معاونت پژوهش و فن‌آوری

به نام خدا

منشور اخلاق پژوهش

باری از خداوند جهان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و تکریم و اهمیت جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری، ما دانشجویان و اعضاء هیات علمی واحدهای دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی سرلوحه کار قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هر گونه پنهان سازی حقیقت.

۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.

۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه همکاران پژوهش.

۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن و پیشبرد توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.

۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هر گونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.

۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشور و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.

۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقوا و خودداری از هر گونه حرمت شکنی.

۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به همکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.

۹- اصل برائت: التزام به برائت جویی از هر گونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلایند.

واحد علوم و تحقیقات

تعهد نامه اصالت رساله یا پایان نامه

اینجانب فضل الله عباسی دانش آموخته مقطع دکترای تخصصی در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۱۳۹۴/۶/۷ از پایاننامه / رساله خود تحت عنوان **" نگرش نو به ریاضیات فازی براساس تعریف جدید از عملگرهای حساب فازی"** با کسب نمره ۱۵ / ۱۹ با درجه عالی دفاع نموده ام بدین وسیله متعهد می شوم:

۱- این پایان نامه / رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی وپژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه ، کتاب، مقاله و.....) استفاده نموده ام ، مطابق ضوابط و رویه موجود ، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

۲- این پایان نامه / رساله قبلاً برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح ، پایین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و موسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

۳- چنانچه بعد فراغت از تحصیل ، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب ، ثبت اختراع و.... ازاین پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نماییم.

۴- جنانچه در هر مقطعی زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

فضل الله عباسی

تاریخ و امضاء:

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

دانشکده علوم پایه

رساله دکتری رشته ریاضی(Ph.D)

گرایش: کاربردی

عنوان:

نگرش نو به ریاضیات فازی براساس تعریف جدید از عملگرهای حساب فازی

استادان راهنما:

دکتر توفیق الهویرنلو

دکتر سعید عباس بندی

استادان مشاور:

دکتر احمد پوردرویش

دکتر رضا سعادتی

نگارش:

فضل الله عباسی

تابستان ۱۳۹۴

سپاسگزاری:

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت
تا وسعت آن را از دریچه اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، این پایان نامه به انجام نمی رسید.
ابتدا از اساتید گرانقدر جناب دکتر توفیق الهویرنلو و جناب دکتر سعید عباس بندی که زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.
از اساتید عالی قدرم جناب دکتر احمد پوردرویش و جناب دکتر رضا سعادتی که زحمت مشاوره این پایان نامه را متحمل شدند، صمیمانه تشکر می کنم و همچنین، از داوران گرامی که زحمت داوری را به عهده داشته اند، کمال تشکر را دارم.

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به خانواده عزیزم تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگیم مصداق بی ریای سخاوت بوده است.

تقدیم به:


روح مادرم

و


وجود عزیزانم

فهرست مطالب

عنوان | شماره صفحه

فصل اول: **کلیات موضوع رساله**

فصل دوم: **تعاریف و مفاهیم اولیه**

فصل سوم: **اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین**

فصل چهارم: **نگرش نو به ریاضیات فازی**

فصل پنجم: **نتیجه گیری و پیشنهادات**

فهرست شکل ها

عنوان | شماره صفحه

فهرست جدول ها

عنوان | شماره صفحه

چکیده

بعد از ارائه منطق فازی، اصل گسترش درحسابان فازی مطرح گردید که تکنیک کامل و جامع محسوب می شود. البته بحث اصلی محاسبات فازی بر پایه اصل گسترش با ابهامات غیرخطی است که، با سوپرمم و اینفیمم توابع غیرخطی برخورد خواهند کرد و محاسبات را پرهزینه می نمایند. برای رفع این مورد، تکنیک α – برش بر پایه حساب بازه ای طراحی گردید. اگر چه برخورد مناسبی در مورد حذف پیچیدگی محاسبات بر پایه اصل گسترش بوده ولی، بدلیل عدم بیان عضوهای بی اثر بر اساس حساب بازه ای، قابل تردید است. حتی اگر حسابان فازی بر پایه حساب بازه ای (α– برش) فوق قابل بیان و اجرا باشد، هنوز این نکته پا بر جاست که نتیجه اعمال بر پایه حساب بازه ای (α – برش) که در حالت پیوسته با اصل گسترش معادل است، بسیار بزرگ اند که سرچشمه این مسئله به ذات عملگر های حساب بازه ای بر می گردد.

بر این اساس، اعمال حساب فازی جدید بر پایه انتقال – میانگین تعریف می کنیم و موارد مرتبط با عضو های بی اثر را رفع می نمائیم. ما با تاکید بر قضیه میزوموتو و تاناکا (برای هر عددفازی A، هیچ اعداد معکوس A', A'' بترتیب نسبت به $\otimes$ و $\oplus$ وجود ندارد طوریکه: $A \otimes A'' = 1$، $A \oplus A' = 0$) که ذات سیستم های فازی را بیان می کند مبنی بر اینکه، ابهام بعنوان بخشی از سیستم مدل است، به دنبال چنین مدل هایی هستیم. در واقع منطق فازی یک منطق پیوسته است که از استدلال های تقریبی بشر الگو برداری می کند لذا، نتایج آن نیز باید بصورت تقریبی بیان گردد. بنابراین، بعد از تعریف اعمال جدید، چند رده هم ارزی مطرح و سپس با تعریف تقریب فازی، نتایج تقریبی مسائل فازی را با رتبه ابهام بیان می کنیم.

نهایتاً، بر اساس اعمال جدید و تقریب فازی مطرح شده، به دستگاه های جبری فازی، رتبه بندی فازی و فاصله فازی نگرش نو خواهیم داشت.

واژه های کلیدی: حساب فازی، اعداد فازی شبه هندسی، اصل گسترش، انتقال– میانگین، همتراز فازی، تقریب فازی، گروه فازی، رتبه ابهام، میدان فازی، ترتیب جزئی فازی، رتبه بندی فازی، قدر مطلق فازی، متریک فازی.

فصل اول
کلیات موضوع رساله

۱-۱ مقدمه

حساب فازی یک ابزار قدرتمند در بسیاری از مسائل مهندسی از قبیل تصمیم گیری، تئوری کنترل، سیستم های فازی و استدلال های تقریبی است. همانطوریکه به خوبی شناخته شده است، عملگرهای حسابی روی اعداد فازی معمولاً بر پایه اصل گسترش[1] (روی دامنه عضویت) یا بر پایه عملگرهای بازه ای (روی دامنه α – برش[2]) بنا گردیده اند (زاده ۱۹۶۵، مور ۱۹۷۹ و دابیس و پراده ۱۹۸۰، [۵۵،۴۰،۲۴]).

البته بدیهی است که برای اعداد فازی پیوسته، عملگرهای حساب فازی با اصل گسترش و روش α – برش معادلند. اگر اصل گسترش بدون تجزیه و تحلیل در حساب فازه ای استفاده گردد منجر به نتایج مشکوک می شود که حداقل چند مورد آن بشرح زیر است :

فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه همه اعداد فازی بسته کراندار روی $\mathbb{R}$ و A و B متعلق به آن باشند . آنگاه ،

الف) از عملگر های حساب فازی بر پایه اصل گسترش داریم :

اگر A و B غیر قطعی و با هم برابر باشند آنگاه

$$A-B\neq 0\ ,\ A\div B\neq 1 \qquad (۱-۱)$$

بعبارت دیگر،

$$A-A\neq 0\ ,\ A\div A\neq 1 \qquad (۱-۲)$$

ب) از عملگر های حساب فازی بر پایه اصل گسترش برای $A.A$ و A^2 داریم :

$$A.A\neq A^2 \qquad (۱-۳)$$

ج) اگرچه عملگرهای حسابی عادی روی اعداد حقیقی را می توان به تعاریف بین اعداد فازی با معنی دادن اصل گسترش تعمیم داد (زاده ۱۹۶۵، [۵۵]) ولی، اجرای مستقیم این اصل در عملگرهای حساب فازی بدلیل نیاز به مسئله برنامه نویسی غیرخطی پر هزینه است (دانگ و وونگ ۱۹۸۷ و اووساله و اسشوتر ۲۰۰۳، [۲۳،۴۲]).

---

[1] Extension principle (EP)

[2] α -Cut

د) جهت رفع مورد (ج) ، تحقیقات زیادی با بیان اعداد فازی بعنوان یک گردایه ای از α – برش انجام گردید (کووفمن و گاپتا ۱۹۹۱ و بودجانوا ۲۰۰۳، [۳۰،۸]) اما واضح است که، عملگرها ی حساب بازه ای استاندارد، محوطه تضمین شده از جواب که معمولاً بیش از حد بزرگ اند را بیان می کنند(اثر وابستگی[۱]). سرچشمه این مسئله نیز به ذات عملگرهای حساب بازه ای بر می گردد (کلییر ۱۹۹۷، کولپا ۲۰۰۱ و مور ولودیک ۲۰۰۳، [۳۱،۳۲،۳۹]).

البته، موارد الف و ب را می توان در فرم کلی تر، تحت عنوان قضیه[۲] MT (میزوموتو و تاناکا ۱۹۸۲، [۳۷]) داشت، که بیان می کند :

اگر F یک تابع ریاضی با پارامتر های فازی و B یک عدد فازی باشد آنگاه ، نمی توان هیچ عدد فازی مانند X یافت طوریکه : $F(X)=B$.

با وجود قضیه MT و بر اساس اینکه منطق فازی بر استدلال های تقریبی بنا گردیده است، لذا منطقی است که عملگرهای حساب فازی در راستای معرفی عضوهای بی اثر $\tilde{1},\tilde{0}$ غیر قطعی (نه لزوما" منحصر به فرد) مرتبط با جمع و ضرب ، طرح ریزی گردد.

۱– ۲ مروری کوتاه بر تاریخچه ی تحقیق

با وجود قضیه MT صرفاً به دلایل ذیل، تحقیقات زیادی روی عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش با نمایه α – برش و بدون α – برش با ایجاد شرایط روی عملگرها و تحت عنوان عملگر های حسابی محدود انجام گردیده است که تنها محاسبات روی اعداد فازی با شرایط را بیان می کنند :

– سیستم های معکوس یک مسئله مهم در مهندسی به خصوص درکنترل وتشخیص مشکلات است (بویکزولا و همکارانش ۲۰۰۶، سابررا و نارندرا ۱۹۹۹ ، [۱۰،۱۲]).

با نگاه به اینکه در بسیاری از برنامه های کاربردی، مدل سیستم شامل پارامترهایی است که دقیقاً معین نیستند لذا برای نشان دادن چنین پارامترهایی از اعداد فازی (اعداد بازه ای) استفاده می گردد، خصوصاً در تصمیم گیری، تئوری کنترل و استدلال های تقریبی.

– در بسیاری از کاربرد های مهندسی و بهینه سازی داشتن مقادیر ۰ و ۱ بترتیب برای $A-A$ و $A\div A$، می توان با ارزش باشد (بویکزولا و همکارانش ۲۰۰۳، کلییر ۱۹۹۷و کولپا ۲۰۰۱، [۱۱،۳۱،۳۲]).

---

[1] Dependence effect

[۲] Mizumoto and Tanka (MT) : For any non-degenerated fuzzy number A, there exist no inverse number A', A'' under $\oplus$ and $\otimes$ respectively, such that $A\oplus A'=0,\ A\otimes A''=1$.

منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم است بر خلاف دیگران که معتقدند که باید تقریب ها را دقیق تر کرد تا بهره وری افزایش یابد. باید به دنبال ساختن مدل هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم مدل کرد. در واقع منطق فازی یک منطق پیوسته است که از استدلال تقریبی بشر الگو بر داری می کند.

در واقع قضیه MT ذات سیستم فازی را بیان می کند مبنی بر اینکه، ابهام به عنوان بخشی از سیستم مدل است. لذا محدودیت روی عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش در راستای معرفی عملگرهای معکوس، صرفاً به دلیل داشتن عضوهای بی اثر 0 و ۱ در سیستم های فازی، با ابهامات در سیستم مغایرت دارد.

۱– ۳ جنبه جدید بودن و نوآوری ، سوالات و فرضیه های تحقیق

۱– ۳– ۱ جنبه جدید بودن و نوآوری

واضح است که عملگرهای حسابی اعداد حقیقی با استفاده از قوانین منحصر به فرد محاسبه گردیده اند، چرا که مستقل از اعداد درگیرند. همانطوریکه به خوبی شناخته شده است اعتبار این اصل ساده تلویحاً در عملگرهای حساب فازی در نظر گرفته شده است. لذا در راستای معرفی عملگرهای معکوس بر اساس ماهیت مسائل فازی باید بدنبال عضوهای بی اثر $\tilde{1},\tilde{0}$ (نه لزوما" منحصر به فرد) باشیم . بالطبع نتایج متناظر عملگرها نه تنها به اعداد درگیر وابسته اند بلکه به ابهامات موجود در سیستم نیز وابسته اند. از اینرو عملگرهایی بر پایه انتقال– میانگین در راستای داشتن عضوهای بی اثر $\tilde{1},\tilde{0}$ نسبت به عملگرهای جمع وضرب (نه لزوما" منحصر به فرد) معرفی کرده و نتایج عملگرها را به اعداد درگیر و ابهامات مطرح شده آنها نسبت می دهیم. برای هر مسئله فازی بر اساس اعداد فازی درگیر آن، رتبه ابهام[1] تعریف کرده و جواب مسئله مربوط را با رتبه ابهام متناظرش با نماد ($\cong$) تفسیر می نماییم. لازم به ذکر است که، نماد (=) را در حالت خاص رتبه ابهام مسئله فازی بیان می کنیم. نهایتاً نشان خواهیم داد که نگرش جدید، مشکلات مطرح شده مسائل فازی که بر پایه اصل گسترش بیان گردیده را، رفع می نماید و در اعم مسائل ریاضیات فازی از قبیل دستگاه های جبری فازی (گروه و میدان فازی)، رتبه بندی فازی، فاصله اعداد فازی، معادلات فازی، دستگاه معادلات فازی و معادلات دیفرانسیل فازی نتایج کاربردی و قابل قبولی را ارائه می دهد.

[1] Aambiguity rank

۱– ۳– ۲ سوالات تحقیق

- ✓ آیا توابع شبه t – نرم و s – نرم معادل با عملگرهای تعریف شده بر پایه انتقال– میانگین وجود دارد؟
- ✓ آیا عملگرهای حساب فازی تعریف شده بر پایه انتقال – میانگین معرفی شده ، نواقص مطرح شده عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش یا α - برش رفع می کند ؟
- ✓ موارد ویژه ای از ریاضیات فازی تحت عناوین دستگاه های جبر ی فازی (گروه و میدان فازی)، رتبه بندی فازی و فاصله اعداد فازی با تعریف عملگرهای حساب فازی به چه صورت مطرح می گردند ؟

۱– ۳– ۳ فرضیه های تحقیق

- ✓ بررسی رفع موارد اشکال در سیستم های فازی مبتنی بر اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش یا α - برش با تعریف جدید اعمال حساب فازی بر پایه انتقال میانگین.
- ✓ تاثیر تعریف جدید اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین بر موارد ویژه ای از ریاضیات فازی تحت عناوین دستگاه های جبری فازی (گروه و میدان فازی)، رتبه بندی فازی و فاصله فازی.

فصل دوم
تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل ، به تعاریف و مفاهیم اساسی مرتبط با موضوع بحث اصلی می پردازیم. عمده مطالب این فصل از منابع (دزا ۲۰۰۹، ادوین کلارک ۱۹۹۸ و وانگ لی ۱۹۹۷، [۲۰،۲۶،۴۹]) می باشند.

۲– ۱ از مجموعه کلاسیک تا مجموعه فازی

تعریف ۲–۱ (مجموعه کلاسیک)

فرض کنید U مجموعه جهانی[1] و شامل تمامی عناصر و اعضا ممکن در بحث یا کاربرد مورد نظر ما باشد . یادآوری می شود که یک مجموعه کلاسیک A یا به اختصار مجموعه A در فضای جهانی U را می توان با فهرست تمامی اعضا (روش فهرست[2]) یا با مشخص کردن ویژگی های که باید توسط اعضا مجموعه ارضا گردد (روش قاعده[3]) تعریف کرد. روش فهرست را فقط می توان در مجموعه متناهی بکاربرد، بنابراین کاربرد محدودی دارد. روش قاعده کلی تر می باشد. در روش قاعده یک مجموعه A را بدین صورت می توان تعریف نمود :

$$A=\{x\in U \mid x \text{ شرطی را برآورده می کند}\} \qquad (۱–۲)$$

روش سومی نیز برای تعریف مجموعه A وجود دارد . روش تعلق[4] که یک تابع تعلق دو مقداری $\{0,1\}$را برای A معرفی میکند که با $\mu_A(x)$ نشان داده می شود به نحوی که :

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A.\end{cases} \qquad (۲–۲)$$

مجموعه A از لحاظ ریاضی معادل تابع تعلق $\mu_A(x)$ بوده و بنابراین با معلوم بودن $\mu_A(x)$ ، مجموعه A نیز معلوم خواهد بود.

تعریف ۲–۲ (مجموعه فازی)

یک مجموعه فازی A در فضای جهانی U بوسیله یک تابع $\mu_A(x)$ که مقادیری در بازه $[0,1]$ اختیار می کند ، مشخص می شود.

---

[1] Universal set
[2] List method
[3] Rule method
[4] Membership method

بنابراین یک مجموعه فازی تعمیم یک مجموعه کلاسیک است که اجازه می دهد تابع تعلق دو مقداری در بازه $[0,1]$ اختیار کند. به عبارت دیگر، یک مجموعه کلاسیک فقط می توانست دو مقدار 0 و 1 داشته باشد در حالیکه تابع تعلق یک مجموعه فازی ، یک تابع پیوسته در محدوده $[0,1]$ می باشد. در واقع می بینیم هیچ چیزی در مورد مجموعه فازی گنگ و مبهم نیست بلکه مجموعه فازی، مجموعه ای است با یک تابع تعلق پیوسته.

یک مجموعه فازی A در U را می توان با یک مجموعه زوج های مرتب x و مقدار تعلق آن نمایش داد . بدین ترتیب :

$$A=\{(x,\mu_A(x))|x\in U\} \qquad (۳-۲)$$

هنگامی که U پیوسته باشد (به عنوان مثال $U=\mathbb{R}$) ، A را معمولاً بدین صورت مشخص می کنند :

$$A=\int_U \mu_A(x)/x \qquad (۴-۲)$$

که علامت $\int$ نشان دهنده انتگرال نیست، بلکه اجتماع تمامی نقاط $x\in U$ و مقدار تابع تعلق متناظر $\mu_A(x)$ را نشان می دهد . هنگامی که U گسسته باشد ، A معمولا" بدین صورت نوشته می شود :

$$A=\sum_U \mu_A(x)/x \qquad (۵-۲)$$

که در اینجا نیز علامت $\sum$ به معنای جمع ریاضی نیست بلکه اجتماع تمامی نقاط $x\in U$ و تابع تعلق متناظر $\mu_A(x)$ را نشان می دهد.

۲– ۲ مفاهیم اساسی مرتبط با مجموعه های فازی

اکنون می خواهیم چند مفهوم و اصطلاح اساسی مجموعه فازی را معرفی کنیم. تعدادی از آنها گسترش همان مفاهیم مجموعه های کلاسیک بوده و تعدادی دیگر مختص مجموعه های فازی می باشند.

مفاهیم تکیه گاه، منفرد فازی، مرکز، نقطه تقاطع، ارتفاع، مجموعه فازی طبیعی (نرمال)، α – برش و مجموعه فازی محدب بدین ترتیب تعریف می شوند :

تعریف ۲–۳ (تکیه گاه[1])

تکیه گاه مجموعه فازی A در فضای جهانی U ، یک مجموعه غیر فازی است که شامل تمامی عضوهایی از U که تابع عضویت غیر صفر دارند، یعنی :

$$\text{supp}(A)=\{x\in U|\mu_A(x)>0\} \qquad (۶-۲)$$

که $\text{supp}(A)$ نشان دهنده تکیه گاه مجموعه فازی A است.

[1] Support

اگر تکیه گاه یک مجموعه فازی خالی باشد آنرا یک مجموعه فازی تهی می نامند. یک **منفرد فازی**[1]، یک مجموعه فازی است که تکیه گاه آن یک نقطه واحد در U می باشد .

تعریف ۲-۴ (مرکز[2])

مرکز یک مجموعه فازی بدین صورت تعریف می شود : اگر مقدار میانگین نقاطی که در آنها تابع تعلق مجموعه فازی به حداکثر خود می رسد، محدود باشد در آنصورت این مقدار میانگین، مرکز یک مجموعه فازی می باشد و اگر مقدار میانگین مثبت بی نهایت (منفی بی نهایت) باشد ، در آنصورت مرکز بصورت کوچکترین (بزرگترین) نقطه ای که در آن تقاطع تابع به حداکثر مقدار خود می رسد، تعریف می شود.

تعریف ۲-۵ (نقطه تقاطع[3])

نقطه تقاطع یک مجموعه فازی ، نقطه ای در U است که در آن مقدار تابع تعلق برابر 0.5 می گردد.

تعریف ۲-۶ (ارتفاع[4] و مجموعه فازی نرمال[5])

ارتفاع یک مجموعه فازی ، بزرگترین مقدار یک تابع تعلق است . اگر ارتفاع یک مجموعه فازی برابر با ۱ باشد ، در آنصورت آنرا یک مجموعه طبیعی (نرمال) می نامند.

تعریف ۲-۷ (هسته[6])

هسته یک مجموعه فازی ، مجموعه نقاطی در U است که در آنها تابع تعلق مجموعه فازی به حداکثر خود می رسد، یعنی:

$$Core(A) = \{x \in U \mid \text{ماکزیمم است } \mu_A(x)\} \qquad (۲-۷)$$

که $Core(A)$ نشان دهنده هسته مجموعه فازی A است.

بدیهی است که چنانچه A مجموعه فازی نرمال باشد آنگاه

$$Core(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) = 1\} \qquad (۲-۸)$$

و همچنین اگر هسته مجموعه فازی A، محدود باشد آنگاه مرکز آنرا در صورتیکه $U = \mathbb{R}$ باشد، را بصورت زیر خواهیم داشت :

$$a.c(A) = \frac{1}{2}\{\min(core(A)) + \max(core(A))\} \qquad (۲-۹)$$

[1] Fuzzy singleton
[2] Center
[3] Crossover point
[4] Height
[5] Normal set
[6] Core

تعریف ۲-۸ (α- برش)

α- برش یک مجموعه فازی A ، یک مجموعه غیرفازی A_α است که شامل عضو های U می باشد که مقادیر تعلقی بزرگتر یا مساوی α دارند. یعنی :

$$A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \qquad (۱۰-۲)$$

تعریف ۲-۹ (مجموعه فازی محدب[1])

هنگامیکه مجموعه جهانی U یک فضای n بعدی $\mathbb{R}^n$ باشد، مفهوم تحدب را می توان به مجموعه های فازی تعمیم داد. یک مجموعه فازی محدب نامیده می شود، اگر و فقط اگر α- برش آن (A_α) برای هر مقدار α در محدوده $[0,1]$ یک مجموعه محدب باشد. بعبارت دیگر، یک مجموعه فازی A در $\mathbb{R}^n$ محدب نامیده می شود، اگر و فقط اگر :

برای $x_1\ x_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)) \qquad (۱۱-۲)$$

۲ - ۳ عملیات بر روی مجموعه های فازی

مفاهیم معرفی شده در بخش ۲-۲ مربوط به یک مجموعه فازی است. در این بخش، عملیات اساسی بر روی چند مجموعه فازی را مطرح می کنیم. فرض کنید A و B مجموعه های فازی هستند که در یک مجموعه جهانی یکسان تعریف شده اند.

تعریف ۲-۱۰ (معادل[2] فازی)

دو مجموعه A و B معادل هستند اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر $x \in U$ ، $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ باشد . یعنی :

$$A = B \prec\Rightarrow \forall x \in U \quad , \mu_A(x) = \mu_B(x) \qquad (۱۲-۲)$$

تعریف ۲-۱۱ (زیر مجموعه فازی)

مجموعه A زیر مجموعه B است اگر و فقط اگر برای تمامی مقادیر $x \in U$ ، $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ باشند.

یعنی:

$$A \subseteq B \prec\Rightarrow \forall x \in U \quad , \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \qquad (۱۳-۲)$$

تعریف ۲-۱۲ (مجموعه مکمل[3] فازی)

مکمل مجموعه فازی A ، مجموعه فازی $\overline{A}$ در U است که تابع تعلق آن بدین شکل تعریف می شود :

---

[1] Convex
[2] Equal
[3] Complement set

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (۱۴-۲)$$

تعریف ۲-۱۳ (اجتماع[1] فازی)

اجتماع A و B ، یک مجموعه فازی در U است که با $A \cup B$ نشان داده شده و تابع تعلق آن بدین شکل تعریف می شود :

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \qquad (۱۵-۲)$$

تعریف ۲-۱۴ (اشتراک[2] فازی)

اشتراک A و B ، یک مجموعه فازی $A \cap B$ در U است با تابع تعلق زیر :

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \qquad (۱۶-۲)$$

از تعاریف اجتماع و اشتراک فوق داریم که، مجموعه فازی $A \cup B$ کوچکترین مجموعه فازی است که در بردارنده A و B بوده و مجموعه فازی $A \cap B$ بزرگترین مجموعه فازی است که بوسیله A و B در برگرفته می شود. بنابراین اجتماع و اشتراک فقط یک نوع عملیات را روی مجموعه های فازی تعریف می کنند. موارد ممکن دیگری نیز وجود دارد. بعنوان مثال، می توانیم $A \cup B$ را بصورت هر مجموعه فازی که در بردارنده A و B باشد تعریف کنیم (نه لزوما" کوچکترین مجموعه) یا $A \cap B$ را بصورت هر مجموعه فازی که بوسیله A و B در بر گرفته می شود(نه لزوما" بزرگترین مجموعه). بنابراین هر یک از تعاریف دیگر اجتماع و اشتراک بر اساس یک سری فرضیه معرفی خواهند شد. بدین معنی که ابتدا با چند اصل موضوع در مورد اجتماع و اشتراک شروع کرده و آنگاه فرمول های خاصی که این اصول موضوعه را ارضا ء می کنند، معرفی خواهد شد.

تعریف ۲-۱۵ (S – نرم ها [3])

فرض کنید $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ نگاشتی باشد که توابع تعلق مجموعه های A و B را به تابع تعلق اجتماع A و B تبدیل می کند، یعنی :

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_{A\cup B}(x) \qquad (۱۷-۲)$$

برای اینکه تابع S واجد شرایط اجتماع باشد باید حداقل چهار شرط یا اصل موضوع را ارضاء کند :

اصل موضوع S_1 : $S(1,1)=1$, $S(0,a)=S(a,0)=a$ (شرط مرزی)

اصل موضوع S_2 : $S(a,b)=S(b,a)$ (شرط جابه جایی)

---

[1] Union
[2] Intersection
[3] S- norm

اصل موضوع S_3 : اگر $a \le a_1$ و $b \le b_1$ آنگاه $S(a,b) \le S(a_1,b_1)$ (شرط صعودی)

اصل موضوع S_4 : $S(S(a,b),c) = S(a,S(b,c))$ (شرط شرکت پذیری)

هر تابع $S:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ که اصول موضوع S_1 تا S_4 را ارضاء نماید، یک S – نرم نامیده میشود.

بسادگی می توان نشان داد که تابع اجتماع max یک S – نرم است . حال در اینجا چند کلاس خاص از S – نرم ها را معرفی می کنیم :

• کلاس دومبی [1]

$$S_\lambda(a,b) = \frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{b}-1\right)^{-\lambda}\right]^{\frac{-1}{\lambda}}} \quad , \quad \lambda \in (0,+\infty) \qquad (۱۸-۲)$$

• کلاس دبویس – پرید [2]

$$S_\alpha(a,b) = \frac{a+b-ab-\min(a,b,1-\alpha)}{\max(1-a,1-b,\alpha)} \quad , \quad \alpha \in [0,1] \qquad (۱۹-۲)$$

• کلاس یاگر [3]

$$S_w(a,b) = \min\left[1,(a^w+b^w)^{\frac{1}{w}}\right] \quad , \quad w \in (0,\infty) \qquad (۲۰-۲)$$

با انتخاب پارامترهای خاص برای کلاس های فوق، هر کدام یک S – نرم های دیگری نیز معرفی شده اند، که در اینجا به تعدادی از آنها اشاره می کنیم :

• جمع دراستیک [4]

$$S_{ds}(a,b) = \begin{cases} a, & b = 0, \\ b, & a = 0, \\ 1, & \text{درغیراینصورت.} \end{cases} \qquad (۲۱-۲)$$

[1] Dombi class
[2] Dubois-prade class
[3] Yager class
[4] Drastic sum

• جمع اینشتین [1]

$$S_{es}(a,b)=\frac{a+b}{1+ab} \qquad (۲۲-۲)$$

• جمع جبری [2]

$$S_{as}(a,b)=a+b-ab \qquad (۲۳-۲)$$

تعریف ۲-۱۶ (T – نرم ها [3])

فرض کنید $t:[0,1)\times(0,1]\to[0,1]$ تابعی باشد که توابع تعلق مجموعه های فازی A و B را به تابع تعلق مجموعه فازی اشتراک A و B تبدیل می کند، یعنی :

$$t\left[\mu_A(x),\mu_B(x)\right]=\mu_{A\cap B}(x) \qquad (۲۴-۲)$$

برای اینکه تابع t واجد شرایط یک اشتراک باشد ، باید چهار شرط زیر را ارضاء کند :

اصل موضوع t_1 : $t(a,1)=t(1,a)=a$,$t(0,0)=0$ (شرط مرزی)

اصل موضوع t_2 : $t(a,b)=t(b,a)$ (شرط جابجایی)

اصل موضوع t_3 : اگر $a\le a_1$ و $b\le b_1$ آنگاه $t(a,b)\le t(a_1,b_1)$ (شرط صعودی بودن)

اصل موضوع t_4 : $t(t(a,b),c)=t(a,t(b,c))$ (شرط شرکت پذیری)

هر تابع $t:[0,1)\times(0,1]\to[0,1]$ که اصول موضوع t_1 تا t_4 را ارضاء نماید، یک t – نرم نامیده می شود.

