

السلامة والصلوة



معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

بیاری از خداوند سبحان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و بهواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه ابیست جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، مادیان و انشویان و اعضاء هیات علمی و احادی دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

- ۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هر گونه پنهان سازی حقیقت،
- ۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهشگران (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق،
- ۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بهکاران پژوهش،
- ۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصلح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش،
- ۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هر گونه جانبداری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار،
- ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق،
- ۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانبداری و خودداری از هر گونه حرمت شکنی،
- ۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بهکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد،
- ۹- اصل برانیت: التزام به برانیت جویی از هر گونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به مثابه های غیر علمی می آلائند.



دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

تعهد اصالت رساله

اینجانب عاطفه آرمند دانش آموخته دکترای تخصصی در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۹۳/۱۰/۲۷ از رساله خود تحت عنوان "روش های عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیر قطعی" با کسب نمره ۲۰ و درجه عالی دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

۱) این رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهش دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و ...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

۲) این رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پائین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳) چنانچه بعد از فراغت تحصیل، قصد استفاده و هر گونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی : عاطفه آرمند

تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

عنوان

روش های عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیر قطعی

استادان راهنما

دکتر توفیق الهویرنلو
دکتر سعید عباس بندی

استاد مشاور

دکتر اسمعیل بابلیان

نگارش

عاطفه آرمند

زمستان ۱۳۹۳

قدردانی

خداوند مهربان را شکر کنم که مرا نیرو بخشید تا نگارش رساله پیش رو را به اتمام برسانم. حال بر خود لازم می دانم کمال تقدیر و شکر خود را نشان دهم که در این مسیر خطه ای از راهبانی، پشتیبانی و تشویق من دریغ نکردند. از استاد گرانقدرم، آقای دکتر توفیق الهویرنلو، که تمام روزهایی که تحت نظارت ایشان مشغول به کار بودم سرشار از آموختن، تاملان علم و اخلاق بود، کمال شکر را دارم. از آقای دکتر سعید عباس بندی، استاد بزرگوارم، که الگویی بی نظیر از یک پژوهشگر و یک استاد فداکار را در ذهن من حک نمودند، نهایت قدردانی را دارم. از استاد ارجمند، آقای دکتر اسمعیل بابلان، صمیمانه به خاطر همه محبت ها، دغدغه ها و روشنگری های شان، سپاسگزارم. از اساتید فرهیخته، آقایان دکتر فرزاد حسین زاده لطفی، دکتر مجید امیر فخریان و خانم دکتر نازنین احمدی که داوران این رساله را بر عهده داشتند و بار، بنمون های شان، مراد ارائه کاری بهتری نمودند، کمال شکر را دارم.

از خانواده عزیزم که از کودکی، شور و اشتیاق و لذت کشف و جستجو را در من بیدار کردند، استقامت در تلاش را به من آموختند و در تمام این سال ها با فراهم کردن آرایش فکری و آسایش روحی، بسیاری دشواری ها را بر من آسان نمودند، با تمام وجود قدردانم.

تقديم به

پدر و مادر عزیزم

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	چکیده

فصل اول: کلیات تحقیق

۲	۱-۱ مقدمه
۴	۱-۲ مروری بر تاریخچه حساب دیفرانسیل و انتگرال فازی
۶	۳-۱ مروری بر تاریخچه حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری فازی
۷	۴-۱ بیان مساله و ضرورت تحقیق

فصل دوم: حساب دیفرانسیل و انتگرال فازی و معرفی توابع خاص

۱۰	۱-۲ مقدمه
۱۰	۲-۲ مجموعه فازی و خواص آن
۱۲	۳-۲ عدد فازی
۱۶	۴-۲ اعمال حسابی در مجموعه اعداد فازی
۱۹	۵-۲ فاصله هاسدورف
۲۰	۶-۲ تابع فازی
۲۰	۷-۲ حد و پیوستگی تابع فازی
۲۱	۸-۲ مشتق تابع فازی
۲۸	۹-۲ انتگرال تابع فازی
۳۱	۱۰-۲ مفاهیم و تعاریف مقدماتی از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

فصل سوم: مشتق کسری تعمیم یافته فازی از نوع کاپچو

۳۸	۱-۳ مقدمه
۳۸	۲-۳ انتگرال ریمن-لیوویل فازی
۳۹	۳-۳ مشتق تعمیم یافته هاکوهارا کسری کاپچو

۴-۳	ویژگی های انتگرال ریمان-لیوویل فازی و مشتق کسری تعمیم یافته هاوارا کاپچو	۴۴
۵-۳	قضیه مقدار میانی فازی برای انتگرال ریمان-لیوویل	۴۹
۶-۳	بسط تیلور برای مشتق تعمیم یافته کاپچو	۵۴
۷-۳	بسط تیلور تعمیم یافته ی فازی	۵۹

فصل چهارم: روش های عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیر قطعی

۱-۴	مقدمه	۶۵
۲-۴	معادلات دیفرانسیل کسری کاپچو فازی	۶۶
۳-۴	معادله دیفرانسیل خطی کسری فازی	۷۱
۴-۴	معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه ای فازی	۷۹
۵-۴	روش اویلر کسری فازی	۸۸

فصل پنجم: نتایج و پیشنهادات

۱-۵	نتایج حاصل از تحقیق	۹۸
۲-۵	پیشنهادات	۱۰۰

۱۰۲	فهرست مقالات مستخرج از پایان نامه	۱۰۲
۱۰۳	فهرست منابع	۱۰۳
۱۰۶	نمادها و علائم	۱۰۶
۱۰۸	چکیده انگلیسی	۱۰۸

فهرست جداول

عنوان

صفحه

۱-۴. نتایج عددی مثال ۱-۱-۵-۴	۹۱
۲-۴. نتایج عددی مثال ۲-۱-۵-۴	۹۴
۳-۴. نتایج عددی مثال ۳-۱-۵-۴	۹۶

فهرست شکل‌ها

عنوان

صفحه

۱-۲. نمایش ۳-برش تابع فازی مقدار مثال ۷-۶-۸-۲	۲۸
۲-۲. نمایش ۳-برش مشتق تعمیم یافته ها کوهارای تابع فازی مقدار مثال ۷-۶-۸-۲	۲۹
۳-۲. نمایش تابع $\Gamma(x)$ در دامنه اعداد حقیقی	۳۲
۴-۲. نمایش تابع $1/\Gamma(x)$ در دامنه اعداد حقیقی	۳۲
۵-۲. تابع میتگ-فلر	۳۵
۶-۲. نمایش توابع فوق هندسی گاوسی ${}_2F_1$ و کومر ${}_1F_1$	۳۶
۱-۳. نمایش مشتق کسری تعمیم یافته ها کوارا کاپچو از نوع (i)	۴۲
۲-۳. نمایش مشتق کسری تعمیم یافته ها کوارا کاپچو از نوع (ii)	۴۳
۳-۳. نمایش تعویض نوع کاپچو دیفرانسیل پذیری از نوع (ii) به (i)	۴۳
۱-۴. نمایش جواب معادله (۴-۲۲)	۷۴
۲-۴. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو ها کوهارای جواب معادله (۴-۲۲)	۷۵
۳-۴. نمایش جواب ${}^c[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۲۳)	۷۶
۴-۴. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو ها کوهارای جواب ${}^c[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۲۳)	۷۷
۵-۴. نمایش جواب ${}^c[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۲۳)	۷۸
۶-۴. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو ها کوهارای جواب ${}^c[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۲۳)	۷۸
۷-۴. نمایش جواب معادله (۴-۴۲)	۸۵
۸-۴. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو ها کوهارای جواب ${}^c[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۴۲)	۸۶
۹-۴. نمایش جواب معادله (۴-۴۴)	۸۸
۱۰-۴. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو ها کوهارای جواب ${}^c[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۴۴)	۸۸
۱۱-۴. نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۶) به ازای $\alpha=0.5$ و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن	۹۲
۱۲-۴. نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۶) به ازای $\alpha=0.75$ و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن	۹۲
۱۳-۴. نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۶) به ازای $\alpha=1$ و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن	۹۳
۱۴-۴. نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۸) به ازای $\alpha=0.5$ و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن	۹۴
۱۵-۴. نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۸) به ازای $\alpha=0.75$ و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن	۹۵

۴-۱۶. نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۸) به ازای $\alpha=1$ و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن ۹۵

۴-۱۷. نمایش جواب دقیق معادله (۴-۶۰) به ازای $\alpha=0.5$ و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن ۹۷

چکیده

در این رساله، معادلات دیفرانسیل کسری فازی بررسی می‌گردد. برای این منظور مشتق کسری کاپچو بر اساس دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته هاکوهارا تعریف و قواعد و ویژگی‌های آن با جزئیات ثابت می‌شود. سپس معادله دیفرانسیل کسری فازی تحت مفهوم دیفرانسیل پذیری ارائه شده در نظر گرفته می‌شود، و شرایط وجود و یکتایی جواب آن بدست می‌آید. همچنین یک روش تحلیلی برای بدست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل کسری خطی و چند مرتبه‌ای فازی معرفی می‌شود. علاوه بر آن، جواب‌های عددی این دسته از معادلات به روش اویلر کسری فازی بدست می‌آید. از آن جایی که، این روش بر اساس بسط تیلور تعمیم یافته فازی بیان می‌گردد، از این رو بسط تیلور تعمیم یافته با استفاده از دیفرانسیل پذیری کاپچو فازی نیز معرفی می‌شود. در پایان، برای توضیح بیشتر، چند مثال از معادله دیفرانسیل کسری فازی حل می‌شود و جواب‌های تحلیلی و عددی آنها بدست می‌آید.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل کسری فازی، مشتق کاپچو تعمیم یافته هاکوهارا، قضیه مقدار متوسط فازی، قضیه مقدار میانی انتگرال فازی، قضیه مقدار میانی انتگرال ریمان-لیوویل فازی، بسط تیلور تعمیم یافته فازی، روش اویلر کسری فازی.

فصل اول

کلیات تحقیق

۱-۱ مقدمه

موضوع حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری در چند دهه اخیر به خاطر کاربردهای گسترده آن در علوم مختلف نه تنها بسیار مورد توجه ریاضی دانان بلکه مهندسين نیز قرار گرفته است. مفاهیم کسری در واقع ابزار مفیدی برای حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل و مسائل خاص در ریاضی فیزیکی می باشد.

مفهوم حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری با طرح یک سوال در سال ۱۶۹۵ میلادی توسط هوپیتال آغاز شد. وی از لایب نیتز پرسید که "اگر در نماد $\frac{d^n}{dt^n}$ که $n \in \mathbb{N}_0$ و $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ وقتی $n = \frac{1}{2}$ باشد، چه اتفاقی می افتد" لایب نیتز در جواب چنین گفت: "این مساله ظاهراً تناقض است، اما یک روز، عواقب مفیدی خواهد داشت." مباحث ابتدایی این شاخه از ریاضیات توسط لایب نیتز و اوایلر شکل گرفت و از آن روز تاکنون توسط بسیاری از ریاضی دانان از جمله لاپلاس، فوریه، لاگرانژ، آبل، لیوویل، ریمان، گرانوالد، آدامار، دیویس و دیگران گسترش یافت، اینان از کسانی بودند که مفاهیم و تعاریف بنیادی را در این زمینه بیان کردند.

در ابتدا مشتقات کسری به صورت یک انتگرال تعریف شد و سپس با تعمیم فرمول مشتق معمولی، مشتقات کسری با مرتبه دلخواه به صورت زیر بیان گردید

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

آبل اولین کسی است که عملگرهای کسری را مستقیماً برای حل یک معادله انتگرال مورد استفاده قرار داده است. معادله انتگرالی که آبل برای آن از عملگر کسری استفاده کرد، هنگام حل یک مسأله همزمان رخ داده بود که حاصل از یافتن شکلی از یک منحنی است به طوری که زمان پایین آمدن یک جرم نقطه ای بدون اصطکاک و تحت تأثیر یک میدان گرانشی روی این شکل مستقل از نقطه آغازین باشد، که امروز به مسأله همزمان آبل معروف است و به صورت زیر مدل بندی می شود:

$$k(x) = \int_0^x (x-t)^\alpha f(t) dt$$

معادله فوق با $\alpha = -\frac{1}{2}$ به معادله انتگرال آبل معروف است. معادله انتگرال فوق صرف نظر از ضریب $\frac{1}{\Gamma(1/2)}$ ، انتگرال کسری معروف ریمان-لیوویل از مرتبه $1/2$ است. که آبل با اثر دادن عملگر کسری $D^{\frac{1}{2}}$ بر دو طرف معادله، آن را حل کرد. همچنین فوریه یک نمایش انتگرالی برای تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف نموده است

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) d\omega$$

این فرمول انتگرال فوریه و جواب آبل توجه لیوویل را به خود جلب کرد، از این رو وی با استفاده از این مفاهیم نظریه حساب کسری را به صورت گسترده ای توسعه داد. امروزه اصطلاح حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری مربوط به انتگرال و مشتگیری از مرتبه دلخواه است به طوری که مرتبه مشتق می تواند گویا، گنگ و حتی مختلط باشد. علاوه بر این، روش های متعددی برای بدست آوردن انتگرال و مشتق از مرتبه

دلخواه وجود دارد مانند انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل^۱، انتگرال و مشتق کسری هادامارد^۲، انتگرال و مشتق کسری گرونوالد-لتنیکوف^۳، انتگرال و مشتق اردلی-کوبر^۴ و مشتق کسری کاپچو^۵ که بسته به نوع فیزیک و نیاز مساله نوع مشتق و انتگرال انتخاب می‌گردد.

همانطور که قبلاً اشاره شد اهمیت حسابان کسری از جنبه کاربرد آن می‌باشد. برخی از حوزه‌های کاربردی امروزه آن شامل مکانیک سیالات، رئولوژی، فرایندهای دینامیکی در سازه‌های خود متشابه و حمل و نقل، شبکه‌های برق، آمار و احتمال، نظریه کنترل سیستم‌های دینامیکی، ویسکوالاستیک، الکتروشیمی، شیمی فیزیک، پلیمر، اپتیک و پردازش سیگنال، و غیره می‌باشد.

۱-۲ مروری بر تاریخچه حساب دیفرانسیل و انتگرال فازی

در پدیده‌های طبیعی همه چیز تا درجه ای مبهم است، منطق سنتی بنا به عادت فرض را بر این می‌گذارد که نمادهای به کار گرفته شده دقیق است. به همین دلیل، در مورد زندگی خاکی کاربرد ندارد، بلکه فقط برای یک زندگی آسمانی خیالی معتبر است. قانون میانه (A یا غیر A) وقتی درست است که نماد های دقیقی به کار گرفته شوند، اما هنگامی که نماد ها فازی هستند درست نیست، البته در واقع تمامی علامت ها همین گونه مبهم هستند. پس از این رو اگر بخواهیم پدیده‌های طبیعی را مدل بندی کنیم باید از محاسباتی استفاده کنیم که بتواند ابهام های موجود را در نظر بگیرد، اینجاست که ارزش و اهمیت حساب دیفرانسیل و انتگرال فازی شناخته می‌شود.

پروفسور لطفی‌زاده مجموعه‌های فازی را در سال ۱۹۶۵ پیشنهاد کرد [۴۹]، پیشنهادی که منجر به تعریف اعداد فازی گردید. ساختار ریاضی عمومی برای اعداد توسط میزوموتو و تاناکا^۶ در [۳۶] مطرح شد که دوبویس و پاراد^۷ [۲۴] آن را توسعه دادند که در آنها اعداد فازی مجموعه‌ای از برش ها در نظر گرفته شده بود. برای تعریف انتگرال و مشتق در محاسبات فازی ابتدا نیاز به تعریف تابع فازی داشتیم که نگاشت فازی توسط زاده و چانگ^۸ [۲۲] معرفی شد. که بعد از آن دوبویس و پاراد مفهوم مشتق و انتگرال از تابع فازی را

-
1. Riemann-Liouville
 2. Hadamard
 3. Grunwald-Letnikov
 4. Erdely-Kober
 5. Caputo
 6. Mizumoto and Tanaka
 7. Dubois and Prade
 8. Chang

بر اساس اصل گسترش بیان کردند [۲۵]. بعد از آن مفهوم انتگرال یک تابع فازی در [۲۹] بیان شد اما کالوا^۱ [۳۰] نگرشی دیگری را انتخاب کرد و مفهوم انتگرال لبگ را تعریف کرد. به دنبال آن، معادلات انتگرال فازی در [۳۸] و معادلات دیفرانسیل فازی در [۴۲] مطرح شدند و با توجه به کاربرد این دسته از معادلات انواع مختلف آن بیان و سرعت گسترش یافت. مشتق هاگوهارا در [۴۲] تعریف شد و بیش از بیست سال از این نوع دیفرانسیل پذیری در معادلات فازی استفاده و وجود و یکتایی جواب معادلات بررسی گردید و جواب های عددی و تحلیلی برای آن بدست آمد. اما این نگرش یک سری کاستی هایی دارد، که اصلی ترین نقطه ضعف آن این است که مشتق هاگوهارای تابع فازی مقدار همواره موجود نیست و همچنین هیچ تضمینی برای وجود یک جواب فازی برای معادله دیفرانسیلی که با استفاده از این نوع مشتق پذیری بیان می شود، وجود ندارد. برای از بین بردن این ضعف، دیفرانسیل پذیری قوی تعریف شد. در این نوع دیفرانسیل پذیری با توجه به اینکه در تعریف مشتق، در چه حالتی تفاضل هاگوهارا موجود است، چهار حالت دیفرانسیل پذیری به وجود آمده است. این تعریف از دیفرانسیل پذیری، ضعف عدم وجود مشتق تابع فازی مقدار را از بین برد اما این تعریف هم خالی از اشکال نبود چون اگر معادله دیفرانسیل را تحت مشتق پذیری قوی تعریف کنیم ممکن است جواب معادله دیفرانسیل یکتا نباشد. این ایراد مشتق پذیری قوی می تواند یک مزیت هم باشد، چون ما می توانیم نقاط منفرد جواب که در آن نقاط یکنوایی جواب تغییر می کند را مشخص کنیم. بنابراین جواب هایی معادله دیفرانسیل فازی که پایدار، تقریباً همه جا متناوب و دارای رفتار مجانبی هستند را می توان بدست آورد. سپس بر این نوع از دیفرانسیل پذیری هم اصلاحاتی انجام شد و دیفرانسیل پذیری ضعیف معرفی گردید اما به خاطر نوع نمایش آن خیلی به صورت کاربردی استفاده نشد. چندی بعد یک نوع تفاضل بین مجموعه های فشرده محدب در [۴۳] به نام تفاضل تعمیم یافته هاگوهارا بیان شد که مشکل عدم وجود تفاضل بین دو تابع تا حدودی برطرف شد. با استفاده از این تعریف تفاضل و دیفرانسیل پذیری قوی یک نوع دیگر از مشتق توابع فازی مقدار به نام مشتق تعمیم یافته هاگوهارا در [۱۹] ارائه شد که نتایج یکسان با مشتق پذیری ضعیف دارد. دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته هاگوهارا تاکنون در بسیاری از مقالات معادلات دیفرانسیل مورد وثوق ریاضی دانان فازی بوده است. با استفاده از مشتق تعمیم یافته هاگوهارا، معادله دیفرانسیل مرتبه اول [۲۰]، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی [۱۱]، معادله دیفرانسیل مقدار مرزی [۳۲]، جواب های عددی معادله دیفرانسیل [۳۷]، معادله انتگرال-دیفرانسیل [۲۸] و بسیاری دیگر از معادلات دیفرانسیل مورد بحث و بررسی قرار گرفته است، شرایط وجود و یکتایی جواب های تعیین شده و با توجه به نوع دیفرانسیل پذیری، جواب های هر کدام از این دسته معادلات بدست آمده است.

۱-۳ مروری بر تاریخچه حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری فازی

نقطه شروع معادلات دیفرانسیل و انتگرال کسری فازی مقاله [۳] است، نویسندگان معادله دیفرانسیل کسری را با مقادیر اولیه فازی معرفی کردند و جواب آن را مانند معادلات دیفرانسیل کسری قطعی بدست آوردند. اما این دسته از معادلات با معرفی انتگرال و مشتق ریمان-لیوویل کسری فازی در [۱۶] رونق ویژه‌ای یافت. آنان مشتق کسری در نظر گرفته را بر اساس مشتق هاکوها را تعریف کردند و معادله دیفرانسیل کسری را بر اساس این نوع دیفرانسیل پذیری معرفی و حل نمودند. همچنین الهویرنلو و همکارانش در [۱۲] جواب‌های صریح این معادله دیفرانسیل را بدست آوردند.

همانطور که قبلاً توضیح داده شد، مشتق هاکوها را همواره موجود نیست پس مشتق کسری ریمان-لیوویل اگر براساس این نوع دیفرانسیل پذیری تعریف شود، نمی‌توان ادعا کرد که مشتق کسری ریمان-لیوویل توابع فازی مقدار همواره موجود است. به همین سبب، در [۴۱] مشتق کسری ریمان-لیوویل با استفاده از دیفرانسیل پذیری قوی تعریف گردید و جواب‌های آن با استفاده از روش لاپلاس بدست آورده شد و شرایط وجود و یکتایی جواب آن در [۱۰] با استفاده از شرایط ناگامو^۱ و کراسنوسلسکی-کراین^۲ بررسی گردید. در همین راستا، ببینید مقاله [۱۷] را که معادله کسری از نوع دیفرانسیل پذیری ریمان-لیوویل را تبدیل به یک معادله انتگرال فازی می‌کند و وجود و یکتایی جواب را برای آن ثابت می‌نماید. معادله انتگرال کسری ریمان-لیوویل و معادله انتگرال-دیفرانسیل نظیر آن در [۶] معرفی و شرایط وجود و یکتایی جواب آنها بررسی و روش تکرار تغییرات^۳ در [۳۳] برای حل این معادله بکار گرفته شده است.

نوع دیگر مشتقات کسری که تاکنون در معادلات دیفرانسیل فازی بررسی شده است مشتق کسری از نوع کاپچو است. معادلات دیفرانسیل کسری کاپچو فازی با استفاده از دیفرانسیل پذیری هاکوها را با روش لاپلاس در [۴۶] و با روش عملیاتی تاو در [۵] حل گردیده است. با در نظر گرفتن دیفرانسیل پذیری قوی توابع فازی مقدار، نوع دیفرانسیل پذیری کاپچو در مقاله [۳۴] معرفی گردیده است و معادله دیفرانسیل نظیر آن با روش عددی اوایلر تصحیح یافته تقریب زده شده است. آنان معادله دیفرانسیل کسری کاپچو فازی را تبدیل به یک دستگاه معادله دیفرانسیل کاپچو قطعی کرده‌اند و روش را برای حل آن دستگاه به کار برده‌اند. مرجع [۴] اختصاص دارد به بدست آوردن جواب معادله دیفرانسیل کسری کاپچو با استفاده از اصل گسترش زاده، آنان روش معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح را برای این دسته از معادلات تعمیم داده‌اند.

1. Nagumo

2. Krasnoselskii-Krein

3. Variational iteration method

همچنین ببینید [۳۵] برای نگرشی متفاوت به مشتقات کسری، مازندرانی و همکارش مشتق کسری کاپچو را با استفاده از تعریف مجموعه های فازی نوع ۲ ارائه نمودند، آنان معادله دیفرانسیل نظیر آن را معرفی کردند وجود و یکتایی جواب را ثابت کردند و جواب های آن را تقریب زدند.

۴-۱ بیان مساله و ضرورت تحقیق

جنبه نوآوری این پایان نامه، معرفی یک نوع جدید از مشتق کسری در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری به نام مشتق کسری کاپچو تعمیم یافته می باشد که این مفهوم در [۷] ارائه گردید. در تعریف این مفهوم از مشتق تعمیم یافته ها کوها را استفاده می کنیم و انواع دیفرانسیل پذیری کسری کاپچو را بیان می نماییم. خصوصیات این نوع دیفرانسیل پذیری و رابطه ای که با انتگرال ریمان-لیوویل کسری دارد را در [۹] بررسی می کنیم. همچنین، با استفاده از این مفاهیم معادله دیفرانسیل کسری کاپچو را تعریف می کنیم و وجود و یکتایی جواب آن را با استفاده از شرایط کراسنوسلسکی-کراین ارائه می نماییم. سپس روشی را برای یافتن جواب تحلیلی معادله دیفرانسیل کسری خطی در حالت های مختلف دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته کاپچو معرفی می کنیم. از آن جایی که، معادلات دیفرانسیل کسری چند مرتبه ای از لحاظ کاربردی بسیار پراهمیت تر از معادلات دیفرانسیل کسری معمولی هستند. در این پایان نامه ما این دسته از معادلات را نیز بررسی می کنیم. برای بدست آوردن جواب آن، با استفاده از تغییر متغیر معادله را به دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری خطی فازی تبدیل و ثابت می نماییم که جواب های معادله دیفرانسیل چند مرتبه ای در دستگاه معادله دیفرانسیل نظیرش صدق می کند و برعکس. لذا شرایط وجود و یکتایی جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری فازی را بدست می آوریم. به عنوان کاربردی از این نوع معادلات، معادله دیفرانسیل باگلی-تورویک^۱ که از مهم ترین معادلات در مکانیک سیالات می باشد، را در فرم زیر نظر می گیریم [۴۷]:

$$y''(x) = f(x) \oplus C_1 y(x) \oplus C_2 D_*^{\frac{3}{2}} y(x)$$

این معادله، مساله حرکت یک صفحه سفت و سخت غوطه ور در یک مایع نیوتنی را مطالعه می کند که در آن $y(x)$ تابع توصیف جابجایی صفحه، ضرایب C_1 و C_2 ثابت هایی هستند که بستگی به جرم و مکان جسم دارد [۴۸]. فرم کلی جواب های این معادله را با تبدیل آن به دستگاه معادله دیفرانسیل کسری فازی از

1. Bagley-Torvik

مرتبه $0 < \alpha \leq 1$ و با استفاده از تابع میتگ-لفلر در فرم ماتریسی با حالت‌های مختلف دیفرانسیل پذیری کاپچو بدست می‌آوریم [۱۵].

مساله دیگری که ما در صدد انجام آن هستیم، ارائه روش‌های عددی می‌باشد که بدون استفاده از 2 -برش بتواند معادلات دیفرانسیل کسری فازی را حل کند. که در این پایان نامه ما روش اویلر کسری را با استفاده از بسط تیلور تعمیم یافته فازی ارائه می‌دهیم. برای این منظور، نیاز به قضیه مقدار میانی انتگرال کسری ریمان-لیوویل فازی داریم که منجر به اثبات قضیه مقدار میانی انتگرال و مقدار متوسط فازی می‌شود، لذا در این پایان نامه به اثبات این قضایای اساسی نیز پرداخته‌ایم و با استفاده از این مفاهیم بسط تیلور تعمیم یافته فازی را در حالات مختلف دیفرانسیل پذیری بیان می‌نمائیم. پس بر اساس این بسط، روش اویلر کسری را معرفی می‌کنیم و روش را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری فازی به کار می‌بریم و جواب‌های عددی آن را بدست می‌آوریم.

مطالب این پایان نامه به صورت زیر سازماندهی شده است.

در فصل دوم، به طور خلاصه با مفاهیم اولیه فازی مانند تعریف انواع عدد فازی و اعمال حسابی در مجموعه اعداد فازی آشنا می‌شویم. تابع فازی مقدار را معرفی می‌کنیم و بدست آوردن مشتق و انتگرال آن را توضیح می‌دهیم. همچنین برخی از توابع خاص که در فصول بعدی مورد نیاز است را بیان می‌نمائیم. در فصل سوم، مشتق کسری کاپچو تعمیم یافته هاکوها را تعریف و خصوصیات این نوع از دیفرانسیل پذیری کسری فازی را بررسی می‌کنیم. همچنین قضیه مقدار متوسط و مقدار میانی انتگرال فازی را بیان می‌نمائیم. سپس بسط تیلور را با استفاده از مشتق کسری کاپچو بدست می‌آوریم. سپس با استفاده از تعاریف و قضایایی که ارائه می‌کنیم، بسط تیلور تعمیم یافته فازی را بدست می‌آوریم. در فصل چهارم با استفاده از مشتق کسری فازی بیان شده، معادله دیفرانسیل کسری معرفی می‌نمائیم و ثابت می‌کنیم که این دسته از معادلات جواب یکتا دارند. سپس یک روش برای حل معادلات کسری خطی معرفی می‌کنیم. در ادامه معادلات دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای فازی را معرفی و آن را به دستگاه معادله دیفرانسیل فازی تک مرتبه‌ای فازی تبدیل می‌نمائیم و بعد از اثبات وجود و منحصر بفردی جواب، یک مساله کاربردی مکانیک سیالات را در نظر می‌گیریم و فرم کلی جواب را در دو حالت دیفرانسیل پذیری بدست می‌آوریم. همچنین، با استفاده از بسط تیلور تعمیم یافته بدست آمده در فصل سوم روش اویلر کسری را در حالت های مختلف دیفرانسیل

پذیری بدست می‌آوریم. سپس با چند مثال از معادله دیفرانسیل معمولی و چند مرتبه ای، روش های بیان شده را توضیح می‌دهیم و در پایان نتایج حاصل از این تحقیق را در فصل پنجم بیان می‌نماییم.

فصل دوم

حساب دیفرانسیل و انتگرال فازی و معرفی توابع خاص

۱-۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مفهوم مجموعه فازی را بیان کرده و تعاریف لازم برای معرفی نمودن عدد فازی را می‌گوییم، و با توجه به تابع عضویت اعداد فازی انواع مختلف اعداد فازی را بررسی می‌نماییم. اما از آن جایی که هرگاه بخواهیم مساله‌ای را که پارامترهای آن غیر قطعی هستند را مدل بندی کنیم باید از اعداد و توابع فازی بهره بگیریم پس اهمیت و لزوم اعمال حسابی بین اعداد فازی معلوم خواهد شد. از این رو جمع، ضرب و تفریق دو عدد فازی را تعریف می‌کنیم و همچنین توابع فازی مقدار را معرفی و مفاهیم اساسی همچون حد، پیوستگی، مشتق و انتگرال این توابع را بررسی می‌کنیم.

در پایان این فصل نیز با چند مفهوم از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری غیر فازی که در فصول بعد مورد نیاز خواهد بود، آشنا می‌شویم.

۲-۲ مجموعه فازی و خواص آن

در این بخش، مفاهیم و تعاریف اولیه مجموعه فازی را بیان می‌نماییم [۵۰].

۲-۲-۱ مجموعه فازی

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع مشخصه هر زیر مجموعه قطعی A از X ، مجموعه $\{0,1\}$ است،

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A; \\ 0 & , \quad x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ به بازه $[0,1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X ، عددی را از بازه $[0,1]$ نسبت می‌دهد. این تابع را تابع عضویت A می‌نامیم.

پس بنابراین اکنون دیگر A یک مجموعه قطعی نیست بلکه مجموعه‌ای است که آن را یک مجموعه فازی می‌نامیم. بنابراین یک مجموعه فازی A مجموعه‌ای است که درجه عضویت اعضاء آن می‌تواند به طور پیوسته از بازه $[0,1]$ اختیار شود.

اگر تابع عضویت A را با $\mu_A(x)$ نشان دهیم، مشخص می‌شود که $\mu_A(x)$ تابعی است که به هر عضو از X یک عدد از بازه $[0,1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و برعکس.

۲-۲-۲ تکیه‌گاه مجموعه‌ی فازی

مجموعه نقاطی از X که $\mu_A(x) > 0$ باشد، تکیه‌گاه A می‌نامند، و به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$Supp(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$

۲-۲-۳ کانون(مرکز) مجموعه‌ی فازی

مجموعه نقاطی از X که $\mu_A(x) = 1$ باشد، مرکز A نامیده می‌شود، و بصورت زیر نشان داده می‌شود

$$Core(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$$

۲-۲-۴ ارتفاع مجموعه‌ی فازی

نقطه‌ای از X که داری بالاترین درجه عضویت در A باشد را در نظر بگیرید. مقدار این درجه عضویت را ارتفاع مجموعه A می‌نامند. یعنی

$$M = \sup\{\mu_A(x) \mid x \in X\}$$

۵-۲-۲ مجموعه‌ی فازی نرمال

مجموعه A را نرمال گویند اگر و فقط اگر ارتفاع آن برابر یک باشد. یعنی

$$\sup\{\mu_A(x) \mid x \in X\} = 1$$

در غیر این صورت آن را غیر نرمال (زیر نرمال) گویند. بدیهی است که هر مجموعه‌ی فازی غیر نرمال A را می‌توان با تقسیم $\mu_A(x)$ بر ارتفاع A ، نرمال کرد.

