدرت روش در جستجوی چندگانگی جواب علاوه بر تقریب شاخه‌های جواب می‌باشد.

فصل ۴

حل مساله غيرخطی مرتبه چهار خمش تير

الاستيك با شرایط مرزی غيرخطی

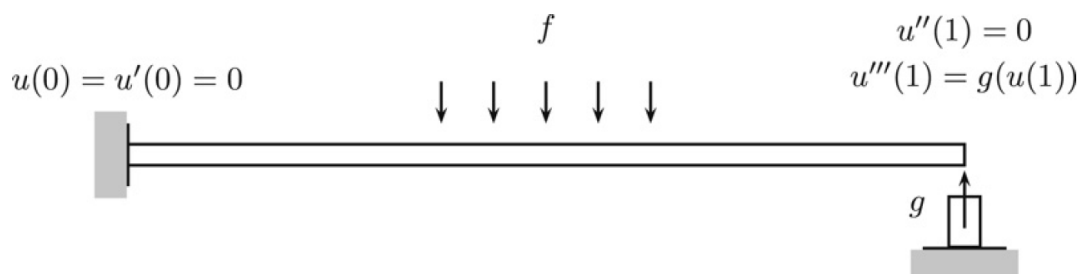
۱.۴ مقدمه

در این فصل یک روش تکراری با استفاده از هسته‌های بازتولیدی برای حل یک مساله مقدار مرزی مرتبه چهار با شرایط مرزی غیرخطی که در مدل سازی خمش تیر الاستیک^۱ به دست می‌آید، ارائه خواهد شد. روش‌های مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت ارائه شده پیش از این توانایی حل مسایل مقدار مرزی با شرایط غیرخطی را ندارند، زیرا روشی برای به دست آوردن هسته‌های بازتولیدی که در شرایط ذکر شده صدق کنند وجود ندارد. هدف ما در این فصل ارائه روشی با ترکیب روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت و یک الگوریتم مشابه روش تیراندازی است که بر مشکل ذکر شده غلبه کند. همچنین یک برآورد خطا برای تقریب جواب مسایل غیرخطی با استفاده از روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت احتمالاً برای اولین بار ارائه خواهیم داد. در ادامه مساله غیرخطی مقدار مرزی مرتبه چهار با شرایط غیرخطی زیر را بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)); & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u''(1) = 0, u^{(3)}(1) = g(u(1)), \end{cases} \quad (1.4)$$

که در آن $f \in C([0, 1] \times R^4)$ و $g \in C(R)$ توابع حقیقی هستند. مسایل مقدار مرزی مرتبه چهار به دلیل اینکه در بسیاری از مسایل مهندسی کاربرد دارند، توجه محققان زیادی را به خود جلب کرده‌اند [۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰]. مسایل مقدار مرزی مرتبه چهار دو نقطه‌ای در مکانیک در مدل خمش و تغییر شکل تیر الاستیک ظاهر می‌شوند. مساله (۱.۴) خم شدن یک تیر الاستیک به طول ۱ را به وسیله نیروی غیرخطی f نشان می‌دهد و $u(x)$ مقدار جابجایی نقطه $x \in [0, 1]$ در تیر است. شرایط $u(0) = u'(0) = 0$ نشان می‌دهند انتهای سمت چپ تیر ثابت است. شرط مرزی $u^{(3)}(1) = g(u(1))$ یعنی نیروی عمودی برابر $g(u(1))$ است، که بر رابطه احتمالاً غیرخطی نیروی عمودی و جابجایی $u(1)$ دلالت دارد. علاوه بر آن $u''(1) = 0$ نشان می‌دهد جابجایی لحظه‌ای در $x = 1$ وجود ندارد و تیر تحت نیروی g ثابت می‌ماند. شکل (۱.۴) را مشاهده کنید. در قضایای ارائه شده برای همگرایی روش تکراری فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی بر روی مسایل مقدار مرزی غیرخطی [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵] یکتایی جواب مساله الزامی است. وجود و چندگانگی جواب معادله تیر الاستیک در مقالات متعددی از جمله [۵۰، ۵۱، ۵۲] و مراجع آنها بررسی شده است. در [۵۲] وجود و یکتایی مساله (۱.۴) با استفاده از یک قضیه نقطه ثابت بررسی شده است، اما بر اساس این مقاله یکتایی جواب شرایط پیچیده‌ای را روی مساله تحمیل می‌کند. اثبات همگرایی که ما در این

^۱Elastic beam



شکل ۱.۴: شکل تیر الاستیک تحت تاثیر نیروهای f و g که توسط مساله (۱.۴) مدل‌سازی شده است [۵۱].

فصل ارایه می‌دهیم به یکتایی جواب مساله در حالت کلی نیازی ندارد. در حالت کلی حل مسایل مقدار مرزی با شرایط مرزی غیرخطی اگر هم وجود و یکتایی جواب معلوم باشد، بسیار دشوارتر از حل مسایلی با شرایط استاندارد مانند شرایط مرزی دیریکله، نیومن و رابین^۲ است. در روش ارایه شده در این فصل به کمک الگوریتمی مشابه الگوریتم تیراندازی بر شرایط مرزی غیرخطی غلبه کرده و سپس با استفاده از روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت به دلیل توانایی آن در تقریب مسایل غیرخطی یک جواب تقریبی تحلیلی مناسب برای مساله (۱.۴) به دست می‌آوریم. روش حاصل شده روشی نیرومند برای حل مسایل غیرخطی با شرایط مرزی غیرخطی و غیر موضعی^۳ می‌باشد. از آنجا که جواب به دست آمده به صورت یک سری نامتناهی است، ما از یک عملگر تصویر مناسب در یک زیر فضای، فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی استفاده کرده و یک جواب تقریبی کاربردی به دست می‌آوریم. خطای اعمال عملگر تصویر به صورت درصدی از نرم جواب دقیق مساله داده خواهد شد و همچنین نشان خواهیم داد تصویر به دست آمده بهترین تقریب جواب دقیق در زیر فضای ذکر شده است. با استفاده از خطای به دست آمده برای اعمال عملگر تصویر یک برآورد خطا برای جواب به دست آمده ارایه می‌کنیم. روش پیشنهاد شده و برآورد خطاهای به دست آمده در این فصل را می‌توان به راحتی بر روی مسایل مقدار مرزی با انواع دیگر شرایط غیرخطی و غیر موضعی به کار برد. به منظور نشان دادن کارایی و توانایی روش پیشنهاد شده، مثال‌های عددی از اعمال این روش بر روی مساله (۱.۴) در بخش‌های بعدی ارایه می‌شود. دقت تقریب‌های به دست آمده را با نتایج گزارش شده در مراجع [۵۰، ۵۱، ۵۳] مقایسه می‌کنیم که نشان می‌دهد با به کار گیری روش پیشنهاد شده بر روی مساله (۱.۴) نتایج قابل قبولی را به دست آورده‌ایم.

^۲Dirichlet, Neumann and Robin boundary condition

^۳Nonlinear and nonlocal boundary condition

۲.۴ روش حل مساله غیرخطی با شرایط مرزی غیرخطی

از آنجا که روشی برای به دست آوردن هسته بازتولیدی که در شرایط مرزی غیرخطی مساله (۱.۴) صدق کند، وجود ندارد و همچنین اطلاعاتی در مورد وجود و یکتایی جواب این مساله نداریم، روش استاندارد به کار رفته بر روی مسایل غیرخطی [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۵۴، ۵۵]، نمی‌تواند به طور مستقیم برای حل مساله (۱.۴) به کار برده شود. ایده اصلی روش جدید، مشابه روش تیراندازی برای مساله (۱.۴)، حل یک مساله مقدار مرزی دیگر به جای مساله اصلی است. ما به جای حل مساله اصلی یک دنباله از مسایل مقدار مرزی به فرم زیر را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)); & 0 < x < 1 \\ u(0) = u'(0) = 0, \\ u(1) = s, u''(1) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

که شامل پارامتر s است به طوری که این پارامتر برای به دست آوردن جواب تقریبی (۱.۴) به کار می‌رود. ما این کار را با انتخاب دنباله $s = s_m$ انجام می‌دهیم به طوری که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u'''(1, s_m) - g(s_m) = 0, \quad (3.4)$$

که در آن $u(x, s_m)$ جواب مساله (۲.۴) با $s = s_m$ است. اگر روش نیوتن را برای حل معادله غیرخطی $u'''(1, s) - g(s) = 0$ به کار ببریم، در هر تکرار به مشتق $u'''(1, s) - g(s)$ نسبت به s نیاز داریم. این مشکل را می‌توان با حل مساله مقدار مرزی زیر با قرار دادن $z(x, t) = \frac{\partial u(x, s)}{\partial s}$ برطرف کرد.

$$\begin{cases} z^{(4)} = f_u z + f_{u'} z' + f_{u''} z'' + f_{u'''} z'''; & 0 < x < 1 \\ z(0) = z'(0) = 0, \\ z(1) = 1, z''(1) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

مساله فوق را می‌توان با مشتق‌گیری از مساله مقدار مرزی (۲.۴) و شرایط مرزی آن نسبت به متغیر s به دست آورد. ابتدا یک مقدار اولیه $0 \leq s_0 \leq 1$ انتخاب می‌کنیم، سپس یک دنباله به صورت زیر تولید می‌کنیم:

$$s_n = s_{n-1} - \frac{u'''(1, s_{n-1}) - g(s_{n-1})}{z'''(1, s_{n-1}) - g'(s_{n-1})}. \quad (5.4)$$

بنابراین در هر تکرار از روش نیوتن دو مساله مقدار مرزی را حل می‌کنیم، اما این میزان زیاد محاسبات در عمل با سرعت زیاد همگرایی روش نیوتن و قدرت تقریب روش هسته‌های بازتولیدی

فضای هیلبرت متعادل می‌شود. اگر جواب مساله (۲.۴) به طور پیوسته به شرط مرزی خود $u(1) = s$ وابسته و روش نیوتن برای به دست آوردن ریشه $u'''(1, s) - g(s) = 0$ همگرا باشد، آنگاه جواب مساله (۲.۴)، $u(., s_m)$ به u جواب مساله (۱.۴) همگراست. در حالت کلی مسایل (۲.۴) و (۴.۴) به فرم زیر هستند:

$$\begin{cases} Lu = u^{(4)} = F(x, u(x), u'(x), u''(x), u'''(x)); & a < x < b \\ u(a) = A, u'(a) = B, \\ u(b) = C, u''(b) = D. \end{cases} \quad (6.4)$$

قضیه زیر شرایط کلی برای تضمین وجود و یکتایی مساله (۶.۴) را ارائه می‌دهد [۵۶].

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید تابع $F(x, u_0, u_1, u_2, u_3)$ روی $[a, b] \times D$ در شرط لپشیتز^۴ صدق کند:

$$|F(x, u_0, u_1, u_2, u_3) - F(x, \bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)| \leq \sum_{i=0}^3 L_i |u_i - \bar{u}_i|, \quad (7.4)$$

که در آن

$$D = \{(u_0, u_1, u_2, u_3) : |u_i| \leq c_i(b-a)^{4-i} \frac{\hat{L} + \ell}{1 - \theta} + \max_{a \leq x \leq b} |P_{\mathfrak{P}}^{(i)}(x)|, 0 \leq i \leq 3\},$$

و

$$\hat{L} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x, \cdot, \cdot, \cdot, \cdot)|, \quad \theta = \sum_{i=0}^3 L_i c_i (b-a)^{4-i} < 1, \quad \ell = \sum_{i=0}^3 L_i |P_{\mathfrak{P}}^{(i)}(x)|, \quad (8.4)$$

به طوری که $p_3(x)$ یک چند جمله ای یکتا از درجه ۳ است که در شرایط مرزی (۶.۴) صدق کند، $c_0 = \frac{39+55\sqrt{33}}{65536}$ ، $c_1 = \frac{1}{48}$ ، $c_2 = \frac{1}{8}$ ، $c_3 = \frac{5}{8}$. آنگاه مساله مقدار مرزی (۶.۴) در D دارای جواب یکتاست. علاوه بر آن دنباله $u_n(x)$ که با طرح تکراری زیر تولید می‌شود:

$$\begin{cases} Lv_{n+1} = v_{n+1}^{(4)} = F(x, u_n(x), u'_n(x), u''_n(x), u'''_n(x)); & a < x < b \\ v_{n+1}(a) = \cdot, v'_{n+1}(a) = \cdot, \\ v_{n+1}(b) = \cdot, v''_{n+1}(b) = \cdot, \end{cases} \quad (9.4)$$

با

$$u_n(x) = v_n(x) + P_{\mathfrak{P}}(x), \quad v_{\cdot}(x) = \cdot, \quad n = \cdot, 1, 2, \dots$$

^۴Lipschitz condition

به جواب $u(x)$ مساله مقدار مرزی (۶.۴) همگراست. همچنین یک برآورد خطا به صورت زیر برای طرح تکراری (۹.۴) وجود دارد:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u_n(x) - u(x)| \leq \theta^n \frac{\hat{L} - \ell}{1 - \theta}. \quad (10.4)$$

برهان. به مرجع [۵۶] مراجعه شود. $\square$

به منظور حل مساله (۹.۴) قرار می‌هیم $a = 0, b = 1$ و فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۴. فضای ضرب داخلی $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ را با توجه به تعریف $W_{\gamma}^m[0, 1]$ در (۵.۳.۱) به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1] = \{u(x) | u \in W_{\gamma}^m[0, 1], u(0) = 0, u'(0) = 0, u(1) = 0, u''(1) = 0\}$$

ضرب داخلی و نرم فضای $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ توسط رابطه‌های (۹.۱) و (۱۰.۱) داده شده است.

در مرجع [۱۲] نشان داده شده است که $W_{\gamma}^1[0, 1]$ و $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی هستند. هسته بازتولیدی فضای $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ به صورت زیر است:

$$k(x, \cdot) = \begin{cases} \sum_{i=1}^m c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^m d_i(y) x^{i-1}, & x > y. \end{cases} \quad (11.4)$$

برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ ، خواص و روش به دست آوردن هسته بازتولیدی آن می‌توان به مرجع [۱۲] مراجعه کرد. در مساله (۹.۴) اگر $L : W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1] \rightarrow W_{\gamma}^1[0, 1]$ و $v_{n+1} \in W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1], (m \geq 5)$ واضح است که $F \in W_{\gamma}^1[0, 1]$ و $x_i \in [0, 1]$ قرار دهید $\varphi_i(\cdot) = r(x_i, \cdot)$ که در آن $r(x, \cdot)$ یک عملگر خطی کراندار است. برای هر $x_i \in [0, 1]$ فرض کنید $\psi_i(\cdot) = (L^* \varphi_i)(\cdot)$ که L^* عملگر الحاقی هسته بازتولیدی $W_{\gamma}^1[0, 1]$ است. علاوه بر آن فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ چگال باشد، با توجه به قضیه (۲.۲.۲)، $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه کامل برای $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ است و $\psi_i(x) = L_y k(x, y)|_{y=x_i}$ دستگاه متعامد یکه $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ را در $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ می‌توان با استفاده از فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت بر روی $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ به صورت زیر دست آورد.

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots). \quad (12.4)$$

گزاره ۳.۲.۴. فرض کنید $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه یکا متعامد برای فضای $W_{\gamma, \gamma}^m[0, 1]$ باشد، آنگاه هسته بازتولیدی آن دارای نمایش سری زیر است:

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(y). \quad (13.4)$$

برهان. فرض کنید $f \in W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1]$ آنگاه

$$(f(y), k(x, y)) = (f(y), \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(y)) = \sum_{i=1}^{\infty} (f(y), \bar{\psi}_i(y)) \bar{\psi}_i(x) = f(x),$$

که در آن تساوی آخر بسط تابع $f \in W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1]$ بر حسب پایه یکا متعامد $\bar{\psi}_i \in W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1]$ است. با توجه به یکتایی هسته بازتولیدی اثبات کامل می‌شود. $\square$

تعریف ۴.۲.۴. فرض کنید $k_N(x, y) = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(y)$ و $W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1] = \text{span}\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_N\}$ تصویر متعامد در $W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1]$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Pi_N : W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1] \rightarrow W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1],$$

به طوری که برای هر $u \in W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1]$ داریم:

$$(\Pi_N u - u, v) = 0, \quad \forall v \in W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1], \quad (14.4)$$

یا به طور معادل:

$$\Pi_N u = \sum_{i=1}^N (u, \bar{\psi}_i) \bar{\psi}_i(x). \quad (15.4)$$

برآورد خطای عملگر تصویر در قضیه زیر ارائه می‌شود.

قضیه ۵.۲.۴. برای هر $u \in W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1]$ داریم:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\Pi_N u(x) - u(x)| \leq C_N \|u\|, \quad (16.4)$$

که در آن $C_N = \max_{0 \leq x \leq 1} |k(x, x) - k_N(x, x)|$.

برهان. برای هر $x \in [0, 1]$ با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$\begin{aligned} |\Pi_N u(x) - u(x)| &= \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} (u, \bar{\psi}_i) \bar{\psi}_i(x) \right| \\ &= \left| (u(y), \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x)) \right| \leq \|u\| \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x) \right\| \\ &= \|u\| \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i^2(x) \right| = \|u\| |k(x, x) - k_N(x, x)|. \end{aligned}$$

$\square$

رابطه (۱۶.۴) بدترین حالت رفتار عملگر تصویر را نشان می‌دهد. کران خطا به صورت درصدی از نرم $u \in W_{\cdot, \cdot}^m[0, 1]$ داده شده است. با توجه به برهان قضیه (۴.۳.۲) به سادگی می‌توان نشان داد، وقتی که $N \rightarrow \infty$ ثابت $C_N \rightarrow 0$.

گزاره ۶.۲.۴. تصویر $\Pi_N u$ بهترین تقریب $u \in W_{\Psi,N}^m[0, 1]$ در $W_{\Psi,N}^m[0, 1]$ است، به طوری که داریم:

$$\|\Pi_N u - u\| \leq \|v - u\| \quad \forall v \in W_{\Psi,N}^m[0, 1] \quad (۱۷.۴)$$

برهان. فرض کنید $v = \sum_{i=1}^N \hat{v}_i \bar{\psi}_i \in W_{\Psi,N}^m[0, 1]$ تقریبی برای $u \in W_{\Psi,N}^m[0, 1]$ باشد:

$$\begin{aligned} \|\Pi_N u - u\| &= \sum_{i=N+1}^{\infty} (u, \bar{\psi}_i)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N (\hat{v}_i - (u, \bar{\psi}_i))^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} (u, \bar{\psi}_i)^2 = \|v - u\|. \end{aligned}$$

□

قضیه ۷.۲.۴. اگر $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در $[0, 1]$ چگال باشد، $f \in W_{\Psi}^1[a, b]$ و همچنین جواب مساله (۹.۴) یکتا باشد، آنگاه جواب (۹.۴) را به صورت زیر داریم:

$$v_{n+1}(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u_n(x_k), u'_n(x_k), u''_n(x_k), u'''_n(x_k)) \bar{\psi}_i(x), \quad (۱۸.۴)$$

که در آن $u_n(x) = v_n(x) + P_{\Psi}(x)$.

برهان. می‌توان بسط v_{n+1} در (۹.۴) را بر اساس پایه‌های یکا متعامد $\bar{\psi}_i \in W_{\Psi,N}^m[0, 1]$ به صورت زیر نمایش داد. توجه کنید که برای هر $f \in W_{\Psi}^1[0, 1]$ داریم $(f(x), \varphi_i(x)) = f(x_i)$.

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} (v_{n+1}(x), \bar{\psi}_i(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (v_{n+1}(x), L^* \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (Lv_{n+1}(x), \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \quad (۱۹.۴) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (F(x, u_n(x), u'_n(x), u''_n(x), u'''_n(x)), \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u_n(x_k), u'_n(x_k), u''_n(x_k), u'''_n(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \end{aligned}$$

□

حال از تصویر متعامد $\Pi_N v_n$ به عنوان جواب تقریبی مساله (۹.۴) استفاده می‌کنیم که می‌توان آن را با قطع N جمله از نمایش سری v_n به دست آورد. توجه کنید جواب تقریبی مساله (۶.۴) به صورت $u_n^N = \Pi_N v_n + P_{\Psi}$ خواهد بود.

قضیه ۸.۲.۴. فرض کنید شرایط قضیه (۱.۲.۴) برقرار باشد. اگر $v^* \in W_{\Psi,N}^m[0, 1]$ جواب دقیق مساله (۹.۴) باشد، آنگاه وقتی که $N, n \rightarrow \infty$ جواب تقریبی $\Pi_N v_n(x)$ به طور یکنواخت به v^* همگراست.