می توان نشان داد که اشتراک فازی min یک t – نرم است. برای هر t – نرم یک S - نرم متناظر وجود دارد و بالعکس. بنابراین متناظر با S - نرم های کلاس دومبی، دبویس- پرید و یاگر، t – نرم های کلاس دومبی، دبویس -پرید و یاگر وجود دارد که بدین ترتیب تعریف می شوند :

• کلاس دومبی

$$t_\lambda(a,b)=\frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{a}-1\right)^\lambda+\left(\frac{1}{b}-1\right)^\lambda\right]^{\frac{1}{\lambda}}} \quad , \quad \lambda\in(0,\infty) \qquad (۲۵-۲)$$

[1] Einstein sum
[2] Algebric sum
[3] T-norm s

• کلاس دبوید – پرید

$$t_{\alpha}(a,b)=\frac{ab}{\max(a,b,\alpha)} \quad , \quad \alpha\in[0,1] \qquad (۲۶-۲)$$

• کلاس یاگر

$$t_{w}(a,b)=1-\min\left[1,((1-a)^{w}+(1-b)^{w})^{\frac{1}{w}}\right] \quad , \quad w\in(0,\infty) \qquad (۲۷-۲)$$

با انتخاب یک پارامتر خاص برای هر یک از کلاس های فوق، یک t – نرم داریم. متناظربا S – نرم های جمع دراستیک، اینشتین و جبری، t – نرم هایی وجود دارند که در زیر معرفی شده اند :

• ضرب دراستیک

$$t_{dp}(a,b)=\begin{cases}a, & b=1,\\ b, & a=1,\\ 0, & \text{در غیر اینصورت.}\end{cases} \qquad (۲۸-۲)$$

• ضرب اینشتین

$$t_{ep}(a,b)=\frac{ab}{2-(a+b-ab)} \qquad (۲۹-۲)$$

• ضرب جبری

$$t_{ap}(a,b)=ab \qquad (۳۰-۲)$$

تعریف ۲-۱۷ (مکمل فازی [1])

فرض کنید $c:[0,1]\to[0,1]$ نگاشتی باشد که تابع تعلق مجموعه فازی A را به تابع تعلق مجموعه مکمل A تبدیل می کند، بدین معنی که :

$$c\left[\mu_{A}(x)\right]=\mu_{\bar{A}}(x) \qquad (۳۱-۲)$$

برای اینکه تابع C واجد شرایط یک عملگر مکمل باشد باید حداقل دو شرط زیر را ارضاء کند :

اصل موضوع C_1 : $c(0)=1$, $c(1)=0$ (شرط مرزی)

اصل موضوع C_2 : برای تمام مقادیر $a,b\in[0,1]$ اگر $a\le b$ آنگاه $c(a)\ge c(b)$ (شرط نزولی بودن)

هر تابع $c:[0,1]\to[0,1]$ که اصول موضوع C_1 و C_2 را ارضاء نماید، یک مکمل فازی نامیده می شود.

چند کلاس از مکمل های فازی عبارتند از :

[1] Fuzzy complement

• کلاس سوگنو [1]

$$c_\lambda(a)=\frac{1-a}{1+\lambda a}\quad,\quad \lambda\in(-1,\infty) \tag{۳۲-۲}$$

• کلاس یاگر

$$c_w(a)=(1-a^w)^{\frac{1}{w}}\quad,\quad w\in(0,\infty) \tag{۳۳-۲}$$

تذکر ۱ : برای هر s – نرم یک t – نرم متحد با آن وجود دارد. منظور ما از متحد این است که یک مکمل فازی وجود داشته که این سه با هم قاعده دمورگان را ارضاء می کنند. بطور مشخص، یعنی s – نرم ، t نرم و مکمل فازی یک کلاس متحد [2] را شکل می دهند، اگر :

$$c(s(a,b))=t\left[c(a),c(b)\right] \tag{۳۴-۲}$$

تذکر ۲ : عملگر هایی که توسط s – نرم و t –نرم ها تعریف گردیده اند، نمی توانند تمامی محدوده بین $\min(a,b)$ و $\max(a,b)$ را پوشش دهند. عملگرهایی که محدوده $\left[\min(a,b),\max(a,b)\right]$ را پوشش می دهند عملگرهای میانگین [3] نامیده می شوند. مشابه s – نرم و t نرم ، یک عملگر میانگین که با v نشان داده می شود، تابعی است از $[0,1]\times[0,1]$ به $[0,1]$.

که چند مورد از آن عبارتند از :

• میانگین $\max-\min$:

$$v_\lambda(a,b)=\lambda\max(a,b)+(1-\lambda)\min(a,b),\quad \lambda\in[0,1] \tag{۳۵-۲}$$

• میانگین تعمیم یافته :

$$v_\alpha(a,b)=\left[\frac{a^\alpha+b^\alpha}{2}\right]^{\frac{1}{\alpha}},\quad \alpha\in\mathbb{R}(\alpha\neq 0) \tag{۳۶-۲}$$

• " AND فازی " :

$$V_P(a,b)=p\min(a,b)+\frac{(1-P)(a+b)}{2},\quad p\in[0,1] \tag{۳۷-۲}$$

• " OR فازی " :

$$V_\gamma(a,b)=\gamma\max(a,b)+\frac{(1-\gamma)(a+b)}{2},\quad \gamma\in[0,1] \tag{۳۸-۲}$$

[1] Sugeno class
[2] Associated class
[3] Averaging operators

واضح است که میانگین $\max-\min$ هنگامی که λ از 0 به 1 تغییر می کند کل محدوده $[\min(a,b),\max(a,b)]$ را می پوشاند . " AND فازی " محدوده $\min(a,b)$ تا $\frac{a+b}{2}$ و " OR فازی " محدوده $\frac{a+b}{2}$ و $\max(a,b)$ را هنگامی که α از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند، می پوشاند.

۲– ۴ از روابط کلاسیک تا روابط فازی و اصل گسترش

فرض کنید U و V دو مجموعه کلاسیک دلخواه (قطعی[1]) باشند. ضریب کارتزین U و V که با $U\times V$ نشان داده می شود یک مجموعه غیرفازی شامل تمامی زوج مرتب های (U,V) می باشد به نحوی که $u\in V$ و $v\in V$. بدین معنی که :

$$U\times V=\{(u,v)\ |u\in V,v\in V\} \qquad (۳۹–۲)$$

توجه داشته باشید که ترتیب ظاهر شدن U و V مهم است یعنی اگر $U\neq V$ آنگاه $U\times V\neq V\times U$ ، در حالت کلی ضرب کارتزین n مجموعه غیر فازی دلخواه $U_1,U_2,...,U_n$ که با $U_1\times U_2\times...\times U_n$ نشان داده می شود، یک مجموعه غیر فازی از تمامی n عضوهای $(u_1,u_2,...,u_n)$ است به نحوی که : $u_i\in U_i$ برای $i\in\{1,2,...,n\}$ بدین معنی که :

$$U_1\times U_2\times...\times U_n=\{(u_1,u_2,...,u_n)\ |u_i\in U_i,i=1,2,...,n\} \qquad (۴۰–۲)$$

تعریف ۲–۱۸ (رابطه [2])

یک رابطه، بین مجموعه های (غیرفازی) $U_1,U_2,...,U_n$ ، زیرمجموعه ای از ضرب کارتزین $U_1\times U_2\times...\times U_n$ می باشد. بدین معنی که اگر ما از $Q(U_1,U_2,...,U_n)$ برای نمایش رابطه میان $U_1\times U_2\times...\times U_n$ استفاده کنیم آنگاه :

$$Q(U_1,U_2,...,U_n)\subseteq U_1\times U_2\times...\times U_n \qquad (۴۱–۲)$$

تعریف ۲–۱۹ (رابطه فازی[3])

یک رابطه فازی، یک مجموعه فازی است که در فضای حاصلضرب برداری مجموعه ها ی قطعی $U_1,U_2,...,U_n$ تعریف شده است. با استفاده از نحوه نمایش (۲–۳)، یک رابطه فازی Q در فضای $U_1\times U_2\times...\times U_n$ بصورت یک مجموعه فازی مطابق زیر تعریف می گردد:

$$Q=\{((u_1,u_2,...,u_n),\mu_Q(u_1,u_2,...,u_n))\ |(u_1,u_2,...,u_n)\in U_1\times U_2\times...\times U_n\} \qquad (۴۲–۲)$$

[1] Crisp
[2] Relation
[3] Fuzzy relation

که $\mu_Q : U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \to [0,1]$.

تعریف ۲-۲۰ (اصل گسترش)

اصل گسترش، یک معادله اساسی است که اجازه می دهد یک تابع را از نقاط در U به مجموعه فازی در V توسعه داد. مشخص تر اینکه، فرض کنید $f : U \to V$ تابعی از مجموعه قطعی U به مجموعه V و مجموعه فازی A در V داده شده و ما می خواهیم مجموعه فازی B را در V به نحوی معین کنیم که $B = f(A)$. اگر f یک نگاشت یک به یک باشد، آنگاه داریم :

$$\mu_B(y) = \mu_A(f^{-1}(y)) \quad , y \in V \qquad (۴۳-۲)$$

که $f^{-1}(y)$ ، معکوس f بوده، بدین معنی که : $f(f^{-1}(y)) = y$.

اگر f یک به یک نباشد، آنگاه هنگامی که دو یا چند نقطه متمایز در U با مقادیر تعلق متفاوت در A به یک نقطه یکسان در V نگاشته شوند، ابهامی بوجود خواهد آمد. بعنوان مثال ما می توانیم داشته باشیم : $f(x_1) = f(x_2) = y$ ولی $x_1 \neq x_2$ و $\mu_A(x_1) \neq \mu_A(x_2)$. در نتیجه سمت راست معادله (۲-۴۳) می تواند دو مقدار مختلف $\mu_A(x_1) = f^{-1}(y)$ یا $\mu_A(x_2) = f^{-1}(y)$ را اختیار کند. برای رفع ابهام، ما مقدار بزرگتر را در بین دو مقدار تعلق به $\mu_B(y)$ نسبت می دهیم. در حالت کلی، تابع تعلق برای B بدین صورت تعریف می شود :

$$\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \quad , y \in V \qquad (۴۴-۲)$$

که $f^{-1}(y)$ نشان دهنده مجموعه تمامی نقاط $x \in U$ بوده، به نحوی که $f(x) = y$. معادله (۲-۴۴)، اصل گسترش نامیده می شود .

تعمیم اصل گسترش را می توان بشرح زیر داشت :

$$\mu_B(y) = \sup_{(x_1, x_2, ..., x_n) \in f^{-1}(y)} \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n)) \qquad (۴۵-۲)$$

که $U = U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ و $B = f(A_1 \times A_2 \times ... \times A_n)$.

۲– ۵ عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش و حساب بازه ای (α – برش)

تعریف ۲-۲۱ (نمایش α – برش[1])

نمایش α – برش ، مجموعه فازی A را می توان بشرح زیر داشت :

$$A = \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}, \quad A_{\alpha} = \left[\underline{A}_{\alpha}, \overline{A}_{\alpha}\right], \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{۴۶-۲}$$

و

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha} A_{\alpha}(x) \tag{۴۷-۲}$$

تعریف ۲-۲۲ (عدد فازی[2])

عدد فازی به مجموعه فازی A روی $\mathbb{R}$ گفته می شود اگر و تنها اگر :

- نرمال باشد ،
- محدب باشد ،
- $\text{supp}(A)$ کراندار باشد.

بر اساس تعریف فوق، چندین تعریف معادل نیز برای عدد فازی مطرح شده است. اعداد فازی در دو قالب شبه مثلثی و شبه ذوزنقه ای قابل بیان اند :

تعریف ۲-۲۳ (عدد فازی شبه مثلثی[3])

عدد فازی شبه مثلثی به مجموعه فازی A گفته می شود هرگاه تابع عضویت آن بفرم زیر باشد :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} l_A(x), & \underline{\alpha} \leq x \leq a, \\ r_A(x), & \alpha \leq x \leq \overline{\alpha}, \\ 0, & \text{در سایر نقاط.} \end{cases} \tag{۴۸-۲}$$

که در اینجا، $l_A(x)$ و $r_A(x)$ به ترتیب توابع غیر کاهشی و غیر افزایشی اند. ضمناً عدد فازی شبه مثلثی A را به فرم پنج تایی زیر می نویسیم :

$$A = (\underline{a}, a, \overline{a}, l_A(x), r_A(x)) \tag{۴۹-۲}$$

---

[1] α -Cut representation
[2] Fuzzy number
[3] Pseudo-triangular

لازم به ذکر است، عدد فازی مثلثی حالت خاصی از اعداد فازی شبه مثلثی اند طوریکه $l_A(x)$ و $r_A(x)$ توابع خطی اند با تابع عضویت زیر :

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\underline{a}}{a-\underline{a}}, & \underline{\alpha}\le x\le a,\\ \dfrac{\bar{a}-x}{\bar{a}-a}, & \alpha\le x\le \bar{a},\\ 0, & \text{در سایر نقاط}\end{cases} \qquad (۵۰-۲)$$

و با پنج تایی بفرم زیر نمایش می دهیم :

$$A=(\underline{a},a,\bar{a},-,-) \qquad (۵۱-۲)$$

تعریف ۲-۲۴ (عدد فازی شبه ذوزنقه ای[1])

عدد فازی شبه ذوزنقه ای به مجموعه فازی A گفته می شود هرگاه تابع عضویت آن بفرم زیر باشد :

$$\mu_A(x)=\begin{cases}l_A(x), & \underline{\alpha}\le x\le a_1,\\ 1, & a_1\le x\le a_2,\\ r_A(x), & a_2\le x\le \bar{a},\\ 0, & \text{در سایر نقاط}\end{cases} \qquad (۵۲-۲)$$

که در اینجا، $l_A(x)$ و $r_A(x)$ به ترتیب توابع غیر کاهشی و غیرافزایشی اند. ضمناً عدد فازی شبه ذوزنقه ای را بفرم شش تایی می نویسیم :

$$A=(\underline{a},a_1,a_2,\bar{a},l_A(x),r_A(x)) \qquad (۵۳-۲)$$

لازم به ذکر است ، عدد فازی ذوزنقه ای حالت خاصی از اعداد فازی شبه ذوزنقه ای است طوریکه $1_A(x)$ و $r_A(x)$ خطی اند با تابع عضویت زیر :

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\underline{a}}{a_1-\underline{a}}, & \underline{\alpha}\le x\le a_1,\\ 1, & a_1\le x\le a_2,\\ \dfrac{\bar{a}-x}{\bar{a}-a_2}, & a_2\le x\le \bar{a},\\ 0, & \text{در سایر نقاط}\end{cases} \qquad (۵۴-۲)$$

و با شش تایی به فرم زیر نمایش می دهیم :

$$A=(\underline{a},a_1,a_2,\bar{a},-,-). \qquad (۵۵-۲)$$

[1] Pseudo-trapezoidal

تعریف ۲-۲۵ (عمل دو تایی [1])

عمل دو تایی روی مجموعه نا تهی G تابعی مانند f است بطوریکه :

$$f : G \times G \to G \qquad (۵۶-۲)$$

تعریف ۲-۲۶ (اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش)

فرض کنید A و B دو عدد فازی شبه هندسی و $* \in \{+,-,\times,\div\}$ یک عمل دو تایی روی $F_C(\mathbb{R})$ (مجموعه اعداد فازی شبه هندسی) باشند. آنگاه تابع عضویت $A*B$ با اصل گسترش بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\mu_{A*B}(z) = \max\left\{\min\left[\mu_A(x), \mu_B(y)\right]\right\}$$
$$z = x * y \qquad (۵۷-۲)$$

تعریف ۲-۲۷ (اعمال حساب فازی بر پایه حساب بازه ای (α - برش))

با توجه به رابطه (۲-۴۷) مبنی بر اینکه هر عدد فازی را می توان بر حسب α - برش های آن در نظر گرفت، بر این اساس عمل $* \in \{+,-,\times,\div\}$ بین دو عدد فازی شبه هندسی را روی α - برش های آنها که بازه اند بر پایه حساب بازه ای تعریف می گردد:

$$\begin{aligned}
&[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d],\\
&[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c],\\
&[a,b]\times[c,d]=\left[\min\{ac,ad,bc,dd\},\max\{ac,bd,bc,bd\}\right],\\
&[a,b]\div[c,d]=[a,b]\times\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right].
\end{aligned} \qquad (۵۸-۲)$$

۲- ۶ دستگاه های جبری

دستگاه های جبری عموماً مجموعه هایی هستند که می شود با عنصر های آنها اعمال جبری انجام داد یعنی، می توان هر دو عنصر هر یک از این مجموعه ها را، شاید هم به چند طریق، با هم ترکیب کرد تا عنصر سومی از مجموعه بدست آید. علاوه بر این، فرض بر این است که این عمل های جبری تابع قواعد معینی باشند، که این قاعده ها با اصولی، که به آنها اصول موضوع اطلاق می شود و دستگاه را تعریف می کنند

[1] Binary operation

بیان شده باشند. سپس، در این محدوده است که ما به اثبات قضایایی در باره این نهاد های بسیار عمومی می پردازیم.

تعریف ۲-۲۸ (گروه[1])

مجموعه تهی G را یک گروه می نامیم در صورتیکه در G عمل دوتایی (*)، چنان تعریف شده باشد که :

۱) به ازاء هر $a,b \in G$ داشته باشیم : $a*b \in G$ (بسته بودن)

۲) به ازاء هر $a,b,c \in G$ داشته باشیم : $a*(b*c)=(a*b)*c$ (شرکت پذیری)

۳) عنصری چون $e \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $a \in G$ ، $a*e=e*a=a$ (وجود عنصر همانی در G)

۴) به ازاء هر $a \in G$، عنصری مثل $a^{-1} \in G$ وجود داشته باشد بطوریکه، $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ (وجود معکوس ها در G)

گروه G را آبلی (یا تعویض پذیر) می نامیم اگر که به ازای هر $a,b \in G$ ، $a*b=b*a$. طبیعی است که هر گروهی را که آبلی نباشد ناآبلی بخوانیم.

مشخصه طبیعی دیگر گروه G عده عنصر هایی است که حاوی آنها است. این عدد را مرتبه G و با $0(G)$ نشان می دهیم. البته، این عدد جالبترین وضع را زمانی دارد که متناهی باشد که در این حالت می گوییم G گروهی متناهی است.

عموماً زیر مجموعه های دلخواه گروهی چون G توجه ما را جلب نمی کنند، زیرا که این مجموعه ها بازگو کننده نهاد جبری G نمی باشند. زیر مجموعه هایی که مد نظر ما ست آنهایی هستند که خاصیت های جبری متناظر آنها از G مشتق شده باشند. از میان این چنین زیرمجموعه ها طبیعی ترین آنها در تعریف زیر معرفی می شود.

تعریف ۲-۲۹ (زیر گروه[2])

زیر گروه، زیر مجموعه نا تهی H از گروه G را یک زیرگروه G می نامیم اگر که H تحت عمل تعریف شده در G خود یک گروه تشکیل دهد بعبارت دیگر، زیر مجموعه نا تهی H از گروه $(G,*)$ فقط و فقط وقتی، یک زیر گروه G است که :

۱) به ازای هر $a,b \in G$ داشته باشیم : $a*b \in H$ ،

۲) به ازای هر $a \in G$ داشته باشیم $a^{-1} \in H$.

---

[1] Group
[2] Subgroup

تعریف ۲-۳۰ (حلقه[۱])

حلقه، مجموعه نا تهی R را یک حلقه شرکت پذیر نامیم، اگر در R دو عمل * و ◦ چنان تعریف شده باشند که به ازای هر a,b,c در R،

۱) $a*b \in R$ ،

۲) $a*b=b*a$ ،

۳) $a*(b*c)=(a*b)*c$ ،

۴) عنصری چون e در R وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $a \in R$ ، $a*e=e*a=a$،

۵) عنصری چون a^{-1} در R چنان وجود داشته باشد که ، $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ ،

۶) $a \circ b \in R$ ،

۷) $a \circ (b \circ c)=(a \circ b) \circ c$ ،

۸) $a \circ (b*c)=(a \circ b)*(a \circ c)$ ، $(b*c) \circ a=(b \circ a)*(c \circ a)$ (دو قانون پخش پذیری) .

هرگاه R با عمل ◦ چنان باشد که به ازای هر $a,b \in R$ ، $a \circ b=b \circ a$ ، آنگاه R را حلقه تعویض پذیر می نامیم.

تعریف ۲-۳۱ (حلقه بخشی[۲])

هر حلقه را یک حلقه بخشی می نامیم اگر که عنصرهای غیر از عضو همانی نسبت به عمل * آن، تحت عمل ◦ تشکیل یک گروه دهند.

تعریف ۲-۳۲ (میدان[۳])

هر میدان عبارت است از یک حلقه بخشی تعویض پذیر.

۲-۷ ترتیب جزئی[۴]، مقایسه پذیری[۵]، ترتیب کلی[۶] (خطی) و متریک[۷] (تابع فاصله ای)

تعریف ۲-۳۳ (ترتیب جزئی)

ترتیب جزئی، رابطه دوتایی (با نماد $\leq$) روی مجموعه A یک ترتیب جزئی است، اگر و تنها اگر ؛

۱) به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم : $x \leq x$ ، (بازتابی)

---

[1] Ring
[2] Ring division
[3] Field
[4] Partial ordering
[5] Comparability
[6] Linear ordering
[7] Metric

۲) به ازای هر $x,y \in A$ ، اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آنگاه داشته باشیم : $x = y$ ، (ضد تقارن)
۳) به ازای هر $x,y,z \in A$ ، اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آنگاه داشته باشیم : $x \leq z$. (تراگذاری)
که در اینصورت زوج $(\leq, A)$ را یک مجموعه مرتب جزئی می نامیم.

تعریف ۲-۳۴ (مقایسه پذیر)

دو عضو x,y از مجموعه مرتب جزئی$(\leq, A)$ را مقایسه پذیر گویند هرگاه داشته باشیم : $x \leq y$ یا $y \leq x$.

تعریف ۲-۳۵ (ترتیب کلی (خطی))

ترتیب کلی (خطی)، رابطه دوتایی (با نماد $\leq$) روی A ترتیب کلی است هرگاه :
۱) $(\leq, A)$ مرتب جزئی باشد ،
۲) به ازای هر $x,y \in A$ داشته باشیم : $x \leq y$ یا $y \leq x$. (مقایسه پذیر)

تعریف ۲-۳۶ (متریک)

متریک، فرض کنید X یک مجموعه نا تهی باشد آنگاه تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ یک متریک (تابع فاصله) روی X گویند هرگاه :
۱) به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم : $d(x,y) \geq 0$ ،
۲) به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم : $d(x,y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$ ،
۳) به ازای هر $x,y,z \in X$ داشته باشیم : $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.
در آنصورت زوج (X,d) را یک فضای متریک گویند .
بعنوان نمونه $(\mathbb{R}^n,d)$ با d – تعریف شده زیر (فاصله اقلیدسی)، یک فضای متریک است.

$$d(X,Y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۵۹-۲)$$

فصل سوم

اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین[1]

۳ – ۱ مقدمه

حساب فازی یک ابزار قدرتمند در بسیاری از مسائل مهندسی از قبیل تصمیم گیری، تئوری کنترل، سیستم های فازی و استدلال های تقریبی است. همانطوریکه به خوبی شناخته شده است، عملگرهای حسابی روی اعداد فازی معمولاً بر پایه اصل گسترش (روی دامنه عضویت) یا بر پایه عملگرهای بازه ای (روی دامنه α – برش) بنا گردیده اند. البته، بدیهی است که برای اعداد فازی پیوسته، روش اصل گسترش و روش α – برش معادلند. اگر اصل گسترش بدون تجزیه و تحلیل در حساب فازی استفاده گردد منجر به نتایج مشکوک می شود که به چند مورد آن در ذیل اشاره می کنیم :

الف) به ازای هر دو عدد فازی (غیر قطعی) برابر داریم :

$$A - B \neq 0 \quad , A \div B \neq 1 \qquad (۱-۳)$$

ب) به ازای هر عدد فازی A داریم :

$$A.A \neq A^2 \qquad (۲-۳)$$

ج) گرچه عملگرهای حسابی عادی روی اعداد حقیقی را می توان به تعاریف بین اعداد فازی با معنی دادن اصل گسترش تعمیم داد ولی، اجرا مستقیم این اصل در عملگرهای حساب فازی بدلیل نیاز به مسئله برنامه نویسی غیر خطی پر هزینه است.

د) گرچه جهت رفع مورد ج، تحقیقات زیادی با بیان اعداد فازی بعنوان یک گردایه ای از α – برش ها انجام گردید. اما واضح است که عملگرهای حساب بازه ای استاندارد، محوطه تضمین شده از جواب که معمولاً بیش از حد بزرگ را بیان می کنند که سرچشمه این مسئله نیز به ذات عملگرهای حساب بازه ای بر می گردد (اثر وابستگی).

و اما، از موارد الف و ب در فرم کلی تر، قضیه ای است از میزوموتو و تاناکا [۳۷] که بیان می کند :

اگر F یک تابع ریاضی با پارامتر های فازی و B یک عدد فازی باشد آنگاه ، نمی توان هیچ عدد فازی مانند X یافت طوریکه : $F(X) = B$.

[1] Fuzzy arithmetic operators based on transmission average (TA)

با وجود قضیه ذکر شده، تحقیقات زیادی روی عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش با نمایه α – برش و بدون α – برش با ایجاد شرایط روی عملگرها ی حسابی محدود انجام گردیده است که تنها محاسبات روی اعداد فازی با شرایط را بیان می کنند.

منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم است بر خلاف دیگران که معتقدند که باید تقریب ها را دقیق تر کرد تا بهره وری افزایش یابد. لذا باید به دنبال ساختن مدل هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم، مدل کرد. در واقع منطق فازی یک منطق پیوسته است که از استدلال تقریبی بشر الگوبرداری می کند. گواه بر این امر، قضیه MT است که، ذات سیستم فازی را بیان می کند مبنی بر اینکه ابهام، به عنوان بخشی از سیستم مدل است. لذا محدودیت روی عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش در راستای معرفی عملگرهای معکوس صرفاً به دلیل داشتن عضوهای بی اثر 0 و ۱ در سیستم فازی، با ابهامات در سیتم مغایرت دارد.

واضح است که عملگرهای حسابی اعداد حقیقی با استفاده از قوانین منحصر به فرد محاسبه گردیده اند، چرا که مستقل از اعداد درگیرند. همانطوریکه بخوبی شناخته شده است، اعتبار این اصل ساده تلویحاً در عملگرهای حساب فازی در نظر گرفته شده است. لذا در راستای معرفی عملگرهای معکوس بر اساس ماهیت مسائل فازی باید به دنبال $\tilde{1},\tilde{0}$ غیر قطعی و نه لزوماً منحصر به فرد باشیم. که در این حالت نتایج متناظر عملگرها نه تنها به اعداد درگیر وابسته اند بلکه به ابهامات موجود در سیستم نیز وابسته اند.

از اینرو عملگرهایی بر پایه انتقال – میانگین، در راستای داشتن عضوهای بی اثر $\tilde{1},\tilde{0}$ غیر قطعی نسبت به عملگرهای جمع و ضرب (نه لزوماً منحصر به فرد) معرفی می کنیم و نتایج عملگرها را به اعداد درگیر و ابهامات مطرح شده در آنها نسبت می دهیم. به عبارت دیگر، برای هر مسئله فازی بر اساس اعداد فازی در گیر آن، رتبه ابهام تعریف می کنیم و جواب مسئله مربوط را با رتبه ابهام متناظرش، بانماد $\cong$ تفسیر می نماییم. (لازم به ذکر است که نماد = را در حالت خاص رتبه ابهام مسئله فازی بیان می کنیم)

نهایتاً، نشان خواهیم داد که تعریف جدید، مشکلات مطرح شده اعمال فازی که بر پایه اصل گسترش (با نمایه α – برش یا بدون α – برش) را رفع می کند. از چشم اندازهای آتی این تعریف جدید، نگرش های نو به ریاضیات فازی است که در فصل بعدی مطرح خواهیم نمود.