۶-۲-۲ برش مجموعه‌ی فازی

زیر مجموعه عناصری از X را که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی r (یعنی $r \geq 0$) باشد را r -برش A گوئیم که یک مجموعه غیر فازی است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[A]^r = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq r\}$$

۷-۲-۲ مجموعه‌ی فازی محدب

مجموعه فازی A را محدب گوئیم اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$$

۳-۲ عدد فازی

در این بخش چند تعریف از اعداد فازی را معرفی خواهیم کرد [۱۸].

۱-۳-۲ تعریف. مجموعه فازی $A(\subseteq \mathbb{R})$ را عدد فازی گوئیم هر گاه

۱. A نرمال باشد؛

۲. A محدب باشد؛

۳. $\mu_A(x)$ تکه‌ای پیوسته باشد.

۲-۳-۲ تعریف. مجموعه $X \neq \emptyset$ را در نظر بگیرید، یک زیر مجموعه فازی از X به صورت یک نگاشت $u: X \rightarrow [0,1]$ تعریف می‌شود. فرض کنید $\mathbb{R}_F$ نشانگر مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های فازی از محور اعداد حقیقی باشد (یعنی $u: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$) که در خصوصیات زیر صدق می‌کند

۱. به ازای هر $u \in \mathbb{R}_F$ ، u نرمال باشد، یعنی $\{x \in \mathbb{R}^n \mid u(x)=1\} \neq \emptyset$

۲. به ازای هر $u \in \mathbb{R}_F$ ، u محدب باشد، یعنی

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}.$$

۳. به ازای هر $u \in \mathbb{R}_F$ ، u بر $\mathbb{R}$ نیمه پیوسته بالایی باشد.

۴. بستار^۱ $cl\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}$ فشرده باشد.

در این صورت $\mathbb{R}_F$ مجموعه اعداد فازی نامیده می‌شود.

۲-۳-۳ نکته. اعداد حقیقی همچنین اعداد فازی هستند، یعنی $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_F$. اگر $x_0 \in \mathbb{R}$ تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ 1 & x = x_0 \end{cases}$$

۲-۳-۴ برش اعداد فازی

برای $0 < r \leq 1$ قرار دهید $[u]^r = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) \geq r\}$ و $[u]^0 = cl\{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}$ ، در این صورت $[u]^r$ را r -برش عدد فازی $u \in \mathbb{R}_F$ می‌گوییم. ۱-برش مرکز و ۰-برش قطر عدد فازی نام دارد.

۲-۳-۴-۱ قضیه استکینگ^۲ $([0,1])$. فرض کنید $u \in \mathbb{R}_F$ و $[u]^r$ r -برش آن باشد، در این صورت

۱. $[u]^r = [u_r^-, u_r^+]$ داریم $0 \leq r \leq 1$ برای هر

۲. اگر $0 \leq r_1 \leq r_2 \leq 1$ آنگاه $[u]^{r_2} \subseteq [u]^{r_1}$.

۳. برای هر دنباله $\{r_n\}$ همگرا به $r \in (0,1)$ داریم $\bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{r_n} = [u]^r$.

1. Closure
2. Stacking Theorem

$$4. \text{ برای هر دنباله } \{r_n\} \text{ همگرا به } 0 \text{ داریم } cl\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [u]^{r_n}\right) = [u]^0.$$

۲-۳-۵ فرم پارامتری اعداد فازی

یک عدد فازی فازی u در فرم پارامتری به صورت زوج (u_r^-, u_r^+) از توابع u_r^+, u_r^- و $0 \leq r \leq 1$ می باشد که در شرایط زیر صدق کند:

۱. u_r^- یک تابع کراندار، نانزولی و چپ پیوسته بر $(0,1)$ و راست پیوسته در 0 باشد.
۲. u_r^+ یک تابع کراندار، ناصعودی و چپ پیوسته بر $(0,1)$ و راست پیوسته در 0 باشد.
۳. برای هر $0 \leq r \leq 1$ ، $u_r^- \leq u_r^+$.

۲-۳-۶ اعداد فازی LR

دو تابع $L, R: [0,1] \rightarrow [0,1]$ که صعودی و پیوسته هستند و در شرایط $L(0) = R(0) = 0$ و $L(1) = R(1) = 1$ صدق می کنند را در نظر بگیرید. فرض کنید $a \leq b \leq c \leq d$ اعداد حقیقی باشند. مجموعه فازی $u: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ را عدد فازی LR می نامند که دارای تابع عضویتی به صورت زیر می باشد

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ L\left(\frac{x-a}{b-a}\right) & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x < c \\ R\left(\frac{d-x}{d-c}\right) & c \leq x < d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

۲-۳-۷ اعداد فازی دوزنقه ای

در حالت خاص اعداد LR، عدد دوزنقه ای را خواهیم داشت اگر توابع R, L یک خط باشند، هر عدد دوزنقه ای را می توان به صورت $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ نشان داد که دارای تابع عضویت به صورت زیر می باشد

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \leq x < d \\ 0 & x \geq d \end{cases}$$

اگر $u \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ یک عدد دوزنقه ای باشد آنگاه r -برش آن به صورت زیر می باشد

$$u_r^- = a + r(b-a), \quad u_r^+ = d - r(d-c)$$

۲-۳-۸ اعداد فازی مثلثی

در حالت خاص عدد فازی دوزنقه ای، وقتی $b=c$ باشد، آنگاه عدد فازی مثلثی را خواهیم داشت که با سه

تایی مرتب $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ نشان داده می شوند که مقدار تابع عضویت در b برابر یک است و $c-b$ را پهنای راست و $b-a$ را پهنای چپ عدد فازی مثلثی می نامند. که دارای تابع عضویت به صورت زیر است

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & b < x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases}$$

همچنین طبق تعریف r -برش، $u_r^- = a + (b-a)r$ و $u_r^+ = c - (c-b)r$ نقاط انتهایی r -برش عدد فازی مثلثی به ازای هر $0 \leq r \leq 1$ می باشد.

۲-۳-۹ اعداد فازی مثبت و منفی مثلثی

عدد فازی مثلثی u را که به صورت سه تایی (a, b, c) باشد، را در نظر بگیرید. عدد u مثبت است اگر $a > 0$ ، همچنین u منفی است اگر $a < 0$ باشد.

۲-۴ اعمال حسابی در مجموعه اعداد فازی

اغلب، ما برای انجام عملیات با پارامترهای مبهم نیاز به تعریف اعمال حسابی داریم. که باید در حالت خاص همان تعاریف کلاسیک در مجموعه اعداد حقیقی باشد. ما این بحث را با اصل گسترش^۱ زاده شروع می‌نماییم [۵۰، ۱۸، ۱۱].

۲-۴-۱ اصل گسترش

اصل گسترش یک رابطه اساسی است که به ما این امکان را می‌دهد تا دامنه یک تابع را از نقاطی در U به مجموعه های فازی در U توسعه دهیم. مشخص تر این که، فرض کنید $f: U \rightarrow V$ تابعی از مجموعه قطعی U به مجموعه قطعی V باشد. همچنین فرض کنید یک مجموعه فازی A در U داده شده و ما می‌خواهیم مجموعه فازی B در V را به نحوی تعیین کنیم که $B = f(A)$. اگر f یک نگاشت یک به یک باشد، آن گاه داریم،

$$\mu_B(y) = \mu_A[f^{-1}(y)], \quad y \in V \quad (1-2)$$

که در آن $f^{-1}(y)$ ، معکوس f بوده، به این معنی که $f[f^{-1}(y)] = y$. اگر f یک به یک نباشد، آن گاه هنگامی که دو یا چند نقطه متمایز در U با مقادیر تعلق متفاوت در A به یک نقطه یکسان در V نگاشته شوند، ابهام بوجود خواهد آمد. به عنوان مثال اگر داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2) = y$ ولی $x_1 \neq x_2$ و $\mu_A(x_1) \neq \mu_A(x_2)$ ، آن گاه سمت راست رابطه (۱-۲) می‌تواند دو مقدار مختلف $\mu_A(f^{-1}(y))$ یا $\mu_A(x_2) = \mu_A(f^{-1}(y))$ را اختیار نماید. برای رفع این ابهام، ما مقدار بزرگتر بین دو مقدار تعلق را به $\mu_B(y)$ نسبت می‌دهیم. در حالت کلی، تابع تعلق برای B به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in V \quad (2-2)$$

که در آن $f^{-1}(y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$f^{-1}(y) = \{x \in U \mid f(x) = y\}$$

رابطه (۲-۲) اصل گسترش نامیده می‌شود.

۲-۱-۱-۱ قضیه. فرض کنید $f(x, y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه می‌توانیم آن را به $F: \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ گسترش داد به طوری که $w = F(u, v)$ دارای r -برش به صورت زیر است

$$[w]^r = \{f(x, y) \mid x \in [u]^r, y \in [v]^r\}$$

برای هر $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ، یعنی اگر $[w]^r = [w_r^-, w_r^+]$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$w_r^- = \inf \{f(x, y) \mid x \in [u]^r, y \in [v]^r\}$$

$$w_r^+ = \sup \{f(x, y) \mid x \in [u]^r, y \in [v]^r\}$$

۲-۲-۲ اعمال حسابی در اعداد فازی مثلثی

فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ دو عدد فازی مثلثی $u = (a_1, b_1, c_1)$ و $v = (a_2, b_2, c_2)$ باشد در این صورت

۲-۲-۲-۱ جمع

$$u \oplus v = (a_1, b_1, c_1) \oplus (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

۲-۲-۲-۲ ضرب اسکالر

$$k \odot u = \begin{cases} (ka_1, kb_1, kc_1) & k \geq 0 \\ (kc_1, kb_1, ka_1) & k < 0 \end{cases}$$

۲-۲-۲-۳ ضرب دو عدد مثبت

$$u \odot v = (a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2, b_1 b_2, b_1 c_2 + b_2 c_1 - b_1 c_1)$$

۲-۲-۲-۴ تفریق

$$u \ominus v = (a_1, b_1, c_1) \ominus (a_2, b_2, c_2) = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2)$$

۲-۳-۲ اعمال حسابی روی r -برش اعداد فازی

فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ دو عدد فازی باشند. با استفاده از اصل گسترش جمع و ضرب اسکالر و ضرب دو عدد فازی طبق قضیه (۲-۱-۱-۱) به صورت زیر بدست می‌آید.

۲-۴-۳-۱ جمع

$$[u \oplus v]^r = \{x + y \mid x \in [u]^r, y \in [v]^r\} = [u]^r + [v]^r = [u_r^- + v_r^-, u_r^+ + v_r^+]$$

۲-۴-۳ ضرب اسکالر

$$[k \odot u]^r = \{kx \mid x \in [u]^r\} = k[u]^r = \begin{cases} [ku_r^-, ku_r^+] & k \geq 0 \\ [ku_r^+, ku_r^-] & k < 0 \end{cases}$$

۲-۴-۳ ضرب

$$[u \odot v]^r = [\min\{u_r^- v_r^-, u_r^- v_r^+, u_r^+ v_r^-, u_r^+ v_r^+\}, \max\{u_r^- v_r^-, u_r^- v_r^+, u_r^+ v_r^-, u_r^+ v_r^+\}]$$

۲-۴-۳-۴ تفریق هاکوهارا^۱

فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ، اگر $w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ موجود باشد به گونه ای که $u = v \oplus w$ ، آن گاه w را تفاضل هاکوهارا u و v می نامیم و آن را با $u \ominus v$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود

$$[u \ominus v]^r = [u]^r - [v]^r = [u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+]$$

از آن جایی که اگر $u_r^+ - u_r^- < v_r^+ - v_r^-$ باشد تفاضل هاکوهارا موجود نیست. برای رفع این اشکال، تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا ارائه شد.

۲-۴-۳-۵ تفاضل تعمیم یافته ی هاکوهارا^۲

فرض کنید $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ ، آنگاه تفاضل تعمیم یافته هاکوهارا u و v به صورت زیر تعریف می شود

$$u \ominus_{gH} v = w \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i). } u = v \oplus w, \\ \text{or (ii). } v = u \oplus (-1)w. \end{cases}$$

پس r -برش تفاضل تعمیم یافته ی هاکوهارا u و v به صورت زیر می باشد

$$[u \ominus_{gH} v]^r = [\min\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}, \max\{u_r^- - v_r^-, u_r^+ - v_r^+\}]$$

1. Hukuhara difference

2. Generalized Hukuhara difference

برای اینکه تفاضل تعمیم یافته‌ی هاگوهارا $u \ominus_{gH} v$ متعلق به $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ باشد باید شرایط زیر برقرار باشد

$$\text{case(i)} \begin{cases} w_r^- = u_r^- - v_r^-, & w_r^+ = u_r^+ - v_r^+ \\ w_r^- \nearrow, & w_r^+ \searrow, & w_r^- \leq w_r^+, \end{cases} \quad \forall r \in [0,1],$$

$$\text{case(ii)} \begin{cases} w_r^- = u_r^+ - v_r^+, & w_r^+ = u_r^- - v_r^- \\ w_r^- \nearrow, & w_r^+ \searrow, & w_r^- \leq w_r^+, \end{cases} \quad \forall r \in [0,1].$$

۲-۴-۳ ویژگی های تفاضل تعمیم یافته‌ی هاگوهارا

دو عدد فازی $u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در نظر بگیرید، در این صورت

۱. تفاضل تعمیم یافته‌ی هاگوهارا در صورت وجود، یکتاست.

۲. اگر $u \ominus_{gH} v$ در حالت (i) موجود باشد، آنگاه $u \ominus_{gH} v$ در حالت (ii) برقرار است و برعکس.

$$(u \oplus v) \ominus_{gH} v = u \quad ۳.$$

$$0 \ominus_{gH} (u \ominus_{gH} v) = v \ominus_{gH} u \quad ۴.$$

۵. $u \ominus_{gH} v = v \ominus_{gH} u = w$ در صورتی برقرار است که $w = -w$ پس $w = 0$ است، لذا $u = v$.

۲-۴-۳ توجه: در این پایان نامه فرض براین است که به ازای هر دو عدد فازی u, v آنگاه $u \ominus_{gH} v$

موجود است و متعلق به $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ می‌باشد.

۲-۵ فاصله هاسدورف^۱

تابع $D: \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ را که به صورت

$$D(u, v) = \sup_{r \in [0,1]} \max \{ |u_r^- - v_r^-|, |u_r^+ - v_r^+| \}$$

تعریف می‌شود، را فاصله هاسدورف بین دو عدد فازی u, v گوئیم. فضای متریک $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ کامل، جداشدنی و به صورت موضعی فشرده است، که در خصوصیات زیر صدق می‌کند [۳۱]:

1. Hausdorff distance

$$D(u, v) = D(v, u), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

$$D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u, v), \quad \forall u, v, w \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

$$D(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| D(u, v), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$$

$$D(u \oplus v, w \oplus z) \leq D(u, w) + D(v, z), \quad \forall u, v, w, z \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}.$$

۶-۲ تابع فازی

تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را یک تابع فازی مقدار می‌نامیم و r -برش تابع فازی مقدار f به ازای هر $x \in [a, b]$ و $r \in [0, 1]$ را به صورت $f(x; r) = [f_r^-(x), f_r^+(x)]$ نمایش می‌دهیم.

۷-۲ حد و پیوستگی تابع فازی

تابع فازی مقدار $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و نقطه $x_0 \in [a, b]$ در نظر بگیرید، اگر

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \quad (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow D(f(x), L) < \epsilon)$$

آنگاه $L \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ حد تابع f در نقطه x_0 می‌باشد، که به صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

و همچنین تابع f را پیوسته گوئیم هرگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

و تابع فازی مقدار f بر بازه $[a, b]$ پیوسته گوئیم اگر در هر نقطه $x_0 \in [a, b]$ پیوسته باشد به طوری که پیوستگی در نقاط a, b یک طرفه می‌باشد [۲۷، ۱۳].

در این پایان نامه، مجموعه تمام توابع فازی مقدار پیوسته بر بازه $[a, b]$ را با نماد $C_{\mathbb{F}}[a, b]$ نشان می‌دهیم.

۲-۸ مشتق تابع فازی

در این بخش انواع مشتق تابع فازی مقدار را بیان کرده و خصوصیات آن را تشریح خواهیم نمود [۱۸-۲۱]، [۴۳-۴۵].

۲-۸-۱ مشتق هاکوهارا^۱

تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نقطه $x_0 \in [a, b]$ را مشتق پذیر هاکوهارا^۲ گویند اگر برای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک تفاضل $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و مقدار $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ چنان موجود باشد که

$$\lim_{h \searrow 0} D\left(\frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h}, f'(x_0)\right) = \lim_{h \searrow 0} D\left(\frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}, f'(x_0)\right) = 0 \quad (۳-۲)$$

در این صورت $f'(x_0)$ را مشتق هاکوهارا تابع f در نقطه $x_0 \in [a, b]$ می نامیم.

در رابطه (۳-۲) توابع در فضای متریک $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, D)$ گرفته می شوند و در نقاط انتهایی $[a, b]$ ، تنها مشتق یک طرفه گرفته می شود. بنابراین تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ در بازه $[a, b]$ مشتق پذیر هاکوهارا گوییم هرگاه تابع f در تمام نقاط $x_0 \in [a, b]$ مشتق پذیر باشد.

۲-۸-۱-۱ قضیه. تابع فازی مقدار $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را با $-r$ برش $f(x; r) = [f_r^-(x), f_r^+(x)]$ در نظر بگیرید. اگر تابع f بر $[a, b]$ مشتق پذیر هاکوهارا باشد آنگاه توابع $(f_r^-)'(x)$ و $(f_r^+)'(x)$ به ازای هر $r \in [0, 1]$ مشتق پذیر است و $f'(x; r) = [(f_r^-)'(x), (f_r^+)'(x)]$ به طوری که به ازای هر $r \in [0, 1]$ و $x \in [a, b]$ داریم

$$(f_r^-)'(x) \leq (f_r^+)'(x)$$

یکی از ضعف های اساسی که در مفهوم مشتق پذیری توابع فازی وجود دارد آن است که مشتق هاکوهارای تابع فازی مقدار f یعنی $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h}$ یا $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h}$ یا هر دو یک عدد فازی نباشد، در این صورت مشتق موجود نیست. برای توضیح بیشتر این موضوع به مثال زیر توجه کنید.

1. Hukuhara derivative
2. Hukuhara differentiable

۲-۸-۱-۲ مثال. تابع $f(x; r) = [r, (2-r)] \sin x$ را به ازای $0 \leq x \leq \pi$ و $0 \leq r \leq 1$ در نظر بگیرید.

$$f'(x; r) = [(f_r^-)'(x), (f_r^+)'(x)] = [r \cos x, (2-r) \cos x]$$

عبارت فوق برای $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ یک عدد فازی است ولی برای $x > \frac{\pi}{2}$ عدد فازی نیست، پس $f'(x)$ به ازای $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ موجود نیست.

حال تعریف دیگری از مشتق برای توابع فازی مقدار تعریف می‌کنیم.

۲-۸-۲ مشتق پذیر تعمیم یافته‌ی قوی^۱

تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نقطه $x_0 \in [a, b]$ را مشتق پذیر تعمیم یافته‌ی قوی (GH-مشتق پذیر) گویند اگر وجود داشته باشد $f'(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ چنان که

i. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، تفاضل $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و حدود زیر (در فضای متریک D) موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

یا

ii. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، تفاضل $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ و $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و حدود موجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

یا

iii. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، تفاضل $f(x_0 - h) \ominus f(x_0)$ و $f(x_0 + h) \ominus f(x_0)$ و حدود زیرموجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 - h) \ominus f(x_0)}{-h} = f'(x_0)$$

1. Strongly generalized differentiable

یا

iv. به ازای هر $h > 0$ به اندازه کافی کوچک، تفاضل $f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$ و $f(x_0) \ominus f(x_0 + h)$ و حدود زیرموجود باشند

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 + h)}{-h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0)$$

تعریف دیگری از مفهوم مشتق توابع فازی مقدار با در نظر گرفتن تفاضل تعمیم یافته ها کوهارا می توان به صورت زیر بیان کرد.

۲-۸-۳ مشتق تعمیم یافته ی ها کوهارا^۱

نقطه $x_0 \in (a, b)$ و h را چنان در نظر بگیرید که $x_0 + h \in (a, b)$ در این صورت مشتق تعمیم یافته ها کوهارا تابع $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ در نقطه x_0 به صورت زیر تعریف می شود

$$f'_{gH}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \ominus_{gH} f(x_0)}{h}$$

اگر $f'_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_F$ ، آنگاه گوئیم f دیفرانسیل پذیر تعمیم یافته ی ها کوهارا^۲ (gH -دیفرانسیل پذیر) در نقطه x_0 است.

به صورت معادل تعریف دیگری می توان برای مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوهارا به صورت زیر بیان کرد.

۲-۸-۳-۱ تعریف. فرض کنید $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ تابعی فازی مقدار باشد و $c \in (a, b)$. در این صورت تابع فازی f در نقطه c gH -دیفرانسیل پذیر است اگر

$$f'_{gH}(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) \ominus_{gH} f(c)}{x - c}$$

موجود و متعلق به فضای $\mathbb{R}_F$ باشد، در این صورت این مقدار را gH -مشتق تابع f در نقطه c می نامیم.

۲-۸-۳-۲ تعریف ([۲۱]). فرض کنید که $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_F$ تابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت

-
1. Generalized Hukuhara derivative
 2. Generalized Hukuhara differentiable

گوییم $f(x)$ در نقطه x_0 ، $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است اگر

$$(i). \quad f'_{gH}(x_0; r) = [(f_r^-)'(x_0), (f_r^+)'(x_0)] \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (۴-۲)$$

گوییم $f(x)$ در نقطه x_0 ، $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است اگر

$$(ii). \quad f'_{gH}(x_0; r) = [(f_r^+)'(x_0), (f_r^-)'(x_0)] \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (۵-۲)$$

۲-۳-۸-۳ تعریف. نقطه $x_0 \in (a, b)$ نقطه تعویض^۱ نوع gH -دیفرانسیل پذیری f است، اگر برای هر همسایگی V از x_0 نقاط $x_1 < x_0 < x_2$ موجود باشد به طوری که

(نقطه تعویض نوع I) در نقطه x_1 (۴-۲) برقرار باشد و (۵-۲) برقرار نباشد و در نقطه x_2 (۵-۲) برقرار باشد و (۴-۲) برقرار نباشد.

(نقطه تعویض نوع II) در نقطه x_1 (۵-۲) برقرار باشد و (۴-۲) برقرار نباشد و در نقطه x_2 (۴-۲) برقرار باشد و (۵-۲) برقرار نباشد.

۲-۸-۴ مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوهارا از مرتبه دوم

فرض کنید $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی مقدار باشد. در این صورت تابع f ، gH -دیفرانسیل پذیر از مرتبه دوم در نقطه $x_0 \in (a, b)$ است اگر تابع f ، gH -دیفرانسیل پذیر باشد (یعنی $f'_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$) و همچنین در هیچ نقطه‌ای نوع gH -دیفرانسیل پذیری آن تعویض نشود. در این صورت

$$f''_{gH}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'_{gH}(x_0 + h) \ominus_{gH} f'_{gH}(x_0)}{h},$$

به شرط آن که $f''_{gH}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. پس تابع f را دو مرتبه gH -دیفرانسیل پذیر گوییم.

۲-۸-۴-۱ تعریف. فرض کنید که $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $f'_{gH}(x)$ در نقطه $x_0 \in (a, b)$ ، چنان gH -دیفرانسیل پذیر باشد که هیچ نقطه تعویض نوع در بازه (a, b) موجود نباشد و توابع $(f_r^-)'_{gH}(x)$ و $(f_r^+)'_{gH}(x)$ هر دو در نقطه x_0 دیفرانسیل پذیر باشند. در این صورت

• $f(x)$ پذیر gH -دیفرانسیل پذیر در نقطه x_0 است، هرگاه نوع $[(i)-gH], f'_{gH}(x)$ و $f'_{gH}(x)$ یکسان باشد، پس در این صورت

$$(i). \quad f''_{gH}(x_0; r) = [(f_r^-)''(x_0), (f_r^+)''(x_0)], \quad 0 \leq r \leq 1,$$

• $f(x)$ پذیر gH -دیفرانسیل پذیر در نقطه x_0 است هرگاه نوع $[(ii)-gH], f'_{gH}(x)$ و $f'_{gH}(x)$ متفاوت باشد، پس در این صورت

$$(ii). \quad f''_{gH}(x_0; r) = [(f_r^+)''(x_0), (f_r^-)''(x_0)], \quad 0 \leq r \leq 1.$$

۲-۸-۵ مشتق پذیری تعمیم یافته ها کوها را از مرتبه m

فرض کنید $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی مقدار باشد. در این صورت تابع f ، gH -دیفرانسیل پذیر از مرتبه m در نقطه $x_0 \in (a, b)$ است اگر توابع $f_{gH}^{(i)}$ به ازای $i = 0, 1, \dots, m-1$ ، gH -دیفرانسیل پذیر باشند و نقطه‌ی تعویض نوع gH -دیفرانسیل پذیری بر (a, b) نداشته باشد و

$$f_{gH}^{(m)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{gH}^{(m-1)}(x_0 + h) \ominus_{gH} f_{gH}^{(m-1)}(x_0)}{h},$$

به شرط آن که $f_{gH}^{(m)}(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

۲-۸-۵-۱ تعریف. فرض کنید که تابع $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ مرتبه m gH -دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت

• گوئیم $f_{gH}^{(m-1)}(x)$ در نقطه x_0 ، $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است اگر

$$(i). \quad f_{gH}^{(m)}(x_0; r) = [(f_r^-)^{(m)}(x_0), (f_r^+)^{(m)}(x_0)] \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (6-2)$$

• گوئیم $f_{gH}^{(m-1)}(x)$ در نقطه x_0 ، $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر است اگر

$$(ii). \quad f_{gH}^{(m)}(x_0; r) = [(f_r^+)^{(m)}(x_0), (f_r^-)^{(m)}(x_0)] \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (7-2)$$

در این پایان نامه، نماد $C_{\mathbb{F}}^m[a, b]$ نشانگر مجموعه تمام توابع فازی مقدار متعلق به $C_{\mathbb{F}}[a, b]$ است که مشتقات آن تا مرتبه m موجود و پیوسته باشد یعنی به ازای $i = 0, 1, \dots, m$ داشته باشیم $f_{gH}^{(i)} \in C_{\mathbb{F}}[a, b]$.

۲-۸-۶ ویژگی‌های مشتق تعمیم یافته هاکوها را

۲-۸-۶-۱ قضیه. تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را به صورت $f(x; r) = [f_r^-(x), f_r^+(x)]$ به ازای $r \in [0, 1]$ در نظر بگیرید. تابع f را gH -دیفرانسیل پذیر می‌گوییم اگر و تنها اگر توابع $f_r^+(x), f_r^-(x)$ دیفرانسیل پذیر باشند. همچنین

$$f'_{gH}(x; r) = [\min\{(f_r^-)'(x), (f_r^+)'(x)\}, \max\{(f_r^-)'(x), (f_r^+)'(x)\}], \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (۸-۲)$$

۲-۸-۶-۲ مشتق ضرب اسکالر

تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ با ضابطه $f(x) = c \odot g(x)$ که در آن $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و تابع g حقیقی مقدار باشد را در نظر بگیرید. در این صورت مشتق تعمیم یافته هاکوها را تابع f موجود است و برابر است با

$$f'_{gH}(x) = c \odot g'(x).$$

۲-۸-۶-۳ مشتق مجموع

توابع $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نظر بگیرید به طوری که توابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشند و نوع دیفرانسیل پذیری هر دو تابع یکسان باشد. در این صورت $f(x) \oplus g(x)$ ، gH -دیفرانسیل پذیر است و

$$(f \oplus g)'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) \oplus g'_{gH}(x).$$

۲-۸-۶-۴ مشتق تفاضل

توابع $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نظر بگیرید به طوری که توابعی gH -دیفرانسیل پذیر باشند و نوع دیفرانسیل پذیری هر دو تابع یکسان باشد. در این صورت تابع $f(x) \ominus_{gH} g(x)$ ، gH -دیفرانسیل پذیر است و

$$(f \ominus_{gH} g)'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) \ominus_{gH} g'_{gH}(x).$$

۲-۸-۶-۵ مشتق ضرب دو تابع

توابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ که دیفرانسیل پذیر هستند (تابع f تابع gH -دیفرانسیل پذیر) را در نظر بگیرید. در این صورت تابع $f \odot g$ ، gH -دیفرانسیل پذیر است و

$$(f \odot g)'_{gH}(x) = f'_{gH}(x) \odot g(x) \oplus f(x) \odot g'(x).$$

۲-۶-۸-۶ مشتق زنجیره‌ای

فرض کنید که I یک بازه باز در $\mathbb{R}$ باشد و تابع $g: I \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$ $g(I) \subseteq \mathbb{R}$ دیفرانسیل پذیر و تابع فازی مقدار $f: \zeta \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ $-gH$ دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت

$$(f \circ g)'_{gH}(x) = g'(x) \odot f'_{gH}(g(x)).$$

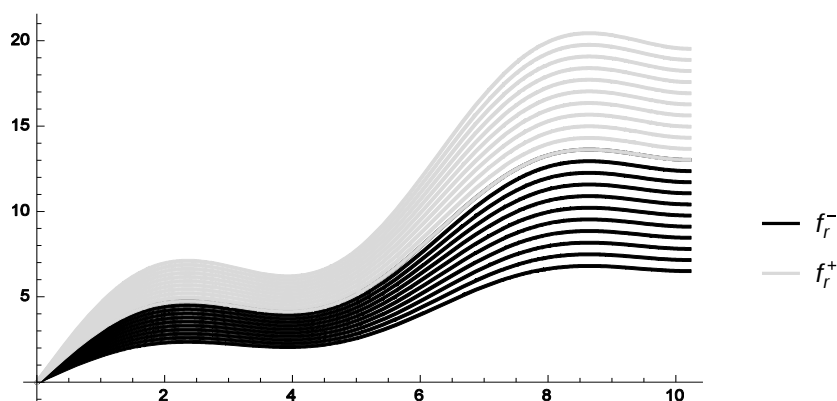
۲-۶-۸-۷ مثال. تابع $f: [0, \frac{13\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ با ضابطه $f(x) = (1, 2, 3)(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}x)$ که در آن $(1, 2, 3)$ یک عدد مثلثی است را در نظر بگیرید. در این صورت طبق قضیه (۲-۶-۸-۲) داریم

$$f'_{gH}(x) = (1, 2, 3)(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

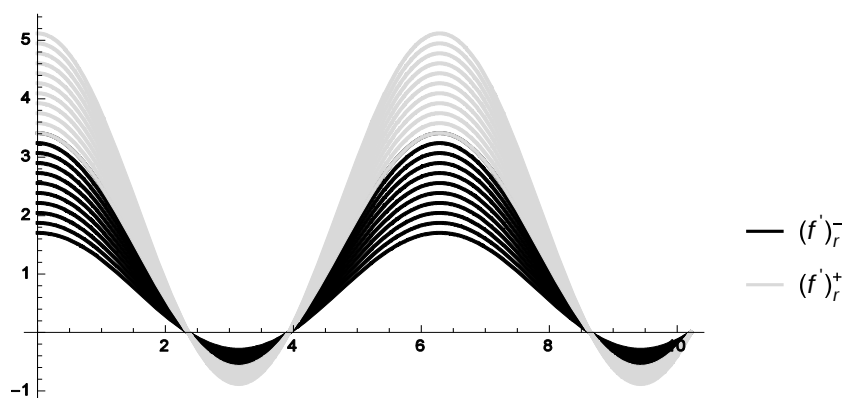
لذا خواهیم داشت

$$f'_{gH}(x; r) = [1+r, 3-r](\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

این تابع در نقاط $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}$ نوع دیفرانسیل پذیری آن تغییر می‌کند، با توجه به علامت تابع $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ در می‌یابیم که $f(x)$ بر بازه $[0, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}]$ تابع $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر و بر بازه $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{11\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}]$ تابعی $-(ii) - gH$ دیفرانسیل پذیر است. شکل (۱-۲) و (۲-۲) به ترتیب تابع و مشتق تعمیم یافته آن را به تصویر کشیده است.