برهان. فرض کنید $v_n = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{\psi}_i(x)$ ، آنگاه داریم:

$$\|\Pi_N v_n - v_n\| = \sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i^2} = C_N.$$

به سادگی می‌توان دید $C_{N+1} \leq C_N$ یعنی C_N با افزایش N به طور یکنواخت کاهش می‌یابد و هنگامی که $N \rightarrow \infty$ داریم $C_N \rightarrow 0$. با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز و برای هر $x \in [0, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned} & |\Pi_N v_n(x) - v_n(x)| \\ &= (k(x, \cdot), \Pi_N v_n - v_n) \\ &\leq \|k(x, \cdot)\| \|\Pi_N v_n - v_n\| \\ &= \sqrt{k(x, x)} C_N. \end{aligned}$$

قرار دهید $k_* = \max_{0 \leq x \leq 1} \sqrt{k(x, x)}$ ، آنگاه برای هر $x \in [0, 1]$ ، از قضیه (۱.۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} & |\Pi_N v_n(x) - v^*(x)| \\ &= |\Pi_N v_n(x) - v_n(x) + v_n(x) - v^*(x)| \\ &\leq |v_n(x) - v^*(x)| + |\Pi_N v_n(x) - v_n(x)| \\ &\leq \theta^n \frac{\hat{L} - \ell}{1 - \theta} + k_* C_N. \end{aligned} \quad (20.4)$$

برآورد خطای (۲۰.۴) از دو بخش تشکیل شده است، بخش اول آن مربوط به طرح تکراری (۹.۴) است و با $n \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند و بخش دوم آن مربوط به خطای تصویر است و با $N \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند. $\square$

قضیه ۹.۲.۴. فرض کنید شرایط قضیه (۱.۲.۴) برقرار باشد. اگر $v^* \in W_{\frac{1}{2}}^m[0, 1]$ جواب دقیق مساله (۶.۴) باشد، آنگاه ثابت‌های n_0 و N_0 وجود دارند به طوری که برای هر $n \geq n_0$ و $N \geq N_0$ داریم:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\Pi_N v_n(x) - v^*(x)| \leq \theta^n \frac{\hat{L} - \ell}{1 - \theta} + C_* C_N \|v^*\|, \quad (21.4)$$

که در آن $C_* = \max_{0 \leq x \leq 1} |k(x, x) - k_N(x, x)| \rightarrow 0$ و C ثابتی مستقل از v^* و v_n است.

برهان. از قضیه (۸.۲.۴) و برای هر $\epsilon > 0$ دلخواه، n و N به اندازه کافی بزرگ داریم

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |\Pi_N v_n(x) - v^*(x)| \leq \epsilon.$$

قرار دهید $\epsilon = \|v^*\|$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned} & |(|\Pi_N v_n(x)| - |v^*(x)|)| \\ & \leq |\Pi_N v_n(x) - v^*(x)| \leq \|v^*\|, \end{aligned}$$

سپس با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم

$$\begin{aligned} |\Pi_N v_n(x)| & \leq \|v^*\| + |v^*(x)| \\ & = \|v^*\| + |(k(x, \cdot), v^*(\cdot))| \\ & \leq \|v^*\| + \|k(x, \cdot)\| \|v^*\| \leq (1 + k_\cdot) \|v^*\|. \end{aligned}$$

که در آن $k_\cdot$ مشابه قضیه قبل است. قرار دهید $\|u\|_\infty = \max_{x \in \mathcal{I}} |u(x)|$ ، از آنجا که $\Pi_N v_n$ عضوی از $W_{\mathcal{I}, N}^m[0, 1]$ است و در هر فضای نرم‌دار با بعد متناهی همه نرم‌ها هم‌ارزند نتیجه می‌گیریم ثابتی مانند $\mathcal{K}$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\|\Pi_N v_n\| \leq \mathcal{K} \|\Pi_N v_n\|_\infty = \mathcal{K} \max_{x \in \mathcal{I}} |\Pi_N v_n(x)|.$$

از برهان قضیه (۸.۲.۴) و برای N به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\begin{aligned} \|v_n\| & \leq \|v_n - \Pi_N v_n\| + \|\Pi_N v_n\| \\ & \leq 2 \|\Pi_N v_n\| \leq 2 \mathcal{K} \max_{x \in \mathcal{I}} |\Pi_N v_n(x)| \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|v_n\| \leq 2 \mathcal{K} (1 + k_\cdot) \|v^*\|.$$

قرار می‌دهیم $C_\cdot = 2 \mathcal{K} (1 + k_\cdot)$ پس $\|v_n\| \leq C_\cdot \|v^*\|$. حال از قضیه‌های (۱.۲.۴) و (۵.۲.۴) داریم:

$$\begin{aligned} |\Pi_N v_n(x) - v^*(x)| & = |\Pi_N v_n(x) - v_n(x) + v_n(x) - v^*(x)| \\ & \leq |v_n(x) - v^*(x)| + |\Pi_N v_n(x) - v_n(x)| \leq \theta^n \frac{\hat{L} - \ell}{1 - \theta} + \mathcal{C}_N \|v_n\| \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$|\Pi_N v_n(x) - v^*(x)| \leq \theta^n \frac{\hat{L} - \ell}{1 - \theta} + C_\cdot \mathcal{C}_N \|v^*\|.$$

□

۳.۴ مثال‌های عددی

به منظور نشان دادن کارایی الگوریتم پیشنهاد شده در عمل، در ادامه چند مثال عددی ارائه می‌دهیم. همچنین نتایج به دست آمده را با جواب‌های دقیق و بهترین نتایج گزارش شده در مقاله‌های [۵۰، ۵۱، ۵۳] مقایسه می‌کنیم. خطای مانده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Res(x, \bar{v}) = \bar{v}^{(4)}(x) - F(x, \bar{v}, \bar{v}', \bar{v}'', \bar{v}''').$$

همچنین انتگرال مربع خطای مانده را با انتگرال گیری از خطای مانده در بازه $x \in [0, 1]$ به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$E(\bar{v}) = \int_0^1 (Res(x, \bar{v}))^2 dx. \quad (22.4)$$

مثال: مساله (۱.۴) را با توابع داده شده f و g به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x, u) = u^2 - \frac{1}{576}x^8 + \frac{5}{288}x^7 - \frac{43}{576}x^6 + \frac{5}{32}x^5 - \frac{9}{64}x^4 + 1, \quad (23.4)$$

و

$$g(u) = -\frac{\ln(1+u)}{4\ln(\frac{29}{24})}.$$

جواب دقیق مثال فوق به صورت

$$u(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{24}x^3 + \frac{3}{8}x^2,$$

است. خطای مطلق برای N های مختلف در جدول (۱.۴) گزارش شده است. شکل (۲.۴) خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{2,N}^6[0, 1]$ ، با مقادیر مختلف N ، $n = 5$ و پنج تکرار از روش نیوتن را برای مثال (۲۳.۴) نشان می‌دهد.

مثال: مساله (۱.۴) را با توابع داده شده f و g به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x, u) = u^2 - x^{10} + 4x^9 - 4x^8 - 4x^7 + 8x^6 - 4x^4 + 120x - 48, \quad (24.4)$$

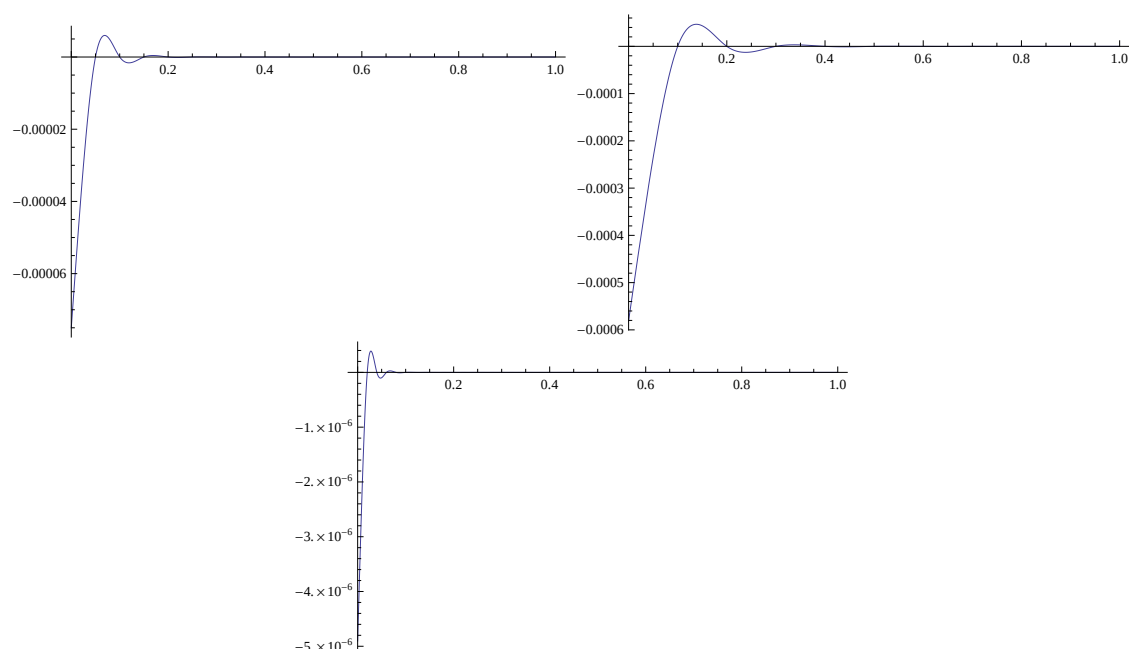
و

$$g(u) = 12u.$$

جواب دقیق مثال فوق به صورت

$$u(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^2,$$

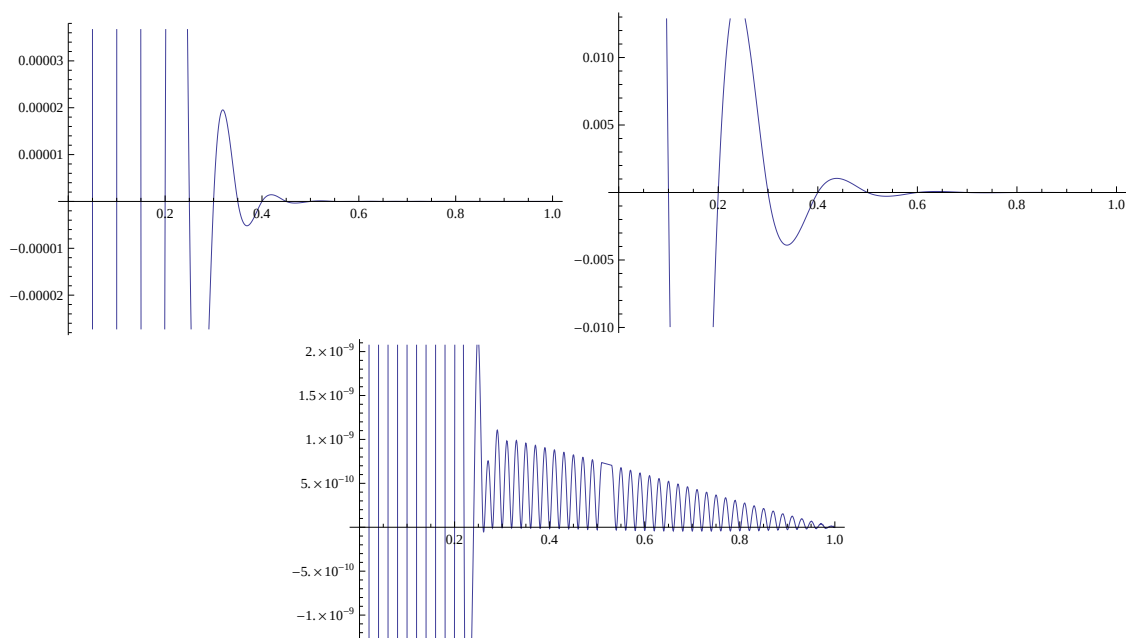
است. خطای مطلق برای N های مختلف در جدول (۲.۴) گزارش شده است. شکل (۳.۴) خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{2,N}^6[0, 1]$ ، با مقادیر مختلف N ، $n = 5$ و پنج تکرار از روش نیوتن را برای مثال (۲۴.۴) نشان می‌دهد.



شکل ۲.۴: نمودار خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{\Psi,N}^6[0, 1]$ برای مثال (۲۳.۴) به ترتیب از راست به چپ با $n = 5, 10, 20, 50$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴).

جدول ۱.۴: خطای مطلق مثال (۲۳.۴) با استفاده از $\Pi_N u_n(x) \in W_{\Psi,N}^6[0, 1]$ با $n = 5$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴).

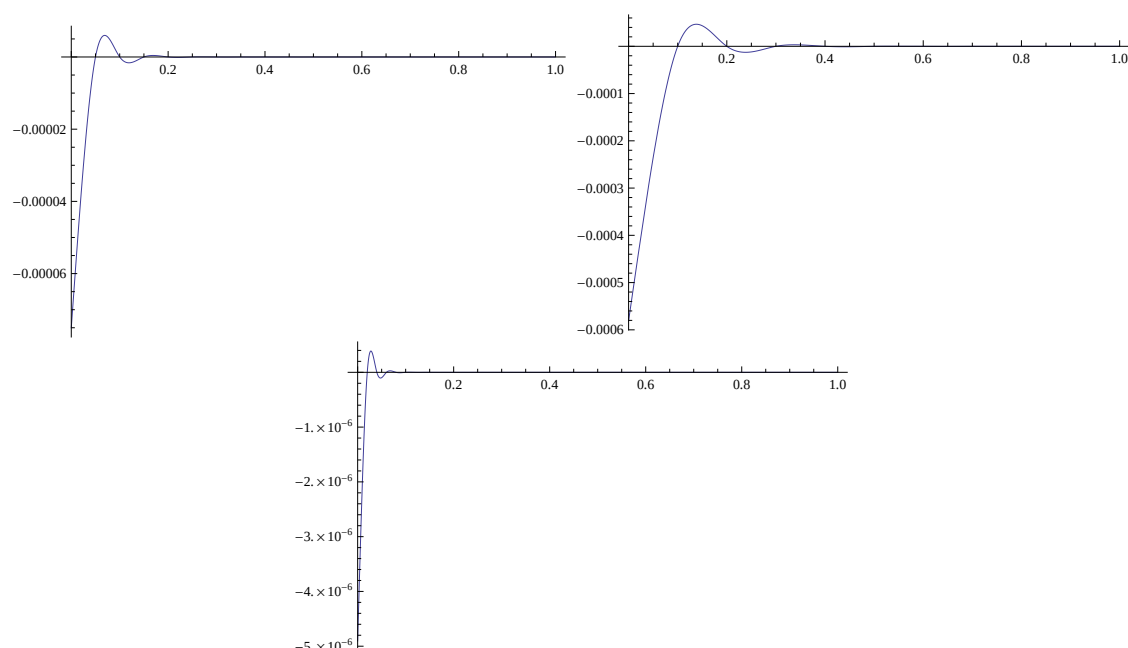
x	N=10	N=20	N=50
0.1	5.83243e-10	1.31254e-11	2.30699e-13
0.2	1.12568e-9	4.00801e-11	8.26405e-13
0.3	1.9817e-9	7.84989e-11	1.7062e-12
0.4	2.97456e-9	1.25704e-10	2.80039e-12
0.5	4.0986e-9	1.79414e-10	4.05195e-12
0.6	5.3117e-9	2.37788e-10	5.41538e-12
0.7	6.58981e-9	2.99382e-10	6.85525e-12
0.8	7.9111e-9	3.63081e-10	8.34458e-12
0.9	9.25875e-9	4.28029e-10	9.86297e-12
1	1.06187e-8	4.93552e-10	1.13946e-11



شکل ۳.۴: نمودار خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{\mathcal{P},N}^6[0, 1]$ برای مثال (۲۴.۴) به ترتیب از راست به چپ با $n = 5, 20, 50$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴).

جدول ۲.۴: خطای مطلق مثال (۲۴.۴) با استفاده از $\Pi_N u_n(x) \in W_{\mathcal{P},N}^6[0, 1]$ با $n = 5$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴).

x	N=10	N=20	N=50
0.1	5.87057e-7	1.37316e-8	1.31072e-10
0.2	7.51763e-7	2.25703e-8	2.22097e-10
0.3	9.5727e-7	2.86739e-8	2.87605e-10
0.4	1.06356e-6	3.25896e-8	3.30533e-10
0.5	1.1199e-6	3.46313e-8	3.53904e-10
0.6	1.12496e-6	3.51e-8	3.6081e-10
0.7	1.0911e-6	3.42994e-8	3.54409e-10
0.8	1.0272e-6	3.25386e-8	3.37928e-10
0.9	9.43237e-7	3.01321e-8	3.14664e-10
1	8.49142e-7	2.74e-8	2.87978e-10



شکل ۴.۴: نمودار خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{p,N}^6[0, 1]$ برای مثال (۲۵.۴) به ترتیب از راست به چپ با $n = 5, N = 10, 20, 50$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴).

مثال: مساله (۱.۴) را با توابع داده شده f و g به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x, u, u') = (u')^2 - \frac{1}{36}x^6 + \frac{7}{36}x^5 - \frac{9}{16}x^4 + \frac{7}{9}x^3 - \frac{4}{9}x^2 + 1, \quad (25.4)$$

و

$$g(u) = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{72}{13}}u.$$

جواب دقیق مثال فوق به صورت

$$u(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{7}{36}x^3 + \frac{1}{3}x^2,$$

است. خطای مطلق برای N های مختلف در جدول (۳.۴) گزارش شده است. شکل (۴.۴) خطای مانده $\Pi_N u_n(x) \in W_{p,N}^6[0, 1]$ با مقادیر مختلف $N, n = 5$ و پنج تکرار از روش نیوتن را برای مثال (۲۵.۴) نشان می‌دهد.

در جدول (۴.۴) انتگرال خطای مانده (۲۲.۴) و همچنین مقدار C_N در برآورد خطای (۴.۲۱) و (۱۶.۴) گزارش شده است که به طور کامل نتایج به دست آمده در قضیه‌های داده شده را تایید می‌کند. جدول (۵.۴) مقایسه نتایج به دست آمده با بهترین نتایج گزارش شده در مقالات [۵۰، ۵۱، ۵۳] را نشان می‌دهد. نتایج ارایه شده در جدول‌ها و شکل‌ها کارایی و توانایی روش پیشنهاد شده را تایید می‌کنند.

جدول ۳.۴: خطای مطلق مثال (۲۵.۴) با استفاده از $\Pi_N u_n(x) \in W_{\gamma,N}^6[0, 1]$ با $n = 5$ و پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴).

x	N=10	N=20	N=50
0.1	5.51269e-10	1.16691e-11	1.9726e-13
0.2	1.00156e-9	3.44251e-11	6.9654e-13
0.3	1.71098e-9	6.61598e-11	1.42282e-12
0.4	2.50864e-9	1.04459e-10	2.31245e-12
0.5	3.39494e-9	1.47314e-10	3.31464e-12
0.6	4.3341e-9	1.93173e-10	4.39049e-12
0.7	5.30875e-9	2.40893e-10	5.51156e-12
0.8	6.30403e-9	2.89679e-10	6.6582e-12
0.9	7.31043e-9	3.3901e-10	7.81761e-12
1	8.32143e-9	3.88559e-10	8.98215e-12

جدول ۴.۴: مقدار $E(\Pi_N v_n)$ برای جوابهای تقریبی $\Pi_1 u_5(x)$ ، $\Pi_2 u_5(x)$ و $\Pi_5 u_5(x)$ با پنج تکرار از روش نیوتن (۵.۴). سطر آخر جدول مقدار C_N را در برآورد خطای (۲۱.۴) و (۱۶.۴) با $N = 10, 20, 50$ نشان می‌دهد.

Ex	N=10	N=20	N=50
Ex 1	9.56627e-9	7.92316e-11	1.34809e-13
Ex 2	0.0182834	6.21298e-4	6.71226e-6
Ex 3	9.56627e-9	7.92315e-11	1.34809e-13
C_N	3.71955e-12	2.27861e-13	5.80132e-15

جدول ۵.۴: بیشترین خطای مطلق، $E_n = \max |\Pi_N u_n(x) - u^*(x)|$ برای $0 \leq x \leq 1$ بین جواب دقیق و جواب‌های تقریبی $\Pi_1 u_5(x)$ ، $\Pi_2 u_5(x)$ و $\Pi_5 u_5(x)$ با پنج تکرار از روش نیوتن (۴.۵) و مقایسه آنها با نتایج گزارش شده در مقاله‌های [۵۳، ۵۱، ۵۰].

Ex	[51]	[50]	[53]	E_{10}	E_{20}	E_{50}
Ex 1	6.59831e-4	—	—	1.06187e-8	4.93552e-10	1.13946e-11
Ex 2	—	3.2404e-3	1.7128e-3	1.12496e-6	3.51e-8	3.6081e-10
Ex 3	3.30503e-4	—	—	8.32143e-9	3.88559e-10	8.98215e-12

۴.۴ نتیجه

حل عددی مسایل مقدار مرزی مرتبه چهارم دو نقطه‌ای با شرایط مرزی غیرخطی را در این فصل بررسی کردیم. با استفاده از ترکیب روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت و یک الگوریتم مشابه تیراندازی، الگوریتمی برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی تحلیلی مناسب ارایه شد. در واقع ما روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت را طوری اصلاح کردیم که قادر به حل مسایل با شرایط مرزی غیرخطی باشد. به منظور به دست آوردن جواب تقریبی قابل استفاده و عملی از یک عملگر تصویر متعامد استفاده کرده و خطای به کارگیری آن را نیز بررسی کردیم. همچنین با استفاده از خطای عملگر تصویر متعامد برآورد خطایی برای به کارگیری روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت بر روی مسایل غیرخطی ارایه کردیم.