۳ – ۲ اعمال مقدماتی حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین

با وجود قضیه MT و بر اساس اینکه منطق فازی بر استدلال های تقریبی بنا گردیده است، منطقی است که عملگرهای حساب فازی در راستای معرفی عضوهای بی اثر $\tilde{1},\tilde{0}$ غیر قطعی (نه لزوماً منحصر به فرد)

مرتبط با جمع و ضرب، طرح ریزی گردد. از اینرو عملگرهای حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین در دو گروه ارائه می گردد :

۳– ۲– ۱ عملگرهای مقدماتی حساب فازی بر پایه انتقال- میانگین برای اعداد فازی شبه مثلثی

فرض کنید

$$A=(\underline{a},a,\bar{a},l_A(x),r_A(x))$$
$$B=(\underline{b},b,\bar{b},l_B(x),r_B(x)) \qquad (۳–۳)$$

دو عدد فازی شبه مثلثی با نمایش α – برش زیر باشند :

$$A=\bigcup_\alpha A_\alpha,\quad A_\alpha=\left[\underline{A}_\alpha,\overline{A}_\alpha\right],\quad 0<\alpha\le 1,$$
$$B=\bigcup_\alpha B_\alpha,\quad B_\alpha=\left[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha\right],\quad 0<\alpha\le 1. \qquad (۴–۳)$$

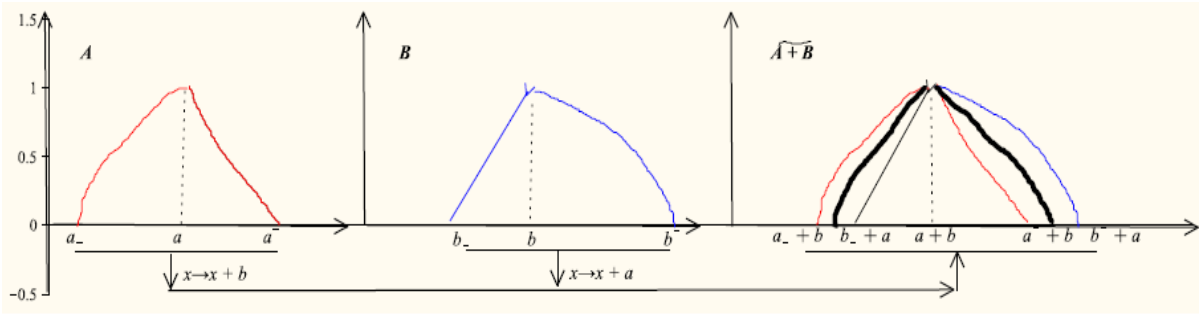
آنگاه عملگرهای مقدماتی A و B را تعریف می کنیم : (با نمایه α – برش)

$$\begin{cases}
A\oplus B=\bigcup_\alpha(A\oplus B)_\alpha,\ (A\oplus B)_\alpha=\left[\frac{a+b}{2}+\left(\frac{\underline{A}_\alpha+\underline{B}_\alpha}{2}\right),\frac{a+b}{2}+\left(\frac{\overline{A}_\alpha+\overline{B}_\alpha}{2}\right)\right],\\
-A=\bigcup_\alpha(-A)_\alpha,\ (-A)_\alpha=\left[-2a+\underline{A}_\alpha,-2a+\overline{A}_\alpha\right],\\
A-B=A+(-B)=\bigcup_\alpha(A-B)_\alpha,\ (A-B)_\alpha=\left[\frac{a-3b}{2}+\left(\frac{\underline{A}_\alpha+\underline{B}_\alpha}{2}\right),\frac{a-3b}{2}+\left(\frac{\overline{A}_\alpha+\overline{B}_\alpha}{2}\right)\right],\\
A\otimes B=\bigcup_\alpha(A\otimes B)_\alpha,\ (A\otimes B)_\alpha=\begin{cases}\left[\left(\frac{b}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{b}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & a,b\ge 0\\ \left[\left(\frac{b}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{b}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & a\ge 0,b\le 0\\ \left[\left(\frac{b}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{b}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & a,b\le 0\\ \left[\left(\frac{b}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{b}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & a\le 0,b\ge 0\end{cases}\\
A^{-1}=\bigcup_\alpha(A^{-1})_\alpha,\ (A^{-1})_\alpha=\left[\frac{1}{a^2}\underline{A}_\alpha,\frac{1}{a^2}\overline{A}_\alpha\right],\\
A\otimes B^{-1}=\bigcup_\alpha(A\otimes B^{-1})_\alpha,\ (A\otimes B^{-1})_\alpha=\begin{cases}\left[\left(\frac{1}{2b}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2b}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & a\ge 0,b>0\\ \left[\left(\frac{1}{2b}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2b}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & a\ge 0,b<0\\ \left[\left(\frac{1}{2b}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2b}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & a\le 0,b<0\\ \left[\left(\frac{1}{2b}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2b}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{a}{2b^2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & a\le 0,b>0\end{cases}.
\end{cases}$$

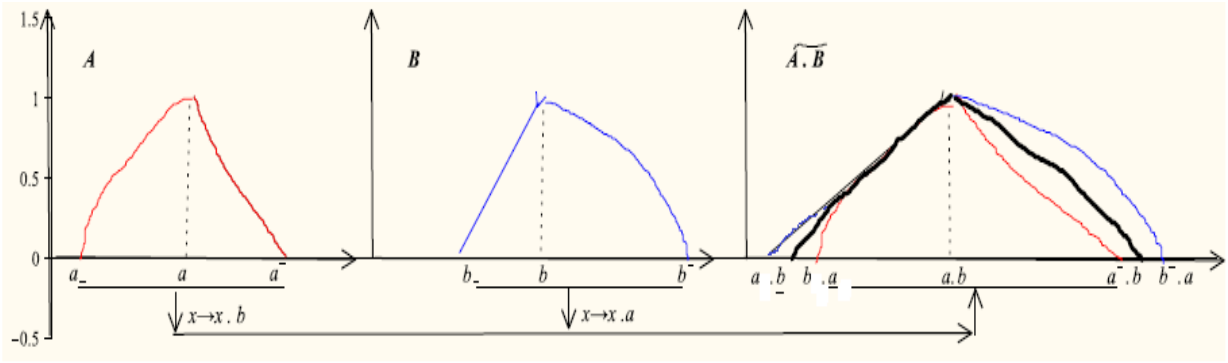
(۵–۳)

۳- ۲-۲ تجسم گرافیکی حساب فازی برپایه انتقال-میانگین روی اعداد فازی شبه مثلثی

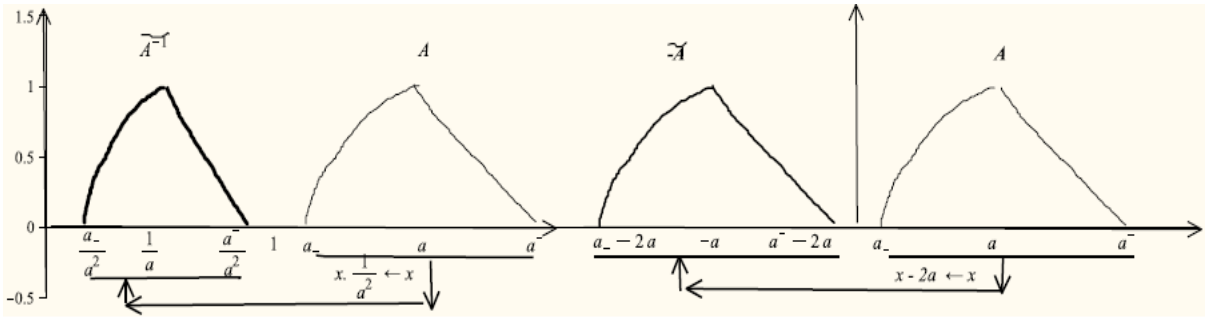
تجسم گرافیکی اعمال حساب فازی برپایه انتقال-میانگین روی اعداد فازی شبه مثلثی را می توان در تصاویر زیر برای دو عدد فازی شبه مثلثی فرضی داشته باشیم. ضمناً، می توان نمایش های مشابه ای با ابهامات و دامنه های متفاوتی از اعداد فازی فرضی داشت.



شکل ۳-۱: عملگر جمع برپایه انتقال –میانگین روی اعداد فازی شبه مثلثی



شکل ۳-۲: عملگر ضرب برپایه انتقال –میانگین روی اعداد فازی شبه مثلثی



شکل ۳-۳: عملگرهای قرینه و وارون برپایه انتقال –میانگین روی اعداد فازی شبه مثلثی

۳ – ۲ – ۳ عملگرهای حساب فازی بر پایه انتقال– میانگین برای اعداد فازی شبه ذوزنقه ای

فرض کنید

$$A=(\underline{a},a_1,a_2,\bar{a},l_A(x),r_A(x))$$
$$B=(\underline{b},b_1,b_2,\bar{b},l_B(x),r_B(x)) \qquad (۶–۳)$$

دو عدد فازی شبه ذوزنقه ای با نمایش α – برش زیر باشند :

$$A=\bigcup_\alpha A_\alpha,\quad A_\alpha=\left[\underline{A}_\alpha,\overline{A}_\alpha\right],\quad \alpha\in(0,1],\quad A_1=[a_1,a_2],$$
$$B=\bigcup_\alpha B_\alpha,\quad B_\alpha=\left[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha\right],\quad \alpha\in(0,1],\quad B_1=[b_1,b_2]. \qquad (۷–۳)$$

با فرض

$$\phi=\frac{a_1+a_2}{2}\quad,\quad \psi=\frac{b_1+b_2}{2} \qquad (۸–۳)$$

آنگاه عملگر های مقدماتی A و B را تعریف می کنیم : (با نمایه α – برش)

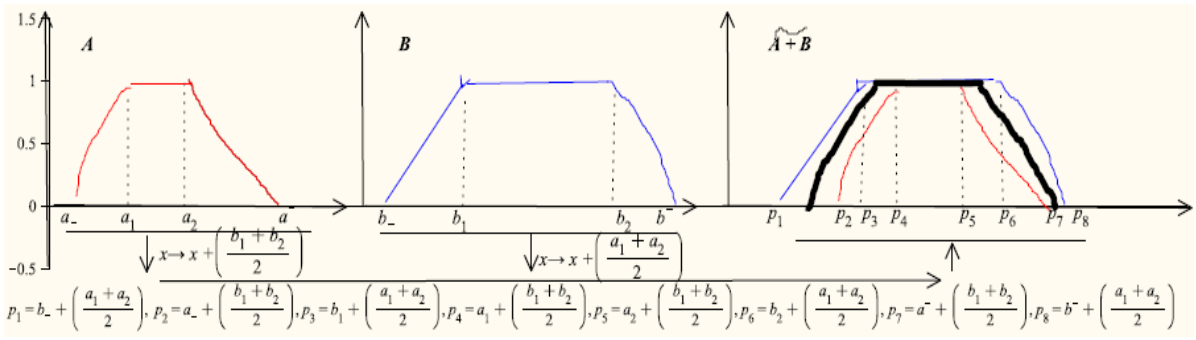
$$\begin{cases}
A\oplus B=\bigcup_\alpha(A\oplus B)_\alpha,\ (A\oplus B)_\alpha=\left[\frac{\phi+\psi}{2}+\left(\frac{\underline{A}_\alpha+\underline{B}_\alpha}{2}\right),\frac{\phi+\psi}{2}+\left(\frac{\overline{A}_\alpha+\overline{B}_\alpha}{2}\right)\right],\\
-A=\bigcup_\alpha(-A)_\alpha,\ (-A)_\alpha=\left[-2\phi+\underline{A}_\alpha,-2\phi+\overline{A}_\alpha\right],\\
A-B=A+(-B)=\bigcup_\alpha(A-B)_\alpha,\ (A-B)_\alpha=\left[\frac{\phi-3\psi}{2}+\left(\frac{\underline{A}_\alpha+\underline{B}_\alpha}{2}\right),\frac{\phi-3\psi}{2}+\left(\frac{\overline{A}_\alpha+\overline{B}_\alpha}{2}\right)\right],\\
A\otimes B=\bigcup_\alpha(A\otimes B)_\alpha,\ (A\otimes B)_\alpha=\begin{cases}\left[\left(\frac{\psi}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{\psi}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & \phi,\psi\ge0\\ \left[\left(\frac{\psi}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{\psi}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & \phi\ge0,\psi\le0\\ \left[\left(\frac{\psi}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{\psi}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & \phi,\psi\le0\\ \left[\left(\frac{\psi}{2}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{\psi}{2}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & \phi\le0,\psi\ge0\end{cases},\\
A^{-1}=\bigcup_\alpha(A^{-1})_\alpha,\ (A^{-1})_\alpha=\left[\frac{1}{\phi^2}\underline{A}_\alpha,\frac{1}{\phi^2}\overline{A}_\alpha\right],\\
A\otimes B^{-1}=\bigcup_\alpha(A\otimes B^{-1})_\alpha,\ (A\otimes B^{-1})_\alpha=\begin{cases}\left[\left(\frac{1}{2\psi}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2\psi}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & \phi\ge0,\psi>0\\ \left[\left(\frac{1}{2\psi}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\underline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2\psi}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\overline{B}_\alpha\right] & \phi\ge0,\psi<0\\ \left[\left(\frac{1}{2\psi}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2\psi}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & \phi\le0,\psi<0\\ \left[\left(\frac{1}{2\psi}\right)\underline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\overline{B}_\alpha,\left(\frac{1}{2\psi}\right)\overline{A}_\alpha+\left(\frac{\phi}{2\psi^2}\right)\underline{B}_\alpha\right] & \phi\le0,\psi>0\end{cases}.
\end{cases}$$

(۹–۳)

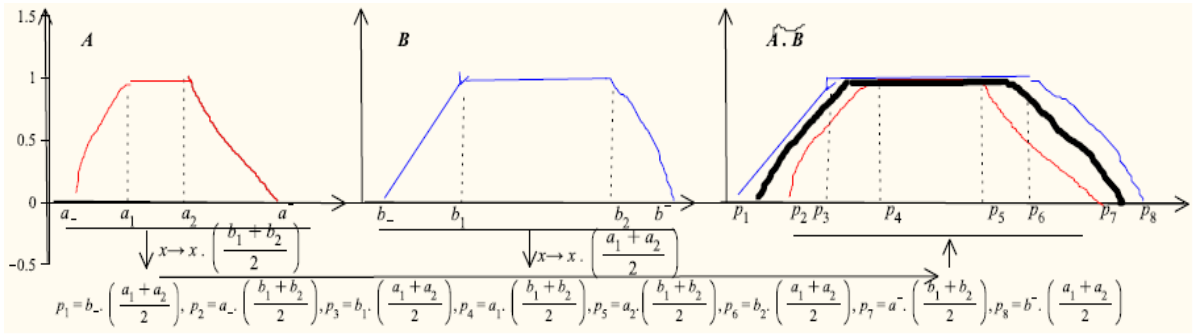
تذکر : معکوس اعداد فازی با مرکز هسته صفر $(a.c(\ .\ )=0)$ تعریف شده نیست.

۳-۲-۴ تجسم گرافیکی حساب فازی برپایه انتقال-میانگین روی اعداد فازی شبه ذوزنقه ای

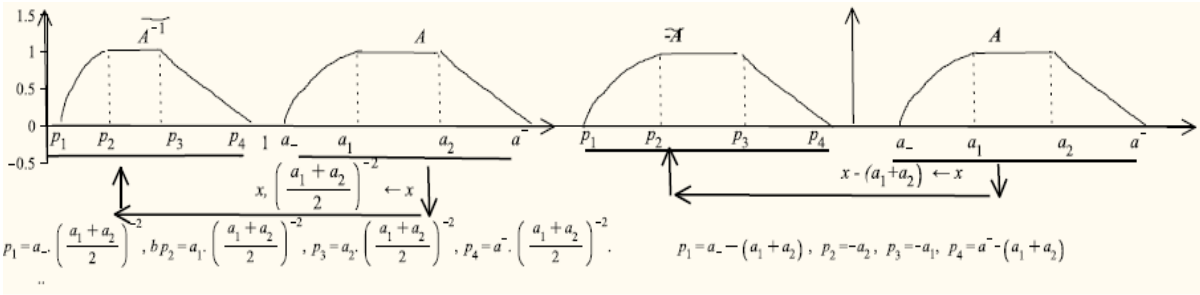
تجسم گرافیکی اعمال حساب فازی برپایه انتقال-میانگین روی اعداد فازی شبه ذوزنقه ای را می توان در تصاویر زیر برای دو عدد فازی شبه ذوزتقه ای فرضی داشته باشیم. ضمناً، می توان نمایش های مشابه ای با ابهامات و دامنه های متفاوتی از اعداد فازی فرضی داشت.



شکل ۳-۴: عملگر جمع برپایه انتقال –میانگین روی اعداد فازی شبه ذوزنقه ای



شکل ۳-۵: عملگر ضرب برپایه انتقال –میانگین روی اعداد فازی شبه ذوزنقه ای



شکل ۳-۶: عملگرهای قرینه و وارون برپایه انتقال –میانگین روی اعداد فازی شبه دوزنقه ای

۳–۳ چند لم و قضیه مقدماتی

در این بخش چند لم و قضیه مرتبط با موضوع بحث ارائه خواهیم داد.

تابع عضویت اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین در حالت کلی برای اعداد فازی شبه مثلثی و شبه ذوزنقه ای نمی توان ارائه داد مگر اینکه دو عدد فازی داده شده باشند، که در آنصورت با مشخص بودن α– برش آنها می توان تابع عضویت اعمال حساب فازی جدید را ارائه کرد. از اینرو برای اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه ای، با توجه به اینکه α – برش آنها را داریم، می توان تابع عضویت اعمال حساب فازی جدید را ارائه کرد. در دو لم بعدی به این موضوع می پردازیم.

لم۳–۱ : فرض کنید $A=(\underline{a},a,\bar{a},-,-)$ $B=(\underline{b},b,\bar{b},-,-)$ دو عدد فازی مثلثی باشد آنگاه :

$$\begin{cases}\mu_{A\oplus B}(x)=\begin{cases}\dfrac{(a-\underline{a})l_A(x-b)+(b-\underline{b})l_B(x-a)}{(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})}, & \dfrac{(\underline{a}+b)+(a+\underline{b})}{2}\le x\le(a+b),\\ \dfrac{(\bar{a}-a)r_A(x-b)+(\bar{b}-b)r_A(x-a)}{(\bar{a}+\bar{b})-(a+b)}, & a+b\le x\le\dfrac{(\bar{a}+b)+(a+\bar{b})}{2},\end{cases}\\ \mu_{-A}(x)=\mu_A(x+2a),\\ \mu_{A\otimes B}(x)=\begin{cases}\dfrac{b(a-\underline{a})l_A(\frac{x}{b})+a(b-\underline{b})l_B(\frac{x}{a})}{2ab-(b\underline{a}+a\underline{b})}, & \dfrac{\underline{a}b+a\underline{b}}{2}\le x\le ab,\\ \dfrac{b(\bar{a}-a)r_A(\frac{x}{b})+a(\bar{b}-b)r_B(\frac{x}{a})}{(b\bar{a}+a\bar{b})-2ab}, & ab\le x\le\dfrac{\bar{a}b+\bar{b}a}{2},\end{cases}\\ \mu_{A^{-1}}(x)=\mu_A(a^2x).\end{cases}$$

(۱۰–۳)

اثبات :

از اینکه A و B دو عدد فازی مثلثی اند، پس:

$$A_\alpha=\left[\underline{A}_\alpha,\bar{A}_\alpha\right]=\left[\underline{a}+\alpha(a-\underline{a}),\bar{a}+\alpha(a-\bar{a})\right]$$
$$B_\alpha=\left[\underline{B}_\alpha,\bar{B}_\alpha\right]=\left[\underline{b}+\alpha(b-\underline{b}),\bar{b}+\alpha(b-\bar{b})\right] \qquad (۱۱–۳)$$

که $\alpha\in[0,1]$. از تعریف (۳–۵) و نمایش(۲–۴۹) داریم :

$$A\oplus B=\left(\frac{(\underline{a}+b)+(a+\underline{b})}{2},a+b,\frac{(\bar{a}+b)+(a+\bar{b})}{2},l_{A\oplus B}(x),r_{A\oplus B}(x)\right) \qquad (۱۲–۳)$$

که $l_{A\oplus B}(x),r_{A\oplus B}(x)$ بشرح زیر محاسبه می گردند:

بر اساس تعریف α – برش $A\oplus B$ داریم :

$$\frac{a+b}{2}+\frac{\underline{A}_\alpha+\underline{B}_\alpha}{2}\le x\le\frac{a+b}{2}+\frac{\overline{A}_\alpha+\overline{B}_\alpha}{2} \qquad (۱۳-۳)$$

حالت ۱) اگر

$$\frac{a+b}{2}+\frac{\underline{a}+\alpha(a-\underline{a})+\underline{b}+\alpha(b-\underline{b})}{2}\le x \qquad (۱۴-۳)$$

آنگاه

$$\frac{2x-(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})}{(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})}\ge\alpha \qquad (۱۵-۳)$$

بنابراین طبق تعریف α - برش داریم :

$$l_{A\oplus B}(x)=\frac{2x-(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})}{(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})} \qquad (۱۶-۳)$$

حال اگر $\frac{(\underline{a}+b)+(a+\underline{b})}{2}\le x\le a+b$ باشد، آنگاه طبق تعریف $A\oplus B$ داریم :

$$l_A(x-b)=\frac{x-b-\underline{a}}{a-\underline{a}}\quad,\quad l_B(x-a)=\frac{x-a-\underline{b}}{b-\underline{b}} \qquad (۱۷-۳)$$

و از بازنویسی (۳-۱۶) بفرم زیرداریم :

$$l_{A\oplus B}(x)=\frac{(x-b-\underline{a})+(x-a-\underline{b})}{(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})} \qquad (۱۸-۳)$$

که در نتیجه با (۳-۱۷) داریم:

$$l_{A\oplus B}(x)=\frac{(a-\underline{a})l_A(x-b)+(b-\underline{b})l_B(x-a)}{(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})} \qquad (۱۹-۳)$$

حالت ۲) اگر

$$\frac{a+b}{2}+\frac{\bar{a}+\alpha(a-\bar{a})+\bar{b}+\alpha(b-\bar{b})}{2}\ge x \qquad (۲۰-۳)$$

آنگاه

$$\frac{(a+b)+(\bar{a}+\bar{b})-2x}{(\bar{a}+\bar{b})-(a+b)}\ge\alpha \qquad (۲۱-۳)$$

بنابراین، طبق تعریف α - برش داریم :

$$r_{A\oplus B}(x)=\frac{(a+b)+(\bar{a}+\bar{b})-2x}{(\bar{a}+\bar{b})-(a+b)} \qquad (۲۲-۳)$$

حال اگر $a+b\le x\le\frac{(\bar{a}+b)+(a+\bar{b})}{2}$ باشد، آنگاه طبق تعریف $A\oplus B$ داریم :

$$r_A(x-b)=\frac{\bar{a}-(x-b)}{\bar{a}-a}\ ,\ r_B(x-a)=\frac{\bar{b}-(x-a)}{\bar{b}-b} \qquad (۲۳-۳)$$

و از بازنویسی (۳-۲۲) بفرم زیر داریم :

$$r_{A\oplus B}(x)=\frac{\bar{a}-(x-b)+\bar{b}-(x-a)}{(\bar{a}+\bar{b})-(a+b)} \qquad (۲۴-۳)$$

که در نتیجه با (۳-۲۳) داریم:

$$r_{A\oplus B}(x)=\frac{(\bar{a}-a)r_A(x-b)+(\bar{b}-b)r_B(x-a)}{(\bar{a}+\bar{b})-(a+b)} \qquad (۲۵-۳)$$

بر ای سایر اعمال حساب فازی مطرح شده در لم، مشابه اثبات فوق را خواهیم داشت. لازم به ذکر است که در تابع عضویت $A\otimes B$ فرض گردیده که $a,b>0$ اند. در حالت های دیگر یعنی $ab>0,\ <0$، $a<0,b>0$ و $a,b<0$ نیز می توان تابع عضویت $A\otimes B$ را ارائه داد.

لم ۳-۲ : فرض کنید $A=(\underline{a},a_1,a_2,\bar{a},-,-)$ و $B=(\underline{b},b_1,b_2,\bar{b},-,-)$ دو عدد فازی ذوزنقه ای باشند، آنگاه

$$\begin{cases}\mu_{A\oplus B}(x)=\begin{cases}\frac{(a_1-\underline{a})l_A(x-\psi)+(b_1-\underline{b})l_B(x-\phi)}{(a_1+b_1)-(\underline{a}+\underline{b})}, & \frac{(\underline{a}+\psi)+(\phi+\underline{b})}{2}\le x\le\frac{(a_1+\psi)+(\phi+b_1)}{2},\\ 1, & \frac{(a_1+\psi)+(\phi+b_1)}{2}\le x\le\frac{(a_2+\psi)+(\phi+b_2)}{2},\\ \frac{(\bar{a}-a_2)r_A(x-\psi)+(\bar{b}-b_2)r_B(x-\phi)}{(\bar{a}+\bar{b})-(a_2+b_2)}, & \frac{(a_2+\psi)+(\phi+b_2)}{2}\le x\le\frac{(\bar{a}+\psi)+(\phi+\bar{b})}{2},\end{cases}\\ \mu_{-A}(x)=\mu_A(x+2\phi),\\ \mu_{A\otimes B}(x)=\begin{cases}\frac{(a_1-\underline{a})\psi l_A(\frac{x}{\psi})+(b_1-\underline{b})\phi l_B(\frac{x}{\phi})}{(a_1-\underline{a})\psi+(b_1-\underline{b})\phi}, & \frac{\underline{a}.\psi+\underline{b}.\phi}{2}\le x\le\frac{a_1.\psi+\phi.b_1}{2},\\ 1, & \frac{a_1.\psi+\phi b_1}{2}\le x\le\frac{a_2.\psi+b_2.\phi}{2},\\ \frac{(\bar{a}-a_2)\psi r_A(\frac{x}{\psi})+(\bar{b}-b_2)\phi r_B(\frac{x}{\phi})}{(\bar{a}-a_2)\psi+(\bar{b}-b_2)\phi}, & \frac{a_2.\psi+b_2.\phi}{2}\le x\le\frac{\bar{a}\psi+\bar{b}\phi}{2},\end{cases}\\ \mu_{A^{-1}}(x)=\mu_A(\phi^2x).\end{cases} \qquad (۲۶-۳)$$

با

$$\phi = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad , \quad \psi = \frac{b_1 + b_2}{2}. \tag{۲۷-۳}$$

اثبات : مشابه لم قبل.

لازم به ذکر است که در تابع عضویت $A \otimes B$ فرض گردیده که $\phi, \psi > 0$ اند. در حالت های دیگر یعنی $\phi > 0, \psi < 0$ ، $\phi < 0, \psi > 0$ و $\phi, \psi < 0$ نیز می توان تابع عضویت $A \otimes B$ را ارائه داد.

تذکر– با توجه به اینکه تفاضل و تقسیم بر اساس جمع و ضرب تعریف می گردند لذا نتایج مشابه ای از دو لم فوق برای توابع عضویت تفاضل و تقسیم اعداد فازی مثلثی و ذوزنقه ای نیزخواهیم داشت.

در راستای اعتبار اعمال حساب فازی جدید، بندهای جمع و ضرب دو لم (۳-۱) و (۳-۲) را می توان به بیان دیگر، بترتیب بعنوان وجود توابعی مشابه s– نرم و t– نرم مطرح کرد که در لم های زیر به آن اشاره گردیده است. البته برای معادل بودن بندهای جمع و ضرب لم های قبلی با لم های زیر، می توان اینطور بیان کرد که، با اعمال حساب فازی جدید ضمن انتقال تکیه گاه های اعداد فازی بوسیله میانگین هسته های آنها، توابع عضویت آنها نیز براساس میانگین هسته ها، انتقال می یابد بعبارت دیگر،

برای جمع A و B :

$$\mu_A(x) \to \mu_A(x - a.c(B)),$$
$$\mu_B(x) \to \mu_B(x - a.c(A)),$$

و برای ضرب A و B :

$$\mu_A(x) \to \mu_A(\frac{x}{a.c(B)}),$$
$$\mu_B(x) \to \mu_B(\frac{x}{a.c(A)}).$$

سپس میانگین توابع عضویت انتقال یافته ها، بعنوان توابع عضویت نتیجه اعمال در نظر گرفته می شود.

لم ۳-۳ : فرض کنید $A = (\underline{a}, a, \bar{a}, -, -)$ و $B = (\underline{b}, b, \bar{b}, -, -)$ دو عدد فازی مثلثی باشند، آنگاه :

$$TA_{\oplus} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

$$TA_{\oplus}(\mu_A(x-b), \mu_B(x-a)) = \begin{cases} \dfrac{(a-\underline{a})\mu_A(x-b) + (b-\underline{b})\mu_B(x-a)}{(a+b)-(\underline{a}+\underline{b})}, & \dfrac{(\underline{a}+b)+(a+\underline{b})}{2} \le x \le a+b, \\ \dfrac{(\bar{a}-a)\mu_A(x-b) + (\bar{b}-b)\mu_B(x-a)}{(\bar{a}+\bar{b})-(a+b)}, & a+b \le x \le \dfrac{(\bar{a}+b)+(a+\bar{b})}{2}, \end{cases}$$

(۲۸-۳)

و

$$TA_{\otimes}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

$$TA_{\otimes}(\mu_A(\frac{x}{b}),\mu_B(\frac{x}{a}))=\begin{cases}\dfrac{b\,(a-\underline{a})\,\mu_A(\frac{x}{b})+a(b-\underline{b})\mu_B(\frac{x}{a})}{2ab-(b\underline{a}+a\underline{b})}, & \dfrac{\underline{a}\underline{b}+a\underline{b}}{2}\le x\le ab,\\ \dfrac{b\,(\bar{a}-a)\,\mu_A(\frac{x}{b})+a(\bar{b}-b)\mu_B(\frac{x}{a})}{(b\bar{a}+a\bar{b})-2ab}, & ab\le x\le\dfrac{\bar{a}b+a\bar{b}}{2}.\end{cases}$$

(۲۹-۳)

لازم به ذکر است که در لم $TA_{\otimes}$ ، $a,b>0$ در نظر گرفته شده است. در سایر حالات a,b نیز، $TA_{\otimes}$ قابل بیان است.

لم ۳-۴ : فرض کنید $A=(\underline{a},a_1,a_2,\bar{a},-,-)$ $B=(\underline{b},b_1,b_2,\bar{b},-,-)$ دو عدد فازی ذوزنقه ای باشند آنگاه :

$$TA_{\otimes}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

$$TA_{\oplus}(\mu_A(x-\psi),\mu_B(x-\phi))=\begin{cases}\dfrac{(a_1-\underline{a})\mu_A(x-\psi)+(b_1-\underline{b})\mu_B(x-\phi)}{(a_1+b_1)-(\underline{a}+\underline{b})}, & \dfrac{(\underline{a}+\psi)+(\phi+\underline{b})}{2}\le x\le\dfrac{(a_1+\psi)+(\phi+b_1)}{2},\\ 1, & \dfrac{(a_1+\psi)+(\phi+b_1)}{2}\le x\le\dfrac{(a_2+\psi)+(\phi+b_2)}{2},\\ \dfrac{(\bar{a}-a_2)\mu_A(x-\psi)+(\bar{b}-a_1)\mu_B(x-\phi)}{2}, & \dfrac{(a_2+\psi)+(\phi+b_2)}{2}\le x\le\dfrac{(\bar{a}+\psi)+(\phi+\bar{b})}{2},\end{cases}$$

(۳۰-۳)

و

$$TA_{\otimes}:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$$

$$TA_{\otimes}(\mu_A(\frac{x}{\psi}),\mu_B(\frac{x}{\phi}))=\begin{cases}\dfrac{(a_1-\underline{a})\psi\mu_A(\frac{x}{\psi})+(b_1-\underline{b})\phi\mu_B(\frac{x}{\phi})}{(a_1-\underline{a}).\psi+(b_1-\underline{b}).\phi}, & \dfrac{\underline{a}\psi+\underline{b}\phi}{2}\le x\le\dfrac{a_1\psi+b_1\phi}{2},\\ 1, & \dfrac{a_1\psi+b_1\phi}{2}\le x\le\dfrac{a_2\psi+b_2\phi}{2},\\ \dfrac{(\bar{a}-a_2)\psi\mu_A(\frac{x}{\psi})+(\bar{b}-b_2)\phi\mu_B(\frac{x}{\phi})}{(\bar{a}-a_2).\psi+(\bar{b}-b_2).\phi}, & \dfrac{a_2\psi+b_2\phi}{2}\le x\le\dfrac{\bar{a}\psi+\bar{b}\phi}{2}.\end{cases}$$

(۳۱-۳)

با

$$.\phi=\frac{a_1+a_2}{2}\quad,\quad\psi=\frac{b_1+b_2}{2}$$

(۳۲-۳)

لازم به ذکر است در لم فوق در $TA_{\otimes}$ ، $\phi,\psi>0$ در نظر گرفته شده است. در سایر حالات ϕ,ψ نیز، $TA_{\otimes}$ قابل بیان است.