شکل ۱-۲. نمایش r -برش تابع فازی مقدار مثال ۲-۶-۸-۷



شکل ۲-۲. نمایش ۲-برش مشتق تعمیم یافته ها کوهارای تابع فازی مقدار مثال ۲-۸-۶-۷

۹-۲ انتگرال تابع فازی

در این بخش با مفهوم انتگرال گیری از توابع فازی آشنا می‌شویم و به بررسی ویژگی‌های آن می‌پردازیم [۵، ۳۸].

۱-۹-۲ انتگرال ریمن

تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ بر بازه $[a, b]$ ریمن انتگرال پذیر است اگر وجود داشته باشد $I \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به طوری که برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ چنان که برای هر افزایش از $[a, b]$ به صورت $a = x_0 < \dots < x_n = b$ که $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ برای $i = 0, 1, \dots, n$ و برای هر نقطه $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ که $i = 0, 1, \dots, n$ باشد، داریم

$$D\left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), I\right) < \varepsilon$$

در این صورت قرار دهید $I = \int_a^b f(x) dx$.

۲-۹-۲ انتگرال لبگ

تابع فازی مقدار $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را در نظر بگیرید چنان که $f(x;r)=[f_r^-(x), f_r^+(x)]$ و به ازای هر $r \in [0,1]$ اندازه پذیر و لبگ انتگرال پذیر باشند. پس ما $\int_a^b f(x)dx$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x;r)dx = [\int_a^b f_r^-(x)dx, \int_a^b f_r^+(x)dx] \quad 0 \leq r \leq 1$$

و ما تابع f را انتگرال پذیر لبگ می‌گوییم. توجه کنید که اگر تابع f پیوسته باشد حاصل انتگرال ریمن و لبگ یکسان خواهد بود.

در این پایان نامه، مجموعه تمام توابع فازی مقدار که بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر لبگ هستند را با نماد $L_{\mathbb{F}}[a,b]$ نشان می‌دهیم.

۲-۹-۳ ویژگی‌های انتگرال فازی

انتگرال فازی خصوصیات زیر را دارد:

۱. اگر $f, g:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ توابع انتگرال پذیر باشند و برای $c_2, c_1 \in \mathbb{R}$ داریم

$$\int_a^b (c_1 f(x) \oplus c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx \oplus c_2 \int_a^b g(x)dx$$

۲. اگر $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع انتگرال پذیر و $c \in [a,b]$ باشد، داریم

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \oplus \int_c^b f(x)dx$$

۳. اگر $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ و تابع $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ بر بازه $[a,b]$ تغییر علامت ندهد، داریم

$$\int_a^b c \odot f(x)dx = c \odot \int_a^b f(x)dx$$

۲-۹-۴ قضایای اساسی انتگرال فازی

۲-۹-۴-۱ قضیه. تابع پیوسته $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را با $f(x;r)=[f_r^-(x), f_r^+(x)]$ در نظر بگیرید.

۱. تابع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ -gH دیفرانسیل پذیر است و $F'_{gH}(x) = f(x)$.

۲. تابع $F(x) = \int_x^a f(t)dt$ -gH دیفرانسیل پذیر است و $F'_{gH}(x) = -f(x)$.

۲-۹-۴ قضیه. فرض کنید تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_f$ -gH دیفرانسیل پذیر باشد و نوع دیفرانسیل پذیری آن در بازه $[a, b]$ تغییر نکند در این صورت

$$\int_a^b f'_{gH}(x)dx = f(b) \ominus_{gH} f(a)$$

۲-۹-۳ قضیه. توابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_f$ و $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ که دیفرانسیل پذیر هستند (f تابع -gH دیفرانسیل پذیر) را در نظر بگیرید. در این صورت

$$\int_a^b f'_{gH}(x) \odot g(x)dx = (f(b) \odot g(b)) \ominus_{gH} (f(a) \odot g(a)) \ominus_{gH} \int_a^b f(x) \odot g'(x)dx.$$

که این رابطه نشانگر انتگرال گیری جز به جز از حاصل ضرب یک تابع فازی مقدار و تابع حقیقی می باشد.

۲-۹-۵ معادله انتگرال فازی

معادله انتگرال ولترا را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$y(x) = f(x) \oplus \int_a^x k(x, t)g(t, y(t))dt \quad (9-2)$$

که در آن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_f$ ، $k: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ که $\Delta = \{(x, t) | a \leq t \leq x \leq b\}$ همچنین $g: [a, b] \times \mathbb{R}_f \rightarrow \mathbb{R}_f$ تابعی پیوسته می باشد. شرط وجود و یکتایی جواب معادله (۲-۹) به صورت زیر می باشد.

۲-۹-۵-۱ قضیه. اگر معادله (۲-۹) در شرایط زیر صدق کند:

- i. تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_f$ پیوسته و کراندار باشد.
- ii. تابع $k: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد و $M > 0$ چنان وجود داشته باشد که $\int_0^x D(k(x, t), 0)dt < M$.
- iii. تابع $g: [a, b] \times \mathbb{R}_f \rightarrow \mathbb{R}_f$ پیوسته باشد و در شرط لیپ شیتس صدق کند.
- iv. تابع $g(t, 0)$ بر بازه $[a, b]$ کراندار باشد.

آنگاه یک جواب منحصر بفرد $y(x)$ از معادله (۲-۹) بر $[a, b]$ وجود دارد و همچنین دنباله تکراری

$$y_0(x) = f(x)$$

$$y_{n+1}(x) = f(x) \oplus \int_a^x k(x, t) g(t, y_n(t)) dt \quad (10-2)$$

به جواب معادله بر $[a, b]$ همگرایی یکنواخت دارد.

۱۰-۲ مفاهیم و تعاریف مقدماتی از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری

قبل از مبحث اصلی این پایان نامه، یعنی معادلات دیفرانسیل کسری فازی، ما نیاز به تعریف توابع اساسی در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری داریم. این توابع در مفاهیم و تعاریف بعدی دارای نقش مهمی هستند، پس ابتدا این مفاهیم را تشریح خواهیم کرد [۳۹، ۲۳].

۱-۱۰-۲ تابع گاما^۱

تابع گاما یکی از اصلی ترین توابع در محاسبات کسری می باشد، که به صورت

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad (11-2)$$

تعریف می شود، این فرم از نمایش تابع تنها برای $x > 0$ همگراست. اما می توان با قرار دادن

$$e^{-t} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$$

و n بار انتگرال گرفتن نمایش حدی برای تابع گاما به صورت زیر بدست می آوریم

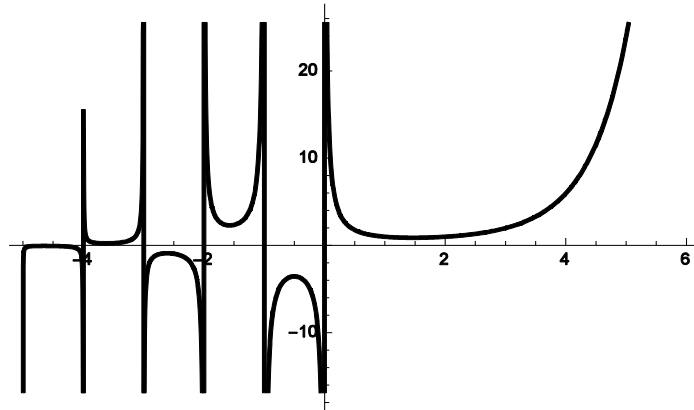
$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

در حالت کلی تابع گاما برای همه $x \in \mathbb{C} - \{-1, -2, -3, \dots\}$ تعریف می شود. برای درک بهتر رفتار این تابع شکل (۳-۲) و (۴-۲) را ببینید.

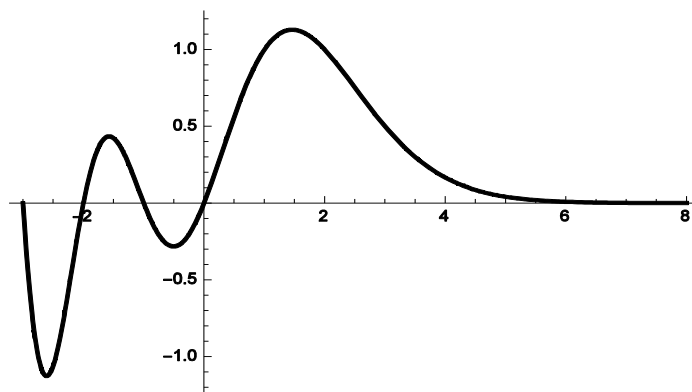
۱-۱-۱۰-۲ ویژگی های تابع گاما

۱. برای $\alpha \in \mathbb{N}$ ، تابع گاما نیز به صورت $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$ تعریف می شود.

۲. اگر $x > 0$ آنگاه $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$



شکل ۲-۳. نمایش تابع $\Gamma(x)$ در دامنه اعداد حقیقی



شکل ۲-۴. نمایش تابع $\frac{1}{\Gamma(x)}$ در دامنه اعداد حقیقی

۲-۱۰-۲ تابع خطا

تابع خطا در محاسبه انتگرال‌های کسری بسیار ظاهر می‌شود، که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

هم چنین چون $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ می‌توان مکمل تابع خطا را به صورت زیر تعریف کرد

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

۲-۱۰-۳ تابع میتگ-لفلر^۱

فرض کنید $\alpha > 0$ ، در این صورت تابع E_α به صورت

$$E_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \quad (۱۲-۲)$$

تعریف می‌شود که تابع میتگ-لفلر از مرتبه α نام دارد.

۲-۱۰-۳-۱ تابع میتگ-لفلر دو پارامتری

فرض کنید $\alpha, \beta > 0$ ، در این صورت تابع $E_{\alpha, \beta}$ به صورت

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)} \quad (۱۳-۲)$$

تعریف می‌شود که تابع میتگ-لفلر دو پارامتری با پارامترهای β, α نام دارد.

با نمادهای تعریف فوق چنانچه فرض کنیم $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$ خواهیم داشت

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{1,2}(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$E_{2,1}(x) = \cosh \sqrt{x}$$

$$E_{2,2}(x) = \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

۲-۱۰-۳-۲ ویژگی‌های تابع میتگ-لفلر

برخی از خصوصیات این تابع را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

1. Mittag-Leffler function

۱. تابع میتگ-لفلر از مرتبه α را می توان از رابطه $E_{\alpha,1}(x) = E_{\alpha}(x)$ به صورت دو پارامتری بیان کرد.

۲. سری توانی $E_{\alpha,\beta}$ اگر $\beta, \alpha > 0$ به ازای همه $x \in \mathbb{C}$ ، همگراست.

۳. برای $x > 0$ داریم $E_{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}) = (1 + \operatorname{erf}(x))e^{x^2}$.

۴. فرض کنید $\beta, \alpha > 0$ در این صورت برای $x \in \mathbb{C}$ داریم

$$E_{\alpha,\beta}(x) = xE_{\alpha,\alpha+\beta}(x) + \frac{1}{\Gamma(\beta)}$$

۲-۱۰-۳ مشتق و انتگرال از تابع میتگ-لفلر

۱. فرض کنید $\alpha > 0$ ، پس مشتق تابع $E_{\alpha}(x^{\alpha})$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\frac{d^m}{dx^m}(E_{\alpha}(x^{\alpha})) = x^{-m}E_{\alpha,1-m}(x^{\alpha})$$

۲. فرض کنید $\alpha, \beta > 0$ ، در این صورت مشتق تابع $E_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\frac{d^m}{dx^m}(x^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})) = x^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}(x^{\alpha})$$

۳. فرض کنید $\alpha > 0$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. در این صورت مشتق کاپچو از تابع $E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha})$ برابر است با

$$D_{*}^{\alpha}(E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha})) = \lambda E_{\alpha}(\lambda x^{\alpha}).$$

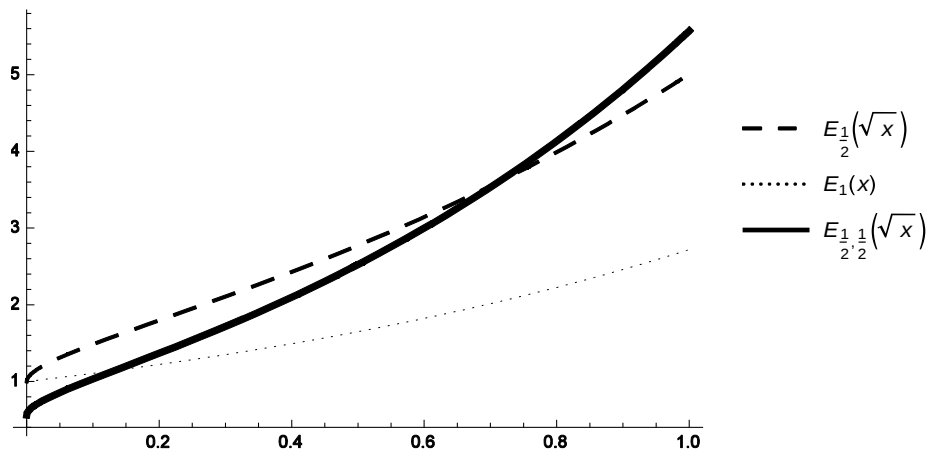
۴. فرض کنید $\alpha > 0$ ، در این صورت انتگرال تابع $E_{\alpha}(x^{\alpha})$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\int_0^x E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}) dt = xE_{\alpha,2}(\lambda x^{\alpha})$$

۵. فرض کنید $\alpha, \beta > 0$ ، پس انتگرال تابع $E_{\alpha,\beta}(x^{\alpha})$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\int_0^x t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) dt = x^{\beta}E_{\alpha,\beta+1}(\lambda x^{\alpha})$$

در این پایان نامه از تابع $E_{\alpha,\beta}(x^\alpha)$ بسیار استفاده شده است، لذا برای درک بهتر رفتار این تابع آن را در شکل (۵-۲) رسم نموده ایم.



شکل ۵-۲. تابع میتگ-لفلر

۴-۱۰-۲ تابع فوق هندسی

تابع فوق هندسی در حالت کلی به صورت ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q; x)$ نمایش داده می شود که می توان به صورت یک سری فوق هندسی به صورت زیر تعریف کرد

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q; x) = \frac{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_q)}{\Gamma(a_1) \dots \Gamma(a_p)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1+k) \dots \Gamma(a_p+k) x^k}{\Gamma(b_1+k) \dots \Gamma(b_q+k) k!}$$

(به شرط که b_i اعداد صحیح نامثبت نباشند). اگر $p \leq q$ به ازای تمام x ها همگراست و اگر $p = q+1$ شعاع همگرایی سری برابر یک است یعنی سری برای $|x| < 1$ همگراست و چنانچه $p > q+1$ سری برای تمام x ها غیر صفر، واگراست.

در حالت خاص اگر $q=1, p=2$ خواهیم داشت

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!} x^k \quad a, b \in \mathbb{R}, -c \notin \mathbb{N}_0$$

که آن را تابع فوق هندسی گاوسی نیز می نامند. اگر $Re(c) > Re(a) > 0$ نمایشی به صورت انتگرال دارد

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} (1-tx)^{-b} dt$$

در حالت خاص، اگر $Re(c) > Re(a+b) > 0$ و c عدد صحیح نامثبت نباشد، داریم

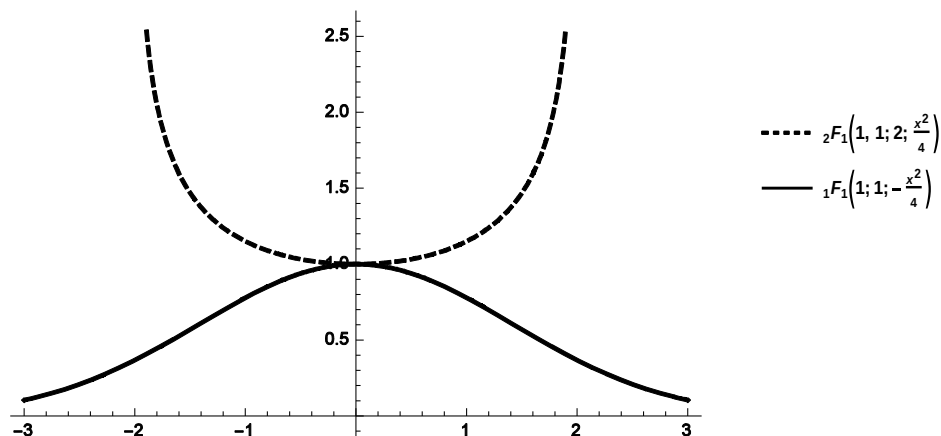
$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

و یا اگر $p=q=1$ و خواهیم داشت

$${}_1F_1(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)k!} x^k \quad a \in \mathbb{R}, -b \notin \mathbb{N}_0$$

که تابع ${}_1F_1$ به تابع کومر نیز معروف است. اگر $Re(c) > Re(a) > 0$ ، نمایش انتگرالی زیر را داریم

$${}_1F_1(a, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} e^{xt} dt$$



شکل ۶-۲. نمایش توابع فوق هندسی گاوسی ${}_2F_1$ و کومر ${}_1F_1$

۵-۱۰-۲ انتگرال ریمان-لیوویل

فرض کنید تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ لَبگ انتگرال پذیر و پیوسته باشد. در این صورت انتگرال ریمان-لیوویل

تابع f با نماد J_a^α نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

۲-۱۰-۶ مشتق ریمان-لیوویل

فرض کنید تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ لبگ انتگرال پذیر و پیوسته باشد. در این صورت انتگرال ریمان-لیوویل تابع f با نماد J_a^α نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dx^m} \int_a^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t) dt \quad m-1 \leq \alpha < m.$$

۲-۱۰-۷ مشتق کسری کاپچو

فرض کنید $f^{(m)}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع لبگ انتگرال پذیر و پیوسته باشد. در این صورت مشتق کسری کاپچو تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود

$$(D_*^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(m-\alpha-1)} f^{(m)}(t) dt \quad m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, t > a \quad (14-2)$$

فصل سوم

مشتق کسری تعمیم یافته فازی از نوع کاپچو

۳-۱ مقدمه

در این فصل ابتدا مفهوم مشتق کسری کاپچو را با استفاده از مفهوم مشتق تعمیم یافته هاکوهارا تعریف می‌نماییم. سپس قواعد مشتق گیری کسری کاپچو از یک تابع فازی مقدار را بیان کنیم. این قواعد شامل مشتق از مجموع، حاصل ضرب و تفاضل بین دو تابع می‌باشد. همچنین روابطی را که بین مشتق کاپچو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل وجود دارد را برای توابع فازی مقدار اثبات می‌کنیم. همچنین قضیه مقدار متوسط و مقدار میانی انتگرال را برای توابع فازی بیان می‌کنیم و با این مفاهیم، قضیه مقدار میانی را برای انتگرال کسری ریمان-لیوویل فازی بدست می‌آوریم. همچنین قضیه تیلور را برای مشتق کسری کاپچو به اثبات می‌رسانیم. سپس با استفاده از خواص توابع دیفرانسیل پذیر کاپچو، بسط تیلور تعمیم یافته فازی را برای انواع دیفرانسیل پذیری ارائه می‌نمائیم.

۳-۲ انتگرال ریمان-لیوویل فازی

فرض کنید $f \in C_{\mathbb{F}}[a,b] \cap L_{\mathbb{F}}[a,b]$ یک تابع فازی مقدار باشد. در این صورت انتگرال ریمان-لیوویل فازی از تابع f به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۱]

$$(J_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a, \quad (1-3)$$

برای $\alpha=1$ داریم $J_a^1 = I$. اگر فرض کنید که r -برش تابع f به صورت $f(x; r) = [f_r^-(x), f_r^+(x)]$ باشد پس می توان نوشت

$$(J_a^\alpha f)(x; r) = [(J_a^\alpha f_r^-)(x), (J_a^\alpha f_r^+)(x)] \quad 0 \leq r \leq 1.$$

تعاریف و مفاهیمی که از این بخش به بعد بیان می شوند، در مراجع [۷، ۹، ۱۵] بررسی شده است.

۳-۳ مشتق تعمیم یافته ها کوهارا کسری کاپچو

فرض کنید $f_{gH}^{(m)} \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$. مشتق تعمیم یافته ها کوهارا کسری کاپچواز تابع فازی مقدار f) $[gH]^{-cf}$ دیفرانسیل پذیری) به صورت تعریف می شود

(۲-۳)

$${}_{gH}D_*^\alpha f(x) = J_a^{m-\alpha}(f_{gH}^{(m)})(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(m-\alpha-1)} f_{gH}^{(m)}(t) dt \quad m-1 < \alpha \leq m, m \in \mathbb{N}, x > a$$

بنابراین اگر $0 < \alpha \leq 1$ داریم

$${}_{gH}D_*^\alpha f(x) = J_a^{1-\alpha}(f'_{gH})(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f'_{gH}(t) dt, \quad x > a \quad (3-3)$$

۳-۳-۱ قضیه. فرض کنید $f'_{gH} \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ و به ازای هر $a \leq x \leq b$ و $0 \leq r \leq 1$ داشته باشیم

$f(x; r) = [f_r^-(x), f_r^+(x)]$. در این صورت اگر $f_r^-(x)$ و $f_r^+(x)$ توابعی مشتق پذیر کاپچو از مرتبه

$\alpha \in (0, 1]$ باشند در این صورت تابع فازی مقدار f $[gH]^{-cf}$ دیفرانسیل پذیر می باشد. همچنین

$$({}_{gH}D_*^\alpha f)(x; r) = [\min\{(D_*^\alpha f_r^-)(x), (D_*^\alpha f_r^+)(x)\}, \max\{(D_*^\alpha f_r^-)(x), (D_*^\alpha f_r^+)(x)\}], \quad 0 \leq r \leq 1$$

که در آن نماد D_*^α در تعریف (۲-۱۰-۷) بیان شده است.

اثبات: طبق فرض $f_r^-(x)$ و $f_r^+(x)$ توابع دیفرانسیل پذیر کاپچو از مرتبه α باشند لذا طبق رابطه (۲-۱۴) توابعی مشتق پذیر هستند پس طبق قضیه (۲-۸-۶-۱) تابع فازی مقدار f - gH دیفرانسیل پذیر می باشد از این رو با توجه به رابطه (۳-۲) تابع f - gH دیفرانسیل پذیر می باشد.

حال با جای گذاری (۲-۸) در (۳-۲) داریم

$$({}_{gH}D_*^\alpha f)(x;r) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} [\min\{(f_r^-)'(t), (f_r^+)'(t)\}, \max\{(f_r^-)'(t), (f_r^+)'(t)\}] dt$$

چون $a < t < x$ و $\Gamma(1-\alpha) > 0$ داریم که

$$({}_{gH}D_*^\alpha f)(x;r) = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \min\left\{ \int_a^x \frac{(f_r^-)'(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \int_a^x \frac{(f_r^+)'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right\}, \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \max\left\{ \int_a^x \frac{(f_r^-)'(t)}{(x-t)^\alpha} dt, \int_a^x \frac{(f_r^+)'(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right\} \right]$$

بنابراین

$$({}_{gH}D_*^\alpha f)(x;r) = [\min\{(D_*^\alpha f_r^-)(x), (D_*^\alpha f_r^+)(x)\}, \max\{(D_*^\alpha f_r^-)(x), (D_*^\alpha f_r^+)(x)\}] \quad 0 \leq r \leq 1$$

□

۳-۳-۲ تعریف. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ در نقطه $x_0 \in (a, b)$ - gH دیفرانسیل پذیر از مرتبه α باشد. در این صورت

○ تابع f در نقطه $x_0 \in (a, b)$ ، $[(i) - gH]$ - cf دیفرانسیل پذیر می باشد اگر

$$(i) \quad ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x_0;r) = [(D_*^\alpha f_r^-)(x_0), (D_*^\alpha f_r^+)(x_0)], \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (۳-۴)$$

○ تابع f در نقطه $x_0 \in (a, b)$ ، $[(ii) - gH]$ - cf دیفرانسیل پذیر می باشد اگر

$$(ii) \quad ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x_0;r) = [(D_*^\alpha f_r^+)(x_0), (D_*^\alpha f_r^-)(x_0)], \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (۳-۵)$$

که در آن

$$(D_*^\alpha f_r^-)(x_0) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(m-\alpha-1)} (f_r^-)'(t) dt$$

$$(D_*^\alpha f_r^+)(x_0) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(m-\alpha-1)} (f_r^+)'(t) dt$$

۳-۳-۳ تعریف. نقطه $x_0 \in (a, b)$ نقطه تعویض نوع ${}^{cf}[gH]$ -دیفرانسیل پذیری f است، اگر برای هر همسایگی V از x_0 نقاط $x_1 < x_0 < x_2$ موجود باشد به طوری که

○ (نقطه تعویض نوع I) در نقطه x_1 (۳-۴) برقرار باشد و (۳-۵) برقرار نباشد در نقطه x_2 (۳-۵) برقرار باشد و (۳-۴) برقرار نباشد.

○ (نقطه تعویض نوع II) در نقطه x_1 (۳-۵) برقرار باشد و (۳-۴) برقرار نباشد در نقطه x_2 (۳-۴) برقرار باشد و (۳-۵) برقرار نباشد.

۴-۳-۳ تعریف. فرض کنید $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ یک بردار باشد بطوریکه f_i به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ توابع فازی مقدار باشند. اگر به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم $f_i^{(m)} \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ آنگاه مشتق تعمیم یافته هاکوها را کسری کاپچواژ بردار فازی مقدار $F(x)$ به صورت تعریف می شود

$${}_{gH}D_*^\alpha F(x) = ({}_{gH}D_*^\alpha f_1(x), {}_{gH}D_*^\alpha f_2(x), \dots, {}_{gH}D_*^\alpha f_n(x))^t$$

○ اگر نوع ${}^{cf}[gH]$ -دیفرانسیل پذیری توابع f_i به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ ${}^{cf}[(i)-gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه بردار $F(x)$ را ${}^{cf}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر گوئیم.

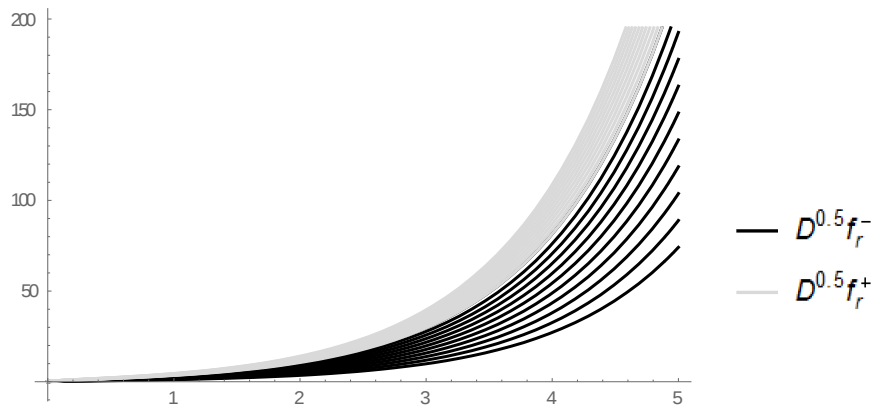
○ اگر نوع ${}^{cf}[gH]$ -دیفرانسیل پذیری توابع f_i به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ ${}^{cf}[(ii)-gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه بردار $F(x)$ را ${}^{cf}[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر گوئیم.

○ اگر نوع ${}^{cf}[gH]$ -دیفرانسیل پذیری توابع f_i به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ همگی یکسان نباشد آنگاه بردار $F(x)$ را ${}^{cf}[gH]$ -دیفرانسیل پذیر ترکیبی گوئیم.

۵-۳-۳ مثال. تابع $f: [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را با ضابطه $f(x) = (0.5, 1.5, 2)e^x$ در نظر بگیرید. در این صورت طبق قضیه (۲-۶-۸-۲) داریم $f'_{gH}(x) = (0.5, 1.5, 2)e^x$. پس از تعریف (۲-۳) داریم

$$\begin{aligned}
{}_{gH}D_*^{0.5} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} f'_{gH}(t) dt \\
&= \frac{(0.5, 1.5, 2)}{\Gamma(0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} e^t dt \\
&= (1, 3, 4) \sqrt{\frac{x}{\pi}} e^x {}_1F_1[0.5, 1.5, -x]
\end{aligned}$$

همانطور که در شکل (۱-۳) واضح است بر بازه $[0, 5]$ تابع $f - {}^{cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر می باشد.

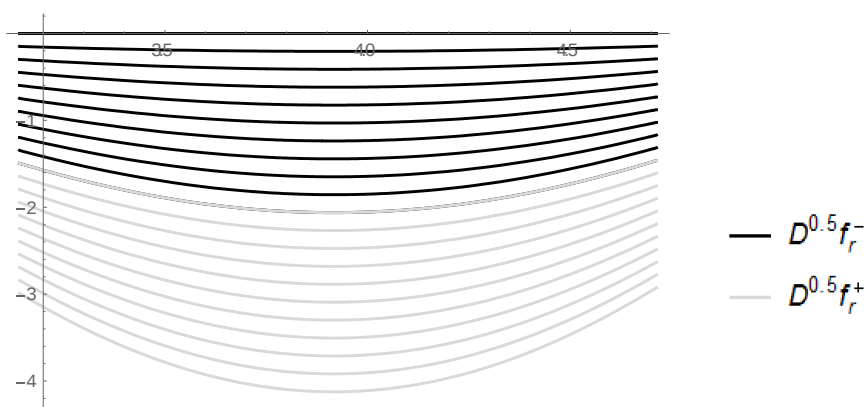


شکل ۱-۳. نمایش مشتق کسری تعمیم یافته هاوارا کاپچو از نوع (i)

۳-۳-۶ مثال. تابع $f: [\pi, \frac{3\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ را با ضابطه $f(x) = (0, 1, 2) \sin x$ در نظر بگیرید. در این صورت طبق قضیه (۲-۶-۸-۲) داریم $f'_{gH}(x) = (0, 1, 2) \cos x$. با توجه به (۲-۳) می توان نوشت

$$\begin{aligned}
{}_{gH}D_*^{0.5} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} f'_{gH}(t) dt \\
&= \frac{(0, 1, 2)}{\Gamma(0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} \cos t dt \\
&= (0, 2, 4) \sqrt{\frac{x}{\pi}} {}_1F_2[1, 1.25, 0.75, -\frac{x^2}{4}]
\end{aligned}$$

این تابع بر بازه $[\pi, 3\pi/2]$ $[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر می باشد. شکل (۲-۳) را ببینید.

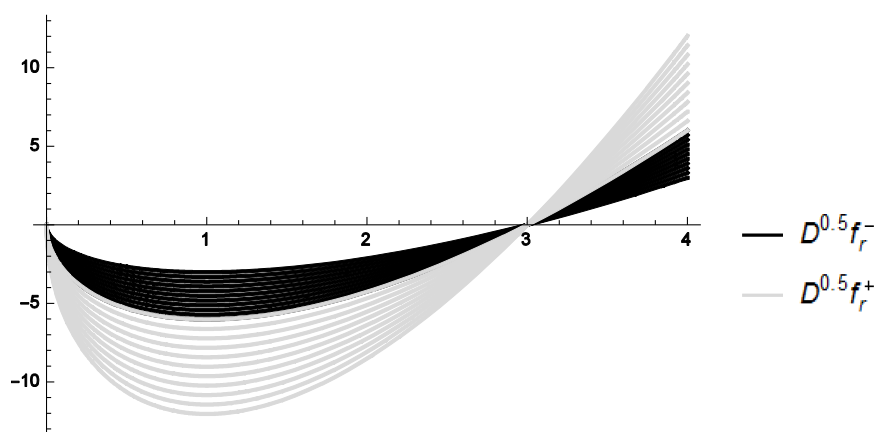


شکل ۳-۲. نمایش مشتق کسری تعمیم یافته هاوارا کاپچو از نوع (ii)

۳-۳-۷ مثال. تابع $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}_F$ را با ضابطه $f(x) = (0.25, 0.5, 1)(x^2 - 4x + 3)$ در نظر بگیرید. در این صورت طبق قضیه (۲-۶-۸-۲) داریم $f'_{gH}(x) = (0.25, 0.5, 1)(2x - 4)$ و از رابطه (۲-۳) می توان نوشت

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^{0.5}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} f'_{gH}(t) dt \\ &= \frac{(0.25, 0.5, 1)}{\Gamma(0.5)} \int_0^x (x-t)^{-0.5} (2t-4) dt = (2, 4, 8) \sqrt{\frac{x}{\pi}} \left(\frac{x}{3} - 1 \right) \end{aligned}$$

همان طور که در شکل (۳-۳) می بینید، این تابع بر بازه $[0, 4]$ دارای نقطه تعویض است و نوع دیفرانسیل پذیری آن در نقطه $x=3$ از نوع (ii) به (i) تعویض می شود.



