



دانشگاه بین‌المللی امام خمینی

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته‌ی

ریاضی، گرایش کاربردی

عنوان

حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل
به وسیله گروه‌های تقارنی لی و روش
تیراندازی گروه لی

استاد راهنما

دکتر سعید عباس‌بندی

استاد مشاور

دکتر داود رستمی

پژوهشگر

میر سجاد هاشمی



ب

تقديم به:

پدرم و مادرم

پاس خدایی را که سخنان در ستودن او مانند شمار کران شمرده نعمتهای او ندانند، و کوشندگان، حق او را نگزاردن توانند. خدایی که پای اندیشه تیرگام در راه شناسایی او گنگ است، و سرِ فکرش ژرف رو به دریای معرفش بر سنگ. صفتی که او تعریف ناشدنی است و به وصف در نیامدنی، و در وقت ناگنجینی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلائق را بیافرید، و به رحمتش باد را سپر کند، و با خرگندها لرزه زمین را در مهار کشید.

کوهی می‌دیم که خدایت است، انبازی ندارد و بی‌همتاست. کوهی از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیخ برآمده از امتحان؛ و کوهی می‌دیم که محمد (ص) بنده او و پیامبر اوست. او را بفرستاد بادی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی بسته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهای روشن و عیان. تا که دودلی از دلها بزداید، و با حجت و دلیل بلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نمان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود دمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نگو و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهبانیهای توانا شناخته نیست و از کفایتهای تو نه.

از فرمایشات حضرت علی (ع)

بِنام خدا

لَمْ يَشْكُرْ الْمَخْلُوقُ وَلَمْ يَشْكُرْ الْخَالِقُ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم. در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سعید عباس‌بندی، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر داود رستمی که زحمت مشاوره‌ی این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم. از استاد راهنمایم در ایتالیا پروفیسور ماریا کلارا نوچی^۱ به خاطر تمام زحماتی که در مدت اقامتم در پروجیا^۲ کشیدند و راهنمایی‌هایی که فرمودند کمال تشکر را دارم. از جناب آقایان دکتر بابلیان، دکتر یوسفی و دکتر میرزائی که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

از تمامی دوستان و هم دوره‌ای‌هایم به خصوص دکتر الیاس شیوانیان، دکتر احمد شیرزادی، هادی روحانی، محسن علیپور و کبری کریمی که به نوعی بنده را در به اتمام رساندن این رساله یاری فرمودند تشکر می‌کنم.

میرحاجاد هاشمی
۱۳۹۱

^۱Nucci Clara Maria

^۲Dipartimento di Matematica e Informatica, Universit'a di Perugia, 06123 Perugia, Italy

نام خانوادگی دانشجو: هاشمی		نام: میر سجاد	
عنوان: حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل به وسیله گروه های تقارنی لی و روش تیراندازی گروه لی			
استاد راهنما : دکتر سعید عباس بندی		استاد مشاور : دکتر داود رستمی	
مقطع تحصیلی: دکتری	رشته: ریاضی	دانشگاه بین المللی امام خمینی	
دانشکده علوم پایه	تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱	تعداد صفحات: ۱۶۲	
کلید واژه ها: منیفلد، گروه لی، جبر لی، تقارنی گروه لی، تقارنی غیر کلاسیک، جواب های ناورداء، تبدیلات بی نهایت کوچک، تطویل تبدیلات، معادلات تعیینی، طرح حافظ گروه، روش تیراندازی گروه لی.			
چکیده از گروه های لی می توان در حل تقریبی و عددی معادلات دیفرانسیل اعم از معمولی و جزئی استفاده نمود. در این رساله با استفاده از تیراندازی گروه لی که اولین بار برای حل دستگاه های دینامیکی مورد استفاده قرار گرفت، معادله براتو را مورد بررسی قرار دادیم که جواب های به دست آمده در مقایسه با روش های به کار رفته برای این معادله بهتر بوده و جواب های قابل قبول تری را به دست آوردیم. سپس معادله بدوضع لاپلاس را با استفاده از ترکیب روش خطوط و طرح حافظ گروه حل کرده و پایداری روش به کار رفته را مورد بررسی قرار دادیم. جواب های تحلیلی معادله کلی تعمیم یافته واخنکو را با استفاده از تقارنی های لی پیدا کرده و یک روش ترکیبی جدید به نام $LSGPS$ برای مواقعی که تقارنی های لی در برخی زیر جبرها با شکست مواجه می شوند را معرفی کردیم. در نهایت با استفاده از معادلات وراثتی معرفی شده توسط نوچی، تقارنی های غیر کلاسیک دسته ای از معادلات واکنش-پخش را به دست آورده و جواب های تحلیلی این دسته از معادلات را استخراج می کنیم.			

فهرست مطالب

۶	۱	پیشینه‌ی پژوهش و مفاهیم مقدماتی
۷	۱.۱	مقدمه
۷	۲.۱	منیفلد
۹	۱.۲.۱	نگاشت‌های بین منیفلدها
۹	۲.۲.۱	گروه‌های لی
۱۰	۳.۲.۱	گروه‌های لی موضعی
۱۱	۴.۲.۱	میدان‌های برداری
۱۳	۵.۲.۱	شار
۱۵	۳.۱	ناوردائی
۲۰	۴.۱	تطویل تبدیلات
۲۵	۵.۱	کروشه لی
۲۸	۲	آنالیز گروه لی برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل
۲۹	۱.۲	مقدمه
۳۱	۲.۲	شرط تقارنی برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول
۳۳	۳.۲	عمل تقارنی‌های لی روی صفحه
۳۵	۴.۲	مختصات کانونی
۳۹	۵.۲	حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از تقارنی‌های لی
۴۰	۱.۵.۲	مولدهای بی‌نهایت کوچک
۴۱	۲.۵.۲	معادلات تعیینی برای تقارنی‌های نقطه لی
۴۴	۳.۵.۲	کاهش مرتبه با استفاده از مختصات کانونی

۴۷	آنالیز گروه لی برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی	۶.۲
۵۵	جواب‌های ناوردا	۱.۶.۲
۵۶	طبقه‌بندی جواب‌های ناوردای گروه	۲.۶.۲
۵۷	نمایش الحاقی	۳.۶.۲
۵۸	طبقه‌بندی زیرگروه‌ها و زیرجبرها	۴.۶.۲
۵۹	تقارنی‌های غیرکلاسیک	۵.۶.۲
۶۲	روش تیراندازی گروه لی برای حل معادله براتو	۳
۶۳	مقدمه	۱.۳
۶۴	تبدیل مختصات	۲.۳
۶۵	طرح حافظ گروه یک مرحله‌ای	۳.۳
۶۷	روش نقطه میانی تعمیم یافته	۱.۳.۳
۶۸	نگاشت گروه لی بین دو نقطه روی مخروط	۲.۳.۳
۷۱	روش تیراندازی گروه لی	۴.۳
۷۳	مقدار A	۵.۳
۷۴	وفق دادن شیب A	۶.۳
۷۴	طرح حافظ گروه	۱.۶.۳
۷۵	تعیین A برای معادله براتو	۲.۶.۳
۷۶	نتایج عددی	۷.۳
۷۶	مسئله براتو برای $\lambda = 1$	۱.۷.۳
۷۸	مسئله براتو برای $\lambda = 2$	۲.۷.۳
۸۰	مسئله براتو برای $\lambda = 3.51$	۳.۷.۳
۸۰	نتیجه‌گیری	۸.۳
۸۴	طرح حافظ گروه برای مسئله کشی در معادله لاپلاس	۴
۸۵	مقدمه	۱.۴
۸۶	بدحالتی مسئله کشی در معادله لاپلاس	۲.۴
۸۹	طرح حافظ گروه	۳.۴
۸۹	فرمول‌بندی جبر لی	۱.۳.۴

۲.۳.۴	طرح حافظ گروه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل	۹۱
۴.۴	حل معادله لاپلاس به وسیله روش خطی و طرح حافظ گروه	۹۲
۱.۴.۴	طرح حافظ گروه	۹۴
۲.۴.۴	تحلیل پایداری	۹۴
۵.۴	نتایج عددی	۹۶
۱.۵.۴	مثال ۱	۹۶
۲.۵.۴	مثال ۲	۹۹
۳.۵.۴	مثال ۳	۹۹
۴.۵.۴	مثال ۴	۱۰۰
۶.۴	نتیجه گیری	۱۰۳
۵	آنالیز گروه لی معادله اصلاح شده تعمیم یافته واخنکو	۱۰۴
۱.۵	طرح حافظ گروه	۱۰۷
۱.۱.۵	LSGPS	۱۰۸
۲.۵	آنالیز گروه لی، تقلیل های تقارنی و جواب های معادله تعمیم یافته اصلاح شده واخنکو	۱۰۹
۱.۲.۵	زیر جبر $L_{1,1}$	۱۱۰
۲.۲.۵	زیر جبر $L_{2,1}$	۱۱۱
۳.۲.۵	زیر جبر $L_{3,1}$	۱۱۴
۴.۲.۵	زیر جبرهای $L_{4,1}$	۱۱۶
۳.۵	نتیجه گیری	۱۲۳
۶	تقارنی های غیر کلاسیک رده ای از معادلات واکنش-انتشار به وسیله ی معادلات وراثتی	۱۲۴
۱.۶	معادلات وراثتی و تقارنی های غیر کلاسیک	۱۲۶
۲.۶	تقارنی های غیر کلاسیک معادله (۱.۶)	۱۲۸
۱.۲.۶	حالت ۱: $R(u, x) = -\frac{a_3^2(x)}{6}u^3 + \frac{a_2(x)}{2}u^2 + a_1(x)u + a_0(x)$	۱۳۰
۲.۲.۶	حالت ۲: $R(u, x) = \frac{f(u)}{k^2(x)}$	۱۳۷
۳.۶	نتیجه گیری	۱۴۲
۷	بحث و نتیجه گیری و کارهای آتی	۱۴۴

فهرست جداول

۵۳.....	جدول ۱.۳: جدول جابجاگر برای مولدهای معادله گرما
۵۶.....	جدول ۲.۳: جدول جابجاگر برای مولدهای معادله KdV
۷۸.....	جدول ۱.۴: خطاهای باقی مانده‌ی به دست آمده به ازای $\lambda = 1$
۷۸.....	جدول ۲.۴: خطاهای باقی مانده‌ی به دست آمده به ازای $\lambda = 2$
۷۹.....	جدول ۳.۴: خطاهای باقی مانده‌ی به دست آمده به ازای $\lambda = 3.51$
۱۰۵.....	جدول ۱.۶: جدول جابجاگر برای مولدهای معادله $mGVE$

فهرست نمودارها

- شکل ۱.۴: شکل (a) $\Psi(r)$ و (b) $A(r)$ برای $\lambda = 1$ ۷۲
- شکل ۲.۴: نمودار $y_1(1) - 1$ نسبت به r برای $\lambda = 1$ ۷۳
- شکل ۳.۴: نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده توسط طرح گروه لی به ازای $\lambda = 1$ ۷۳
- شکل ۴.۴: شکل (a) $\Psi(r)$ و (b) $A(r)$ برای $\lambda = 2$ ۷۴
- شکل ۵.۴: نمودار $y_1(1) - 2$ نسبت به r برای $\lambda = 2$ ۷۵
- شکل ۶.۴: نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده توسط طرح گروه لی به ازای $\lambda = 2$ ۷۵
- شکل ۷.۴: شکل (a) $\Psi(r)$ و (b) $A(r)$ برای $\lambda = 3.51$ ۷۶
- شکل ۸.۴: نمودار $y_1(1) - 3$ نسبت به r برای $\lambda = 3.51$ ۷۷
- شکل ۹.۴: نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده توسط طرح گروه لی به ازای $\lambda = 3.51$ ۷۷
- شکل ۱۰.۴: نمودار خطاهای مطلق برای λ های مختلف ۷۷
- شکل ۱.۵: شرط کافی برای پایداری طرح حافظ گروه ۹۲
- شکل ۲.۵: مقایسه جواب تحلیلی و عددی به دست آمده مثال ۱ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 200$ ۹۳
- شکل ۳.۵: خطای مطلق مثال ۱ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 200$ ۹۴
- شکل ۴.۵: مقایسه جوابهای تحلیلی و تقریبی به دست آمده برای مثال ۲ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$ ۹۵
- شکل ۵.۵: خطاهای مطلق مثال ۲ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$ ۹۵
- شکل ۶.۵: مقایسه جواب تحلیلی و عددی به دست آمده برای مثال ۳ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$ ۹۵

۹۶..... $N = 150$

شکل ۷.۵: خطاهای مطلق مثال ۳ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 150$ ۹۶.....

شکل ۸.۵: مقایسه جوابهای عددی و تحلیلی مثال ۴ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$

۹۷.....

شکل ۹.۵: خطاهای مطلق مثال ۴ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$ ۹۸.....

شکل ۱۰.۶: جواب به دست آمده از حالت زیر جبر $L_{3,1}$ با $p = 1$, $q = 2$ و $\beta = 5$

۱۱۱.....

شکل ۲.۶: جواب به دست آمده از حالت زیر جبر $L_{4,1}$ با $\epsilon = -1$ و $p = 1$, $q = 2$ و $\beta = 5$

۱۱۴.....

شکل ۳.۶: جواب به دست آمده از حالت زیر جبر $L_{4,1}$ با $\epsilon = +1$ و $p = 1$, $q = 2$ و $\beta = 5$

۱۱۷.....

مقدمه

حل معادله در کل ادوار تاریخ ریاضیات نقش کلیدی را ایفاء کرده و همواره شاخه‌های جدیدی از ریاضیات در حین کار با معادلات تولید شده‌اند. به عنوان مثال حل معادلات جبری مرتبه‌های بالاتر از چهار به وسیله‌ی گالوا^۳ در سال ۱۸۳۱، شاخه جدیدی به نام نظریه‌ی گروه‌ها را تولید نمود. حل معادلات دیفرانسیل نیز از نیمه دوم قرن نوزدهم، اهمیت ویژه‌ای در ریاضیات کاربردی پیدا کرد. از آن زمان تکنیک‌های مختلفی برای به دست آوردن جواب رده‌های معینی از معادلات دیفرانسیل طراحی و اجرا شده‌اند. ویژگی مشترکی که در همه‌ی این روش‌ها می‌توان یافت این است که، یا متغیرهای جدیدی طوری تعیین شوند که معادله‌ی دیفرانسیل داده شده تبدیل به نوع شناخته شده‌ای از معادلات تبدیل شود، یا برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه‌ی دیفرانسیل کاهش یابد و یا برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی تعداد متغیرهای مستقل کاهش یابد. از طرفی برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی، پیدا کردن جواب اغلب با شکست مواجه می‌شود، حتی بدون این که بدانیم جواب به صورت فرم بسته وجود دارد یا نه!

در سال ۱۷۷۳ برای اولین بار لاپلاس دو ناوردای دیفرانسیل^۴ را برای به دست آوردن جواب معادله‌ی دیفرانسیل سهموی مرتبه دوم (۱+۱) بعدی کشف کرد. فورسایت^۵ ناوردهای معادلات دیفرانسیل خطی را با استفاده از رده‌ای از تبدیلات محاسبه نمود که بر پایه‌ی کارهای لاگر^۶، نالت^۷، هالف^۸ بود. سپس ریاضیدان نروژی سافوس لی^۹ (۱۸۹۹-۱۸۴۲) علاقمند به تولید نظریه‌ای شبیه به کار گالوا برای

^۳Galois

^۴Differential invariant

^۵Forsyth

^۶Laguerre

^۷Nalet

^۸Halphe

^۹Sophus Lie

معادلات دیفرانسیل با استفاده از گروه‌های پیوسته شد. لی دریافت که روش‌های موجود حل رده‌ی معینی از معادلات دیفرانسیل معمولی از جمله، معادلات جدائی‌پذیر، خطی، همگن و اوایلر، در حقیقت حالت خاصی از روند انتگرال‌گیری عمومی بر پایه ناوردایی معادله دیفرانسیل معمولی تحت تبدیلات گروه پیوسته (تقارنی‌های لی^{۱۰}) هستند. لی در اولین فصل کتابش در مورد معادلات دیفرانسیل نوشت: ”تحقیقات پیشین روی معادلات دیفرانسیل که در مقالات و کتاب‌ها آمده، به‌صورت نظام‌مند و کلی نمی‌باشد. نظریه‌های انتگرال‌گیری خاصی برای معادلات دیفرانسیل همگن، خطی و شکل‌های خاص انتگرال‌پذیر دیگر ارائه شده‌اند. با این حال ریاضی‌دانان، از این‌که نظریه‌های خاص ارائه شده احتمالاً از یک روش عمومی تبعیت می‌کنند، غافل شده‌اند. پایه این روش عمومی و کلی بر اساس مفهوم تبدیلات بی‌نهایت کوچک^{۱۱} است که نزدیک به مفهوم گروه‌های لی یک پارامتری می‌باشد.“[۱۵۶]

در کارهایی که لی انجام داد این تبدیلات، گروه‌هایی بودند که وابسته به پارامترهای پیوسته بوده و شامل تبدیلات نقطه (تقارنی‌های نقطه) هستند و روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته عمل می‌کنند. لی نشان داد که یک معادله دیفرانسیل معمولی اگر تحت تبدیلات نقطه گروه لی تک پارامتری ناوردا باشد، آنگاه مرتبه آن را می‌توان یک درجه کاهش داد. او همچنین نشان داد که می‌توان گروه تبدیلات نقطه صادق در معادله دیفرانسیل خطی (غیر خطی) داده شده را با یک طرح نظام‌مند صریحی (الگوریتم لی) تعیین کرد. همچنین لی به این واقعیت اشاره کرد که مسئله پیدا کردن تقارنی‌های نقطه لی یک معادله دیفرانسیل (معمولی یا جزئی) به حل دستگاه معادلات تعیینی^{۱۲} که خطی می‌باشند، تقلیل می‌یابد. جبرهای لی (از بی‌نهایت کوچک‌ها) اولین بار توسط لی در روند به‌کار رفته برای معادلات دیفرانسیل کشف شد. کیلینگ^{۱۳} (۱۸۴۷-۱۹۲۳) حدود ده سال بعد، مستقلاً جبرهای لی را در طی مطالعاتش روی هندسه ناقلیدسی برای رده‌بندی فضاها معرفی کرد. سپس کیلینگ و کارتان^{۱۴} یک رده‌بندی کامل و صریح از جبرهای لی را تهیه نمودند که در آن زمان یکی از برجسته‌ترین دستاوردهای ریاضی به‌شمار می‌رفت [۷۷].