یکی از موارد اشاره شده در مورد اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش (با نمایه α – برش) اثر وابستگی [1] بوده، مبنی بر اینکه تکیه گاه نتایج عملگرها بزرگ اند. در قضیه زیر نشان خواهیم داد که تکیه گاه نتایج عملگرهای حساب فازی جدید، نسبت به اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش کوچکترند.

۳-۳-۱ قضیه (عدم اثر وابستگی [1])

تکیه گاه نتایج عملگرهای حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین، زیر مجموعه تکیه گاه نتایج عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش اند.

اثبات : فرض کنید $A=(\underline{a},a,\bar{a},l_A(x),r_A(x))$ $B=(\underline{b},b,\bar{b},l_B(x),r_B(x))$ دو عددفازی شبه مثلثی باشند آنگاه طبق تعاریف جمع و ضرب فازی بر پایه اصل گسترش و انتقال – میانگین داریم :

$A+B=(\underline{a}+\underline{b},a+b,\bar{a}+\bar{b},l_{A+B}(x),r_{A+B}(x))$ (بر پایه اصل گسترش)

$A\times B=(\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b},\bar{a}\underline{b},\bar{a}\bar{b}\},ab,\max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b},\bar{a}\underline{b},\bar{a}\bar{b}\},l_{A\times B}(x),r_{A\times B}(x))$ (بر پایه اصل گسترش)

$A\oplus B=(\frac{(\underline{a}+b)+(a+\underline{b})}{2},a+b,\frac{(\bar{a}+b)+(a+\bar{b})}{2},l_{A\oplus B}(x),r_{A\oplus B}(x))$ (بر پایه انتقال – میانگین)

$A\otimes B=(\frac{\underline{a}b+a\underline{b}}{2},a+b,\frac{\bar{a}b+a\bar{b}}{2},l_{A\otimes B}(x),r_{A\otimes B}(x))$ (بر پایه انتقال – میانگین)

بدیهی است که،

$$\begin{cases}\dfrac{(\underline{a}+b)+(a+\underline{b})}{2}\geq\underline{a}+\underline{b},\\ \dfrac{(\bar{a}+b)+(a+\bar{b})}{2}\leq\bar{a}+\bar{b},\\ \dfrac{\underline{a}b+a\underline{b}}{2}\geq\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b},\bar{a}\underline{b},\bar{a}\bar{b}\}=\underline{a}\underline{b},\\ \dfrac{\bar{a}b+a\bar{b}}{2}\leq\max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b},\bar{a}\underline{b},\bar{a}\bar{b}\}=\bar{a}\bar{b}.\end{cases}\qquad(۳۳-۳)$$

بنابراین ،

$$\begin{cases}\mathrm{supp}(A\oplus B)\subseteq\mathrm{supp}(A+B),\\ \mathrm{supp}(A\otimes B)\subseteq\mathrm{supp}(A\times B).\end{cases}\qquad(۳۴-۳)$$

لازم به ذکر است که در بالا برای اعمال ضرب، فرض گردیده است که $a,b>0$. با توجه به اینکه تفاضل و تقسیم بر اساس جمع و ضرب تعریف می شوند، لذا استدلال در مورد آنها شبیه جمع و ضرب می باشد.

[1] Lack dependence effect

ضمناً اثبات با در نظرگرفتن اعداد فازی شبه مثلثی بوده، که با در نظرگرفتن اعداد فازی شبه ذوزنقه ای نیز، استدلال مشابه خواهیم داشت.

۳-۳-۲ قضیه (عضو های بی اثر فازی[1])

فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه ای از اعداد فازی شبه هندسی و $F_C'(\mathbb{R})=\{A\in F_C(\mathbb{R}) \mid a.c(A)\neq 0\}$ باشد. آنگاه ؛

$$\forall A\in F_C(\mathbb{R}) \quad \exists! 0_A\in F_C(\mathbb{R}) \;;\; A\oplus 0_A=0_A\oplus A=A \;\;\&\;\; A-A=0_A, \tag{۳۵-۳}$$

$$\forall A\in F_C'(\mathbb{R}) \;;\; A\otimes 1_A=1_A\otimes A=A \;\;\&\; A\otimes A^{-1}=1_A. \tag{۳۶-۳}$$

اثبات :

موارد فوق را با توجه به تعاریف اعمال حساب فازی انتقال-میانگین در (۳-۵)، (۳-۹) و تعاریف 0_A و 1_A بشرح زیر خواهیم داشت.

اگر A عدد فازی شبه مثلثی $A=(\underline{a},a,\bar{a},l_A(x),r_A(x))$ باشد آنگاه ،

$$0_A=\left(\underline{a}-a\ ,0,\bar{a}-a,l_A(x+a),r_A(x+a)\right), \tag{۳۷-۳}$$

$$1_A=\begin{cases}\left(\dfrac{\underline{a}}{a},1,\dfrac{\bar{a}}{a},l_A(ax),r_A(ax)\right), & a>0,\\ \left(\dfrac{\bar{a}}{a},1,\dfrac{\underline{a}}{a},r_A(ax),l_A(ax)\right), & a<0.\end{cases} \tag{۳۸-۳}$$

اگر A عدد فازی شبه ذوزنقه ای $A=(\underline{a},a_1,a_2,\bar{a},l_A(x),r_A(x))$ باشد آنگاه ،

$$0_A=\left(\underline{a}-\phi,\frac{a_1-a_2}{2},\frac{a_2-a_1}{2},\bar{a}-\phi,l_A(x+\phi),r_A(x+\phi)\right), \tag{۳۹-۳}$$

$$1_A=\begin{cases}\left(\dfrac{\underline{a}}{\phi},\dfrac{a_1}{\phi},\dfrac{a_2}{\phi},\dfrac{\bar{a}}{\phi},l_A(\phi x),r_A(\phi x)\right), & \phi>0,\\ \left(\dfrac{\bar{a}}{\phi},\dfrac{a_2}{\phi},\dfrac{a_1}{\phi},\dfrac{\underline{a}}{\phi},r_A(\phi x),l_A(\phi x)\right), & \phi<0.\end{cases} \tag{۴۰-۳}$$

با توجه به اینکه $\phi=\dfrac{a_1+a_2}{2}$.

برخی از خواص مهم اعمال حساب فازی جدید که، کاربردهای اساسی خواهد داشت در نگرش های جدید ما نسبت به موارد ویژه ای از ریاضیات فازی تحت عناوین دستگاه های جبر ی فازی (گروه و میدان فازی)، رتبه بندی فازی و فاصله اعداد فازی در آینده، در لم های بعدی اشاره گردیده است.

[1] Fuzzy neutral elements

لم ۳-۵ : فرض کنید A و B دو عدد فازی شبه هندسی باشند، آنگاه :

$$i)\ A \oplus B = B \oplus A,$$
$$ii)\ A \otimes B = B \otimes A,$$
$$iii)\ -(-A) = A,$$
$$iv)\ -(A \oplus B) = -A - B,$$
$$v)\ A \oplus A = 2 \otimes A,$$
$$vi)\ A^n = \begin{cases} \left(\underline{a}a^{n-1}, a^n, \bar{a}a^{n-1}, l_A(\frac{x}{a^{n-1}}), r_A(\frac{x}{a^{n-1}}) \right), & a > 0, \\ \left(\bar{a}a^{n-1}, a^n, \underline{a}a^{n-1}, r_A(\frac{x}{a^{n-1}}), l_A(\frac{x}{a^{n-1}}) \right), & a < 0,\ n \quad \text{ج} \\ \left(\underline{a}a^{n-1}, a^n, \bar{a}a^{n-1}, l_A(\frac{x}{a^{n-1}}), r_A(\frac{x}{a^{n-1}}) \right), & a < 0,\ n \quad \text{ب} \end{cases}$$

(لازم به ذکر است که در مورد (vi)، A شبه مثلثی فرض گردیده است که در صورت شبه ذوزنقه ای بودن A نیز تساوی مشابه ای خواهیم داشت.)

اثبات: با توجه به تعاریف اعمال حساب فازی انتقال-میانگین در (۳-۵) و (۳-۹)، اثبات همه موارد فوق بدیهی اند.

برخی دیگر از خواص اعمال حساب فازی جدید بصورت تقریب مطرح اند. لذا ابتدا تقریب فازی را تعریف می کنیم و سپس به چند خاصیت مرتبط با موضوع اشاره خواهیم کرد.

تعریف ۳-۱ (تقریب فازی[1])

تقریب دو عدد فازی شبه هندسی A و B را با نماد ($\cong$) نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$A \cong B$ اگر و تنها اگر $a.c(A) = a.c(B)$. (۳-۴۱)

[1] Fuzzy approximation

لم ۳-۶ : با فرض $A,B,C \in F_C(\mathbb{R})$ داریم:

i) $0 \oplus A \cong A,$

ii) $1 \otimes A \cong A, \quad -1 \otimes A \cong -A, \quad -1 \otimes (-A) \cong A, \quad -1 \otimes (-1 \otimes A) \cong A,$

iii) $A \oplus A \oplus A \cong 3 \otimes A,$

iv) $A \oplus (B \oplus C) \cong (A \oplus B) \oplus C,$

v) $A \otimes (B \otimes C) \cong (A \otimes B) \otimes C,$

vi) $A \otimes (B \oplus C) \cong (A \otimes B) \oplus (A \otimes C),$

vii) $(A \oplus B) \otimes C \cong (A \otimes C) \oplus (B \otimes C).$

اثبات: با توجه به تعاریف اعمال حساب فازی انتقال-میانگین در (۳-۵)، (۳-۹) و تعریف (۳-۱)، اثبات همه موارد فوق بدیهی اند.

۳ -۴ مثال های عددی

در این بخش چند مثال عددی جهت تشریح به کارگیری اعمال حساب فازی جدید، ارائه خواهیم داد. ضمناً در یک مثال، نتایج اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش (α - برش) را با اعمال حساب فازی جدید مورد مقایسه قرار خواهیم داد.

مثال۳-۱ : فرض کنید

$$A = \bigcup_\alpha \left[\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha\right], \qquad \underline{A}_\alpha = \alpha + 1, \qquad \overline{A}_\alpha = 4 - 2\alpha,$$
$$B = \bigcup_\alpha \left[\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha\right], \qquad \underline{B}_\alpha = 2\alpha + 3, \qquad \overline{B}_\alpha = 6 - \alpha.$$

بر اساس اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش (α - برش) داریم :

$$A+B = \bigcup_\alpha (A+B)_\alpha \ , \ (A+B)_\alpha = [3\alpha + 4, 10 - 3\alpha],$$
$$-B = \bigcup_\alpha (-B)_\alpha \ , \qquad (-B)_\alpha = [\alpha - 6, -3 - 2\alpha],$$
$$A-B = \bigcup_\alpha (A-B)_\alpha \ , \quad (A-B)_\alpha = [2\alpha - 5, 1 - 4\alpha],$$
$$A.B = \bigcup_\alpha (A.B)_\alpha, (A.B)_\alpha = \left[\frac{(4\alpha+5)^2 - 1}{8}, \frac{(8-2\alpha)^2 - 16}{2}\right],$$
$$B^{-1} = \bigcup_\alpha (B^{-1})_\alpha, (B^{-1})_\alpha = \left[\frac{1}{6-\alpha}, \frac{1}{2\alpha+3}\right],$$
$$A.B^{-1} = \bigcup_\alpha (A.B^{-1})_\alpha, (A.B^{-1})_\alpha = \left[\frac{\alpha+1}{6-\alpha}, \frac{4-2\alpha}{2\alpha+3}\right].$$

بر اساس اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین داریم :

$$A\oplus B=\bigcup_{\alpha}(A\oplus B)_{\alpha},\qquad (A\oplus B)_{\alpha}=\left[\frac{7}{2}+\frac{3\alpha+4}{2},\frac{7}{2}+\frac{10-3\alpha}{2}\right],$$

$$-B=\bigcup_{\alpha}(-B)_{\alpha},\qquad (-B)_{\alpha}=\left[-10+(2\alpha+3),-10+(6-\alpha)\right],$$

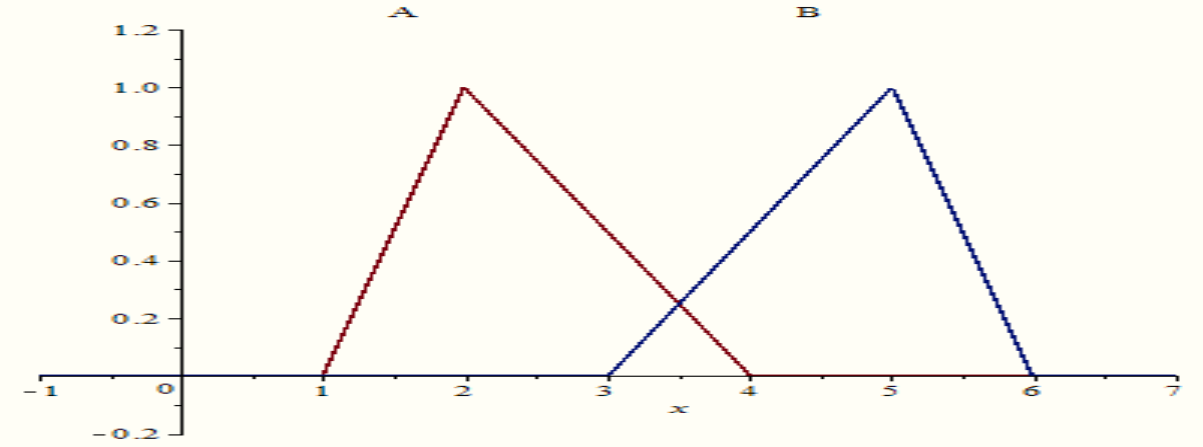
$$A-B=\bigcup_{\alpha}(A-B)_{\alpha},\qquad (A-B)_{\alpha}=\left[\frac{-13}{2}+\frac{3\alpha+4}{2},\frac{-13}{2}+\frac{10-3\alpha}{2}\right],$$

$$A\otimes B=\bigcup_{\alpha}(A\otimes B)_{\alpha},\qquad (A\otimes B)_{\alpha}=\left[\frac{5}{2}(\alpha+1)+(2\alpha+3),\frac{5}{2}(4-2\alpha)+(6-\alpha)\right],$$

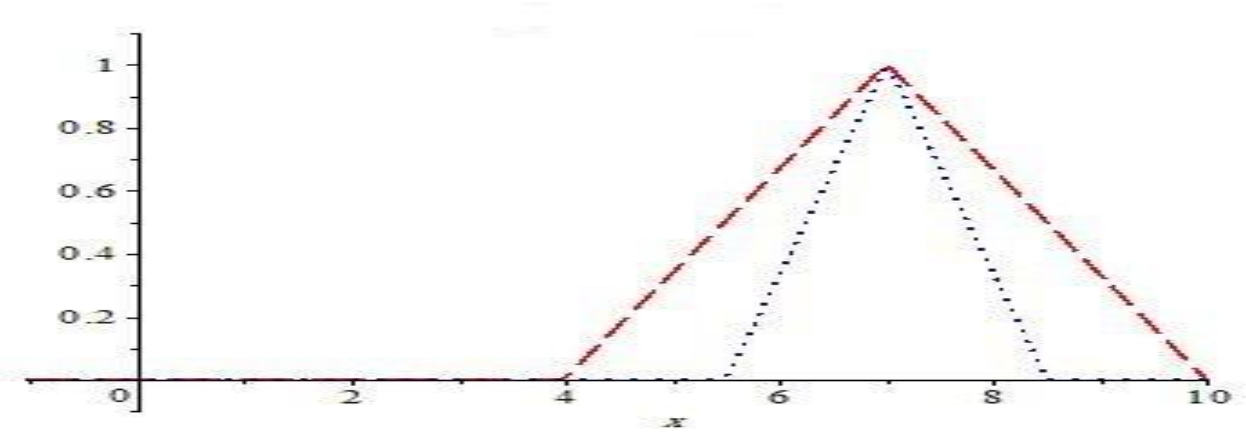
$$B^{-1}=\bigcup_{\alpha}(B^{-1})_{\alpha},\qquad (B^{-1})_{\alpha}=\left[\frac{1}{25}(2\alpha+3),\frac{1}{25}(6-\alpha)\right],$$

$$A.B^{-1}=\bigcup_{\alpha}(A.B^{-1})_{\alpha},\qquad (A.B^{-1})_{\alpha}=\left[\frac{1}{10}(\alpha+1)+\frac{2}{50}(2\alpha+3),\frac{1}{10}(4-2\alpha)+\frac{2}{50}(6-\alpha)\right].$$

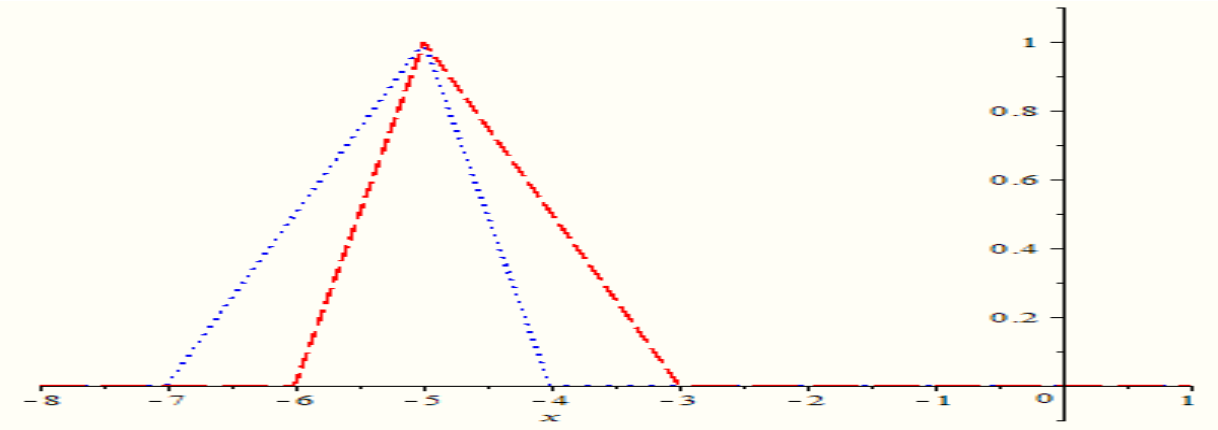
مقایسه نتایج اعمال حساب فازی بر پایه اصل گسترش و اتقال–میانگین روی مثال فوق، در تصاویر زیر نشان داده شده است .



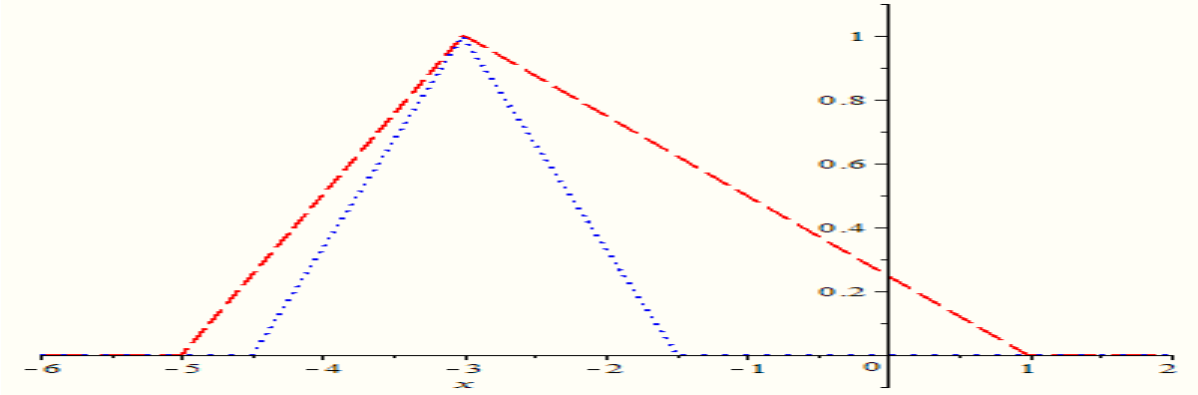
شکل ۳–۷: اعداد فازی A و B از مثال ۳–۱



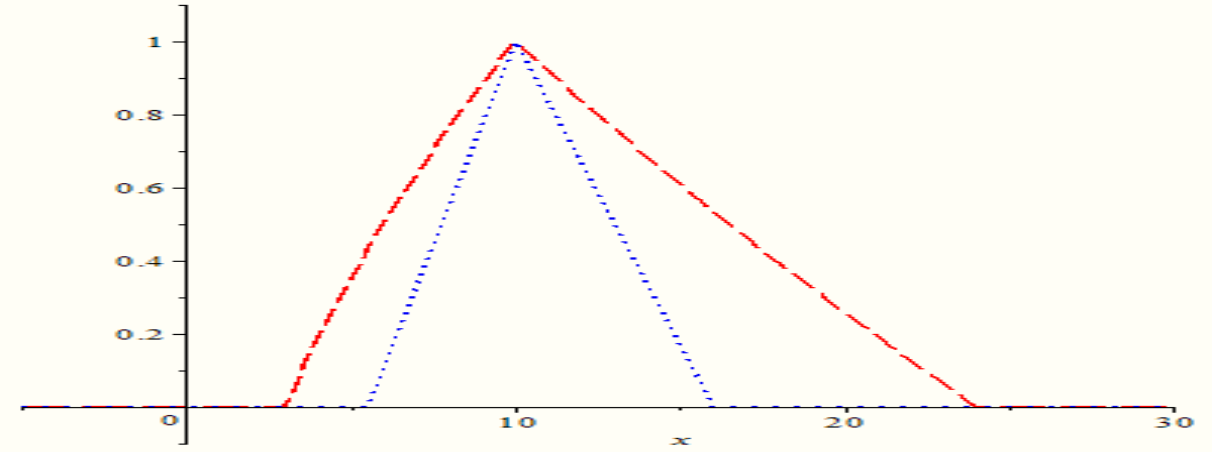
شکل ۳-۸: نتایج عمل جمع بر پایه اصل گسترش(با نماد---)و انتقال-میانگین(با نماد.....)



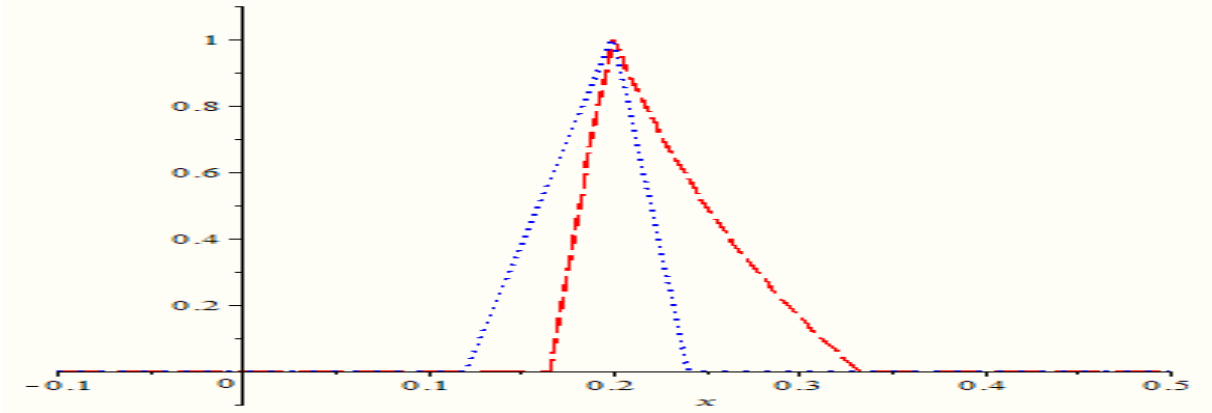
شکل ۳-۹: نتایج عمل قرینه بر پایه اصل گسترش(با نماد---)و انتقال-میانگین(با نماد.....) روی عدد فازی B



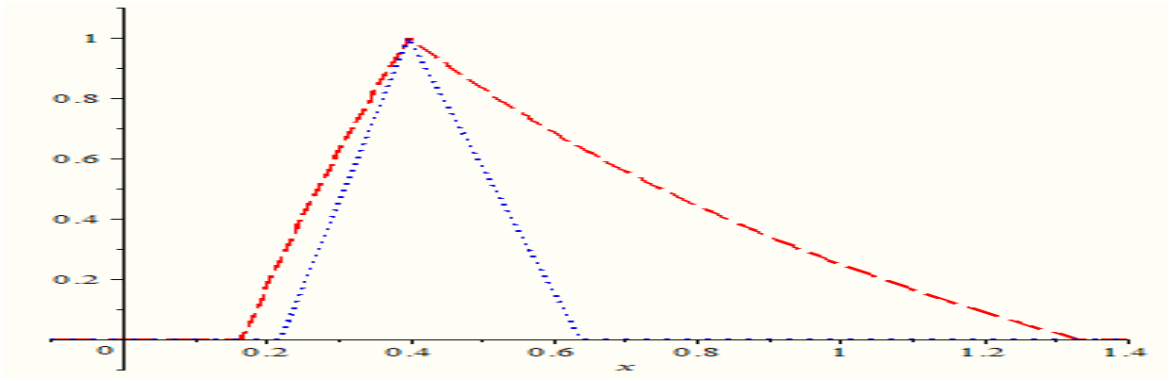
شکل ۳-۱۰: نتایج عمل تفاضل بر پایه اصل گسترش(با نماد---)و انتقال-میانگین(با نماد.....)



شکل ۳-۱۱: نتایج عمل ضرب بر پایه اصل گسترش(با نماد---)و انتقال-میانگین(با نماد.....)



شکل ۳-۱۲: نتایج عمل وارون بر پایه اصل گسترش(با نماد---)و انتقال-میانگین(با نماد.....) روی عدد فازی B



شکل ۳-۱۳: نتایج عمل تقسیم بر پایه اصل گسترش(با نماد---)و انتقال-میانگین(با نماد.....)

درتصاویر واضح است که، تکیه گاه نتایج اعمال حساب فازی برپایه انتقال –میانگین نسبت به اصل گسترش کوچکترند بعبارت دیگر، به قطعیت نزدیکترند. اگرچه در اعمال قرینه و وارون چنین وضعیتی نیست ولی، نتایج این اعمال در تفاضل و تقسیم اتفاق افتاده است.