شکل ۳-۳. نمایش تعویض نوع کاپچو دیفرانسیل پذیری از نوع (ii) به (i)

۴-۳ ویژگی های انتگرال ریمان-لیوویل فازی و مشتق کسری تعمیم یافته هاگوارا کاپچو

در این بخش به بررسی خصوصیات مشتق و انتگرال کسری از توابع فازی مقدار، از جمله مشتق کسری تعمیم یافته هاگوارا کاپچو از تابع ثابت، حاصل ضرب اسکالر فازی در تابع حقیقی، حاصل ضرب اسکالر حقیقی در تابع فازی، مجموع و تفاضل دو تابع فازی می پردازیم و چندین ویژگی بنیادی که بین مشتق و انتگرال کسری فازی وجود دارد را بیان می کنیم.

۴-۳-۱. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع ثابت باشد. در این صورت $({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) = 0$

اثبات. فرض کنید به ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f(x) = c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. بنابراین با توجه به رابطه (۲-۳) داریم

$$({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'_{gH}(t)}{(x-t)^\alpha} dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{0}{(x-t)^\alpha} dt = 0$$

□

۴-۳-۲. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ تابع حقیقی مقدار پیوسته و لبگ انتگرال پذیر است، به طوریکه $f'(x)$ بر بازه (a, b) تغییر علامت ندهد. در این صورت برای $c \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ داریم

$${}_{gH}D_*^\alpha (c \odot f(x)) = c \odot D_*^\alpha f(x)$$

اثبات. طبق قسمت (۲-۶-۸-۲) و با جای گذاری در رابطه (۲-۳) و خصوصیت سوم انتگرال داریم

$$({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{c \odot f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x-t)^\alpha} dt = c \odot (D_*^\alpha f)(x)$$

□

۴-۳-۳. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ پیوسته و لبگ انتگرال پذیر باشد. در این صورت ${}_{gH}D_*^\alpha f(a) = 0$ و ${}_{gH}D_*^\alpha f \in C_{\mathbb{R}}[a, b]$.

اثبات. با توجه به رابطه (۲-۳) چون تابع f پیوسته است پس ${}_{gH}D_*^\alpha f$ نیز پیوسته می باشد. همچنین

$${}_{gH}D_*^\alpha f(a) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^a \frac{f'_{gH}(t)}{(a-t)^\alpha} dt = 0.$$

□

۳-۴-۱۶. فرض کنید $\alpha, \beta > 0$ و $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع فازی مقدار است به طوری که $f \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ در این صورت

$$J_a^{\alpha} J_a^{\beta} f = J_a^{\alpha+\beta} f$$

۳-۴-۵. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع فازی مقدار است به طوری که $f'_{gH} \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ در این صورت

$$J_a^{\alpha} ({}_{gH}D_*^{\alpha} f)(x) = f(x) \ominus_{gH} f(a)$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۳-۲) و لم (۳-۴-۱) می توان نوشت

$$J_a^{\alpha} ({}_{gH}D_*^{\alpha} f)(x) = J_a^{\alpha} (J_a^{1-\alpha} f'_{gH})(x) = \int_a^x f'_{gH}(t) dt$$

ابتدا فرض کنید f بر بازه (a, b) ، $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha} ({}_{gH}D_*^{\alpha} f)(x; r) &= \int_a^x f'_{gH}(t; r) dt = \int_a^x [(f_r^-)'(t), (f_r^+)'(t)] dt = [\int_a^x (f_r^-)'(t) dt, \int_a^x (f_r^+)'(t) dt] \\ &= [f_r^-(x) - f_r^-(a), f_r^+(x) - f_r^+(a)] = f(x) \ominus f(a) \end{aligned}$$

و اگر f بر بازه (a, b) ، $-(ii) - gH$ دیفرانسیل پذیر باشد داریم

$$\begin{aligned} J_a^{\alpha} ({}_{gH}D_*^{\alpha} f)(x; r) &= \int_a^x f'_{gH}(t; r) dt = \int_a^x [(f_r^+)'(t), (f_r^-)'(t)] dt = [\int_a^x (f_r^+)'(t) dt, \int_a^x (f_r^-)'(t) dt] \\ &= [f_r^+(x) - f_r^+(a), f_r^-(x) - f_r^-(a)] = (-1)f(a) \ominus (-1)f(x) \end{aligned}$$

□

۳-۴-۶. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع فازی مقدار است به طوری که $f \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ در این صورت

$${}_{gH}D_*^{\alpha} J_a^{\alpha} f = f$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۳-۲) و قضیه (۲-۸-۶-۲) داریم

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^\alpha J_a^\alpha f(x) &= J_a^{1-\alpha} (J_a^\alpha f)'_{gH}(x) = J_a^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt \right)'_{gH} \\ &= J_a^{1-\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \right) \end{aligned}$$

حال از خصوصیات تابع گاما و لم (۳-۴-۴) داریم

$${}_{gH}D_*^\alpha (J_a^\alpha f)'_{gH}(x) = J_a^{1-\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-2} f(t) dt \right) = J_a^{1-\alpha} (J_a^{\alpha-1} f)'(x) = f(x)$$

□

۳-۴-۷ لم. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع فازی مقدار است به طوری که $f_{gH}^{(m)} \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ و β, α را چنان در نظر بگیرید که $0 < \alpha \leq 1, \beta > 0$ و $k-1 \leq \alpha + \beta \leq k$ که در آن $k \in \mathbb{N}, k \leq m$ باشد. در این صورت

$${}_{gH}D_*^\alpha {}_{gH}D_*^\beta f = {}_{gH}D_*^{\alpha+\beta} f$$

اثبات. برای اثبات این خاصیت سه حالت زیر را در نظر می گیریم.

۱. $[\beta] = \alpha + \beta$: با استفاده از رابطه (۳-۲) و لم های (۳-۴-۳) و (۳-۴-۶) بدست می آوریم

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^\alpha {}_{gH}D_*^\beta f &= {}_{gH}D_*^\alpha J_a^{[\beta]+1-\beta} {}_{gH}D^{[\beta]+1} f = {}_{gH}D_*^\alpha J_a^{\alpha+1} {}_{gH}D^{[\beta]+1} f \\ &= {}_{gH}D_*^\alpha J_a^{\alpha+1} {}_{gH}D^{\alpha+\beta+1} f = {}_{gH}D_*^{\alpha+\beta} f \end{aligned}$$

۲. $\beta \in \mathbb{N}$: در این حالت با رابطه (۳-۲) داریم

$${}_{gH}D_*^\alpha {}_{gH}D^\beta f = J_a^{1-\alpha} {}_{gH}D^{1+\beta} f = {}_{gH}D_*^{\alpha+\beta} f$$

۳. $[\beta] = [\alpha + \beta]$: از رابطه (۳-۲) و لم (۳-۴-۴) می توان نوشت

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^\alpha {}_{gH}D_*^\beta f &= {}_{gH}D_*^\alpha J_a^{[\beta]+1-\beta} {}_{gH}D^{[\beta]+1} f = J_a^{1-\alpha} J_a^{[\beta]-\beta} {}_{gH}D^{[\beta]+1} f \\ &= J_a^{1+[\alpha+\beta]-(\alpha+\beta)} {}_{gH}D^{[\alpha+\beta]+1} f = {}_{gH}D_*^{\alpha+\beta} f \end{aligned}$$

□

۳-۴-۸. لم. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $f'_{gH}, g'_{gH} \in C_{\mathbb{F}}[a, b] \cap L_{\mathbb{F}}[a, b]$. اگر g, f هر دو $-^{cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر یا هر دو $-^{cf}[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند و c_1, c_2 ثابت های حقیقی باشند در این صورت

$${}_{gH}D_*^\alpha (c_1 \odot f(x) \oplus c_2 \odot g(x)) = c_1 \odot {}_{gH}D_*^\alpha f(x) \oplus c_2 \odot {}_{gH}D_*^\alpha g(x)$$

اثبات. با استفاده از تعریف اپراتور ${}_{gH}D_*^\alpha$ و قسمت (۲-۸-۶-۳) و خصوصیت اول انتگرال داریم

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^\alpha (c_1 \odot f(x) \oplus c_2 \odot g(x)) &= J_a^{1-\alpha} (c_1 \odot f(x) \oplus c_2 \odot g(x))'_{gH} \\ &= c_1 \odot J_a^{1-\alpha} f'_{gH}(x) \oplus c_2 \odot J_a^{1-\alpha} g'_{gH}(x) \\ &= c_1 \odot {}_{gH}D_*^\alpha f(x) \oplus c_2 \odot {}_{gH}D_*^\alpha g(x) \end{aligned}$$

□

۳-۴-۹. لم. فرض کنید $f, g \in C_{\mathbb{F}}[a, b] \cap L_{\mathbb{F}}[a, b]$ بطوری که $f(x) \ominus_{gH} g(x)$ به ازای هر $x \in [a, b]$ موجود باشد، در این صورت

$$J_a^\alpha (f(x) \ominus_{gH} g(x)) = J_a^\alpha f(x) \ominus_{gH} J_a^\alpha g(x)$$

اثبات. فرض کنید $f(x) \ominus_{gH} g(x)$ از نوع اول باشد یعنی

$$f(x) \ominus_{gH} g(x) = [(f_r^-)(x) - (g_r^-)(x), (f_r^+)(x) - (g_r^+)(x)] \quad 0 \leq r \leq 1$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} J_a^\alpha (f(x) \ominus_{gH} g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [(f_r^-)(t) - (g_r^-)(t), (f_r^+)(t) - (g_r^+)(t)] dt, \quad 0 \leq r \leq 1 \\ &= [J_a^\alpha (f_r^-)(x) - J_a^\alpha (g_r^-)(x), J_a^\alpha (f_r^+)(x) - J_a^\alpha (g_r^+)(x)], \quad 0 \leq r \leq 1 \\ &= J_a^\alpha f(x) \ominus J_a^\alpha g(x) \end{aligned}$$

حال فرض کنید $f(x) \ominus_{gH} g(x)$ از نوع دوم باشد یعنی

$$f(x) \ominus_{gH} g(x) = [(f_r^+)(x) - (g_r^+)(x), (f_r^-)(x) - (g_r^-)(x)] \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\begin{aligned}
J_a^\alpha (f(x) \ominus_{gH} g(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} [(f_r^+)(t) - (g_r^+)(t), (f_r^-)(t) - (g_r^-)(t)] dt, \quad 0 \leq r \leq 1 \\
&= [J_a^\alpha (f_r^+)(x) - J_a^\alpha (g_r^+)(x), J_a^\alpha (f_r^-)(x) - J_a^\alpha (g_r^-)(x)], \quad 0 \leq r \leq 1 \\
&= (-1)J_a^\alpha g(x) \ominus (-1)J_a^\alpha f(x)
\end{aligned}$$

□

۳-۴-۱۰. لم. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $f, g \in C_{\mathbb{F}}[a, b] \cap L_{\mathbb{F}}[a, b]$ بطوری که $f(x) \ominus_{gH} g(x)$ به ازای هر $x \in [a, b]$ موجود باشد و توابع f, g هر دو ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر یا هر دو ${}^{cf}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند در این صورت

$${}_{gH}D_*^\alpha (f(x) \ominus_{gH} g(x)) = {}_{gH}D_*^\alpha f(x) \ominus_{gH} {}_{gH}D_*^\alpha g(x)$$

اثبات. با استفاده از تعریف اپراتور ${}_{gH}D_*^\alpha$ و قسمت (۲-۶-۴) و لم (۳-۴-۹) داریم

$$\begin{aligned}
{}_{gH}D_*^\alpha (f(x) \ominus_{gH} g(x)) &= J_a^{1-\alpha} (f(x) \ominus_{gH} g(x))'_{gH} = J_a^{1-\alpha} (f'_{gH}(x) \ominus_{gH} g'_{gH}(x)) \\
&= J_a^{1-\alpha} f'_{gH}(x) \ominus_{gH} J_a^{1-\alpha} g'_{gH}(x) = {}_{gH}D_*^\alpha f(x) \ominus_{gH} {}_{gH}D_*^\alpha g(x)
\end{aligned}$$

□

۳-۴-۱۱. مثال. توابع $f, g : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ با ضابطه $f(x) = (2, 3, 4) \sin x$ و $g(x) = (1, 1.5, 2)x^2$ در نظر بگیرید. پس داریم

$$f'_{gH}(x) = (2, 3, 4) \cos x \quad g'_{gH}(x) = (2, 3, 4)x$$

لذا

$$\begin{aligned}
{}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} (f \oplus g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left((4, 6, 8) \sqrt{x_1} F_2[1, 1.25, 1.75, -\frac{x^2}{4}] \oplus (\frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}) x \sqrt{x} \right) \\
{}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} (f \ominus_{gH} g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left((4, 6, 8) \sqrt{x_1} F_2[1, 1.25, 1.75, -\frac{x^2}{4}] \ominus (\frac{8}{3}, 4, \frac{16}{3}) x \sqrt{x} \right)
\end{aligned}$$

۳-۵ قضیه مقدار میانی فازی برای انتگرال ریمان-لیوویل

در این بخش، قضیه مقدار میانی را برای انتگرال کسری ریمان-لیوویل بدست می‌آوریم. برای این منظور باید قضیه مقدار میانی را برای انتگرال فازی داشته باشیم که این مهم با اثبات قضیه مقدار متوسط فازی اتفاق افتاد. در این قضایا به رابطه ترتیبی بین اعداد فازی نیاز داریم که از تعریف ارائه شده در [۳۱] استفاده می‌کنیم.

۳-۵-۱ رابطه ترتیب در مجموعه اعداد فازی

۳-۵-۱-۱ تعریف. رابطه‌ی ترتیب بین دو عدد فازی u و v با r -برش‌های $[u]^r = [u_r^-, u_r^+]$ و $[v]^r = [v_r^-, v_r^+]$ به صورت زیر تعریف می‌شود

○ گوئیم $u \leq v$ اگر و تنها اگر به ازای همه مقادیر $0 \leq r \leq 1$ داشته باشیم $u_r^- \leq v_r^-$ و $u_r^+ \leq v_r^+$

○ گوئیم $u < v$ اگر و تنها اگر به ازای همه مقادیر $0 \leq r \leq 1$ داشته باشیم $u_r^- < v_r^-$ و $u_r^+ < v_r^+$

۳-۵-۱-۲ گزاره. اگر $u \leq v$ آنگاه $-v \leq -u$.

اثبات. با توجه به تعریف (۳-۵-۱-۱)، به ازای مقادیر $0 \leq r \leq 1$ ، برای اثبات داریم

$$u_r^- \leq v_r^-, \quad u_r^+ \leq v_r^+$$

پس

$$-v_r^- \leq -u_r^-, \quad -v_r^+ \leq -u_r^+$$

بنابراین $-v \leq -u$ و حکم برقرار است.

□

۳-۵-۱-۳ گزاره. اگر $u \leq v$ و $v \leq u$ آنگاه $u = v$.

اثبات. با استفاده از فرضیات و تعریف (۳-۵-۱-۱)، به ازای همه مقادیر $0 \leq r \leq 1$ داریم

$$u_r^- \leq v_r^-, \quad u_r^+ \leq v_r^+, \quad v_r^- \leq u_r^-, \quad v_r^+ \leq u_r^+$$

پس به ازای همه مقادیر $0 \leq r \leq 1$ داریم $u_-(r) = v_-(r)$, $u_+(r) = v_+(r)$ ، که از آن قضیه اثبات می‌شود.

□

۳-۵-۱-۴ گزاره. فرض کنید $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_f$ دو تابع پیوسته فازی باشند. اگر به ازای همه مقادیر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

اثبات. با توجه به تعریف (۳-۵-۱-۱) از فرضیات به ازای $\forall x \in [a, b], \forall r \in [0, 1]$ می‌توان نتیجه گرفت

$$f_-(x; r) \leq g_-(x; r), \quad f_+(x; r) \leq g_+(x; r),$$

پس از یکنوا بودن انتگرال داریم

$$\int_a^b f_-(x; r) dx \leq \int_a^b g_-(x; r) dx, \quad \int_a^b f_+(x; r) dx \leq \int_a^b g_+(x; r) dx,$$

پس حکم ثابت است.

□

۳-۵-۲ قضیه مقدار متوسط فازی

در این بخش قضیه مقدار متوسط را برای توابع فازی پیوسته بیان می‌کنیم.

۳-۵-۲-۱ قضیه. تابع فازی مقدار $f(x)$ را بر $[a, b]$ در نظر بگیرید. در این صورت به ازای هر عدد فازی مانند γ که $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ ، حداقل وجود دارد یک $c \in [a, b]$ به طوری که $f(c) = \gamma$.

اثبات. قرار دهید

$$S = \{x \mid x \in [a, b], f(x) \leq \gamma\}.$$

چون S یک مجموعه غیر تهی و از بالا کراندار با b است، پس سوپریم S وجود دارد که یک عدد حقیقی می‌باشد. فرض کنید $c = \sup S$.

ابتدا $f(c) > \gamma$ را در نظر بگیرید. پس از تعریف (۳-۵-۱-۱) به ازای همه مقادیر $0 \leq r \leq 1$ داریم

$$f_r^-(c) > \gamma_r^-, \quad f_r^+(c) > \gamma_r^+$$

علاوه بر این به دلیل اینکه f تابعی پیوسته فازی است لذا

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x (|x - c| < \delta \Rightarrow D(f(x), f(c)) < \epsilon). \quad (6-3)$$

به ازای هر مقدار ثابت $0 \leq r \leq 1$ قرار دهید $\epsilon = \min\{f_r^-(c) - \gamma_r^-, f_r^+(c) - \gamma_r^+\}$ ، پس از تعریف متر هاسدورف داریم

$$|f_r^-(x) - f_r^-(c)| < \epsilon \Rightarrow f_r^-(x) > f_r^-(c) - \epsilon \geq \gamma_r^- \quad (7-3)$$

و

$$|f_r^+(x) - f_r^+(c)| < \epsilon \Rightarrow f_r^+(x) > f_r^+(c) - \epsilon \geq \gamma_r^+ \quad (8-3)$$

با توجه به معادلات (۸-۳) و (۷-۳)، به ازای همه مقادیر $x \in (c - \delta, c + \delta)$ نتیجه می گیریم که $f_r^+(x) > \gamma_r^+$ ، $f_r^-(x) > \gamma_r^-$ که این ایجاب می کند $c - \delta$ یک کران بالا برای S باشد که با سوپریمم بودن c در تناقض است زیرا هیچ نقطه ای در بازه $(c - \delta, c]$ که $f_r^-(x) > \gamma_r^-$ ، $f_r^+(x) > \gamma_r^+$ نمی تواند متعلق به S باشد. چون $0 \leq r \leq 1$ دلخواه بود پس می توان نتیجه گرفت که به ازای هر $0 \leq r \leq 1$ داریم

$$f_r^-(x) \leq \gamma_r^-, \quad f_r^+(x) \leq \gamma_r^+$$

پس بنابر تعریف (۱-۱-۵-۳) می توان نتیجه گرفت $f(c) \leq \gamma$.

حال فرض کنید $f(c) < \gamma$. مجدداً از پیوستگی و خصوصیات متر هاسدورف به ازای هر $0 \leq r \leq 1$ دلخواه و از این به بعد ثابت از معادله (۶-۳) می توان نتیجه گرفت که

$$|f_r^-(x) - f_r^-(c)| < \epsilon \Rightarrow f_r^-(x) < f_r^-(c) + \epsilon \leq \gamma_r^- \quad (9-3)$$

و

$$|f_r^+(x) - f_r^+(c)| < \epsilon \Rightarrow f_r^+(x) < f_r^+(c) + \epsilon \leq \gamma_r^+ \quad (10-3)$$

پس با توجه به معادلات (۱۰-۳) و (۹-۳) به ازای همه مقادیر $x \in (c - \delta, c + \delta)$ داریم

$$f_r^-(x) < \gamma_r^-, \quad f_r^+(x) < \gamma_r^+$$

و بنابراین $c + \frac{\delta}{2} \in \mathcal{S}$ که این در تناقض با مفهوم سوپریمم بودن c است. چون r دلخواه بود پس به ازای هر $0 \leq r \leq 1$ داریم

$$f_r^-(x) \geq \gamma_r^-, \quad f_r^+(x) \geq \gamma_r^+$$

پس $f(c) \geq \gamma$. بنابراین با توجه به گزاره (۳-۱-۵-۳) نتیجه می‌گیریم $f(c) = \gamma$. □

۳-۵-۳ قضیه مقدار میانی انتگرال فازی

در این بخش قضیه مقدار میانی انتگرال از حاصل ضرب یک تابع فازی و یک تابع حقیقی را ثابت می‌کنیم.

۳-۵-۳-۱ قضیه. فرض کنید که $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی پیوسته فازی باشد به طوری که به ازای همه مقادیر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(a) \preceq f(x) \preceq f(b)$ ، همچنین $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی انتگرال پذیر در بازه $[a, b]$ باشد. در این صورت حداقل یک $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

اثبات. ابتدا فرض کنید $g(x) > 0$ پس با توجه به گزاره (۳-۱-۵-۳) و فرضیات قضیه داریم

$$\int_a^b f(a)g(x)dx \preceq \int_a^b f(x)g(x)dx \preceq \int_a^b f(b)g(x)dx$$

پس با توجه به ویژگی (۳) انتگرال و مثبت بودن انتگرال $g(x)$ بر بازه $[a, b]$ داریم

$$f(a) \preceq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \preceq f(b)$$

با توجه به قضیه (۱-۲-۵-۳) حداقل یک $c \in [a, b]$ وجود دارد به طوری که

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

حال فرض کنید $g(x) < 0$ پس با توجه به گزاره‌های (۳-۱-۵-۳) و (۳-۱-۵-۳) می‌توان نوشت

$$\int_a^b f(b)g(x)dx \preceq \int_a^b f(x)g(x)dx \preceq \int_a^b f(a)g(x)dx$$

از ویژگی (۳) انتگرال و منفی بودن انتگرال $g(x)$ بر بازه $[a, b]$ داریم

$$f(a) \preceq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \preceq f(b)$$

لذا طبق قضیه (۳-۵-۲-۱) وجود دارد حداقل یک $c \in [a, b]$ چنان که

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$$

و این یعنی

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

□

حال قضیه مورد نیاز برای اثبات قضیه مقدار میانی برای انتگرال کسری ریمان-لیوویل از حاصل ضرب تابع فازی مقدار و یک تابع حقیقی را ثابت کرده‌ایم. از این رو در قضیه زیر این نظریه مهم را بیان می‌کنیم.

۳-۵-۴ قضیه. فرض کنید $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_F$ تابعی پیوسته فازی باشد به طوری که $f \in C_{\mathbb{F}}[a, b] \cap L_{\mathbb{F}}[a, b]$ و به ازای همه مقادیر $x \in [a, b]$ داشته باشیم $f(a) \preceq f(x) \preceq f(b)$ ، همچنین g یک تابع حقیقی پیوسته و انتگرال پذیر در بازه $[a, b]$ باشد. در این صورت حداقل یک $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که

$$J_a^\alpha f(x)g(x) = f(c)J_a^\alpha g(x)$$

اثبات. با توجه به تعریف انتگرال ریمان-لیوویل داریم

$$J_a^\alpha f(x)g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)g(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

قرار دهید $\tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{\Gamma(\alpha)(x-t)^{1-\alpha}}$ ، پس با توجه به فرض قضیه $\tilde{g}$ تابعی پیوسته و انتگرال پذیر در $[a, b]$

است و علامت آن در این بازه تغییری نمی‌کند. پس با توجه به قضیه (۳-۵-۳-۱) داریم

$$J_a^\alpha f(x)g(x) = \int_a^x f(t)\tilde{g}(t)dt = f(c)\int_a^x \tilde{g}(t)dt = f(c)J_a^\alpha g(x)$$

□

۶-۳ بسط تیلور برای مشتق تعمیم یافته کاپچو

در این بخش قصد داریم بسط تیلور تابع فازی مقدار که مشتق پذیر کاپچو می باشد را بنویسیم که برای این منظور به قضیه ای که رابطه بین مشتق تعمیم یافته ها کوهارا و انتگرال فازی را نشان می دهد احتیاج داریم که ابتدا آن را اثبات کنیم.

۶-۳-۱ قضیه. فرض کنید f متعلق به $C_{\mathbb{F}}^n[a, b]$ باشد و $1 \leq k \leq n$. بنابراین

(۱) اگر تابع f مشتقات مرتبه k و $k-1$ ام آن $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند، آنگاه

$$f_{gH}^{(k-1)}(x) = f_{gH}^{(k-1)}(a) \oplus \int_a^x f_{gH}^{(k)}(t)dt.$$

(۲) اگر تابع f مشتقات مرتبه k و $k-1$ ام آن $[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند، آنگاه

$$f_{gH}^{(k-1)}(x) = f_{gH}^{(k-1)}(a) \oplus \int_a^x f_{gH}^{(k)}(t)dt.$$

(۳) اگر تابع f مشتقات مرتبه k و $k-1$ ام آن نوع دیفرانسیل پذیری آن متفاوت باشد، آنگاه

$$f_{gH}^{(k-1)}(x) = f_{gH}^{(k-1)}(a) \ominus (-1) \int_a^x f_{gH}^{(k)}(t)dt.$$

اثبات. با توجه به فرض قضیه که $f \in C_{\mathbb{F}}^n[a, b]$ می توان گفت توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n$ در بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر هستند.

برای اثبات قسمت (۱) فرض کنید که $f_{gH}^{(k)}(x)$ و $f_{gH}^{(k-1)}(x)$ توابع $[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند در تعریف (۲-۸-۵-۱) باشند. پس

$$\begin{aligned} \int_a^x f_{gH}^{(k)}(t; r)dt &= \left[\int_a^x (f_r^-)^{(k)}(t)dt, \int_a^x (f_r^+)^{(k)}(t)dt \right] \\ &= \left[(f_r^-)^{(k-1)}(x) - (f_r^-)^{(k-1)}(a), (f_r^+)^{(k-1)}(x) - (f_r^+)^{(k-1)}(a) \right] \\ &= \left[(f_r^-)^{(k-1)}(x), (f_r^+)^{(k-1)}(x) \right] \ominus \left[(f_r^-)^{(k-1)}(a), (f_r^+)^{(k-1)}(a) \right] \\ &= f_{gH}^{(k-1)}(x) \ominus f_{gH}^{(k-1)}(a) \end{aligned}$$

پس قضیه در این حالت برقرار است.

برای اثبات قضیه در حالت (۲) $f_{gH}^{(k)}(x)$ و $f_{gH}^{(k-1)}(x)$ توابع $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشند. پس

$$\begin{aligned}\int_a^x f_{gH}^{(k)}(t;r)dt &= \left[\int_a^x (f_r^+)^{(k)}(t)dt, \int_a^x (f_r^-)^{(k)}(t)dt \right] \\ &= \left[(f_r^+)^{(k-1)}(x) - (f_r^+)^{(k-1)}(a), (f_r^-)^{(k-1)}(x) - (f_r^-)^{(k-1)}(a) \right] \\ &= \left[(f_r^+)^{(k-1)}(x), (f_r^-)^{(k-1)}(x) \right] \ominus \left[(f_r^+)^{(k-1)}(a), (f_r^-)^{(k-1)}(a) \right] \\ &= f_{gH}^{(k-1)}(x) \ominus f_{gH}^{(k-1)}(a)\end{aligned}$$

بنابراین قضیه در این حالت اثبات می شود.

برای اثبات قسمت (۳) فرض کنید که $f_{gH}^{(k)}(x)$ تابع $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر و تابع $f_{gH}^{(k-1)}(x)$ $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشند. پس

$$\begin{aligned}\int_a^x f_{gH}^{(k)}(t;r)dt &= \left[\int_a^x (f_r^-)^{(k)}(t)dt, \int_a^x (f_r^+)^{(k)}(t)dt \right] \\ &= \left[(f_r^-)^{(k-1)}(x) - (f_r^-)^{(k-1)}(a), (f_r^+)^{(k-1)}(x) - (f_r^+)^{(k-1)}(a) \right] \\ &= \left[(f_r^-)^{(k-1)}(x), (f_r^+)^{(k-1)}(x) \right] \ominus \left[(f_r^-)^{(k-1)}(a), (f_r^+)^{(k-1)}(a) \right] \\ &= (-1)f_{gH}^{(k-1)}(a) \ominus (-1)f_{gH}^{(k-1)}(x)\end{aligned}$$

برای وقتی که تابع $f_{gH}^{(k)}(x)$ $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر و تابع $f_{gH}^{(k-1)}(x)$ $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشند، اثبات به همین صورت می باشد که از بیان آن صرف نظر می کنیم.

□

۳-۶-۲ قضیه. فرض کنید $m = [\alpha] + 1, \alpha \notin \mathbb{N}, \alpha > 0$ و $f_{gH}^{(m)} \in C_{\mathbb{F}}[a, b] \cap L_{\mathbb{F}}[a, b]$

(۱) اگر f و تمام مشتقات مرتبه بالاتر آن در بازه $[a, b]$ توابعی gH -دیفرانسیل پذیر از نوع قسمت (i) در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشند، پس

$$f(x) = f(a) \oplus \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x)$$

(۲) اگر f و تمام مشتقات مرتبه بالاتر آن در بازه $[a, b]$ توابعی gH -دیفرانسیل پذیر از نوع قسمت (ii) در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشند، آنگاه

$$f(x) = f(a) \ominus (-1) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \ominus (-1) J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x)$$

(۳) اگر f در بازه $[a, b]$ دیفرانسیل پذیر از نوع قسمت (i) در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشد و دیفرانسیل پذیری مشتقات مرتبه بالاتر آن یکی در میان از نوع (i) به (ii) تغییر کند. آنگاه

$$f(x) = f(a) \ominus (-1) \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is odd}}}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is even}}}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \ominus (-1) J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x)$$

(۴) فرض کنید نوع دیفرانسیل پذیری تابع f در نقطه $\varepsilon \in [a, b]$ از نوع II تعویض شود و مشتق مرتبه اول آن در نقطه $\delta \in [\varepsilon, b]$ نوع دیفرانسیل پذیری اش از نوع I تعویض شود. اگر دیفرانسیل پذیری توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 2, 3, \dots, m$ از نوع (i) در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشند. آنگاه

$$f(x) = \begin{cases} f(a) \ominus (-1) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \ominus (-1) J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) & a \leq x \leq \varepsilon; \\ f(a) \oplus \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) & \varepsilon \leq x \leq b; \\ f(a) \oplus (x-a) f'_{gH}(a) \ominus (-1) \sum_{k=2}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \ominus (-1) J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) & \delta \leq x \leq b. \end{cases}$$

(۵) اگر f در نقطه $\varepsilon \in [a, b]$ نوع دیفرانسیل پذیری اش از نوع I تعویض شود و مشتق مرتبه اول آن در نقطه $\delta \in [\varepsilon, b]$ نوع دیفرانسیل پذیری اش از نوع II باشد. علاوه بر این دیفرانسیل پذیری توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 2, 3, \dots, m$ از نوع (ii) در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشند. آنگاه

$$f(x) = \begin{cases} f(a) \oplus \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) & a \leq x \leq \varepsilon \\ f(a) \odot (-1) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \odot (-1) J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) & \varepsilon \leq x \leq \delta \\ f(a) \odot (-1)(x-a) f'_{gH}(a) \oplus \sum_{k=2}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) & \delta \leq x \leq b \end{cases}$$

اثبات. با توجه به فرض قضیه $f_{gH}^{(m)} \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ ، پس بنابر قسمت (۳-۳) آن ${}^{cf}[gH]$ -دیفرانسیل پذیر از مرتبه α می باشد، لذا از لم (۳-۴-۴) داریم

$$J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) = J_a^\alpha(J_a^{m-\alpha}(f_{gH}^{(m)})(x)) = J_a^m(f_{gH}^{(m)})(x)$$

با توجه به قضیه (۳-۶-۱) و لم (۳-۴-۵) می توان گفت

(۱) فرض کنید که توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k=0,1,\dots,n$ در بازه $[a,b]$ توابعی gH -دیفرانسیل پذیر از نوع قسمت (i) در تعریف (۲-۸-۵-۱) باشند. بنابراین

$$\begin{aligned} J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) &= J_a^m(f_{gH}^{(m)})(x) = J_a^{m-1}(f_{gH}^{(m-1)})(x) \odot J_a^{m-1}(f_{gH}^{(m-1)})(a) \\ &= J_a^{m-2}(f_{gH}^{(m-2)})(x) \odot J_a^{m-2}(f_{gH}^{(m-2)})(a) \odot J_a^{m-1}(f_{gH}^{(m-1)})(a) \\ &\vdots \\ &= J_a(f_{gH}''')(x) \odot J_a^2(f_{gH}''')(a) \odot \dots \odot J_a^{m-1}(f_{gH}^{(m-1)})(a) \\ &= f(x) \odot f(a) \odot J_a(f'_{gH})(a) \odot J_a^2(f_{gH}''')(a) \odot \dots \odot J_a^{m-1}(f_{gH}^{(m-1)})(a) \end{aligned}$$

چون

$$J_a^k = \int_a^x \int_a^x \dots \int_a^x \underbrace{dx \, dx \, \dots \, dx}_{k \text{ times}} = \frac{(x-a)^k}{k!}$$

پس می توان گفت

$$J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) = f(x) \odot f(a) \odot (x-a) f'_{gH}(a) \odot \frac{(x-a)^2}{2!} f_{gH}''(a) \odot \dots \odot \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} f_{gH}^{(m-1)}(a)$$

و بنابراین

$$f(x) = f(a) \oplus \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x)$$

پس قضیه در این حالت برقرار است.