نمی‌توان به‌راحتی در مورد اهمیت و سهم گروه‌های لی در ریاضیات مدرن و علوم صحبت کرد ولی به‌وضوح می‌توان گفت که امروزه گروه‌های تقارنی لی مهمترین و قوی‌ترین روش برای به‌دست آوردن جواب تحلیلی مسائل غیرخطی است. گروه‌های لی کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های مختلفی

^{۱۰}Lie Symmetries

^{۱۱}Infinitesimal

^{۱۲}Determining equations

^{۱۳}Killing

^{۱۴}Cartan

مانند ریاضیات، فیزیک، هندسه دیفرانسیل، نسبیت و بسیاری از معادلات دیگر دارد. از نظر تاریخی، کاربردهای آنالیز تقارنی که توسط لی برای معادلات دیفرانسیل معرفی شده بود، به مرور زمان به دست فراموشی سپرده شد و اندکی بعد از جنگ جهانی دوم بیرخوف^{۱۵} (۱۹۹۶-۱۹۱۱) کاربردهای به کار نرفته‌ی گروه‌های لی را برای معادلات دیفرانسیل مستخرج از مکانیک سیالات انجام داد که موجب احیای جدید گروه‌های لی گردید [۳۱]. سپس در اتحاد جماهیر شوروی سابق، اسیانیکف^{۱۶} و دانشجویانش طرح‌های نظام‌مندی از گروه‌های لی را به طور موفقیت آمیزی روی مسائل مهم فیزیکی پیاده نمودند [۱۴۲].

در دهه اخیر رده جدیدی از تقارنی‌های لی، از جمله تقارنی‌های غیرمحل^{۱۷}، λ -تقارنی‌ها، تقارنی‌های غیر کلاسیک^{۱۸} و ... معرفی شده‌اند که اغلب جواب‌های جدیدی از معادلات دیفرانسیل را که قابل به دست آوردن از تقارنی‌های لی نیستند را به دست می‌آورند.

از طرفی می‌دانیم، معادلات دیفرانسیل را می‌توان با طرح‌های تفاضلی زیادی تقریب زد. بنابراین همیشه سعی بر این بوده که یک مدل تفاضلات متناهی انتخاب شده، شامل برتری‌هایی نسبت به بقیه مدل‌ها باشد. معیار انتخاب اغلب بر پایه‌ی اصول فیزیکی مدل مورد بررسی می‌باشد، مانند قوانین بقا، اصل وردشی، معنی فیزیکی داشتن جواب‌های تحلیلی و غیره. در این رساله هدف، بررسی کیفی روش‌ها می‌باشد. این بررسی منجر به تولید الگوریتم‌های عددی می‌نماید که جواب‌های به دست آمده همیشه دارای معنی فیزیکی خواهد بود [۵۰]. از بین روش‌های موجود که بر پایه‌ی خواص هندسی می‌باشند، طرح حافظ گروه^{۱۹} و روش تیراندازی گروه لی^{۲۰} و روش $LSGPS$ ^{۲۱} که در این رساله برای اولین بار معرفی شده، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ناوردائی معادلات دیفرانسیل تحت گروه‌های تبدیلات پیوسته از خواص اساسی و مشترک بین این دسته از مدل‌ها می‌باشد که خواص تقارنی مدل‌های فیزیکی مورد بحث را نتیجه می‌دهد. بنابراین حافظ خواص تقارنی بودن در نظریه‌ی طرح‌های تقارنی یک امر مهم می‌باشد، به این معنی که وقتی یک مدل دیفرانسیل شامل یک تقارنی می‌باشد، سعی خواهیم کرد مدل تفاضلات متناهی وابسته به آن نیز

^{۱۵}Birkhoff

^{۱۶}Ovsiannikov

^{۱۷}Nonlocal symmetries

^{۱۸}Nonclassical symmetries

^{۱۹}Group Preserving Scheme

^{۲۰}Lie group shooting method

^{۲۱}Lie Symmetry Group Preserving Scheme

شامل تقارنی باشد. اغلب این رده از روش‌های تفاضلی که خواص گروه تقارنی را نیز دارا می‌باشند را روش‌های انتگرال‌گیری عددی هندسی می‌گویند.

طرح حافظ گروه اولین بار در سال ۲۰۰۱ توسط لیو^{۲۲} در مقاله [۹۳] برای بررسی دستگاه‌های دینامیکی معرفی گردید. سپس روش تیراندازی خطی را برای مسائل مقدار مرزی گسترش داد. برخی از مقالات موجود در این زمینه عبارتند از [۱، ۲، ۳۷، ۳۸، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰].

در این رساله، ابتدا در فصل یک به تعاریف مقدماتی و مفاهیم مورد استفاده در رساله می‌پردازیم و طرز استفاده از گروه‌ها و جبرهای لی در فصل دوم مورد بحث قرار خواهد گرفت. فصل سوم رساله نتایج استفاده از روش تیراندازی گروه لی را برای حل معادله‌ی براتو نشان می‌دهد. نتایج به‌دست آمده در این فصل حاکی از آن است که روش تیراندازی گروه لی خطای کمتری نسبت به بقیه‌ی روش‌های به‌کار رفته در مقالات دارد. در فصل چهارم رساله، معادله‌ی بدوضع لاپلاس با استفاده از یک روش عددی به‌نام طرح حافظ گروه حل شده و پایداری این روش مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که جواب‌های عددی منطبق بر جواب تحلیلی می‌باشد. از آنالیز گروه لی برای حل تحلیلی معادله اصلاح شده تعمیم یافته واختنکو در فصل پنجم استفاده شده است. همچنین یک روش ترکیبی به‌نام *LSGPS* برای استفاده در مواقعی که آنالیز گروه لی جواب نمی‌دهد، معرفی می‌شود. در نهایت در فصل ششم رساله تقارنی‌های غیر کلاسیک معادلات واکنش-انتشار به وسیله‌ی روشی به‌نام معادلات وراثتی که توسط پروفیسور نوچی معرفی شده، مورد بحث قرار گرفته و جواب‌های تحلیلی این رده از معادلات به دست آورده خواهد شد.

مقالات مستخرج از رساله، چهار مقاله‌ی زیر است:

1- S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, C.-S. Liu, The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 16 (2011) 4238-4249.

2- S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, Group preserving scheme for the Cauchy problem of the Laplace equation, Engineering Analysis with Boundary Elements 35 (2011) 1003-1009.

^{۲۲}Chein-Shan Liu

3- M.S. Hashemi, M.C. Nucci, S. Abbasbandy, Group analysis of the modified generalized Vakhnenko equation, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 18 (2013) 867–877.

4- M.S. Hashemi, M.C. Nucci, Nonclassical symmetries for a class of reaction-diffusion equations: the method of heir-equations, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, Accepted for publication.

فصل ۱

پیشینه‌ی پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای فصل‌های بعدی را بیان خواهیم نمود. در ابتدا به معرفی گروه، منیفلد^۱، مفاهیم میدان برداری و منیفلد دیفرانسیل پذیر پرداخته و سپس گروه و جبر لی را تعریف می‌کنیم. (برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۱۴۲] مراجعه شود.)

۲.۱ منیفلد

تعریف ۱.۲.۱. منیفلد m -بعدی (شکل ۱.۱) مجموعه‌ای مانند M است همراه با خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های شمارایی مانند $U_\alpha \subset M$ به نام نمودارهای مختص^۲ و توابع یک به یکی مانند $\chi_\alpha: U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ به روی زیر مجموعه‌های باز همبند $V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ به نام نگاشت‌های مختص موضعی^۳ که در شرایط زیر صدق می‌کند:

(آ) نمودارهای مختص M را بپوشاند:

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = M,$$

(ب) روی اشتراک هر جفت از نمودارهای مختص $U_\alpha \cap U_\beta$ نگاشت ترکیب

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}: \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

یک تابع هموار بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر باشد و

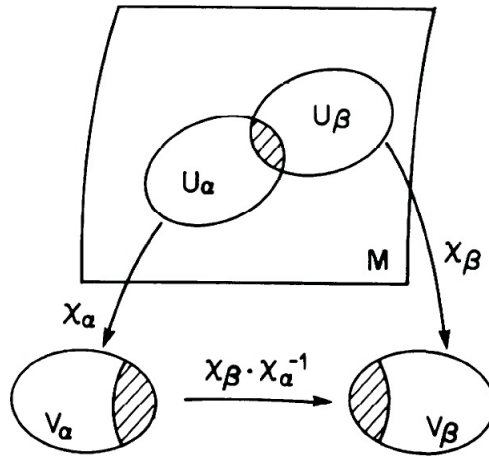
(ج) اگر $x \in U_\alpha$ و $\tilde{x} \in U_\beta$ نقاط جدا از هم M باشند آنگاه زیر مجموعه‌های باز $W \subset V_\alpha$ و $\tilde{W} \subset V_\beta$ وجود دارند با $\chi_\alpha(x) \in W$ و $\chi_\beta(\tilde{x}) \in \tilde{W}$ به‌طوری که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\chi_\alpha^{-1}(W) \cap \chi_\beta^{-1}(\tilde{W}) = \emptyset.$$

^۱Manifold

^۲Coordinate charts

^۳Local coordinate maps



شکل ۱.۱: نمودارهای مختص روی منیفلد

نمودارهای مختص $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ برای منیفلد M یک ساختار توپولوژیکی القاء می‌کنند. عمدتاً ما برای هر زیر مجموعه‌ی باز $W \subset V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ نیاز داریم، که $\chi_\alpha^{-1}(W)$ زیر مجموعه‌ی بازی از M باشد. این مجموعه‌ها پایه برای فضای توپولوژیکی روی M محسوب می‌شوند. بنابراین $U \subset M$ یک مجموعه‌ی باز است اگر و تنها اگر برای هر $x \in U$ یک همسایگی از x وجود داشته باشد که شامل در U باشد. بنابراین $x \in \chi_\alpha^{-1}(W) \subset U$ که در آن $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ ، یک نمودار مختص شامل x است و W زیر مجموعه‌ی بازی از V_α است.

تعریف ۲.۲.۱. سومین نیاز اساسی در تعریف منیفلد اصل موضوع جداسازی هاسدورف^۴ است: اگر $x \neq \tilde{x}$ نقاطی در M باشند آنگاه مجموعه‌های باز U شامل x و $\tilde{U}$ شامل $\tilde{x}$ وجود دارند به‌طوری که $U \cap \tilde{U} = \emptyset$.

مثال ۳.۲.۱. ساده‌ترین منیفلد m -بعدی، فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ است و تنها یک نمودار موضعی $U = \mathbb{R}^m$ ، با نگاشت مختص موضعی داده شده به‌وسیله‌ی $\chi = I : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ وجود دارد. در حالت کلی‌تر هر زیر مجموعه باز $U \subset \mathbb{R}^m$ یک منیفلد m -بعدی، یک نمودار مختص منفرد، داده شده به‌وسیله خود U است.

^۴Hausdorff

۱.۲.۱ نگاشت‌های بین منیفلدها

اگر M و N منیفلدهای همواری باشند، نگاشت $F : M \rightarrow N$ هموار گفته می‌شود اگر برای هر نمودار مختص $\chi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی M و هر نمودار $\tilde{\chi}_\beta : \tilde{U}_\beta \rightarrow \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N ، نگاشت ترکیبی

$$\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

یک نگاشت هموار باشد. به عبارت دیگر یک نگاشت هموار به فرم $y = F(x)$ است که در آن F یک تابع همواری روی زیر مجموعه باز داده شده مختصات موضعی x روی M و y روی N است.

۲.۲.۱ گروه‌های لی

در نگاه اول، گروه‌های لی ترکیبی غیر عادی از مفهوم جبری گروه‌ها و مفهوم هندسه-دیفرانسیل منیفلدها می‌باشد. همان گونه که خواهیم دید این ترکیب جبری و حسابان، منجر به ابزاری قدرتمند برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل خواهد شد. ابتدای بحث را با تعریفی از گروه مجرد شروع می‌کنیم.

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه G همراه با عمل گروه که معمولاً ضرب نامیده می‌شود، یک گروه است هرگاه برای هر دو عضو g و h از G حاصل $g.h$ نیز عضوی از G باشد. عمل گروه نیاز دارد که در سه شرط زیر صدق کند:

۱. شرکت پذیری: اگر g, h و k عضو G باشند، آنگاه

$$g.(h.k) = (g.h).k.$$

۲. عضو همانی: عضوی مانند e در G وجود داشته باشد به طوری که برای هر $g \in G$ داشته باشیم:

$$e.g = g = g.e.$$

۳. عضو معکوس: برای هر $g \in G$ یک عضو معکوس g^{-1} وجود داشته باشد به طوری که

$$g.g^{-1} = e = g^{-1}.g.$$

تعریف ۵.۲.۱. یک گروه لی، منیفلدی است که خاصیت گروه را نیز دارا می‌باشد.

تعریف ۶.۲.۱. گروه لی r -پارامتری گروهی مانند G است، به طوری که شامل ساختار یک منیفلد هموار r -بعدی باشد و همچنین هر دو عمل گروه

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = g.h, \quad g, h \in G,$$

و

$$i : G \rightarrow G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G,$$

نگاشت‌های هموار بین منیفلدها باشند.

۳.۲.۱ گروه‌های لی موضعی

تعریف ۷.۲.۱. یک گروه لی موضعی r -پارامتری شامل زیرمجموعه‌های باز همبند $V_0 \subset V \subset \mathbb{R}^r$ و مبدأ 0 و نگاشت‌های هموار

$$m : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^r,$$

که معرف عمل گروه است و

$$i : V_0 \rightarrow V,$$

که معرف عمل وارون گروه است و با خصوصیات زیر می‌باشند:

۱. شرکت‌پذیری: اگر به ازای $x, y, z \in V$ و همچنین $m(x, y), m(y, z) \in V$ داشته باشیم

$$m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z).$$

۲. عضو همانی: برای هر $x \in V$

$$m(0, x) = x = m(x, 0).$$

۳. عضو معکوس: برای هر $x \in V_0$

$$m(x, i(x)) = 0 = m(i(x), x).$$

۴.۲.۱ میدان‌های برداری

یکی از ابزارهای اساسی در نظریه و تبدیلات گروه لی، تبدیلات بی‌نهایت کوچک است. به این منظور ابتدا مفاهیم میدان‌های برداری را روی یک منیفلد توسعه می‌دهیم. ابتدای بحث را با بردارهای مماس شروع می‌کنیم. فرض کنیم C یک خم هموار روی یک منیفلد باشد ابتدا C را به وسیله‌ی نگاشت $\phi: I \rightarrow M$ پارامتری می‌کنیم که I زیر بازه‌ای از $\mathbb{R}$ است. در مختصات موضعی $x = (x^1, \dots, x^m)$ ، C به وسیله‌ی m تابع هموار $\phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ و با مقادیر حقیقی ε نشان داده می‌شود. در هر نقطه $x = \phi(\varepsilon)$ از منحنی C بردار مماس وجود دارد و عمدتاً مشتق آن به شکل $\phi'(\varepsilon) = d\phi/d\varepsilon = (\phi'^1(\varepsilon), \dots, \phi'^m(\varepsilon))$ نشان داده می‌شود. به منظور تمایز بین بردارهای مماس و عبارت‌های مختصات موضعی در یک نقطه روی منیفلد علامت

$$v|_x = \phi'(\varepsilon) = \phi'^1(\varepsilon)\partial_{x^1} + \dots + \phi'^m(\varepsilon)\partial_{x^m} \quad (۱.۱)$$

را برای بردار مماس روی C در نقطه $x = \phi(\varepsilon)$ به کار می‌بریم.

مثال ۸.۲.۱. مارپیچ

$$\phi(\varepsilon) = (\cos \varepsilon, \sin \varepsilon, \varepsilon)$$

در $\mathbb{R}^3$ ، با مختصات (x, y, z) دارای بردار مماس

$$\phi'(\varepsilon) = -\sin \varepsilon \partial_x + \cos \varepsilon \partial_y + \partial_z$$

در نقطه‌ی $(x, y, z) = \phi(\varepsilon) = (\cos \varepsilon, \sin \varepsilon, \varepsilon)$ است.

دو منحنی $C = \{\phi(\varepsilon)\}$ و $\tilde{C} = \{\tilde{\phi}(\theta)\}$ گذرنده از نقطه‌ی

$$x = \phi(\varepsilon^*) = \tilde{\phi}(\theta^*)$$

به ازای ε^*, θ^* بردار مماس یکسان دارند اگر و تنها اگر مشتقاتشان در همان نقاط با هم یکسان باشند یعنی:

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon}(\varepsilon^*) = \frac{d\tilde{\phi}}{d\theta}(\theta^*). \quad (۲.۱)$$

به وضوح این مفاهیم مستقل از دستگاه مختصات موضعی استفاده شده در نزدیک x است. به علاوه اگر $y = \psi(x)$ و $x = (x^1, \dots, x^m)$ باشد و $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^1(\varepsilon), \dots, \phi^m(\varepsilon))$ مختصات موضعی بر حسب دیفیئومورفیسم^۵ باشد، آنگاه $y = \psi(\phi(\varepsilon))$ فرمول مختصات موضعی برای منحنی بر حسب مختصات y است. بردار مماس $v|_x = \phi'(\varepsilon)$ دارای فرمول (۱.۱) در مختصات x است و در مختصات y به شکل زیر است:

$$v|_{y=\psi(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{d}{d\varepsilon} \psi^j(\phi(\varepsilon)) \partial_{y^j} = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \frac{\partial \psi^j}{\partial x^k}(\phi(\varepsilon)) \frac{d\phi^k}{d\varepsilon} \partial_{y^j}. \quad (۳.۱)$$

تعریف ۹.۲.۱. مجموعه همه‌ی بردارهای مماس گذرنده در نقطه‌ای مانند x از M را فضای مماس M در نقطه x می‌نامیم و با نماد $TM|_x$ نشان می‌دهیم.