مثال ۳-۲ : فرض کنید

$$A = U_\alpha\left[\underline{A}_\alpha, \overline{A_\alpha}\right],\ \ \underline{A}_\alpha = 2\alpha + 1,\ \ \overline{A_\alpha} = 3 + \sqrt{1-\alpha},$$
$$B = U_\alpha\left[\underline{B}_\alpha, \overline{B_\alpha}\right],\ \ \underline{B}_\alpha = (2\alpha+2)^2,\ \ \overline{B}_\alpha = (5-\alpha)^2.$$

آنگاه بر اساس اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین داریم :

$$A \oplus B = U_\alpha (A \oplus B)_\alpha \quad , \qquad (A \oplus B)_\alpha = \left[\frac{19}{2} + \frac{2\alpha+1+(2\alpha+2)^2}{2}, \frac{19}{2} + \frac{3+\sqrt{1-\alpha}+(5-\alpha)^2}{2}\right],$$

$$-B = U_\alpha (-B)_\alpha \ , \qquad (-B)_\alpha = \left[-32 + (2\alpha+2)^2, -32 + (5-\alpha)^2\right],$$

$$A - B = U_\alpha (A - B)_\alpha \quad , \qquad (A - B)_\alpha = \left[\frac{-45}{2} + \frac{2\alpha+1+(2\alpha+2)^2}{2}, \frac{-45}{2} + \frac{3+\sqrt{1-\alpha}+(5-\alpha)^2}{2}\right],$$

$$A \otimes B = U_\alpha (A \otimes B)_\alpha \quad , \quad (A \otimes B)_\alpha = \left[8(2\alpha+1) + \frac{3}{2}(2\alpha+2)^2, 8(3+\sqrt{1-\alpha}) + \frac{3}{2}(5-\alpha)^2\right],$$

$$B^{-1} = U_\alpha (B^{-1})_\alpha \quad , \qquad (B^{-1})_\alpha = \left[\frac{1}{256}(2\alpha+2)^2, \frac{1}{256}(5-\alpha)^2\right],$$

$$A \otimes B^{-1} = U_\alpha (A.B^{-1})_\alpha \ , \ (A.B^{-1})_\alpha = \left[\frac{1}{32}(2\alpha+1) + \frac{3}{512}(2\alpha+2)^2, \frac{1}{32}(3+\sqrt{1-\alpha}) + \frac{3}{512}(5-\alpha)^2\right].$$

مثال۳-۳ : فرض کنید

$$A = \bigcup_\alpha \left[\underline{A}_\alpha, \overline{A}_\alpha\right],\ \ \underline{A}_\alpha = 3 - \sqrt{4-4\alpha},\ \ \overline{A}_\alpha = 3 + \sqrt{16-16\alpha},$$
$$B = \bigcup_\alpha \left[\underline{B}_\alpha, \overline{B}_\alpha\right],\ \ \underline{B}_\alpha = 2 - \sqrt{-\ln\alpha},\ \ \overline{B}_\alpha = 2 - \ln\alpha.$$

آنگاه بر اساس اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین داریم :

$$A \oplus B = \bigcup_\alpha (A \oplus B)_\alpha, \qquad (A \oplus B)_\alpha = \left[\frac{5}{2} + \frac{5-(\sqrt{4-4\alpha}+\sqrt{-\ln\alpha})}{2}, \frac{5}{2} + \frac{5+(\sqrt{16-16\alpha}-\ln\alpha)}{2}\right],$$

$$-B = \bigcup_\alpha (-B)_\alpha, \qquad (-B)_\alpha = \left[-2 - \sqrt{-\ln\alpha}, -2 - \ln\alpha\right],$$

$$A - B = \bigcup_\alpha (A - B)_\alpha, \qquad (A - B)_\alpha = \left[\frac{-3}{2} + \frac{5-(\sqrt{4-4\alpha}+\sqrt{-\ln\alpha})}{2}, \frac{-3}{2} + \frac{5+(\sqrt{16-16\alpha}-\ln\alpha)}{2}\right],$$

$$A \otimes B = \bigcup_\alpha (A \otimes B)_\alpha, \qquad (A \otimes B)_\alpha = \left[3 - \sqrt{4-4\alpha} + \frac{3}{2}(2-\sqrt{-\ln\alpha}), 3 + \sqrt{16-16\alpha} + \frac{3}{2}(2-\ln\alpha)\right],$$

$$B^{-1} = \bigcup_\alpha (B^{-1})_\alpha, \qquad (B^{-1})_\alpha = \left[\frac{1}{4}(2-\sqrt{-\ln\alpha}), \frac{1}{4}(2-\ln\alpha)\right],$$

$$A \otimes B^{-1} = \bigcup_\alpha (A.B^{-1})_\alpha, \qquad (A.B^{-1})_\alpha = \left[\frac{1}{4}(3-\sqrt{4-4\alpha}) + \frac{3}{8}(2-\sqrt{-\ln\alpha}), \frac{1}{4}(3+\sqrt{16-16\alpha}) + \frac{3}{8}(2-\ln\alpha)\right].$$

مثال ۳-۴ : فرض کنید

$$A=\bigcup_\alpha\left[\underline{A}_\alpha,\overline{A}_\alpha\right],\ \ \underline{A}_\alpha=5-2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1},\ \ \overline{A}_\alpha=5+\sqrt{4-4\alpha},$$
$$B=\bigcup_\alpha\left[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha\right],\ \ \underline{B}_\alpha=3\alpha+1,\ \ \overline{B}_\alpha=4+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}).$$

آنگاه بر اساس اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین داریم :

$$A\oplus B=\bigcup_\alpha(A\oplus B)_\alpha,\qquad (A\oplus B)_\alpha=\left[\frac{9}{2}+\frac{6+3\alpha-2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}}{2},\frac{9}{2}+\frac{9+\sqrt{4-4\alpha}+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2})}{2}\right],$$

$$-B=\bigcup_\alpha(-B)_\alpha,\qquad (-B)_\alpha=\left[3\alpha-7,3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2})-4\right],$$

$$A-B=\bigcup_\alpha(A-B)_\alpha,\qquad (A-B)_\alpha=\left[\frac{-7}{2}+\frac{6+3\alpha-2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1}}{2},\frac{-7}{2}+\frac{9+\sqrt{4-4\alpha}+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2})}{2}\right],$$

$$A\otimes B=\bigcup_\alpha(A\otimes B)_\alpha,\qquad (A\otimes B)_\alpha=\left[2(5-2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1})+\frac{5}{2}(3\alpha+1),2(5+\sqrt{4-4\alpha})+\frac{5}{2}(4+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}))\right],$$

$$B^{-1}=\bigcup_\alpha(B^{-1})_\alpha,\qquad (B^{-1})_\alpha=\left[\frac{1}{16}(3\alpha+1),\frac{1}{16}(4+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}))\right],$$

$$A\otimes B^{-1}=\bigcup_\alpha(A.B^{-1})_\alpha,\qquad (A.B^{-1})_\alpha=\left[\frac{1}{8}(5-2\sqrt{\frac{1}{\alpha}-1})+\frac{5}{32}(2\alpha+1),\frac{1}{8}(5+\sqrt{4-4\alpha})+\frac{5}{32}(4+3(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{2}))\right].$$

مثال ۳-۵ : فرض کنید

$$A=\bigcup_\alpha\left[\underline{A}_\alpha,\overline{A}_\alpha\right],\ \ \underline{A}_\alpha=3-\sqrt{4-4\alpha},\ \ \overline{A}_\alpha=6-\alpha,$$
$$B=\bigcup_\alpha\left[\underline{B}_\alpha,\overline{B}_\alpha\right],\ \ \underline{B}_\alpha=2+\ln\alpha,\ \ \overline{B}_\alpha=4-\ln\alpha.$$

آنگاه بر اساس اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین داریم :

$$A\oplus B=\bigcup_\alpha(A\oplus B)_\alpha,\qquad (A\oplus B)_\alpha=\left[\frac{7}{2}+\frac{5-\sqrt{4-4\alpha}+\ln\alpha}{2},\frac{7}{2}+\frac{10-\alpha-\ln\alpha}{2}\right],$$

$$-B=\bigcup_\alpha(-B)_\alpha,\qquad (-B)_\alpha=\left[-4+\ln\alpha,-2-\ln\alpha\right],$$

$$A-B=\bigcup_\alpha(A-B)_\alpha,\qquad (A-B)_\alpha=\left[\frac{-5}{2}+\frac{5-\sqrt{4-4\alpha}+\ln\alpha}{2},\frac{-5}{2}+\frac{10-\alpha-\ln\alpha}{2}\right],$$

$$A\otimes B=\bigcup_\alpha(A\otimes B)_\alpha,\qquad (A\otimes B)_\alpha=\left[\frac{3}{2}(3-\sqrt{4-4\alpha})+2(2+\ln\alpha),\frac{3}{2}(6-\alpha)+2(4-\ln\alpha)\right],$$

$$B^{-1}=\bigcup_\alpha(B^{-1})_\alpha,\qquad (B^{-1})_\alpha=\left[\frac{2+\ln\alpha}{9},\frac{4-\ln\alpha}{9}\right],$$

$$A\otimes B^{-1}=\bigcup_\alpha(A.B^{-1})_\alpha,\qquad (A.B^{-1})_\alpha=\left[\frac{1}{6}(3-\sqrt{4-4\alpha})+\frac{2}{9}(2+\ln\alpha),\frac{1}{6}(6-\alpha)+\frac{2}{9}(4-\ln\alpha)\right].$$

فصل چهارم
نگرش نو به ریاضیات فازی

در این فصل بر اساس تعریف جدید اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین، نگرش نو به دستگاه های جبری فازی، رتبه بندی فازی و فاصله فازی خواهیم داشت.

۴ -۱ دستگاه های جبری فازی

۴-۱-۱ مقدمه

ساختار جبری فازی نقش برجسته ای در ریاضیات با برنامه های کاربردی گسترده ای در بسیاری از شاخه های دیگر مانند فیزیک نظری، علوم کامپیوتر، مهندسی کنترل، علم ارتباطات، نظریه کدگذاری، نظریه گروه، تجزیه و تحلیل واقعی، نظریه اندازه و غیره دارد.

مطالعه ساختارهای جبری فازی در مقاله ای از رزنفلد[1] [۴۵] در سال ۱۹۷۱ آغاز گردیده است. رزنفلد مفهومی از گروه فازی ارائه داد و نشان داد که نتایج بسیاری در گروه به شیوه های ابتدایی با گسترش قضیه گروه فازی، می توان توسعه داد. تعریف رزنفلد از یک گروه فازی نقطه عطفی برای ریاضیدانان محض گردید. از آن زمان، مطالعه ساختارجبری فازی در بسیاری جهات از جمله حلقه فازی، میدان فازی، فضا های برداری فازی و غیره دنبال شده است.

در سال ۱۹۸۲، لیو[2] [۳۴] مفهوم حلقه فازی و ایده آل فازی را بیان کرد و سپس در سال ۱۹۸۶ رن[3] [۴۴] مفاهیم ایده آل فازی و حلقه خارج قسمت فازی را مورد مطالعه قرار داد.

حلقه فازی و ایده آل فازی در حس لیو و رن در واقع تمدید عقلانی از گروه فازی رزنفلد با شروع کردن حلقه معمولی و سپس تعریف زیر حلقه و زیر گروه فازی بر پایه اعمال دوتایی از حلقه ارائه شده بود. بر اساس مفهوم فضای فازی که نقش مجموعه جهانی در جبر معمولی دارد و با استفاده از اعمال دوتایی فازی، دیب[4] [۲۲] یک فرمول جدید برای حلقه های فازی و ایده آل های فازی بدست آورد. از آن زمان

[1] Rosenfeld
[2] Liu
[3] Ren
[4] Dib

به بعد، بسیاری از ریاضیدانان از جمله اکتاس و کاگمن[1] [۴]، مالک و مردسون[2] [۳۵] و یوآن و لی[3] [۵۳] ، آنها را مورد مطالعه قرار داده اند.

به نظر ما، دستگاه های جبری فازی، عموماً مجموعه هایی هستند که می شود با عنصر های آنها اعمال جبری انجام داد یعنی، می توان هر دو عنصر هر یک از این مجموعه ها را، شاید هم به چند طریق، با هم ترکیب کرد تا عنصر سومی از مجموعه بدست آید. علاوه بر این، فرض بر این است که این عمل ها ی جبری تابع قواعد معینی می باشند، که این قاعده ها با اصولی که به آنها اصول موضوع اطلاق می شود و دستگاه را تعریف می کنند، بیان شده باشند. سپس در این محدوده است که ما به اثبات قضایایی در باره این نهاد های بسیار عمومی می پردازیم.

لازم است تاکید نماییم که این دستگاه های جبری و اصول موضوع معرف آنها باید دارای حالت طبیعی مشخص باشند، آنها باید حاصل توجه به مثال های بی شماری باشند، یعنی از آنها نتایج با معنی بسیاری بارور گردند. نمی شود همین طوری چند اصل موضوع ساخت و سپس به بررسی دستگاه ناشی از آنها پرداخت.

البته، عده ای از این کارها کرده اند، اما اکثر ریاضیدانان، این گونه اعمال را ریاضیاتی کم مایه شمرده، آنرا رد می کنند. دستگاه هایی که جهت بررسی انتخاب می شوند از این جهت است که حالت های خاصی از نهاد های آنها گهگاه دیده شده اند یا بدان خاطر که این حالت های خاص در واقع نمونه هایی خاص هستند از یک پدیده کلی.

قبل از ارائه تعاریف اصلی گروه و میدان فازی، چند تعریف و لم مرتبط با موضوع را بیان می کنیم :

تعریف ۴-۱ فرض می کنیم A یک عدد فازی باشد آنگاه :

$$\mu_A(x)=\begin{cases}\underline{\mu}_A(x), & x\in \underline{P}_A,\\ 1, & x\in core(A),\\ \overline{\mu}_A(x), & x\in \overline{P}_A,\\ 0, & \text{سایر نقاط.}\end{cases} \qquad (۱-۴)$$

که

$$\underline{P}_A=\left\{x\in \text{supp}(A)\ \middle|\ \inf(\text{supp}(A))\le x\le \min(core(A))\right\}, \qquad (۲-۴)$$

$$\overline{P}_A=\left\{x\in \text{supp}(A)\ \middle|\ \max(core(A))\le x\le \sup(\text{supp}(A))\right\}, \qquad (۳-۴)$$

$$\underline{\text{supp}}(A)=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x\le a.c(A)\right\}, \qquad (۴-۴)$$

$$\overline{\text{supp}}(A)=\left\{x\in\mathbb{R}\ \middle|\ x\ge a.c(A)\right\}. \qquad (۵-۴)$$

[1] Aktas and Cagman
[2] Malik and Mordeson
[3] Yuan and Lee

تعریف ۴-۲ (همتراز فازی نوع – ۱ [1]) :

فرض کنید B,A دو عدد فازی باشند. آنگاه A همتراز فازی نوع – ۱، B گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند :

۱) به ازای هر x متعلق به $\overline{\text{supp}}(A)$ و هر y متعلق به $\overline{\text{supp}}(B)$ ؛ اگر $d(x,a.c(A))=d(y,a.c(B))$ آنگاه $\underline{\mu}_A(x)=\underline{\mu}_B(y)$.

۲)به ازای هر x متعلق به $\underline{\text{supp}}(A)$ و هر y متعلق به $\underline{\text{supp}}(B)$ ؛ اگر $d(x,a.c(A))=d(y,a.c(B))$ آنگاه $\overline{\mu}_A(x)=\overline{\mu}_B(y)$.

و با نماد $A \sim_1 B$ نمایش می دهیم.

تعریف ۴-۳ (همتراز فازی نوع – ۲ [2]) :

فرض کنید B,A دو عدد فازی باشند. آنگاه A همتراز فازی نوع – ۲ ، B گویند هرگاه شرایط زیر برقرار باشند :

۱)به ازای هر x متعلق به $\overline{\text{supp}}(A)$ و هر y متعلق به $\overline{\text{supp}}(B)$ ؛ اگر $\frac{x}{a.c(A)}=\frac{y}{a.c(B)}$ آنگاه $\underline{\mu}_A(x)=\underline{\mu}_B(y)$

۲) به ازای هر x متعلق به $\underline{\text{supp}}(A)$ و هر y متعلق به $\underline{\text{supp}}(B)$ ؛ اگر $\frac{x}{a.c(A)}=\frac{y}{a.c(B)}$ آنگاه $\overline{\mu}_A(x)=\overline{\mu}_B(y)$ و با نماد $A \sim_2 B$ نمایش می دهیم.

هریک از همترازی های ۱و۲، رابطه های هم ارزی اند و پارامترهایی برای مقایسه نگرش های جدید فازی ما نسبت به قطعییت هستند.

کلاس های هم ارزی نوع-۱ و نوع-۲

براساس همتراز فازی نوع– ۱ و نوع– ۲، بترتیب دو کلاس هم ارزی نوع– ۱ و نوع– ۲ را بصورت زیر داریم:

$$\left[A\right]_{\sim_1}=\left\{B \;\middle|\; \forall\alpha\in[0,1],\quad \begin{array}{l}\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha)-a.c(B)=\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha)-a.c(A),\\ \overline{\mu}_B^{-1}(\alpha)-a.c(B)=\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha)-a.c(A).\end{array}\right\}$$

و

[1] Type-1 fuzzy par
[2] Type-2 fuzzy par

$$\left[A\right]_{\sim_2}=\left\{B \;\middle|\; \forall\alpha\in[0,1],\quad \frac{\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha)}{ac(B)}=\frac{\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha)}{ac(A)},\ \frac{\overline{\mu}_B^{-1}(\alpha)}{ac(B)}=\frac{\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha)}{ac(A)}.\right\}$$

لازم به ذکر است که، اعداد قطعی حالت خاصی از دسته های هم ارزی اشاره شده اند. ارتباط همترازی های ۱و۲ با تساوی، تحت لم هایی در ادامه اشاره گردیده است.

تعریف ۴-۴ (همتراز فازی[1])

فرض کنید A,B دو عدد فازی باشند. آنگاه A,B را همتراز فازی گویند هرگاه A همتراز فازی نوع− ۱ یا نوع− ۲، B باشد. در آنصورت با نماد $A\sim B$ نمایش می دهیم.

مثالی از تقریب فازی و همتراز فازی نوع ۱ و ۲

فرض کنید

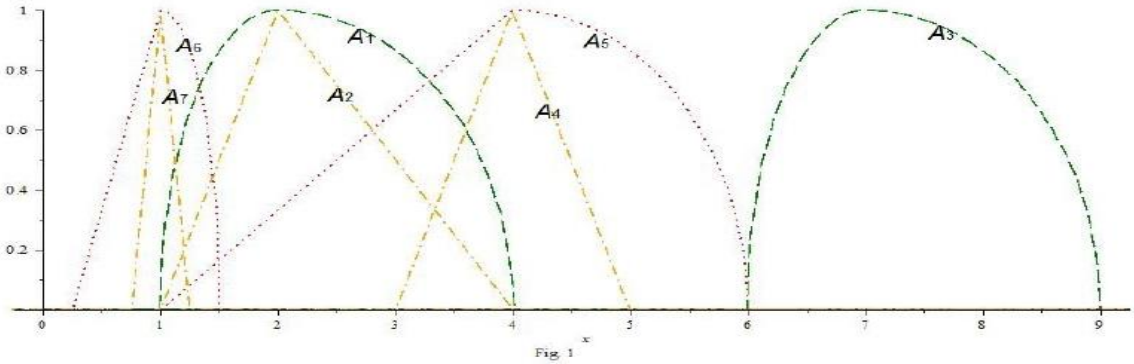
$$A_1=(1,2,4,(1-(x-2)^2)^{\frac{1}{2}},(1-\frac{1}{4}(x-2)^2)^{\frac{1}{2}}),\qquad A_5=(1,4,6,\frac{x-1}{3},(1-\frac{1}{4}(x-4)^2)^{\frac{1}{2}}),$$

$$A_2=(1,2,4,-,-),\qquad A_6=(\frac{1}{4},1,\frac{3}{2},\frac{4x-1}{3},(1-\frac{1}{4}(4x-4)^2)^{\frac{1}{2}}),$$

$$A_3=(6,7,9,(1-(x-7)^2)^{\frac{1}{2}},(1-\frac{1}{4}(x-7)^2)^{\frac{1}{2}}),\qquad A_7=(\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},-,-).$$

$$A_4=(3,4,5,-,-),$$

اعداد فازی دلخواه با نمودار زبر باشند:



شکل ۳-۱۴: اعداد فازی مثال تعاریف تقریب فازی و همتراز فازی نوع ۱ و ۲

آنگاه براساس تعاریف مرتبط داریم:

$$A_1\sim_1 A_3,\qquad A_5\sim_2 A_6,\qquad A_4\sim_2 A_7,$$
$$A_1\cong A_2,\qquad A_4\cong A_5,\qquad A_6\cong A_7.$$

[1] Fuzzy par

لم ۴-۱ : فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی شبه هندسی باشد، آنگاه داریم :

الف– اگر $A \sim_1 B$ آنگاه $A \oplus B \sim_1 A$ یا $A \oplus B \sim_1 B$

ب– اگر $A \sim_2 B$ آنگاه $A \otimes B \sim_2 A$ یا $A \otimes B \sim_2 B$

اثبات : با تعاریف اعمال حساب فازی بر پایه انتقال– میانگین و تعاریف همتراز فازی نوع ۱ و ۲ ، موارد فوق بدیهی هستند.

حال به بررسی مفهوم جبری می پردازیم که نامش گروه فازی است، این مفهوم یکی از مصالح ساختمانی اساسی مبحثی است که امروزه جبر مجرد فازی خوانده می شود. در قسمت های بعدی، نظر ما، متوجه برخی دیگر از مصالح ساختمانی اساسی جبر مجرد فازی نظیر حلقه و میدان فازی خواهد شد. درست است که توجه به گروه های فازی در ابتدا کار مرسوم شده، اما می شود برای این انتخاب دلایل طبیعی و متقاعد کننده ای هم ارائه داد. اصلاً چون گروه های فازی، دستگاه هایی هستند با یک عمل می شود آنها را به ساده ترین وجه صوری ساخت.

به نظر ما، دستگاه های جبری فازی، عموماً مجموعه هایی هستند که می شود با عنصر های آنها اعمال جبری انجام داد یعنی، می توان هر دو عنصر هر یک از این مجموعه ها را، شاید هم به چند طریق، با هم ترکیب کرد تا عنصر سومی از مجموعه بدست آید. علاوه بر این، فرض بر این است که این عمل ها ی جبری تابع قواعد معینی می باشند، که این قاعده ها با اصولی که به آنها اصول موضوع اطلاق می شود و دستگاه را تعریف می کنند، بیان شده باشند. سپس در این محدوده است که ما به اثبات قضایایی در باره این نهاد های بسیار عمومی می پردازیم.

لازم است تاکید نماییم که این دستگاه های جبری و اصول موضوع معرف آنها باید دارای حالت طبیعی مشخص باشند، آنها باید حاصل توجه به مثال های بی شماری باشند، یعنی از آنها نتایج با معنی بسیاری بارور گردند. نمی شود همین طوری چند اصل موضوع ساخت و سپس به بررسی دستگاه ناشی از آنها پرداخت.

۴-۱-۲ نگرش نو به گروه فازی

تعریف ۴-۵ (گروه فازی نوع – ۱)

مجموعه نا تهی از اعداد فازی G را یک گروه فازی نوع –۱ گویند هرگاه، عمل دوتایی * روی G با شرایط زیر داشته باشیم :

۱) برای هر A, B, C متعلق به G؛ $(A*B)*C \cong A*(B*C)$

۲) برای هر B,A متعلق به G؛ اگر $A \sim_1 B$ آنگاه $A*B \sim_1 A$ یا $A*B \sim_1 B$

۳) برای هر A متعلق به G، وجود داشته باشد عضوی مانند e_A متعلق به G طوریکه؛

$$e_A \sim_1 A \quad \& \quad A*e_A = e_A*A = A \tag{۶-۴}$$

۴) برای هر A متعلق به G، وجود داشته باشد عضوی مانند A^{-1} متعلق به G طوریکه؛

$$A^{-1} \sim_1 A \quad \& \quad A*A^{-1} = A^{-1}*A = e_A \tag{۷-۴}$$

که در آنصورت با نماد $(G,*)_1$ نمایش می دهیم.

تعریف ۴-۶ (گروه فازی نوع – ۲)

مجموعه نا تهی از اعداد فازی G را یک گروه فازی نوع – ۲ گویند هر گاه، عمل دوتایی $\circ$ روی G با شرایط زیر داشته باشیم :

۱) برای هر C,B,A متعلق به G؛ $(A\circ B)\circ C \cong A\circ(B\circ C)$

۲) برای هر B,A متعلق به G؛ اگر $A \sim_2 B$ آنگاه $A\circ B \sim_2 A$ یا $A\circ B \sim_2 B$

۳)برای هر A متعلق به G، وجود داشته باشد عضوی مانند e_A متعلق به G طوریکه؛

$$e_A \sim_2 A \quad \& \quad A\circ e_A = e_A \circ A = A \tag{۸-۴}$$

۴) برای هر A متعلق به G، وجود داشته باشد عضوی مانند A^{-1} متعلق به G طوریکه؛

$$A^{-1} \sim_2 A \quad \& \quad A\circ A^{-1} = A^{-1}\circ A = e_A \tag{۹-۴}$$

که در آنصورت با نماد $(G,*)_2$ نمایش می دهیم.

تعریف ۴-۷ (گروه فازی)

مجموعه نا تهی از G باعمل دوتایی $*$ را یک گروه فازی گوییم هرگاه یا گروه فازی نوع – ۱ یا گروه فازی نوع – ۲ باشد. در آنصورت با نماد $(G,*)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۴-۸ (گروه فازی آبلی)

گروه فازی $(G,*)$ را آبلی (یا تعویض پذیر) می نامیم اگر که به ازای هر B,A متعلق به G ؛

$$A*B = B*A \tag{۱۰-۴}$$

تعریف ۴-۹ (مرتبه گروه فازی)

تعداد عضوهایی که در گروه فازی G وجود دارد را مرتبه گروه فازی گویند و با $o(G)$ نمایش می دهیم.

البته این عدد جالبترین وضع را زمانی دارد که متناهی باشد. در این حالت است که می گوییم G گروه فازی متناهی است.

۴-۱-۳ نگرش نو به زیرگروه فازی

عموماً زیر مجموعه های دلخواه از گروه فازی چون G توجه ما را جلب نمی کنند، زیرا که این مجموعه ها بازگوکننده نهاد جبری G نمی باشند. زیرمجموعه هایی که مد نظر ماست آنهایی هستند که خاصیت های جبری متناظر آنها از G مشتق شده باشند. از میان این چنین زیرمجموعه ها طبیعیترین آنها در تعریف زیر معرفی می شود.

تعریف ۴-۱۰ (زیر گروه فازی)

زیر مجموعه نا تهی H از گروه فازی G را یک زیر گروه فازی G می نامیم اگر که H تحت عمل تعریف شده در G خود یک گروه فازی تشکیل دهد.

داشتن محکی که با آن بتوان زیر گروه فازی بودن زیر مجموعه مفروض از یک گروه فازی را تعیین کرد سودمند است. لم های زیر امکان این امر را فراهم می کنند.

لم ۴-۲ : زیر مجموعه نا تهی H از گروه فازی $(G,*)_1$، فقط و فقط وقتی یک زیرگروه فازی نوع– ۱، G است که:

۱ – برای هر A,B متعلق به H داشته باشیم : $A*B \in H$

۲ – برای هر A,B متعلق به H؛ اگر $A \sim_1 B$ آنگاه $A*B \sim_1 A$ یا $A*B \sim_1 B$

۳ – برای هر A متعلق به H، وجود داشته باشد عضوی مانند A^{-1} در H بعنوان عضو وارون نبست به عمل $*$.

لم ۴- ۳ : زیر مجموعه ناتهی H از گروه فازی $(G,*)_2$، فقط و فقط وقتی یک زیر گروه فازی نوع – ۲ ، G است که :

۱ - برای هر A,B متعلق به H داشته باشیم : $A*B \in H$

۲ - برای هر A,B متعلق به H؛ اگر $A \sim_2 B$ آنگاه $A*B \sim_2 A$ یا $A*B \sim_2 B$

۳ - برای هر A متعلق به H، وجود داشته باشد عضوی مانند A^{-1} در H بعنوان عضو وارون نبست به عمل $*$.

۴-۱-۴ چند مثال از گروه و زیر گروه فازی

فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی شبه هندسی و

$$F_C^{/}(\mathbb{R}) = \{A \in F_C(\mathbb{R}) \mid a.c(A) \neq 0\},$$
$$H_C(\mathbb{R}) = \{A \in F_C(\mathbb{R}) \mid a.c(A) = 2K,\ \mid K = 0, \pm 1, \pm 2, ...\},$$
$$H_{1C}(\mathbb{R}) = \{A \in F_C(\mathbb{R}) \mid a.c(A) = 0\},$$
$$H_{2C}(\mathbb{R}) = \{A \in F_C(\mathbb{R}) \mid a.c(A) = 1\},$$

باشند آنگاه ،

مثال ۴-۱ : $(F_C(\mathbb{R}), \oplus)_1$، گروه فازی نوع – ۱ آبلی است.

مثال۴-۲ : $(F_C^{/}(\mathbb{R}), \otimes)_2$، گروه فازی نوع – ۲ آبلی است.

مثال ۴-۳ : $(F_C(\mathbb{R}), \oplus)_1$، زیر گروه فازی نوع – ۱ خودش است. (زیرگروه فازی بدیهی)

مثال ۴-۴ : $(F_C(\mathbb{R}), \otimes)_2$، زیرگروه فازی نوع – ۲ خودش است. (زیرگروه فازی بدیهی)

مثال ۴-۵ : $(E_{1c}(\mathbb{R}), \oplus)_1$ زیر گروه فازی نوع – ۱، $(F_C(\mathbb{R}), \oplus)_1$ است.

مثال ۴-۶ : $(E_{2C}(\mathbb{R}), \otimes)_1$زیر گروه فازی نوع – ۲ ، $(F_C^{/}(\mathbb{R}), \otimes)_2$ است.

مثال ۴-۷ : $(H_C(\mathbb{R}), \oplus)_1$ زیر گروه فازی نوع – ۱، $(F_C(\mathbb{R}), \oplus)_1$ است.

تحقیق و بررسی مثال های فوق بر اساس تعاریف اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین، تعاریف گروه و زیر گروه فازی و لم های معرفی شده ، بدیهی هستند.

۴– ۱– ۵ نگرش نو به حلقه و میدان فازی

در قسمت قبل خاطر نشان شد که برخی از دستگاه های جبری بمنزله مصالح ساختمانی نهاد هایی هستند که از آنها مبحثی پدید آمده است که جبر مجرد فازی نام دارد. تا اینجا مطالبی درباره یکی از آنها، یعنی گروه های فازی ارائه گردید. در این بند، هدف معرفی و بررسی دیگر دستگاه ها از این نوع یعنی، حلقه و میدان فازی است.

یک حلقه یا میدان فازی با یک گروه فازی کاملاً متفاوت است، از آن جهت که هر حلقه یا میدان فازی دستگاهی هستند که با دو عمل تعریف می شوند. اما با وجود این، تحلیل حلقه و میدان به همان صورتی انجام می گیرد که در مورد گروه ها دیده ایم.

تعریف ۴-۱۱ (حلقه فازی)

مجموعه نا تهی G از اعداد فازی شبه هندسی را حلقه فازی گوییم اگر در G دو عمل $*$, $\circ$ چنان تعریف شده باشند که به ازای هر A,B,C متعلق به G داشته باشیم :

۱) $(A*B)*C \cong A*(B*C)$

۲) اگر $A \sim_1 B$ آنگاه $A*B \sim_1 A$ یا $A*B \sim_1 B$

۳) برای هر A در G، وجود داشته باشد عضوی مانند e_A متعلق به G طوریکه :

$$e_A \sim_1 A \quad \& \quad A*e_A = e_A*A = A \tag{۱۲-۴}$$

۴) برای هر A در G، وجود داشته باشد عضوی مانند A^{-1} متعلق به G طوریکه :

$$A^{-1} \sim_1 A \quad \& \quad A*A^{-1} = A^{-1}*A = e_A \tag{۱۳-۴}$$

۵) $A*B = B*A$

۶) $(A \circ B)\circ C \cong A \circ (B \circ C)$

۷) اگر $A \sim_2 B$ آنگاه $A \circ B \sim_2 A$ یا $A \circ B \sim_2 B$

۸) $A\circ(B*C) \cong (A\circ B)*(A\circ C) \quad \& \quad (B*C)\circ A \cong (B\circ A)*(C\circ A)$

در آنصورت با نماد $(G ,*,\circ)$ نمایش می دهیم.

اصول موضوع ۱ تا ۵ صرفاً نشان دهنده آنند که G تحت عمل $*$ یک گروه فازی آبلی است. اصل های موضوع ۶ و ۷ بیانگر آنند که G تحت عمل $\circ$، شرکت پذیر فازی است. اصل موضوع ۸ نیز، دو عمل در G را به هم مربوط می سازد.

تعریف ۴-۱۲ (حلقه تعویض پذیر فازی)

حلقه فازی $(G ,*,\circ)$ را حلقه تعویض پذیر فازی گوییم هرگاه به ازای هر A,B متعلق به G داشته باشیم:

$$A \circ B = B \circ A \tag{۱۴-۴}$$

تعریف ۴-۱۳ (حلقه بخشی فازی)

حلقه $(G ,*,\circ)$ را حلقه بخشی فازی می نامیم اگر که عنصر های نا صفر (یعنی عنصر ها با مرکز یت هسته مخالف صفر) آن تحت عمل $\circ$ حلقه فازی، تشکیل یک گروه فازی نوع – ۲ دهند.