فصل ۵

روش پیکارد- هسته بازتولیدی فضای

هیلبرت برای حل معادلات غیرخطی

منفرد از نوع لین-امدن

۱.۵ مقدمه

در این فصل یک روش تکراری که از ترکیب روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت و روش تکراری پیکارد^۱ به دست می‌آید را مطالعه می‌کنیم. همچنین کارایی روش را برای حل مسایل منفرد غیرخطی از نوع لین-امدن^۲ بررسی می‌کنیم. علاوه بر اثبات همگرایی روش ترکیبی پیشنهاد شده به برآورد خطای به کارگیری روش نیز می‌پردازیم. به منظور نشان دادن کارایی و توانایی روش چندین مثال را بررسی و نتایج به دست آمده را با قضیه‌های ارایه شده مقایسه می‌کنیم. مساله غیرخطی منفرد از نوع لین-امدن در ساختارهای بین ستاره‌ای^۳، ستاره شناسی و بسیاری از پدیده‌های فیزیکی کاربرد دارد [۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰]. این معادله یکی از معادلات اساسی در نظریه ساختارهای بین ستاره ای بوده و بسیار مورد مطالعه قرار گرفته شده است. در سال‌های اخیر جواب تقریبی مساله لین-امدن توسط روش‌های اختلال هموتوپی^۴ [۶۱، ۶۲]، موجک‌های لژاندر^۵ [۶۳]، اختلال^۶ [۶۴]، تجزیه ادمیان^۷ [۶۵]، هم محلی بسل^۸ [۶۶]، سری پد^۹ [۶۷]، شبه طیفی لژاندر گویا^{۱۰} [۶۸]، تغییرات^{۱۱} [۶۹]، تقریبی غیراختلالی^{۱۲} [۷۰] و هم محلی توابع هرمیت^{۱۳} [۷۱] به دست آمده است. به دلیل غیرخطی و منفرد بودن معادله لین-امدن در ابتدای بازه حل عددی این مساله بسیار پیچیده می‌باشد. بسیاری از روش‌ها که برای حل معادلات غیرخطی به کار می‌روند معادله

^۱ Picard iteration

^۲ Lane-Emden

^۳ Interstellar structure

^۴ Homotopy Perturbation

^۵ Legendre wavelets

^۶ Perturbation method

^۷ Adomian decomposition

^۸ Bessel collocation

^۹ Pade Series method

^{۱۰} Rational Legendre pseudospectral

^{۱۱} Variational approach

^{۱۲} Nonperturbative approximate

^{۱۳} Hermite function collocation

را به یک دستگاه غیرخطی از معادلات جبری تبدیل می‌کنند. حل این دستگاه غیرخطی خود بسیار پیچیده بوده و ممکن است جواب وجود نداشته باشد یا جواب‌های به دست آمده بدون تعبیر باشند. ما باید با یک تکنیک مناسب به این مشکل غلبه کنیم. به این منظور از روش تکراری پیکارد استفاده می‌کنیم، همچنین همگرایی این روش را اثبات کرده و برآورد خطایی برای آن ارایه می‌دهیم. در ادامه به حل عددی حالت کلی مساله لین-امدن به صورت زیر می‌پردازیم

$$\begin{cases} y'' + \frac{\alpha}{x} y' + f(x, y) = g(x), & 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0, \\ y(0) = A, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

که در آن A یک ثابت، f یک تابع پیوسته حقیقی و $g \in C[0, 1]$.

۲.۵ تکرار پیکارد

تعریف ۱.۲.۵. برای $u \in L^\infty[0, 1]$ قرار دهید:

$$(\mathcal{D}u)(x) := \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^\alpha u(s) ds dt, \quad \forall x > 0. \quad (2.5)$$

با اعمال عملگر $\mathcal{D}$ بر روی معادله اول (۱.۵) داریم:

$$y(x) = A + \mathcal{D}(g(x) - f(x, y(x))) =: (Ty)(x), \quad (3.5)$$

که در آن $A = y(0)$.

گزاره ۲.۲.۵. فرض کنید $g \in L^\infty[0, 1]$ و $f(x, y(x)) \in L^\infty(\mathbb{D})$ ، که در آن $\mathbb{D} = [0, 1] \times [0, y_{\max}]$ و $y_{\max} = \max_{0 \leq x \leq 1} |y(x)|$. هر جواب مساله نقطه ثابت (۳.۵) دارای ویژگی‌های زیر است:

$$\lim_{x \downarrow 0} y(x) = A \quad (1)$$

$$y \in C^1[0, 1] \quad (2)$$

$$y'(x) = - \int_0^x \left(\frac{s}{x}\right)^\alpha (f(s, y(s)) - g(s)) ds, \quad \forall x > 0.$$

همچنین $\lim_{x \downarrow 0} y'(x) = 0$ و اگر $f(x, y(x)) - g(x) > 0$ تقریباً برای همه $x \in [0, 1]$ برقرار باشد، آنگاه برای همه $x \in [0, 1]$ داریم $y'(x) < 0$ و $0 \leq y(x) \leq A$.

برهان. (۱) فرض کنید $c, \delta > 0, c = \sup_{x \in [0, \delta]} |f(x, y(x)) - g(x)|$ با توجه به فرض‌های گزاره داریم $0 \leq c < \infty$. آنگاه برای همه $0 < x \leq \delta$

$$\begin{aligned} |y(x)| &= |A + \mathfrak{D}(g(x) - f(x, y(x)))| \\ &= |A + \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^\alpha (g(s) - f(s, y(s))) ds dt| \\ &\leq A + \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^\alpha |g(s) - f(s, y(s))| ds dt \\ &\leq A + c \cdot \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^\alpha ds dt = A + c \cdot \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}. \end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{x \downarrow 0} y(x) = A$.

(۲) برای همه $x > 0$ ، قرار دهید $z = \frac{s}{x}$ آنگاه

$$\begin{aligned} y'(x) &= - \int_0^x \left(\frac{s}{x}\right)^\alpha (f(s, y(s)) - g(s)) ds \\ &= -x \int_0^1 z^\alpha (f(zx, y(zx)) - g(zx)) dz. \end{aligned}$$

فرض کنید δ و c مشابه قسمت قبل باشند. آنگاه برای همه $0 < x \leq \delta$ داریم:

$$\begin{aligned} |y'(x)| &\leq c \cdot x \int_0^1 z^\alpha dz = c \cdot \frac{x}{\alpha+1}, \\ \lim_{x \downarrow 0} y'(x) &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{x \downarrow 0} y'(x) = 0$.

□

قضیه ۳.۲.۵. فرض کنید $f(x, y)$ با توجه به آرگومان دوم خود در شرط لپشیتز^{۱۴} برای $x \in [0, 1]$ و $u, v \in L^\infty[0, 1]$ صدق کند:

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq k|u - v|, \quad k < \infty, \quad (۴.۵)$$

آنگاه مساله نقطه ثابت (۳.۵) دارای یک نقطه ثابت یکتاست به طوری که $y^* = \mathcal{T}y^*$. علاوه بر آن طرح تکراری $y_{m+1} = \mathcal{T}y_m$ به y^* همگراست و

$$\|y^* - y_m\|_\infty \leq \frac{\cosh(\sqrt{k})L}{\mathfrak{Y}(\alpha+1)} \times \frac{k^m}{(\mathfrak{Y}m)!}, \quad (۵.۵)$$

که در آن $L = \max_{0 \leq x \leq 1} |g(x) - f(x, A)|$.

^{۱۴}Lipschitz condition

برهان. از (۳.۵) داریم:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}u - \mathcal{T}v| &= |\mathfrak{D}(f(x, u)) - \mathfrak{D}(f(x, v))| \\ &\leq \int_0^x t^{-\alpha} \int_0^t s^{\alpha} |f(s, u) - f(s, v)| ds dt \\ &\leq \frac{kx^{\mathfrak{Y}}}{\mathfrak{Y}(\alpha+1)} \|u - v\|_{\infty}. \end{aligned} \quad (۶.۵)$$

در گام بعدی اثبات به نامساوی زیر نیاز داریم، پس ابتدا به اثبات آن می‌پردازیم:

$$|\mathcal{T}^n u - \mathcal{T}^n v| \leq \frac{k^n x^{\mathfrak{Y}n}}{(\mathfrak{Y}n)!} \|u - v\|_{\infty}. \quad (۷.۵)$$

ابتدا دقت کنید که

$$(\mathfrak{D}x^j) = \frac{x^{j+\mathfrak{Y}}}{(j+\mathfrak{Y})(\alpha+j+1)}.$$

با استقرا داریم:

(۱) $n = 1$: از (۶.۵) نتیجه می‌گیریم که نامساوی (۷.۵) برقرار است.

(۲) $n \rightarrow n+1$:

فرض کنید (۷.۵) برای n برقرار است، آنگاه از گزاره (۲.۲.۵) و رابطه (۶.۵) داریم:

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}^{n+1} u - \mathcal{T}^{n+1} v| &\leq |\mathcal{T}(\mathcal{T}^n u) - \mathcal{T}(\mathcal{T}^n v)| \\ &= |\mathfrak{D}(f(x, \mathcal{T}^n u)) - \mathfrak{D}(f(x, \mathcal{T}^n v))| \\ &= |\mathfrak{D}(f(x, \mathcal{T}^n u) - f(x, \mathcal{T}^n v))| \\ &\leq k \mathfrak{D} |(\mathcal{T}^n u) - (\mathcal{T}^n v)| \leq k \mathfrak{D} \left(\frac{k^n x^{\mathfrak{Y}n}}{(\mathfrak{Y}n)!} \|u - v\|_{\infty} \right) \\ &= \frac{k^{n+1} x^{\mathfrak{Y}(n+1)}}{(\mathfrak{Y}(n+1))!} \|u - v\|_{\infty} \leq \frac{k^{n+1} x^{\mathfrak{Y}(n+1)}}{(\mathfrak{Y}(n+1))!} \|u - v\|_{\infty}, \end{aligned}$$

بنابراین نامساوی (۷.۵) برای $n+1$ برقرار است. از نامساوی (۷.۵) نتیجه می‌گیریم که $m \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $\mathcal{T}^m$ روی $L^{\infty}[0, 1]$ انقباضی است. بنابراین قضیه نقطه ثابت نتیجه می‌دهد که $\mathcal{T}^m$ یک نقطه ثابت یکتای $L^{\infty}[0, 1]$ دارد و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^{nm} y_0 = y^*.$$

آنگاه به کمک قضیه نقطه ثابت به سادگی می‌توان دید که y^* نقطه ثابت یکتای $\mathcal{T}y = y$ است و

برای هر $y_0 \in L^{\infty}[0, 1]$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^n y_0 = y^*.$$

علاوه بر آن

$$\begin{aligned} & |\mathcal{T}^{m+n}y_\bullet - \mathcal{T}^m y_\bullet| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\mathcal{T}^{m+i+1}y_\bullet - \mathcal{T}^{m+i}y_\bullet| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{k^{m+i} x^{\mathfrak{r}(m+i)}}{(\mathfrak{r}(m+i))!} \|y_1 - y_\bullet\|_\infty \\ & \leq \left(\sum_{i=0}^\infty \frac{k^i}{(\mathfrak{r}i)!}\right) \frac{k^m}{(\mathfrak{r}m)!} \|y_1 - y_\bullet\|_\infty. \end{aligned}$$

فرض کنید $y_\bullet(x) = A$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} |y_1(x) - y_\bullet(x)| &= |\mathcal{T}y_\bullet - y_\bullet| \\ &= |\mathfrak{D}(g(x) - f(x, A))| \leq \frac{L_\bullet}{\mathfrak{r}(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

از آنجا که $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^{m+n}y_\bullet = y^*$ و $\sum_{i=0}^\infty \frac{k^i}{(\mathfrak{r}i)!} = \cosh(\sqrt{k})$ اثبات کامل است. $\square$

هر تکرار $y_{m+1} = \mathcal{T}y_m$ یک جواب مساله خطی زیر است:

$$\begin{cases} y_{m+1}'' + \frac{\alpha}{x} y_{m+1}' + f(x, y_m) = g(x), & 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0, \\ y_{m+1}(0) = A, y_{m+1}'(0) = 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

۳.۵ روش تقریب جواب و همگرایی

به جای مساله غیر خطی (۱.۵) ما روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت را به صورت تکراری بر روی مساله خطی (۸.۵) اعمال می‌کنیم. قرار می‌دهیم $Ly \equiv y'' + \frac{\alpha}{x} y'$ ، بعد از همگن سازی مساله (۸.۵) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} Lu_{m+1} = F(x, u_m), & 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0, \\ u_{m+1}(0) = 0, u_{m+1}'(0) = 0, \end{cases} \quad (9.5)$$

که در آن $F(x, y) = g(x) - f(x, y + A)$ و $y_{m+1} = u_{m+1} + A$ برای حل مساله (۹.۵)، فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_{\mathfrak{r}}^3[0, 1]$ و $W_{\mathfrak{r}}^1[0, 1]$ مشابه (۵.۳.۱) تعریف می‌شوند.

تعریف ۱.۳.۵. فضای ضرب داخلی $W_{\mathfrak{r}}^3[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$W_{\mathfrak{r}}^3[0, 1] = \{u(x) | u^{(3)} \in L^2[0, 1], u(0) = 0, u'(0) = 0\}$ به طور مطلق پیوسته است و $u^{(2)} \in L^2[0, 1]$ و $u^{(3)} \in L^2[0, 1]$ توسط رابطه‌های (۹.۱) و (۱۰.۱) داده شده است.

در مرجع [۱۲] نشان داده شده است که $W_p^1[0, 1]$ و $W_{p,\gamma}^3[0, 1]$ فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی هستند. هسته بازتولیدی $R_x(\cdot) \in W_{p,\gamma}^3[0, 1]$ به صورت زیر است:

$$R_x(t) = \begin{cases} \frac{x^2 t^2}{4} + \frac{x^2 t^3}{12} - \frac{x t^4}{24} + \frac{t^5}{120}, & t \leq x, \\ \frac{x^5}{120} - \frac{x^4 t}{24} + \frac{(3x^2 + x^3)t^2}{12}, & t > x. \end{cases} \quad (10.5)$$

برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_{p,\gamma}^3[0, 1]$ ، خواص و روش به دست آوردن هسته بازتولیدی آن می‌توان به مرجع [۱۲] مراجعه کرد. برای هر $x_i \in [0, 1]$ قرار دهید $\varphi_i(\cdot) = r(x_i, \cdot)$ ، که در آن $r(x, \cdot)$ هسته بازتولیدی $W_p^1[0, 1]$ است. علاوه بر آن فرض کنید $\psi_i(\cdot) = (L^* \varphi_i)(\cdot)$ ، که L^* عملگر الحاقی L است. فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در $[0, 1]$ چگال باشد، با توجه به قضیه (۲.۲.۲)، $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک دستگاه کامل برای $W_{p,\gamma}^3[0, 1]$ است و $\psi_i(x) = L_t R_x(t)|_{t=x_i}$. دستگاه متعامد یکه $\{\bar{\psi}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ در $W_{p,\gamma}^3[0, 1]$ را می‌توان با استفاده از فرایند متعامد سازی گرام-اشمیت بر روی $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^\infty$ به صورت زیر به دست آورد:

$$\bar{\psi}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \psi_k(x) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots). \quad (11.5)$$

قضیه ۲.۳.۵. اگر $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ در بازه $[0, 1]$ چگال باشد و جواب مساله (۹.۵) یکتا باشد، آنگاه جواب مساله (۹.۵) به فرم زیر است:

$$u_{m+1}(x, s) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u_m(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (12.5)$$

برهان. بسط فوریه u_{m+1} در (۹.۵) را بر حسب پایه یکا متعامد $\bar{\psi}_i \in W_{p,\gamma}^3[0, 1]$ می‌توان به صورت زیر نوشت. توجه کنید که برای هر $f \in W_{p,\gamma}^1[0, 1]$ داریم $(f(x), \varphi_i(x)) = f(x_i)$.

$$\begin{aligned} u_{m+1}(x) &= \sum_{i=1}^\infty (u_{m+1}(x), \bar{\psi}_i(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (u_{m+1}(x), L^* \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (Lu_{m+1}(x), \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} (F(x, u_m), \varphi_k(x)) \bar{\psi}_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u_m(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \end{aligned} \quad (13.5)$$

□

حال جواب تقریبی $y_{m+1,N}$ را با استفاده از N جمله بسط $y_{m+1} = u_{m+1} + A$ به صورت زیر

در نظر می‌گیریم:

$$y_{m+1,N}(x) = A + u_{m+1,N}(x) = A + \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^i \beta_{ik} F(x_k, u_m(x_k)) \bar{\psi}_i(x). \quad (14.5)$$

برآورد خطای قطع سری در قضیه زیر بیان می‌شود.

قضیه ۳.۳.۵. برای هر $u \in W_{\gamma}^{3,2}[\cdot, 1]$ داریم:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |u_N(x) - u(x)| \leq C_N \|u\|, \quad (15.5)$$

و وقتی که $N \rightarrow \infty$ ، ثابت $C_N \rightarrow 0$.

برهان. قرار دهید

$$R_{N,x}(t) = \sum_{i=1}^N \bar{\psi}_i(x) \bar{\psi}_i(t),$$

به سادگی با توجه به تعامد $\{\bar{\psi}_i\}_{i=1,\dots,N}$ می‌توان دید $u_N(x) = (u(\cdot), R_{N,x}(\cdot))$ با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز و برای هر $x \in [0, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned} |u_N(x) - u(x)| &= \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} (u, \bar{\psi}_i) \bar{\psi}_i(x) \right| \\ &= \left| (u(y), \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x)) \right| \\ &\leq \|u\| \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x) \right\| \\ &= \|u\| \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i^2(x) \right| \\ &= \|u\| |R_x(x) - R_{N,x}(x)|. \end{aligned}$$

قرار دهید $C_N(x) = |R_x(x) - R_{N,x}(x)|$ و $C_N = \max_{0 \leq x \leq 1} C_N(x)$ آنگاه

$$\begin{aligned} C_{N+1}(x) &= |R_x(x) - R_{N+1,x}(x)| \\ &= \left\| \sum_{i=N+2}^{\infty} \bar{\psi}_i(y) \bar{\psi}_i(x) \right\| = \left| \sum_{i=N+2}^{\infty} \bar{\psi}_i^2(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \bar{\psi}_i^2(x) \right| = C_N(x). \end{aligned}$$

□

معادله (۱۵.۵) بدترین رفتار خطای قطع را نشان می‌دهد و خطا به صورت درصدی از نرم $u \in W_{\gamma}^{3,2}[\cdot, 1]$ داده شده است، که تنها مقدار نامعلوم در کران خطا است. توجه کنید که مقدار ثابت C_N در کران خطا به صورت دقیق قابل محاسبه است.

قضیه ۴.۳.۵. فرض کنید شرایط قضیه (۳.۲.۵) برقرار باشد. اگر y جواب دقیقی مساله (۱.۵) باشد، آنگاه داریم:

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y - y_{N,m}| \leq \frac{\cosh(\sqrt{k})L}{\Upsilon(\alpha+1)} \times \frac{k^m}{(\Upsilon m)!} + k \cdot C_N, \quad (۱۶.۵)$$

که در آن $k = \max_{0 \leq x \leq 1} \sqrt{R_x(x)}$ و وقتی که $N \rightarrow \infty$ داریم $C_N \rightarrow 0$.

برهان. فرض کنید $u_m = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \bar{\psi}_i(x)$ ، آنگاه داریم:

$$\|y_m - y_{N,m}\| = \|u_m - u_{N,m}\| = \sqrt{\sum_{i=N+1}^{\infty} c_i^2} = C_N.$$

به سادگی می‌توان دید $C_{N+1} \leq C_N$ یعنی C_N با افزایش N به طور یکنوا کاهش می‌یابد. با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز و برای هر $x \in [0, 1]$ داریم:

$$\begin{aligned} & |y_m(x) - y_{N,m}(x)| \\ &= |u_m(x) - u_{N,m}(x)| = (R_x(\cdot), u_m(\cdot) - u_{N,m}(\cdot)) \\ &\leq \|R_x(\cdot)\| \|u_m(\cdot) - u_{N,m}(\cdot)\| = \sqrt{R_x(x)} C_N. \end{aligned}$$

از قضیه (۳.۲.۵) داریم:

$$\begin{aligned} |y(x) - y_{N,m}(x)| &\leq |y(x) - y_m(x)| + |y_m(x) - y_{N,m}(x)| \\ &\leq \frac{\cosh(\sqrt{k})L}{\Upsilon(\alpha+1)} \times \frac{k^m}{(\Upsilon m)!} + k \cdot C_N. \end{aligned}$$

□

برآورد خطای (۱۶.۵) شامل دو بخش است، بخش اول آن مربوط به طرح تکراری (۸.۵) است و وقتی که $m \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند و بخش دوم آن خطای قطع است و وقتی که $N \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می‌کند.