اگر M یک منیفلد m -بعدی باشد، آنگاه $TM|_x$ یک فضای برداری m -بعدی خواهد بود که $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}\}$ تشکیل پایه برای $TM|_x$ در مختصات موضعی داده شده می‌دهد. همچنین مجموعه‌ی تمام فضاهای مماس متناظر با تمام نقاط x در M را کلاف مماس^۶ M می‌گوئیم و با نماد

$$TM = \bigcup_{x \in M} TM|_x$$

نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. منحنی انتگرال^۷ میدان برداری v ، یک منحنی هموار پارامتردار مانند $x = \phi(\varepsilon)$ است که بردار مماس در هر نقطه از آن با مقدار v در همان نقطه برابر است، یعنی $\phi'(\varepsilon) = v|_{\phi(\varepsilon)}$.

وقتی صحبت از منحنی انتگرال ماکزیمال می‌شود، یعنی این‌که منحنی انتگرالی بزرگتر از این منحنی انتگرال گذرنده از نقطه‌ی $x_0 = \phi(0) \in M$ وجود نداشته باشد.

^۵Diffeomorphism

^۶Tangent Bundle

^۷Integral curve

۵.۲.۱ شار

اگر v یک میدان برداری باشد، منحنی انتگرال ماکزیمال گذرا از نقطه‌ی x در M را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را شار^۱ تولید شده به وسیله‌ی v می‌نامیم. برای هر $x \in M$ و ε در برخی از بازه‌های I_x شامل مبدأ، $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان دهنده نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرا از نقطه‌ی x در M خواهد بود و هر شار یک میدان برداری دارای خصوصیات اساسی زیر است:

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \quad \forall x \in M, \quad \forall \delta, \varepsilon \in \mathbb{R},$$

به‌طوری که هر دو طرف معادله تعریف شده باشد و

$$\Psi(0, x) = x,$$

و

$$\frac{d}{d\varepsilon} \Psi(\varepsilon, x) = v|_{\psi(\varepsilon, x)}, \quad (۴.۱)$$

به ازای هر ε که تعریف شده باشد. مقایسه خصوصیات بالا نشان می‌دهد که شار تولید شده به وسیله‌ی یک میدان برداری همان عمل گروه موضعی از گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M است، که اغلب تبدیلات گروه یک پارامتری نامیده می‌شود. میدان برداری v مولد بی‌نهایت کوچک نامیده می‌شود زیرا طبق قضیه تیلر در مختصات موضعی

$$\psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon \xi(x) + O(\varepsilon^2),$$

که در آن $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$ ضرایب مولد بی‌نهایت کوچک v هستند. مدارهای حاصل از عمل گروه یک پارامتری، منحنی‌های انتگرال ماکزیمال حاصل از میدان برداری v هستند. بر عکس اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ یک گروه یک پارامتری از تبدیلات باشد که روی M اثر کند، آنگاه مولد بی‌نهایت کوچک آن از جای‌گذاری $\varepsilon = 0$ در عبارت (۴.۱) به‌صورت

$$v|_x = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \Psi(\varepsilon, x), \quad (۵.۱)$$

^۱Flow

به دست می‌آید. محاسبه‌ی شار یا گروه یک پارامتری تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری داده شده مانند v ، به میدان‌های برداری نمایی اشاره می‌کند، که با نگاشت

$$\exp(\varepsilon v) \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

نمایش داده می‌شود و این نگاشت نمایی به ازای هر $x \in M$ دارای سه خصوصیت زیر است:

$$\exp[(\delta + \varepsilon)v]x = \exp(\delta v) \exp(\varepsilon v)x,$$

و

$$\exp(0v)x = x,$$

و

$$\frac{d}{d\varepsilon}[\exp(\varepsilon v)x] = v|_{\exp(\varepsilon v)x}.$$

مثال ۱۱.۲.۱. به سه حالت زیر از میدان‌های برداری و شار توجه نمایید:

۱. فرض کنیم $M = \mathbb{R}$ با مختصات x و میدان برداری $v = \frac{\partial}{\partial x} \equiv \partial_x$ باشد آنگاه

$$\exp(\varepsilon v)x = \exp(\varepsilon \partial_x)x = x + \varepsilon,$$

که در همه جا قابل تعریف است. همچنین برای میدان برداری $x\partial_x$ معمولاً تابع نمایی را به صورت

$$\exp(\varepsilon x\partial_x)x = e^\varepsilon x,$$

به دست می‌آوریم. زیرا باید جوابی از معادله دیفرانسیل معمولی $\dot{x} = x$ با مقدار آغازین x در $\varepsilon = 0$ باشد.

۲. در حالت $\mathbb{R}^m$ یک میدان برداری ثابت $v_a = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ، $a = (a^1, \dots, a^m)$ تابع نمایی این گروه از تبدیلات به شکل

$$\exp(\varepsilon v_a)x = x + \varepsilon a, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

در جهت a خواهد بود. به طور مشابه، یک میدان برداری خطی

$$v_A = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x^j \right) \partial_{x^i},$$

که در آن $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times m$ از ثابت‌ها است، دارای شار

$$\exp(\varepsilon v_A)x = e^{\varepsilon A}x,$$

است که در آن $e^{\varepsilon A} = I + \varepsilon A + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^2 + \dots$ ماتریس معمولی نمایی است.

۳. گروه دوران‌ها روی صفحه

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon),$$

را در نظر بگیرید که مولد بی‌نهایت کوچک آن یک میدان برداری $v = \xi(x, y)\partial x + \eta(x, y)\partial y$ است که طبق (۵.۱) داریم:

$$\xi(x, y) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon) = -y,$$

$$\eta(x, y) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon) = x,$$

بنابراین $v = -y\partial x + x\partial y$ مولد بی‌نهایت کوچک است. به علاوه، گروه تبدیلات بالا سازگار با جواب‌های دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = -y, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = x,$$

است.

۳.۱ ناوردائی

تعریف ۱.۳.۱. تابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر $F(x)$ تابع ناوردای گروه تبدیلات

$$x^* = X(x; \varepsilon), \quad (۶.۱)$$

است اگر و تنها اگر برای هر گروه تبدیلات داشته باشیم

$$F(x^*) = F(x).$$

اگر $F(x)$ تابع ناوردای (۶.۱) باشد آنگاه $F(x)$ یک ناوردای گروه تبدیلات نامیده می‌شود و گوئیم $F(x)$ ناوردا تحت آن گروه است.

قضیه ۲.۳.۱. تابع $F(x)$ ناوردا تحت تبدیلات گروه لی (۶.۱) می‌باشد اگر و تنها اگر $XF(x) = 0$.

قضیه ۳.۳.۱. رابطه‌ی $F(x^*) = F(x) + \varepsilon$ برای تبدیلات گروه لی (۶.۱) برقرار است اگر و تنها اگر $XF(x) = 1$ باشد.

توجه شود که در دو قضیه‌ی فوق X نماد مولد بی‌نهایت کوچک از گروه تبدیلات است.

تعریف ۴.۳.۱. رویه‌ی $F(x) = 0$ ، ناوردای تحت تبدیلات گروه لی یک پارامتری (۶.۱) است اگر و تنها اگر $F(x^*)|_{F(x)=0} = 0$.

تعریف ۵.۳.۱. منحنی $F(x, y) = 0$ یک منحنی ناوردای برای تبدیلات گروه لی یک پارامتری

$$x^* = X(x, y; \varepsilon) = x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \quad (۷.۱)$$

و

$$y^* = Y(x, y; \varepsilon) = y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \quad (۸.۱)$$

با مولد بی‌نهایت کوچک

$$X = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y, \quad (۹.۱)$$

است، اگر و تنها اگر $F(x^*, y^*)|_{F(x, y)=0} = 0$.

قضیه ۶.۳.۱. (۱) یک رویه به فرم $F(x) = x_n - f(x_1, \dots, x_{n-1})$ رویه‌ی ناوردای گروه تبدیلات یک پارامتری (۶.۱) است اگر و تنها اگر $XF(x)|_{F(x)=0} = 0$.

(۲) منحنی به فرم $F(x, y) = y - f(x) = 0$ منحنی ناوردای برای (۷.۱) و (۸.۱) است، اگر و تنها اگر

$$XF(x, y) = \eta(x, y) - \xi(x, y) f'(x) = 0$$

وقتی $F(x, y) = y - f(x) = 0$ ، یعنی اگر و تنها اگر

$$\eta(x, f(x)) - \xi(x, f(x)) f'(x) = 0. \quad (۱۰.۱)$$

تعریف ۷.۳.۱. نقطه x یک نقطه ناوردا برای گروه تبدیلات لی (۶.۱) است اگر و تنها اگر تحت رابطه (۶.۱) داشته باشیم $x^* \equiv x$.

قضیه ۸.۳.۱. نقطه x یک نقطه ناوردا برای گروه لی تبدیلات (۶.۱) است اگر و تنها اگر $\xi(x) = 0$.

گزاره ۹.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه همبند از تبدیلاتی که بر روی منیفلد M عمل می‌کنند باشد. یک تابع هموار با مقادیر حقیقی $\zeta : M \rightarrow \mathbb{R}$ تابع ناوردا برای G است اگر و تنها اگر به ازای هر مولد بی‌نهایت کوچک v از G داشته باشیم:

$$v(\zeta) = 0, \quad \zeta \in M. \quad (11.1)$$

مثال ۱۰.۳.۱. فرض کنیم G_c گروه یک پارامتری از انتقال‌ها به صورت

$$(x, y) \mapsto (x + c\epsilon, y + \epsilon), \quad \epsilon \in \mathbb{R} \quad (12.1)$$

باشد که در آن c یک ثابت است. در این صورت

$$\zeta(x, y) = x - cy \quad (13.1)$$

یک ناوردا برای G_c است، زیرا

$$\zeta(x + c\epsilon, y + \epsilon) = \zeta(x, y), \quad \epsilon \in \mathbb{R}. \quad (14.1)$$

مولد بی‌نهایت کوچک برای G_c به صورت $v = c\partial_x + \partial_y$ است. همچنین داریم:

$$v(x - cy) = (c\partial_x + \partial_y)(x - cy) = c - c = 0, \quad (15.1)$$

بنابراین در معیار بی‌نهایت کوچک بودن صدق می‌کند.

قضیه ۱۱.۳.۱. فرض کنیم G یک گروه لی موضعی همبند از تبدیلاتی که بر روی منیفلد m -بعدی M

عمل می‌کند باشد. اگر $F : M \rightarrow \mathbb{R}^l$ ، $l \leq m$ ، یک دستگاه معادلات جبری

$$F_s(x) = 0, \quad s = 1, \dots, l, \quad (۱۶.۱)$$

را تعریف کند به طوری که رتبه‌ی کامل باشد آنگاه G گروه تقارنی است اگر و تنها اگر برای هر مولد بی‌نهایت کوچک V از G داشته باشیم:

$$V[F_s(x)] = 0, \quad s = 1, \dots, l. \quad (۱۷.۱)$$

حال نشان می‌دهیم چگونه می‌توان ناوردهای یک گروه با عمل‌گر داده شده را پیدا کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم G گروه یک پارامتری از تبدیلاتی که بر روی M عمل می‌کند باشد، که توسط مولد بی‌نهایت کوچک

$$v = \xi^1(x) \partial_{x^1} + \dots + \xi^m(x) \partial_{x^m} \quad (۱۸.۱)$$

در مختصات موضعی داده شده بیان می‌شود. ناوردهای موضعی $\xi(x)$ از G ، جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه اول همگن و خطی زیر است:

$$v(\zeta) = \xi^1(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^1} + \dots + \xi^m(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^m} = 0, \quad (۱۹.۱)$$

اگر $v|_x \neq 0$ ، آنگاه $m-1$ ناوردهای مستقل تابعی وجود دارد. از این رو $m-1$ جواب تابعی مستقل از معادله دیفرانسیل (۱۹.۱) در یک همسایگی از x_0 وجود دارد. نظریه‌ی کلاسیک این دسته از معادلات نشان می‌دهد که جواب عمومی (۱۹.۱) با انتگرال‌گیری از دستگاه معادلات مشخصه معادلات دیفرانسیل معمولی به دست می‌آید، که به صورت زیر است:

$$\frac{dx^1}{\xi^1(x)} = \frac{dx^2}{\xi^2(x)} = \dots = \frac{dx^m}{\xi^m(x)}. \quad (۲۰.۱)$$

جواب عمومی (۲۰.۱) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\zeta^1(x^1, \dots, x^m) = c_1, \dots, \zeta^{m-1}(x^1, \dots, x^m) = c_{m-1}, \quad (۲۱.۱)$$

که $c_1, \dots, c_{m-1}$ ثابت‌های انتگرال‌گیری و $\zeta^i(x)$ ها توابع مستقل از c_j ها هستند.

مثال ۱۲.۳.۱. (۱) گروه دورانی ماتریس‌ها با دترمینان ۱ را در نظر می‌گیریم، که دارای مولد بی‌نهایت

$$\text{کوچک } v = -y\partial_x + x\partial_y \text{ با دستگاه مشخصه‌ی}$$

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x},$$

است. این معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به راحتی قابل حل می‌باشد و جواب‌های آن به صورت $x^2 + y^2 = c$ هستند که c یک ثابت دلخواه است. بنابراین $\zeta(x, y) = x^2 + y^2$ ، تنها ناوردای مستقل از گروه دورانی است.

(۲) میدان برداری

$$v = -y\partial_x + x\partial_y + (1 + z^2)\partial_z$$

را روی $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. با توجه به این که $v \neq 0$ است، بنابراین می‌توانیم دو ناوردای مستقل از گروه‌های یک پارامتری تولید شده به وسیله v را در یک همسایگی از هر نقطه در $\mathbb{R}^3$ پیدا کنیم. دستگاه مشخصه این حالت

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1 + z^2},$$

است که دو معادله اول در بخش (۱) حل شد. بنابراین یکی از ناوردها $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ است و برای پیدا کردن ناوردهای دیگر، با توجه به این که r یک ناوردا برای همه جواب‌های دستگاه مشخصه است، بنابراین می‌توانیم قبل از فرآیند انتگرال‌گیری x را با $\sqrt{r^2 - y^2}$ جایگزین کنیم، داریم

$$\frac{dy}{\sqrt{r^2 - y^2}} = \frac{dz}{1 + z^2},$$

که دارای جواب

$$\arcsin \frac{y}{r} = \arctan z + k,$$

برای k ثابت و دلخواه است. بنابراین دومین ناوردای دلخواه برای v به شکل زیر

$$\arctan z - \arcsin \frac{y}{r} = \arctan z - \arctan \frac{y}{x},$$

است. اگر عبارت بالا را ساده‌تر کنیم خواهیم داشت

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \zeta = \frac{xz - y}{yz + x}.$$

بنابراین یک مجموعه کامل از ناورداهای مستقل تابعی را به دست می‌آوریم. در نتیجه هر تابعی از r و ζ یک ناوردا است، به عنوان مثال

$$\tilde{\zeta} = \frac{r}{\sqrt{1+\zeta^2}} = \frac{x+yz}{\sqrt{1+\zeta^2}},$$

همچنین یک ناوردا است.

۴.۱ تطویل تبدیلات

قبل از اقدام برای به دست آوردن تقارنی‌های معادلات دیفرانسیل به وسیله‌ی روشی مشابه روش‌های بی‌نهایت کوچک برای معادلات جبری، نیازمند تعویض مفهوم دستگاه معادلات دیفرانسیل با اشیاء هندسی دیگری که با مساوی صفر قرار دادن توابع خاصی تولید می‌شوند، هستیم.

برای این کار نیاز به تطویل^۹ فضای پایه‌ای $X \times U$ (نمایان‌گر متغیرهای مستقل و وابسته‌ای که در این فضا مورد توجه هستند) به فضایی که مشتقات جزئی شامل در دستگاه را نیز نشان می‌دهد، داریم. برای یک تابع هموار با مقادیر حقیقی $f(x) = f(x^1, \dots, x^p)$ از متغیرهای مستقل، به تعداد

$$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$$

k -امین مشتق جزئی از f وجود دارد. همچنین علامت

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}}$$

را برای این مشتقات به کار می‌بریم. در این علامت $J = (j_1, \dots, j_k)$ یک k -تایی نامرتب از اعداد صحیح است، به طوری که $1 \leq j_k \leq p$. در حالت کلی اگر $f: X \rightarrow U$ تابع همواری از $X \simeq \mathbb{R}^p$ به $U \simeq \mathbb{R}^q$ باشد، یعنی $u = f(x) = (f^1(x), \dots, f^q(x))$ آنگاه به $q \cdot p_k$ تا $u_J^\alpha = \partial_\alpha f^\alpha(x)$ نیاز داریم که تمام k -امین مشتق از مولفه‌های f در نقطه x را نمایش دهیم.

مثال ۱.۴.۱. فرض کنیم $p = 2$ و $q = 1$. آنگاه $X \simeq \mathbb{R}^2$ دارای مختصات $(x, y) = (x^1, x^2)$ و $U \simeq \mathbb{R}$ دارای تنها مختص u است. فضای U_1 ایزومورفیسم^{۱۰} با $\mathbb{R}^2$ با مختصات (u_x, u_y) است که

^۹Prolongation

^{۱۰}Isomorphism

این نمایش نشان دهنده همه مشتقات مرتبه اول u نسبت به x و y است. به طور مشابه، $U_2 \simeq \mathbb{R}^3$ دارای مختصات (u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) که نشان دهنده همه مشتقات مرتبه دوم u است. سرانجام فضای $U^{(2)} = U \times U_1 \times U_2 \simeq \mathbb{R}^6$ ، با مختصات $(u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ ، $u^{(2)} = (u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ که نمایانگر همه مشتقات u نسبت به x و y حداکثر از مرتبه دو است.