بالاخره به تعریف مفهوم بسیار مهمِ میدان فازی می پردازیم.

تعریف ۴-۱۴ (میدان فازی)

هر میدان فازی عبارت است از یک حلقه بخشی تعویض پذیر فازی.

۴ -۱ -۶ -چند مثال از حلقه و میدان فازی

فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی شبه هندسی باشد، آنگاه :

مثال ۴-۸ : $(F_C(\mathbb{R}),\oplus,\otimes)$، حلقه فازی است.

مثال ۴-۹ : $(F_C(\mathbb{R}),\oplus,\otimes)$، حلقه تعویض پذیر فازی است.

مثال ۴-۱۰: $(F_C(\mathbb{R}),\oplus,\otimes)$ ، حلقه بخشی تعویض پذیر فازی یا بعبارت دیگر میدان فازی است.

تحقیق و بررسی موارد فوق بر اساس تعاریف اعمال حساب فازی بر پایه انتقال – میانگین، تعریف گروه فازی و مثال های (۴-۱)، (۴-۲) بدیهی هستند.

۴-۱- ۷ چند لم و قضیه مرتبط با دستگاه های جبری فازی

با آن که چند صفحه ای بیش نیست که در های نظریه گروه و میدان فازی بر روی ما گشوده شده، اما در این مدت حتی یک مطلب هم درباره آنها ثابت نگشته است. اینک وقت آن فرا رسیده که به اصلاح این وضع بپردازیم. مسلم است که چند نتیجه اول زیاد جالب نیستند، اما در کارهای آتیه لغایت مفید خواهند بود.

در این بخش به قضایایی درباره گروه و میدان فازی، خصوصاً قضایایی مبنی بر اینکه گروه و میدان جبری حالت خاصی اند از تعاریف ارائه شده گروه و میدان فازی، اشاره خواهیم کرد. قبل از ارائه قضایا، چند تعریف و لم مرتبط با موضوع را بیان می کنیم.

واضح است که هر مسئله ای که حداقل با یک عدد فازی غیر قطعی درگیر باشد را مسئله فازی و مسئله ای که تمام اعداد فازی درگیر آن، قطعی باشند را مسئله قطعی بنامیم. در این راستا، نخست پارامتر هایی تحت عنوان رتبه ابهام به هر دو عدد فازی دلخواه نسبت می دهیم که سنجشی برای همتراز بودنشان است. سپس با استفاده از آنها، پارامتر هایی به مسائل فازی نسبت می دهیم تا با مسئله قطعیت متناظرش مورد مقایسه قرار گیرد. بعبارت دیگر، رتبه ابهام سنجشی برای تقریب، نسبت به تساوی است. در واقع منطق فازی یک منطق پیوسته است که از استدلال های تقریبی بشر الگوبرداری می کند لذا نتایج آن نیز باید بصورت تقریبی بیان کرد و رتبه ابهام برای سنجش چنین نتایجی مطرح اند.

تعریف ۴-۱۵ (رتبه ابهام دو عدد فازی)

فرض کنید B,A دو عدد فازی شبه هندسی باشند. آنگاه ،

رتبه ابهام نوع− ۱، B,A را با

$$ar_{1A,B}=(l_{11A,B},r_{11A,B},l_{12A,B},r_{12A,B})_1 \qquad (۱۵-۴)$$

نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\begin{cases} l_{11A,B}=d(\sup\{d(\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha),ac(A))\ \ |\alpha\in(0,1]\},\sup\{d(\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha),ac(B))\ \ |\alpha\in(0,1]\}),\\ r_{11A,B}=d(\sup\{d(\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha),ac(A))\ \ |\alpha\in(0,1]\},\sup\{d(\overline{\mu}_B^{-1}(\alpha),ac(B))\ \ |\alpha\in(0,1]\}),\\ l_{12A,B}=\sup\{d(\underline{\mu}_A(x),\underline{\mu}_B(y))\ \ |\forall x\in\underline{\text{supp}}(A),\forall y\in\underline{\text{supp}}(B);\quad d(x,ac(A))=d(y,ac(B))\},\\ r_{12A,B}=\sup\{d(\overline{\mu}_A(x),\overline{\mu}_B(y))\ \ |\forall x\in\overline{\text{supp}}(A),\forall y\in\overline{\text{supp}}(B);\quad d(x,ac(A))=d(y,ac(B))\}. \end{cases} \qquad (۱۶-۴)$$

قبل از تعریف رتبه ابهام نوع-۲، تعاریفی تحت عنوان مقادیر مشخصه چپ و راست برای اعداد فازی شبه هندسی با مرکز یت هسته مخالف صفر را بشرح زیر تعریف می کنیم:

مقدار مشخصه چپ عدد فازی A را با نماد $\underline{x}_A$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\underline{x}_A=\begin{cases}\inf\left\{\dfrac{\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha)}{ac(A)}\ \ |\alpha\in(0,1]\right\}, & ac(A)>0,\\ \sup\left\{\dfrac{\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha)}{ac(A)}\ \ |\alpha\in(0,1]\right\}, & ac(A)<0.\end{cases}$$

مقدار مشخصه راست عدد فازی A را با نماد $\overline{x}_A$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\overline{x}_A=\begin{cases}\sup\left\{\dfrac{\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha)}{ac(A)}\ \ |\alpha\in(0,1]\right\}, & ac(A)>0,\\ \inf\left\{\dfrac{\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha)}{ac(A)}\ \ |\alpha\in(0,1]\right\}, & ac(A)<0.\end{cases}$$

رتبه ابهام نوع − ۲ ، B,A را با

$$ar_{2A,B}=(l_{21A,B},r_{21A,B},l_{22A,B},r_{22A,B})_2 \qquad (۱۷-۴)$$

نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\begin{cases} l_{21A,B}=d(\underline{x}_A,\underline{x}_B),\\ r_{21A,B}=d(\overline{x}_A,\overline{x}_B),\\ l_{22A,B}=\sup\left\{d(\underline{\mu}_A(x),\underline{\mu}_B(y))\ \ |\forall x\in\underline{\text{supp}}(A),\forall y\in\underline{\text{supp}}(B);\quad \dfrac{x}{ac(A)}=\dfrac{y}{ac(B)}\right\},\\ r_{22A,B}=\sup\left\{d(\overline{\mu}_A(x),\overline{\mu}_B(y))\ \ |\forall x\in\overline{\text{supp}}(A),\forall y\in\overline{\text{supp}}(B);\quad \dfrac{x}{ac(A)}=\dfrac{y}{ac(B)}\right\}. \end{cases} \qquad (۱۸-۴)$$

لازم به ذکر است، تعریف رتبه ابهام نوع -۲ برای اعداد فازی شبه هندسی با مرکز یت هسته مخالف صفر می باشد.

مثالی از محاسبه رتبه ابهام دو عدد فازی

اعداد فازی در شکل ۳-۱۴ را در نظر بگیرید. آنگاه براساس تعاریف مرتبط داریم:

$$ar_{1A_1A_3}=(0,0,0,0),\qquad ar_{2A_5A_6}=(0,0,0,0),\qquad ar_{2A_4A_7}=(0,0,0,0),$$
$$ar_{1A_4A_5}=(2,1,\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),\qquad ar_{2A_4A_5}=(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}),$$
$$ar_{1A_2A_4}=(0,1,0,\frac{1}{2}).$$

تعریف ۴-۱۶ (رتبه ابهام مسائل فازی)

فرض کنید S مجموعه شامل تمام اعداد فازی شبه هندسی درگیر یک مسئله فازی دلخواه باشد(حداقل ۲ عضوی). آنگاه ،

رتبه ابهام نوع – ۱، S را با

$$Sar_1=(l_{11S},r_{11S},l_{12S},r_{12S})_1 \qquad (۱۹-۴)$$

نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\begin{cases} l_{11S}=\sup\{l_{11AB} \mid A,B\in S\},\\ r_{11S}=\sup\{r_{11AB} \mid A,B\in S\},\\ l_{12S}=\sup\{l_{12AB} \mid A,B\in S\},\\ r_{12S}=\sup\{r_{12AB} \mid A,B\in S\}. \end{cases} \qquad (۲۰-۴)$$

رتبه ابهام نوع – ۲ ، S را با

$$Sar_2=(l_{21S},r_{21S},l_{22S},r_{22S})_2 \qquad (۲۱-۴)$$

نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\begin{cases} l_{21S} = \sup\left\{ l_{21A\,B} \;\middle|\; A,B \in S \right\}, \\ r_{21S} = \sup\left\{ r_{21A\,B} \;\middle|\; A,B \in S \right\}, \\ l_{22S} = \sup\left\{ l_{22A\,B} \;\middle|\; A,B \in S \right\}, \\ r_{22S} = \sup\left\{ r_{22A\,B} \;\middle|\; A,B \in S \right\}. \end{cases} \qquad (۲۲-۴)$$

لازم به ذکر است چنانچه S مجموعه متناهی باشد،آنگاه در تعاریف فوق، max جایگزین sup خواهد شد.

گروه فازی نوع – ۱، گروه فازی نوع – ۲ و میدان فازی، مسائل فازی هستند که، در این بخش با آنها روبرو هستیم. لذا رتبه ابهام نوع – ۱، رتبه ابهام نوع – ۲ و رتبه ابهام نوع ۱ و ۲ تواماً را به ترتیب برای گروه فازی نوع ۱، گروه فازی نوع ۲ و میدان فازی، به منظور مقایسه هر یک از اینها با مسائل قطعی متناظرشان (گروه و میدان جبری)، در نظر می گیریم. قبل از ارائه قضایا با اهداف فوق، به چند لم مرتبط مرتبط می پردازیم.

لم ۴-۴ : فرض کنید G یک گروه فازی نوع– ۱ با رتبه ابهام $Gar_1 = (l_{11G}, r_{11G}, l_{12G}, r_{12G})_1$ باشد. آنگاه ،

۱) $l_{11G}, r_{11G}, l_{12G}, r_{12G} \geq 0$ ،

۲) اگر $(l_{12G}, r_{12G}) = (0,0)$ آنگاه $(l_{11G}, r_{11G}) = (0,0)$.

اثبات :

اثبات مورد (۱) بدیهی است و اما اثبات مورد (۲) با استفاده از برهان خلف فرض کنید $(l_{11G}, r_{11G}) \neq (0,0)$ (فرض خلف)

در آنصورت یکی از سه حالت زیر را خواهیم داشت :

الف – $l_{11G} \neq 0, r_{11G} = 0$ ،

ب – $l_{11G} = 0, r_{11G} \neq 0$ ،

ج – $l_{11G} \neq 0, r_{11G} \neq 0$.

با مورد الف : اگر $l_{11G} \neq 0$ آنگاه طبق تعریف داریم :

$$\exists A,B \in G;\ \sup\left\{ d(\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha), a.c(A)) \;\middle|\; \alpha \in (0,1] \right\} \neq \sup\left\{ d(\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha), a.c(B)) \;\middle|\; \alpha \in (0,1] \right\}, \qquad (۲۳-۴)$$

بدون اینکه از کلیت مسئله کاسته شود فرض می کنیم:

$$\sup\left\{d\left(\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha),a.c(A)\right)\ \middle|\alpha\in(0,1]\right\}>\sup\left\{d\left(\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha),a.c(B)\right)\ \middle|\alpha\in(0,1]\right\},\qquad(۲۴-۴)$$

و تعریف می کنیم :

$$\begin{cases}x=\sup\left\{d\left(\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha),a.c(A)\right)\ \middle|\alpha\in(0,1]\right\},\\ y=\sup\left\{d\left(\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha),a.c(B)\right)\ \middle|\alpha\in(0,1]\right\}.\end{cases}\qquad(۲۵-۴)$$

بنابراین بر اساس تعریف x,y نتیجه می گیریم :

$$\exists S\subseteq \underline{supp}(A);\qquad |S|=x-y,\qquad(۲۶-۴)$$

و

$$\forall t\in S\quad \exists t_y;\qquad d(t,a.c(A))=d(t_y,a.c(B))\ \&\ \underline{\mu}_A(t)>0,\underline{\mu}_B(t_y)=0.\qquad(۲۷-۴)$$

بنابراین طبق تعریف l_{12G} داریم :

$$0<\underline{\mu}_A(t)\le l_{12G},\qquad(۲۸-۴)$$

پس $l_{12G}\neq 0$، که خلاف فرض است لذا فرض خلف باطل است.

بطور مشابه، موارد ب و ج به ترتیب به $r_{12G}\neq 0$ و $(l_{12G},r_{12G})\neq(0,0)$ منتهی می گردد که خلاف فرض خلف می باشند.

لم ۴-۵ : فرض کنید G یک گروه فازی نوع $-$ ۲ با رتبه ابهام $Gar_2=(l_{21G},r_{21G},l_{22G},r_{22G})_2$ باشد.آنگاه ،

۱) $l_{21G}, r_{21G}, l_{22G}, r_{22G}\ge 0$ ،

۲) اگر $(l_{22G},r_{22G})=(0,0)$ آنگاه $(l_{21G},r_{21G})=(0,0)$.

اثبات : مشابه لم قبل.

لم ۴-۶ : فرض کنید $(G,*)_1$ با رتبه ابهام Gar_1 باشد به قسمی که $(l_{12G},r_{12G})=(0,0)$ آنگاه ،

۱) به ازای هر A,B متعلق به G ؛ $A\sim_1 B$ ،

۲) به ازای هر A,B متعلق به G ؛ $A*B\sim_1 A$ یا $A*B\sim_1 B$.

اثبات :

اثبات مورد (۱) _ از فرض $(l_{12G},r_{12G})=(0,0)$ طبق لم قبلی داریم : $(l_{11G},r_{11G})=(0,0)$.

بنابر این طبق تعریف l_{11G},r_{11G} داریم :

$$\begin{cases}\sup\left\{d\left(\underline{\mu}_A^{-1}(\alpha),a.c(A)\right)\ \middle|\ \alpha\in(0,1]\right\}=\sup\left\{d\left(\underline{\mu}_B^{-1}(\alpha),a.c(B)\right)\ \middle|\ \alpha\in(0,1]\right\},\\ \sup\left\{d\left(\overline{\mu}_A^{-1}(\alpha),a.c(A)\right)\ \middle|\ \alpha\in(0,1]\right\}=\sup\left\{d\left(\overline{\mu}_B^{-1}(\alpha),a.c(B)\right)\ \middle|\ \alpha\in(0,1]\right\}.\end{cases}\qquad(۲۹-۴)$$

بنابراین ،

$$\begin{cases} \left| \left\{ x \in \underline{\text{supp}}(A) \middle| \underline{\mu}_A(x) > 0 \right\} \right| = \left| \left\{ x \in \underline{\text{supp}}(B) \middle| \underline{\mu}_B(x) > 0 \right\} \right|, \\ \left| \left\{ x \in \overline{\text{supp}}(A) \middle| \overline{\mu}_A(x) > 0 \right\} \right| = \left| \left\{ x \in \overline{\text{supp}}(B) \middle| \overline{\mu}_B(x) > 0 \right\} \right|. \end{cases} \quad (۳۰-۴)$$

بنابراین شرط لازم برای $A \sim_1 B$ ، برقرار است. (لازم به ذکر است که، $|.| = \sup(.) - \inf(.)$)

حال از $(l_{12G}, r_{12G}) = (0,0)$ داریم :

$$\forall x \in \underline{\text{supp}}(A), \forall y \in \underline{\text{supp}}(B); \quad d(x, ac(A)) = d(y, ac(B)) \Rightarrow d(\underline{\mu}_A(x), \underline{\mu}_B(y)) = 0 \quad (۳۱-۴)$$

یعنی،

$$\underline{\mu}_A(x) = \underline{\mu}_B(y) \quad (۳۲-۴)$$

و

$$\forall x \in \overline{\text{supp}}(A), \forall y \in \overline{\text{supp}}(B); \quad d(x, ac(A)) = d(y, ac(B)) \Rightarrow d(\overline{\mu}_A(x), \overline{\mu}_B(y)) = 0 \quad (۳۳-۴)$$

یعنی،

$$\overline{\mu}_A(x) = \overline{\mu}_B(y) \quad (۳۴-۴)$$

در نتیجه طبق تعریف همتراز نوع -۱ ، داریم : $\boldsymbol{A \sim_1 B}$.

اثبات مورد ۲ – ام با توجه به شرط ۲ تعریف گروه فازی نوع – ۱ و بند اول لم، بدیهی است.

لم ۴-۷ : فرض کنید $(G,\circ)_2$ با رتبه ابهام Gar_2 باشد به قسمی که $(l_{22G}, r__{22G}) = (0,0)$. آنگاه

۱) به ازای هر A, B متعلق به G ؛ $A \sim_2 B$ ،

۲) به ازای هر A, B متعلق به G ؛ $A \circ B \sim_2 A$ یا $A \circ B \sim_2 B$.

اثبات : مشابه لم قبلی.

لم ۴-۸ : فرض کنید A, B دو عدد فازی باشند.آنگاه ،

۱) $A = B$ اگر و تنها اگر $A \sim_1 B$ و $A \cong B$ ،

۲) $A = B$ اگر و تنها اگر $A \sim_2 B$ و $A \cong B$ ،

۳) $A = B$ اگر و تنها اگر $A \sim_1 B$ و $A \sim_2 B$.

تذکر – در بند ۲ و ۳ ، فرض گردیده که، A, B دارای مرکز هسته ای مخالف صفر هستند.

اثبات : موارد ۱ و ۲ ، با توجه به تعاریف اعمال مطرح شده، بدیهی هستند. اما اثبات مورد ۳ ، اگر $A = B$ باشد آنگاه بدیهی است که $A \sim_1 B$ و $A \sim_2 B$. اثبات عکس را با برهان خلف انجام می دهیم.

فرض کنید $A \neq B$ (فرض خلف) طبق تعریف تساوی داریم :

$$\exists x \quad ; \quad \mu_A(x) \neq \mu_B(x) \tag{۳۵-۴}$$

اگر

$$d(x, a.c(A)) = d(x, a.c(B)) \quad \text{یا} \quad \frac{x}{a.c(A)} = \frac{x}{a.c(B)} \tag{۳۶-۴}$$

آنگاه ، $a.c(A) = a.c(B)$. در نتیجه طبق تعریف $\cong$ داریم : $A \cong B$. که با توجه به لم های قبلی داریم :

$$A = B \tag{۳۷-۴}$$

اگر

$$d(x, a.c(A)) \neq d(x, a.c(B)), \quad \frac{x}{a.c(A)} \neq \frac{x}{a.c(B)} \tag{۳۸-۴}$$

آنگاه، $x \neq a.c(B)$, $x \neq a.c(A)$, $a.c(A) \neq a.c(B)$. بنابر این،

$$\exists y_1, y_2 \in \underline{\text{supp}}(B); \qquad d(x, a.c(A)) = d(y_1, a.c(B)), \quad \frac{x}{a.c(A)} = \frac{y_2}{a.c(B)} \tag{۳۹-۴}$$

که از همتراز نوع ۱ و ۲ ، B, A داریم :

$$\underline{\mu}_A(x) = \underline{\mu}_B(y_1) \ , \ \underline{\mu}_A(x) = \underline{\mu}_B(y_2) \tag{۴۰-۴}$$

در نتیجه

$$\underline{\mu}_B(y_1) = \underline{\mu}_B(y_2) \ . \tag{۴۱-۴}$$

لذا بر اساس ساختار تابع $\underline{\mu}_B$ عدد فازی B داریم : $y_1 = y_2$.

فرض کنید $y = y_1 = y_2$ در نتیجه خواهیم داشت :

$$d(x, a.c(A)) = d(y, a.c(B)), \quad \frac{x}{a.c(A)} = \frac{y}{a.c(B)} \tag{۴۲-۴}$$

از رابطه بالا نتیجه می گیریم $x = a.c(A)$, $y = a.c(B)$ و این تناقض دارد با (۳۸-۴). پس فرض خلف باطل است یعنی $A = B$.

لم ۴-۹ : فرض کنید $(G, *)_1$ با رتبه ابهام Gar_1 باشد که $(l_{12G}, r_{12G}) = (0,0)$ ، آنگاه به ازای هر B, A متعلق G ؛ $e_A = e_B$.

اثبات: بر اساس لم (۴-۶) و شرایط ۲ و ۳ گروه فازی نوع – ۱ داریم : $ee_A \sim_1 {}_B$،

و

$$\begin{cases} A * e_A = e_A * A = A, \\ B * e_B = e_B * B = B. \end{cases} \tag{۴۳-۴}$$

بنابراین

$$\begin{cases} ac(A)*ac(e_A)=ac(e_A)*ac(A)=ac(A), \\ ac(B)*ac(e_B)=ac(e_B)*ac(B)=ac(B). \end{cases} \quad (۴۴-۴)$$

سیستم فوق یک سیستم قطعی است در نتیجه داریم : $ac(e_A)=ac(e_B)$

لذا طبق تعریف $\cong$ داریم : $e_A \cong e_B$.

در نهایت از لم (۴-۸) داریم : $e_A = e_B$.

لم ۴-۱۰ : فرض کنید $(G,*)_2$ با رتبه ابهام Gar_2 باشد که $(l_{22G}, r_{22G}) = (0,0)$ ، آنگاه به ازای هر B,A متعلق G ؛ $e_A = e_B$.

اثبات : مشابه لم قبلی.

قضیه (مشخصه گروه فازی نوع-۱)

گروه فازی $(G,*)_1$ با رتبه ابهام Gar_1 به قسمی که $(l_{12G}, r_{12G}) = (0,0)$ باشد، با گروه جبری معادل است.

اثبات : کافیست نشان دهیم در گروه فازی $(G,*)_1$ داریم :

۱)به ازای هر C,B,A متعلق به G ؛ $(A*B)*C = A*(B*C)$ ،

۲) وجود دارد عنصری مانند $\tilde{e}$ متعلق به G طوریکه ؛ $A*\tilde{e} = \tilde{e}*A = A \quad , \quad \forall A \in G$.

با توجه به شرایط ۱ و ۲ گروه فازی نوع – ۱، لم (۴-۶) و (۴-۸) ، مورد ۱ را خواهیم داشت. همچنین مورد ۲ را با توجه به لم (۴-۹) و تعریف $e = e_A$ برای هر عدد فازی دلخواهی از G ، داریم.

لازم به ذکر است که شرط معکوس گروه جبری را از مورد ۲ و شرط سوم گروه فازی نوع– ۱ ، نتیجه خواهیم گرفت.

قضیه (مشخصه گروه فازی نوع-۲)

گروه فازی $(G,*)_2$ با رتبه ابهام Gar_2 به قسمتی که $(l_{22G}, r_{22G}) = (0,0)$ باشد، با گروه جبری معادل است.

اثبات : مشابه قضیه قبل.

قضیه (مشخصه میدان فازی)

میدان فازی $(G,*,\circ)$ با رتبه ابهام Gar_1 و $G\ q_2$ به قسمی که $(l_{12G},r_{12G})=(0,0)$ و $(l_{22G},r_{22G})=(0,0)$ باشند، با میدان جبری معادل است.

اثبات : از میدان فازی $(G,*,\circ)$ داریم که $(G,*)_1$، گروه فازی نوع – ۱ و $(G^{'},\circ)_2$ گروه فازی نوع– ۲ می باشد ($G^{'}$: مجموعه عضو هایی از G که مرکزیت هسته آنها، مخالف عضو خنثی نسبت به عمل $*$ است).

لذا با قضایای (۴–۱) و (۴–۲)، دو گروه فازی اشاره شده، گروه جبری اند. بنابراین کافیست نشان دهیم به ازای هر C,B,A متعلق به G ؛

$$\begin{cases} A\circ(B*C)=(A\circ B)*(A\circ C), \\ (B*C)\circ A=(B\circ A)*(C\circ A). \end{cases} \qquad (۴۵–۴)$$

با توجه به لم (۴–۶) و لم (۴–۷) داریم :

$$\begin{cases} A\circ(B*C)\sim_1(A\circ B)*(A\circ C), \\ (B*C)\circ A\sim_1(B\circ A)*(C\circ A). \end{cases} \qquad (۴۶–۴)$$

یا

$$\begin{cases} A\circ(B*C)\sim_2(A\circ B)*(A\circ C), \\ (B*C)\circ A\sim_2(B\circ A)*(C\circ A). \end{cases} \qquad (۴۷–۴)$$

بنابراین با توجه به شرایط بند ۸ در تعریف میدان فازی و لم (۴–۸) داریم :

$$\begin{cases} A\circ(B*C)=(A\circ B)*(A\circ C), \\ (B*C)\circ A=(B\circ A)*(C\circ A). \end{cases} \qquad (۴۸–۴)$$

۴–۲ نگرش نو به رتبه بندی فازی

۴–۲–۱ مقدمه

مرتب سازی مقادیر فازی بر اساس ویژگی های مختلف مجموعه فازی است. این ویژگی ها ممکن است مرکز ثقل، سطح زیر تابع عضویت ویا نقاط تقاطع های مختلف بین اعداد فازی باشند. در این راستا (مرتب سازی اعداد فازی)، یک عدد فازی می بایستی با سایر اعداد فازی مقایسه گردد. اما به منظور تعیین اینکه کدامشان بزرگتر یا کوچکتر است، مشکل است. رتبه بندی اعداد فازی نخستین بار توسط جین[1] [۲۸] ارائه

[1] Jain

گردید. از آن به بعد، روش های متعدد برای رتبه بندی انواع خاصی از اعداد فازی با نقص های مختلف ارائه شده است.[۱،۲،۵،۹،۱۴،۱۶،۱۸،۲۵،۳۳،۳۸،۴۱،۴۳،۵۲]

همه روش های رتبه بندی مجموعه فازی را می توان به دو دسته طبقه بندی کرد (البته بعد از یوآن[1] [۵۴]) :

۱ – روش هایی که تبدیل می کنند یک عدد فازی را به یک عدد قطعی، با بکارگیری تابع نگاشت (یعنی اگر A عدد فازی باشد آنگاه $F(A)=a$ که a – قطعی است) و سپس با رتبه بندی اعداد قطعی ایجاد شده ، اعداد فازی متناظرشان را رتبه بندی می کنند.

۲ – روش هایی که استفاده می کنند از روابط فازی برای مقایسه زوج اعداد فازی، با یک رابطه، معنای زبانی از مقایسه را بیان می کنند و نتایج مرتب سازی آن، چیزی شبیه به اینکه، عدد فازی A کمی بهتر از عدد فازی B است ، می باشد.

با این حال ، هر یک از روش های فوق دارای مزایا و معایب خاصی اند. روش اول، با در نظر گرفتن یک عدد قطعی بجای عدد فازی باعث از دست رفتن کلی از اطلاعات شده و این در سراسر محاسبات، نگه داشته می شود.

این روش از سوی دیگر، رتبه بندی سازگار را برای همه مجموعه های فازی مهیا می کند. یعنی بعنوان مثال اگر A رتبه اش از B و B رتبه اش از C بیشتر باشد آنگاه، رتبه A از C خیلی بیشتر است. روش دوم با نگه داشتن مقایسه زبانی، گرچه اطلاعات فازی مسئله را حفظ می کند با این حال، از نظر یوآن سازگاری رتبه بندی را ممکن است همواره نداشته باشد یعنی حتی اگر A بهتر از B و B بهتر از C باشد ممکن است A همیشه بهتر از C نگردد.

متاسفانه، واقعیت های ناآمید کننده در باره رتبه بندی مجموعه های فازی پایان ندارد. برتولند[2] و دهقانی[2] [۹]، اشاره دارند که برای موارد ساده، اکثر روش های رتبه بندی مجموعه فازی، سازگاری دارند ولی موارد اشکال، رتبه بندی متفاوت با روش های مختلف است یعنی، اگر تابع عضویت با هم تداخل (و یا قطع کنند) برای برخی از مقادیر x، روش های مختلف رتبه بندی های متفاوت دارند. یک روش منحصر به فرد برای مقایسه اعداد فازی وجود ندارد. در نتیجه، معقول و منطقی است که روش های مختلف رتبه بندی، رتبه بندی های متفاوت ایجاد کنند. برخی از آنها به نظر خوب اند در یک زمینه خاص اما نه بطور کلی. پیچیدگی های نظیر اینها، رتبه بندی فازی را نسبتاً سخت و دشوار ساخته است.

با توجه به موارد ذکر شده فوق، با تفکر پایه ای به مرتب سازی، نگرش نو خواهیم داشت به ترتیب جزئی و کلی فازی و سپس بر اساس آن، مجموعه اعداد فازی را بعنوان مجموعه مرتب کلی فازی با رتبه ابهام

[1] Yuan
[2] Bortolan and Degani

مطرح می کنیم و نشان خواهیم داد تعاریف جزئی و کلی در فضای قطعی حالت خاصی از تعاریف جدید اند. نهایتاً در چند مثال، روش جدید را با سایر روش ها مقایسه خواهیم کرد.

۴-۲-۲ کوچکتر (یا بزرگتر) فازی

تعریف ۴-۱۷ (کمتر فازی)

فرض کنید A,B دو عدد فازی باشند. آنگاه ،

- $A \prec_{a.s} B$ اگر و تنها اگر $a.c(A) < a.c(B)\ \ \&\ \ \inf(\mathrm{supp}(B)) \le \inf(\mathrm{supp}(A))$
- $A \prec_{b.s} B$ اگر و تنها اگر $a.c(A) < a.c(B)\ \ \&\ \ \inf(\mathrm{supp}(A)) \le \inf(\mathrm{supp}(B)) \le \sup(\mathrm{supp}(A))$
- $A \prec_{n.s} B$ اگر و تنها اگر $a.c(A) < a.c(B)\ \ \&\ \ \inf(\mathrm{supp}(B)) \ge \sup(\mathrm{supp}(A))$
- $A \prec_{a.b.s} B$ اگر و تنها اگر $A \prec_{a.s} B\ \ \&\ \ A \prec_{b.s} B$
- $A \prec_{b.n.s} B$ اگر و تنها اگر $A \prec_{b.s} B\ \ \&\ \ A \prec_{n.s} B$

در نهایت، A کوچکتر از B گویند هرگاه $A \prec_{n.s} B$ یا $A \prec_{b.s} B$ یا $A \prec_{a.s} B$ باشد و با نماد ($A \prec B$) نمایش می دهیم. بعبارت دیگر،

$$A \prec B \quad \text{iff} \quad A \prec_{a.s} B \ \text{or}\ A \prec_{b.s} B \ \text{or}\ A \prec_{n.s} B \qquad (۴۹-۴)$$

لازم به ذکر است که، $A \prec_{a.s} B$ و $A \prec_{n.s} B$ باهم اتفاق نمی افتد.