۴.۵ مثال‌های عددی

در این بخش، به کمک نتایج عددی اعمال روش بر روی چندین مثال از نوع لین-امدن، کارایی و دقت روش را نشان می‌دهیم. خطای مانده در نقاط $x \in [0, 1]$ را با $Res(x)$ نمایش می‌دهیم. در حالتی که جواب دقیق نامعلوم است به منظور نشان دادن دقت جواب تقریبی از انتگرال مربع خطای

جدول ۱.۵: انتگرال مربع خطای مانده برای مساله (۱۸.۵) با $m = 10$ تکرار و مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$.

n	N=10	N=25	N=50	N=100
0	4.02746×10^{-5}	1.93114×10^{-6}	1.17886×10^{-7}	1.29724×10^{-24}
1	4.02755×10^{-5}	1.93182×10^{-6}	1.17944×10^{-7}	1.11778×10^{-20}
2	4.03258×10^{-5}	1.93249×10^{-6}	1.17991×10^{-7}	2.40853×10^{-20}
3	4.04028×10^{-5}	1.93266×10^{-6}	1.17998×10^{-7}	3.04066×10^{-20}
4	4.0521×10^{-5}	1.93272×10^{-6}	1.17989×10^{-7}	3.13916×10^{-20}
5	4.06908×10^{-5}	1.933×10^{-6}	1.17983×10^{-7}	2.93148×10^{-20}

مانده روی کل دامنه به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$E = \int_0^1 (Res(x))^2 dx. \quad (17.5)$$

۱.۴.۵ معادله لین-امدن در حالت کلی

معادله (۱.۵) بعد از دانشمندان اختریف‌زیک به نام‌های لین^{۱۵} و امدن^{۱۶} که برای اولین بار آن را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۷۲]، نام‌گذاری شده است. مساله (۱.۵) برای $f(x, y) = y^n$ ، $g(x) = 0$ و $\alpha = 2$ فرم استاندارد معادله لین-امدن است. در اینجا ما مساله را با چندین $f(x, y), g(x)$ و α مختلف حل می‌کنیم.

مثال: مساله لین-امدن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' + y^n = 0, & 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (18.5)$$

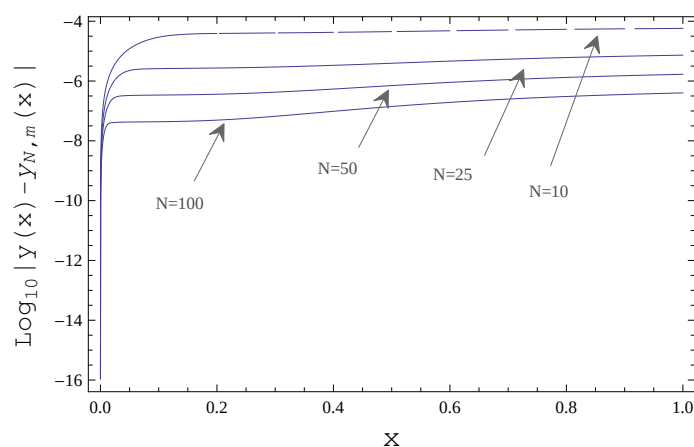
جواب دقیق مساله فقط برای حالت‌های $n = 0, 1, 5$ موجود است [۷۱] و به ترتیب به صورت زیر داده می‌شوند:

$$y(x) = 1 - \frac{x^2}{6}, y(x) = \frac{\sin(x)}{x}, y(x) = (1 + \frac{x^2}{3})^{-\frac{1}{2}}. \quad (19.5)$$

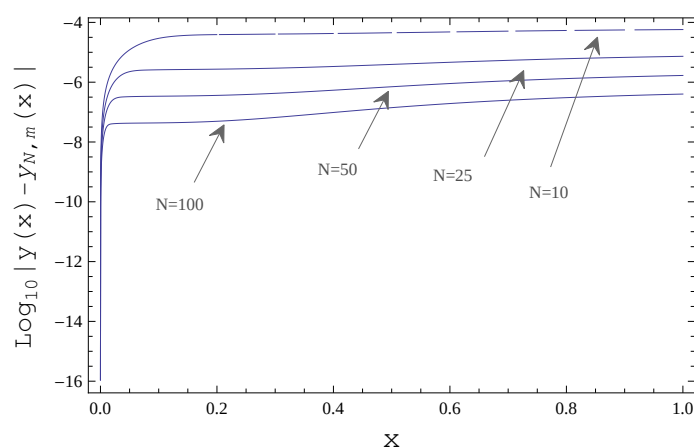
در شکل‌های ۱.۵، ۲.۵ و ۳.۵ نمودار خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) برای $n = 0, 1, 5$ با $m = 10$ تکرار و $N = 10, 25, 50, 100$ رسم شده است. انتگرال مربع خطای مانده برای $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, m = 10$ و مقادیر مختلف N در جدول (۱.۵) رسم شده است.

^{۱۵}Lane

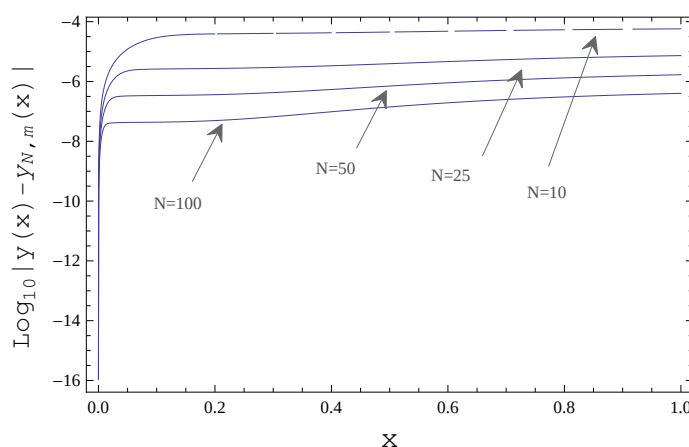
^{۱۶}Emden



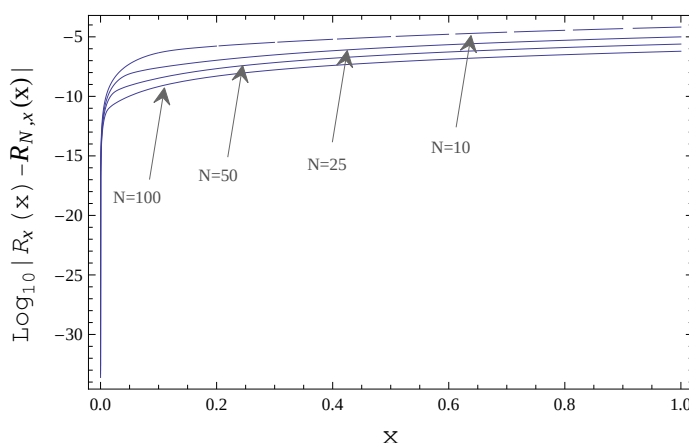
شکل ۱.۵: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۱۸.۵) با $n = 0, m = 10$ تکرار و $N = 10, 25, 50, 100$.



شکل ۲.۵: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۱۸.۵) با $n = 1, m = 10$ تکرار و $N = 10, 25, 50, 100$.



شکل ۳.۵: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۱۸.۵) با $n = 5, m = 10$ تکرار و $N = 10, 25, 50, 100$.

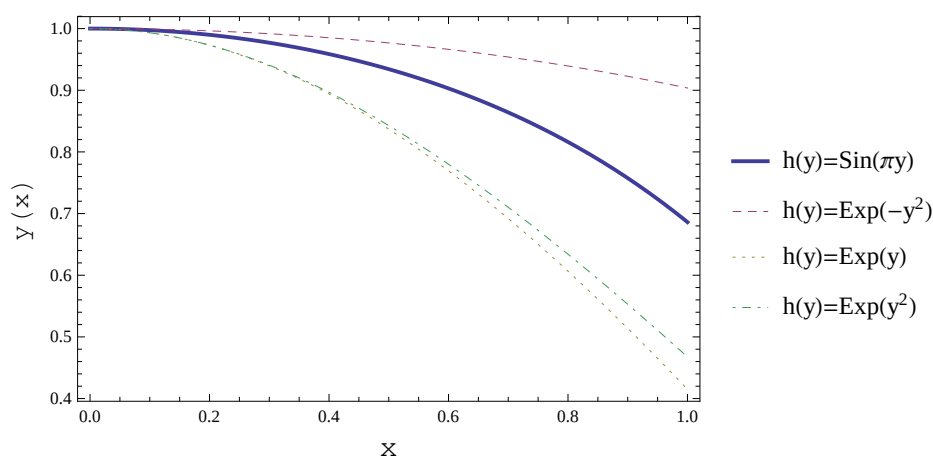


شکل ۴.۵: نمودار $\log_{10} |R_x(x) - R_{N,x}(x)|$ برای مساله (۲۰.۵) با $N = 10, 25, 50, 100$.

مثال: مساله لین-امدن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + e^{h(y)} = 0, & 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (20.5)$$

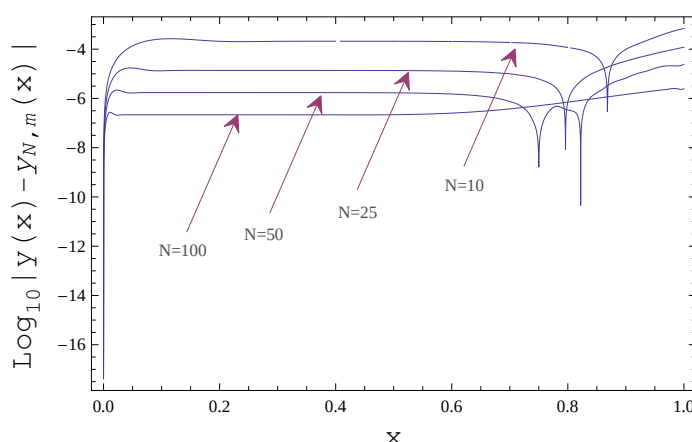
شکل ۴.۵ نمودار $\log_{10} |C_N(x)| = \log_{10} |R_x(x) - R_{N,x}(x)|$ را برای مثال (۲۰.۵) با مقادیر مختلف N نشان می‌دهد. در جدول (۲.۵) انتگرال مربع خطای مانده برای توابع مختلف غیرخطی $h(y)$ در مثال (۲۰.۵) گزارش شده است. در شکل ۵.۵ جواب‌های تقریبی را برای مثال (۲۰.۵) با توابع مختلف $h(y)$ در بازه $[0, 1]$ رسم کرده‌ایم.



شکل ۵.۵: نمودار جواب‌های تقریبی مساله (۲۰.۵) در بازه $[0, 1]$.

جدول ۲.۵: انتگرال مربع خطای مانده برای مساله (۲۰.۵) با $m = 10$ تکرار، مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$ و توابع غیر خطی مختلف $h(y)$.

$h(y)$	$N=10$	$N=25$	$N=50$	$N=100$
y	5.20584×10^{-4}	2.51154×10^{-5}	1.63545×10^{-6}	2.51365×10^{-22}
$-y^2$	9.13069×10^{-6}	4.56534×10^{-7}	2.98878×10^{-8}	3.51183×10^{-24}
y^2	5.6771×10^{-4}	2.55454×10^{-5}	1.64482×10^{-6}	7.04745×10^{-23}
$\sin(\pi y)$	7.74872×10^{-5}	3.60194×10^{-6}	2.33742×10^{-7}	1.37125×10^{-21}
$\cos(\pi y)$	9.18103×10^{-6}	4.56752×10^{-7}	2.98794×10^{-8}	6.85589×10^{-25}
$\cos^2(\pi y)$	4.6141×10^{-4}	252981×10^{-5}	1.68488×10^{-6}	3.55475×10^{-22}



شکل ۶.۵: خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) مساله (۲۱.۵) با $m = 10$ تکرار و مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$.

مثال: مساله لین-امدن زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'' + \frac{1}{x}y' + xy = x^5 - x^4 + 44x^2 - 30x, & x \geq 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{cases} \quad (21.5)$$

جواب دقیق به صورت $y(x) = x^4 - x^3$ است.

نمودار خطای مطلق (در مقیاس لگاریتمی) با $m = 10$ تکرار و مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$ در شکل ۶.۵ رسم شده است.

۲.۴.۵ معادله لین-امدن از نوع دوم

معادله حوزه های گازی همدم^{۱۷} با معادله لین-امدن نوع دوم [۷۳] مدل سازی می شود:

$$\begin{cases} y'' + \frac{2}{x}y' + e^y = 0, & 0 < x \leq 1, \alpha \geq 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (22.5)$$

انتگرال مربع خطای مانده برای معادله لین-امدن نوع دوم با $m = 10$ تکرار و مقادیر مختلف N در جدول (۳.۵) گزارش شده است.

^{۱۷}The isothermal gas sphere equation

جدول ۳.۵: انتگرال مربع خطای مانده برای مساله لین-امدن از نوع دوم با $m = 10$ تکرار و مقادیر مختلف $N = 10, 25, 50, 100$.

N=10	N=25	N=50	N=100
4.0277×10^{-5}	1.93147×10^{-6}	1.1792×10^{-7}	7.74267×10^{-21}

۵.۵ نتیجه

در این فصل با استفاده از ترکیب روش فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی و تکرار پیکارد یک جواب تقریبی تحلیلی برای مسایل غیرخطی منفرد از نوع لین-امدن به دست آوردیم. بسیاری از روش‌های ارایه شده در مقالات برای حل مسایل غیرخطی، ابتدا معادلات غیرخطی را به یک دستگاه از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌کنند. حل این دستگاه از معادلات غیرخطی خود دارای پیچیدگی‌های زیادی بوده و جواب به دست آمده در صورت وجود و یکتایی، غیر قابل اطمینان است. ما برای غلبه بر غیرخطی بودن مساله از تکرار پیکارد استفاده کرده و کران خطایی برای استفاده از این روش تکراری ارایه داده ایم. همچنین برآورد خطایی برای قطع سری جواب ارایه داده و علاوه بر آن‌ها همگرایی جواب تقریبی که از ترکیب دو روش به دست می‌آید را اثبات کرده ایم. در پایان به منظور نشان دادن دقت محاسباتی روش پیشنهاد شده چندین مثال ارایه کرده ایم. نتایج عددی کارایی و دقت روش را نشان می‌دهند.

فصل ۶

روش هم محلی مبتنی بر هسته های

بازتولیدی فضای هیلبرت

۱.۶ مقدمه

در این فصل روش بدون شبکه هم محلی را با استفاده از هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت با تاکید بر خاصیت بازتولیدی هسته‌ها بررسی می‌کنیم. روش‌های بدون شبکه برای حل مسایل مقدار مرزی در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه محققان بوده و چندین روش بدون شبکه توسط محققان پیشنهاد شده است. روش‌های بدون شبکه با استفاده از توابع پایه شعاعی بر روی انواع مختلف معادلات دیفرانسیل اعمال شده است، به عنوان مثال می‌توان به مقاله‌های [۱۸، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸] مراجعه کرد. روش‌های بدون شبکه با استفاده از توابع پایه شعاعی به دو فرم کلی غیرمقارن و مقارن ارایه شده است. در هر دو حالت معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط مختلف مرزی با استفاده از توابع پایه شعاعی در نقاط هم محلی گسسته سازی می‌شوند. روش هم محلی غیرمقارن معرفی شده توسط کانس^۱، در عمل بسیار ساده است. اگرچه دستگاه معادلات جبری غیرمقارن به دست آمده در این روش که از طریق گسسته سازی معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی در نقاط هم محلی با استفاده از توابع پایه شعاعی به دست می‌آید در حالت کلی ممکن است منفرد باشد [۷۷]. در مقاله [۵] نویسنده نشان داده است که بسیاری از الگوریتم‌ها و تکنیک‌ها برای حل معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از روش‌های طیفی روی چند جمله‌ای‌ها را می‌توان با استفاده از توابع پایه شعاعی به کار برد. معمولاً در روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل خاصیت بازتولیدی هسته‌ها استفاده نشده است. در این فصل ما نشان خواهیم داد که چگونه روش بدون شبکه بر روی هسته‌های بازتولیدی را می‌توان برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی با تاکید بر روی خاصیت بازتولیدی هسته‌ها به کار برد. روش هم محلی معمولاً به گسسته سازی فضای فیزیکی پرداخته و به دنبال جوابی تقریبی برای معادله دیفرانسیل به صورت زیر است:

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^N u_N(x_k) h_k(x), \quad (1.6)$$

که در آن توابع h_k ، توابع کاردینال^۲ وابسته به نقاط هم محلی انتخاب شده $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ هستند به طوری که

$$h_k(x_j) = \delta_{k,j} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}, \quad (1 \leq j, k \leq N),$$

^۱ Kansa

^۲ Cardinal functions

در اینجا ما در روش هم محلی از توابع کاردینالی که عضویت یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی هستند، استفاده می‌کنیم. یکی از مزایای توابع پایه شعاعی در گسسته سازی دامنه های پیچیده و استفاده از نقاط پراکنده (داده‌های پراکنده^۳) است. مزایای ذکر شده در روش هم محلی مبتنی بر هسته های بازتولیدی حفظ شده و علاوه بر آن نقاط مرزی در گسسته سازی و در ماتریس هم محلی ظاهر نمی‌شوند. به جای اعمال شرایط مرزی در ماتریس هم محلی، ما از هسته های بازتولیدی استفاده می‌کنیم که در شرایط مرزی همگن شده صدق کنند و در نتیجه می‌توانیم نشان دهیم که اگر یک عملگر خطی معکوس پذیر در معادله اصلی داشته باشیم ماتریس هم محلی غیرمنفرد است. در ضمن روش پیشنهاد شده، یک الگوریتم جدید و ساده با استفاده از خاصیت بازتولیدی هسته برای تولید توابع کاردینال ارایه می‌شود که می‌توان آن را برای حالت های چندبعدی به سادگی حالت یک بعدی به کار برد. برازش خطای طرح بازسازی جواب برحسب درصدی از نرم جواب دقیق ارایه می‌شود که در این برازش خطا تنها عنصر نامعلوم نرم جواب دقیق است. همچنین کران خطا براساس خطای درونیابی یک تابع معلوم در فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی است که می‌توان آن را به طور دقیق در نقاط هم محلی به دست آورد. برای نشان دادن کارایی و عملکرد روش پیشنهاد شده، آن را بر روی چندین مثال از جمله معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا و مسایل غیرخطی چندبعدی به کار برده و نتایج به دست آمده را با نتایج گزارش شده در مقالات مقایسه می‌کنیم. در بخش بعدی روش به دست آوردن توابع کاردینال را برای زیر فضایی از یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی شرح می‌دهیم. ماتریس عملیاتی مشتق و خطای به کارگیری آن در بخش سوم ارایه می‌شود. در بخش چهارم روش را بر روی دو معادله دیفرانسیل خطی، معادله غیرخطی برگرز^۴ یک و دوبعدی و یک مساله مقدار مرزی سه بعدی وابسته به زمان به کار برده ایم.

۲.۶ توابع کاردینال

در این بخش به روش به دست آوردن توابع کاردینال چندمتغیره در یک زیرفضای فضای هیلبرت با هسته های بازتولیدی می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۶. فرض کنید H یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی و $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ هسته بازتولیدی آن باشد. آن گاه K نیمه معین مثبت است. علاوه بر آن K معین و مثبت است اگر و فقط اگر تابع‌های برازش نقطه در H' مستقل خطی باشند.

^۳ Scattered data

^۴ Burgers' equations

□ برهان. به مرجع [۱۸] مراجعه شود.