برای تابع هموار $u = f(x)$ داده شده، یعنی $f: X \rightarrow U$ ، تابع القاء شده $u^{(n)} = pr^{(n)}f(x)$ وجود دارد که n -امین تطویل از f نامیده می‌شود و به وسیله‌ی معادلات $u_J^\alpha = \partial_J f^\alpha(x)$ تعریف می‌شود. بنابراین $pr^{(n)}f$ تابعی از X به فضای $U^{(n)}$ است و برای هر $x \in X$ ، $pr^{(n)}f(x)$ برداری است با $q \cdot p^{(n)}$ درایه که بیانگر مقادیر f و همه مشتقات تا مرتبه n در نقطه x است. برای مثال در حالت $p = 2$ و $q = 1$ که در مثال بالا در مورد آن بحث شد، برای $u = f(x, y)$ داده شده، دومین تطویل $u^{(2)} = pr^{(2)}f(x, y)$ به وسیله

$$(u; u_x, u_y; u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = (f; \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})$$

در نقطه (x, y) محاسبه می‌شود.

فضای کلی $X \times U^{(n)}$ که مختصاتش نشان دهنده‌ی متغیرهای مستقل، متغیرهای وابسته و مشتقات متغیرهای وابسته تا مرتبه n است، n -امین مرتبه فضای جت از فضای زیربنای $X \times U$ نامیده می‌شود. اغلب ما علاقه‌مند به تعریف معادلات دیفرانسیل بر روی $X \times U$ نیستیم، اما تنها با تعریف بر روی برخی از زیر مجموعه‌های $M \subset X \times U$ به نتایج خیلی بهتر می‌رسیم. در این مورد، ما فضای n -جت^{۱۱}

$$M^{(n)} \equiv M \times U_1 \times \cdots \times U_n$$

را روی M تعریف می‌کنیم. اگر $u = f(x)$ تابعی باشد که نمودارش در M قرار داشته باشد آنگاه n -امین تطویل $pr^{(n)}f(x)$ تابعی است که نمودارش در فضای n -جت از $M^{(n)}$ قرار دارد.

تعریف ۲.۴.۱. فرض کنیم $M \subset X \times U$ باز و V میدان برداری روی M متناظر با گروه یک پارامتری $exp(\varepsilon V)$ باشد، آنگاه n -امین تطویل V با $pr^{(n)}V$ نشان داده می‌شود و بیانگر یک میدان برداری روی فضای جت از $M^{(n)}$ و تعریفی برای مولدهای بی‌نهایت کوچک متناظر با تطویل گروه یک

^{۱۱}n-Jet

پارامتری $pr^{(n)}[exp(\varepsilon V)]$ خواهد بود، به عبارت دیگر به ازای هر $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$ داریم

$$pr^{(n)}V|_{(x, u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} pr^{(n)}[exp(\varepsilon V)](x, u^{(n)}). \quad (22.1)$$

با توجه به این که مختصات $(x, u^{(n)})$ روی $M^{(n)}$ شامل متغیرهای مستقل $(x^1, \dots, x^p)$ و همه مشتقات u_J^α متغیرهای وابسته تا مرتبه n است، یک میدان برداری روی $M^{(n)}$ در حالت کلی فرم زیر را معرفی می‌کند:

$$V^* = \sum_{i=1}^p \xi^i \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J \partial_{u_J^\alpha}, \quad (23.1)$$

به طوری که $0 \leq \#J \leq n$ و ضرایب ξ^i, ϕ_α^J ، قابلیت وابسته بودن به همه‌ی متغیرهای $(x, u^{(n)})$ را دارند. در این حالت V^* تطویل $pr^{(n)}V$ از میدان برداری

$$V = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \partial_{u^\alpha}$$

است و ضرایب ξ^i, ϕ_α^J از $V^* = pr^{(n)}V$ به وسیله‌ی ضرایب ξ^i و ϕ_α خود V تعیین خواهند شد. تطویل عمل گروه $pr^{(n)}[exp(\varepsilon V)]$ زمانی که فقط به متغیرهای مرتبه‌ی صفر x و u از $M^{(0)} = M$ محدود شده، سازگار با عمل گروه‌های معمولی $exp(\varepsilon V)$ روی M خواهد بود. بنابراین ضرایب ξ^i و $\phi_\alpha^\circ = \phi_\alpha$ از $V^* = pr^{(n)}V$ باید سازگار با ضرایب متناظر ξ^i و ϕ_α از خود V باشد. بنابراین

$$pr^{(n)}V = \sum_{i=1}^p \xi^i \partial_{x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J \partial_{u_J^\alpha}$$

به طوری که $\xi^i, \phi_\alpha^\circ = \phi_\alpha$ به طور مستقیم از V به دست می‌آیند. در زیر به قضیه‌ای پر اهمیت خواهیم پرداخت که در واقع نحوه‌ی به دست آوردن تقارنی‌های لی را مشخص می‌کند.

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنید

$$\Delta_s(x, u^{(n)}) = 0, \quad s = 1, \dots, l, \quad (24.1)$$

دستگاهی از معادلات دیفرانسیل رتبه‌ی کامل تعریف شده روی $M \subset X \times U$ باشد. اگر G یک گروه موضعی از تبدیلات عمل کننده روی M باشد و

$$pr^{(n)}V[\Delta_s(x, u^{(n)})] = 0, \quad s = 1, \dots, l,$$

به ازای (۲۴.۱) و هر مولد بی‌نهایت کوچک V از G برقرار باشد، آنگاه G گروه تقارنی دستگاه خواهد بود.

حال به شکل کلی تطویل‌ها می‌پردازیم.

تطویل گروه‌های یک پارامتری از تبدیلاتی که فقط بر روی متغیرهای مستقل در دستگاه معادلات دیفرانسیل عمل می‌کنند را در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر میدان برداری

$$V = \sum_{i=1}^p \xi^i \partial_{x^i}$$

را در فضای $M \subset X \times U$ در نظر می‌گیریم. گروه تبدیلات $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon V)$ به شکل

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\Xi_\varepsilon(x), u)$$

وجود دارند، که مولفه‌های $\tilde{x}^i = \Xi_\varepsilon^i(x)$ در رابطه‌ی

$$\left. \frac{d\Xi_\varepsilon^i(x)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \xi^i(x) \quad (25.1)$$

صدق می‌کنند. اولین فضای جت، $M^{(1)}$ دارای مختصات $(x, u^{(1)}) = (x^i, u, u_j)$ به‌طوری‌که $u_j \equiv \frac{\partial u}{\partial x^j}$ است.

در این قسمت مروری گذرا بر مراحل پیدایش تطویل عمل گروه خواهیم داشت:

اگر $(x, u^{(1)})$ نقطه‌ی دلخواهی از $M^{(1)}$ و $u = f(x)$ تابعی دلخواه با $u_j = \frac{\partial f}{\partial x^j}$ و $j = 1, \dots, p$ باشد آنگاه $pr^{(1)}g_\varepsilon \cdot (x, u^{(1)}) = (\tilde{x}, \tilde{u}^{(1)})$ به‌طوری‌که $\tilde{x} = \Xi_\varepsilon(x)$ و $\tilde{u} = u$ و $\tilde{u}_j$ ‌ها مشتق تابع تبدیل $\tilde{f}_\varepsilon = g_\varepsilon \cdot f$ می‌باشد، که برابر است با

$$\tilde{u} = \tilde{f}_\varepsilon(\tilde{x}) = f[\Xi_\varepsilon^{-1}(\tilde{x})] = f[\Xi_{-\varepsilon}(\tilde{u})]. \quad (26.1)$$

بنابراین

$$\tilde{u}_j = \frac{\partial \tilde{f}_\varepsilon}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x^k}(\Xi_{-\varepsilon}(\tilde{x})) \cdot \frac{\partial \Xi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\tilde{x}) \quad (27.1)$$

اما $\Xi_{-\varepsilon}(\tilde{x}) = x$ از این رو

$$\tilde{u}_j = \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Xi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Xi_{\varepsilon}(x)) u_k. \quad (28.1)$$

در نتیجه رابطه‌ی آخر بیان‌گر یک فرمول صریح برای تطویل گروه عمل‌گرها بر روی مشتقات مرتبه اول است.

برای به‌دست آوردن مولدهای بی‌نهایت کوچک از $pr^{(1)}g_{\varepsilon}$ باید از رابطه تطویل تبدیلات نسبت به ε و در نقطه $\varepsilon = 0$ دیفرانسیل بگیریم. بنابراین

$$pr^{(1)}v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x) \partial_{x^i} + \sum_{j=1}^p \phi^j(x, u^{(1)}) \partial_{u_j} \quad (29.1)$$

و با استفاده از رابطه‌ی (۲۲.۱) داریم:

$$\phi^j(x, u^{(1)}) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \sum_{k=1}^p \frac{\partial \Xi_{-\varepsilon}^k}{\partial \tilde{x}^j}(\Xi_{\varepsilon}(x)) u_k. \quad (30.1)$$

با توجه به هموار بودن توابع، می‌توان مرتبه مشتق‌گیری را تعویض نمود. با توجه به (۲۵.۱) و این حقیقت که در $\varepsilon = 0$ داریم $\Xi_0(x) = x$ ، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \left[\frac{d \Xi_{-\varepsilon}^k}{d\varepsilon} \right] (\Xi_{\varepsilon}(x)) \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{d \Xi_{-\varepsilon}^k}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right] (x) = - \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x), \quad (31.1)$$

بنابراین

$$\phi^j(x, u, u_x) = - \sum_{k=1}^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j}(x). \quad (32.1)$$

مثال ۴.۴.۱. فرض کنید $p = 2, q = 1$ و میدان برداری

$$v = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y \quad (33.1)$$

روی $X \simeq \mathbb{R}^2$ با مختصات (x, y) باشد. اولین تطویل از v یک میدان برداری به صورت

$$pr^{(1)}v = v + \phi^x \partial_{u_x} + \phi^y \partial_{u_y} \quad (۳۴.۱)$$

است که در آن

$$\phi^x = -\frac{\partial \xi}{\partial x} u_x - \frac{\partial \eta}{\partial x} u_y, \quad \phi^y = -\frac{\partial \xi}{\partial y} u_x - \frac{\partial \eta}{\partial y} u_y. \quad (۳۵.۱)$$

برای مثال، در گروه دورانی

$$(x, y, u) \longmapsto (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon, u) \quad (۳۶.۱)$$

روی X ، مولد بی‌نهایت کوچک به صورت

$$v = -y \partial_x + x \partial_y \quad (۳۷.۱)$$

است. با توجه به $\xi = -y$ و $\eta = x$ ، اولین تطویل v به صورت

$$pr^{(1)}v = -y \partial_x + x \partial_y - u_y \partial_{u_x} + u_x \partial_{u_y} \quad (۳۸.۱)$$

خواهد بود.

۵.۱ کروشه لی

مهمترین عمل روی میدان‌های برداری را می‌توان کروشه لی^{۱۲} یا جابجاگر^{۱۳} آن در نظر گرفت. اگر v و w میدان‌های برداری روی M باشند، آنگاه کروشه‌ی لی آنها $[v, w]$ میدان برداری یکتایی است که در رابطه‌ی $[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f))$ صدق می‌کند که در آن $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ توابع همواری هستند. عمل‌گر کروشه لی دارای خواص زیر نیز هست:

۱. پادمتقارن :

^{۱۲}Lie bracket

^{۱۳}Commutator

$$[v, w] = -[w, v]$$

۲. اتحاد ژاکوبی:

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0$$

۳. دوخطی:

$$[c_1 v_1 + c_2 v_2, w] = c_1 [v_1, w] + c_2 [v_2, w]$$

$$[v, c_1 w_1 + c_2 w_2] = c_1 [v, w_1] + c_2 [v, w_2]$$

همچنین در مختصات موضعی اگر

$$v = \sum_{i=1}^n \xi^i \partial_{x^i}, \quad w = \sum_{i=1}^n \eta^i \partial_{x^i},$$

آنگاه

$$[v, w] = \sum_{i,j} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \partial_{x^i}.$$

مثال ۱.۵.۱. اگر داشته باشیم $v = y \partial_x$ و $w = x^2 \partial_x + xy \partial_y$ آنگاه داریم

$$[v, w] = v(x^2) \partial_x + v(xy) \partial_y - w(y) \partial_x = xy \partial_x + y^2 \partial_y. \quad (39.1)$$

قضیه ۲.۵.۱. (دومین قضیه اساسی لی). گروه لی هر دو مولد بی‌نهایت کوچک یک گروه لی r

-پارامتری نیز یک مولد بی‌نهایت کوچک است، یعنی

$$[X_\alpha, X_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, \dots, r\}$$

که ضرایب ثابت $C_{\alpha\beta}^\gamma$ را ضرایب ساختار می‌نامیم.

تعریف ۳.۵.۱. میدان برداری L از عمل‌گرهای

$$X = \xi(x, y) \partial_x + \eta(x, y) \partial_y,$$

جبر لی نامیده می‌شود اگر تحت گروه‌ی لی بسته باشد، یعنی برای هر $X, Y \in L$ داشته باشیم:

$$[X, Y] \in L.$$

تعریف ۴.۵.۱. زیر جبر $J \subset L$ یک زیر جبر نرمال یا ایده‌آل از L نامیده می‌شود اگر به ازای هر $X \in J, Y \in L$ داشته باشیم:

$$[X, Y] \in J.$$

تعریف ۵.۵.۱. L^q جبر لی حل‌پذیر q بعدی است، اگر زنجیری از زیر جبرهای $L^{(1)} \subset L^{(2)} \subset L^{(3)} \subset \dots \subset L^{(q-1)} \subset L^{(q)} = L^q$

وجود داشته باشد به طوری که $L^{(k)}$ یک جبر لی k بعدی و $L^{(k-1)}$ یک ایده‌آل از $L^{(k)}$ و $k = 1, 2, \dots, q$ باشد.

تعریف ۶.۵.۱. L جبر لی آبلی نامیده می‌شود اگر برای هر $X_\alpha, X_\beta \in L$ داشته باشیم:

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0.$$

قضیه ۷.۵.۱. [۲۸] هر جبر لی آبلی یک جبر لی حل‌پذیر است.

قضیه ۸.۵.۱. [۲۸] هر جبر لی ۲-بعدی حل‌پذیر است.

تعریف ۹.۵.۱. جبر لی L را ساده گوئیم اگر زیر جبر غیر بدیهی یعنی زیر جبری غیر از $\{0\}$ و L نداشته باشد و آن را نیم ساده گوئیم اگر تنها زیر جبر آبلی آن $\{0\}$ باشد.

فصل ۲

آنالیز گروه لی برای حل تحلیلی معادلات
دیفرانسیل

۱.۲ مقدمه

تکنیک‌های ابتکاری زیادی برای به دست آوردن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل وجود دارند، اما اغلب این تکنیک‌ها برای دسته‌ی خاصی از مسائل کاربرد دارند. جالب است بدانیم که اکثر این تکنیک‌ها دارای این ویژگی مشترک هستند که همه‌ی آنها جهت پیدا کردن جواب دقیق مسائل، به دنبال پیدا کردن تقارنی‌های معادلات دیفرانسیل هستند. همان‌طور که در پیشینه‌ی پژوهش ذکر شد، سال‌ها قبل سوفوس لی ریاضی‌دان نروژی بسیاری از عقاید اساسی قبلی روش‌های تقارنی را تعمیم داد که در این فصل به شرح مختصری از کارکردهای آنالیز گروه لی بر روی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی می‌پردازیم.

به‌طور خلاصه تبدیلی تقارنی در نظر گرفته می‌شود اگر در سه شرط زیر صدق کند:

۱. حافظ ساختار باشد.

۲. دیفئورفیسم باشد.

۳. هر چیزی را به خودش بنگارد.

ابتدای این بخش را با یک سوال آغاز می‌کنیم، تقارن معادلات دیفرانسیل معمولی چیست؟ در شروع برای جواب دادن به این سوال، ساده‌ترین معادله دیفرانسیل معمولی را در نظر می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.2)$$

جواب‌های این معادله مجموعه‌ای از خطوط زیر است:

$$y(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

که صفحه (x, y) را می‌پوشاند. به تعبیر هندسی، معادله‌ی (۱.۲) توسط مجموعه همه جواب‌ها نشان داده می‌شود و همچنین هر تقارنی از معادلات دیفرانسیل باید لزوماً مجموعه جواب را به خودش بنگارد. شرط تقارن (۳) نیاز دارد به این که، منحنی‌های مجموعه جواب در صفحه (x, y) از تصویر صفحه $(\hat{x}, \hat{y})$ غیر قابل تمیز باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\left. \frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} \right|_{\frac{dy}{dx}=0} = 0. \quad (3.2)$$

یک تبدیل هموار از صفحه، وارون پذیر است اگر ژاکوبی آن مخالف صفر باشد بنابراین همواره به برقراری شرط

$$\hat{x}_x \hat{y}_y - \hat{x}_y \hat{y}_x \neq 0, \quad (4.2)$$

تاکید خواهیم کرد. با اعمال این شرط در استفاده از تبدیلات، یک منحنی جواب ویژه به منحنی جواب دیگری نگاشت خواهد شد، یا به عبارتی

$$\hat{y}(x, c) = \hat{c}(c), \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

x تابعی از $\hat{x}, c$ در نظر گرفته می شود، که از وارون $\hat{x} = \hat{x}(x, c)$ به دست می آید. معادله (۱.۲) دارای تقارنی های زیادی از جمله تقارنی های گسسته مانند انعکاس روی محور x, y است. تقارنی های لی شامل مقیاسی به شکل

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, e^\varepsilon y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

هستند. هر انتقال

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon_1, y + \varepsilon_2), \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}, \quad (7.2)$$

یک تقارنی خواهد بود. با در نظر گرفتن $\varepsilon_1 = 0$ می توانیم گروه لی یک پارامتری از تبدیلات را در جهت y به دست آوریم و به طور مشابه با قرار دادن $\varepsilon_2 = 0$ به تبدیلاتی از گروه های لی یک پارامتری در جهت x می رسمیم. همچنین مجموعه تبدیلات (۷.۲) یک گروه لی دو پارامتری است که می توان آن را به عنوان ترکیبی از گروه های لی یک پارامتری از تبدیلات پارامتری شده به وسیله $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ در نظر گرفت.