(۲) اگر توابع $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n$ در بازه $[a, b]$ توابعی $-gH$ -دیفرانسیل پذیر از نوع قسمت (ii) در تعریف (۲-۸-۵-۱) باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) &= J_a^m (f_{gH}^{(m)})(x) = J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(x) \ominus J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \\ &= J_a^{m-2} (f_{gH}^{(m-2)})(x) \ominus J_a^{m-2} (f_{gH}^{(m-2)})(a) \ominus J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \\ &\vdots \\ &= J_a (f_{gH}') (x) \ominus J_a^2 (f_{gH}'') (a) \ominus \dots \ominus J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \\ &= (-1) f(a) \ominus (-1) f(x) \ominus J_a (f_{gH}') (a) \ominus J_a^2 (f_{gH}'') (a) \ominus \dots \ominus J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \end{aligned}$$

مشابه اثبات قسمت (۱)، می توان نوشت

$$f(x) = f(a) \ominus (-1) \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \ominus (-1) J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x)$$

(۳) فرض کنید به ازای $k = 0, 1, \dots, \frac{m}{2}$ توابع $f_{gH}^{(2k)}(x)$ به ازای توابعی $-gH$ -دیفرانسیل پذیر از نوع (i) و توابع $f_{gH}^{(2k-1)}(x)$ توابعی $-gH$ -دیفرانسیل پذیر از نوع (ii) در تعریف (۲-۸-۵-۱) باشند. آنگاه

$$\begin{aligned} J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) &= J_a^m (f_{gH}^{(m)})(x) = -J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \ominus (-1) J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(x) \\ &= -J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \ominus (-1) \left(-J_a^{m-2} (f_{gH}^{(m-2)})(a) \ominus (-1) J_a^{m-2} (f_{gH}^{(m-2)})(x) \right) \\ &\vdots \\ &= -J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \ominus J_a^{m-2} (f_{gH}^{(m-2)})(a) \oplus \dots \oplus f(x) \ominus f(a) \\ &= \frac{-(x-a)^{m-1}}{(m-1)!} \odot f_{gH}^{(m-1)}(a) \ominus \frac{(x-a)^{m-2}}{(m-2)!} \odot f_{gH}^{(m-2)}(a) \oplus \dots \oplus f(x) \ominus f(a) \end{aligned}$$

پس

$$f(x) = f(a) \ominus (-1) \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is odd}}}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is even}}}^{m-1} \frac{(x-a)^k}{k!} \odot f_{gH}^{(k)}(a) \oplus J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x)$$

(۴) فرض کنید $f_{gH}^{(k)}$ به ازای $k = 2, 3, \dots, n$ دیفرانسیل پذیر از نوع (i) در تعریف (۱-۵-۸-۲) باشند

$$\begin{aligned} J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) &= J_a^m (f_{gH}^{(m)})(x) = J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(x) \ominus J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \\ &= J_a^2 (f_{gH}''')(x) \ominus J_a^2 (f_{gH}''')(a) \ominus \dots \ominus J_a^{m-1} (f_{gH}^{(m-1)})(a) \end{aligned} \quad (۱۱-۳)$$

چون در بازه $[a, \delta]$ ، $f_{gH}'(x)$ تابعی دیفرانسیل پذیر از نوع (i) و در بازه $[\delta, b]$ دیفرانسیل پذیر از نوع (ii) در تعریف (۱-۵-۸-۲) می باشد پس

$$J_a^2 (f_{gH}''')(x) = \begin{cases} J_a (f_{gH}') (x) \ominus J_a (f_{gH}') (x) & a \leq x \leq \delta; \\ -J_a (f_{gH}') (a) \ominus (-1) J_a (f_{gH}') (x) & \delta \leq x \leq b. \end{cases} \quad (۱۲-۳)$$

و $f(x)$ در بازه $[a, \varepsilon]$ تابعی دیفرانسیل پذیر از نوع (ii) و در بازه $[\varepsilon, b]$ تابعی دیفرانسیل پذیر از نوع (i) در تعریف (۱-۵-۸-۲) است، لذا

$$J_a (f_{gH}') (x) = \begin{cases} -f(a) \ominus (-1) f(x) & a \leq x \leq \varepsilon; \\ f(a) \ominus f(a) & \varepsilon \leq x \leq \delta; \\ -f(a) \ominus (-1) f(x) & \delta \leq x \leq b. \end{cases} \quad (۱۳-۳)$$

با جایگذاری معادلات (۱۳-۳) و (۱۲-۳) در معادله (۱۱-۳) اثبات این حالت نیز بدست می آید. اثبات قسمت (۵) نیز همانند قسمت (۴) است، که از بیان آن صرف نظر می کنیم.

□

۳-۷ بسط تیلور تعمیم یافته ی فازی

در این بخش بسط تیلور تابع $f(x)$ با استفاده از مشتقات کسری کاپچو مرتبه $k\alpha$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n$ و $0 < \alpha \leq 1$ ارائه می دهیم. در حالت خاص اگر قرار دهیم $\alpha = 1$ بسط تیلور تعمیم یافته همان بسط تیلور خواهد شد. برای بدست آوردن این مهم، نیاز به دو خاصیت مشتق کسری کاپچو داریم که ابتدا آنها را بیان می کنیم.

۳-۷-۱. فرض کنید به ازای $0 < \alpha \leq 1$ ، توابع ${}_{{gH}}D_*^{k\alpha} f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n$ $-^{cf}[gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند.

(۱) اگر به ازای $n \geq 1$ نوع $-^{cf}[gH]$ دیفرانسیل پذیری توابع $({}_{{gH}}D_*^{(n-1)\alpha} f)(x)$ و $({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x)$ یکسان باشند، در این صورت

$$J_a^\alpha ({}_{{gH}}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = ({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x) \ominus ({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(a)$$

(۲) اگر به ازای $n \geq 1$ نوع $-^{cf}[gH]$ دیفرانسیل پذیری توابع $({}_{{gH}}D_*^{(n-1)\alpha} f)(x)$ و $({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x)$ یکسان نباشند، در این صورت

$$J_a^\alpha ({}_{{gH}}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = (-1)({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(a) \ominus (-1)({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x)$$

اثبات. با توجه به قضیه ی (۳-۶-۱) و لم (۳-۴-۵) اثبات واضح است.

□

۳-۷-۲. فرض کنید به ازای $0 < \alpha \leq 1$ و توابع ${}_{{gH}}D_*^{k\alpha} f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ برای $k = 0, 1, \dots, n$ $-^{cf}[gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند.

(۱) اگر به ازای $n \geq 1$ نوع $-^{cf}[gH]$ دیفرانسیل پذیری توابع $({}_{{gH}}D_*^{(n-1)\alpha} f)(x)$ و $({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x)$ یکسان باشد، آنگاه

$$J_a^{n\alpha} ({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x) \ominus J_a^{(n+1)\alpha} ({}_{{gH}}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} ({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(a)$$

(۲) اگر به ازای $n \geq 1$ نوع $-^{cf}[gH]$ دیفرانسیل پذیری توابع $({}_{{gH}}D_*^{(n-1)\alpha} f)(x)$ و $({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x)$ یکسان نباشد، آنگاه

$$J_a^{n\alpha} ({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(x) \oplus (-1)J_a^{(n+1)\alpha} ({}_{{gH}}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} ({}_{{gH}}D_*^{n\alpha} f)(a)$$

اثبات. اثبات قسمت (۱) و (۲) مشابه یکدیگر هستند لذا تنها قسمت (۱) را ثابت می کنیم. با استفاده از لم های (۳-۴-۴)، (۳-۴-۵) و (۳-۴-۱۰) می توان نوشت

$$\begin{aligned}
J_a^{n\alpha}({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(x) \ominus J_a^{(n+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) &= J_a^{n\alpha}({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(x) \ominus J_a^\alpha({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) \\
&= J_a^{n\alpha}({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(x) \ominus ({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(x) \ominus ({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(a) \\
&= J_a^{n\alpha}({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(a) = \frac{(x-a)^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)} \ominus ({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(a)
\end{aligned}$$

□

۳-۷-۳ قضیه. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و ${}_{gH}D_*^{k\alpha} f(x) \in C_{\mathbb{R}}[a, b] \cap L_{\mathbb{R}}[a, b]$ برای $k = 0, 1, \dots, n$ ، آنگاه

(۱) اگر $f(x)$ تابعی ${}_{-cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر به ازای همه $k\alpha$ که $k = 0, 1, \dots, n$ در بازه $[a, b]$ باشد در این صورت ξ در بازه (a, b) وجود دارد به طوری که

$$f(x) = f(a) \oplus \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \ominus ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \oplus \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}$$

(۲) اگر $f(x)$ تابعی ${}_{-cf}[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر به ازای همه $k\alpha$ که $k = 0, 1, \dots, n$ در بازه $[a, b]$ باشد. در این صورت وجود دارد نقطه ξ در بازه (a, b) به طوری که

$$f(x) = f(a) \ominus (-1) \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \ominus ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \ominus (-1) \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}$$

(۳) اگر $f(x)$ تابعی ${}_{-cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر از مرتبه $2k\alpha$ و ${}_{-cf}[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر از مرتبه $(2k-1)\alpha$ به ازای $k = 1, \dots, \frac{n}{2}$ که در آن n مقداری زوج است، باشد. در این صورت وجود دارد نقطه ξ در بازه (a, b) به طوری که

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) \ominus (-1) \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is odd}}}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \ominus ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \oplus \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is even}}}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \ominus ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \\
&\quad \ominus (-1) \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}
\end{aligned}$$

(۴) اگر نوع دیفرانسیل پذیری کاپچو f از مرتبه α در نقطه $\varepsilon \in [a, b]$ از نوع II در تعریف (۳-۳-۳) تعویض شود و توابع ${}_{gH}D_*^{k\alpha} f(x)$ به ازای $k = 1, 2, \dots, n$ از مرتبه α ${}_{-cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر در $[a, b]$ باشد. در این صورت وجود دارد نقطه ξ در بازه (a, b) به طوری که

$$f(x) = \begin{cases} f(a) \ominus (-1) \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \odot ({}_{gH}D_*^\alpha f)(a) \\ \oplus \sum_{k=2}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \odot ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \oplus \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha} & a \leq x \leq \epsilon; \\ f(a) \oplus \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \odot ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \oplus \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha} & \epsilon \leq x \leq b. \end{cases}$$

(۵) اگر نوع دیفرانسیل پذیری کاپچو f از مرتبه α در نقطه $\epsilon \in [a, b]$ از نوع I در تعریف (۳-۳-۳) تعویض شود و توابع ${}_{gH}D_*^{k\alpha} f(x)$ به ازای $k=1, 2, \dots, n$ از مرتبه α $[(ii)-gH]-cf$ دیفرانسیل پذیر در $[a, b]$ باشد. در این صورت وجود دارد نقطه ξ در بازه (a, b) به طوری که

$$f(x) = \begin{cases} f(a) \oplus \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \odot ({}_{gH}D_*^\alpha f)(a) \\ \ominus (-1) \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \odot ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \ominus (-1) \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}, & a \leq x \leq \epsilon; \\ f(a) \ominus (-1) \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} \odot ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \ominus (-1) \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha}, & \epsilon \leq x \leq b. \end{cases}$$

اثبات. فرض کنید که ${}_{gH}D_*^{k\alpha} f(x)$ به ازای $k=0, 1, \dots, n$ توابعی $[(i)-gH]-cf$ دیفرانسیل پذیر باشند. در این صورت

$$\sum_{k=0}^n \left(J_a^{k\alpha} ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(x) \ominus {}_{gH}J_a^{(k+1)\alpha} ({}_{gH}D_*^{(k+1)\alpha} f)(x) \right) = f(x) \ominus J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) \oplus J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) \\ \ominus J_a^{2\alpha} ({}_{gH}D_*^{2\alpha} f)(x) \oplus \dots \oplus J_a^{n\alpha} ({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(x) \ominus J_a^{(n+1)\alpha} ({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x)$$

با توجه به لم های (۱-۷-۳) و (۲-۷-۳) داریم

$$f(x) \ominus J_a^{(n+1)\alpha} ({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = f(a) \oplus \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \quad (۱۴-۳)$$

همچنین با توجه به قضیه مقدار میانی انتگرال ریمان-لیوویل (۳-۵-۴) داریم

$$J_a^{(n+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = ({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^{(n+1)\alpha-1}}{\Gamma((n+1)\alpha)} dt = \frac{({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(\xi)}{\Gamma((n+1)\alpha+1)} (x-a)^{(n+1)\alpha} \quad (15-3)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱۵-۳) در معادله (۱۴-۳) اثبات در حالت (۱) برقرار است.

برای اثبات قسمت (۲) فرض کنید $({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(x)$ به ازای $k = 0, 1, \dots, n$ توابعی ${}^{cf}[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند. بنابراین

$$\sum_{k=0}^n (J_a^{k\alpha}({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(x) \ominus_{{}_{gH}} J_a^{(k+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(k+1)\alpha} f)(x)) = f(x) \oplus (-1)J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) \ominus (-1)J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) \\ \oplus (-1)J_a^{2\alpha}({}_{gH}D_*^{2\alpha} f)(x) \ominus \dots \ominus (-1)J_a^{n\alpha}({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(x) \oplus (-1)J_a^{(n+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x)$$

با استفاده از لم‌های (۱-۷-۳) و (۲-۷-۳) می‌توان نوشت

$$f(x) \oplus (-1)J_a^{(n+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = f(a) \ominus (-1) \sum_{k=1}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a)$$

پس اثبات در این حالت نیز برقرار است.

حال برای اثبات قسمت (۳) فرض کنید که به ازای $k = 0, 1, \dots, n$ اگر k زوج باشد توابع $({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(x)$ ${}^{cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر و اگر k فرد باشد آنگاه این توابع ${}^{cf}[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند. در این صورت

$$\sum_{k=0}^n J_a^{k\alpha}({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(x) \ominus_{{}_{gH}} J_a^{(k+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(k+1)\alpha} f)(x) = f(x) \oplus (-1)J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) \ominus (-1)J_a^\alpha({}_{gH}D_*^\alpha f)(x) \\ \ominus J_a^{2\alpha}({}_{gH}D_*^{2\alpha} f)(x) \oplus \dots \oplus J_a^{n\alpha}({}_{gH}D_*^{n\alpha} f)(x) \oplus (-1)J_a^{(n+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x)$$

مشابه روند توضیح داده شده در قسمت (۱) داریم

$$f(x) \oplus (-1)J_a^{(n+1)\alpha}({}_{gH}D_*^{(n+1)\alpha} f)(x) = f(a) \ominus (-1) \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is odd}}}^n J_a^{k\alpha}({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \oplus \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is even}}}^n J_a^{k\alpha}({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \\ = f(a) \ominus (-1) \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is odd}}}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a) \oplus \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ is even}}}^n \frac{(x-a)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)} ({}_{gH}D_*^{k\alpha} f)(a)$$

از آن جایی که در اثبات قسمت (۴) و (۵) دیفرانسیل پذیری کسری کاپچو آن در بازه $[a, b]$ تغییر می کند بسط تیلور آن چند ضابطه ای خواهد شد، پس در یک قسمت بازه مشابه قسمت (۱) و در قسمت دیگر بازه مشابه قسمت (۲) است، پس از اثبات مجدد آنها صرف نظر می کنیم.

□

فصل چهارم

روش‌های عددی و تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل

کسری غیرقطعی

۴-۱ مقدمه

در این فصل قصد داریم معادلات دیفرانسیل کسری فازی را با استفاده از دیفرانسیل پذیری کاپچو تعمیم یافته ها کوهارا بررسی کنیم. از این رو، معادله دیفرانسیل کسری کاپچو معمولی و چند مرتبه‌ای را ارائه کردیم و شرایط وجود و یکتایی جواب آنها را بدست آورده‌ایم. سپس جواب های تحلیلی این دسته از معادلات را با استفاده از تابع میتگ-لفلر معرفی می‌کنیم. همچنین با ارائه روش اویلر کسری با استفاده از بسط تیلور تعمیم یافته جواب های عددی آن را نیز بدست می‌آوریم.

۲-۴ معادلات دیفرانسیل کسری کاپچو فازی

معادله دیفرانسیل کسری کاپچو را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ({}_{gH}D_*^\alpha y)(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \quad x_0 \geq 0 \end{cases} \quad (۱-۴)$$

که در آن تابع $f: [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ پیوسته است به طوری که بر Ω داریم $D(f(x, z), 0) \leq M$ و

$$\Omega = \{(x, z) : 0 \leq x - x_0 \leq a, D(z, y_0) \leq b\}, \quad aM \leq b$$

۱-۲-۴ قضیه. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ در این صورت معادله (۱-۴) معادل است با

$$y(x) \ominus_{gH} y(x_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x \frac{f(t, y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

اثبات: عملگر را بر طرفین معادله (۱-۴) اعمال می‌کنیم

$$J_a^\alpha ({}_{gH}D_*^\alpha y)(x) = J_a^\alpha f(x, y(x))$$

پس با توجه به لم (۲-۴-۴) داریم

$$y(x) \ominus_{gH} y(x_0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x \frac{f(t, y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

□

۲-۲-۴ نتیجه. اگر توابع $\hat{y}(x), y(x)$ جواب های $-{}^{cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر و $-{}^{cf}[(ii) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشند، داریم

$$y(x) = y(x_0) \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x \frac{f(t, y(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

$$\hat{y}(x) = y(x_0) \ominus (-1) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x \frac{f(t, \hat{y}(t))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

حال ثابت می‌کنیم که جواب معادله (۱-۴) وجود دارد و یکتاست.

۴-۲-۳ قضیه. فرض کنید تابع f در معادله (۴-۱) در شرایط زیر صدق می کند

$$D(f(x, z_1), f(x, z_2)) \leq \frac{K\eta\Gamma(\alpha)D(z_1, z_2)}{(x-x_0)^\alpha} \quad x \neq x_0 \text{ with } K\eta < \alpha, K > 1 \quad A$$

$$D(f(x, z_1), f(x, z_2)) \leq \beta[D(z_1, z_2)]^\gamma, \quad 0 < \gamma < 1, \quad K(1-\gamma) < 1, \quad \beta > 0, \beta \in \mathbb{R} \quad B$$

که به شرایط کراسنوسلسکی-کراین معروف هستند. تقریب های متوالی در حالت ${}^{cf}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیری

$$y_{n+1}(x) = y_0 \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y_n(t)) dt \quad (2-4)$$

و برای ${}^{cf}[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیری

$$\hat{y}_{n+1}(x) = y_0 \ominus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, \hat{y}_n(t)) dt \quad (3-4)$$

به ترتیب به جواب های یکتای $\hat{y}(x), y(x)$ معادله (۴-۱) بر بازه $[x_0, x_0 + \bar{r}]$ که $\bar{r} = \min\{a, (\frac{b\Gamma(1+\alpha)}{M})^{\frac{1}{\alpha}}\}$ همگرایی یکنواخت دارند.

اثبات: ما قضیه را تنها در حالت ${}^{cf}[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیری اثبات می کنیم و برای ${}^{cf}[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیری اثبات به صورت مشابه قابل تعمیم است بنابراین از بیان آن صرف نظر می کنیم.

تابع پیوسته فازی $y_0(x)$ را بر $[x_0, x_0 + a]$ به طوری که $y_0(x_0) = y_0$ و $y_0(x) \in \Omega$ در نظر بگیرید. تقریب های متوالی $\{y_n(x)\}_{n=0}^\infty$ که از (۲-۴) بدست آید بر بازه $[x_0, x_0 + \bar{r}]$ پیوسته و خوش تعریف است. حال با استفاده از استقرا برای $n=1, 2, \dots$ داریم

$$D(y_n(x), y_0) \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} D(f(t, y_{n-1}(t)), 0) dt \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} (x-x_0)^\alpha \leq \frac{M\bar{r}^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \leq b$$

از آن جایی که رابطه (۴-۳) معادل است با

$${}_{gH}(D_*^\alpha y_{n+1})(x) = f(x, y_n(x)) \quad , \quad y_n(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad (4-4)$$

ما باید ثابت کنیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{n+1})(x), f(x, y_n(x))) = 0 \quad (5-4)$$

طبق شرط (B) داریم $K(1-\gamma) < 1$ که نتیجه می دهد $K < 1 + \gamma K < 1 + \gamma + \gamma^2 K < \dots < 1 + \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i$ پس وجود دارد عدد طبیعی $N > 1$ بطوریکه $K < 1 + \gamma \sum_{i=0}^{N-1} \gamma^i$. با توجه به فرض اینکه $D(f(x, y), 0) \leq M$ بر Ω و معادله (۴-۱) داریم

$$D({}_{gH}(D_*^\alpha y_1)(x), f(x, y_1(x))) = D(f(x, y_0(x)), f(x, y_1(x))) \leq 2M \quad (۶-۴)$$

پس برای $n = 1, 2, \dots$ می توان نوشت

$$D({}_{gH}(D_*^\alpha y_n)(x), f(x, y_n(x))) = D(f(x, y_{n-1}(x)), f(x, y_n(x)))$$

لذا از شرط (B) و (۴-۱) به ازای $i = 1, 2, 3, \dots$ داریم

$$\begin{aligned} D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{i+1})(x), f(x, y_{i+1}(x))) &= D(f(x, y_i(x)), f(x, y_{i+1}(x))) \\ &\leq \beta [D(y_i(x), y_{i+1}(x))]^\gamma \\ &\leq \beta \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} D({}_{gH}(D_*^\alpha y_i)(t), f(t, y_i(t))) dt \right]^\gamma \end{aligned} \quad (۷-۴)$$

حال از این نامساوی و رابطه (۶-۴) با استفاده از استقرا نتیجه می گیریم که

$$D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+1})(x), f(x, y_{N+1}(x))) \leq R(x - x_0)^\lambda \quad (۸-۴)$$

که در آن $\lambda = \alpha r$ ، $r = \gamma \sum_{i=0}^{N-1} \gamma^i$ ، $N > 1$ چنان که $K < 1 + r$ و

$$R = (\beta^{1+\gamma+\gamma^2+\dots+\gamma^{N-1}})(2M)^{\gamma^N} \left(\frac{1}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right)^{\gamma+\gamma^2+\dots+\gamma^N} \quad (۹-۴)$$

از طرفی با استفاده از شرط (A) و رابطه (۴-۱) برای $j = 0, 1, 2, \dots$ و $0 < x - x_0 \leq a$ در می یابیم که

$$\begin{aligned} D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+j+1})(x), f(x, y_{N+j+1}(x))) &\leq \frac{K\eta\Gamma(\alpha)}{(x-x_0)^\alpha} D(y_{N+j}(x), y_{N+j+1}(x)) \\ &\leq \frac{K\eta}{(x-x_0)^\alpha} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+j} f)(t), f(t, y_{N+j}(t))) dt \end{aligned}$$

از (۸-۴) و استفاده از استقرا به ازای $j = 0, 1, 2, \dots$ و $0 < x - x_0 \leq a$ داریم

$$D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+j+1})(x), f(x, y_{N+j+1}(x))) \leq \left(\frac{K\eta}{\alpha}\right)^j R(x-x_0)^\lambda$$

از آن جایی که $\frac{K\eta}{\alpha} < 1$ پس رابطه (۵-۴) اثبات شد.

بنابراین دنباله $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ که $y_n(x_0) = y_0$ ، $D(y_n(x), y_0) \leq b$ و همچنین $({}_{gH}D_*^\alpha y_n)(x)$ بر $[x_0, x_0 + a]$ پیوسته است، در شرط زیر صدق می کند

$$D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+j+1})(x), f(x, y_{N+j+1}(x))) \leq R\rho^j (x-x_0)^\lambda \quad (۱۰-۴)$$

که در آن $\rho = \frac{K\eta}{\alpha} < 1$ و ثابت های λ, R در رابطه (۹-۴) داده شده است.

حال ما ثابت می کنیم که دنباله $\{y_n(x)\}$ بر بازه $[x_0, x_0 + a]$ همگرایی یکنواخت دارد. توجه کنید که از رابطه (۱۰-۴)، تابع پیوسته $\varphi_{N+j+1}(x)$ برای $j = 0, 1, 2, \dots$ بر بازه $[x_0, x_0 + a]$ وجود دارد به طوری که

$${}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+j+1})(x) = f(x, y_{N+j+1}(x)) + \varphi_{N+j+1}(x) \quad (۱۱-۴)$$

که در آن

$$D(\varphi_{N+j+1}(x), 0) \leq R\rho^j (x-x_0)^\lambda \leq R\rho^j a^\lambda \quad (۱۲-۴)$$

از رابطه (۴-۴) داریم که

$$y_{N+j+1}(x) = y_0 \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} [f(t, y_{N+j+1}(t)) + \varphi_{N+j+1}(t)] dt \quad (۱۳-۴)$$

قرار دهید

$$\Delta = D({}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+j+1})(x), {}_{gH}(D_*^\alpha y_{N+i+1})(x)) \quad (۱۴-۴)$$

از آن جایی که

$$D(y_{N+j+1}(x), y_{N+i+1}(x)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_{x_0}^x (x-t)^{\alpha-1} [D(f(t, y_{N+j+1}(t)), f(t, y_{N+i+1}(t))) + D(\varphi_{N+j+1}(t), \varphi_{N+i+1}(t))] dt \right] \quad (۱۵-۴)$$

پس از روابط (۴-۴)، (۱۱-۴) و (۱۲-۴) و شرط (B) داریم

$$\Delta \leq \beta [D(y_{N+j+1}(x), y_{N+i+1}(x))]^\gamma + R(\rho^i + \rho^j)(x - x_0)^\lambda$$

لذا از معادله (۱۵-۴) و $(\rho^i + \rho^j) \leq 2$ بدست می آوریم

$$\Delta \leq \beta \left[\frac{2M + 2Ra^\lambda}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right]^\gamma (x - x_0)^{\alpha\gamma} + 2R(x - x_0)^\lambda$$

همچنین چون $\lambda = \alpha r$ و $\alpha\gamma < \alpha r$ می توان نوشت

$$\Delta \leq \beta \left[\left(\frac{2M + 2Ra^\lambda}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right)^\gamma + 2R \right] a^{\alpha r} \equiv R_1 \quad (۱۶-۴)$$

مجدداً با استفاده از معادله (۱۶-۴) فرایند را مانند قبل تکرار می کنیم، پس خواهیم داشت

$$\Delta \leq \beta \left[\left(\frac{R_1 + 2Ra^\lambda}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right)^\gamma + 2R \right] (x - x_0)^\lambda \equiv R_2 (x - x_0)^\lambda$$

که در آن $R_2 = \beta \left[\left(\frac{R_1 + 2Ra^\lambda}{\alpha \Gamma(\alpha)} \right)^\gamma + 2R \right]$. این فرایند را $N-1$ بار تکرار می کنیم و فرض کنید R_{N-1} یک انتخاب ثابت $\bar{R}$ باشد، پس برای $i, j = 0, 1, 2, \dots$ و $0 < x - x_0 \leq a$ بدست می آوریم

$$\Delta \leq \bar{R} (x - x_0)^\lambda$$

حال با استفاده از شرط (A) ، (۱۱-۴) و (۱۲-۴) می فهمیم که

$$\begin{aligned} \Delta &\leq D(f(x, y_{N+j+1}(x)), f(x, y_{N+i+1}(x))) + R(\rho^i + \rho^j)(x - x_0)^\lambda \\ &\leq \frac{K\eta\Gamma(\alpha)}{(x - x_0)^\alpha} D(y_{N+j+1}(x), y_{N+i+1}(x)) + R(\rho^i + \rho^j)(x - x_0)^\lambda \end{aligned}$$

که نتیجه می دهد

$$\Delta \leq \left[\left(\frac{K\eta}{\alpha} \right) (\bar{R} + 2Ra^\lambda) + R(\rho^i + \rho^j) \right] (x - x_0)^\lambda \quad (۱۷-۴)$$

قرار دهید $R^* = \bar{R} + 2Ra^\lambda$ ، پس می توان رابطه (۱۷-۴) را به صورت زیر باز نویسی کرد

$$\Delta \leq [\rho R^* + R(\rho^i + \rho^j)] (x - x_0)^\lambda$$

با استقرا بدست می آوریم که

$$\Delta \leq [\rho^{m-1}R^* + (\rho^i + \rho^j)R(\rho^{m-1} + \rho^{m-2} + \dots + 1)](x - x_0)^\lambda \leq [\rho^{m-1}R^* + (\rho^i + \rho^j)\frac{R}{1-\rho}](x - x_0)^\lambda$$

بنابراین وقتی که $i, j, m \rightarrow \infty$ داریم $\Delta \rightarrow 0$ چون $\rho < 1$. لذا دنباله $\{f(x, y_n(x))\}$ در معیار کوشی صدق می‌کند پس دنباله $\{f(x, y_n(x))\}$ بر $|x - x_0| < a$ همگرایی یکنواخت است که این نتیجه می‌دهد دنباله $\{y_n(x)\}$ همگرایی یکنواخت بر $|x - x_0| < a$ دارد.

فرض کنید $y(x)$ حد دنباله $\{y_n(x)\}$ باشد، پس $y(x)$ جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۱-۴) است. حال فرض خلف کنید که این درست نباشد یعنی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جواب‌های ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۱-۴) باشد. دنباله $\{y_1(x), y_2(x), y_1(x), y_2(x), \dots\}$ را در نظر بگیرید. این دنباله همگرایی یکنواخت دارد و بنابراین $y_1(x) \equiv y_2(x)$. پس نتیجه می‌گیریم که جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر منحصر بفرد است.

□

۴-۳ معادله دیفرانسیل خطی کسری فازی

در این بخش معادله دیفرانسیل کسری خطی با ضرایب ثابت تحت ${}^{cf}[gH]$ -دیفرانسیل پذیری را که از لحاظ کاربرد دارای اهمیت بسیار است را بررسی می‌نمائیم.

۴-۳-۱ جواب‌های تحلیلی معادله دیفرانسیل خطی کسری فازی

فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. معادله دیفرانسیل مقدار اولیه

$${}_{gH}D_*^\alpha y(x) = \lambda y(x) \oplus q(x) \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad (۱۸-۴)$$

که در آن $q \in C_{\mathbb{F}}[a, b]$ یک تابع فازی معلوم می‌باشد، را در نظر بگیرید.