تعریف ۴-۱۸ (کمتر یا تقریب فازی)

فرض کنید A,B دو عدد فازی باشند. آنگاه A کمتر یا تقریب B گویند هرگاه ، $A \prec B$ یا $A \cong B$ و با نماد ($A \underset{\sim}{\prec} B$) نمایش می دهیم. بعبارت دیگر،

$$A \underset{\sim}{\prec} B \quad \text{iff} \quad A \prec B \ \text{or}\ A \cong B \qquad (۵۰-۴)$$

تعریف ۴-۱۹ (مثبت فازی)

فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$، مجموعه اعداد فازی شبه هندسی و $F_O(\mathbb{R}) = \{A \in F_C(\mathbb{R}) \mid a.c(A) = 0\}$. آنگاه، به ازای هر A متعلق به $F_C(\mathbb{R})$ و $\tilde{0}$ متعلق به $F_O(\mathbb{R})$،

- $\tilde{0} \prec_{a.s} A$ اگر و تنها اگر $0 < a.c(A)\ \ \&\ \ \inf(\mathrm{supp}(A)) \le \inf(\mathrm{supp}(\tilde{0}))$
- $\tilde{0} \prec_{b.s} A$ اگر و تنها اگر $0 < a.c(A)\ \ \&\ \ \inf(\mathrm{supp}(\tilde{0})) \le \inf(\mathrm{supp}(A)) \le \sup(\mathrm{supp}(\tilde{0}))$
- $\tilde{0} \prec_{n.s} A$ اگر و تنها اگر $0 < a.c(A)\ \ \&\ \ \inf(\mathrm{supp}(A)) \ge \sup(\mathrm{supp}(\tilde{0}))$

در نهایت، A را مثبت فازی گویند هرگاه وجود داشته باشد $\tilde{0}$ متعلق به $F_O(\mathbb{R})$ طوریکه ؛ $\tilde{0}\prec_{a.s} A$ یا $\tilde{0}\prec_{b.s} A$ یا $\tilde{0}\prec_{n.s} A$ و با نماد ($\tilde{0}\prec A$) نمایش می دهیم. بعبارت دیگر ،

$$\tilde{0}\prec A \quad iff \quad \tilde{0}\prec_{a.s} A \ or \ \tilde{0}\prec_{b.s} A \ or \ \tilde{0}\prec_{n.s} A \qquad (۵۱-۴)$$

۴-۲-۳ نگرش نو به ترتیب جزئی و کلی فازی

در این بخش، با نگرش نو به مجموعه ترتیب کلی و جزئی فازی، مجموعه اعداد فازی شبه هندسی را بعنوان مجموعه ترتیب کلی فازی با رتبه ابهام معرفی خواهیم کرد. بعبارت دیگر، نشان خواهیم داد که مجموعه اعداد فازی با رابطه کوچکتر یا تقریب فازی تعریف شده در بخش قبلی، مجموعه ای مرتب کلی است. بر این اساس، اعداد فازی رتبه بندی می گردند (البته با رتبه ابهام).

تعریف ۴-۲۰ (ترتیب جزئی فازی)

رابطه دوتایی (که در اینجا با نماد $\tilde{\prec}$ نشان می دهیم) روی مجموعه فازی X ترتیب جزئی گوییم هرگاه به ازای هر A,B,C متعلق به X داشته باشیم :

۱) $A \tilde{\prec} A$ ،

۲) اگر $A \tilde{\prec} B$ و $B \tilde{\prec} A$ آنگاه $A \cong B$ ،

۳)اگر $A \tilde{\prec} B$ و $B \tilde{\prec} C$ آنگاه $A \tilde{\prec} C$.

در آنصورت زوج ($\tilde{\prec}$, X) را مجموعه مرتب جزئی فازی گوییم.

تعریف ۴-۲۱ (مقایسه پذیر فازی)

A , B متعلق به مجموعه مرتب جزئی ($\tilde{\prec}$, X) را مقایسه پذیر گویند هرگاه ، $A \tilde{\prec} B$ یا $B \tilde{\prec} A$ باشد.

تعریف ۴-۲۲ (ترتیب کلی فازی)

رابطه دو تایی (که در اینجا با نماد $\tilde{\prec}$ نمایش می دهیم) روی مجموعه فازی X ، ترتیب کلی گوییم هرگاه،

۱) ترتیب جزئی فازی باشد،

۲) برای هر B,A متعلق به X داشته باشیم: $A \precsim B$ یا $B \precsim A$.

در آنصورت زوج ($\precsim$, X) را مجموعه مرتب کلی فازی گوییم.

۴– ۲–۴ چند لم و قضیه مرتبط با ترتیب جزئی و کلی فازی

لم ۴–۱۱ : به ازای هر B,A متعلق به $F_C(\mathbb{R})$ ؛

الف) $A \precsim A$ ،

ب) $A \precsim B$ یا $B \precsim A$ ،

ج) اگر $A \precsim B$ و $B \precsim A$ آنگاه $A \cong B$ ،

د) اگر $A \precsim B$ و $B \precsim C$ آنگاه $A \precsim C$.

اثبات : همه موارد فوق ، با توجه به تعاریف تقریب و کوچکتر یا تقریب فازی، بدیهی اند.

قضیه (ترتیب اعداد فازی)

فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی شبه هندسی باشد، آنگاه ($\precsim$ و $F_C(\mathbb{R})$) مجموعه مرتب کلی فازی است.

اثبات : با لم فوق، بدیهی است.

بنابراین، زوج ($\precsim$ و $F_C(\mathbb{R})$) بعنوان مجموعه مرتب کلی فازی، بیانگر این مطلب است که هر دو عدد فازی را می توان با رابطه $\precsim$ مقایسه و به صورت شبه خطی مرتب نمود. از اینرو، زوج ($\precsim$ و $F_C(\mathbb{R})$) را میتوان بعنوان مجموعه مرتب شبه خطی فازی نیز بیان کرد.

حال برای مجموعه مرتب فازی (کلی یا جزئی)، رتبه ابهام تعریف کرده و سپس نشان خواهیم دادکه، تعاریف مجموعه مرتب قطعی حالت خاصی از تعاریف مجموعه مرتب فازی اند.

تعریف ۴–۲۳ (رتبه ابهام مجموعه مرتب فازی)

رتبه ابهام نوع – ۱ مسئله فازی را برای مجموعه مرتب (کلی یا جزئی) فازی تعریف می کنیم.

با توجه به اینکه برای مسئله مجموعه مرتب فازی، رتبه ابهام نوع – ۱ در نظر گرفته شده لذا، برخی از لم های مرتبط با مسئله گروه فازی نوع – ۱ را برای مجموعه مرتب فازی نیز خواهیم داشت. بعبارت دیگر،

لم ۴–۱۲: فرض کنید ($\underset{\sim}{\prec}$ و $F_C(\mathbb{R})$) مجموعه مرتب فازی (کلی یا جزئی) با رتبه ابهام نوع – ۱،

$$F_C{}^{ar_1} = (l_{11F_C}, r_{11F_C}, l_{12F_C}, r_{12F_C})_1 \qquad (۵۲–۴)$$

باشد آنگاه ،

۱) $l_{11F_C}, r_{11F_C}, l_{12F_C}, r_{12F_C} \geq 0$ ،

۲) اگر $(l_{12F_C}, r_{12F_C}) = (0,0)$ آنگاه $(l_{11F_C}, r_{11F_C}) = (0,0)$.

لم ۴–۱۳: فرض کنید ($\underset{\sim}{\prec}$ و $F_C(\mathbb{R})$) مجموعه مرتب فازی (کلی یا جزئی) با رتبه ابهام $F_C{}^{ar_1}$ باشد به قسمی که، $(l_{12F_C}, r_{12F_C}) = (0,0)$. آنگاه، به ازای هر A, B در $F_C(\mathbb{R})$ داریم : $A \sim_1 B$.

قضیه (مشخصه ترتیب فازی)

مجموعه مرتب فازی ($\underset{\sim}{\prec}$ و $F_C(\mathbb{R})$) با رتبه ابهام $F_C{}^{ar_1}$ که $(l_{12F_C}, r_{12F_C}) = (0,0)$ باشد، با مجموعه مرتب قطعی معادل است.

اثبات: برای معادل بودن مجموعه مرتب (کلی یا جزئی) فازی با مجموعه مرتب (کلی یا جزئی) قطعی کافیست نشان دهیم که در این حالت $\left((l_{12F_C}, r_{12F_C}) = (0,0)\right)$، تقریب ($\cong$) در شرایط ترتیب فازی با تساوی(=) قابل بیان است که این نیز، با توجه به لم های (۴–۱۳) و (۴–۸) برقرار است.

نهایتاً به چند لم و قضیه مرتبط با موضوع اشاره می کنیم که در مباحث آینده خصوصاً در معرفی فاصله فازی ، معادلات فازی و برنامه ریزی خطی فازی ، کاربرد های اساسی دارند.

لم ۴–۱۴: فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$، مجموعه اعداد فازی شبه هندسی و $F_O(\mathbb{R}) = \left\{A \in F_C(\mathbb{R}) \;\middle|\; a.c(A) = 0\right\}$.

آنگاه ، برای هر A, B, C متعلق به $F_C(\mathbb{R})$ و $\tilde{0}$ متعلق به $F_O(\mathbb{R})$ ؛

۱) اگر $A \underset{\sim}{\prec} B$ آنگاه ،

الف) $A \oplus C \underset{\sim}{\prec} B \oplus C$،

ب) $A - C \underset{\sim}{\prec} A - C$،

ج)
$$\begin{cases} A \otimes C \underset{\sim}{\prec} B \otimes C, & \tilde{0} \prec C, \\ B \otimes C \underset{\sim}{\prec} A \otimes C, & C \prec \tilde{0}. \end{cases}$$

۲) اگر $A \underset{\sim}{\prec} B$ و $C \underset{\sim}{\prec} D$ آنگاه $A \oplus C \underset{\sim}{\prec} B \oplus D$

۳) اگر $\tilde{0} \prec A \underset{\sim}{\prec} B$ و $\tilde{0} \prec C \underset{\sim}{\prec} D$ آنگاه $A \otimes C \underset{\sim}{<} B \otimes D$

اثبات : همه موارد فوق، بر اساس تعاریف مرتبط هر مورد ، بدیهی اند.

قضیه (اساسی کوچکتر یا تقریب فازی)

برای هر B, A متعلق به $F_C(\mathbb{R})$ ؛

الف) اگر $A \underset{\sim}{\prec} B$ آنگاه وجود دارند x ، y متعلق به $F_C(\mathbb{R})$ طوریکه ؛

$$A \oplus x \cong B \ , \ B \oplus y \cong A \qquad (۴-۵۳)$$

ب) اگر $A \underset{\sim}{\prec} B$ و $A \sim_1 B$ آنگاه وجود دارند x ، y متعلق به $F_C(\mathbb{R})$ طوریکه ؛

$$A \oplus x = B \ , \ B \oplus y = A \qquad (۴-۵۴)$$

اثبات : مورد الف و ب را با در نظر گرفتن $x = B - A$ و $y = A - B$ و با توجه به لم (۴-۸) خواهیم داشت.

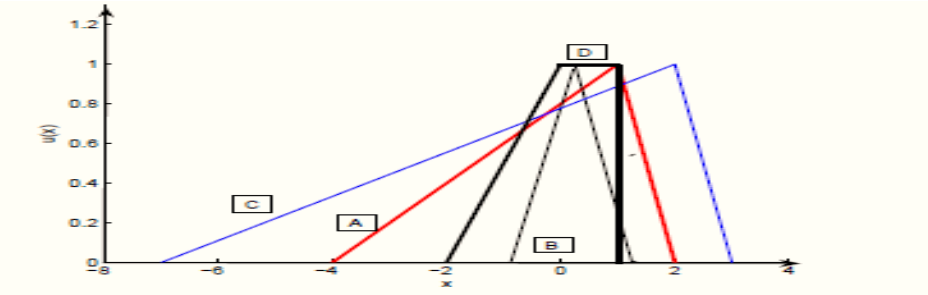
۴-۲-۵ چند مثال مقایسه ای

در این بخش چند مثال جهت تشریح روش پیشنهادی ارائه گردیده است و نشان داده شده که نتایج رتبه بندی روش پیشنهادی مشابه نتایج شهودی است و معایب سایر روش ها را می پوشاند.

مثال ۴-۱۱: اعداد فازی زیر را در نظر بگیرید :[۳۶]

$$A = (-4,1,2,-,-), \qquad C = (-7,2,3,-,-),$$
$$B = (-\frac{7}{4},\frac{1}{4},\frac{5}{4},-,-), \qquad D = (-2,0,1,1,-,-).$$

با تصویر ؛



شکل ۴-۱۵: اعداد فازی مثال ۴-۱۱

بطور شهودی داریم : $B \prec D \prec A \prec C$.

با روش پیشنهادی داریم : $\prec_{a.s} \quad \prec_{a.s}$ ،که در نتیجه؛ $B \prec D \prec A \prec C$.

مقایسه با سایر روش های رتبه بندی در جدول زیر آمده است ؛

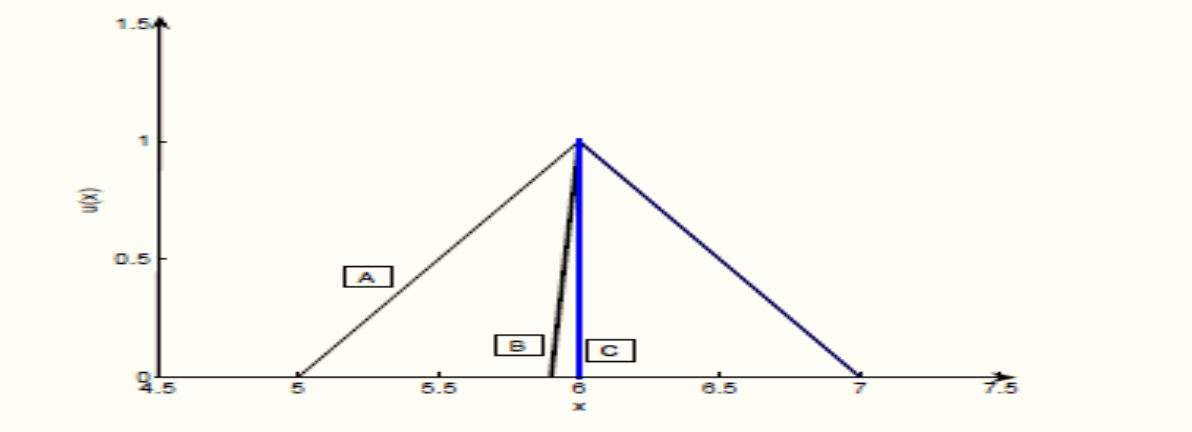
جدول ۴-۱: نتایج مقایسه رتبه بندی روش پیشنهادی با روش های دیگر از مثال ۴-۱۱

Fuzzy number	proposed method	Abbasbandy and Hajjari	Sign Distance p=1	Sign Distance p=2	Distance minimization
A	-	0.6666	3.2000	2.5820	0.0000
B	-	0.1666	1.5313	1.2417	0.0000
C	-	1.3334	2.9444	4.0414	0.0000
D	-	0.3334	3.000	2.3094	0.0000
Results	$B \prec D \prec A \prec C$	$B \prec D \prec A \prec C$	$B \prec C \prec D \prec A$	$B \prec D \prec A \prec C$	$A \sim B \sim C \sim D$

مثال ۴-۱۲: اعداد فازی زیر را در نظر بگیرید :[۳۶]

$$A = (5, 6, 7, -, -),$$
$$B = (5.9, 6, 7, -, -),$$
$$C = (6, 6, 7, -, -).$$

با تصویر زیر ؛



شکل ۴-۱۶: اعداد فازی مثال ۴-۱۲

با روش پیشنهادی داریم : $A \cong B \cong C$.

مقایسه با سایر روش های رتبه بندی در جدول زیر آمده است :

جدول ۴-۲: نتایج مقایسه رتبه بندی روش پیشنهادی با روش های دیگر از مثال ۴-۱۲

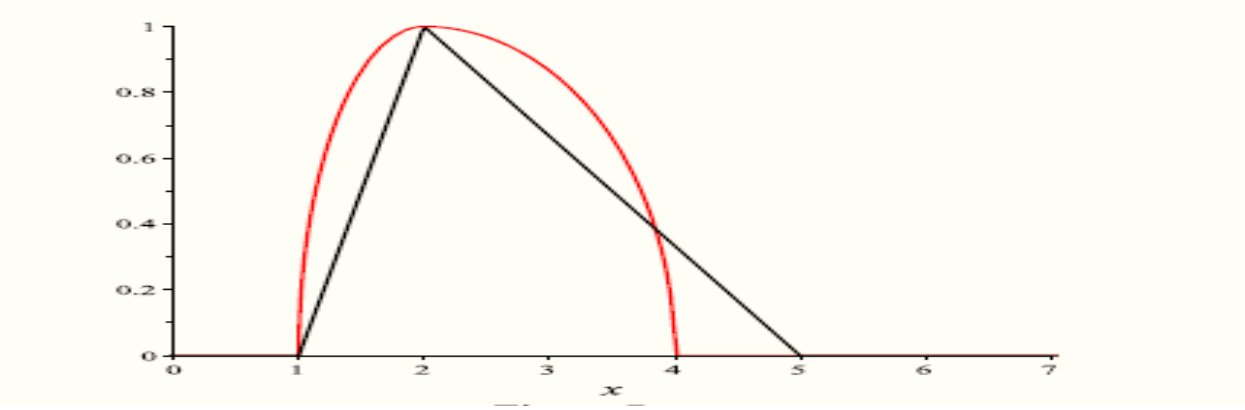
Fuzzy number	proposed method	Abbasbandy and Hajjari	Sign Distance p=1	Sign Distance p=2	Chu and Tsao	Cheng Distance	CV index
A	-	6.0000	6.12	8.52	3	6.021	0.028
B	-	6.0750	12.45	8.82	3.126	6.349	0.0098
C	-	6.0834	12.5	8.85	3.085	6.3519	0.0089
Results	$A \simeq B \simeq C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec B \prec C$	$A \prec C \prec B$	$A \prec B \prec C$	$C \prec B \prec$

مثال ۴-۱۳: اعداد فازی زیر را در نظر بگیرید :[۱۸]

$$A = (1,2,5,-,-),$$

$$B = (1,2,4,l_B(x),r_B(x)); \quad l_B(x) = (1-(x-2)^2)^{\frac{1}{2}}, r_B(x) = (1-\frac{1}{4}(x-2)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

با تصویر ؛



شکل ۴–۱۷: اعداد فازی مثال ۴–۱۳

با روش پیشنهادی داریم : $A \cong B$.

مقایسه با سایر روش های رتبه بندی در جدول زیر آمده است :

جدول ۴–۳ : نتایج مقایسه رتبه بندی روش پیشنهادی با روش های دیگر از مثال ۴–۱۳

Fuzzy number	proposed method	Liou and Wang $\alpha = 0$	Liou and Wang $\alpha = 1$	Chu Tsao
A	-	1.5	3.5	1.2445
B	-	1.2	3.6	1.1821
Results	$A \simeq B$	$B \prec A$	$A \prec B$	$B \prec A$

۴–۳ نگرش نو به فاصله فازی

۴– ۳– ۱ مقدمه

اندازه های فازی در تجزیه و تحلیل فرآیند های ارزیابی ذهنی انسان، مناسب اند. موضوع فاصله فازی در گذشته کشف شده است. آلتمن[1] [۶]، بعنوان مثال یک تابع فاصله فازی معرفی کردکه عملکردش یک عدد غیر فازی بوده و همچنین انجام عملیات ریاضی سنگینی داشت. نخستین بار، فاصله بین دو مجموعه فازی

[1] Altman

توسط کاکپرزیک[1][۲۹]، پیشنهاد شد. با این حال روزنفلد [۴۶]، وکس مند[2][۴۸]، بلوچ[3][۷]، گایا و چاکربورتی [4][۲۷] در میان دیگران، این موضوع را مورد بررسی قرار دادند و مفهوم فاصله فازی تا زیرمجموعه از یک فضای متریک را گسترش داده و حتی نمایش فاصله فازی را بصورت اعداد فازی نیز استدلال کردند. این مطالعات کاربردهای بالقوه ای در موضوعات مختلف از جمله به رسمیت شناخت الگو، پردازش تصویر، رباتیک، گرافیک کامپیوتر و مهندسی داشت. لذا، محققان توجه بیشتری به فاصله بین دو عدد فازی داشته و مقالات زیادی نیز از فاصله فازی استفاده نموده اند.[۱۳،۱۴،۲۱،۵۱]

فاصله های معرفی شده برای اعداد فازی را می توان به دو گروه تقسیم بندی کرد :

الف– اندازه قطعی بعنوان فاصله بین دو عدد فازی،

ب– اندازه فازی بعنوان فاصله بین دو عدد فازی.

مورد الف، زودتر معرفی گردیده و در موارد بسیاری از جمله خوشه بندی، رتبه بندی اعداد فازی و تجزیه و تحلیل رگرسیون استفاده شده است.[۱۴،۲۱،۵۰]

مورد ب، اولین بار توسط وکس مند [۴۸] ، با استفاده از α – برش معرفی شد و سپس محققان زیادی با این نگرش، فاصله های فازی مختلفی معرفی کرده اند.[۳،۱۵،۱۷،۲۷،۴۷]

ما فاصله بین دو عدد فازی را بعنوان تلفیقی از دو مورد فوق ارائه می دهیم و با نگرش جدید به متریک فازی، مجموعه اعداد فازی را بعنوان فضای متریک فازی معرفی می نماییم و نهایتاً چند لم ، قضیه و مثال مرتبط با موضوع بحث را بیان می کنیم.

۴– ۳– ۲ نگرش نو به فضای متریک فازی

در این بخش با تفکر پایه ای به فاصله، نخست متریک فازی (تابع فاصله فازی)، و پیرو آن فضای متریک فازی را بیان می کنیم. سپس مجموعه اعداد فازی را بعنوان فضای متریک فازی معرفی می کنیم.

تعریف ۴-۲۴ (متریک فازی)

فرض کنید X مجموعه فازی پیوسته، محدب و نرمال روی مجموعه جهانی U، $F_C(\mathbb{R})$ مجموعه اعداد فازی شبه هندسی و $F_O(\mathbb{R})=\left\{A\in F_C(\mathbb{R})\middle|\ a.c(A)=0\right\}$ باشند. آنگاه تابع $D: X\times X\to F_C(\mathbb{R})$ یک متریک فازی روی X گویند هرگاه به ازای هر x,y,z متعلق به X و $\tilde{0}$متعلق به $F_0(\mathbb{R})$ داشته باشیم :

۱) $D(x,y)\succ\tilde{0}$ ،

[1] Kacprzyk
[2] Voxman
[3] Bloch
[4] Guha and Chakrborty

۲) اگر $D(x,y)\simeq\tilde{0}$ آنگاه $x\cong y$ و بالعکس ،

۳) $D(x,y)=D(y,x)$ ،

۴) $D(x,y)\prec_{\sim} D(x,\tilde{z})\oplus D(\tilde{z},y)$.

در آنصورت (X,D) را فضای متریک فازی گویند. لازم به ذکر است که اگر شرایط ۱ ، ۳ و۴ برقرار باشد زوج (X,D) را فضای شبه متریک فازی و اگر شرایط ۱ ، ۲ و۳ برقرار باشند زوج (X,D) را فضای نیمه متریک فازی گویند.

با نگرش فوق به فضای متریک فازی، مجموعه اعداد فازی را بعنوان فضای متریک فازی معرفی می کنیم. لذا قبل از تعریف متریک (فاصله) جدید روی اعداد فازی، چند تعریف و لم مرتبط با موضوع را ارائه می دهیم.

تعریف ۴-۲۵ (قدر مطلق قطعی یک عدد فازی)

قدرمطلق قطعی عدد فازی A را با نماد $|A|$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$|A|=|ac(A)| \qquad (۵۵-۴)$$

تعریف ۴-۲۶ (قدرمطلق فازی یک عدد فازی)

قدرمطلق فازی عدد فازی A را با نماد $\int A\int$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم :

$$\int A\int=\begin{cases}A, & A\succ\tilde{0},\\ -A, & A\prec\tilde{0}.\end{cases} \qquad (۵۶-۴)$$

لم ۴-۱۵ : به ازای هر A,B متعلق به $F_C(\mathbb{R})$،

۱) $|A|=|-A|$, $\int A\int=\int -A\int$ ،

۲) $|A|\geq 0$, $\int A\int\succeq\tilde{0}$.

۳) اگر $A\cong B$ آنگاه $|A|=|B|$ و $\int A\int\cong\int B\int$.

اثبات : با توجه به تعاریف مربوط به هر یک از موارد فوق، بدیهی اند.

لم ۴-۱۶: فرض کنید تابع $D_*(.\ ,\ .)$ را بصورت زیر داشته باشیم :

$$D_*: F_C(\mathbb{R})\times F_C(\mathbb{R})\to F_C(\mathbb{R})$$

$$D_*(A,B)=\begin{cases}|A-B|, & A\sim_1 B,\\ \int A-B\int, & A\not\sim_1 B.\end{cases} \qquad (۵۷-۵)$$

آنگاه $(F_C(\mathbb{R})\ ,\ D_*)$ فضای متریک فازی است.

اثبات : متریک بودن D_* روی $F_C(\mathbb{R})$ را می توان با توجه به تعاریف همتراز نوع – ۱، قدرمطلق قطعی و قدرمطلق فازی داشته باشیم. لذا، $(F_C(\mathbb{R}),D_*)$ یک فضای متریک فازی است.

در این قسمت، به چند لم و قضیه اساسی مرتبط به فاصله پیشنهادی فوق می پردازیم که در مسائل ریاضیات فازی مفید هستند.

لم ۴–۱۷: فرض کنید $F_C(\mathbb{R})$ فضای متریک فازی با تابع فاصله فازی $D_*(.\ ,\ .)$ تعریف شده در لم (۴–۱۶) باشد. آنگاه به ازای هر A,B,C متعلق به $F_C(\mathbb{R})$:

۱) $D_*(0,A)\cong\int A\int$ ،

۲) $D_*(\tilde{0}_A,A)\cong|A|$ ،

۳) $D_*(A,A)=0$ ،

۴) $D_*(A\oplus C,B\oplus C)\cong D_*(A,B)$ ،

۵) اگر $A\sim_1 B$ آنگاه $D_*(A\oplus C,B\oplus C)=D_*(A,B)$ ،

۶) اگر $A\sim_1 B$ آنگاه $D_*(\lambda A,\lambda B)=|\lambda|D_*(A,B)$ ،

۷) اگر $A\not\sim_1 B$ آنگاه $D_*(\lambda A,\lambda B)\cong|\lambda|D_*(A,B)$.

اثبات : با توجه به تعاریف مرتبط هر مورد بدیهی اند.

برای مقایسه فضای متریک فازی با فضای متریک قطعی، نخست رتبه ابهام برای فضای متریک فازی تعریف می کنیم و سپس نشان می دهیم فضای متریک قطعی حالت خاصی از فضای متریک فازی با رتبه ابهام صفر هستند.

تعریف ۴–۲۷ (رتبه ابهام فضای متریک فازی)

فرض کنید زوج $(F_C(\mathbb{R}),D_*)$ فضای متریک فازی باشد. آنگاه رتبه ابهام نوع – ۱ ،

$$F_{CD^*}{}^{ar_1}=(l_{11F_{CD^*}},r_{11F_{CD^*}},l_{12F_{CD^*}},r_{12F_{CD^*}})_1 \qquad (۵۸–۴)$$

را رتبه ابهام فضای متریک $(F_C(\mathbb{R}),D_*)$ گویند.

با توجه به اینکه برای مسئله فضای متریک فازی، رتبه ابهام نوع – ۱ در نظر گرفته شده است لذا ، برخی از لم های مرتبط با مسائل فازی با رتبه ابهام نوع – ۱ را برای فضای متریک فازی نیز خواهیم داشت. بعبارت دیگر،

لم ۴–۱۸: فرض کنید $(F_C(\mathbb{R}),D_*)$ فضای متریک فازی با رتبه ابهام $F_{CD^*}{}^{ar_1}$ باشد.آنگاه ،

۱) $l_{11F_{CD^*}}, r_{11F_{CD^*}}, l_{12F_{CD^*}}, r_{12F_{CD^*}} \geq 0$،

۲) اگر $(l_{12F_{CD^*}}, r_{12F_{CD^*}}) = (0,0)$ آنگاه $(l_{11F_{CD^*}}, r_{11F_{CD^*}}) = (0,0)$.

لم ۴-۱۹ : فرض کنید $(F_C(\mathbb{R}), D_*)$ فضای متریک فازی با رتبه ابهام ${F_{CD^*}}^{ar_1}$ باشد به قسمی که $(l_{12F_{CD^*}}, r_{12F_{CD^*}}) = (0,0)$. آنگاه، به ازای هر A, B در $F_C(\mathbb{R})$ داریم: $A \sim_1 B$.

قضیه (مشخصه متریک فازی)

فضای متریک فازی $(F_C(\mathbb{R}), D_*)$ با رتبه ابهام ${F_{CD^*}}^{ar_1}$ که $(l_{12F_{CD^*}}, r_{12F_{CD^*}}) = (0,0)$ باشد، با فضای متریک قطعی معادل است.

اثبات : با توجه به لم (۴-۱۹) و تعریف $D_*(.\ ,\ .)$ داریم که، به ازای هر A, B در $F_C(\mathbb{R})$ ؛

$$D_*(A,B) = |A - B| \qquad (۵۹-۴)$$

بنابراین، $D_*(.\ ,\ .)$ با قدر مطلق قطعی بیان می گردد و چون قدرمطلق، یک متر (فاصله) قطعی است لذا فضای متریک فازی $(F_C(\mathbb{R}), D_*)$ را بعنوان فضای متریک قطعی خواهیم داشت.