با توجه به این که معادله (۱.۲) یک معادله ی بسیار ساده ای است به راحتی می توانیم همه تقارنی هایش را پیدا کنیم و با مشتق گرفتن از رابطه (۵.۲) نسبت به x به دست می آوریم

$$\hat{y}_x(x, c) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (8.2)$$

بنابراین با به کار بردن رابطه (۴.۲) تقارنی‌های (۱.۲) را به دست می‌آوریم که به شکل

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (f(x, y), g(y)), \quad f_x \neq 0, g_y \neq 0, \quad (۹.۲)$$

می‌باشند که f, g توابع هموار فرض شده‌اند.

می‌توان از جواب عمومی معلوم (۱.۲) برای به دست آوردن رابطه (۳.۲) استفاده کرد که منجر به نتیجه‌ی (۹.۲) می‌شود. با این حال می‌توان این نتایج را مستقیماً از رابطه‌ی (۳.۲) به دست آورد. با توجه به این که منحنی‌های جواب y تابعی از x است از این رو $\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)$ را می‌توان به عنوان توابعی از x در نظر گرفت. سپس با استفاده از قاعده زنجیری، رابطه (۳.۲) را می‌توانیم به شکل

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

بنویسیم، که در آن D_x بیانگر مشتق کلی نسبت به x به صورت زیر است:

$$D_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \dots \quad (۱۰.۲)$$

بنابراین رابطه (۳.۲) شکل

$$\frac{\hat{y}_x + y' \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y} = 0, \quad y' = 0, \quad (۱۱.۲)$$

را خواهد گرفت به طوری که

$$\frac{\hat{y}_x}{\hat{x}_x} = 0. \quad (۱۲.۲)$$

در نتیجه رابطه (۹.۲) برقرار خواهد بود.

۲.۲ شرط تقارنی برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

تقارنی بعضی معادلات از جمله $y' = 0$ به راحتی قابل تصور است زیرا منحنی‌های جواب خطوط موازی هستند اما بر عکس این معادلات ساده، معادلات درجه اول بسیار پیچیده‌ای وجود دارند که پیدا کردن

تقارنی‌ها از روی منحنی‌های جواب به راحتی امکان پذیر نیست. با وجود این، برای فراهم کردن شرط تقارنی به نگاشت‌های متقارن از مجموعه منحنی‌های جواب در صفحه (x, y) به مجموعه‌ای از همان منحنی‌ها در صفحه $(\hat{x}, \hat{y})$ نیاز داریم. معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} = w(x, y), \quad (13.2)$$

را در نظر می‌گیریم که w تابعی هموار است. شرط تقارنی برای (۱۳.۲) به صورت

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = w(\hat{x}, \hat{y}), \quad \frac{dy}{dx} = w(x, y), \quad (14.2)$$

می‌باشد که همانند قبل، y بر روی منحنی‌های جواب به عنوان تابعی از x در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب از رابطه‌ی (۱۴.۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = \frac{\hat{y}_x + y' \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y} = w(\hat{x}, \hat{y}), \quad \frac{dy}{dx} = w(x, y).$$

بنابراین شرط تقارنی برای معادله (۱۳.۲) هم ارز است با

$$\frac{\hat{y}_x + w(x, y) \hat{y}_y}{\hat{x}_x + w(x, y) \hat{x}_y} = w(\hat{x}, \hat{y}). \quad (15.2)$$

مثال ۱.۲.۲. معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (16.2)$$

را در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه (۱۵.۲) خواهیم داشت

$$\frac{\hat{y}_x + y \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y \hat{x}_y} = \hat{y}.$$

قبل از این که به حل معادله بپردازیم بررسی می‌کنیم که آیا برای نمونه، تقارنی‌هایی که y را به خودش نگاشت کند وجود دارد؟. در صورت مثبت بودن جواب، باید داشته باشیم:

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), y),$$

که رابطه (۱۵.۲) به شکل

$$\frac{y}{\hat{x}_x + y\hat{x}_y} = y,$$

تقلیل پیدا خواهد کرد. بنابراین داریم

$$\hat{x}_x + y\hat{x}_y = 1, \quad \hat{x}_x \neq 0.$$

تقارنی‌های زیادی از این نوع وجود دارند و ساده‌ترین آنها تقارنی‌های لی به صورت

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, y), \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad (17.2)$$

است. قبلاً گفته شد که همه انتقالات در جهت x تقارنی‌های بدیهی از $y' = 0$ هستند. سوالی که پیش می‌آید این است که آیا این تقارنی‌ها برای (۱۶.۲) بدیهی محسوب می‌شوند؟ جواب عمومی (۱۶.۲) به راحتی پیدا می‌شود و به شکل زیر می‌باشد:

$$y = c_1 e^x, \quad c_1 \in \mathbb{R}. \quad (18.2)$$

یک انتقال مانند (۱۷.۲) منحنی جواب متناظر با c_1 را به منحنی

$$\hat{y} = y = c_1 e^x = c_1 e^{\hat{x} - \varepsilon} = c_2 e^{\hat{x}}, \quad c_2 = c_1 e^{-\varepsilon}, \quad (19.2)$$

می‌نگارد. بنابراین انتقالات در جهت x تقارنی‌های غیر بدیهی از (۱۶.۲) هستند، زیرا در حالت کلی $c_2 \neq c_1$ است. البته باید توجه داشت که $\varepsilon = 0$ یک تقارنی بدیهی را نتیجه می‌دهد.

۳.۲ عمل تقارنی‌های لی روی صفحه

یک مسیر از گروه یک پارامتری برای (x, y) مجموعه‌ای از نقاط است که با انتخاب مناسبی از ε نگاشت می‌شوند. مسیری را روی یک نقطه متغیر (x, y) در نظر می‌گیریم. بردار مماس متناظر با نقطه $(\hat{x}, \hat{y})$ روی این مسیر به صورت $(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$ است که در آن

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}), \quad \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}). \quad (20.2)$$

به ویژه، بردار مماس در نقطه (x, y) به شکل

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right), \quad (21.2)$$

است. بنابراین سری تیلور مرتبه اول در ε برای عمل گروه لی به شکل

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon \xi(x, y) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{y} &= y + \varepsilon \eta(x, y) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (22.2)$$

خواهد بود. یک نقطه ناوردا به وسیله هر تقارن لی به خودش نگاشته می شود، بنابراین با استفاده از رابطه (22.2) نقطه (x, y) ناوردا خواهد بود هرگاه بردار مماس آن برابر صفر باشد. یعنی

$$\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0, \quad (23.2)$$

در حقیقت این یک شرط لازم و کافی است، که با دیفرانسیل گرفتن (20.2) به طور مکرر نسبت به ε و با قرار دادن $\varepsilon = 0$ قابل اثبات است. همچنین منحنی C را ناوردا گوئیم اگر و تنها اگر مماس C در نقطه (x, y) موازی با بردار مماس $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ باشد. این شرط با معرفی مشخصه

$$Q(x, y, y') = \eta(x, y) - y' \xi(x, y) \quad (24.2)$$

قابل بیان است. اگر C منحنی $y = y(x)$ باشد، بردار مماس به C در نقطه $(x, y(x))$ در جهت $(1, y'(x))$ خواهد بود. بردار مماس موازی با $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ است اگر و تنها اگر

$$Q(x, y, y') = 0. \quad (25.2)$$

این نتیجه ما را قادر به تشخیص جواب های ناوردا ی معادله (13.2) می کند که معادل با

$$\tilde{Q} = Q(x, y, w(x, y)) = \eta(x, y) - w(x, y) \xi(x, y), \quad (26.2)$$

است. یک منحنی جواب $y = f(x)$ ناوردا است اگر و تنها اگر داشته باشیم:

$$\tilde{Q}(x, y) = 0, \quad (27.2)$$

زمانی که $y = f(x)$ باشد. در نتیجه تقارنی‌های لی بدیهی هستند اگر و تنها اگر $\tilde{Q}$ متحد با صفر باشد، یعنی

$$\eta(x, y) \equiv w(x, y)\xi(x, y). \quad (28.2)$$

اگر $\tilde{Q}_y \neq 0$ آنگاه ممکن است، که منحنی‌هایی مانند $y = f(x)$ پیدا کرد که در رابطه (۲۷.۲) صدق کنند.

مثال ۱.۳.۲. معادله ریکاتی^۱

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad (x \neq 0) \quad (29.2)$$

دارای یک گروه لی با مقیاس تقارن

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y),$$

و با میدان برداری

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x, -2y),$$

و با مشخصه

$$\tilde{Q}(x, y) = \frac{1}{x^2} - x^2 y^2,$$

است. بنابراین تقارنی‌های لی به دست آمده تقارنی‌های غیر بدیهی هستند و همچنین دارای دو جواب ناورد به صورت زیر است:

$$y = \pm x^{-2}.$$

۴.۲ مختصات کانونی

در بخش قبل، ملاحظه کردیم که هر معادله دیفرانسیل معمولی (۱۳.۲) را که تقارنی‌هایش شامل انتقال‌های

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon), \quad (30.2)$$

^۱Riccati

باشد به طور مستقیم می توان انتگرال گیری کرد. به طور کلی، اگر یک معادله دیفرانسیل معمولی دارای تقارنی های لی باشد که تحت تبدیل مختصات هم ارز با انتقالات باشد، می توان با نوشتن معادله دیفرانسیل در یک مختصات جدید آن را حل کرد. سوالی که در این جا پیش می آید این است که چگونه می توان این مختصات را به دست آورد؟

همه مسیرهای تقارنی (۳۰.۲) در هر نقطه دارای بردار مماس هستند:

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (0, 1). \quad (31.2)$$

برای هر گروه لی یک پارامتری داده شده می خواهیم مختصاتی به صورت زیر معرفی کنیم:

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y)), \quad (32.2)$$

به طوری که با این مختصات خاصیت انتقالی را داشته باشیم، یعنی

$$(\hat{r}, \hat{s}) \equiv (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \varepsilon). \quad (33.2)$$

اگر این روابط برقرار باشند آنگاه در مختصات جدید بردار مماس در نقطه (r, s) برابر با $(0, 1)$ است یعنی

$$\left. \frac{d\hat{r}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0, \quad \left. \frac{d\hat{s}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 1. \quad (34.2)$$

بنابراین با استفاده از قاعده زنجیری و رابطه (۲۰.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y &= 0, \\ \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y &= 1. \end{aligned} \quad (35.2)$$

تغییر مختصات در هر همسایگی از نقطه (x, y) باید وارون پذیر باشد بنابراین به برقراری شرط

$$r_x s_y - r_y s_x \neq 0, \quad (36.2)$$

تاکید می‌کنیم. هر جفت از توابع $r(x, y), s(x, y)$ که در روابط (۳۵.۲) و (۳۶.۲) صدق کنند یک جفت از مختصات کانونی نامیده می‌شوند. این مختصات در نقطه ناورد قابل تعریف نیستند به خاطر این که معادلات تعیینی برای s در رابطه (۳۵.۲) برای حالت

$$\xi(x, y) = \eta(x, y) = 0, \quad (۳۷.۲)$$

جواب نخواهد داشت. برای به دست آوردن مختصات کانونی می‌توانیم از رابطه (۳۵.۲) استفاده کنیم. معادلات مشخصه به صورت

$$\frac{dx}{\xi(x, y)} = \frac{dy}{\eta(x, y)} = ds, \quad (۳۸.۲)$$

می‌باشند. یک انتگرال اول از $y' = f(x, y)$ تابعی غیر ثابت مانند $\phi(x, y)$ است که مقدار آن روی هر جواب $y = y(x)$ ثابت خواهد بود. بنابراین

$$\phi_x + f(x, y)\phi_y = 0, \quad \phi_y \neq 0. \quad (۳۹.۲)$$

جواب عمومی (۳۹.۲) برابر است با

$$\phi(x, y) = c. \quad (۴۰.۲)$$

فرض می‌کنیم که $\xi(x, y) \neq 0$ باشد، با مقایسه رابطه (۳۵.۲) با (۳۹.۲) به این نتیجه می‌رسیم که مختصات کانونی r برابر با انتگرال اول از

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}, \quad (۴۱.۲)$$

خواهد بود. بنابراین $r = \phi(x, y)$ از حل رابطه (۴۱.۲) به دست می‌آید. اغلب جواب $s(x, y)$ را با استفاده از (۳۵.۲) می‌توان به دست آورد، در غیر این صورت از $r = r(x, y)$ برای نوشتن y به عنوان تابعی از r, x و سپس برای به دست آوردن مختصات $s(r, x)$ از رابطه (۳۸.۲) استفاده می‌کنیم که

خواهیم داشت:

$$s(r, x) = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(r, x))} \right) \Big|_{r=r(x, y)}. \quad (۴۲.۲)$$

به طور مشابه اگر $\xi(x, y) = 0$ و $\eta(x, y) \neq 0$ آنگاه

$$r = x, \quad s = \left(\int \frac{dy}{\eta(r, y)} \right) \Big|_{r=x}, \quad (۴۳.۲)$$

مختصات کانونی خواهند بود.

مثال ۱.۴.۲. تقارنی‌های لی

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{k\varepsilon} y), \quad k > 0, \quad (۴۴.۲)$$

را در نظر می‌گیریم که دارای بردار مماس

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = (x, ky), \quad (۴۵.۲)$$

خواهد بود. بنابراین r انتگرال اول از

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ky}{kx}, \quad (۴۶.۲)$$

خواهد بود. جواب عمومی این معادله دیفرانسیل معمولی $y = cx^k$ است بنابراین خواهیم داشت که $r = x^{-k}y$. زمانی که ξ غیر صفر و مستقل از y باشد بهتر است که ما s را به عنوان تابعی از x در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$(r, s) = (x^{-k}y, \ln |x|). \quad (۴۷.۲)$$

با توجه به این که این مختصات کانونی در همه جای صفحه قابل تعریف نیستند، مثلاً $s = \ln |x|$ روی خط $x = 0$ تعریف نمی‌شود در نتیجه مختصات کانونی

$$(r, s) = (x^k y^{-1}, k^{-1} \ln |y|), \quad (۴۸.۲)$$

در نقاط نزدیک به $x = 0$ به جز روی خط $y = 0$ قابل تعریف است.

۵.۲ حل معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از تقارنی‌های لی

در ابتدا فرض می‌کنیم که بتوانیم تقارنی‌های لی غیر بدیهی از یک معادله دیفرانسیل معمولی داده شده

$$\frac{dy}{dx} = w(x, y), \quad (49.2)$$

را پیدا کنیم و می‌دانیم که تقارنی‌های لی از یک معادله، غیر بدیهی است اگر و تنها اگر

$$\eta(x, y) \neq w(x, y)\xi(x, y). \quad (50.2)$$

اگر معادله دیفرانسیل (49.2) را در شکل مختصات کانونی بنویسیم خواهیم داشت

$$\frac{ds}{dr} = \frac{s_x + w(x, y)s_y}{r_x + w(x, y)r_y}. \quad (51.2)$$

بنابراین واضح است که طرف راست معادله (51.2) به عنوان تابعی از r, s است و برای یک تغییر کلی از متغیرهای $(x, y) \mapsto (r, s)$ ، تبدیل یافته معادله دیفرانسیل معمولی به شکل

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r, s), \quad (52.2)$$

خواهد بود. با این حال (r, s) مختصات کانونی هستند و معادله دیفرانسیل معمولی تحت گروه انتقالات در جهت s ناوردا است:

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon).$$

بنابراین معادله دیفرانسیل (52.2) به شکل

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r), \quad (53.2)$$

خواهد بود. در نتیجه جواب عمومی (53.2) به شکل زیر خواهد بود:

$$s - \int \Omega(r) dr = c,$$

که در آن c یک ثابت دلخواه است. بنابراین جواب عمومی معادله دیفرانسیل معمولی (۴۹.۲) به شکل زیر خواهد بود:

$$s(x, y) - \int^{r(x, y)} \Omega(r) dr = c. \quad (۵۴.۲)$$

مثال ۱.۵.۲. معادله ریکاتی

$$y' = xy^2 - \frac{2y}{x} - \frac{1}{x^3}, \quad (x \neq 0), \quad (۵۵.۲)$$

معادله شناخته شده‌ای است و قبلاً هم جواب‌های این معادله را که تحت تقارنی‌های لی

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\varepsilon x, e^{-2\varepsilon} y),$$

ناوردا هستند پیدا کردیم. مختصات کانونی این معادله به صورت

$$(r, s) = (x^2 y, \ln |x|),$$

هستند آنگاه معادله (۵۵.۲) به شکل

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{r^2 - 1},$$

تقلیل می‌یابد، در نتیجه جواب عمومی معادله (۵۵.۲) به شکل زیر خواهد بود:

$$y = \frac{c + x^2}{x^2(c - x^2)}.$$

۱.۵.۲ مولدهای بی‌نهایت کوچک

تا کنون ما بر روی معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه یک کار می‌کردیم ولی نیاز داریم به این که یافته‌های خود را بر روی معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با مرتبه بالاتر گسترش دهیم. فرض کنیم یک معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه یک دارای یک گروه لی یک پارامتری از تقارنی‌ها باشد، که بردار مماس آن در نقطه (x, y) برابر با (ξ, η) باشد، آنگاه عمل‌گر دیفرانسیل جزئی

$$X = \xi(x, y)\partial x + \eta(x, y)\partial y, \quad (۵۶.۲)$$

مولد بی‌نهایت کوچک از گروه لی نامیده می‌شود. قبلاً با این عمل‌گر روبه‌رو شده بودیم، بنابراین معادله (۳۵.۲) که معروف به مختصات کانونی است می‌تواند به شکل

$$X_r = 0, \quad X_s = 1, \quad (57.2)$$

نوشته شود. سوالی که پیش می‌آید این است که مولدهای بی‌نهایت کوچک با تغییر در مختصات چه تغییری می‌کنند؟ برای پیدا کردن جواب برای این سوال فرض می‌کنیم که (u, v) مختصات جدید باشند و $F(u, v)$ یک تابع هموار دلخواه باشد. آنگاه با استفاده از قاعده زنجیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} XF(u, v) &= XF(u(x, y), v(x, y)) \\ &= \xi\{u_x F_u + v_x F_v\} + \eta\{u_y F_u + v_y F_v\} \\ &= (Xu)F_u + (Xv)F_v. \end{aligned} \quad (58.2)$$