اگر $\lambda > 0$ و $y(x)$ تابع ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$y(x) = y_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha) \oplus \hat{y}(x) \quad (۱۹-۴)$$

و اگر $\lambda < 0$ و $y(x)$ تابع $-(ii) - gH$ دیفرانسیل پذیر باشد آنگاه

$$y(x) = y_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha) \ominus (-1) \hat{y}(x) \quad (20-4)$$

که در آن

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x [q(x-t) \frac{d}{dt} E_\alpha(\lambda t^\alpha)] dt$$

اثبات. فرض کنید $y(x)$ تابع $-(i) - gH$ دیفرانسیل پذیر و $\lambda > 0$ باشد پس ثابت می کنیم که

الف) تابع $y(x) = y_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha)$ در معادله همگن ${}_{{gH}} D_*^\alpha y(x) = \lambda y(x)$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ صدق می کند.

ب) تابع $\hat{y}(x)$ یک جواب برای معادله غیر همگن زیر می باشد

$${}_{{gH}} D_*^\alpha y(x) = \lambda y(x) \oplus q(x) \quad y(0) = 0 \quad (21-4)$$

ابتدا قرار دهید $p_\alpha(x) := x^\alpha$ پس

$$\begin{aligned} {}_{{gH}} D_*^\alpha y(x) &= {}_{{gH}} D_*^\alpha [y_0(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda p_\alpha(x))^j}{\Gamma(1+j\alpha)}] = J_0^{1-\alpha} [y_0(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda^j p_{\alpha j}(x))}{\Gamma(1+j\alpha)}]_{gH}' \\ &= J_0^{1-\alpha} [y_0(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j (p_{\alpha j}(x))'}{\Gamma(1+j\alpha)}] = J_0^{1-\alpha} [y_0(x) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{\alpha j-1}(x)}{\Gamma(j\alpha)}] \\ &= y_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j J_0^{1-\alpha} (p_{\alpha j-1}(x))}{\Gamma(j\alpha)} = y_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j p_{\alpha j-\alpha}(x)}{\Gamma(1+j\alpha-\alpha)} = y_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j x^{\alpha j-\alpha}}{\Gamma(1+j\alpha-\alpha)} \\ &= y_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1} x^{\alpha j}}{\Gamma(1+j\alpha)} = y_0 \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{\alpha j}}{\Gamma(\alpha j+1)} = \lambda y(x) \end{aligned}$$

توجه کنید که با توجه به خصوصیت دوم تابع میتگ-لفلر، سری توانی $E_\alpha(\lambda x)$ به ازای همه $x \in \mathbb{C}$ همگراست، پس این سری به ازای $x \in \mathbb{C}$ همگرایی یکنواخت و کامل دارد. لذا توانستیم جای مشتق با سری و انتگرال با سری را عوض کنیم. همچنین داریم که $y(0) = y_0 E_\alpha(0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ پس $y(x)$ در معادله همگن صدق می کند، بنابراین قسمت (الف) ثابت شد.

حال برای قسمت (ب) داریم

$$\hat{y}(x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(x-t) (E_\alpha(\lambda t^\alpha))' dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(t) (E_\alpha(\lambda(x-t)^\alpha))' dt$$

تابع $q(x)$ طبق فرض پیوسته و $E_\alpha(x)$ انتگرال پذیر است، لذا انتگرال حاصل موجود و پیوسته می باشد، همچنین با جای گذاری $x=0$ داریم $\hat{y}(0)=0$. بنابراین y در شرایط اولیه صدق می کند، کافیت نشان دهیم آن نیز در معادله غیرهمگن نیز صدق می کند. برای این منظور داریم که

$$\begin{aligned}(E_\alpha(\lambda p_\alpha(x)))' &= \lambda \alpha p_{\alpha-1}(x) E'_\alpha(\lambda p_\alpha(x)) = \lambda \alpha p_{\alpha-1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j(\lambda p_\alpha(x))^{j-1}}{\Gamma(1+j\alpha)} \\ &= \lambda p_{\alpha-1}(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda p_\alpha(x))^{j-1}}{\Gamma(j\alpha)} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j x^{\alpha j-1}}{\Gamma(j\alpha)}\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}\hat{y}(x) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(t) (E_\alpha(\lambda(x-t)^\alpha))'_{gH} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^x q(t) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda^j (x-t)^{j\alpha-1}}{\Gamma(j\alpha)} dt \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} \frac{1}{\Gamma(j\alpha)} \int_0^x q(t) (x-t)^{j\alpha-1} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} J_0^{j\alpha} q(x)\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}_{gH} D_*^\alpha \hat{y}(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} {}_{gH} D_*^\alpha J_0^{j\alpha} q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} J_0^{(j-1)\alpha} q(x) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j J_0^{j\alpha} q(x) = q(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j J_0^{j\alpha} q(x) = q(x) + \lambda \hat{y}(x)\end{aligned}$$

با استفاده از خصوصیت همگرایی تابع $E_\alpha(x)$ و پیوستگی $q(x)$ توانستیم که جای انتگرال را با سری و سری را با مشتق عوض کنیم. برای وقتی که $\lambda < 0$ و $y(x)$ تابع $[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، اثبات به همین روش قابل بررسی است که ما از بیان مجدد آن صرف نظر می کنیم.

□

در این قضیه اگر از تابع دو پارامتری $\alpha > 0, \beta > 0$ ، $E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}$ استفاده کنیم جواب معادله (۱۵-۴) را می توان به صورت زیر بازنویسی کنیم.

$$y(x) = y_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha) \oplus \int_0^x q(x-t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) dt$$

اگر $\lambda > 0$ و $y(x)$ تابع $[(i)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد و

$$y(x) = y_0 E_\alpha(\lambda x^\alpha) \ominus (-1) \int_0^x q(x-t) t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha) dt$$

اگر $\lambda < 0$ و $y(x)$ تابع ${}^{cf}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد.

۴-۳-۲ مثال‌های معادلات دیفرانسیل کسری خطی

در این بخش دو مثال از معادلات کسری فازی از مرتبه $\alpha \in (0,1]$ حل می‌نمائیم.

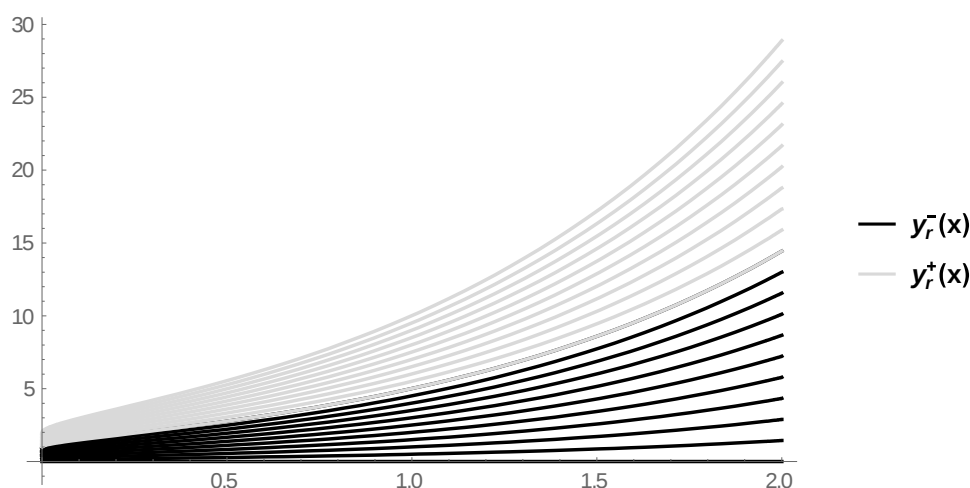
۴-۳-۱ مثال. معادله دیفرانسیل کسری همگن زیر را در نظر بگیرید

$$({}_{gH}D_*^{0.5}y)(x) = y(x), \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \quad (4-22)$$

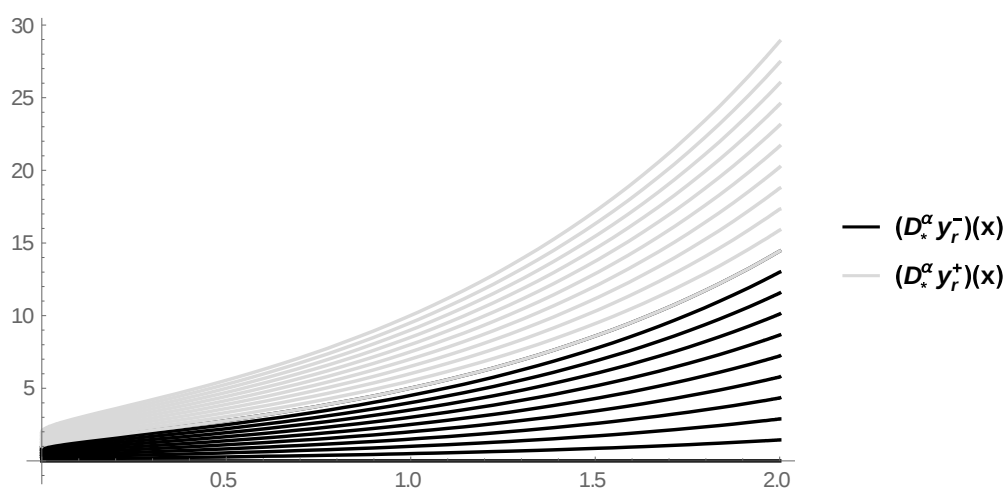
که در آن $y_0 = (0,1,2)$ یک عدد فازی مثلثی است. چون $\lambda = 1$ پس جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر آن طبق بخش (۴-۳-۱) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$y(x) = y_0 E_{0.5}(x^{0.5}) = y_0 (1 + \operatorname{erf}(x)) e^{x^2}$$

شکل (۴-۱) جواب معادله (۴-۲۲) و شکل (۴-۲) تابع مشتق کسری کاپچو آن را از مرتبه $\alpha = 0.5$ را در بازه $0 \leq x \leq 2$ به تصویر کشیده است. همان طور که از شکل (۴-۲) مشخص است جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است و با افزایش x پهنای جواب نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱. نمایش جواب معادله (۴-۲۲)



شکل ۴-۲. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو هاگوهاری جواب معادله (۴-۲۲)

۴-۳-۲-۲ مثال. معادله کسری ریلکسیشن^۱ زیر را در نظر بگیرید

$$({}_{gH}D_*^{0.5}y)(x) = \lambda y(x) \oplus c \odot x^2 \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}_F \quad (۴-۲۳)$$

که در آن c یک ثابت فازی است.

فرض کنید $\lambda = 1$ و $y(x)$ تابع $[(i) - gH]^{-\alpha}$ دیفرانسیل پذیر باشد، با استفاده از رابطه (۴-۱۹) جواب را به صورت زیر می توان نوشت

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 E_{0.5}(x^{0.5}) \oplus \int_0^x c \odot (x-t)^2 \left[\frac{d}{dt} E_{0.5}(t^{0.5}) \right] dt \\ &= y_0 E_{0.5}(x^{0.5}) \oplus c \odot \int_0^x (x-t)^2 t^{(0.5-1)} E_{0.5,0.5}(t^{0.5}) dt \end{aligned} \quad (۴-۲۴)$$

حال از خصوصیت چهارم تابع میتگ-لفلر داریم که

$$E_{0.5}(x^{0.5}) = (1 + \operatorname{erf}(x))e^{x^2} \quad (۴-۲۵)$$

همچنین از خصوصیت پنجم تابع میتگ-لفلر بدست می آید که

$$E_{0.5,0.5}(x^{0.5}) = x^{0.5}E_{0.5}(x^{0.5}) + \frac{1}{\Gamma(0.5)} = x^{0.5}(1 + \operatorname{erf}(x))e^{x^2} + \frac{1}{\Gamma(0.5)} \quad (26-4)$$

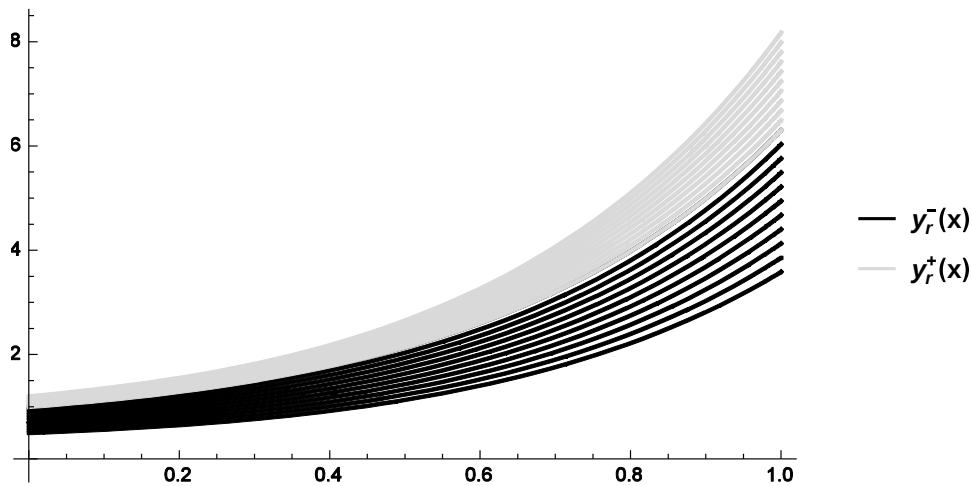
با جای گذاری روابط (25-4) و (26-4) در (24-4) جواب معادله به صورت بدست می آید

$$y(x) = y_0(1 + \operatorname{erf}(x))e^{x^2} \oplus c \odot \int_0^x (x-t)^2 [(1 + \operatorname{erf}(t))e^{t^2} + \frac{t^{-0.5}}{\Gamma(0.5)}] dt$$

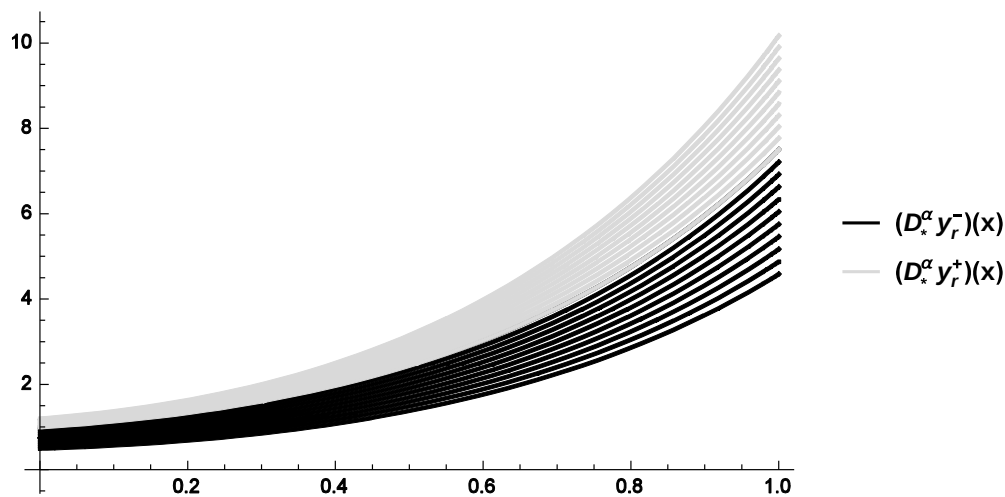
که این برابر است

$$y(x) = y_0(1 + \operatorname{erf}(x))e^{x^2} \oplus c \odot \left(-\frac{1}{2} e^{x^2} x(1 + 2\operatorname{erf}(x)) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(x(\sqrt{\pi} + \frac{3}{2}x + \frac{16}{15}x\sqrt{x}) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\pi}{4}(-1 + 2x^2)\operatorname{erfi}(x) + \frac{x^2}{2} {}_2F_2[1, 1, \frac{1}{2}, 2, x^2] + x^4 {}_2F_2[1, 1, \frac{3}{2}, 2, x^2] \right) \right)$$

این جواب به ازای $y_0 = (0.5, 1, 1.2)$ و $c = (1, 1.2, 2)$ در شکل (3-4) به تصویر کشیده شده است. همچنین شکل (4-4) نمایانگر $-{}^{\text{cf}}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر بودن تابع جواب به ازای $\alpha = 0.5$ است.



شکل 3-4. نمایش جواب $-{}^{\text{cf}}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر معادله (23-4)



شکل ۴-۴. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو هاگوهاری جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۲۳)

حال فرض کنید $\lambda = -1$ و $y(x)$ تابع ${}^{cf}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد، با استفاده از رابطه (۴-۲۰)

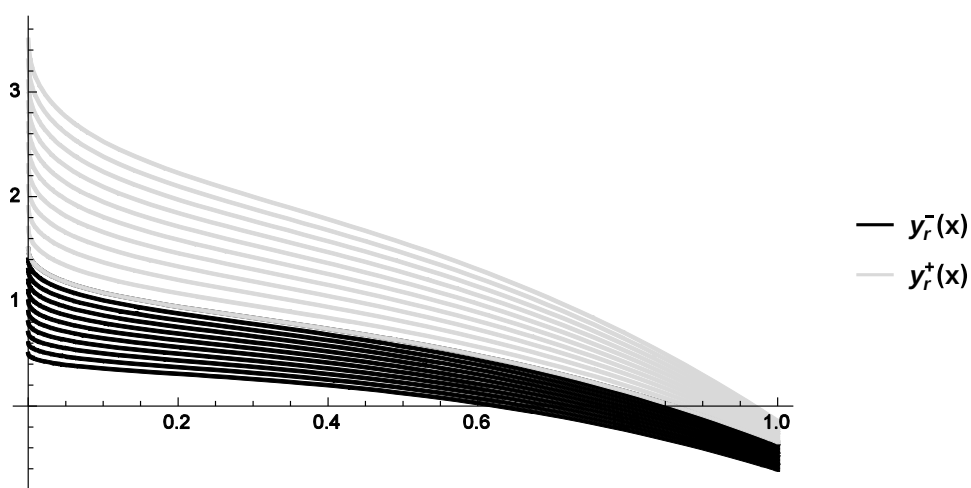
داریم که

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 E_{0.5}(-x^{0.5}) \ominus (-1)c \int_0^x (x-t)^2 \left[\frac{d}{dt} E_{0.5}(-t^{0.5}) \right] dt \\ &= y_0 E_{0.5}(-x^{0.5}) \ominus (-1)c \int_0^x (x-t)^2 [-t^{-0.5} E_{0.5,0.5}(-t^{0.5})] dt \\ &= y_0 E_{0.5}(-x^{0.5}) \ominus c \int_0^x (x-t)^2 [E_{0.5}(-t^{0.5}) + \frac{t^{-0.5}}{\Gamma(0.5)}] dt \end{aligned}$$

پس داریم

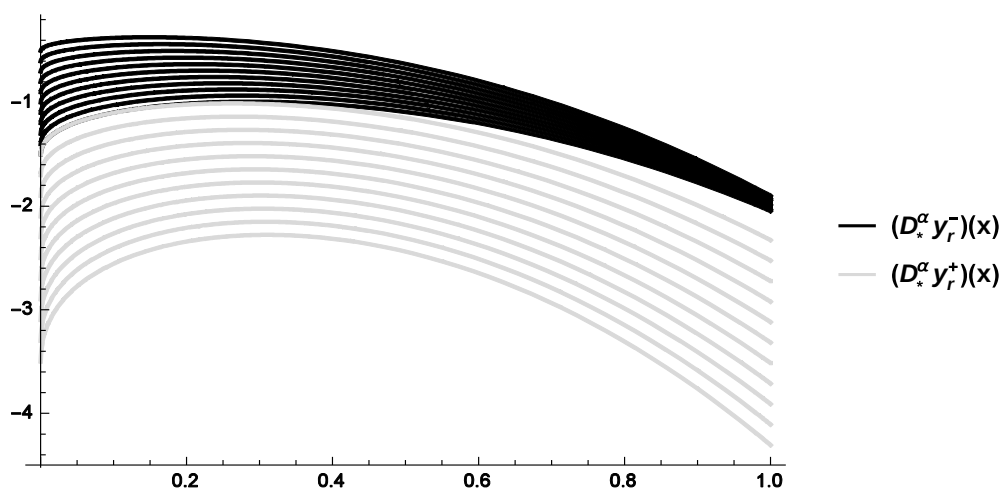
$$y(x) = y_0 E_{0.5}(-x^{0.5}) \ominus c \ominus (-2 - x(2+x)) + \frac{4}{15} \sqrt{\frac{x}{\pi}} (15 + 2x(5+4x)) + 2e^x \operatorname{Erfc} \sqrt{x}$$

این جواب به ازای $y_0 = (0.5, 1.5, 3.5)$ و $c = (1, 1.2, 2)$ در شکل (۴-۵) تصویر کشیده شده است.



شکل ۴-۵. نمایش جواب ${}^{CF}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۲۳)

به شکل (۴-۶) توجه کنید، تصویر مشتق ها کوهرای کاپچو تابع جواب معادله (۴-۲۳) در بازه $0 \leq x \leq 1$ نشان می‌دهد. همان طور که در شکل مشخص است این تابع برای بازه ${}^{CF}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر است.



شکل ۴-۶. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو ها کوهرای جواب ${}^{CF}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۲۳)

۴-۴ معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای فازی

معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای را تحت دیفرانسیل پذیری کاپچو به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_{gH}D_*^{\alpha_k} y(x) = f(x, y(x), {}_{gH}D_*^{\alpha_1} y(x), {}_{gH}D_*^{\alpha_2} y(x), \dots, {}_{gH}D_*^{\alpha_{k-1}} y(x)) \\ y^{(j)}(0) = y_0^{(j)} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (۲۷-۴)$$

که در آن $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ ، $m = [\alpha_k] + 1$ و $f: [0, T] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^k \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی پیوسته است.

ابتدا ما ثابت می‌کنیم که یک معادله چند مرتبه‌ای کسری فازی معادل یک دستگاه معادله دیفرانسیل کسری فازی تک مرتبه‌ای است.

۴-۴-۱ قضیه. در نظر بگیرید معادله

$${}_{gH}D_*^{\alpha_k} y(x) = f(x, y(x), {}_{gH}D_*^{\alpha_1} y(x), {}_{gH}D_*^{\alpha_2} y(x), \dots, {}_{gH}D_*^{\alpha_{k-1}} y(x)) \quad (۲۸-۴)$$

با شرایط اولیه

$$y^{(j)}(0) = y_0^{(j)} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (۲۹-۴)$$

که در آن $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ و برای $j = 1, 2, \dots, k$ داریم $\alpha_j \in \mathbb{Q}$ که حداقل یکی از آنها عدد صحیح نباشد. فرض کنید M کوچکترین مضرب مشترک از مخرج $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ باشد، قرار دهید $\gamma = \frac{1}{M}$ و $N = M\alpha_k$. در این صورت اگر نوع دیفرانسیل پذیری هر کدام از توابع ${}_{gH}D_*^{\alpha_j} y$ به ازای $j = 1, 2, \dots, k$ بر بازه $[0, T]$ تغییر نکند، این معادله با دستگاه معادله دیفرانسیل زیر معادل است

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^{\gamma} y_0(x) &= y_1(x) \\ {}_{gH}D_*^{\gamma} y_1(x) &= y_2(x) \\ &\vdots \\ {}_{gH}D_*^{\gamma} y_{N-2}(x) &= y_{N-1}(x) \\ {}_{gH}D_*^{\gamma} y_{N-1}(x) &= f(x, y_0(x), y_1(x), \dots, y_{N-1}(x)) \end{aligned} \quad (۳۰-۴)$$

با شرایط اولیه

$$y_j(0) = \begin{cases} y_0^{(\frac{j}{M})}, & \frac{j}{M} \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{eles.} \end{cases} \quad (31-4)$$

به عبارتی تابع $y \in C_{\mathbb{F}}^m[0, T]$ در معادله (28-4) با شرایط اولیه (29-4) صدق می کند اگر و تنها اگر بردار $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^t = (y, {}_{gH}D_*^\gamma y, {}_{gH}D_*^{2\gamma} y, \dots, {}_{gH}D_*^{(N-1)\gamma} y)^t$ دستگاه (30-4) را حل کند و در شرایط اولیه (31-4) صدق کند.

اثبات. طبق فرض حداقل یکی از α_j برای $j=1, 2, \dots, k$ غیر صحیح است که نتیجه می دهد $M \geq 2$ پس $0 < \gamma \leq \frac{1}{2}$. ابتدا فرض کنید که $Y = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^t$ جواب دستگاه (3-27) باشد پس ثابت می کنیم $y := y_0$ در معادله (28-4) و شرایط اولیه (29-4) صدق می کند. با استفاده از لم (3-4-7) داریم

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^\gamma y(x) &= {}_{gH}D_*^\gamma y_0(x) = y_1(x) \\ {}_{gH}D_*^{2\gamma} y(x) &= {}_{gH}D_*^\gamma {}_{gH}D_*^\gamma y(x) = {}_{gH}D_*^\gamma y_1(x) = y_2(x) \\ &\vdots \\ {}_{gH}D_*^{(N-1)\gamma} y(x) &= {}_{gH}D_*^\gamma {}_{gH}D_*^{(N-2)\gamma} y(x) = {}_{gH}D_*^\gamma y_{N-2}(x) = y_{N-1}(x) \\ {}_{gH}D_*^{N\gamma} y(x) &= {}_{gH}D_*^\gamma {}_{gH}D_*^{(N-1)\gamma} y(x) = {}_{gH}D_*^\gamma y_{N-1}(x) = f(x, y_0(x), y_1(x), \dots, y_{N-1}(x)) \end{aligned} \quad (32-4)$$

از آن جایی که $N\gamma = \alpha_k$ ، پس تابع $y(x)$ در معادله (28-4) صدق می کند. از طرفی

$$y_{gH}^{(j)}(0) = {}_{gH}D_*^j y(0) = y_{\frac{j}{M}}(0) = y_{jM}(0) = y_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

پس $y(x)$ در شرایط اولیه (29-4) نیز صدق می کند.

حال فرض کنید تابع $y \in C_{\mathbb{F}}^m[0, T]$ در معادله (28-4) که در شرایط اولیه (29-4) صدق کند. لذا $Y = (y, {}_{gH}D_*^\gamma y, {}_{gH}D_*^{2\gamma} y, \dots, {}_{gH}D_*^{(N-1)\gamma} y)^t = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^t$ جواب دستگاه (30-4) است و اگر $\frac{j}{M} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ آنگاه $y_j(0) = y_0^{(\frac{j}{M})}$ ، برای سایر جاها با توجه به لم (3-4-3) و پیوستگی تابع $y(x)$ داریم که $y_0(0) = 0$ می باشد.

□

از آن جایی که هر جواب معادله چند مرتبه ای کسری یک جواب برای دستگاه معادله دیفرانسیل کسری می باشد و برعکس، در اینجا ما وجود و یکتایی جواب دستگاه معادله دیفرانسیل کسری را ثابت می کنیم.

۴-۴-۲ قضیه. فرض کنید به ازای $0 < \alpha_j \leq 1$, $j=1,2,\dots,k$ باشد. دستگاه معادله دیفرانسیل کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_{gH}D_*^{\alpha_j} y_j(x) = f_j(x, y_1(x), \dots, y_k(x)), \\ y_j(0) = y_0^{(j)}, \end{cases} \quad j=1,2,\dots,k, \quad (۳۳-۴)$$

که در آن $f_j: [0, T] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}}^k$ به ازای $j=1,2,\dots,k$ توابعی پیوسته هستند و در شرط لپ شیتس صدق می-کند. یعنی

$$D(f_j(x, y_1(x), \dots, y_k(x)), f_j(x, z_1(x), \dots, z_k(x))) \leq L_j \sum_{i=1}^k D(y_i, z_i), \quad j=1,2,\dots,k,$$

که در آن L_j ها توابعی حقیقی مثبت هستند. در این صورت دستگاه (۳۳-۴) جواب منحصر بفرد پیوسته دارد.

اثبات. فرض کنید $y_j(x)$ برای $j=1,2,\dots,k$ ${}^{cf}[(i)-gH]$ دیفرانسیل پذیر از مرتبه α_j باشد. با توجه به نتیجه (۴-۲-۲) دستگاه (۳۳-۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$y_j(x) = y_j(0) \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^x (x-t)^{\alpha_j-1} f_j(t, y_1(t), \dots, y_k(t)) dt, \quad j=1,2,\dots,k. \quad (۳۴-۴)$$

بنابراین داریم

$$y_j(x) = y_j(0) \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \hat{f}_j(t, y_1(t), \dots, y_k(t)) dt, \quad j=1,2,\dots,k, \quad (۳۵-۴)$$

که در آن $\alpha = \min_j \alpha_j$, $j=1,2,\dots,k$ و $\hat{f}_j(t, y_1(t), \dots, y_k(t)) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_j)} (x-t)^{\alpha_j-\alpha} f_j(t, y_1(t), \dots, y_k(t))$ می باشد.

قرار دهید $Y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^t$ و $\hat{F} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_N)^t$ پس دستگاه (۳۳-۴) را به صورت زیر خواهیم داشت

$$Y(x) = Y(0) \oplus \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \hat{F}(t, Y(t)) dt. \quad (۳۶-۴)$$

از طرف دیگر، با توجه به پیوستگی f_j برای $j=1,2,\dots,k$ و اینکه در شرط لپ شیتس صدق می کنند داریم

$$D(\hat{f}_j(x, y_1(x), \dots, y_k(x)), \hat{f}_j(x, z_1(x), \dots, z_k(x))) =$$

$$D\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_j)}(x-t)^{\alpha_j-\alpha} f_j(t, y_1(t), \dots, y_k(t)), \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_j)}(x-t)^{\alpha_j-\alpha} f_j(t, z_1(t), \dots, z_k(t))\right) =$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_j)}(x-t)^{\alpha_j-\alpha} D(f_j(x, y_1(x), \dots, y_k(x)), f_j(x, z_1(x), \dots, z_k(x))) \leq \hat{L}_j \sum_{i=1}^k D(y_i, z_i), \quad j=1, 2, \dots, k,$$

که در آن $\hat{L}_j = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_j)}(x-t)^{\alpha_j-\alpha} L_j$. بنابراین $\hat{f}_j$ در شرط لیپ شیتس نسبت به y_j با ثابت لیپ شیتس $\hat{L}_j$ به ازای $j=1, 2, \dots, k$ صدق می‌کند، در نتیجه $\hat{F}$ در شرط لیپ شیتس نسبت به Y با ثابت لیپ شیتس $\hat{L}$ صدق می‌کند.

همچنین از آن جایی که معادله (۳۶-۴) معادله فازی ولترا از نوع دوم می‌باشد، پس طبق قضیه (۵-۹-۲) این معادله جواب دارد و جواب آن یکتاست.

حال فرض کنید جواب‌های $y_j(x)$ به ازای $j=1, 2, \dots, k$ ${}^{cf}[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر از مرتبه α_j باشد. پس با استفاده از نتیجه (۴-۲-۲)، دستگاه (۴-۳۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$y_j(x) = y_j(0) \ominus \frac{-1}{\Gamma(\alpha_j)} \int_0^x (x-t)^{\alpha_j-1} f_j(t, y_1(t), \dots, y_k(t)) dt, \quad j=1, 2, \dots, k. \quad (۴-۳۷)$$

همانند روند قبل می‌توان (۴-۳۴) را به صورت معادله انتگرال زیر نوشت

$$Y(x) = Y(0) \ominus \frac{-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \hat{F}(t, Y(t)) dt.$$

پس طبق قضیه (۲-۷-۵-۱) چون $\hat{F}$ در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند، این معادله انتگرال دارای جواب منحصر بفرد می‌باشد.

□

۴-۴-۱ کاربرد معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای فازی

یکی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل کسری در مکانیک سیالات معادله باگلی-تورویک است که به صورت زیر مدل بندی می‌شود

$$\begin{cases} y''_{gH}(x) = f(x) \oplus C_1 y(x) \oplus C_2 {}_{gH}D_*^{\frac{3}{2}} y(x), & x \geq 0, \\ y(0) = A, \quad y'_{gH}(0) = B & A, B \in \mathbb{R}_F \end{cases} \quad (38-4)$$

که در آن C_2, C_1 ضرایب ثابت حقیقی و $f(x)$ تابع فازی پیوسته معلوم است.