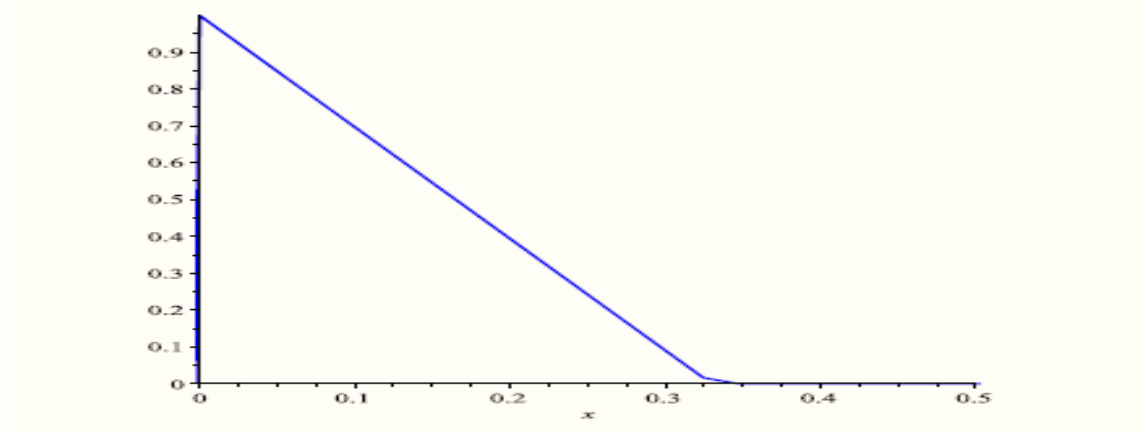
۴-۳-۳ چند مثال مقایسه ای

در این بخش، چند مثال جهت تشریح روش پیشنهادی و مقایسه با سایر روش ها ارائه گردیده است.

مثال ۴-۱۴: اعداد فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$A = (0,0,0,-,-),$$
$$B = (0,0,0.33,-,-),$$

با تصویر زیر ؛



شکل ۴-۱۸: اعداد فازی مثال ۴-۱۴

با روش پیشنهادی، فاصله B,A را داریم : $(0,0,\frac{0.33}{2},-,-)$.

که در جدول زیر با سایر روش های فاصله فازی مقایسه گردیده است.

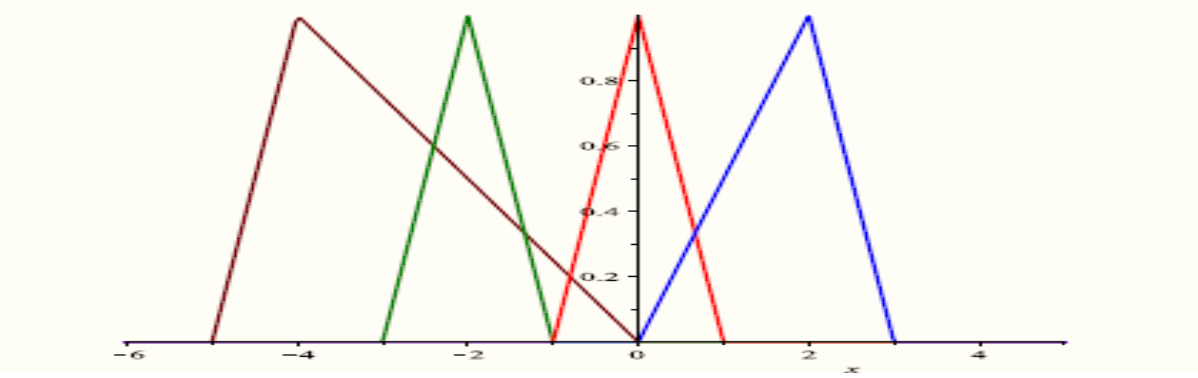
جدول ۴-۴: نتایج مقایسه فاصله پیشنهادی با روش های دیگر از مثال ۴-۱۴

proposed method	Chakraborty and Chakraborty[77]	Guha and Chakraborty[5]	Sadi-Nezhad	Ali Beigi and Hajjari
$(0,0,\frac{0.33}{2},-,-)$	$(0,0,0,-,-)$	$(0,0,\frac{0.33}{2},-,-)$	$(0,0,0.33,-,-)$	$(0,0,0.33,-,-)$

مثال ۴-۱۵: اعداد فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$A_1=(0,2,3,-,-),$$
$$A_2=(-1,0,1,-,-),$$
$$A_3=(-3,-2,-1,-,-),$$
$$A_4=(-5,-4,0,-,-),$$

که در تصویر زیر تشریح گردیده اند :



شکل ۴-۱۹: اعداد فازی مثال ۴-۱۵

در جدول زیر فاصله های فازی بین آنها با فاصله پیشنهادی مورد مقایسه قرار گرفته است :

جدول ۴-۵: نتایج مقایسه فاصله پیشنهادی با روش های دیگر از مثال ۴-۱۵

Distance fuzzy numbers	Proposed method	Sadi-Nezhad[78]	Voxman[1]	Guha and Chakraborty[5]	Ali Beigi and Hajjari
$D(A_1, A_1)$	$(0,0,0,-,-)$	$(0,0,3,-,-)$	$(0,0,3,-,-)$	$(0,0,1.5,-,-)$	$(0,0,0,-,-$
$D(A_1, A_2)$	$(0.5,2,3,-,-)$	$(0,2,4,-,-)$	$(2,2,4,-,-)$	$(0.5,2,3,-,-)$	$(1,2,4,-,-$
$D(A_1, A_3)$	$(2.5,4,5,-,-)$	$(1,4,6,-,-)$	$(1,4,6,-,-)$	$(2.5,4,5,-,-)$	$(1,4,6,-,-$
$D(A_1, A_4)$	$(4.5,6,8.5,-,-)$	$(0,6,8,-,-)$	$(0,6,8,-,-)$	$(3,6,7,-,-)$	$(0,6,8,-,-$
$D(A_2, A_2)$	$(0,0,0,-,-)$	$(0,0,2,-,-)$	$(0,0,2,-,-)$	$(0,0,1.5,-,-)$	$(0,0,0,-,-$
$D(A_2, A_3)$	$(2,2,2,-,-)$	$(0,2,4,-,-)$	$(0,2,4,-,-)$	$(1,2,3,-,-)$	$(0,2,4,-,-$
$D(A_2, A_4)$	$(3,4,6.5,-,-)$	$(0,4,6,-,-)$	$(4,4,6,-,-)$	$(2.5,4,5,-,-)$	$(1,4,6,-,-$
$D(A_3, A_3)$	$(0,0,0,-,-)$	$(0,0,2,-,-)$	$(0,0,2,-,-)$	$(0,0,1,-,-)$	$(0,0,0,-,-$
$D(A_3, A_4)$	$(1,2,4.5,-,-)$	$(0,2,4,-,-)$	$(2,2,4,-,-)$	$(0,2,3,-,-)$	$(3,3,4,-,-$
$D(A_4, A_4)$	$(0,0,0,-,-)$	$(0,0,5,-,-)$	$(0,0,5,-,-)$	$(0,0,2.5,-,-)$	$(0,0,0,-,-$

مثال ۴-۱۷ : اعداد فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$A=(1,2,5,-,-),$$

$$B=(1,2,4,l_B(x),r_B(x)); \quad l_B(x)=(1-(x-2)^2)^{\frac{1}{2}}, r_B(x)=(1-\frac{1}{4}(x-2)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

با شکل ۴-۱۷.

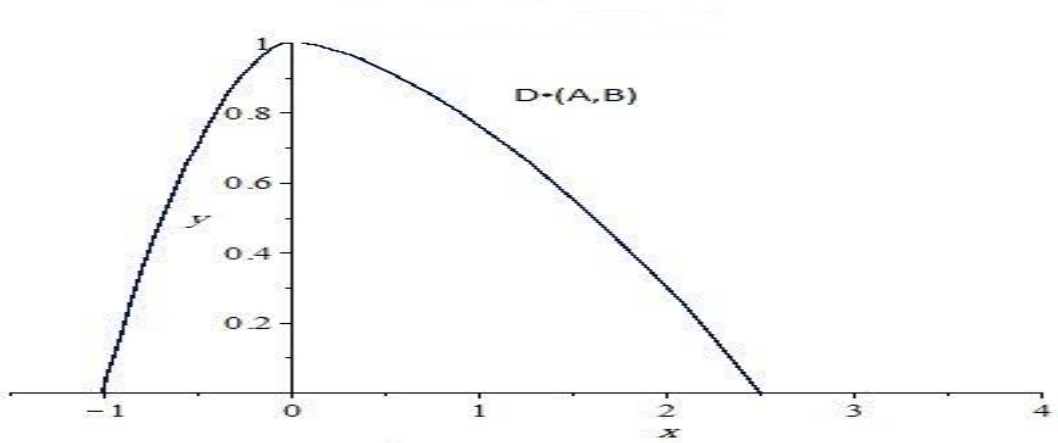
با روش پیشنهادی، $D_*(A,B)$ را بصورت زیر خواهیم داشت :

$$(-1,0,\frac{5}{2},l_{D^*}(x),r_{D^*}(x)),$$

$$s.t: \quad l_{D_*}{}^{-1}(\alpha)=\frac{(\alpha-1)-(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{2}, \qquad \alpha\in(0,1]$$

$$r_{D_*}{}^{-1}(\alpha)=\frac{(3-3\alpha)+(4-4\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

که در تصویر زیر تشریح گردیده اند :



شکل ۴-۲۰: فاصله اعداد فازی مثال ۴-۱۷

فصل پنجم
نتیجه گیری و پیشنهادات

۵– ۱ انگیزه و مزایای نگرش پیشنهاد شده

کار با اعمال جبری روی اعداد فازی مورد نیاز بسیاری از علاقمندان به موضوع مجموعه های فازی می باشد که اغلب این محاسبات دارای پیچیدگی خاص هستند. در مقالات بسیاری سعی شده است با تعریف اعمال جدید جمع و ضرب بر روی اعداد فازی، از این مجموعه یک گروه و میدان بسازند. اما طبیعیترین اعمالی که بر روی مجموعه اعداد فازی تعریف شده اند اعمالی هستند که بر روی اعداد حقیقی تعریف شده اند و سپس با استفاده از اصل گسترش به مجموعه اعداد فازی گسترش داده شده اند. همانطوریکه بخوبی شناخته شده است ، عملگرهای حسابی روی اعداد فازی معمولاً بر پایه اصل گسترش(روی دامنه عضویت) یا بر پایه عملگرهای بازه ای (روی دامنه α – برش) بنا گردیده اند. البته بدیهی است که برای اعداد فازی پیوسته، روش اصل گسترش و روش α – برش معادلند. استفاده از اصل گسترش در حساب فازی منجر به نتایج مشکوک است که مهمترین آنها عبارتند از :

- ✓ مسئله برنامه ریزی غیرخطی پرهزینه در اجرای مستقیم این اصل در عملگرهای حساب فازی،
- ✓ بیش از حد بزرگ بودن محوطه تضمین شده از جواب با عملگرهای حساب بازه ای استاندارد (اثر وابستگی)
- ✓ داشتن نتایجی، از قبیل :

$$A-A \neq 0 \ , \ A \div A \neq 1 \ , \ A.A \neq A^2$$

و در بیان کلی تر، قضیه MT که بیان می کند :

اگر F یک تابع ریاضی با پارامترهای فازی و B یک عدد فازی باشد آنگاه نمی توان هیچ عدد فازی مانند X یافت طوریکه، F(X)=B باشد.

با وجود دلایل فوق، تحقیقات زیادی روی عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش با نماد α – برش یا بدون α – برش با ایجاد شرایط روی عملگرها (تحت عنوان عملگرهای حسابی محدود) انجام گردید که تنها محاسبات روی اعداد فازی با شرایط را بیان می کند. منطق فازی معتقد است که ابهام در ماهیت علم است برخلاف دیگران که معتقدند که باید تقریب را دقیق تر کرد تا بهره وری افزایش یابد. باید بدنبال ساختن مدل هایی بود که ابهام را بعنوان بخشی از سیستم، مدل کرد. در واقع منطق فازی یک منطق پیوسته است که از استدلال تقریبی بشر الگو برداری می کند. در واقع قضیه MT ذات سیستم فازی را بیان

می کند مبنی بر اینکه ابهام، به عنوان بخشی از سیستم مدل است. لذا محدودیت روی عملگرهای حساب فازی بر پایه اصل گسترش در راستای معرفی عملگرهای معکوس، صرفاً به دلیل داشتن عضو های بی اثر $1,0$ در سیستم های فازی، با ابهامات در سیستم مغایرت دارد. واضح است که عملگرهای حسابی اعداد حقیقی با استفاده از قوانین منحصر به فرد محاسبه گردیده اند، چرا که مستقل از اعداد درگیرند. لذا بر این اساس نتیجه هر عملگر حسابی روی اعداد حقیقی تنها به اعداد درگیر وابسته اند نه به وجود(نهاد)، که بوسیله اعداد بیان گردیده است. همانطوریکه بخوبی شناخته شده است اعتبار این اصل ساده تلویحاً در عملگرهای حساب فازی در نظر گرفته شده است. در راستای معرفی عملگرهای معکوس بر اساس ماهیت مسائل فازی می بایستی به دنبال عضوهای فازی بی اثر $\tilde{1},\tilde{0}$ (نه لزوماً منحصر به فرد) باشیم. بالطبع نتایج متناظر عملگرها نه تنها به اعداد درگیر وابسته اند بلکه به ابهامات موجود در سیستم نیز وابسته اند.

از اینرو، عملگرهایی بر پایه انتقال – میانگین در راستای داشتن عضوهای فازی بی اثر $\tilde{1},\tilde{0}$ نسبت به عملگرهای جمع و ضرب (نه لزوماً منحصر به فرد) معرفی کردیم و نتایج عملگرها را به اعداد درگیر و ابهامات مطرح شده در آنها، نسبت دادیم. همچنین برای هر مسئله فازی بر اساس اعداد فازی درگیر آن، رتبه ابهام تعریف کرده و جواب مربوطه را با رتبه ابهام متناظرش، با نماد ($\cong$) نشان می دهیم. لازم به ذکر است که نماد ($=$) را در حالت خاص رتبه ابهام مسائل فازی مطرح کردیم.

با نگرش جدید به اعمال حساب فازی، مشکلات مطرح شده مسائل فازی بر پایه اصل گسترش را رفع نموده و سپس نگاه نو به مسائل فازی از قبیل دستگاه های جبر فازی (گروه و میدان فازی)، رتبه بندی فازی و فاصله فازی داشته و با پارامتری تحت عنوان رتبه ابهام برای هر یک از مسائل فازی مطرح شده، نشان دادیم که، هر یک از تعاریف مسائل ریاضیات کلاسیک از قبیل اعمال مقدماتی چهارگانه، دستگاه های جبری (گروه و میدان)، رتبه بندی جبری و فاصله جبری، حالت خاصی از نگرش پیشنهادی ما نسبت به هریک از مسائل متناظرشان در ریاضیات فازی با رتبه ابهامات صفر می باشند.

۵– ۲ چندین پیشنهاد برای تحقیقات کاربردی آینده

در نهایت، با توجه به نگرش جدید اعمال حساب فازی و نگاه نو به مسائل فازی از قبیل دستگاه های جبری فازی، رتبه بندی فازی و فاصله فازی، مجموعه اعداد فازی را تحت عناوین میدان، مجموعه مرتب کامل و فضای متریک فازی بیان کردیم. که در آینده، از میدان، مجموعه مرتب کامل و فضای متریک فازی بودن مجموعه اعداد فازی، بترتیب می توان برخورد نو داشت به:

- ✓ معادلات فازی و دستگاه معادلات فازی،
- ✓ برنامه ریزی خطی و غیر خطی فازی،

✓ توابع فازی و اعمال آنها، خصوصاً مشتق فازی و پیرو آن معادلات دیفرانسیل فازی.

و بالاخره، از چشم انداز ویژه این نگرش جدید اعمال حساب فازی، می توان به مسئله فازی z-number ها اشاره کرد.

منابع

[1] Abbasbandy S, Asady B, Ranking of fuzzy numbers by sign distance, Information Sciences 176 (2006) 2405-2416.

[2] Abbasbandy S, Hajjari T, A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009) 413-419.

[3] Abbasbandy S, Hajighasemi S, A fuzzy distance between two fuzzy numbers information processing and management of uncertainty in knowledge-based systems. Applications, E. Hullermeier, R. Kruse , F. Hoffmann, Editors. Springer Berlin Heidelberg, 2010, pp. 376-382.

[4] Aktas H, Agman NC, A type of fuzzy ring, Arch. Math. Logic 46 (2007) 165-177.

[5] Allahviranloo T, Abbasbandy S, Saneifard R, A method for ranking of fuzzy numbers using new weighted distanc, Mathematical and Computational Applications, 16 (2) (2011) 359-369.

[6] Altman D, Fuzzy set theoretic approaches for handling imprecision in spatial analysis, International Journal of Geographical Information Systems, 8 (1994) 271-289.

[7] Bloch I, On fuzzy distances and their use in image process ing under imprecisionm, Pattern Recognition 32(11) (1999), 1873-1895.

[8] Bodjanova S, Alpha-bounds of fuzzy numbers, Information Sciences, Vol. 152, pp. 237 266, 2003.

[9] Bortolan G, Degani A, A review of some methods for ranking fuzzy subsets, Fuzzy Sets Systems, 15 (1985) 1-19.

[10] Boukezzoula R, Foulloy L, Galichet S, Inverse Controller Design for Interval Fuzzy Systems, IEEE Transactions On Fuzzy Systems, Vol. 14, N° 1, pp. 111-124, 2006

[11] Boukezzoula R, Galichet S, Foulloy L, Nonlinear Internal Model Control: Application of Inverse Model Based Fuzzy Control, IEEE Transactions on Fuzzy Systems Vol. 11 N° 6, pp. 814-829, 2003.

[12] Cabrera J, Narendra K, Issues in the Application of Neural Networks for Tracking Based on Inverse Control, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 44, No. 11, November 1999.

[13] Chakraborty C, Chakraborty D, A theoretical development on a fuzzy distance measure for fuzzy numbers, Mathematical and Computer Modelling 43(3-4) (2006), 254-261.

[14] Cheng CH, A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method, Fuzzy Sets and Systems, 95 (1998) 307-317.

[15] Chen CH , Wang CC, Fuzzy distance of trapezoidal fuzzy numbers. In: Proceedings of the 9th Joint Conference on Information Sciences, JCIS 2006.

[16] Chen SH, Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, Fuzzy Sets and Systems, 17 (1985) 113-129.

[17] Chen SH, Hsieh CH, Graded mean integration repre sentation of generalized fuzzy number, Proceeding of TFSA, 1998.

[18] Chu TC, Tsao CT, Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point, Computers Math. Applications, 43 (2002) 111-117.

[19] Detyniecki M, Yager R, Ranking fuzzy numbers using weighted valuations, International Journal of Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Systems, 8 (2000) 573-591.

[20] Deza M, Deza E, Encyclopedia of Distances, 2009.

[21] Diamond P, Fuzzy least squares, Information Sciences 46(3) (1988), 141-157.

[22] Dib KA, Galhum N , Hassan A, Fuzzy ring and fuzzy ideals, Fuzzy Math., 4(2) (1996), 245-261.

[23] Dong W, Wong F, Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle, Fuzzy Sets and Systems, N°. 21, pp. 183-199, 1987.

[24] Dubois D, Prade H, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[25] Dubois D, Prade H, Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, Information Sciences, 30 (1983) 183-224.

[26] Edwin Clark W, Elementary Abstract Algebra, 1998.(Last revised: December 23,2001)

[27] Guha D, Chakraborty D, A new approach to fuzzy distance measure and similarity measure between two generalized fuzzy numbers, Applied Soft Computing 10(1) (2010), 90-99.

[28] Jain R, Decision-making in the presence of fuzzy valuable, IEEE Trans.Syst.Man Cybern, 6 (1976) 698-703.

[29] Kacprzyk J, Multistage Fuzzy Control: A Prescriptive Approach. John Wiley and Sons, Inc, 1997.

[30] Kaufmann A, Gupta M, Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold Company Inc. Nex York, 1991.

[31] Klir GJ, Fuzzy arithmetic with requisite constraints, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 91, No. 2, pp. 165-175, 1997.

[32] Kulpa Z, Diagrammatic representation for interval arithmetic, Linear Algebra and its Applications, Vol. 324, No. 1-3, pp. 55-80, 2001.

[33] Liou T, Wang M, Ranking fuzzy numbers with integral value, Fuzzy Sets and Systems, 50 (1992) 247-255.

[34] Liu W, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 8 (1982),133-139.

[35] Malik D, Mordeson J, Fuzzy relations on rings and groups, Fuzzy Sets and Systems 43 (1991) 117-123.

[36] Markov S, On the algebra of ontervals and convex bodies. Journal of Universal Computer Science 4, 1 (1998) 34-47.

[37] Mizumoto M, Tanaka K, Algebraic properties of fuzzy numbers, in: M.M. Gupta, R.K. Ragade , Yager RR, eds., Advances in Fuzzy Set Theory and Applications (North-Holland, Amsterdam, 1982)

[38] Modarres M, Sadi-Nezhad M, Ranking fuzzy numbers by preference ratio, Fuzzy Sets and Systems, 118 (2001) 429-436.

[39] Moore R, Lodwick W, Interval analysis and fuzzy set theory», Fuzzy Sets and Systems, Vol. 135, No. 1, pp. 5-9, 2003.

[40] Moore R, Methods and Applications of Interval Analysis. SIAM, Philadelphia, 1979

[41] Nejad A, Mashinchi M, Ranking fuzzy numbers based on the areas on the left and the right sides of fuzzy number, Computers Math. Applications, 61 (2011) 431442.

[42] Oussalah M, De Schutter J, Approximated fuzzy LR computation, Information Sciences, Volume 153, pp. 155-175, 2003.

[43] Rao P, Shankar N, Ranking fuzzy numbers with a distance method using circumcenter of centroids and Index of modality, Advances in Fuzzy Systems, Article, (2011) 1-7.

[44] Ren Y, Fuzzy ideals and quotient rings, Fuzzy Math. 4 (1985), 19-26.

[45] Rosenfeld A, Fuzzy Groups, J. Math. Anal. Appl., Vol. 35, (1971), pp. 512 517.

[46] Rosenfeld A, Distance between Fuzzy Sets. Pattern Recognition Letters, 3 (1985) 229-233.

[47] Rouhparvar H, Panahi, Noorafkan Zanjani A, Fuzzy distance measure for fuzzy numbers, Australian Journal of Basic and Applied Sciences 5(6) (2011), 258-265.

[48] Voxman W, Some remarks on distances between fuzzy num305 bers, Fuzzy Sets and Systems 100(1-3) (1998), 353-365.

[49] Wang Li-Xin, A Course in Fuzzy Systems and Control, 1997.

[50] Wang X, kerre EE, Reasonable properties of fuzzy quantities (I), Fuzzy Sets and Systems, 118 (2001a) 375-385.

[51] Xu R, Li C, Multidimensional least-squares fitting with a fuzzy model, Fuzzy Sets and Systems 119(2) (2001), 215-223.

[52] Yao J, Wu K, Ranking fuzzy numbers based on decomposition principle and signed distance, Fuzzy Sets and Systems, 116 (2000) 275-288.

[53] Yuan X, Lee E, Fuzzy group based on fuzzy binary operation, Comput. Math. App. 47 (2004) 631-641.

[54] Yuan Y, Criteria for evaluating fuzzy ranking methods, Fuzzy Sets and Systems 44 (1991) 139-157.

[55] Zadeh LA, Fuzzy Sets. Information and Control, 8:338-353, 1965.

واژه نامه فارسی به انگلیسی

آبلی ---------- abelian

اثر وابستگی ---------- dependent effect

اجتماع ---------- union

استاندارد ---------- standard

استدلال ---------- argument

اسکالر ---------- scalar

اشتراک ---------- intersection

اصطلاح ---------- terminology

اصل ---------- principle

اصل موضوع ---------- axiom

اصل موضوعی ---------- axiomatic

افزایش ---------- increase

آنالیز ---------- analysis

انتگرال ---------- integral

ارتفاع ---------- height

اندازه ---------- measure

reflection ---------- انعکاس

reflexivity---------- انعکاسی

primitive ---------- اولیه

finite _ dimensional---------- بعد متناهی

infinite _ dimensional ---------- بعد نا متناهی

interval---------- بازه

section ---------- بخش

divisible ---------- بخش پذیر

divisibility---------- بخش پذیری

range ---------- برد

closed ---------- بسته

dimension ---------- بعد

efficiency ---------- بهره وری

continuous ---------- پیوسته

function---------- تابع

membership function ---------- تابع تعلق

linear functional ---------- تابع خطی

transformation---------- تبدیل

remark ---------- تبصره

decomposition ---------- تجزیه

remark ---------- تذکر

order ---------- ترتیب

partial ordering ---------- ترتیب جزئی

linear ordering ---------- ترتیب کلی (خطی)

ordering---------- ترتیبی

composition ---------- ترکیب

equality ---------- تساوی

projection , picture---------- تصویر

perpendicularity ---------- تعامد

transitivity---------- تعدی

commutative ---------- تعویض پذیر

non commutative ---------- تعویض نا پذیر

definition ---------- توصیف

extension ---------- توسیع(گسترش)

singleton---------- تک عنصری

support ---------- تکیه گاه

empty ---------- تهی

fixed ---------- ثابت

algebra ---------- جبر

table ---------- جدول

polynomial ---------- چندجمله ای

real---------- حقیقی

ring---------- حلقه

well define ---------- خوش توصیف

system ---------- دستگاه

relation ---------- رابطه

class---------- رده

membership method ---------- روش تعلق

list method---------- روش فهرست

rule method ---------- روش قاعده

mathematics---------- ریاضی

mathematician ---------- ریاضیدان

root ---------- ریشه

even ---------- زوج

sub algebra---------- زیر جبر

subspace---------- زیر فضا

subgroup ---------- زیرگروه

pseudo-trapezoidal ---------- شبه ذوزنقه ای

pseudo-triangular ---------- شبه مثلثی

multiplication---------- ضرب

coefficient---------- ضریب

normal ---------- طبیعی(نرمال)

symbol ---------- علامت

operation---------- عمل

binary operation---------- عمل دوتایی

operator ---------- عملگر

element---------- عنصر

distance---------- فاصله

odd---------- فرد

form ---------- فرم

chapter---------- فصل

space ---------- فضا

contents ---------- فهرست مطالب

rule---------- قاعده

absolute ---------- قدرمطلق

theorem ---------- قضیه

crisp---------- قطعی

decrease---------- کاهشی

group---------- گروه

discrete---------- گسسته

lemma---------- لم

maximum---------- ماکزیمم

ambiguous---------- مبهم

associated---------- متحد

metric---------- متر

similar---------- مشابه

complement---------- متمم

finite---------- متناهی

example---------- مثال

positive---------- مثبت

triangle---------- مثلث

triangular---------- مثلثی

sum---------- مجموع

set---------- مجموعه

content---------- محتوا

convex---------- محدب

limited---------- محدود

center ---------- مرکز

equivalent---------- معادل

equation---------- معادله

inverse ---------- معکوس

invertible ---------- معکوس پذیر

invertibility---------- معکوس پذیری

concept , notion ---------- مفهوم

comparison ---------- مقایسه

comparability---------- مقایسه پذیر

complement---------- مکمل

singleton---------- منفرد

average ---------- میانگین

field---------- میدان

minimum ---------- مینیمم

non abelian ---------- نا آبلی

non zero ---------- نا صفر

infinite ---------- نامتناهی

نامحدود ---------- un limited

نامساوی ---------- in equality

نرم ---------- norm

نظریه ---------- theory

نقطه ---------- point

نماد(ها) ---------- notation

نماد گذاری ---------- notation

نمایش ---------- representation

نمودار ---------- graph

هسته ---------- kernel , core

همانی ---------- identity

هم ارز ---------- equivalent

هم تراز ---------- par

هندسه ---------- geometry

یکه ---------- unit

A new insight to fuzzy mathematics based on new definition of fuzzy arithmetic operator

Abstract

After presenting fuzzy logic, the development of fuzzy arithmetic that is a complete and comprehensive technique was introduced. Although, the main topic is fuzzy calculations based on the extension principle with the nonlinear uncertainties that will contact with supremum and infimum of nonlinear functions and causes costly calculations. To fix this, the technique of α - cut was designed based on interval arithmetic. Although, it has been an appropriate contact about the removing the complexity of the calculations based on the extension principle, but due to the lack of expression of ineffective members based on interval arithmetic is more doubtful. Even if the fuzzy arithmetic based on above interval arithmetic (α - cut) can be expressed and implemented, this point is still standing that the results of actions based on interval arithmetic (α - cut) in continuous mode is equal to the extension principle, they are so large that the source of this problem associate with the nature of interval arithmetic operator.

Accordingly, new fuzzy arithmetic operations are defined based on the transmission average (TA) and resolves the issues related to ineffective member. By emphasizing on theorem of Mizumoto and Tanka (For any non-degenerated fuzzy number A, there exist no inverse number $A^{'}, A^{''}$ under $\oplus$ and $\otimes$ respectively, such that $A \oplus A^{'} = 0,\ A \otimes A^{''} = 1$), which states the nature of fuzzy systems based on that uncertainty is a part of a system of model, we are looking for such models. In fact, fuzzy logic is a continues logic modeling from the human approximate reasoning. Therefore, its results should be expressed approximately. Thus, after defining the new operations, several equivalence classes are introduced and then, by defining the fuzzy approximation, approximation results of fuzzy issues are expressed by the uncertainties rank. Finally, according to the new operations and proposed fuzzy approximate, we will have a new outlook to the fuzzy algebraic systems, fuzzy ranking and fuzzy distance.

Key words: Fuzzy arithmetic, pseudo-geometric fuzzy numbers, Extension principle (EP), Transmission average (TA), Fuzzy par, Fuzzy approximation, Fuzzy group, Ambiguity rank, Fuzzy field, Fuzzy partial order, Ranking fuzzy numbers, Fuzzy absolute, Fuzzy distance function (fuzzy metric).

BY: *Fazlollah Abbasi*