بنابراین در مختصات جدید مولد بی‌نهایت کوچک به شکل

$$X = (Xu)\partial u + (Xv)\partial v, \quad (59.2)$$

خواهد بود. در حالت خاص اگر $(u, v) = (r, s)$ آنگاه با استفاده از رابطه (۵۷.۲) خواهیم داشت:

$$X = (Xr)\partial r + (Xs)\partial s = \partial s.$$

۲.۵.۲ معادلات تعیینی برای تقارنی‌های نقطه لی

هر تقارنی که قبل از این با آن سروکار داشتیم دیفئومورفیسم به شکل

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)),$$

بود. به این نوع از دیفئومورفیسم یک تبدیل نقطه می‌گویند و به هر تبدیل نقطه که تقارنی نیز باشد یک تقارنی نقطه هم می‌گویند. در این رساله بر روی تقارنی نقطه لی تاکید خواهد شد. برای پیدا کردن تقارنی نقطه یک معادله دیفرانسیل معمولی به شکل

$$y^{(n)} = w(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}, \quad (60.2)$$

که در آن w یک تابع هموار است. شرط تقارنی برای معادله ی (۶۰.۲) به صورت

$$\hat{y}^{(n)} = w(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \dots, \hat{y}^{(n-1)}),$$

است که در آن

$$\hat{y}^{(k)} = \frac{d^k \hat{y}}{d\hat{x}^k} = \frac{d\hat{y}^{(k-1)}}{d\hat{x}} = \frac{D_x \hat{y}^{(k-1)}}{D_x \hat{x}}.$$

در ابتدا باید $\eta^{(k)}$ را که $k = 1, \dots, n$ محاسبه کنیم به طوری که ξ و η به x و y وابسته هستند. بنابراین با استفاده از

$$\eta^{(1)} = D_x \eta - y' D_x \xi, \quad (۶۱.۲)$$

و رابطه

$$\eta^{(k)}(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi, \quad (۶۲.۲)$$

لذا خواهیم داشت:

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2, \quad (۶۳.۲)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(2)} = & \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 - \xi_{yy} y'^3 \\ & + \{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y'\} y'', \end{aligned} \quad (۶۴.۲)$$

$$\begin{aligned} \eta^{(3)} = & \eta_{xxx} + (3\eta_{xxy} - \xi_{xxx}) y' + 3(\eta_{xyy} - \xi_{xxy}) y'^2 + (\eta_{yyy} - 3\xi_{xyy}) y'^3 \\ & - \xi_{yyy} y'^4 + 3\{\eta_{xy} - \xi_{xx} + (\eta_{yy} - 3\xi_{xy}) y' - 2\xi_{yy} y'^2\} y'' \\ & - 3\xi_y y''^2 + \{\eta_y - 3\xi_x - 4\xi_y y'\} y'''. \end{aligned} \quad (۶۵.۲)$$

قابل ذکر است که برای به دست آوردن مراتب بالا می توانیم از برنامه های کامپیوتری استفاده کنیم.

مثال ۲.۵.۲. ساده ترین معادله دیفرانسیل معمولی از مرتبه دو

$$y'' = 0, \quad (۶۶.۲)$$

را در نظر می‌گیریم. شرط تقارنی خطی برای این معادله به صورت زیر است:

$$\eta^{(2)} = 0. \quad (۶۷.۲)$$

بنابراین داریم:

$$\eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx})y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy})y'^2 - \xi_{yy}y'^3 = 0. \quad (۶۸.۲)$$

زمانی که ξ و η مستقل از y' هستند، شرط تقارنی به شکل

$$\eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0, \quad \eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = 0, \quad (۶۹.۲)$$

تجزیه خواهد شد. آخرین معادله دارای جواب عمومی به شکل

$$\xi(x, y) = A(x)y + B(x),$$

خواهد بود. سومین معادله از رابطه (۶۹.۲) جواب

$$\eta(x, y) = A'(x)y^2 + C(x)y + D(x),$$

را نتیجه می‌دهد که در آن C, D توابع دلخواهی هستند. آنگاه معادلات باقی‌مانده از رابطه (۶۹.۲) روابط زیر را نتیجه می‌دهند:

$$A'''(x)y^2 + C''(x)y + D''(x) = 0, \quad 3A''(x)y + 2C'(x) - B''(x) = 0, \quad (۷۰.۲)$$

که با تحلیل روابط بالا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی برای توابع نامعلوم A, B, C و D را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$A''(x) = 0, \quad C''(x) = 0, \quad D''(x) = 0, \quad B''(x) = 2C'(x),$$

که حل این معادلات دیفرانسیل کاری بسیار ساده است در نتیجه توابع η و ξ به شکل

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= c_1 + c_3x + c_5y + c_7x^2 + c_8xy, \\ \eta(x, y) &= c_2 + c_4y + c_6x + c_7xy + c_8y^2, \end{aligned} \quad (۷۱.۲)$$

خواهند بود به طوری که $c_1, \dots, c_8$ ثابت‌های دلخواه هستند. بنابراین مولدهای بی‌نهایت کوچک به

شکل

$$X = \sum_{i=1}^8 c_i X_i,$$

خواهد بود به طوری که

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial x, & X_2 &= \partial y, & X_3 &= x\partial x, & X_4 &= y\partial y, & X_5 &= y\partial x, \\ X_6 &= x\partial y, & X_7 &= x^2\partial x + xy\partial y, & X_8 &= xy\partial x + y^2\partial y. \end{aligned}$$

۳.۵.۲ کاهش مرتبه با استفاده از مختصات کانونی

حال که توانستیم تقارنی لی از یک دستگاه را پیدا کنیم چطور می‌توانیم از آن استفاده کنیم؟ برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول و مراتب بالاتر ابتدا باید مختصات کانونی آن را پیدا کنیم. فرض می‌کنیم که X مولد بی‌نهایت کوچک گروه لی یک پارامتری از معادله دیفرانسیل معمولی

$$y^{(n)} = w(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad n \geq 2, \quad (۷۲.۲)$$

باشد. اگر (r, s) مختصات کانونی یک گروه با مولد X باشد، آنگاه

$$X = \partial s. \quad (۷۳.۲)$$

اگر معادله (۷۲.۲) را با استفاده از مختصات کانونی بنویسیم خواهیم داشت:

$$s^{(n)} = \Omega(r, s, s', \dots, s^{(n-1)}), \quad s^{(k)} = \frac{d^k s}{dr^k}. \quad (۷۴.۲)$$

به هر حال معادله (۷۴.۲) تحت انتقالات گروه لی در s ناوردا است، بنابراین با استفاده از شرط تقارنی داریم:

$$\Omega_s = 0.$$

بنابراین

$$s^{(n)} = \Omega(r, s', \dots, s^{(n-1)}),$$

و با نوشتن معادله (۷۲.۲) بر حسب مختصات کانونی، معادله دیفرانسیل به ازای $v = s'$ به یک معادله با مرتبه $n - 1$ کاهش می‌یابد:

$$v^{(n-1)} = \Omega(r, v, \dots, v^{(n-2)}), \quad v^{(k)} = \frac{d^{k+1}s}{dr^{k+1}}. \quad (۷۵.۲)$$

فرض می‌کنیم معادله تقلیل یافته دارای جواب عمومی

$$v = f(r; c_1, \dots, c_{n-1}),$$

باشد. آنگاه جواب عمومی معادله اصلی (۷۲.۲) به شکل

$$s(x, y) = \int^{r(x, y)} f(r; c_1, \dots, c_{n-1}) dr + c_n,$$

خواهد بود. در حالت کلی اگر v تابعی از s' و r باشد به طوری که $v_{s'}(r, s') \neq 0$ آنگاه معادله دیفرانسیل (۷۵.۲) به یک معادله دیفرانسیل معمولی به شکل

$$v^{(n-1)} = \tilde{\Omega}(r, v, \dots, v^{(n-2)}), \quad v^{(k)} = \frac{d^k v}{dr^k},$$

تقلیل خواهد یافت. در نتیجه با استفاده از

$$s' = s'(r, v),$$

جواب عمومی معادله (۷۴.۲) که به شکل

$$s(x, y) = \int^{r(x, y)} s'(r, v(r; c_1, \dots, c_{n-1})) dr + c_n,$$

است، پیدا می‌شود. به طور خلاصه اگر یک گروه لی یک پارامتری از تقارنی‌ها را داشته باشیم با کاهش مرتبه معادله دیفرانسیل معمولی (۷۲.۲) قادر به حل معادله خواهیم بود.

مثال ۳.۵.۲. معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه دو

$$y'' = \frac{y'^2}{y} + \left(y - \frac{1}{y}\right)y', \quad (۷۶.۲)$$

را با مولد بی‌نهایت کوچک

$$X = \partial x,$$

در نظر می‌گیریم. این انتقالات تنها تقارنی‌های نقطه لی معادله (۷۶.۲) محسوب می‌شوند. ساده‌ترین

مختصات کانونی به صورت

$$(r, s) = (y, x),$$

هستند. بنابراین اگر v را به صورت $\dot{s} = (y')^{-1}$ در نظر گیریم آنگاه معادله دیفرانسیل (۷۶.۲) به شکل

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{y''}{y'^3} = -\frac{v}{r} + \left(\frac{1}{r} - r\right)v^2,$$

که یک معادله برنولی است کاهش می‌یابد، که می‌توان آن را با در نظر گرفتن یک تابع خطی برای v^{-1} حل کرد. واضح است که با انتخاب

$$v = y', \quad v = (\dot{s})^{-1},$$

ادامه کار بسیار ساده خواهد بود. با این انتخاب v معادله دیفرانسیل (۷۶.۲) به‌طور مستقیم به معادله خطی

$$\frac{dv}{dr} = \frac{y''}{y'} = \frac{v}{r} + r - \frac{1}{r}, \quad (77.2)$$

کاهش خواهد یافت. جواب عمومی (۷۷.۲) به صورت

$$v = r^2 - 2c_1r + 1,$$

خواهد بود، بنابراین داریم

$$s = \int \frac{1}{v(r)} = \int \frac{dr}{r^2 - 2c_1r + 1},$$

در نتیجه می‌توان جواب عمومی معادله (۷۶.۲) را به دست آورد:

$$y = \begin{cases} c_1 - \sqrt{c_1^2 - 1} \tanh(\sqrt{c_1^2 - 1}(x + c_2)), & c_1^2 > 1; \\ c_1 - (x + c_2)^{-1}, & c_1^2 = 1; \\ c_1 + \sqrt{1 - c_1^2} \tan(\sqrt{1 - c_1^2}(x + c_2)), & c_1^2 < 1. \end{cases} \quad (78.2)$$

۶.۲ آنالیز گروه لی برای حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جزئی

روش پیدا کردن تقارنی نقطه لی برای معادلات دیفرانسیل جزئی همانند روش معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. برای سادگی فرض می‌کنیم که معادله دیفرانسیل جزئی ما دارای یک متغیر وابسته u و دو متغیر مستقل x و t باشد. یک تبدیل نقطه، دیفئومورفیسمی به شکل

$$\Gamma = (x, t, u) \mapsto (\hat{x}(x, t, u), \hat{t}(x, t, u), \hat{u}(x, t, u)), \quad (۷۹.۲)$$

است. این تبدیلات صفحه $u = u(x, t)$ را به سطح

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{x}(x, t, u(x, t)), \\ \hat{t} &= \hat{t}(x, t, u(x, t)), \\ \hat{u} &= \hat{u}(x, t, u(x, t)). \end{aligned} \quad (۸۰.۲)$$

می‌نگارد. برای محاسبه تطویل یک تبدیل داده شده، نیاز به مشتق‌گیری از روابط (۸۰.۲) نسبت به پارامترهای x و t داریم. برای این کار مشتقات کلی را به صورت زیر

$$\begin{aligned} D_x &= \partial x + u_x \partial u + u_{xx} \partial u_x + u_{xt} \partial u_t + \dots, \\ D_t &= \partial t + u_t \partial u + u_{xt} \partial u_x + u_{tt} \partial u_t + \dots, \end{aligned} \quad (۸۱.۲)$$

معرفی می‌کنیم و دو معادله‌ی اول (۸۰.۲) را می‌توان به صورت x و t بر حسب $\hat{x}$ و $\hat{t}$ به دست آورد به شرطی که ژاکوبی غیر صفر باشد، یعنی

$$J \equiv \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{vmatrix} \neq 0, \quad u = u(x, t). \quad (۸۲.۲)$$

اگر رابطه (۸۲.۲) برقرار باشد آنگاه آخرین رابطه‌ی (۸۰.۲) به شکل

$$\hat{u} = \hat{u}(\hat{x}, \hat{t}), \quad (۸۳.۲)$$

نوشته می‌شود. با به‌کارگیری قاعده زنجیری برای (۸۳.۲) داریم:

$$\begin{bmatrix} D_x \hat{u} \\ D_t \hat{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{\hat{x}} \\ \hat{u}_{\hat{t}} \end{bmatrix}$$

بنابراین از قاعده کرامر خواهیم داشت:

$$\hat{u}_{\hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{u} & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \quad \hat{u}_{\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u} \end{vmatrix}. \quad (۸۴.۲)$$

تطویل‌های با مرتبه بالا را می‌توان با تکرار این روش به‌دست آورد. اگر $\hat{u}_j$ هر مشتقی از $\hat{u}$ نسبت به $\hat{x}$ و $\hat{t}$ باشد آنگاه:

$$\hat{u}_{j\hat{x}} \equiv \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u}_j & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{u}_j & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \quad \hat{u}_{j\hat{t}} \equiv \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u}_j \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u}_j \end{vmatrix} \quad (۸۵.۲)$$

برای مثال این تبدیلات دارای تطویل از مشتقات مرتبه دو به‌صورت

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u}_{\hat{x}} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{u}_{\hat{x}} & D_t \hat{t} \end{vmatrix}, \quad \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u}_{\hat{t}} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u}_{\hat{t}} \end{vmatrix}, \quad (۸۶.۲)$$

و

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{t}} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{u}_{\hat{t}} & D_x \hat{t} \\ D_t \hat{u}_{\hat{t}} & D_t \hat{t} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} D_x \hat{x} & D_x \hat{u}_{\hat{x}} \\ D_t \hat{x} & D_t \hat{u}_{\hat{x}} \end{vmatrix} \quad (۸۷.۲)$$

هستند. حال می‌توان تقارنی نقطه برای یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه n

$$\Delta(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0, \quad (۸۸.۲)$$

را تعریف کرد. برای سادگی بر روی معادلات به شکل

$$\Delta = u_\sigma - w(x, t, u, u_x, u_t, \dots) = 0, \quad (۸۹.۲)$$

متمرکز می‌شویم که در آن u_σ یکی از مشتقات مرتبه n از u می‌باشد و w مستقل از u_σ است. تبدیل نقطه Γ یک تقارنی نقطه از (۸۸.۲) است اگر

$$\Delta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}, \hat{u}_{\hat{x}}, \hat{u}_{\hat{t}}, \dots) = 0 \quad (90.2)$$

زمانی که رابطه (۸۸.۲) برقرار باشد.

مثال ۱.۶.۲. در این مثال نشان می‌دهیم که

$$(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}) = \left(\frac{x}{2t}, \frac{-1}{4t}, 2(ut - x) \right) \quad (91.2)$$

یک تقارنی نقطه از معادله

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (92.2)$$

است. ژاکوبی تبدیل نقاط (۹۱.۲) به شکل

$$J \equiv \begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 0 \\ \frac{-x}{2t^2} & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{8t^3} \quad (93.2)$$

خواهد بود و داریم:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\hat{x}} &= 8t^3 \begin{vmatrix} 2(tu_x - 1) & 0 \\ 2(tu_t + u) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = 4t(tu_x - 1), \\ \hat{u}_{\hat{t}} &= 8t^3 \begin{vmatrix} \frac{1}{2t} & 2(tu_x - 1) \\ \frac{-x}{2t^2} & 2(tu_t + u) \end{vmatrix} = 8t(t^2u_t + xtu_x + tu - x) \end{aligned}$$

و

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} = 8t^3 \begin{vmatrix} 4t^2u_{xx} & 0 \\ 4(t^2u_{xt} + 2tu_x - 1) & \frac{1}{4t^2} \end{vmatrix} = 8t^3u_{xx}$$

و با توجه به اینکه

$$\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} = 8t^3(u_t + uu_x), \quad (94.2)$$

از این رو تبدیل نقطه در شرط تقارنی

$$\hat{u}_{\hat{t}} + \hat{u}\hat{u}_{\hat{x}} = \hat{u}_{\hat{x}\hat{x}}, \quad u_t + uu_x = u_{xx},$$

صدق می‌کند. در حالت کلی ما نمی‌توانیم از قبل حدس بزنیم که تقارنی نقطه به چه شکلی خواهد بود اما معمولاً برای گروه‌های لی یک پارامتری، تقارنی نقطه را جستجو می‌کنیم و اساس کار همان روشی است که در معادلات دیفرانسیل معمولی به کار برده‌ایم. به دنبال تقارنی نقطه به شکل

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon \xi(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{t} &= t + \varepsilon \tau(x, t, u) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u} &= u + \varepsilon \eta(x, t, u) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (95.2)$$

هستیم. همانند تبدیل نقطه لی از یک صفحه، هر گروه لی یک پارامتری از تبدیلات نقطه از نمایی کردن مولد بی‌نهایت کوچک به دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$X = \xi \partial x + \tau \partial t + \eta \partial u. \quad (96.2)$$

می‌توان $(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u})$ را از حل

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}), \quad \frac{d\hat{t}}{d\varepsilon} = \tau(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u}), \quad \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u})$$

به دست آورد به طوری که در شرط آغازین زیر صدق کند:

$$(\hat{x}, \hat{t}, \hat{u})|_{\varepsilon=0} = (x, t, u). \quad (97.2)$$

یک سطح $u = u(x, t)$ به وسیله‌ی گروهی از تبدیلات تولید شده توسط X به خود نگاشته می‌شود اگر