در واقع یک فضای هیلبرت و هسته بازتولیدی آن همدیگر را به طور یکتا مشخص می‌کنند [۴، ۱۸]. برای یک هسته بازتولیدی مشخص $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ از یک فضای هیلبرت H و $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ که در آن $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ، فضای بازسازی با بعد متناهی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{S}_X = \text{span}\{K(., x_j) : 1 \leq j \leq N\}. \quad (2.6)$$

برای تولید فضای محلی^۵ یک هسته بازتولیدی K ابتدا فضای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{S} = \{s \in \mathcal{S}_X : X \subset \mathbb{R}^d, |X| < \infty\} \quad (3.6)$$

که شامل همه توابع درونیاب به فرم زیر است

$$s(x) = \sum_{j=1}^N c_j K(x, x_j), \quad (4.6)$$

که در آن $c = (c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$ و $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$. فرض کنید یک بردار به صورت زیر داریم:

$$f_X = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T \in \mathbb{R}^N,$$

که مقادیر تابع نامعلوم $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ در مجموعه متناهی نقاط $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ است. اگر هسته K معین و مثبت باشد داده‌های داده شده f_X برای هر مجموعه نقاط $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ دارای یک درونیاب یکتا به فرم (۴.۶) است. با توجه به معین و مثبت بودن K ماتریس $A_X = (K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ معین و مثبت است. فرض کنید $f = \sum_{j=1}^N c_j K(., x_j)$ و $g = \sum_{j=1}^N d_j K(., x_j)$ متعلق به $\mathcal{S}$ باشند، آنگاه با استفاده از خاصیت بازتولیدی هسته $(K(., x_i), K(., x_j))_H = K(x_i, x_j)$ ، می‌توانیم ضرب داخلی و نرم در $\mathcal{S}$ تولید شده با ماتریس معین و مثبت A_X را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$(f, g)_K := (\sum_{j=1}^N c_j K(x, x_j), \sum_{j=1}^N d_j K(x, x_j))_H$$

$$= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i d_j K(x_i, x_j) = c^T A_X d,$$

و

$$\|f\|_K := \sqrt{(f, f)_K} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j K(x_i, x_j) = c^T A_X c,$$

^۵Native Space

که در آن $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^N$ و $c, d \in \mathbb{R}^N$ ، با کامل کردن فضای ضرب داخلی $\mathcal{S}$ با توجه به نرم آن $\|\cdot\|_K$ فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی متناظر با K را به دست می‌آوریم، $H = \overline{\mathcal{S}}$. دستگاه متعامد یکه $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^N$ در $\mathcal{S}_X$ را می‌توان با فرآیند گرام-اشمیت روی $\{K(\cdot, x_i)\}_{i=1}^N$ به صورت زیر به دست آورد

$$\psi_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} K(\cdot, x_k) \quad (\beta_{ii} > 0, i = 1, 2, \dots). \quad (5.6)$$

گزاره ۲.۲.۶. برای هر مجموعه نقاط $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ توابع کاردینال $\{h_1, \dots, h_N\} \subset \mathcal{S}_X$ وجود دارد که در شرط زیر صدق می‌کند

$$h_j(x_k) = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}, \quad (1 \leq j, k \leq N), \quad (6.6)$$

و می‌توان آن‌ها را به صورت زیر تولید کرد

$$h_i(x) = \sum_{k=1}^N \beta_{ki} \psi_k(x), \quad (1 \leq i \leq N), x \in \mathbb{R}^d. \quad (7.6)$$

برهان. می‌دانیم درونیاب $s: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ که در $s_X = f_X$ صدق می‌کند یکتاست یعنی

$$s(x_j) = f(x_j), \quad 1 \leq j \leq N, \quad (8.6)$$

برای هر $h_i, (1 \leq i \leq N)$ یک درونیاب یکتا $s_i \in \mathcal{S}_X$ که در شرط (۶.۶) صدق کند وجود دارد و به صورت زیر داده می‌شود.

$$\begin{aligned} s_i(x) &= \sum_{k=1}^N c_{ik} \psi_k(x) = \sum_{k=1}^N (s_i, \psi_k)_H \psi_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^N (s_i, \sum_{j=1}^k \beta_{kj} K(\cdot, x_j))_H \psi_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \beta_{kj} (s_i, K(\cdot, x_j))_H \psi_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \beta_{kj} s_i(x_j) \psi_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^k \beta_{kj} h_i(x_j) \psi_k(x) = \sum_{k=1}^N \beta_{ki} \psi_k(x), \quad 1 \leq i \leq N. \end{aligned}$$

□ که در آن $s_i|_{(1 \leq i \leq N)}$ توابع کاردینال مورد نظر هستند.

با توجه به گزاره فوق می‌توان توابع کاردینال در حالت چندمتغیره را به سادگی تولید کرد و این یکی از مزایای گزاره فوق است. در [۷۹] توابع کاردینال $\mathcal{S}_X$ به کمک معکوس ماتریس A_X به دست می‌آیند. ما با استفاده از خاصیت بازتولیدی هسته‌ها و گزاره بالا از معکوس کردن یک ماتریس معمولاً بد حالت برای تولید توابع کاردینال پرهیز می‌کنیم. علاوه بر آن فرآیند اصلاح شده

گرام-اشمیت دارای هزینه محاسباتی $O(N^2)$ است که نسبت به معکوس کردن ماتریس با هزینه محاسباتی $O(N^3)$ از محاسبات کمتری استفاده می‌کند.

۳.۶ ماتریس عملیاتی مشتق

یکی از چندین روش به کار بردن روش هم محلی برای حل معادلات دیفرانسیل، استفاده از ماتریس‌های عملیاتی مشتق است. فرض کنید H یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی باشد که $K: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ هسته بازتولیدی آن است. هنگامی که ما فقط مقادیر تابع $u \in H$ را در نقاط پراکنده $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ در دامنه u داریم مقدار $\mathcal{L}u(z)$ برای نقطه ثابت $z \in \Omega$ را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\mathcal{L}u(z) \simeq \sum_{k=1}^N \alpha_k u(x_k), \quad (9.6)$$

که در آن $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی کراندار دیفرانسیلی است. هدف ما تقریب اعمال $\mathcal{L}$ بر روی تابع نامعلوم $u \in H$ با کمک مقادیر این تابع در تعداد متناهی نقاط، $u_X \in \mathbb{R}^N$ است. یک زیرفضای خطی فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی H را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_X = \text{span}\{K(., x_j) : 1 \leq j \leq N\},$$

فرض کنید $S_X^\perp$ یک زیرفضای خطی H به صورت زیر باشد:

$$S_X^\perp = \{f \in H | f(x_i) = 0, i = 1, \dots, N\}.$$

با توجه به خاصیت بازتولیدی هسته K ، برای هر $f \in S_X^\perp$ داریم:

$$(f, \sum_{k=1}^N c_k K(., x_k))_H = \sum_{k=1}^N c_k (f, K(., x_k))_H = \sum_{k=1}^N c_k f(x_k) = 0,$$

که این نتیجه می‌دهد $S_X^\perp$ کامل ساز متعامد S_X است و در نتیجه هر $u \in H$ را می‌توان به صورت $u = u_\bullet + u_\perp$ تجزیه کرد که در آن $u_\bullet \in S_X$ و $u_\perp \in S_X^\perp$ ، برای $1 \leq k \leq N$ داریم:

$$u(x_k) = u_\bullet(x_k) + u_\perp(x_k) = u_\bullet(x_k),$$

بنابراین درونیاب یکتای $u \in S_X$ به صورت زیر است:

$$u_\bullet(x) = \sum_{k=1}^N c_k K(x, x_k) = \sum_{k=1}^N u_\bullet(x_k) h_k(x) = \sum_{k=1}^N u(x_k) h_k(x),$$

با توجه به قضیه نمایش ریتس، برای هر عملگر خطی کراندار $\mathcal{L}$ عضوی مانند $g \in H$ وجود دارد به طوری که برای هر نقطه ثابت $z \in \Omega$ و هر $u \in H$ داریم $\mathcal{L}u(z) = (g, u)_H$ ، بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u(z) &= (g, u)_H \simeq (g, u_\bullet)_H \\ &= (g_\bullet + g_\bullet^\perp, u_\bullet)_H = (g_\bullet, u_\bullet)_H \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k K(\cdot, x_k), u_\bullet\right)_H \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k u_\bullet(x_k) \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k u(x_k).\end{aligned}\tag{۱۰.۶}$$

ما می‌توانیم ضرایب α_i ، $(1 \leq i \leq N)$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}h_i(z) &= (g, h_i)_H \\ &= (g_\bullet + g_\bullet^\perp, h_i)_H = (g_\bullet, h_i)_H \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \alpha_k K(\cdot, x_k), h_i\right)_H \\ &= \sum_{k=1}^N \alpha_k h_i(x_k) = \alpha_i.\end{aligned}$$

واضح است که تقریب در معادله (۱۰.۶) برای توابع $u \in \mathcal{S}_X$ دقیق است. اگر معادله (۹.۶) را در نقاط x_i ، $(i = 1, \dots, N)$ برای هر $u \in \mathcal{S}_X$ محاسبه کنیم خواهیم داشت:

$$\mathcal{L}u(x_i) = \sum_{k=1}^N u(x_k) \mathcal{L}h_k(x_i), \quad i = 1, \dots, N$$

که فرم ماتریسی آن به صورت زیر است

$$\mathcal{L}\mathbf{u} = L\mathbf{u},$$

که در آن $\mathbf{u} = (u(x_1), \dots, u(x_N))^T$ ، $L\mathbf{u} = (\mathcal{L}u(x_1), \dots, \mathcal{L}u(x_N))^T$ ، و عناصر ماتریس عملیاتی L به صورت $l_{ij} = \mathcal{L}h_j(x_i)$ است. ماتریس عملیاتی L را می‌توان برای حل معادلات با مشتقات جزئی و معادلات دیفرانسیلی معمولی به کار برد. گاهی فقط ضرب L در بردار داده‌ها مورد نیاز است. به عنوان مثال برای معادلات وابسته به زمان و گاهی معکوس ماتریس L را نیاز داریم.

لم ۱۰.۳.۶. اگر عملگر خطی $\mathcal{L}$ معکوس پذیر باشد ماتریس عملیاتی L متناظر با آن معکوس پذیر است.

برهان. برای نقاط هم محلی انتخاب شده $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ ، فرض کنید

$$c_1 \mathcal{L}h_1(x) + \dots + c_N \mathcal{L}h_N(x) = 0,$$

آن‌گاه با توجه به خطی بودن $\mathcal{L}$ داریم

$$\mathcal{L}(c_1 h_1(x) + \dots + c_N h_N(x)) = 0.$$

سپس با توجه به وجود $\mathcal{L}^{-1}$ داریم

$$c_1 h_1(x) + \dots + c_N h_N(x) \equiv 0$$

آن‌گاه از استقلال خطی توابع کاردینال نتیجه می‌گیریم $|_{1 \leq j \leq N} \mathcal{L}h_j(x)$ مستقل خطی بوده و ماتریس L معکوس پذیر است. $\square$

قضیه ۲.۳.۶. فرض کنید H یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی و $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ هسته بازتولیدی آن باشد، فرض کنید $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ به طوری که $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. آن‌گاه برای هر $u \in H$ و $z \in \Omega$ داریم

$$|\mathcal{L}u(z) - \sum_{k=1}^N u(x_k) \mathcal{L}h_k(z)| \leq \|u\|_H \|\varepsilon_X\|_H, \quad (11.6)$$

که در آن $\|\varepsilon_X\|_H = \|\mathcal{L}_y K(\cdot, z) - \sum_{k=1}^N K(\cdot, x_k) \mathcal{L}h_k(z)\|_H$ نرم خطای درونیای تابع معلوم $\mathcal{L}_y K(\cdot, z)$ است و همچنین $0 \leq \|\varepsilon_X\|_H^2 \leq \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y K(x, y)|_{x,y=z}$.

برهان. با توجه به قضیه نمایش ریتس برای هر عملگر خطی کراندار $\mathcal{L}$ تابعی مانند $g \in H$ وجود دارد به طوری که برای هر $u \in H$ و $z \in \Omega$ داریم $\mathcal{L}u(z) = (g, u)_H$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}u(z) - \sum_{k=1}^N u(x_k) \mathcal{L}h_k(z)| \\ &= |(u, g)_H - (u, \sum_{k=1}^N K(\cdot, x_k) \mathcal{L}h_k(z))_H| \\ &= \|(u, g - \sum_{k=1}^N K(\cdot, x_k) \mathcal{L}h_k(z))_H\| \\ &\leq \|u\|_H \|g - \sum_{k=1}^N K(\cdot, x_k) \mathcal{L}h_k(z)\|_H. \end{aligned}$$

قرار دهید $\|\varepsilon_X\|_H = \|g - \sum_{k=1}^N K(\cdot, x_k) \mathcal{L}h_k(z)\|_H$. از معادله (۱۰.۶) به سادگی می‌توان دید $\mathcal{L}h_k(z)|_{1 \leq k \leq N}$ ضرایب درونیایی $g = \mathcal{L}_y K(\cdot, z) \in H$ هستند و $\|\varepsilon_X\|_H$ خطای درونیایی تابع معلوم

$\mathcal{L}_y K(\cdot, z)$ است که می‌توان آن را به طور دقیق به دست آورد. آن‌گاه

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_X\|_H^2 &= (g - \sum_{k=1}^N K(\cdot, x_k) \mathcal{L}h_k(z), g - \sum_{k=1}^N K(\cdot, x_k) \mathcal{L}h_k(z))_H \\ &= (g, g)_H - 2 \sum_{k=1}^N (g, K(\cdot, x_k))_H \mathcal{L}h_k(z) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N K(x_k, x_j) \mathcal{L}h_k(z) \mathcal{L}h_j(z) \\ &= (g, g)_H - 2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N K(x_j, x_k) \mathcal{L}h_j(z) \mathcal{L}h_k(z) + \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N K(x_k, x_j) \mathcal{L}h_k(z) \mathcal{L}h_j(z) \\ &= (g, g)_H - (\mathcal{L}h(z))^T A_X (\mathcal{L}h(z)), \end{aligned}$$

که در آن $\mathcal{L}h(z) = (\mathcal{L}h_1(z), \dots, \mathcal{L}h_N(z))^T$. سپس با توجه به معین و مثبت بودن ماتریس A_X و

$$(g, g)_H = \mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}(g, K(\cdot, y))_H|_{y=z} = \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y K(x, y)|_{x,y=z},$$

داریم:

$$0 \leq \|\varepsilon_X\|_H^2 \leq \mathcal{L}_x \mathcal{L}_y K(x, y)|_{x,y=z},$$

□ که زیرنویس آن نشان دهنده متغیری است که عملگر روی آن اثر می‌کند.

قضیه فوق یک برازش خطای نقطه به نقطه از طرح تقریب را به صورت درصدی از نرم جواب دقیق که تنها مولفه نامعلوم در کران خطا است را به ما می‌دهد. همچنین کران خطا بر حسب خطای درونیابی یک تابع معلوم در فضای هیلبرت H است. فرض کنید یک معادله دیفرانسیل خطی به فرم زیر داریم:

$$\mathcal{L}u = f, \quad (12.6)$$

که در آن تابع داده شده $f \in V$ است. صرف نظر از شرایط مرزی $\mathcal{L} : U \rightarrow V$ یک عملگر خطی است که عناصر یک فضای نرم دار U را به یک فضای V می‌برد. ما تعریف زیر از خوش وضعی مساله که در مقاله [۲۲] توسط رابرت شابک^۶ ارائه شده است را استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۳.۶. یک مساله مانند (۱۲.۶) نسبت به نرم $\|\cdot\|_W$ روی U خوش وضع است اگر ثابتی مانند C وجود داشته باشد که در نامساوی خوش وضعی زیر صدق کند.

$$\|u\|_W \leq C \|\mathcal{L}u\|_V, u \in U. \quad (13.6)$$

ما جواب دقیق مساله (۱۲.۶)، u^* را در $U_N \subseteq U$ با u_N^* که در (۱.۶) تعریف شده است تقریب می‌زنیم. u_N^* را می‌توان با مینیمم سازی نرم مانده $\|\mathcal{L}u_N - f\|_V$ در فضای U_N با بعد متناهی روی U_N همه $u_N \in U_N$ به دست آورد.

^۶Robert Schaback

قضیه ۴.۳.۶. فرض کنید شرایط قضیه (۲.۳.۶) برقرار باشد. همچنین فرض کنید با توجه به تعریف (۳.۳.۶) یک مساله خوش وضع مانند $\mathcal{L}u = f$ برای تابع $f \in V$ با ثابت C ، نرم خوش وضعی $\|\cdot\|_W$ روی یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی H و نرم فضای داده $\|f\|_V = \max_{z \in \Omega} |f(z)|$ داشته باشیم. اگر u^* جواب دقیق مساله و $u_N^* \in S_X \subseteq H$ جواب تقریبی باشد آنگاه

$$\|u^* - u_N^*\|_W \leq C \|u\|_H \|\varepsilon_X\|_H, \quad (14.6)$$

که در آن $\|\varepsilon_X\|_H$ مانند قضیه (۲.۳.۶) تعریف می‌شود.

برهان. جواب دقیق $u^* \in H$ را می‌توان به طور یکتا به $u^* = u_\bullet + u_\bullet^\perp$ تجزیه کرد، که $u_\bullet \in S_X$ از شرط خوش وضعی (۱۳.۶) و (۱۱.۶) داریم

$$\begin{aligned} \|u^* - u_N^*\|_W &\leq C \|\mathcal{L}(u^* - u_N^*)\|_V \leq C \|\mathcal{L}(u^* - u_\bullet)\|_V \\ &= C \max_{z \in \Omega} |\mathcal{L}(u^* - u_\bullet)(z)| = C \max_{z \in \Omega} |\mathcal{L}u^*(z) - \mathcal{L}u_\bullet(z)| \\ &= C |\mathcal{L}u^*(z_\bullet) - \mathcal{L}u_\bullet(z_\bullet)| = C |\mathcal{L}u^*(z_\bullet) - \sum_{k=1}^N u_\bullet(x_k) \mathcal{L}h_k(z_\bullet)| \\ &= C |\mathcal{L}u^*(z_\bullet) - \sum_{k=1}^N u^*(x_k) \mathcal{L}h_k(z_\bullet)| \leq C \|u^*\|_H \|\varepsilon_X\|_H \end{aligned}$$

□

که در آن $z_\bullet$ نقطه ای در Ω است.

این قضیه نشان می‌دهد که اگر مساله خوش وضع باشد، دارای یک گسسته سازی خوش وضع است [۲۲]. معادله (۱۴.۶) بدترین حالت رفتار تقریب u_N^* را نشان می‌دهد و خطا به صورت درصدی از نرم جواب دقیق $\|u^*\|_H$ داده شده که تنها مولفه نامعلوم در کران خطا است.

۴.۶ کاربرد ماتریس عملیاتی مشتق و مثال های عددی

در این بخش ابتدا به معرفی چند فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی برای ساختن ماتریس عملیاتی مشتق پرداخته سپس کاربرد آن را بر چند معادله دیفرانسیل و معادله با مشتقات جزئی نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۶. فرض کنید H یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی از توابع $f : \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. تابع $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ هسته بازتولیدی H است، اگر و فقط اگر $K(\cdot, x) \in H$ برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ و $(K(\cdot, x), f)_H = f(x)$ برای هر $f \in H$.

فضاهای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W_m^m[a, b]$ ، ضرب داخلی و نرم آن‌ها مشابه (۵.۳.۱) تعریف می‌شوند. برای مشاهده جزئیات بیشتر در مورد فضای هیلبرت $W_m^m[a, b]$ ، روش به دست آوردن هسته آن و قضیه‌های مربوط به آن‌ها به [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۵۴، ۵۵] مراجعه کنید.

گزاره ۲.۴.۶. هسته بازتولیدی فضای هیلبرت $W^m_p[a, b]$ ، برای یک بازه کراندار $[a, b]$ ، معین و مثبت اکید است.

برهان. طبق قضیه‌های (۶.۳.۱) و (۱.۲.۶)، اگر بتوانیم نشان دهیم تابع‌های برازش نقطه مستقل خطی هستند، برهان کامل می‌شود. برای نقاط دو به دو مجزا $x_1, \dots, x_N \in [a, b]$ و $c \in \mathbb{R}^N$ فرض کنید:

$$c_1 \delta_{x_1} + \dots + c_N \delta_{x_N} = 0,$$

آن‌گاه برای هر $f \in W^m_p[a, b]$ داریم:

$$(c_1 \delta_{x_1} + \dots + c_N \delta_{x_N})f = c_1 f(x_1) + \dots + c_N f(x_N) = 0.$$

فرض کنید $f(x) = x, x^2, \dots, x^N \in W^m_p[a, b]$ ، آن‌گاه $Vc = 0$ ، که در آن V ماتریس وندرموند^۷ به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ x_1^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^N & \dots & x_N^N \end{pmatrix} c = 0. \quad (۱۵.۶)$$

از غیر منفرد بودن ماتریس فوق داریم $c = 0$ و نتیجه می‌گیریم که تابع‌های برازش نقطه مستقل خطی هستند. $\square$

در ادامه این بخش کاربرد ماتریس عملیاتی مشتق را بر معادلات دیفرانسیل می‌بینیم. چندین مثال برای نشان دادن کارایی ماتریس‌های عملیاتی مشتق به دست آمده برای مسایل مقدار مرزی و مسایل وابسته به زمان مرتبه بالا ارایه می‌شود. به منظور حل مسایل مقدار مرزی یک زیر فضای بسته $\widehat{W}^m_p[a, b]$ از فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی $W^m_p[a, b]$ با قرار دادن شرایط مرزی روی آن تشکیل می‌دهیم. ابتدا برای مشاهده عملکرد ماتریس عملیاتی مشتق به حل دو مساله مقدار مرزی دو نقطه‌ای خطی مرتبه دو و پنج می‌پردازیم. سپس مساله برگرز^۸ یک و دو بعدی را برای نشان دادن روش حل مسایل وابسته به زمان بررسی می‌کنیم. در مثال آخر یک مساله سه بعدی را به منظور نشان دادن کارایی روش در حل مسایل چند بعدی بررسی می‌کنیم. نتایج به دست آمده را با جواب دقیق مسایل و نتایج گزارش شده در مقالات مقایسه می‌کنیم و به این منظور از بیشترین خطای

^۷Vandermonde matrix

^۸Burgers' problem

مطلق، نرم خطای نسبی و خطای میانگین جذر مربع ها^۹ که به صورت زیر تعریف می‌شوند استفاده می‌کنیم:

$$L_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \hat{u}_i|$$

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - \hat{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (\hat{u}_i)^2}}$$

$$rms = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_i - \hat{u}_i)^2},$$

که در آن N تعداد نقاط هم محلی و u_i و $\hat{u}_i$ مقادیر جواب های دقیق و تقریبی در نقاط x_i هستند.

مثال ۱: مساله مقدار مرزی دو نقطه ای مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u''(x) = -\frac{\sinh(x)}{(1+\cosh(x))^2}, & -1 < x < 1 \\ u(-1) = \alpha, u(1) = \gamma, \end{cases} \quad (16.6)$$

که در آن α و γ طوری داده شده اند که جواب دقیق مساله به صورت $u(x) = \frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}$ باشد.