با استفاده از قضیه (۱-۴-۴) معادله (۳۸-۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_0(x) &= y_1(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_1(x) &= y_2(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_2(x) &= y_3(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_3(x) &= f(x) \oplus C_1 y_0(x) \oplus C_2 y_3(x) \end{aligned} \quad (39-4)$$

می توان دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری (۳۹-۴) به صورت زیر نشان داد

$${}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} Y(x) = \lambda Y(x) \oplus F(x)$$

که در آن

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ C_1 & 0 & 0 & C_2 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

حال قضیه را در فرم ماتریسی به کار می بریم و اگر $Y(x)$ بردار $[(i) - gH]^{-cf}$ دیفرانسیل پذیر باشد داریم

$$Y(x) = Y(0) E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}}) \oplus \lambda^{-1} \int_0^x q(t) F(x-t) dt \quad (40-4)$$

و اگر $Y(x)$ بردار $[(ii) - gH]^{-cf}$ دیفرانسیل پذیر باشد داریم

$$Y(x) = Y(0) E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}}) \ominus (-1) \lambda^{-1} \int_0^x q(t) F(x-t) dt \quad (41-4)$$

که در آن

$$q(x) = \frac{d}{dx} E_{\frac{1}{2}}(\lambda x^{\frac{1}{2}}) = \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda x^{\frac{1}{2}})^j}{\Gamma(1 + \frac{j}{2})}$$

یک تابع ماتریس مقدار است. با حل دستگاه (۴-۴۰) جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر و با حل دستگاه (۴-۴۱) جواب ${}^{cf}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۳۸) را بدست می‌آوریم که مولفه اول بردار $Y(x) = (y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x))^t$ می‌باشد.

۴-۴-۲ مثال‌های معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای

در این بخش برای توضیح بیشتر دو معادله باگلی-تورویک فازی را حل می‌کنیم.

۴-۴-۲-۱ مثال. معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y''_{gH}(x) = y(x) \oplus_{gH} D_*^{\frac{3}{2}} y(x) \ominus c(x+1), \\ y(0) = y'_{gH}(0) = c \end{cases} \quad (4-42)$$

که در آن c یک عدد فازی است. معادله (۴-۴۲) را می‌توان به دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر تبدیل کرد

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_0(x) &= y_1(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_1(x) &= y_2(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_2(x) &= y_3(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_3(x) &= y_0(x) \oplus y_3(x) \ominus c(x+1) \end{aligned} \quad (4-43)$$

سپس دستگاه (۴-۴۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$${}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} Y(x) = \lambda Y(x) \oplus F(x)$$

که در آن

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ominus c(x+1) \end{pmatrix}$$

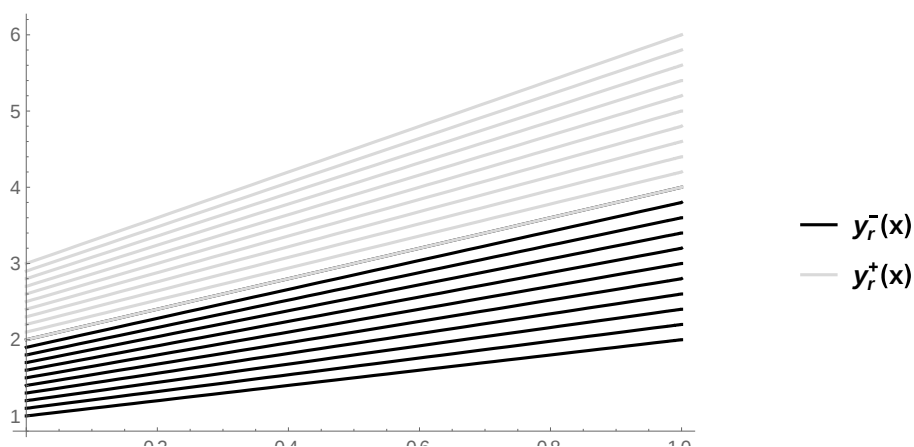
و لذا جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ - دیفرانسیل پذیر دستگاه $(\mathcal{E}-\mathcal{E}^3)$ از رابطه $(\mathcal{E}-\mathcal{E}^0)$ به صورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} Y(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} &= E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}}) \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \int_0^x \frac{d}{dt} (E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}})) \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ominus c(t+1) \end{pmatrix} dt \\ &= E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}}) \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \ominus \int_0^x \frac{d}{dt} (E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}})) \begin{pmatrix} c(t+1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt \end{aligned}$$

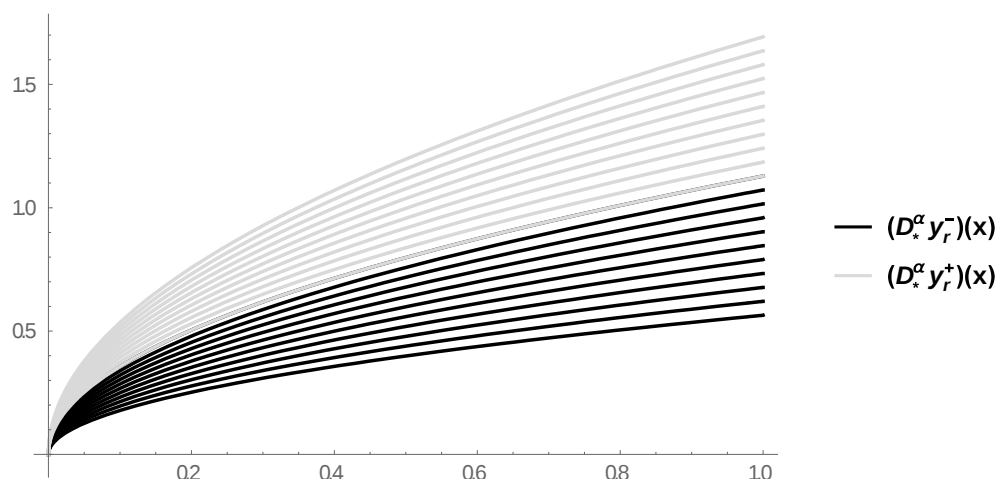
پس جواب معادله $(\mathcal{E}-\mathcal{E}^2)$ مولفه اول بردار $Y(x)$ یعنی $y_0(x)$ می باشد. با فرض اینکه $c = (1, 2, 3)$ یک عدد فازی مثلثی باشد جواب معادله $(\mathcal{E}-\mathcal{E}^2)$ برابر است با

$$y(x) = (1, 2, 3) \odot (x+1)$$

شکل $(\mathcal{E}-\mathcal{E}^5)$ جواب دقیق این معادله و شکل $(\mathcal{E}-\mathcal{E}^5)$ تابع مشتق کسری کاپچو تعمیم یافته ها کوهارا را به تصویر کشیده است. همان طور که از شکل تابع مشتق مشخص است، نوع دیفرانسیل پذیری جواب از نوع ${}^{cf}[(i) - gH]$ - دیفرانسیل پذیر می باشد.



شکل ۷-۴. نمایش جواب معادله $(\mathcal{E}-\mathcal{E}^2)$



شکل ۸-۴. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو ها کوهارای جواب ${}^{cf}[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴۲-۴)

۴-۲-۲-۲ مثال. معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای زیر را در نظر بگیرید

$$y_{gH}''(x) = f(x) \oplus 3y(x) \oplus \frac{3}{8} {}_{gH}D_*^{\frac{3}{2}} y(x) \quad (44-4)$$

که در آن $f(x) = -2cx \ominus (-1)cx^3 \ominus \frac{-c}{\Gamma[0.5]} x\sqrt{x}$ و مقدار اولیه برابر است $y(0) = y'_{gH}(0) = 0$ به طوری که c یک عدد فازی می‌باشد. برای بدست آوردن جواب ${}^{cf}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴۴-۴) دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را تشکیل می‌دهیم

$$\begin{aligned} {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_0(x) &= y_1(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_1(x) &= y_2(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_2(x) &= y_3(x) \\ {}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} y_3(x) &= f(x) \oplus 3y_0(x) \oplus \frac{3}{8} y_3(x) \end{aligned} \quad (45-4)$$

حال دستگاه (۴۵-۴) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$${}_{gH}D_*^{\frac{1}{2}} Y(x) = \lambda Y(x) \oplus F(x)$$

که در آن

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}, \quad \lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

با استفاده از رابطه (۳-۲۲) داریم

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_0(x) \\ y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = \ominus(-1) \int_0^x \frac{d}{dt} (E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}})) \lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix} dt = \ominus(-1) \int_0^x \frac{d}{dt} (E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}})) \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

جواب معادله (۴-۴۴) مؤلفه اول بردار $Y(x)$ می باشد که برابر است با

$$y(x) = \frac{1}{3} \int_0^x q_{11}(t) \left(\frac{c}{\Gamma[0.5]} (x-t)^{\frac{3}{2}} \oplus c(x-t)^3 \ominus 2c(x-t) \right) dt \quad (۴-۴۶)$$

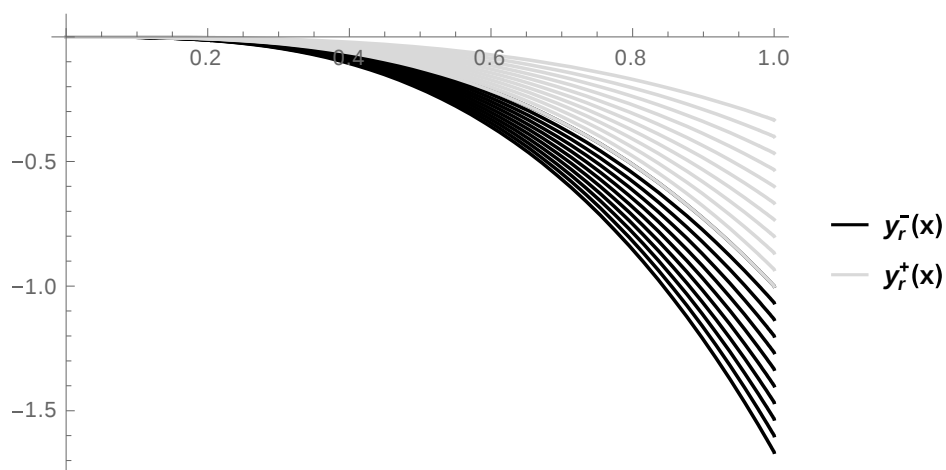
که در آن $q_{11}(t)$ مؤلفه واقع در سطر اول و ستون اول ماتریس

$$q(t) = \frac{d}{dt} E_{\frac{1}{2}}(\lambda t^{\frac{1}{2}}) = \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j t^{\frac{j}{2}}}{\Gamma[1+\frac{j}{2}]}$$

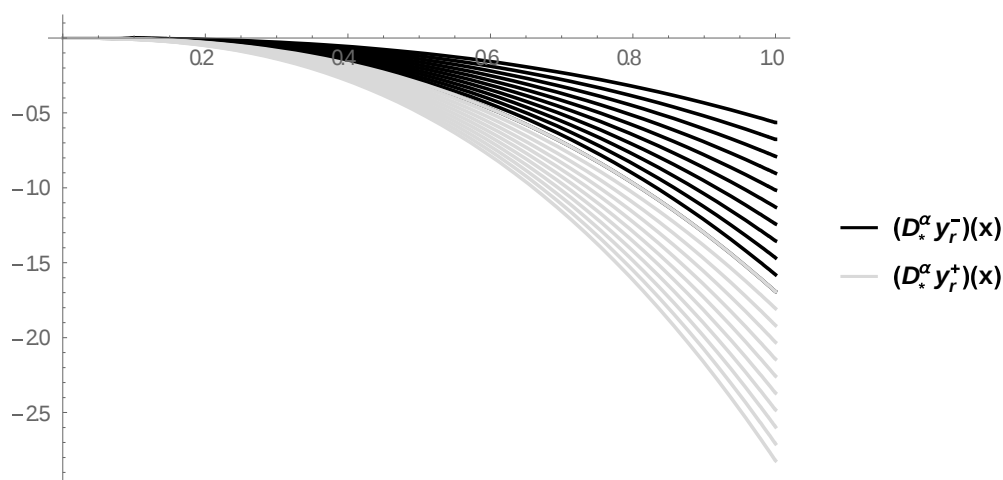
با جای گذاری $q_{11}(t)$ در معادله (۴-۴۶) جواب معادله (۴-۴۴) به صورت زیر بدست می آید

$$y(x) = -c \odot \frac{x^3}{3}$$

جواب دقیق معادله با قرار دادن $c=(1,3,5)$ که یک عدد فازی مثلثی می باشد، در شکل (۴-۷) به تصویر کشیده شده است و همچنین در شکل (۴-۸) جای r -برش های مشتق کسری کاپچو تعمیم یافته جواب معادله (۴-۴۴) عوض شده است که این امر نشان دهنده این است که جواب این تابع ${}^{cf}[(ii)-gH]$ دیفرانسیل پذیر است.



شکل ۴-۹. نمایش جواب معادله (۴۴-۴)



شکل ۴-۱۰. نمایش مشتق تعمیم یافته کاپچو هاگوهاری جواب ${}^c[(ii)-gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴۴-۴)

۵-۴ روش اویلر کسری فازی

معادله دیفرانسیل کسری با مقدار اولیه را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ({}_{gH}D_*^\alpha y)(x) = f(x, y(x)) & , x \in [a, b] \\ y(a) = \beta \in \mathbb{R}_F \end{cases} \quad (۴۷-۴)$$

که در آن $0 < \alpha \leq 1$ و $f: [a, b] \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابع پیوسته باشد. همچنین، ${}_{gH}D^{\alpha}y(x)$ نشان دهنده مشتق کاپچو تعمیم یافته ها کوهارا از مرتبه α از تابع مجهول $y(x)$ می باشد، که باید آن را تعیین کنیم. وجود و یکتایی جواب معادله (۴۷-۴) در قضیه (۴-۲-۳) بررسی شده است.

در این بخش به معرفی روش اویلر فازی برای حل معادله (۴۷-۴) می پردازیم. در واقع، دنباله از تقریب ها را برای جواب $y(x)$ در چندین نقطه به نام نقاط گره ای بدست می آوریم. برای بدست آوردن روش اویلر، بازه $[a, b]$ را به N زیر بازه با طول $h = \frac{b-a}{N}$ و نقاط گره ای $x_i = a + ih$ به ازای $i = 0, 1, 2, \dots, N$ تقسیم می کنیم.

ابتدا فرض کنید که جواب معادله (۴۷-۴) بر بازه $[a, b]$ پیوسته و ${}^{cf}[(i) - gH]$ دیفرانسیل پذیر باشد. بنابر قسمت (۱) قضیه (۳-۷-۳) بسط تیلور تعمیم یافته را حول نقطه گره ای x_k به ازای $k = 0, 1, \dots, N-1$ در نظر بگیرید پس داریم

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) \oplus \frac{(x_{k+1} - x_k)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot ({}_{gH}D^{\alpha}y)(x_k) \oplus \frac{(x_{k+1} - x_k)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \odot ({}_{gH}D^{2\alpha}y)(\xi_k) \quad (48-4)$$

از آنجایی که $h = x_{k+1} - x_k$ رابطه (۴۸-۴) را به صورت زیر می توان نوشت

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) \oplus \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot ({}_{gH}D^{\alpha}y)(x_k) \oplus \frac{h^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \odot ({}_{gH}D^{2\alpha}y)(\xi_k) \quad (49-4)$$

اگر طول گام h را کوچک در نظر بگیریم می توانیم از جمله سوم (۴۹-۴) صرف نظر کنیم، همچنین با توجه به اینکه $y(x)$ در معادله (۴۷-۴) صدق می کند، داریم

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) \oplus \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot f(x_k, y(x_k)) \quad (50-4)$$

برای ساختن روش اویلر کسری قرار می دهیم $y_k = y(x_k)$ به ازای $k = 1, 2, \dots, N$ ، لذا از مقدار اولیه داریم $y_0 = \beta$ و

$$y_{k+1} = y_k \oplus \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (51-4)$$

حال فرض کنید که جواب معادله (۴-۷) بر بازه $[a, b]$ پیوسته و ${}^{cf}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر باشد. لذا بسط تیلور تعمیم یافته تابع جواب حول نقطه گره‌ای x_k در نقطه x_{k+1} مطابق با قسمت (۲) قضیه (۳-۷-۳) به صورت زیر است

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) \ominus (-1) \frac{(x_{k+1} - x_k)^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot ({}_{gH}D_*^\alpha y)(x_k) \ominus (-1) \frac{(x_{k+1} - x_k)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \odot ({}_{gH}D_*^{2\alpha} y)(\xi_k) \quad (۴-۵۲)$$

لذا به صورت مشابه روش اوایلر برای ${}^{cf}[(ii) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر به صورت زیر است

$$y_{k+1} = y_k \ominus (-1) \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (۴-۵۳)$$

فرض کنید که $y(x)$ در نقطه $\xi \in [a, b]$ دیفرانسیل پذیری کاپچو آن از نوع I تعویض شود چنان که $x_0, x_1, \dots, x_j, \xi, x_{j+1}, \dots, x_N$ ، بنابراین با توجه به قسمت (۵) قضیه (۳-۷-۳)، روش اوایلر را به صورت زیر داریم

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k \oplus \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot f(x_k, y_k), & k = 0, 1, \dots, j \\ y_{k+1} = y_k \ominus (-1) \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot f(x_k, y_k), & k = j+1, j+2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (۴-۵۴)$$

و اگر در نقطه $\xi \in [a, b]$ نوع دیفرانسیل پذیری از نوع II تغییر کند، روش اوایلر به صورت زیر است

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k \ominus (-1) \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot f(x_k, y_k), & k = 0, 1, \dots, j \\ y_{k+1} = y_k \oplus \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \odot f(x_k, y_k), & k = j+1, j+2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (۴-۵۵)$$

۴-۵-۱ مثال‌های عددی معادله دیفرانسیل کسری فازی

۴-۵-۱-۱ مثال. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید

$$({}_{gH}D_*^\alpha y)(x) = (0, 1, 1.5)\Gamma(\alpha + 1), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (۴-۵۶)$$

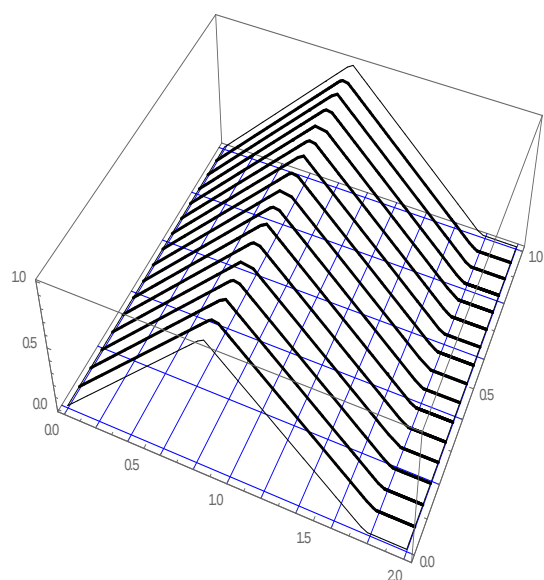
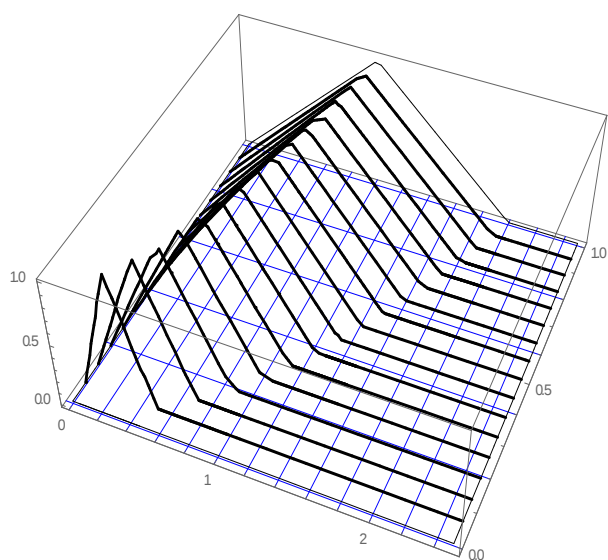
با مقدار اولیه $y(0) = 0$. اگر بخواهیم جواب ${}^{cf}[i - gH]$ -دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۵۶) را از روش اوایلر بدست بیاوریم، رابطه زیر را خواهیم داشت

$$y_{k+1} = y_k \oplus h^\alpha \odot (0,1,1.5), \quad k = 0,1,\dots, N-1. \quad (57-4)$$

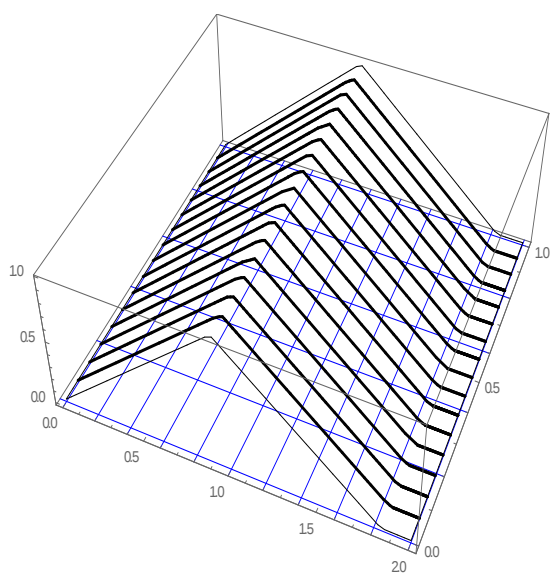
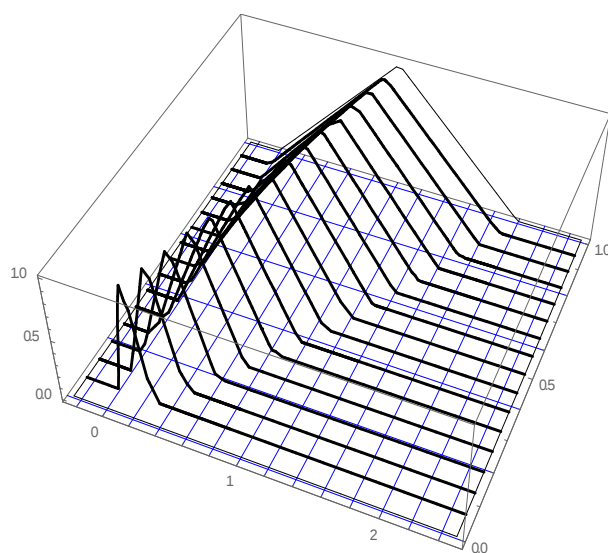
روش اویلر را با $h=0.1$ و $h=0.01$ اجرا کردیم که جواب های آن در جدول (4-1) به نمایش گذاشته شده است. جواب دقیق $[(i)-gH]^{-q}$ دیفرانسیل پذیر معادله (4-56) برابر $y(x) = (0,1,1.5)x^\alpha$ می باشد، که این تابع با مشتقات کاپچو تعمیم یافته ها کوهارا آن از مرتبه 0.5, 0.75, 1 در شکل های (4-11) - (4-13) رسم شده است.

جدول 4-1. نتایج عددی مثال 4-5-1-1

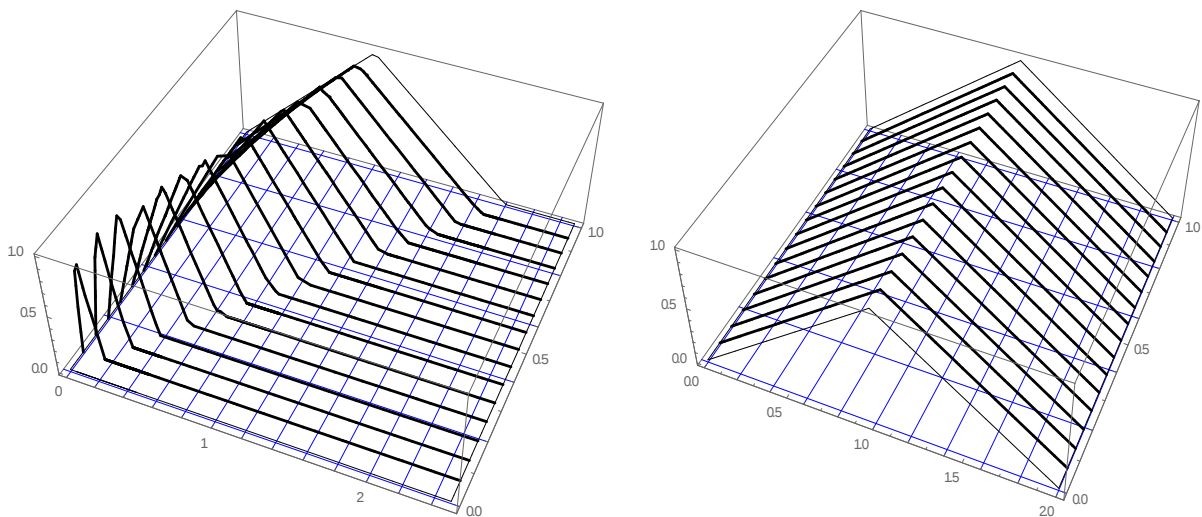
x	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1$	
	h=0.1	h=0.01	h=0.1	h=0.01	h=0.1	h=0.01
0.1	(0,0.31,0.47)	(0,0.1,0.15)	(0,0.17,0.26)	(0,0.03,0.04)	(0,0.1,0.15)	(0,0.1,0.15)
0.2	(0,0.63,0.94)	(0,0.2,0.30)	(0,0.35,0.53)	(0,0.06,0.09)	(0,0.2,0.30)	(0,0.2,0.30)
0.3	(0,0.94,1.42)	(0,0.3,0.45)	(0,0.53,0.80)	(0,0.09,0.14)	(0,0.3,0.45)	(0,0.3,0.45)
0.4	(0,1.26,1.89)	(0,0.4,0.60)	(0,0.71,1.06)	(0,0.12,0.18)	(0,0.4,0.60)	(0,0.4,0.60)
0.5	(0,1.58,2.37)	(0,0.5,0.75)	(0,0.88,1.33)	(0,0.15,0.23)	(0,0.5,0.75)	(0,0.5,0.75)
0.6	(0,1.89,2.84)	(0,0.6,0.90)	(0,1.06,1.60)	(0,0.18,0.28)	(0,0.6,0.90)	(0,0.6,0.90)
0.7	(0,2.21,3.32)	(0,0.7,1.05)	(0,1.24,1.86)	(0,0.22,0.33)	(0,0.7,1.05)	(0,0.7,1.05)
0.8	(0,2.52,3.79)	(0,0.8,1.20)	(0,1.42,2.13)	(0,0.25,0.37)	(0,0.8,1.20)	(0,0.8,1.20)
0.9	(0,2.84,4.26)	(0,0.9,1.35)	(0,1.60,2.40)	(0,0.28,0.42)	(0,0.9,1.35)	(0,0.9,1.35)
1.0	(0,3.16,4.74)	(0,1.0,1.50)	(0,1.77,2.66)	(0,0.31,0.47)	(0,1.0,1.50)	(0,1.0,1.50)



شکل ۴-۱۱: نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۶) به ازای $\alpha = 0.5$ (چپ) و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن (راست)



شکل ۴-۱۲: نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۶) به ازای $\alpha = 0.75$ (چپ) و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن (راست)



شکل ۴-۱۳: نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۶) به ازای $\alpha = 1$ (چپ) و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن (راست)

۴-۵-۱-۲ مثال. معادله دیفرانسیل کسری کاپچو زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ({}_gH D_*^\alpha y)(x) = -y(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = (0, 1, 2) \end{cases} \quad (۴-۵۸)$$

جواب دقیق $[(ii) - gH]^{-cf}$ دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۵۸) برابر $y(x) = (0, 1, 2)E_\alpha(-x^\alpha)$ می باشد.

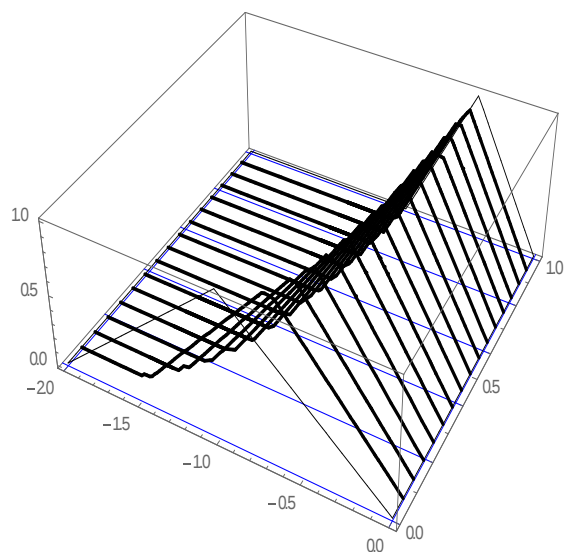
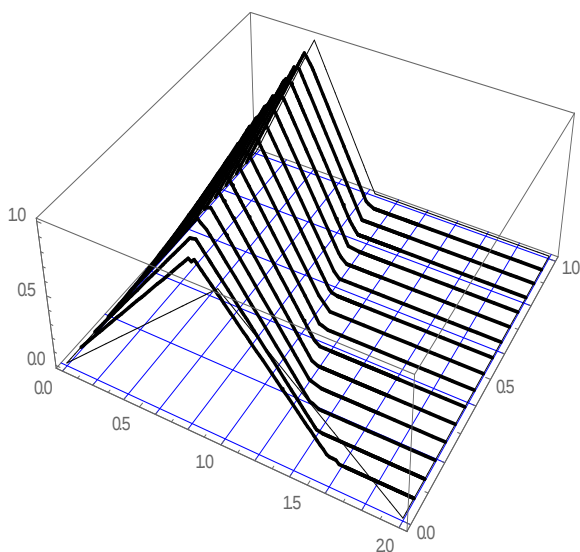
روش اوایلر برای تقریب جواب $[(ii) - gH]^{-cf}$ دیفرانسیل پذیر معادله (۴-۵۸) به صورت زیر است

$$\begin{cases} y_0 = (0, 1, 2), \\ y_{k+1} = y_k \ominus \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \odot y_k, & k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (۴-۵۹)$$

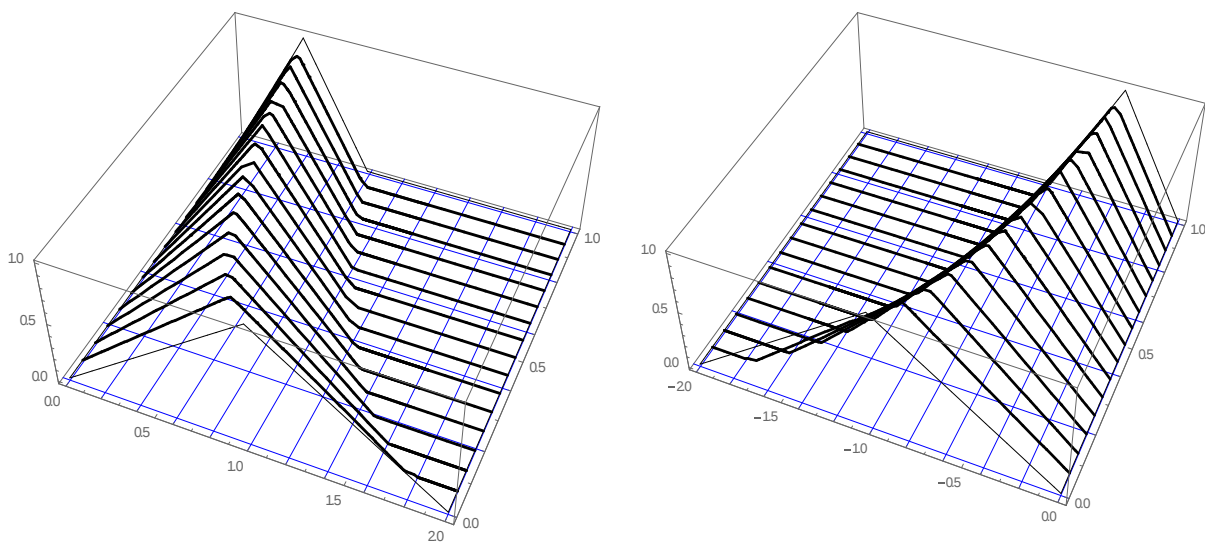
جدول (۴-۲) نتایج عددی این مثال را به ازای α های مختلف و طول گام های $h = 0.1$ و $h = 0.01$ نشان می دهد. همچنین شکل های (۴-۱۴)-(۴-۱۶) جواب و مشتقات کسری کاپچو را به تصویر کشیده است. نتایج بدست آمده در جدول و شکل های تابع مشتق کسری کاپچو نشان دهنده این است که با افزایش x پهنای جواب کاهش پیدا می کند لذا جواب بدست آمده $[(ii) - gH]^{-cf}$ دیفرانسیل پذیر است.