همواره داشته باشیم:

$$X(u - u(x, t)) = 0, \quad (۹۸.۲)$$

زمانی که $u = u(x, t)$ است. این شرط می‌تواند با استفاده از مشخصه گروه که به شکل

$$\tilde{Q} = \eta - \xi u_x - \tau u_t \quad (۹۹.۲)$$

است بیان شود. از رابطه (۹۹.۲)، سطح $u = u(x, t)$ ناورد است به شرطی که

$$\tilde{Q} = 0, \quad u = u(x, t), \quad (۱۰۰.۲)$$

باشد. معادله (۱۰۰.۲) شرط سطح ناورد نامیده می‌شود که در برخی از تکنیک‌های اساسی برای پیدا کردن جواب دقیق معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌شود. تطویل تبدیل نقاط (۹۶.۲) به صورت

$$\begin{aligned} \hat{u}_{\hat{x}} &= u_x + \varepsilon \eta^x(x, t, u, u_x, u_t) + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u}_{\hat{t}} &= u_t + \varepsilon \eta^t(x, t, u, u_x, u_t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (۱۰۱.۲)$$

است که در آن با استفاده از (۸۵.۲) داریم

$$\begin{aligned} \eta^x(x, t, u, u_x, u_t) &= D_x \eta - u_x D_x \xi - u_t D_x \tau, \\ \eta^t(x, t, u, u_x, u_t) &= D_t \eta - u_x D_t \xi - u_t D_t \tau. \end{aligned} \quad (۱۰۲.۲)$$

فرض کنید

$$\hat{u}_J = u_J + \varepsilon \eta^J + O(\varepsilon^2), \quad (۱۰۳.۲)$$

که در آن

$$u_J \equiv \frac{\partial^{j_1+j_2} u}{\partial x^{j_1} \partial t^{j_2}}, \quad \hat{u}_J \equiv \frac{\partial^{j_1+j_2} \hat{u}}{\partial \hat{x}^{j_1} \partial \hat{t}^{j_2}}, \quad j_1, j_2 \in \mathbb{N}.$$

آنگاه با استفاده از (۸۶.۲) داریم:

$$\begin{aligned}\hat{u}_{J\hat{x}} &= u_{Jx} + \varepsilon \eta^{Jx} + O(\varepsilon^2), \\ \hat{u}_{J\hat{t}} &= u_{Jt} + \varepsilon \eta^{Jt} + O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{۱۰۴.۲}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\eta^{Jx} &= D_x \eta^J - u_{Jx} D_x \xi - u_{Jt} D_x \tau, \\ \eta^{Jt} &= D_t \eta^J - u_{Jx} D_t \xi - u_{Jt} D_t \tau.\end{aligned}\tag{۱۰۵.۲}$$

به این ترتیب می‌توانیم تابع η^J را به شکل مشخصه گروه بیان کنیم. برای مثال:

$$\begin{aligned}\eta^x &= D_x \tilde{Q} + \xi u_{xx} + \tau u_{xt}, \\ \eta^t &= D_t \tilde{Q} + \xi u_{xt} + \tau u_{tt}.\end{aligned}\tag{۱۰۶.۲}$$

بدین ترتیب جملات مراتب بالا را با استقراء روی j_1, j_2 می‌توان به‌دست آورد:

$$\eta^J = D_J \tilde{Q} + \xi D_J u_x + \tau D_J u_t,\tag{۱۰۷.۲}$$

که در آن

$$D_J \equiv D_x^{j_1} D_t^{j_2},\tag{۱۰۸.۲}$$

برای پیدا کردن نقاط مقارن لی نیاز به عبارت های صریحی برای (۱۰۵.۲) داریم:

$$\eta^x = \eta_x + (\eta_u - \xi_x) u_x - \tau_x u + \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,\tag{۱۰۹.۲}$$

$$\eta^t = \eta_t - \xi_t u_x + (\eta_u - \tau_t) u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2,\tag{۱۱۰.۲}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{xx} = & \eta_{xx} + (2\eta_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\eta_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 \\
& - 2\tau_{xu}u_xu_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2u_t + (\eta_u - 2\xi_x)u_{xx} \\
& - 2\tau_xu_{xt} - 3\xi_uu_xu_{xx} - \tau_uu_tu_{xx} - 2\tau_uu_xu_{xt},
\end{aligned} \tag{۱۱۱.۲}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{xt} = & \eta_{xt} + (\eta_{tu} - \xi_{xt})u_x + (\eta_{xu} - \tau_{xt})u_t - \xi_{tu}u_x^2 \\
& + (\eta_{uu} - \xi_{xu} - \tau_{tu})u_xu_t - \tau_{xu}u_t^2 - \xi_{uu}u_x^2u_t - \tau_{uu}u_xu_t^2 \\
& - \xi_tu_{xx} - \xi_uu_tu_{xx} + (\eta_u - \xi_x - \tau_t)u_{xt} - 2\xi_uu_xu_{xt} \\
& - 2\tau_uu_tu_{xt} - \tau_xu_{tt} - \tau_uu_xu_{tt},
\end{aligned} \tag{۱۱۲.۲}$$

$$\begin{aligned}
\eta^{tt} = & \eta_{tt} - \xi_{tt}u_x + (2\eta_{tu} - \tau_{tt})u_t - 2\xi_{tu}u_xu_t \\
& + (\eta_{uu} - 2\tau_{tu})u_t^2 - \xi_{uu}u_xu_t^2 - \tau_{uu}u_t^3 - 2\xi_tu_{xt} \\
& - 2\xi_uu_tu_{xt} + (\eta_u - 2\tau_t)u_{tt} - \xi_uu_xu_{tt} - 3\tau_uu_tu_{tt}.
\end{aligned} \tag{۱۱۳.۲}$$

در نتیجه تقارنی نقطه لی با دیفرانسیل گرفتن از شرط تقارنی (۹۰.۲) نسبت به ε در $\varepsilon = 0$ به دست می‌آید، بنابراین شرط تقارن خطی زیر را خواهیم داشت:

$$X \triangle|_{\Delta=0} = 0. \tag{۱۱۴.۲}$$

مثال ۲.۶.۲. معادله مرتبه دو گرما را که به صورت

$$u_t = u_{xx}, \tag{۱۱۵.۲}$$

می‌باشد با میدان برداری

$$V = \xi(x, t, u)\partial_x + \tau(x, t, u)\partial_t + \phi(x, t, u)\partial_u, \tag{۱۱۶.۲}$$

را در نظر می‌گیریم. تطویل مرتبه دوم معادله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 V^{(2)} = & \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t) - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2 - \phi_{xx} \\
 & - (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t - (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 + 2\tau_{xu}u_x u_t \\
 & + \xi_{uu}u_x^3 + \tau_{uu}u_x^2 u_t - (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} + 2\tau_x u_{xt} + 3\xi_u u_x u_{xx} \\
 & + \tau_u u_t u_{xx} + 2\tau_u u_x u_{xt}.
 \end{aligned} \tag{۱۱۷.۲}$$

با در نظر گرفتن شرط $V^{(2)}(u_t - u_{xx}) = 0$ وقتی که $u_t - u_{xx} = 0$ است، معادلات تعیینی زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
 \xi_u = \tau_u = \phi_{uu} = \tau_x = 0, \\
 \phi_t - \phi_{xx} = 0, \\
 -\tau_t + 2\xi_x = 0, \\
 -\xi_t - 2\phi_{xu} + \xi_{xx} = 0.
 \end{aligned} \tag{۱۱۸.۲}$$

با حل این معادلات، گروه تبدیلات لی یک پارامتری معادله‌ی گرما به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \xi(x, t, u) &= C_1 + C_4 x + 2C_5 t + 4C_6 x t, \\
 \tau(x, t, u) &= C_2 + 2C_4 t + 4C_6 t^2, \\
 \phi(x, t, u) &= (C_3 - C_5 x - 2C_6 t - C_6 x^2)u,
 \end{aligned} \tag{۱۱۹.۲}$$

که $C_i, i = 1, 2, \dots, 6$ ثابت‌های دلخواه هستند. بنابراین گروه تقارنی معادله گرما از ترکیب بردارهای

زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \partial_x, \\
 V_2 &= \partial_t, \\
 V_3 &= u\partial_u, \\
 V_4 &= x\partial_x + 2t\partial_t, \\
 V_5 &= 2t\partial_x - xu\partial_u, \\
 V_6 &= 4tx\partial_x + 4t^2\partial_t - (x^2 + 2t)u\partial_u.
 \end{aligned} \tag{۱۲۰.۲}$$

در جدول ۱۰.۲ جابجاگر این مولدها را خواهیم داشت:

جدول ۱۰.۲: جدول جابجاگر برای مولدهای معادله گرما

$[V_i, V_j]$	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
V_1	0	0	0	V_1	$-V_3$	$2V_5$
V_2	0	0	0	$2V_2$	$2V_1$	$4V_4 - 2V_3$
V_3	0	0	0	0	0	0
V_4	$-V_1$	$-2V_2$	0	0	V_5	$2V_6$
V_5	V_3	$-2V_1$	0	$-V_5$	0	0
V_6	$-2V_5$	$2V_3 - 4V_6$	0	$-2V_6$	0	0

۱.۶.۲ جواب‌های ناورد

با توجه به یافته‌های قبلی ما قادر به پیدا کردن تقارنی نقطه لی از یک معادله دیفرانسیل داده شده هستیم. در این بخش سعی داریم طرز به دست آوردن جواب‌های ناوردا از روی تقارنی‌های نقطه لی را توضیح دهیم. تقریباً همه روش‌های دقیق، هر معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک یا چند معادله دیفرانسیل معمولی مرتبط می‌کند. به عنوان مثال جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی شبه خطی مرتبه یک، با انتگرال‌گیری از معادلات مشخصه به دست می‌آید. حال سعی می‌کنیم که بر روی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با دو متغیر مستقل تمرکز کنیم.

می‌دانیم جواب $u = u(x, t)$ ناوردی تحت مولد گروه

$$X = \xi \partial x + \tau \partial t + \eta \partial u$$

است اگر و تنها اگر مشخصه آن بر روی جواب هم ارز با صفر باشد به عبارت دیگر در شرط

$$\tilde{Q} \equiv \eta - \xi u_x - \tau u_t = 0, \quad (121.2)$$

صدق کند. معمولاً حل (۱۲۱.۲) ساده‌تر از حل خود معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. فرض می‌کنیم که ξ و τ هر دو مخالف صفر باشند. آنگاه شرط سطح ناوردی به صورت یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی شبه خطی است که با استفاده از روش مشخصه می‌توانیم حل کنیم و داریم:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dt}{\tau} = \frac{du}{\eta}. \quad (122.2)$$

اگر $r(x, t, u)$ و $v(x, t, u)$ دو انتگرال اول به صورت تابع مستقل از (۱۲۲.۲) باشند، آنگاه هر ناوردی گروه تابعی بر حسب r و v خواهد بود. فرض می‌کنیم که $v_u \neq 0$ آنگاه جواب عمومی شرط سطح ناوردی به صورت

$$v = F(r),$$

است و با جای‌گذاری این جواب در معادله‌ی اصلی قادر به پیدا کردن تابع F خواهیم بود.

۲.۶.۲ طبقه‌بندی جواب‌های ناوردی گروه

برای هر زیرگروه H از گروه تبدیلات G معادلات دیفرانسیل خانواده‌ای از جواب‌های ناوردی وجود دارد، که اغلب برای این تعداد زیاد از زیرگروه‌ها قادر به پیدا کردن همه جواب‌های ناوردی نیستیم. بنابراین به یک طبقه‌بندی موثر از جواب‌ها نیاز داریم.

گزاره ۳.۶.۲. فرض کنیم G گروه متقارن دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = 0$ باشد و $H \subset G$ یک زیرگروه s -پارامتری باشد. اگر $u = f(x)$ یک جواب ناوردی $\Delta = 0$ باشد و $g \in G$ ، آنگاه تابع تبدیل $u = \hat{f}(x) = g \cdot f(x)$ جواب ناوردی به دست آمده از زیرگروه $\hat{H}$ می‌باشد که در آن

$\hat{H} = gHg^{-1}$ و $\hat{H}$ را زیرگروه مزدوج H تحت g می‌نامیم.

۳.۶.۲ نمایش الحاقی

فرض کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر $g \in G$ گروه مزدوج ghg^{-1} و $h \in G$ یک دیفیئومورفیسم روی G است. به علاوه $K_g \circ K_{g'} = K_{gg'}$, $K_e = 1_G$ ، بنابراین K_g یک عمل گروه از G به خودش را مشخص می‌کند. با هر نگاشت مزدوج K_g یک گروه همومورفیسم داریم: $K_g(hh') = K_g(h)K_g(h')$. نگاشت مشتق $dK_g : TG|_h \rightarrow TG|_{K_g(h)}$ یک نگاشت خطی روی جبر لی گروه G می‌باشد که نمایش الحاقی^۲ می‌نامیم:

$$Adg(v) \equiv dK_g(v), \quad v \in \mathfrak{g}. \quad (123.2)$$

باید توجه داشت که نمایش الحاقی در کل یک عمل گر خطی از G روی $\mathfrak{g}$ را ارائه می‌دهد:

$$Ad(g \cdot g') = Adg \circ Adg', \quad Ade = 1. \quad (124.2)$$

نمایش الحاقی هر گروه لی روی جبر لی آن از مولدهای بی‌نهایت کوچک نتیجه می‌شود. اگر v مولد گروه یک پارامتری $\{exp(\varepsilon v)\}$ باشد، آنگاه Adv به عنوان یک میدان برداری روی $\mathfrak{g}$ ، یک گروه یک پارامتری از تبدیلات الحاقی را تولید می‌کند:

$$Adv|_w \equiv \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} Ad(exp(\varepsilon v))w, \quad w \in \mathfrak{g}. \quad (125.2)$$

گزاره ۴.۶.۲. اگر G یک گروه لی با جبر $\mathfrak{g}$ باشد، آنگاه برای هر $v, w \in \mathfrak{g}$ داریم

$$Adv|_w = [w, v] = -[v, w]. \quad (126.2)$$

^۲Conjugate

^۳Adjoint representation

همچنین رابطه‌ای پرکاربرد زیر داریم:

$$Ad(exp(\varepsilon v))w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} (adv)^n(w_0) = w_0 - \varepsilon[v, w_0] + \frac{\varepsilon^2}{2}[v, [v, w_0]] - \dots \quad (127.2)$$

مثال ۵.۶.۲. به راحتی می‌توان دید که جبر لی تولید شده توسط بردارهای $V_2 = \partial t$, $V_1 = \partial x$ و $V_3 = t\partial x + \partial u$ و $V_4 = x\partial x + 3t\partial t - 2u\partial u$ گروه تقارنی معادله KdV را تولید می‌کند. برای محاسبه نمایش الحاقی، با استفاده از سری (۱۲۷.۲) و همچنین از رابطه جابجاگرها، به عنوان مثال داریم:

$$Ad(exp(\varepsilon V_2))V_4 = V_4 - \varepsilon[V_2, V_4] + \frac{1}{2}\varepsilon^2[V_2, [V_2, V_4]] - \dots = V_4 - 3\varepsilon V_2. \quad (128.2)$$

بنابراین جدول ۲.۲ را به صورت زیر داریم:

جدول ۲.۲: جدول جابجاگر برای مولدهای معادله KdV

Ad	V_1	V_2	V_3	V_4
V_1	V_1	V_2	V_3	$V_4 - \varepsilon V_1$
V_2	V_1	V_2	$V_3 - \varepsilon V_1$	$V_4 - 3\varepsilon V_2$
V_3	V_1	$V_2 + \varepsilon V_1$	V_3	$V_4 + 2\varepsilon V_3$
V_4	$e^\varepsilon V_1$	$e^{3\varepsilon} V_2$	$e^{-2\varepsilon} V_3$	V_4

۴.۶.۲ طبقه‌بندی زیرگروه‌ها و زیرجبرها

تعریف ۶.۶.۲. فرض می‌کنیم G یک گروه لی باشد. یک دستگاه بهینه زیرگروه‌های s پارامتری، یک کلاس از زیرگروه‌های مزدوج و غیر هم ارز s پارامتری می‌باشد با این ویژگی که هر زیرگروه فقط در یک کلاس قرار دارد. به طور مشابه دستگاه بهینه زیرجبرها نیز تعریف می‌شود.

مثال ۷.۶.۲. جبر متقارن g معادله KdV که نمایش الحاقی آن در مثال فوق نشان داده شده است را در نظر می‌گیریم. با در نظر گرفتن بردار غیرصفر

$$V = a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3 + a_4 V_4,$$

ابتدا فرض می‌کنیم $a_4 \neq 0$ باشد و $a_4 = 1$. اگر با $Ad(\exp(-\frac{1}{2}a_3V_3))$ بر V عمل کنیم ضریب V_3 برابر صفر خواهد شد و خواهیم داشت:

$$V' = Ad(\exp(-\frac{1}{2}a_3V_3))V = a'_1V_1 + a'_2V_2 + V_4$$

که a'_1, a'_2 به a_1, a_2, a_3 وابسته‌اند. حال اگر بر روی V' با $Ad(\exp(\frac{1}{3}a'_2V_2))$ عمل کنیم ضریب V_2 صفر خواهد شد، پس داریم:

$$V'' = a'_1V_1 + V_4 \quad (۱۲۹.۲)$$

و در مرحله آخر اگر از $Ad(\exp(a'_1V_1))$ استفاده کنیم ضریب V_1 برابر صفر خواهد شد. به عبارت دیگر، هر زیرجبر یک بعدی تولید شده توسط V در صورتی که $a_4 \neq 0$ باشد با زیرجبر تولید شده توسط V_4 هم ارز است.