مثال ۲: مساله مقدار مرزی دو نقطه ای مرتبه پنجم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u^{(5)}(x) + u(x) = g(x), & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0, u(1) = 0, \\ u'(0) = 1, u'(1) = -e, \\ u^{(3)}(0) = -3, \end{cases} \quad (17.6)$$

که در آن g طوری داده شده است که جواب دقیق مساله به صورت $u(x) = x(1-x)e^x$ باشد.

برای حل مساله های (۱۶.۶) و (۱۷.۶)، ابتدا فضای $\widehat{W}_m^m[a, b] \subset W_m^m[a, b]$ را در نظر می‌گیریم که در آن $(m \geq 3)$ برای مساله (۱۶.۶) و $(m \geq 5)$ برای مساله (۱۷.۶) که هر تابع عضو آنها در شرایط مرزی همگن شده صدق کنند. یک جواب تقریبی در نقاط x_i با حل دستگاه خطی گسسته زیر به دست می‌آید:

$$L\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

^۹root mean squared error(RMSE)

جدول ۱.۶: بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۶.۶) و مساله (۱۷.۶) با مقادیر مختلف N .

E_x	$N=10$	$N=25$	$N=50$	$N=100$
Ex1	9.36088e-5	7.80543e-6	9.09414e-7	1.40113e-7
Ex2	4.06488e-6	6.75659e-7	5.15317e-8	6.80347e-9

جدول ۲.۶: بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۷.۶) و مقایسه با نتایج ارائه شده در [۸۱، ۸۰] با $N = ۱۳, ۲۶, ۵۲$.

—	$N=13$	$N=26$	$N=52$
[81], The fifth-order method	1.3767e-4	7.1273e-6	4.6950e-7
[81], The seventh-order method	1.0024e-4	6.8397e-6	4.4773e-7
[80]	5.91739e-5	3.40705e-7	2.03387e-8
Present Method	4.14718e-6	3.29059e-7	4.60087e-8

که در آن f شامل مقادیر تابع f ، تابع سمت راست در معادله دیفرانسیل در نقاط هم محلی و L ماتریس عملیاتی مشتق برای عملگر خطی در معادله‌های دیفرانسیل (۱۶.۶) و (۱۷.۶) است. به عبارت دیگر جواب تقریبی در نقاط هم محلی به صورت زیر داده می‌شود:

$$u = L^{-1}f,$$

مشاهده می‌کنیم که معکوس ماتریس L را برای حل این مسایل نیاز داریم. بیشترین خطای مطلق برای مسایل (۱۶.۶) و (۱۷.۶) همراه با نتایج گزارش شده در [۸۳، ۸۲، ۸۱، ۸۰] در جدول‌های (۱.۶)، (۲.۶) و (۳.۶) نشان داده شده‌اند.

مثال ۳: به عنوان مثال سوم مساله برگرز زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u_t + uu_x - vu_{xx} = 0, & x \in (0, 1), t \in (0, T] \\ u(x, 0) = f(x), \\ u(0, t) = g_1(t), u(1, t) = g_2(t), \end{cases} \quad (18.6)$$

که در آن $v = \frac{1}{Re}$ و $Re \geq 0$ عدد رینولدز^{۱*} مشخص کننده اندازه ویسکوزیته^{۱۱} است و f, g_1, g_2 چنان داده می‌شوند که جواب دقیق $u(x, t) = \frac{2v\pi e^{-\pi^2 vt} \sin(\pi x)}{\sigma + e^{-\pi^2 vt} \cos(\pi x)}$ باشد که σ یک پارامتر است.

^{۱*} Reynolds number

^{۱۱} size of viscosity

جدول ۳.۶: بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۷.۶) و مقایسه با نتایج ارایه شده در [۸۲، ۸۰، ۸۳] با $N = 10, 20, 40$.

—	N=10	N=20	N=40
[82]	0.1570	0.0747	0.0208
[83]	2.2593e-4	1.3300e-5	5.2812e-7
[80]	6.29887e-5	2.14116e-6	7.00280e-8
Present Method	4.06488e-6	6.75653e-7	9.77376e-8

جدول ۴.۶: بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.005, \sigma = 100, \Delta t = 0.001$ در $T = 1$.

x	N=9	N=19	N=49	N=99
0.1	2.262e-7	2.03753e-8	1.49817e-9	1.89103e-10
0.2	7.61072e-9	3.04182e-9	2.15462e-10	2.73761e-11
0.3	5.61635e-9	1.73892e-10	1.26178e-11	1.62505e-12
0.4	1.03542e-9	5.57599e-12	5.87341e-14	2.84012e-14
0.5	2.0797e-10	1.2354e-11	3.03348e-13	1.29787e-14
0.6	1.25513e-9	9.5256e-12	2.44183e-14	2.50198e-14
0.7	6.4257e-9	1.87357e-10	1.36151e-11	1.75094e-12
0.8	8.5334e-9	3.39848e-9	2.36027e-10	2.97671e-11
0.9	2.62064e-7	2.28723e-8	1.6453e-9	2.06043e-10

برای این مساله نتایج عددی در جدول‌های (۴.۶)، (۵.۶)، (۶.۶) و (۷.۶) با مقادیر مختلف N, v ارایه شده و با نتایج گزارش شده در [۸۶، ۸۵، ۸۴] مقایسه شده‌اند. نمودار خطای مطلق در $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ با $v = 0.001, \sigma = 100, \Delta t = 0.001$ و $N = 100$ در شکل (۱.۶) نشان داده شده است. در حل مسایل وابسته به زمان از ماتریس عملیاتی مشتق برای گسسته سازی مکانی و از روش صریح اویلر^{۱۲} با مقادیر مختلف گام زمانی مانند مقاله [۵] استفاده شده است.

مثال ۴: به عنوان مثال چهارم مساله برگرز (۱۸.۶) را در نظر بگیرید به طوری که f, g_1, g_2 طوری داده شده اند که جواب دقیق به صورت زیر باشد:

$$u(x, t) = \frac{\left(\frac{x}{t}\right)}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{v}} \exp\left(\frac{x^2}{vt}\right)}, t \geq 1, \quad (19.6)$$

که در آن $t_* = \exp\left(\frac{1}{\lambda v}\right)$.

برای این مساله، نتایج عددی در جدول‌های (۸.۶)، (۹.۶) و (۱۰.۶) با مقادیر مختلف N, v و زمان T ارایه شده و با نتایج گزارش شده در [۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰] مقایسه شده اند. نمودار خطای

^{۱۲}explicit Euler method

جدول ۵.۶: بیشترین خطای مطلق برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.01, \sigma = 100, \Delta t = 0.001$ در $T = 1$

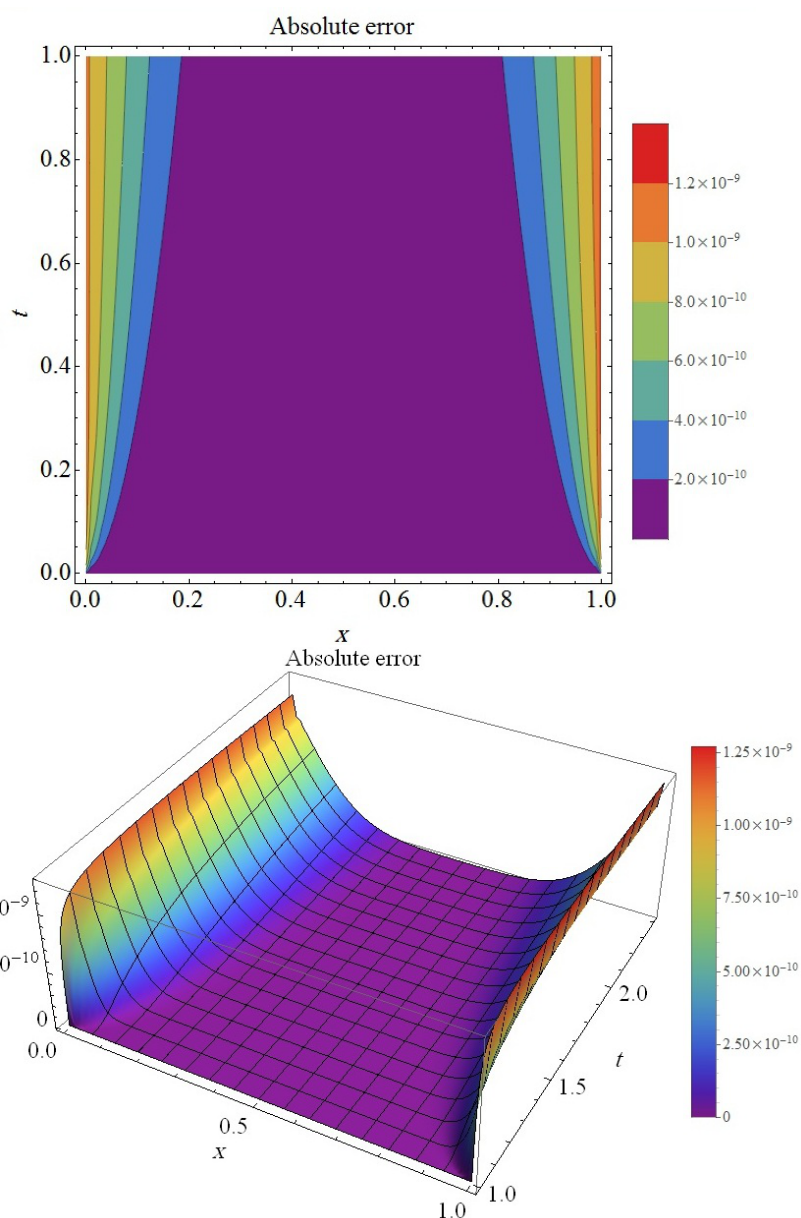
x	N=9	N=19	N=49	N=99
0.1	6.10581e-7	6.26004e-8	4.39306e-9	5.53562e-10
0.2	1.36231e-7	2.17878e-8	1.46821e-9	1.85574e-10
0.3	4.28999e-8	4.73128e-9	3.19272e-10	4.05259e-11
0.4	2.3068e-9	6.25785e-10	4.37662e-11	5.68849e-12
0.5	1.55687e-9	7.47366e-11	6.9561e-12	1.03795e-12
0.6	2.47148e-9	6.82795e-10	4.72142e-11	6.10849e-12
0.7	4.90948e-8	5.25698e-9	3.47964e-10	4.38599e-11
0.8	1.57021e-7	2.43749e-8	1.60721e-9	2.01578e-10
0.9	7.07425e-7	7.01786e-8	4.81376e-9	6.01779e-10

جدول ۶.۶: مقایسه بیشترین خطای مطلق با گزارش‌های ارایه شده در [۸۴، ۸۵، ۸۶] برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.005, \sigma = 100, \Delta t = 0.01$ در $T = 1$

N	Kaysar [84]	Mittal and Jain [85]	Jiwari et al. [86]	present method
10	1.2458e-7	1.215e-7	4.708e-8	2.18427e-7
20	3.3944e-8	3.062e-8	1.091e-8	5.0701e-8
40	1.1249e-8	7.644e-9	1.980e-9	8.45243e-9

جدول ۷.۶: مقایسه بیشترین خطای مطلق با گزارش‌های ارایه شده در [۸۴، ۸۵، ۸۶] برای مساله (۱۸.۶) با $v = 0.01, \sigma = 100, \Delta t = 0.01$ در $T = 1$

N	Kaysar [84]	Mittal and Jain [85]	Jiwari et al. [86]	present method
10	4.8808e-7	4.6280e-7	6.001e-11	5.70664e-7
20	1.4305e-7	1.1640e-7	1.010e-11	1.11397e-7
40	5.6677e-8	2.9068e-8	1.277e-10	1.71283e-8



شکل ۱.۶: خطای مطلق برای مساله (۱۸.۶) در $(x, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ با $v = 0.01, \sigma = 0.01$ و $N = 100, \Delta t = 0.01$.

جدول ۸.۶: خطای مطلق برای مساله (۱۹.۶) با $v = 0.005, \Delta t = 0.001$ در $T = 2/4$.

x	N=9	N=19	N=49	N=99
0.1	3.38788e-4	1.29098e-5	1.4327e-7	1.36393e-8
0.2	2.22943e-4	1.20103e-5	8.70747e-8	1.4864e-8
0.3	3.5307e-3	6.64242e-6	4.2466e-8	1.67124e-8
0.4	6.14054e-3	1.05248e-6	4.05435e-9	1.83551e-8
0.5	9.38858e-3	3.26473e-6	1.09728e-7	1.0658e-8
0.6	4.65907e-3	9.55317e-5	2.52439e-7	3.51594e-8
0.7	1.20515e-3	9.85081e-4	4.04149e-6	1.08066e-7
0.8	1.48941e-2	1.25824e-3	1.01506e-5	7.9405e-7
0.9	7.82867e-3	2.33629e-4	1.14803e-6	9.28533e-7

جدول ۹.۶: خطای مطلق برای مساله (۱۹.۶) با $v = 0.01, \Delta t = 0.001$ در $T = 2/4$.

x	N=9	N=19	N=49	N=99
0.1	9.95273e-5	3.35171e-6	1.08602e-7	1.30316e-8
0.2	8.94701e-5	2.39213e-6	7.82263e-8	1.44698e-8
0.3	3.18397e-4	1.04958e-6	4.44714e-8	1.47884e-8
0.4	2.04775e-5	5.04465e-8	2.52569e-8	1.24927e-8
0.5	7.40076e-4	1.45148e-6	6.83275e-8	1.36276e-9
0.6	1.13465e-3	1.07839e-5	1.67551e-7	7.40158e-8
0.7	8.42578e-4	2.2044e-5	2.44873e-6	1.95911e-6
0.8	1.37617e-3	1.20514e-5	4.29766e-5	4.30052e-5
0.9	2.62408e-3	5.83287e-4	5.10815e-4	5.06428e-4

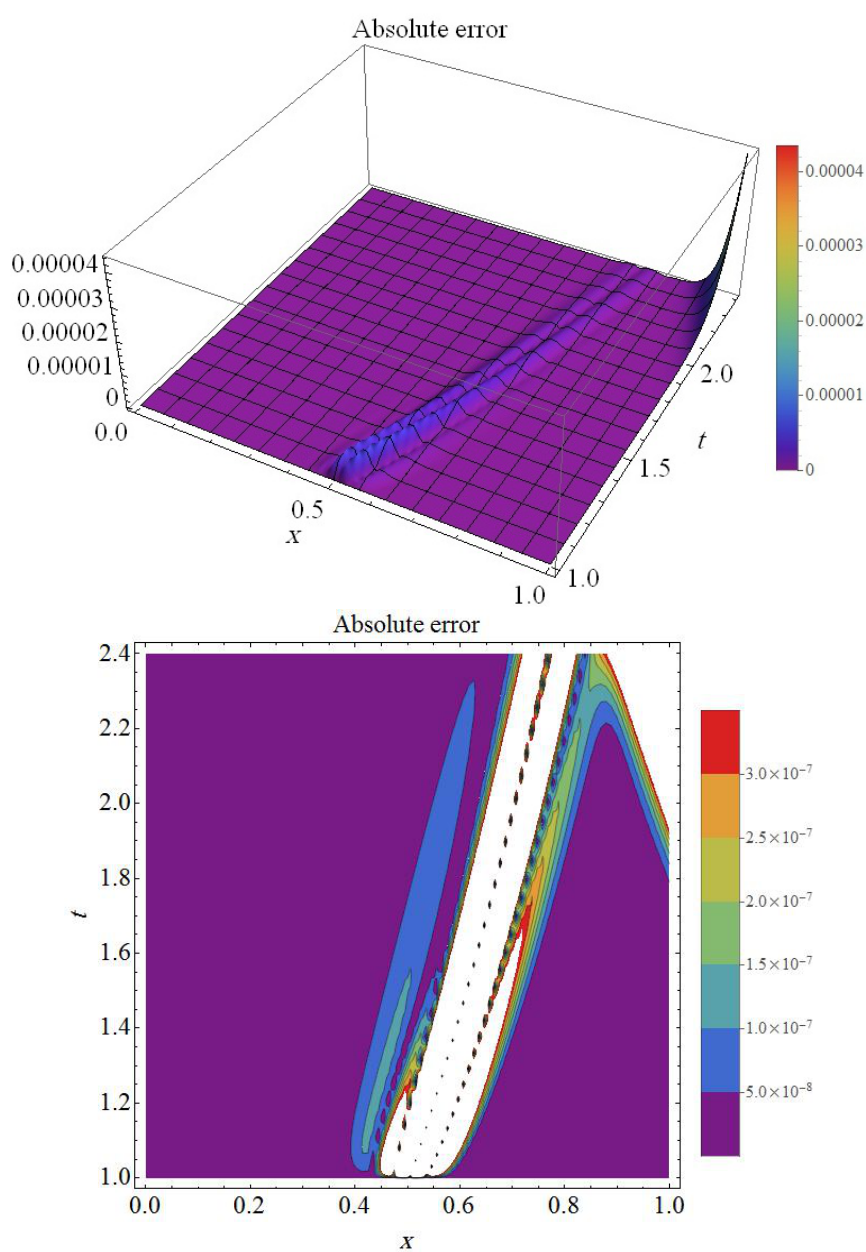
مطلق در $(x, t) \in [0, 1] \times [1, 2/4]$ با $v = 0.005, \Delta t = 0.001$ و $N = 100$ در شکل (۲.۶) نشان داده شده است.

مثال ۵: مساله برگرز دو بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t + uu_x + uu_y = vu_{xx} + vu_{yy}, \quad x_0 \leq x \leq x_N, y_0 \leq y \leq y_N, t > 0, \quad (20.6)$$

با شرط اولیه $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ و $v = \frac{1}{Re} > 0$ که عدد رینولدز است. شرایط مرزی دیریکله چنان داده شده است که جواب دقیق به صورت $u(x, y, t) = \frac{1}{1 + e^{(x+y-t)/\sqrt{v}}}$ است و $x_0 = y_0 = 0, x_N = y_N = 1$.

نتایج به دست آمده با مقادیر مختلف N, v, dt و زمان نهایی T برای مثال بالا در جدول (۱۱.۶) ارائه شده است. نمودار توزیع یکنواخت و پراکنده (تصادفی) نقاط هم محلی و خطای مطلق متناظر با جواب تقریبی به دست آمده با استفاده از این نقاط در $[0, 1] \times [0, 1]$ با $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ و زمان نهایی $T = 1$ و $N = 49$ و $v = 1, \Delta t = 0.0001$ در شکل‌های (۳.۶) و (۴.۶) ارائه شده اند.



شکل ۲.۶: خطای مطلق برای مساله (۱۹.۶) در $(x, t) \in [0, 1] \times [1, 2/4]$ با $\Delta t = 0.005$, $v = 0.001$ و $N = 100$.

جدول ۱۰.۶: مقایسه بیشترین خطای مطلق با گزارش‌های ارایه شده در [۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰] برای مساله (۱۹.۶) با $v = 0.05$.

N	Δt	T	Gao et al. [87]	Duan et al. [88]	present method
50	0.004	2.4	1.1e-3	4.0e-3	3.11061e-5
100	0.001	2.4	2.8712e-4	9.9261e-4	4.35295e-5
N	Δt	T	Zhu and Wang [89]	Ramadan et al. [90]	present method
50	0.01	2.4	6.31491e-3	2.16784e-3	4.24253e-5
50	0.01	1.8	5.12020e-3	2.47189e-3	9.79958e-5

جدول ۱۱.۶: گزارش L_∞ و خطای نسبی L_2 برای جواب تقریبی مساله (۲۰.۶) با مقادیر مختلف N, v, dt و زمان نهایی T .

N	v	dt	T	L_∞	L_2
25	1.00	0.001	0.05	8.82387e-8	1.08665e-7
25	1.00	0.001	0.25	1.44423e-7	1.90166e-7
25	1.00	0.001	1	2.77147e-7	3.27534e-7
25	0.10	0.0001	1	4.0824e-3	4.62779e-3
100	1.00	0.001	0.05	1.78314e-8	2.0465e-8
100	1.00	0.0001	0.25	2.85404e-8	3.33872e-8
100	1.00	0.0001	1	5.55185e-8	5.56571e-8
100	0.10	0.001	0.25	4.1883e-4	1.62067e-3
100	0.10	0.0001	1	6.69479e-4	6.60445e-4

قضیه ۳.۴.۶. فرض کنید W_1 و W_2 دو فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی K_1 و K_2 هسته‌های بازتولیدی آنها باشند. آنگاه $\bar{W} = W_1 \otimes W_2$ یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی است و هسته بازتولیدی آن $\bar{K}(x_1, x_2, y_1, y_2) = K_1(x_1, y_1)K_2(x_2, y_2)$ است.