جدول ۲-۴. نتایج عددی مثال ۴-۵-۱-۲

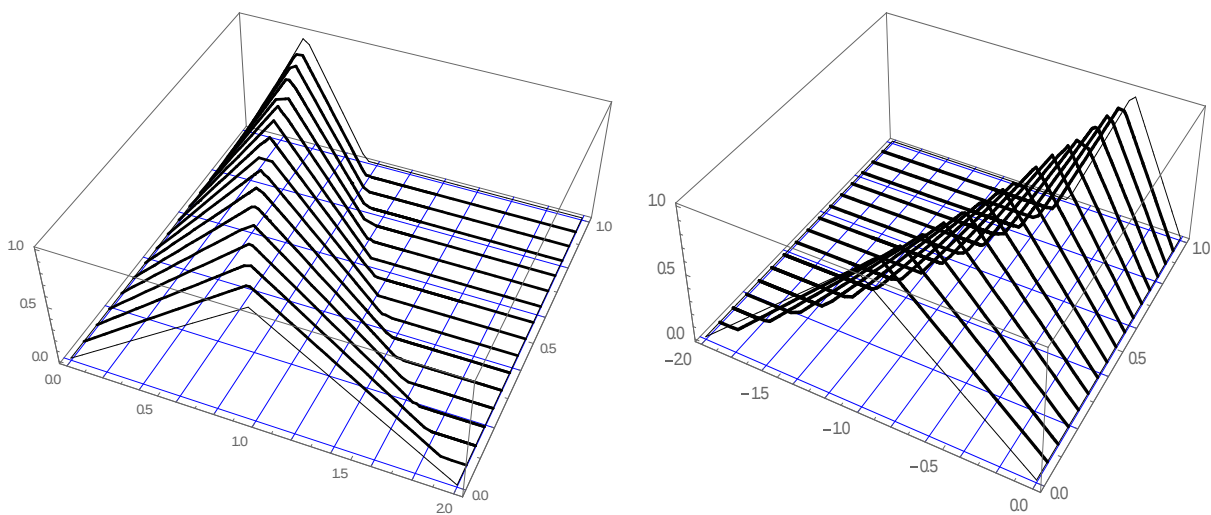
x	$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.75$		$\alpha = 1$	
	h=0.1	h=0.01	h=0.1	h=0.01	h=0.1	h=0.01
0.1	(0,0.64,1.28)	(0,0.3020,0.6040)	(0,0.80,1.61)	(0,0.70,1.40)	(0,0.90,1.80)	(0,0.90,1.80)
0.2	(0,0.41,0.82)	(0,0.0912,0.1824)	(0,0.65,1.30)	(0,0.49,0.99)	(0,0.81,1.62)	(0,0.81,1.63)
0.3	(0,0.26,0.53)	(0,0.0275,0.0551)	(0,0.52,1.04)	(0,0.34,0.69)	(0,0.72,1.45)	(0,0.73,1.47)
0.4	(0,0.26,0.34)	(0,0.0083,0.0166)	(0,0.42,0.84)	(0,0.24,0.49)	(0,0.65,1.31)	(0,0.66,1.33)
0.5	(0,0.17,0.22)	(0,0.0025,0.0050)	(0,0.34,0.68)	(0,0.17,0.34)	(0,0.59,1.18)	(0,0.60,1.21)
0.6	(0,0.11,0.22)	(0,0.0009,0.0017)	(0,0.27,0.55)	(0,0.12,0.24)	(0,0.53,1.06)	(0,0.54,1.09)
0.7	(0,0.07,0.14)	(0,0.0003,0.0006)	(0,0.22,0.44)	(0,0.08,0.17)	(0,0.47,0.95)	(0,0.49,0.98)
0.8	(0,0.04,0.09)	(0,0.0001,0.0002)	(0,0.17,0.35)	(0,0.05,0.11)	(0,0.43,0.86)	(0,0.44,0.89)
0.9	(0,0.02,0.05)	(0,0.0000,0.0001)	(0,0.14,0.28)	(0,0.04,0.08)	(0,0.38,0.77)	(0,0.40,0.80)
1.0	(0,0.01,0.03)	(0,0.0000,0.0000)	(0,0.11,0.23)	(0,0.03,0.06)	(0,0.34,0.69)	(0,0.36,0.73)



شکل ۴-۱۴: نمایش جواب دقیق معادله (۴-۵۸) به ازای $\alpha = 0.5$ (چپ) و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن (راست)



شکل ۴-۱۵: نمایش جواب دقیق معادله (۵۸-۴) به ازای $\alpha = 0.75$ (چپ) و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن (راست)



شکل ۴-۱۶: نمایش جواب دقیق معادله (۵۸-۴) به ازای $\alpha = 1$ (چپ) و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن (راست)

۴-۱-۵-۳ مثال. معادله دیفرانسیل کسری مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} ({}_{gH}D_*^\alpha y)(x) = \frac{\pi x^{1-\alpha} \alpha}{\Gamma(2-\alpha)} (0, \frac{1}{2}, 1) {}_1F_2(1, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{-1}{4} \pi^2 x^2 \alpha^2), & 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = (0, 0.5, 1) \sin(\alpha \pi) \end{cases} \quad (60-4)$$

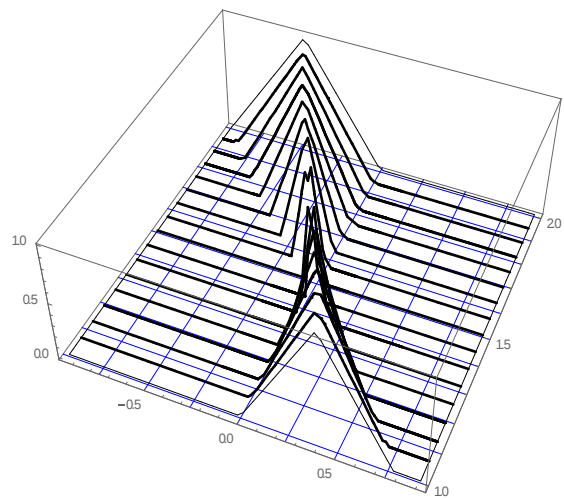
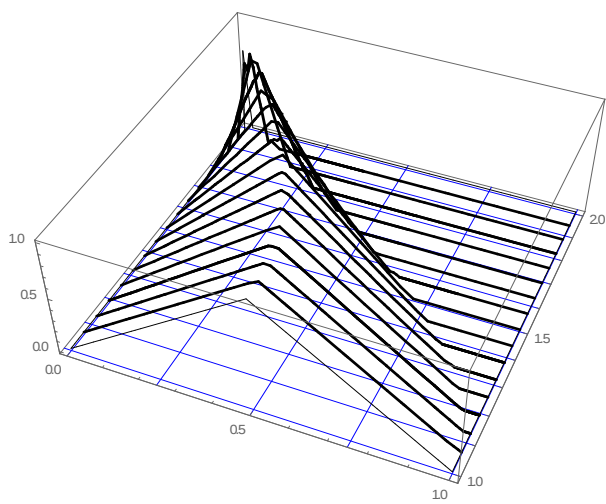
جواب این معادله دیفرانسیل برابر $y(x) = (0, 0.5, 1) \sin(\pi \alpha x)$ است. از آنجایی که جواب به ازای $\alpha = 0.5$ در نقطه $x = 1.463$ نوع دیفرانسیل پذیری کاپو آن از نوع I تعویض می‌شود. با افراز کردن بازه $[1, 2]$ به N زیر بازه، روش اوایلر به صورت زیر برای تقریب زدن جواب های معادله (۴-۶۰) ساخته می‌شود

$$\begin{cases} y_{k+1} = y_k \oplus \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \odot \left(\frac{\pi x_k^{1-\alpha} \alpha}{\Gamma(2-\alpha)} (0, \frac{1}{2}, 1) {}_1F_2(1, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{-1}{4} \pi^2 x_k^2 \alpha^2) \right), & k = 0, 1, \dots, j \\ y_{k+1} = y_k \ominus \frac{(-1)h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \odot \left(\frac{\pi x_k^{1-\alpha} \alpha}{\Gamma(2-\alpha)} (0, \frac{1}{2}, 1) {}_1F_2(1, 1-\frac{\alpha}{2}, \frac{3}{2}-\frac{\alpha}{2}, \frac{-1}{4} \pi^2 x_k^2 \alpha^2) \right), & k = j+1, j+2, \dots, N-1. \end{cases}$$

با در نظر گرفتن $N=10$ ، $N=100$ و $N=1000$ جواب های تقریبی بدست آمده در جدول (۴-۳) نشان داده شده است. ببینید شکل (۴-۱۷) که جواب معادله و مشتقات کسری کاپو تعمیم یافته آن را به تصویر کشیده است. همان طور که از شکل مشخص است که مشتق کاپو جواب این تابع در نقطه $x = 1.463$ نوع دیفرانسیل پذیری آن تغییر می‌کند.

جدول ۴-۳. نتایج عددی مثال ۴-۵-۱-۳

x	h=0.1	h=0.01	h=0.001
1.1	(0,0.49,0.98)	(0, 0.4936,0.9875)	(0,0.4942,0.9823)
1.2	(0,0.46, 0.93)	(0,0.4745,0.9514)	(0,0.4747,0.9512)
1.3	(0,0.42, 0.86)	(0,0.4468,0.8923)	(0,0.4452,0.8920)
1.4	(0,0.41, 0.80)	(0,0.4024, 0.8092)	(0,0.4023,0.8031)
1.5	(0, 0.35,0.71)	(0,0.3526,0.7072)	(0,0.3523,0.7062)
1.6	(0, 0.30, 0.59)	(0,0.2945,0.5835)	(0,0.2923,0.5832)
1.7	(0,0.20, 0.43)	(0,0.2248,0.4583)	(0,0.2246,0.4545)
1.8	(0,0.16,0.31)	(0,0.1536,0.3148)	(0,0.1536,0.3903)
1.9	(0, 0.04, 0.13)	(0,0.1265,0.0264)	(0,0.0234,0.0011)
2.0	(0,-0.00,-0.00)	(0,-0.0124,-0.0184)	(0,0.0000,0.0000)



شکل ۴-۱۷: نمایش جواب دقیق معادله (۴-۶۰) به ازای $\alpha = 0.5$ (چپ) و مشتق کاپچو تعمیم یافته آن (راست)

فصل پنجم

نتایج و پیشنهادات

۱-۵ نتایج حاصل از تحقیق

در این رساله، مشتق کسری کاپچو از توابع فازی مقدار تعریف گردید. در تعریف این نوع از دیفرانسیل پذیری کسری به مشتق تابع فازی از مرتبه صحیح نیاز داشتیم بنابراین باید از یکی از انواع دیفرانسیل توابع فازی مانند هاکوهارا، تعمیم یافته قوی، و یا تعمیم یافته هاکوهارا استفاده می‌کردیم. اما با توجه به اینکه ضعف‌های دیفرانسیل پذیری تعمیم یافته هاکوهارا از دیگر تعاریف کمتر است و محاسبه کردن آن بسیار سهل و کاربردی‌تر می‌باشد، ما در تعریف کردن مشتق کاپچو از این نوع مشتق استفاده کرده ایم. لذا ما نیز دو نوع دیفرانسیل پذیری کسری کاپچو برای توابع فازی مقدار داریم و در بعضی مواقع نوع دیفرانسیل پذیری عوض می‌شود که نقطه تعویض دیفرانسیل پذیری کاپچو آن را نامیدیم. سپس قواعد مشتق‌گیری کسری کاپچو را برای مجموع، تفاضل، حاصل ضرب اسکالر توابع فازی مقدار را بیان کردیم. همچنین روابط بین مشتق کسری و انتگرال ریمان-لیوویل بدست آوردیم. سپس قضیه مقدار متوسط فازی را اثبات نمودیم این قضیه این مطلب اثبات کرد که اگر یک تابع فازی مقدار پیوسته باشد آنگاه به ازای هر مقدار فازی در برد تابع، وجود دارد حداقل یک عضو از دامنه آن که مقدار تابع در آن نقطه با آن برابر است. سپس

قضیه بسیار مهم از ریاضی عمومی فازی یعنی قضیه مقدار میانی انتگرال فازی را بدست آورده‌ایم. در این قضیه ثابت کردیم که اگر حاصل ضرب دو تابع فازی و حقیقی را داشته باشیم به طوری که تابع فازی پیوسته باشد و تابع حقیقی بر بازه انتگرال گیری تغییر علامت ندهد، تابع فازی می‌تواند یک مقدار را بر بازه انتگرال گیری اخذ کند و از انتگرال بیرون بیاید. با این مفهوم توانستیم، قضیه مقدار میانی انتگرال کسری ریمان-لیوویل را ثابت کنیم. همچنین بسط تیلور را برای مشتق کاپچو فازی تعمیم یافته بدست آوردیم. با توجه به کاربرد بسط تیلور در ریاضیات فازی، در ادامه بسط تیلور تعمیم یافته را ارائه نمودیم. بسط تیلور تعمیم یافته برای هر مرتبه‌ای قابل استفاده است و اگر مرتبه آن را یک قرار دهیم همان بسط تیلور معمولی که در بسیاری از زمینه‌ها کاربرد دارد را بدست آورده‌ایم. از این رو، از این پس می‌توان هر تابع تحلیلی فازی مقدار را به صورت یک سری نمایش داد. که این موضوع از لحاظ کاربرد بسیار حائز اهمیت خواهد بود. ارجحیتی که نگرش ما در این پایان نامه نسبت به کارهای قبلی داشت این است که ما از 2 -برش‌های توابع استفاده نمی‌کنیم و مستقیماً بسط تیلور تابع فازی را می‌نویسیم.

سپس بعد از بدست آوردن این مفاهیم، توانستیم معادله دیفرانسیل کسری فازی را تحت دیفرانسیل پذیری کسری کاپچو تعمیم یافته تعریف نماییم. شرایط وجود و یکتایی جواب معادله معرفی شده را با استفاده از شرایط کرانوسلسکی-کراین اثبات کردیم. پس از آن، معادله کسری خطی را معرفی کردیم و با استفاده از تابع میتگ-لفلر جواب‌های تحلیلی این معادله را بدست آوردیم. چند مثال از این نوع معادله را حل کردیم و توانستیم جواب‌های آن را بدون برش زدن معادله، بدست بیاوریم. جواب‌های دقیق را رسم کردیم و با رسم مشتق جواب بدست آمده نوع دیفرانسیل پذیری آن را نشان دادیم.

اما از آنجایی که در بیشتر معادلات کسری بیش از یک مرتبه مشتق داریم، پس لازم بود که معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای را تعریف کنیم. پس برای حل آن بر آن شدیم که با استفاده از تغییر متغیر معادله را به یک معادله کسری معمولی تبدیل کنیم و با انجام تغییر متغیر معادله دیفرانسیل کسری چند مرتبه‌ای را به یک دستگاه معادله دیفرانسیل کسری فازی معمولی از مرتبه $0 < \alpha \leq 1$ تبدیل کردیم. از این رو لازم شد که ثابت کنیم جواب معادله در دستگاه معادله دیفرانسیل نظیرش صدق می‌کند و برعکس، که این مهم نیز با استفاده از ویژگی‌هایی که برای مشتق کاپچو تعمیم یافته اثبات کرده‌ایم، انجام شد. سپس این دستگاه معادله دیفرانسیل کسری را به فرم یک معادله انتگرال تبدیل کردیم و وجود و منحصر بفردی جواب را با شرط لپ شیتس بدست آوردیم. همان طور که توضیح دادیم، هر معادله دیفرانسیل چند مرتبه‌ای فازی تبدیل به یک دستگاه معادله دیفرانسیل تک مرتبه‌ای فازی شده است. پس ما روشی را که برای معادله دیفرانسیل معمولی داشتیم را برای حل آن تعمیم دادیم به طوری که در این حالت ضرایب معادله به فرم یک ماتریس هستند،

با این روش ما جواب های (i) و (ii)-دیفرانسیل پذیر کاپچو معادله باگلی-تورویک را بدست آوردیم. با حل دو مثال از این معادله در فصل چهارم نشان دادیم که روش ارائه شده بسیار موثر و کارآمد است و چگونه می تواند معادلات کسری چند مرتبه ای که حل آنها همواره کار ساده ای نیست را حل کند.

از معایب روش ارائه شده این است که ما در فرم کلی جواب از حاصل ضرب تابع میتگ-لفلر و یک تابع فازی مقدار باید انتگرال بگیریم، در بعضی از مثال ها ممکن است که انتگرال حاصل قابل حل نباشد، که در این مواقع باید انتگرال را به یکی از روش های انتگرال گیری عددی تقریب بزنیم. همچنین برای بدست آوردن جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری خطی فازی باید ماتریس ضرایب معکوس پذیر باشد در غیر این صورت نمی توان جواب معادله دیفرانسیل چند مرتبه ای را نمی توان از این روش بدست آورد.

در این پایان نامه، برای بدست آوردن جواب های عددی معادلات دیفرانسیل کسری فازی بر آن بودیم که جواب های معادله را بدون استفاده از برش های معادله حل کنیم. از رو با فازی کردن اصل و پایه بسط تیلور توانستیم روشی را برای حل معادلات دیفرانسیل کسری به نام روش اویلر کسری بدست بیاوریم. این روش را در حالات ${}^q[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر، ${}^q[(i) - gH]$ -دیفرانسیل پذیر و زمانی که نوع دیفرانسیل پذیری در بازه تعریفش عوض شود را بررسی نموده ایم.

روش ارائه شده با توجه به اینکه قابلیت حل معادلات دیفرانسیل کسری فازی بدوش برش زدن مساله را دارد. از آن جایی که روش از قطع کردن جملات دوم به بعد بسط تیلور بدست آمده است از این رو جواب ها از دقت بالایی برخوردار نیستند. اما این روش پیچیدگی محاسباتی ندارد و روش موثر و کارآمدی است.

۲-۵ پیشنهادات

در راستای این پایان نامه می توانیم روش هایی که بر پایه روش تیلور گفته شده اند را همچون روش آدومین و بسیاری از روش های عددی دیگر بیان کرد. همچنین با توجه به کارایی و سهولت استفاده از روش اویلر می توان معادلات مختلف را با این روش حل نمود. همچنین می توانیم که مشتقات جزئی کسری تعمیم یافته ها کوهارا را تعریف کنیم تا بتوانیم دسته وسیع تری از معادلات دیفرانسیل کسری فازی را همچون معادله شور دینگر^۱ که مربوط به کنترل رفتار دینامیکی ذرات کوانتومی می باشد، معادله بلوخ^۲ که برای مدل سازی

1. Schrodinger
2. Bloch

مغناطیسی هسته ای استفاده می‌شود، معادله زمان-کسری^۱، معادله ایدز^۲، معادله مشتق جزئی هذلولوی، معادلات کسری ضربه‌ای^۳ و بسیاری از معادلات کسری دیگر را بررسی نماییم.

پیشنهاد دیگری که می‌تواند مفید باشد این است که با توجه به اینکه در حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، انواع متعددی از تعریف مشتق و انتگرال کسری مانند انتگرال و مشتق کسری هادامارد، انتگرال و مشتق کسری گرونوالد - لتنیکوف، انتگرال و مشتق اردلی-کوبر، و غیره وجود دارد، می‌توان این مفاهیم را برای توابع فازی مقدار تعمیم دهیم و معادلات دیفرانسیل، انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل نظیر آنها را تعریف کرد و جواب های آن را بدست آورد. این مفاهیم از حساب دیفرانسیل کسری تاکنون تعریف نشده است که با ورود به این حوزه می‌توان کارهای بسیار کاربردی و پراستنادی را انجام داد.

1. Time-fractional
2. HIV
3. Impulsive

فهرست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Allahviranloo, T., Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2014). Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 26 (3): 1481–1490.
2. Allahviranloo, T., Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2014). Some results on fuzzy fractional calculus. *The 21st Seminar on Mathematical Analysis and its Applications*, Islamic Azad University, Hamedan, Iran: 61-63.
3. Armand, A., Allahviranloo, T., and Gouyandeh, Z. (2016). General solution of Basset equation with Caputo generalized Hukuhara derivative. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 6 (1): 119-130.
4. Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2015). Fuzzy fractional integro-differential equations under generalized Caputo differentiability. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 10 (5): 789-798.
5. Armand, A., and Mohammadi, S. (2014). Existence and uniqueness for fractional differential equations with uncertainty, *Journal of Uncertainty in Mathematics Science*, 2014:1-9.
6. Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2016). Fuzzy multi-order fractional differential equations under generalized Caputo differentiability. *Int. J. Industrial Mathematics*, In press:1-12.
7. Allahviranloo, T., Abbasbandy, S., Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2014). The fuzzy generalized Taylor's expansion with application in fractional differential equations, Submitted for Publication: 1-16.

- [1] Abbasbandy, S. (2007). An approximation solution of a nonlinear equation with Riemann-Liouville's fractional derivatives by He's variational iteration method. *J. Comput. Appl. Math.*, 207 (1): 53-58.
- [2] Abbasbandy, S., Allahviranloo, T., Lopez-Pouso, O., and Nieto, J. (2004). Numerical methods for fuzzy differential inclusions. *Computers and Mathematics with Applications*, 48 (1011): 1633 – 1641.
- [3] Agarwal, R. P., V. Lakshmikantham, V., and Nieto, J. J. (2011). On the concept of solution for fractional differential equations with uncertainty. *Nonlinear Analysis*, 72: 2859-2862.
- [4] Ahmad, M. Z., Hasan, M. K., and Abbasbandy, S. (2013). Solving Fuzzy Fractional Differential Equations Using Zadeh's Extension Principle. *The Scientific World Journal*, 2013: 1-11.
- [5] Ahmadian, A., Suleiman, M. and Salahshour, S., and Baleanu, D. (2013). A Jacobi operational matrix for solving a fuzzy linear fractional differential equation, *Advances in Difference Equations*, 2013 (104): 1-29.
- [6] Alikhani, R. and Bahrami, F. (2013). Global solutions for nonlinear fuzzy fractional integral and integro-differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18 (8): 2007 – 2017.
- [7] Allahviranloo, T., Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2014). Fuzzy fractional differential equations under generalized fuzzy Caputo derivative. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 26 (3): 1481–1490.
- [8] Allahviranloo, T., Armand, A., Gouyandeh, Z., and Ghadiri, H. (2013). Existence and uniqueness of solutions for fuzzy fractional Volterra-Fredholm integro-differential equations, *Journal of Fuzzy Set Valued Analysis*, 2013: 1-9.
- [9] Allahviranloo, T., Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2014). Some results on fuzzy fractional calculus. *The 21st Seminar on Mathematical Analysis and its Applications*, Islamic Azad University, Hamedan, Iran: 61-63.
- [10] Allahviranloo, T., Abbasbandy, S., and Salahshour, S. (2011). Fuzzy fractional differential equations with Nagumo and Krasnoselskii-Krein condition, *Advances in Intelligent Systems Research*: 1038–1044.
- [11] Allahviranloo, T., Gouyandeh, Z., Armand, A., and Hasanoglu, A. (2014). On fuzzy solutions for heat equation based on generalized Hukuhara differentiability. *Fuzzy Sets and Systems*, 265: 1-23.
- [12] Allahviranloo, T., Salahshour, S., and Abbasbandy, S. (2012). Explicit solutions of fractional differential equations with uncertainty. *Soft Computing*, 16 (2): 297–302.
- [13] Anastassiou, G. A. (2010). *Fuzzy Mathematics: Approximation Theory*. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer Berlin Heidelberg.
- [14] Armand, A., and Mohammadi, S. (2014). Existence and uniqueness for fractional differential equations with uncertainty, *Journal of Uncertainty in Mathematics Science*, 2014:1-9.
- [15] Armand, A., and Gouyandeh, Z. (2016). Fuzzy multi-order fractional differential equations under generalized Caputo differentiability. *Int. J. Industrial Mathematics*, In press.
- [16] Arshad, S., and Lupulescu, V. (2011) On the fractional differential equations with uncertainty. *Nonlinear Analysis*, 74: 3685–3693.
- [17] Arshad, S. (2013). On existence and uniqueness of solution of fuzzy fractional

differential equations. Iranian Journal of Fuzzy Systems 10 (6): 137-151.

- [18] Bede, B. (2013). Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Springer Berlin Heidelberg.
- [19] Bede, B., and Gal, S. G. (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems, 151 (3): 581 – 599.
- [20] Bede, B., and Gal, S. G. (2010). Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability. Commun. Math. Anal., 9 (2): 22-41.
- [21] Bede, B., and Stefanini, L. (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions. Fuzzy Sets and Systems, 230 (2013): 119 – 141.
- [22] Chang, S. S. L., and Zadeh, L. (1972). On fuzzy mapping and control. Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on, SMC-2(1):30-34.
- [23] Diethelm, K. (2010). The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Number no. 2004 in Lecture Notes in Mathematics, springer.
- [24] Dubois, D., and Prade, H. (1978). Operations on fuzzy numbers. Fuzzy set and system, 9: 613-626.
- [25] Dubois, D., and Prade, H. (1982). Towards fuzzy differential calculus, Fuzzy Sets Systems, 8: 1–7.
- [26] Gouyandeh, Z., Armand, A. (2016). On fuzzy solution for exact second order fuzzy differential equation. Int. J. Industrial Mathematics, In press.
- [27] Guang-Quan, Z. (1991). Fuzzy continuous function and its properties. Fuzzy Sets and Systems, 43 (2): 159 – 171.
- [28] Hajighasemi, S., Allahviranloo, T., Khezerloo, M., Khorasany, M., and Salahshour, S. (2010). Existence and uniqueness of solutions of fuzzy volterra integro-differential equations. In Hullermeier, E., Kruse, R., and Hoffmann, F., editors, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems. Applications, Communications in Computer and Information Science, 81: 491–500.
- [29] Hukuhara, M. (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. Funkcialaj Ekvacioj, 10:205 – 223.
- [30] Kaleva, O. (1987). Fuzzy differential equations. Fuzzy Sets and Systems, 24(3): 301-317.
- [31] Kaleva, O., and Seikkala, S., (1984). On fuzzy metric spaces, Fuzzy Sets and Systems, 12 (3): 215-229.
- [32] Khastan, A., Nieto, J., and Rodriguez-Lopez, R. (2013). Periodic boundary value problems for first-order linear differential equations with uncertainty under generalized differentiability. Information Sciences, 222(10):544-558.
- [33] Khodadadi, E., and Çelik, E. (2013). The variational iteration method for fuzzy fractional differential equations with uncertainty, Fixed Point Theory and Applications, (2013): 1-13.
- [34] Mazandarani, M., and Kamyad, A. V. (2013). Modified fractional Euler method for solving fuzzy fractional initial value problem. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 18(1):12 – 21.
- [35] Mazandarani, M., and Najariyan, M. (2014). Type-2 fuzzy fractional derivatives. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 19(7):2354 – 2372.
- [36] Mizumoto, M., and Tanaka, K., (1976). The four operations of arithmetic on fuzzy numbers, Systems Computer Controls 7 (5): 73–81.

- [37] Nieto, J., Khastan, A., and Ivaz, K. (2009). Numerical solution of fuzzy differential equations under generalized differentiability. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 3(4): 700 – 707.
- [38] Park, J. Y., and Jeong, J. U. (1999). A note on fuzzy integral equations. *Fuzzy Sets and Systems*, 108 (2): 193-200.
- [39] Podlubny, I. (1998). *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. Mathematics in Science and Engineering. Elsevier Science.
- [40] Puri, M., and Ralescu, D. (1983). Differentials of fuzzy functions *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91 (2): 552–558.
- [41] Salahshour, S., Allahviranloo, T., and Abbasbandy, S. (2012). Solving fuzzy fractional differential equations by fuzzy laplace transforms. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(3): 1372 – 1381.
- [42] Seikkala, S. (1987). On the fuzzy initial value problem. *Fuzzy Sets and Systems*, 24 (3): 319-330.
- [43] Stefanini, L. (2008). A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic. Working Paper EMS Series, University of Urbino.
- [44] Stefanini, L. (2010). A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, 161 (11): 1564-1584.
- [45] Stefanini, L. and Bede, B. (2009). Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 71 (34): 1311-1328.
- [46] Takaci, D., Takaci, A., and Takaci, A. (2014). On the solutions of fuzzy fractional differential equation. *TWMS J. App. Eng. Math.*, 4 (1): 98-103.
- [47] Torvik, P.J., and Bagley, R. L. (1984). On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 51 (2): 294-298.
- [48] Wang, Z. and Wang, X. (2010). General solution of the Bagley-Torvik equation with fractional-order derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15 (5): 1279 – 1285.
- [49] Zadeh, L. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8 (3): 338-353.
- [50] Zimmermann, H. (2001). *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Springer Netherlands.

نمادها و علائم

توابع

D فاصله هاسدورف

Γ تابع گاما که برابر است با

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt,$$

erf تابع خطا که برابر است با

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

E_{α} تابع میتگ-لفلر از مرتبه α که برابر است با

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}$$

E_{α_1, α_2} تابع میتگ-لفلر با دو پارامتر α_1, α_2 که برابر است با

$$E_{\alpha_1, \alpha_2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha_1 j + \alpha_2)}$$

${}_1F_1$ تابع کومر که برابر است با

$${}_1F_1(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(b+k)k!} x^k \quad a \in \mathbb{R}, -b \notin \mathbb{N}_0$$

${}_2F_1$ تابع فوق هندسی گاوسی که برابر است با

$${}_2F_1(a, b, c; x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)k!} x^k \quad a, b \in \mathbb{R}, -c \notin \mathbb{N}_0$$

مجموعه ها

$\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی که برابر است با $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{N}_0$ $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح که برابر است با $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{R}^+$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت که برابر است با $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

$\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ مجموعه فازی بر محور اعداد حقیقی

$C_{\mathbb{F}}[a,b]$ مجموعه توابع فازی مقدار پیوسته بر $[a,b]$

$C_{\mathbb{F}}^m[a,b]$ مجموعه توابع فازی مقدار که تا مشتقات مرتبه m ام آنها بر $[a,b]$ پیوسته باشد

$L_{\mathbb{F}}[a,b]$ مجموعه توابع فازی مقدار لبگ انتگرال پذیر بر $[a,b]$

عملگرها

جمع فازی $\oplus$

تفریق هاکوها را $\ominus$

ضرب فازی $\odot$

تفریق تعمیم یافته ی هاکوها را $\ominus_{gH}$

انتگرال معین که برابر است با $I = \int_a^b f(x) dx$ I

انتگرال ریمان-لیوویل فازی از مرتبه α که برابر است با J_a^α

$$(J_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

مشتق کسری تعمیم یافته ی هاکوها را از مرتبه α که برابر است با ${}_{gH}D_*^\alpha$

$${}_{gH}D_*^\alpha f(x) = J_a^{m-\alpha} (f_{gH}^{(m)})(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(m-\alpha-1)} f_{gH}^{(m)}(t) dt$$

Title

Numerical and analytical methods for solving uncertain fractional differential equations

Abstract

In this thesis, fuzzy fractional differential equation is investigated. For this, the Caputo fractional derivative is defined based on generalized Hukuhara differentiability, and its rules and properties proved in details. Then, the fuzzy fractional differential equation is considered and its existence and uniqueness condition of solution obtained under presented differentiability concept. Also, an analytical method is introduced for getting solution of fuzzy linear and multi-order fractional differential equation. Moreover numerical solutions of this set of equations are obtained by fuzzy fractional Euler method. Since, this method is defined based on fuzzy generalized Taylor expansion, the generalized Taylor expansion is also introduced using generalized Caputo differentiability. At the end, to more illustration several examples of fuzzy fractional differential equations are solved and analytical and numerical solutions obtained.

Keywords: Fuzzy fractional differential equation, Caputo generalized Hukuhara derivative, Fuzzy intermediate theorem, Fuzzy integral mean value theorem, Fuzzy mean value theorem for Riemann-Liouville integral, Fuzzy generalized Taylor expansion, Fuzzy fractional Euler method.

By Atefeh Armand