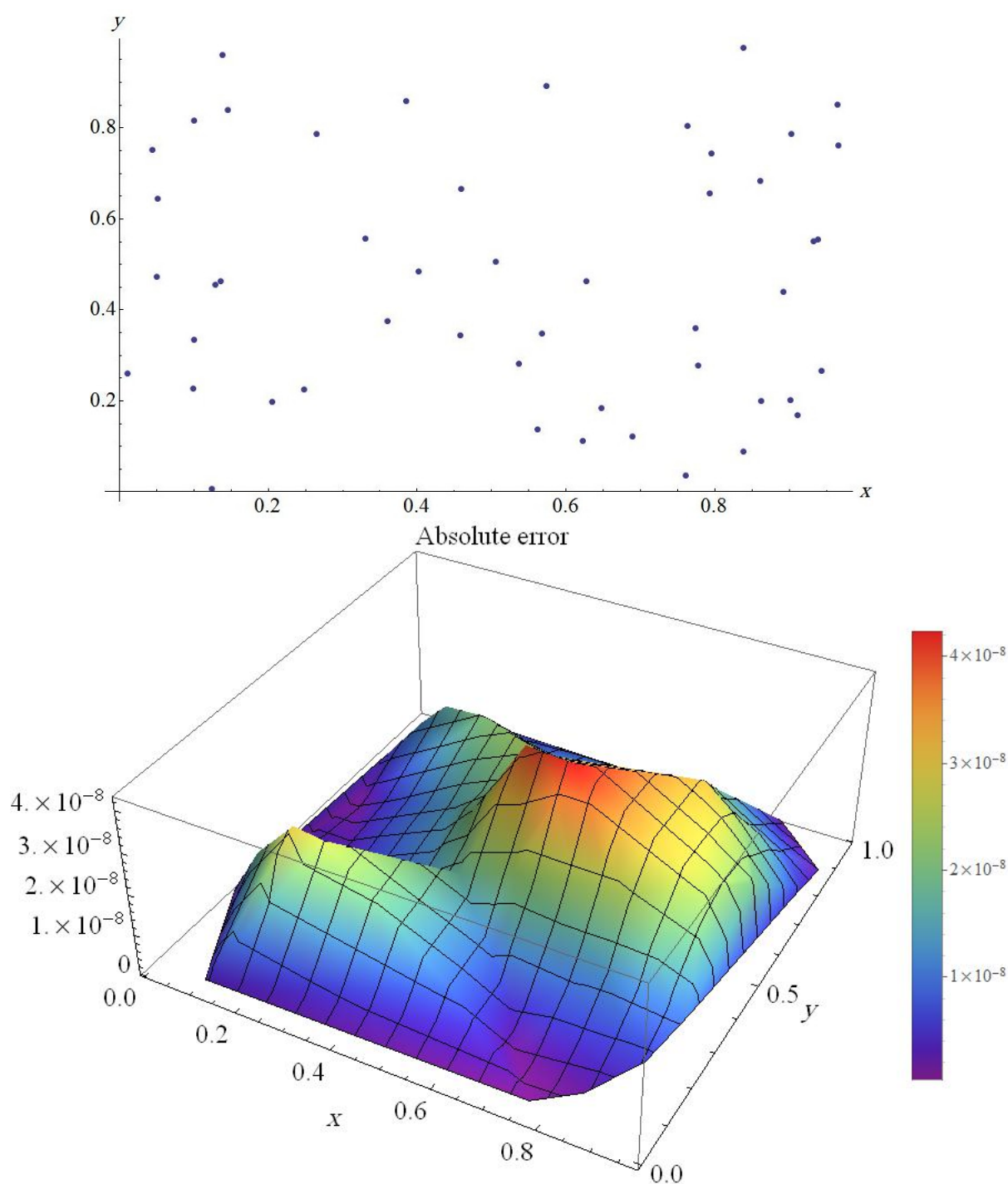
برهان. به مرجع [۴] مراجعه شود. $\square$

برای مشاهده جزئیات بیشتری از این قضیه به قضیه (۱۰.۲.۱) و [۴] مراجعه فرمایید. در ادامه برای حل مسایل چند بعدی از ضرب هسته‌های بازتولیدی فضای $W^m[a, b]$ به عنوان هسته‌های بازتولیدی چند بعدی استفاده می‌کنیم.

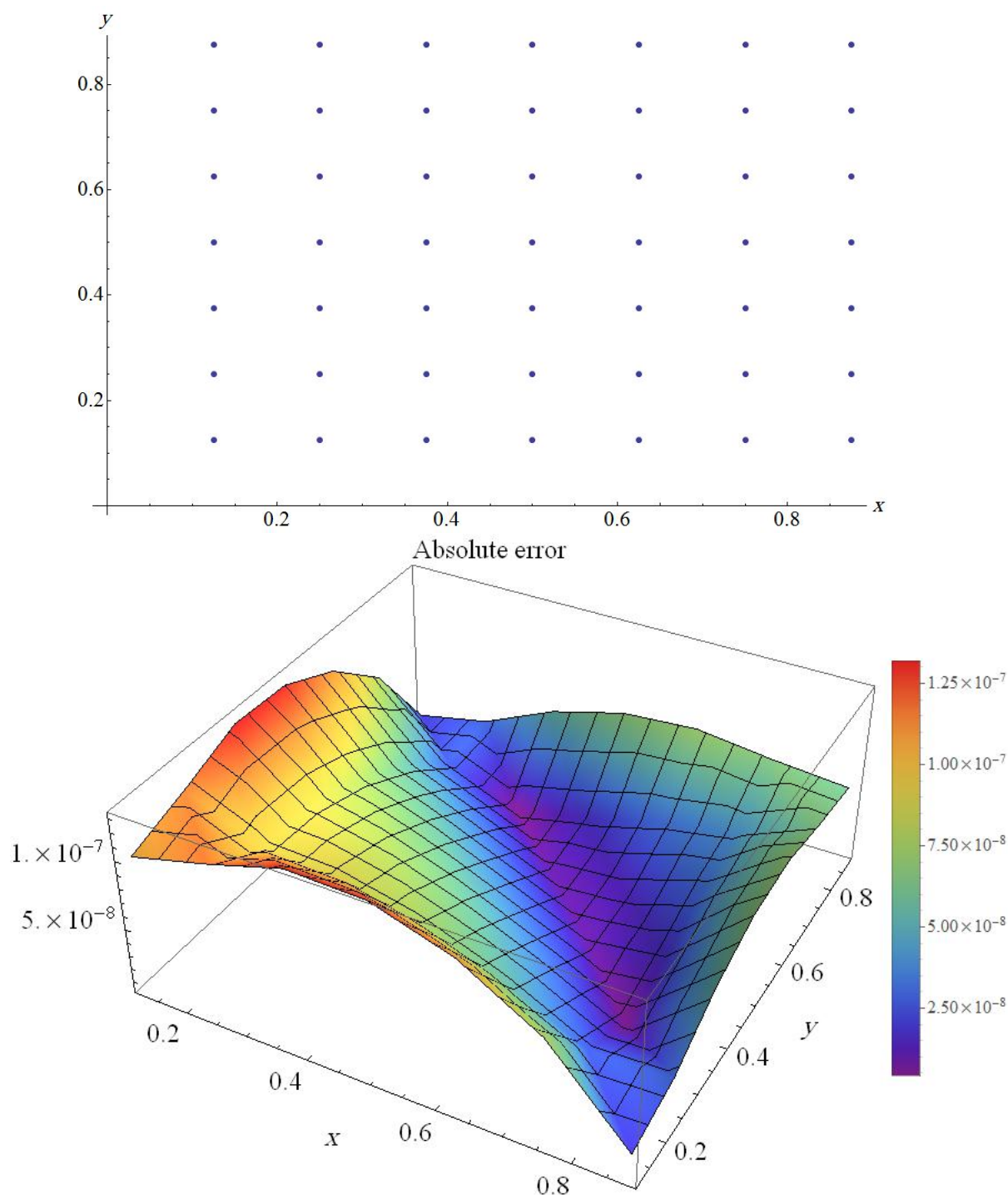
مثال ۶: مساله برگرز دو بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$u_t + uu_x + uu_y = vu_{xx} + vu_{yy}, \quad x_0 \leq x \leq x_N, y_0 \leq y \leq y_N, t > 0, \quad (21.6)$$

با شرط اولیه $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ و $v = \frac{1}{Re} > 0$ که عدد رینولدز است. شرایط مرزی دیریکله چنان داده شده است که جواب دقیق به صورت $u(x, y, t) = 0.5 - \tanh(\frac{x+y-t}{4v})$ است و $x_0 = y_0 = -0.5, x_N = y_N = 0.5$ است.



شکل ۳.۶: توزیع پراکنده (تصادفی) نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۰.۶) برای $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ با $v = 1, \Delta t = 1/10001$ و $N = 49$ در زمان نهایی $T = 1$.



شکل ۴.۶: توزیع یکنواخت نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۰.۶) برای $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ با $v = 1, \Delta t = 0.0001$ و $N = 49$ در زمان نهایی $T = 1$.

جدول ۱۲.۶: گزارش L_∞ و خطای نسبی L_2 برای مساله (۲۱.۶) با مقادیر مختلف N, v, dt و زمان نهایی T .

N	v	dt	T	L_∞	L_2
25	1.00	0.001	0.05	1.12966e-5	1.22801e-5
25	1.00	0.001	0.25	9.80027e-6	1.07641e-5
25	1.00	0.001	1	7.70433e-6	4.7759e-6
25	0.10	0.0001	1	3.86755e-3	1.22881e-3
100	1.00	0.001	0.05	2.28137e-6	2.01698e-6
100	1.00	0.0001	0.25	2.02631e-6	1.75416e-6
100	1.00	0.0001	1	1.45723e-6	8.25501e-7
100	0.10	0.0001	1	3.82887e-3	4.78001e-4

جدول ۱۳.۶: گزارش L_∞ و خطای نسبی L_2 برای مساله (۲۲.۶) در $T = 1$.

dt	N=8	N=27	N=64	N=125	N=216
0.01	3.70573e-3	1.68192e-3	9.38978e-4	5.7752e-4	3.84791e-4
0.001	3.66461e-3	1.64998e-3	9.11093e-4	5.52206e-4	3.61018e-4
0.0001	3.66052e-3	1.64681e-3	9.0834e-4	5.49726e-4	3.58712e-4

برای این مساله نتایج عددی در جدول (۱۲.۶) با مقادیر مختلف N, v, dt و زمان نهایی T ارائه شده است. نمودار توزیع یکنواخت و پراکنده (تصادفی) نقاط هم محلی و خطای مطلق متناظر با جواب تقریبی به دست آمده با استفاده از این نقاط در $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ با $N = 49$ و $v = 1, \Delta t = 0.0001$ و زمان نهایی $T = 1$ در شکل‌های (۵.۶) و (۶.۶) ارائه شده اند.

مثال ۷: مساله سه بعدی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \nabla^2 u(x, y, z, t) - 2e^{t-\pi(x+y+z)}, \quad (22.6)$$

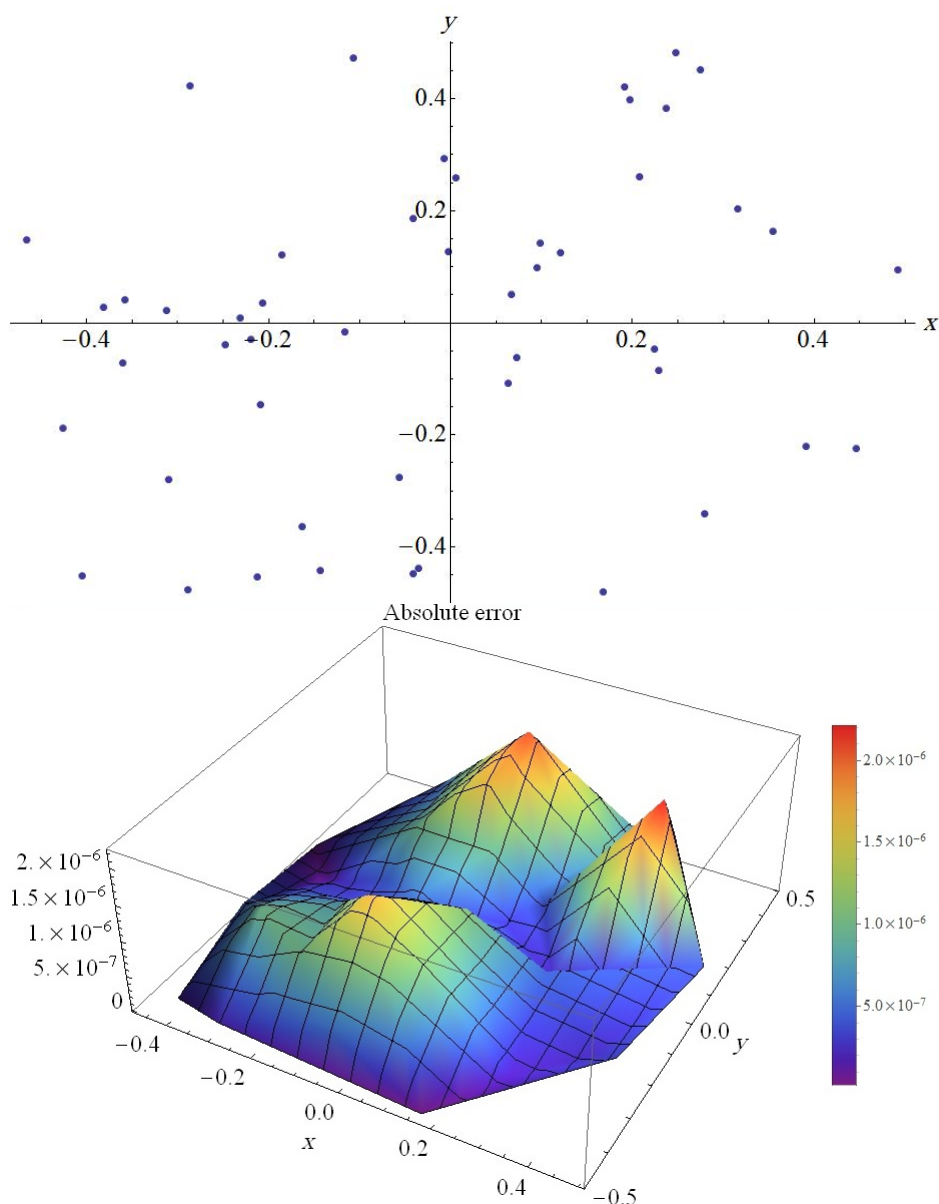
که در آن $0 \leq x, y, z \leq 1$ و $t > 0$ است. همچنین شرایط اولیه در $t = 0$ و شرایط مرزی دیریکله را می‌توان از جواب دقیق مساله که به صورت زیر است به دست آورد:

$$u(x, y, z, t) = e^{t-\pi(x+y+z)} + x + y + z.$$

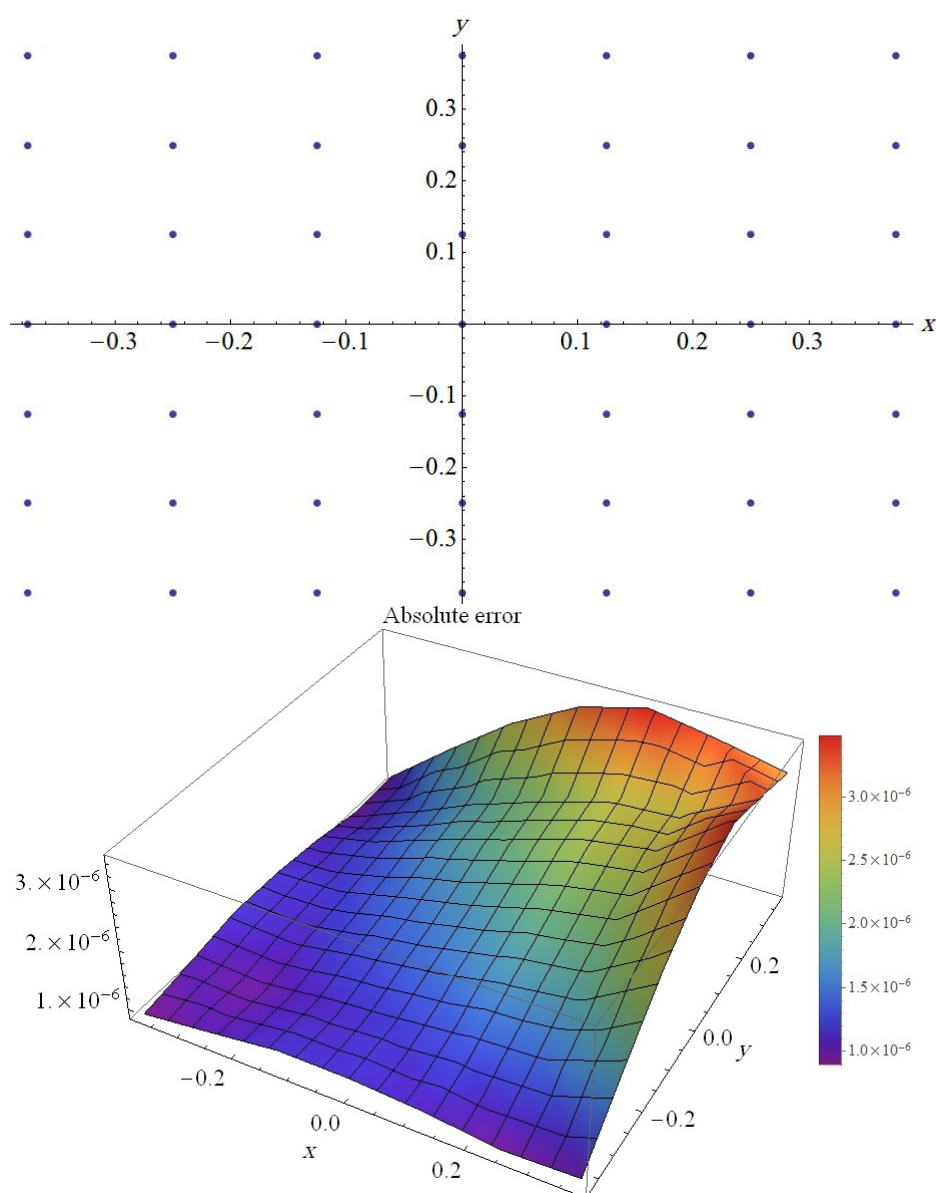
نتایج عددی مساله (۲۲.۶) و مقایسه آنها با نتایج گزارش شده در [۹۱] در جدول‌های (۱۳.۶) و (۱۴.۶) ارائه شده است.

جدول ۱۴.۶: گزارش L_∞ و L_{rms} برای جواب تقریبی مساله (۲۲.۶) در $T = 1$.

	Present method, N=150		G. Yao et al. [91], N=160	
dt	L_∞	L_{rms}	L_∞	L_{rms}
0.01	1.87124e-3	8.1899e-4	2.98e-3	6.39e-4
0.001	1.83218e-3	7.79576e-4	3.88e-3	8.32e-4
0.0001	1.82829e-3	7.75725e-4	2.84e-3	8.51e-4



شکل ۵.۶: توزیع پراکنده (تصادفی) نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۱.۶) برای $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ با $v = 1, \Delta t = 0.0001$ و $N = 49$ در زمان نهایی $T = 1$.



شکل ۶.۶: توزیع یکنواخت نقاط هم محلی و خطای مطلق برای مساله (۲۱.۶) برای $(x, y) \in [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$ با $v = 1$ و $N = 49$ در زمان نهایی $T = 1$.

۵.۶ نتیجه

در این فصل یک روش بدون شبکه جدید، روش بدون شبکه هم محلی فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی، مبتنی بر ماتریس عملیاتی مشتق ساخته شده با استفاده از توابع کاردینال یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی ارائه شد. در مقایسه با روش هم محلی توابع پایه شعاعی^{۱۳} (روش کانسا^{۱۴}) ما غیرمنفرد بودن ماتریس هم محلی را داریم و از آنجا که شرایط مرزی بر روی هسته قرار داده شده است، روش در واقع یک روش بدون شبکه بوده و به کارگیری این روش ساده است. در ضمن این روش، یک الگوریتم جدید و مناسب برای به دست آوردن توابع کاردینال یک فضای هیلبرت با هسته بازتولیدی ارائه و همچنین برازش خطای نقطه به نقطه به کارگیری ماتریس عملیاتی مشتق نیز بررسی شده است. به منظور نشان دادن کارایی روش آن را بر روی هفت مساله اجرا کرده و نتایج به دست آمده را با نتایج گزارش شده در مقالات مقایسه کرده‌ایم که دقت، کارایی و کاربردی بودن روش را نشان می‌دهد.

^{۱۳}Radial basis function collocation

^{۱۴}Kansa

فصل ۷

پیشنهادهای و کارهای آتی

۱.۷ پیشنهادها و کارهای آتی

در این فصل از رساله برخی پیشنهادها برای دانشجویانی که علاقه به کار در زمینه روش‌های عددی مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی دارند، ارایه می‌شود:

۱. تمامی روش‌های ارایه شده در این رساله بر روی مسایلی با دامنه کراندار اعمال شده است. آیا می‌توان این روش‌ها را بر روی مسایلی با دامنه‌های نامتناهی اعمال کرد؟

۲. یکی از ضعف‌های روش پیشنهاد شده توسط کوی [۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۵۴] استفاده از فرآیند گرام-اشمیت برای تولید پایه یک‌ه متعامد در فضای مورد استفاده است. به همین دلیل اجرای روش بر روی مسایلی که دارای عملگر خطی با ضرایبی مانند توابع مثلثاتی و نمایی هستند بسیار کند بوده و کارایی روش را تحت تاثیر قرار می‌دهد. استفاده از الگوریتم‌های متعامدسازی با سرعت اجرای بیشتر مانند الگوریتم‌های ماتریسی یا تقریبی، می‌تواند روش ارایه شده را تقویت نماید.

۳. مطالعات انجام شده در سال‌های اخیر بر روی هسته‌های بازتولیدی و توابع پایه شعاعی، به منظور تولید پایه‌های مناسب و با ویژگی‌های خاص [۲۰، ۶، ۹۲، ۹۳، ۹۴]، بسیار مورد توجه محققان در زمینه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل قرار گرفته‌اند. معرفی پایه نیوتن^۱، پایه متعامد یک‌ه گسسته^۲، پایه SVD ^۳ و کاربردهای آنها در روش‌های عددی حاصل تحقیقات ذکر شده است. همچنین فرونبرگ^۴ در [۷، ۸] روش $QR - RBF$ ^۵ را با استفاده تجزیه ماتریس هم‌محلی تولید شده با استفاده از توابع پایه شعاعی معرفی کرده است. بررسی امکان اجرای الگوریتم‌ها و تولید پایه‌های ارایه شده در مقاله‌های ذکر شده، در فضای $W^m[a, b]$ می‌تواند نتایج قابل توجهی در جهت بهبود روش‌های عددی ارایه شده در [۷، ۸، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۵۴] داشته باشد.

۴. در فصل دوم برآورد خطای تقریب به دست آمده با استفاده از روش مبتنی بر هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت برای مسایل خطی ارایه شد. آیا می‌توان برآورد خطا یا تحلیل

^۱Newton basis

^۲Discretely orthonormal bases

^۳SVD bases

^۴Bengt Fornberg

^۵RBF-QR method

خطایی مانند آنچه در مقاله [۹۵] انجام شده است، برای اعمال روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت بر روی مسایل غیر خطی ارایه داد؟

۵. با توجه به نتایج به دست آمده در فصل سوم در مورد چندگانگی جواب مسایل مقدار مرزی، می‌توان چندگانگی جواب در مسایل مشتقات جزئی را با استفاده از روش هسته‌های بازتولیدی فضای هیلبرت بررسی کرد.

۶. با توجه به گستردگی مطالعات انجام شده در روش‌های شبه طیفی^۶ با استفاده از چند جمله‌ای‌های متعامد و همچنین تکنیک‌های برآورد خطا در این روش‌ها، بررسی امکان به کارگیری آن‌ها با استفاده از پایه‌های تولید شده توسط هسته‌های بازتولیدی پیشنهاد می‌شود. این کار در [۵] با استفاده از توابع پایه شعاعی انجام شده است.

۷. با توجه به اینکه پایه‌های تولید شده توسط هسته‌های بازتولیدی، پایه‌های یک فضای ضرب داخلی هستند، پیشنهاد می‌شود گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل معمولی و مسایل با مشتقات جزئی با استفاده از روش‌های ارایه شده بر اساس فرم قوی (روش هم‌محلی^۷) و فرم ضعیف (روش گالرکین^۸) معادلات مورد بررسی قرار گیرند.

^۶Pseudo-spectral method

^۷Collocation method

^۸Galerkin method

مراجع

- [1] S. Zaremba, *Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le problème de Dirichlet et le problème hydrodynamique*, Bulletin International de l'Académie des Sciences de Cracovie, Classe des Sciences Mathématiques et Naturelles, 2 (1909), pp. 125-195.
- [2] S. Bergmann, *Über die entwicklung der harmonischen Funktionen der Ebene und des raumes nach orthogonal funktionen*, Math. Ann., 86 (1922), pp. 238–271.
- [3] J. Mercer, *Function of positive and negative type and their connection with the theory of integral equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 209 (1909), pp. 415-446.
- [4] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the American Mathematical Society, 68 (1950), pp. 337-404.
- [5] G. Fasshauer, *RBF collocation methods as pseudospectral methods*, Boundary Elements, XVII(2005), pp. 47–56.
- [6] G. Fasshauer, M. McCourt, *Stable evaluation of Gaussian radial basis function interpolants*, SIAM J. Sci. Computation, 34 (2012), pp. A737-A762.
- [7] B. Fornberg, E. Larsson, and N. Flyer, *Stable computations with Gaussian radial basis functions*, SIAM J. Sci. Comput., 33 (2011), pp. 869–892.



- [8] B. Fornberg and G. Wright, *Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter*, Comput. Math. Appl., 48 (2004), pp. 853–867.
- [9] D. Brown, L. Ling, E. Kansa and J. Levesley, *On approximate cardinal preconditioning methods for solving PDEs with radial basis functions*, Engineering analysis with boundary elements, 29 (2005), pp. 343–353.
- [10] F.Z. Geng, M.G. Cui, B. Zhang, *Method for solving nonlinear initial value problems by combining homotopy perturbation and reproducing kernel Hilbert space methods*, Nonlinear Analysis: Real World Appl, 11 (2010), pp. 637–644.
- [11] F.Z. Geng, M G. Cui, *A novel method for nonlinear two-point boundary value problems: combination of ADM and RKM*, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011), pp. 4676–4681.
- [12] M. G. Cui and Y. Lin, *Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space*, Nova Science, New York, NY, USA, 2009.
- [13] M. G. Cui, F.Z. Geng, *Solving singular two-point boundary value problem in reproducing kernel space*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 205 (2007), pp. 6–15.
- [14] F.Z. Geng, M.G. Cui, *Solving singular nonlinear second-order periodic boundary value problems in the reproducing kernel space*, Applied Mathematics and Computation, 192 (2007), pp. 389–398.
- [15] F.Z. Geng, M.G. Cui, *Solving a nonlinear system of second order boundary value problems*, J. Math. Anal. Appl., 327 (2007), pp. 1167–1181.
- [16] F.Z. Geng, M.G. Cui, *Solving singular nonlinear two-point boundary value problems in the reproducing kernel space*, J. Korean Math. Soc., 45 (2008), pp. 631–644.



- [17] C.D. Aliprantis, *Principles of real analysis*, Gulf Professional Publishing, 1998.
- [18] H. Wendland, *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [19] G.E. Fasshauer, *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishers, Singapore, 2007.
- [20] M. Pazouki, R. Schaback, *Bases for kernel-based spaces*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 236 (2011), pp. 575-588.
- [21] P.R. Agarwal, *Boundary value problems for higher order differential equations*, World Scientific, Singapore, 1986.
- [22] R. Schaback, *All well-posed problems have uniformly stable and convergent discretizations*, arXiv preprint, arXiv:1403.3600 (2014).
- [23] S. Abbasbandy, E. Shivanian, *Prediction of multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems: Novel application of homotopy analysis method*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 15 (2010), pp. 3830-3846.
- [24] S. Abbasbandy, E. Magyari, E. Shivanian, *The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 14 (2009), pp. 3530-3536.
- [25] S.J. Liao, *A new branch of solutions of boundary-layer flows over a permeable stretching plate*, Int. J. Nonlinear Mech., 42 (2007), pp. 819-830.
- [26] H. Xu, S.J. Liao, *Dual solutions of boundary layer flow over an upstream moving plate*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 13 (2008), pp. 350-358.
- [27] R. Schaback, *Convergence of unsymmetric kernel-based meshless collocation methods*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 45 (2007), pp. 333-351.



- [28] M, Mohammadi, R. Mokhtari and H Panahipour, *A Galerkin-reproducing kernel method: Application to the 2D nonlinear coupled Burgers' equations*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37 (2013), pp. 1642-1652.
- [29] I. Cialenco, G.E. Fasshauer and Q. Ye, *Approximation of stochastic partial differential equations by a kernel-based collocation method*, International Journal of Computer Mathematics, 89 (2012), pp. 2543-2561.
- [30] R. Ketabchi, R. Mokhtari and E. Babolian, *Some error estimates for solving Volterra integral equations by using the reproducing kernel method*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 273 (2015), pp. 245-250.
- [31] H. Du and M.G. Cui, *Approximate solution of the Fredholm integral equation of the first kind in a reproducing kernel Hilbert space*, Applied Mathematics Letters, 21 (2008), pp. 617-623.
- [32] G.E. Fasshauer, F.J. Hickernell and Qi Ye, *Solving support vector machines in reproducing kernel Banach spaces with positive definite functions*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 38 (2015), pp. 115-139
- [33] F. Z. Geng, S. P. Qian, and S. Li, *A numerical method for singularly perturbed turning point problems with an interior layer*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 255 (2014), pp. 97-105.
- [34] A.M. Wazwaz, *Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations*, Appl. Math. Comput., 166 (2005), pp. 652-663.
- [35] A. Mohsen, L.F. Sedeek, S.A. Mohamed, *New smoother to enhance multigrid-based methods for Bratu problem*, Appl. Math. Comput., 204 (2008), pp. 325-339.



- [36] S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, C.S. Liu, *The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 16 (2011), pp. 4238-4249.
- [37] S. Abbasbandy, *Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method*, Chem. Eng. J., 136 (2008), pp. 144-150.
- [38] E. Magyari, *Exact analytical solution of a nonlinear reaction-diffusion model in porous catalysts*, Chem. Eng. J., 143 (2008), pp. 167-171.
- [39] Q. Yao, *Successive iteration and positive solution for nonlinear second-order three-point boundary value problems*, Comput. Math. Appl., 50 (2005), pp. 433-444.
- [40] M. Cherpion, C. D. Coster, P. Habets, *A constructive monotone iterative method for second-order BVP in the presence of lower and upper solutions*, Appl. Math. Comp., 123 (2001), pp. 75-91.
- [41] C. De Coster and P. Habets, *Two-Point Boundary Value Problems: Lower and Upper Solutions*, vol. 205 of Mathematics in Science and Engineering, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [42] Y. Tian, W. Geb, *Multiple solutions of Sturm-Liouville boundary value problem via lower and upper solutions and variational methods*, Nonlinear Analysis, 74 (2011), pp. 6733-6746.
- [43] M. Armando, A. M. Salvatore, *Boundary value problems for higher order ordinary differential equations*, Comment. Math. Univ. Carolin., 3 (1994), pp. 451- 466.
- [44] P. Bailey, L. Shampine and p. Waltman, *Nonlinear Two Point Boundary Value Problems*, Academic Press, New York, 1968.



- [45] L.D. Humphreys, *Numerical mountain pass solutions of a suspension bridge equation*, Nonlinear Anal., 28 (1997), pp. 1811-1826
- [46] M.R. Grossinho, S. Tersian, *The dual variational principle and equilibria for a beam resting on a discontinuous nonlinear elastic foundation*, Nonlinear Anal., 41 (2000), pp. 417-431.
- [47] P. Amster and P. P. C´ardenas Alzate, *A shooting method for a nonlinear beam equation*, Nonlinear Anal., 68 (2008), pp. 2072-2078.
- [48] J. Fialho, F. Minhós, *Existence and location results for hinged beams with unbounded nonlinearities*, Nonlinear Anal., 71 (2009), pp. e1519–e1525.
- [49] G. Han and Z. Xu, *Multiple solutions of some nonlinear fourth-order beam equations*, Nonlinear Anal., 68 (2008), pp. 3646-3656.
- [50] T.F. Ma, J. da Silva, *Iterative solutions for a beam equation with nonlinear boundary conditions of third order*, Applied Mathematics and Computation, 159 (2004), pp. 11-18.
- [51] E. Alves, T.F. Ma, M.L. Pelicer, *Monotone positive solutions for a fourth order equation with nonlinear boundary conditions*, Nonlinear Anal., 71 (2009), pp. 3834–3841.
- [52] S. Li, X. Zhanga, *Existence and uniqueness of monotone positive solutions for an elastic beam equation with nonlinear boundary conditions*, Computers and Mathematics with Applications, 63 (2012), pp. 1355–1360.
- [53] F.Z. Geng , *Iterative reproducing kernel method for a beam equation with third-order nonlinear boundary conditions*, Mathematical Sciences, 6 (2012), pp. 1-4.
- [54] C.L. Li, M.G. Cui, *The exact solution for solving a class of nonlinear operator equation in the reproducing kernel space*, Applied Mathematics and Computation, 143 (2003), pp. 393-399.



- [55] F.Z. Geng, *A new reproducing kernel Hilbert space method for solving nonlinear fourth-order boundary value problems*, Applied Mathematics and Computation, 213 (2009), pp. 163-169.
- [56] R.P. Agarwal, *On fourth-order boundary value problems arising in beam analysis*, Differential Integral Equations, 2 (1989), pp. 91-110.
- [57] S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Dover, New York, 1967.
- [58] U. M. Schaudt, *On static stars in Newtonian gravity and Lane-Emden type equations*, Ann. Henri Poincare, 1 (2000), pp. 945-976.
- [59] P. L. Chambre, *On the solution of the Poisson-Boltzmann equation with application to the theory of thermal explosions*, The Journal of Chemical Physics, 20 (1952), pp. 1795-1797.
- [60] O. U. Richardson, *The Emission of Electricity from Hot Bodies*, Longman, Green and Co., London, New York, 1921.
- [61] A. Yildirim, T. Özis, *Solutions of singular IVPs of Lane-Emden type by homotopy perturbation method*, Physics Letters A, 369 (2007), pp. 70-76.
- [62] A. Rafiq, S. Hussain, M. Ahmed, *General homotopy method for Lane-Emden type differential equations*, Int. J. of Appl. Math. and Mech., 5 (2009), pp. 75-83.
- [63] S. A. Yousefi, *Legendre wavelets method for solving differential equations of Lane-Emden type*, Applied Mathematics and Computation, 181 (2006), pp. 1417-1422.
- [64] R.A. Van Gorder, *An elegant perturbation solution for the Lane-Emden equation of the second kind*, New Astronomy, 16 (2011), pp. 65-67.
- [65] A. M. Wazwaz, *Adomian decomposition method for a reliable treatment of the emdenfowler equation*, Applied Mathematics and Computation, 161 (2005), pp. 543-560.



- [66] Ş Yüzbaşı, M. Sezer, *An improved Bessel collocation method with a residual error function to solve a class of Lane-Emden differential equations*, Mathematical and Computer Modelling, 57 (2013), pp. 1298-1311.
- [67] S.K. Vanani, A. Aminataei, *On the numerical solution of differential equations of Lane-Emden type*, Comput. Math. Appl., 59 (2010), pp. 2815-2820.
- [68] K. Parand, A. Shahini, M. Dehghan, *Rational Legendre pseudospectral approach for solving nonlinear differential equations of Lane-Emden type*, Journal of Computational Physics, 228 (2009) 8830–8840.
- [69] Ji-Huan He, *Variational approach to the Lane-Emden equation*, Applied Mathematics and Computation, 143 (2003), pp. 539–541.
- [70] N.T. Shawagfeh, *Nonperturbative approximate solution for Lane-Emden equation*, Journal of Mathematical Physics, 34 (1993), pp. 43–64.
- [71] K. Parand, M. Dehghan, A.R. Rezaei, S.M. Ghaderi, *An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method*, Computer Physics Communications, 181 (2010), pp. 1096-1108.
- [72] R. Emden, *Gaskugeln*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1907.
- [73] H.T. Davis, *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover, New York, 1962.
- [74] X. Zhang, K. Z. Song, and X. Liu, *Meshless methods based on collocation with radial basis functions*, Comput. Mech., 26 (2000), pp. 333-343.



- [75] H. Power, V. Barraco, and U. D. S. Palermo, *A comparison analysis between unsymmetric and symmetric radial basis function collocation method for the numerical solution of partial differential equations*, Comput. Math. Applic., 43 (2002), pp. 551-583.
- [76] J. Li, A. H. D. Cheng, and C. S. Chen, *A comparison of efficiency and error convergence of multiquadric collocation method and finite element method*, Eng. Anal. Bound. Elem., 27 (2003), pp. 251-257.
- [77] Y. C. Hon and R. Schaback, *On unsymmetric collocation by radial basis functions*, Appl. Math. Comput., 119 (2001), pp. 177-186.
- [78] S. Abbasbandy, H. Roohani Ghehsareh, I. Hashim, *A meshfree method for the solution of two-dimensional cubic nonlinear Schrodinger equation*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37 (2013), pp. 885-898.
- [79] A. Iske, *Scattered data approximation by positive definite kernel functions*, Rendiconti del Seminario Matematico, 69 (2011), pp. 217-246.
- [80] X. Lv , M. G. Cui, *An efficient computational method for linear fifth-order two-point boundary value problems*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234 (2010), pp. 1551-1558.
- [81] S. S. Siddiqi, G. Akram, S.A. Malik, *Nonpolynomial sextic spline method for the solution along with convergence of linear special case fifth-order two-point boundary value problems*, Appl. Math. Comput., 190 (2007), pp. 532-541.
- [82] H. N. Caglar, S. H. Caglar, E. H. Twizell, *The numerical solution of fifth-order boundary-value problems with sixth-degree B-spline functions*, Appl. Math. Lett., 12 (1999), pp. 25-30.



- [83] S. S. Siddiqi, G. Akram, *Sextic spline solutions of fifth order boundary value problems*, Appl. Math. Lett., 20 (2007), pp. 591-597.
- [84] K. Rahman, N. Helil, R. Yimin, *Some new semi-implicit finite difference schemes for numerical solution of Burgers equation*, International Conference on Computer Application and System Modeling, 14 (2010), pp. V14-451–V14-455.
- [85] R. C. Mittal, R. K. Jain, *Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method*, Appl. Math. Comput., 218 (2012), pp. 7839-7855.
- [86] R. Jiware, R. C. Mittal, K. K. Sharma, *A numerical scheme based on weighted average differential quadrature method for the numerical solution of Burgers' equation*, Applied Mathematics and Computation, 219 (2013), pp. 6680-6691.
- [87] Y. Gao, L. H. Le, B. C. Shi, *Numerical solution of Burgers' equation by lattice Boltzmann method*, Applied Mathematics and Computation, 219 (2013), pp. 7685-7692.
- [88] Y. L. Duan, R. X. Liu, Y. Q. Jiang, *Lattice Boltzmann model for the modified Burgers' equation*, Appl. Math. Comput., 202 (2008), pp. 489-497.
- [89] C. G. Zhu, R. H. Wang, *Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation*, Applied Mathematics and Computation, 208 (2009), pp. 260-272.
- [90] M. A. Ramadan, T. S. El-Danaf, F. Alaal, *A numerical solution of the Burgers' equation using septic B-splines*, Chaos Solitons Fract., 26 (2005), pp. 795-804.
- [91] G. Yao, Siraj-ul-Islam, B. sarler, *Assessment of global and local meshless methods based on collocation with radial basis functions for parabolic partial differential equations in three dimensions*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 36 (2012), pp. 1640-1648.

- [92] S. Müller, R. Schaback, *A Newton basis for kernel spaces*, Journal of Approximation Theory, 161 (2009), pp. 645-655.
- [93] M. Pazouki, R. Schaback, *Bases for conditionally positive definite kernels*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 243 (2013), pp. 152-163.
- [94] R. Schaback, S. De Marchi, *Nonstandard kernels and their applications*, Dolomites Research Notes on Approximation, 2 (2009), pp. 16-43.
- [95] K. Böhmer, R. Schaback, *A nonlinear discretization theory.*” Journal of Computational and Applied Mathematics, 254 (2013), pp. 204-219.

Surname: Azarnavid

Name: Babak

Title: Numerical methods based on reproducing kernels and their applications to differential equations

Supervisor: Prof. S. Abbasbandy

Advisor: Dr. D. Rostamy

Degree: Doctor of Science

Subject: Applied Mathematics

Field: Numerical Analysis

Imam Khomeini International University
Mathematics

Faculty of Science, Department of

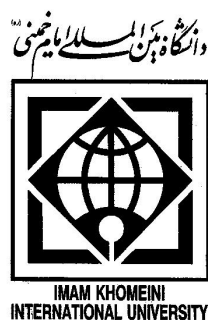
Date: 2015

Number of pages: [126](#)

Keywords: Reproducing kernel Hilbert space; Error estimate; Convergence; Multiple solutions; Nonlinear problems; Singular Problems; Problems with nonlinear boundary conditions; Meshless collocation method; Orthogonal projection; Shooting method; Picard iteration; Differentiation matrix; cardinal functions

Abstract

Our aim is to study some numerical methods based on reproducing kernel Hilbert space for solving differential equations. Especially we consider the methods that the reproducing property of kernels with respect to their native spaces, plays the main role in them. In this thesis we consider the applications of reproducing kernel Hilbert spaces for solving linear, nonlinear and singular differential equations and also the problems with multiplicity of solutions. furthermore we study the error estimates of the applications of these methods. Reproducing kernel Hilbert space method combined with shooting method and Picard iteration is used for solving nonlinear and singular boundary value problems. A meshless collocation method based on the reproducing kernels Hilbert spaces is proposed for solving time dependent and high dimensional problems. Also convergence and error estimates of the proposed methods for linear and nonlinear problems and the error of application of orthogonal projection are established.



Imam Khomeini International University
Faculty of Science, Department of Mathematics

Doctoral Thesis Submitted in Partial
Fulfillment of The Requirements For The
Degree of Doctor of Science in
Applied Mathematics

Numerical methods based on reproducing kernels and their applications to differential equations

Supervisor

Prof. S. Abbasbandy

Advisor

Dr. D. Rostamy

by

Babak Azarnavid

2015