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم یک دستگاه بهینه از زیرجبرهای یک بعدی هم ارز با زیرجبر تولید شده توسط V به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u,$$

$$V_3 + V_2 = t\partial_x + \partial_t + \partial_u,$$

$$V_3 - V_2 = t\partial_x + \partial_t + \partial_u,$$

$$V_3 = t\partial_x + \partial_u,$$

$$V_2 = \partial_t,$$

$$V_1 = \partial_x.$$

۵.۶.۲ تقارنی‌های غیرکلاسیک

فرض کنید E دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی k به صورت

$$\Delta_\nu(x, u, u^{(k)}) = 0, \quad \nu = 1, \dots, l, \quad (۱۳۰.۲)$$

باشد که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ متغیر مستقل و $u = (u^1, \dots, u^q)$ متغیر وابسته‌ی معادله است و $u^{(k)}$ نمایانگر مشتقات u نسبت به x تا مرتبه‌ی k است. فرض کنیم V یک میدان برداری از متغیرهای مستقل وابسته روی فضای $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ باشد:

$$V = \sum_{i=1}^n \xi^i(x, u) \partial x_i + \sum_{\alpha=1}^q \phi^\alpha(x, u) \partial u^\alpha. \quad (۱۳۱.۲)$$

نمودار جواب

$$u^\alpha = f^\alpha(x_1, \dots, x_n), \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad (۱۳۲.۲)$$

یک زیرمنیفلد n -بعدی به صورت $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ روی فضای متغیرهای مستقل و وابسته تعریف می‌کند.

گفته شد که جواب ناورد تحت گروه یک پارامتری تولید شده توسط V است اگر و تنها اگر Γ_f یک زیرمنیفلد ناوردا از این گروه باشد. با به کارگیری معیار ناوردائی زیرمنیفلدها تحت یک میدان برداری می‌توان گفت که (۱۳۲.۲) ناوردا تحت V است اگر و تنها اگر f در شرط سطح ناوردا صدق کند. قابل ذکر است که شرط سطح ناوردا به صورت E_Q ، دستگاهی از معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول

$$Q^\alpha(x, u, u^{(1)}) = \phi^\alpha(x, u) - \sum_{i=1}^n \xi^i(x, u) \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i} = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q, \quad (۱۳۳.۲)$$

می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی فوق، q تائی $Q = (Q^1, \dots, Q^q)$ مشخصه‌ی میدان برداری نامیده می‌شود. با توجه به اینکه جواب‌های (۱۳۳.۲) ناوردا تحت V هستند، اولین تطویل $Pr^{(1)}V$ مماس به E_Q خواهد بود. از اینجا به بعد، k امین تطویل شرط سطح ناوردا را با نماد $E_Q^{(k)}$ نمایش می‌دهیم که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه k خواهد بود.

برای اینکه دستگاه (۱۳۰.۲) و (۱۳۳.۲) سازگار با هم باشند، باید k امین تطویل $Pr^{(k)}V$ مماس بر $E \cap E_Q^{(k)}$ باشد، یعنی

$$Pr^{(k)}V(\Delta_\nu)|_{E \cap E_Q^{(k)}} = 0, \quad \nu = 1, \dots, l. \quad (۱۳۴.۲)$$

اگر معادلات (۱۳۴.۲) برقرار باشند، در این صورت میدان برداری (۱۳۱.۲) تقارنی بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک دستگاه (۱۳۰.۲) نامیده می‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، روابط (۱۳۴.۲) تعمیم یافته‌های روابط

$$Pr^{(k)}V(\Delta_\nu)|_E = 0, \quad \nu = 1, \dots, l,$$

هستند که در واقع تقارنی‌های بی‌نهایت کوچک کلاسیک هستند. خصیصه‌ی مهم معادلات تعیینی برای تقارنی‌های غیرکلاسیک، غیرخطی بودن آنها است. بنابراین فضای تقارنی‌های غیرکلاسیک در کل تشکیل فضای برداری نمی‌دهند. علاوه بر این، گروه لی میدان‌های برداری تقارنی غیرکلاسیک، تقارنی غیرکلاسیک نخواهند بود. اگر $\lambda(x, u)$ تابعی دلخواه باشد، آنگاه فرمول تطویل برای میدان‌های برداری نتیجه می‌دهد:

$$Pr^{(k)}(\lambda V)|_{E_Q^{(k)}} = \lambda Pr^{(k)}(V)|_{E_Q^{(k)}}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که اگر V تقارنی غیرکلاسیک باشد آنگاه λV نیز یک تقارنی غیرکلاسیک خواهد بود.

فصل ۳

روش تیراندازی گروه لی برای حل معادله
براتو

۱.۳ مقدمه

ساده‌سازی مدل احتراق سوخت جامد^۱ در نظریه سوخت حرارتی^۲ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی به نام معادله براتو^۳ را نتیجه می‌دهد. همچنین دارای کاربردهای مختلفی مانند مدل واکنش حرارتی^۴، مدل انبساط جهان چاندراکسار^۵، نظریه واکنش شیمیایی، تکنولوژی نانو و انتقال حرارت [۱۵، ۹۶، ۹۷، ۱۲۳، ۱۲۴، ۱۶۰، ۱۷۸] است.

معادله براتو یک مسئله مقدار مرزی غیرخطی است که به عنوان محکی برای دقت روش‌های عددی نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. مسئله براتو را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0, \quad u(0) = u(1) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (۱.۳)$$

که در آن $\lambda > 0$. این مسئله دارای جواب تحلیلی به صورت

$$u(x) = -2 \ln \left[\frac{\cosh \left((x - \frac{1}{2}) \frac{\theta}{2} \right)}{\cosh(\frac{\theta}{4})} \right], \quad (۲.۳)$$

است که در آن θ جواب $\theta = \sqrt{2\lambda} \cosh(\frac{\theta}{4})$ می‌باشد. معادله براتو به ترتیب دارای صفر، یک و دو جواب است هرگاه $\lambda > \lambda_c$ ، $\lambda = \lambda_c$ و $\lambda < \lambda_c$ که در آن λ_c مقدار بحرانی^۶ بوده و در معادله زیر صدق می‌کند:

$$1 = \frac{1}{4} \sqrt{2\lambda_c} \sinh\left(\frac{\theta_c}{4}\right).$$

در مقالات [۵، ۱۶] مقدار بحرانی λ_c به صورت $\lambda_c = 3.513830719$ محاسبه گردیده است. روش‌های تحلیلی و عددی زیادی برای معادله (۱.۳) به کار گرفته شده‌اند که از آن جمله می‌توان به

^۱Solid fuel ignition model

^۲Thermal combustion

^۳Bratu

^۴Thermal reaction

^۵Chandrasekhar

^۶Critical value

مقاله وزواز^۷ [۱۷۸] با به کارگیری روش تجزیه آدومین اشاره نمود. روش باقی مانده وزندار برای نشان دادن وجود جواب های چندگانه معادله براتو مورد استفاده قرار گرفت [۵]. جلیلیان [۸۵] جواب های تقریبی همواری از مسئله براتو یک بعدی را به وسیله توابع اسپلین غیر چندجمله ای ارائه داد. کاگلر^۸ و همکارانش [۳۴] از روش B - اسپلین برای حل این مسئله استفاده کردند و همچنین خوری^۹ [۸۸] روش عددی تبدیل لاپلاس را برای حل این معادله توسعه داد. روش تبدیل مشتق [۷۲] نیز برای حل معادله براتو یک بعدی مورد استفاده قرار گرفت. همچنین برخی مقالات دیگر نیز در این زمینه موجود می باشند [۶، ۱۷، ۳۵، ۵۱، ۵۴].

در این بخش مسئله براتو را به وسیله روش تیراندازی گروه لی که بر پایه طرح حافظ گروه است، حل می کنیم. روش تیراندازی گروه لی شرط آغازین را با استفاده از به دست آوردن بهترین r در بازه $[0, 1]$ به دست می آورد که با استفاده از انطباق شرط مرزی طرف راست مسئله می توان نتیجه گرفت. عامل r در قانون نقطه میانی تعمیم یافته برای گروه لی طرح حافظ گروه مورد استفاده قرار می گیرد. روش تیراندازی گروه لی روشی موثر و قوی می باشد که به سادگی قابل اجراء بوده و صرفه جویی قابل ملاحظه ای در زمان دارد. اخیراً روش تیراندازی گروه لی برای مسائل مختلفی در مقالات [۳۷، ۳۸، ۹۴، ۹۵، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۵، ۱۸۲] اجراء شده و همچنین مقالاتی در مورد طرح حافظ گروه را در [۱۰۶، ۱۰۷، ۱۰۸] می توان یافت.

۲.۳ تبدیل مختصات

در استفاده از روش تیراندازی گروه لی ابتدا مسئله مقدار مرزی (۱.۳) را به یک مسئله معادل مقدار آغازین تبدیل کنیم. برای این کار از تبدیل زیر استفاده می کنیم:

$$y(x) = u(x) + c, \quad c > 0. \quad (۳.۳)$$

^۷Wazwaz

^۸Caglar

^۹Khuri

بنابراین مسئله براتو به مسئله زیر تبدیل می‌شود:

$$y''(x) + \lambda e^{y(x)-c} = 0, \quad (4.3)$$

$$y(0) = y(1) = c.$$

حال معادله (۴.۳) را به دستگاه معادل زیر تبدیل می‌کنیم:

$$y_1'(x) = y_2(x), \quad (5.3)$$

$$y_2'(x) = -\lambda e^{y_1(x)-c}, \quad (6.3)$$

$$y_1(0) = c, \quad y_2(0) = A, \quad (7.3)$$

که در آن $c > 0$ ثابت داده شده است و با استفاده از روش تیراندازی گروه لی مقدار نامعلوم A را پیدا خواهیم کرد.

۳.۳ طرح حافظ گروه یک مرحله‌ای

ابتدا معادلات (۵.۳) و (۶.۳) را به شکل برداری زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{Y}), \quad (8.3)$$

که در آن

$$\mathbf{Y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{bmatrix} y_2 \\ -\lambda e^{y_1-c} \end{bmatrix}. \quad (9.3)$$

لیو در مقاله‌ی [۹۳] معادله‌ی (۸.۳) را به یک دستگاه افزوده‌ی^{۱۰} به فرم کلی زیر در آورد:

$$\mathbf{X}' := \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \|\mathbf{Y}\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & \frac{\mathbf{f}(x, \mathbf{Y})}{\|\mathbf{Y}\|} \\ \frac{\mathbf{f}^T(x, \mathbf{Y})}{\|\mathbf{Y}\|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \|\mathbf{Y}\| \end{bmatrix} := \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (10.3)$$

^{۱۰} Augmented system

که A عضو جبر لی $so(2, 1)$ وابسته به گروه لی لورنتزی $SO_0(2, 1)$ (گروه شامل تمام ماتریس‌های متقارن $n \times n$ با دترمینان یک) است که در رابطه‌ی زیر صادق است:

$$A^T g + g A = 0, \quad (11.3)$$

که در آن

$$g = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2 \times 1} \\ 0_{1 \times 2} & -1 \end{bmatrix}, \quad (12.3)$$

یک متر مینکوفسکی^{۱۱} است. متغیر افزوده‌ی $\mathbf{X}$ در شرط مخروط^{۱۲}

$$\mathbf{X}^T g \mathbf{X} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} - \|\mathbf{Y}\|^2 = 0, \quad (13.3)$$

صدق می‌کند. طرح حافظ گروه معرفی شده در مقاله‌ی [۹۳] به شکل

$$\mathbf{X}_{n+1} = G(n) \mathbf{X}_n, \quad (14.3)$$

می‌باشد، که در آن $\mathbf{X}_n$ نمایان‌گر مقدار عددی $\mathbf{X}$ در نقاط گسسته‌ی x_n می‌باشد و $G(n) \in SO_0(2, 1)$ در رابطه‌ی

$$G^T g G = g, \quad (15.3)$$

$$\det(G) = 1, \quad (16.3)$$

$$G_0^0 > 0, \quad (17.3)$$

صدق می‌کند که در آن G_0^0 عبارت است از ۰۰ امین مولفه‌ی G و $SO_0(2, 1)$ گروه لورنتزی^{۱۳} سه بعدی است.

^{۱۱}Minkowski metric

^{۱۲}Cone condition

^{۱۳}Lorentz

۱.۳.۳ روش نقطه میانی تعمیم یافته

با به کارگیری (۱۴.۳) برای معادله‌ی (۱۰.۳) و با شرط آغازین $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ جواب $\mathbf{X}(x)$ را به وسیله‌ی طرح حافظ گروه می‌توان محاسبه نمود. فرض می‌کنیم طول گام استفاده شده در طرح حافظ گروه $\Delta x = 1/K$ باشد. با شروع از شرط افزوده‌ی آغازین زیر $(\mathbf{Y}^0)^T, \|\mathbf{Y}^0\|)^T$ $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(0) = ((\mathbf{Y}^0)^T, \|\mathbf{Y}^0\|)^T$ مقادیر $\mathbf{X}(1) = (\mathbf{Y}^T(1), \|\mathbf{Y}(1)\|)^T$ را در نقطه‌ی $x = 1$ محاسبه خواهیم نمود. با به کارگیری مرحله به مرحله‌ی (۱۴.۳) به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{X}(1) \cong \mathbf{X}_f = G_K(\Delta x) \cdots G_1(\Delta x) \mathbf{X}_0. \quad (18.3)$$

با توجه به این که هر G_i ، $i = 1, \dots, K$ عضوی از گروه لی $SO_o(n, 1)$ است و با استفاده از خاصیت بسته بودن گروه‌های لی $G_K(\Delta x) \cdots G_1(\Delta x)$ نیز یک گروه لی خواهد بود که با نماد G نمایش می‌دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{X}_f = G \mathbf{X}_0, \quad (19.3)$$

که یک تبدیل یک مرحله‌ای از $\mathbf{X}_0$ به $\mathbf{X}_f$ است. می‌توان G را با استفاده از روش نقطه‌ی میانی تعمیم یافته محاسبه نمود که در واقع با استفاده از یک نگاشت نمایی از A و قرار دادن مقادیر متغیرهای آن در روش نقطه میانی تعمیم یافته به دست آورد. گروه لی تولید شده به وسیله‌ی $A \in so(2, 1)$ معروف به گروه لورنتزی اورتوکرونوس^{۱۴} است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$G = \begin{bmatrix} I_2 + \frac{(\alpha-1)}{\|\tilde{\mathbf{f}}\|^2} \tilde{\mathbf{f}} \tilde{\mathbf{f}}^T & \frac{\beta \tilde{\mathbf{f}}}{\|\tilde{\mathbf{f}}\|} \\ \frac{\beta \tilde{\mathbf{f}}^T}{\|\tilde{\mathbf{f}}\|} & \alpha \end{bmatrix}, \quad (20.3)$$

^{۱۴} Orthochronous Lorentz group

که در آن

$$\tilde{\mathbf{Y}} = r\mathbf{Y}^0 + (1-r)\mathbf{Y}^f, \quad (21.3)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}(\tilde{x}, \tilde{\mathbf{Y}}), \quad (22.3)$$

$$\alpha = \cosh\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{f}}\|}{\|\tilde{\mathbf{Y}}\|}\right), \quad (23.3)$$

$$\beta = \sinh\left(\frac{\|\tilde{\mathbf{f}}\|}{\|\tilde{\mathbf{Y}}\|}\right). \quad (24.3)$$

حال $\mathbf{Y}^0 = (y_1(0), y_2(0))^T$ را به عنوان مقدار آغازین و $\mathbf{Y}^f = (y_1(1), y_2(1))^T$ را به عنوان مقدار نهایی در محاسبه‌ی G به ازای r به کار می‌بریم که در آن $r \in [0, 1]$ یک پارامتر است و $\tilde{x} = r$. روش فوق را با استفاده از روش نقطه میانی تعمیم یافته برای محاسبه‌ی G به کار می‌بریم که حاصل آن عضوی از گروه لی یک پارامتری مانند $G(r)$ خواهد بود. در نهایت با مقایسه شرط مرزی طرف راست، مقدار مناسبی را برای r به دست خواهیم آورد.

۲.۳.۳ نگاشت گروه لی بین دو نقطه روی مخروط

بردار جدیدی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{F} := \frac{\tilde{\mathbf{f}}}{\|\tilde{\mathbf{Y}}\|}, \quad (25.3)$$

به طوری که معادله‌ی (۲۰.۳) به صورت زیر بیان گردد:

$$G = \begin{bmatrix} I_2 + \frac{(\alpha-1)}{\|\mathbf{F}\|^2} \mathbf{F}\mathbf{F}^T & \frac{\beta\mathbf{F}}{\|\mathbf{F}\|} \\ \frac{\beta\mathbf{F}^T}{\|\mathbf{F}\|} & \alpha \end{bmatrix}, \quad (26.3)$$

$$\alpha = \cosh(\|\mathbf{F}\|), \quad (27.3)$$

$$\beta = \sinh(\|\mathbf{F}\|). \quad (28.3)$$

از معادلات (۱۹.۳) و (۲۶.۳) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{Y}^f = \mathbf{Y}^0 + \eta \mathbf{F}, \quad (29.3)$$

$$\|\mathbf{Y}^f\| = \alpha \|\mathbf{Y}^0\| + \beta \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}^0}{\|\mathbf{F}\|}, \quad (30.3)$$

که در آن

$$\eta := \frac{(\alpha - 1)\mathbf{F} \cdot \mathbf{Y}^0 + \beta \|\mathbf{Y}^0\| \|\mathbf{F}\|}{\|\mathbf{F}\|^2}. \quad (31.3)$$

با جای‌گذاری

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\eta}(\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0), \quad (32.3)$$

در معادله‌ی (۳۰.۳) به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\|\mathbf{Y}^f\|}{\|\mathbf{Y}^0\|} = \alpha + \beta \frac{(\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0) \cdot \mathbf{Y}^0}{\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\| \|\mathbf{Y}^0\|}, \quad (33.3)$$

که در آن

$$\alpha = \cosh\left(\frac{\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|}{\eta}\right), \quad (34.3)$$

$$\beta = \sinh\left(\frac{\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|}{\eta}\right), \quad (35.3)$$

با قرار دادن معادله‌ی (۳۲.۳) برای $\mathbf{F}$ در معادله‌ی (۲۷.۳) و (۲۸.۳) به‌دست می‌آیند. فرض می‌کنیم:

$$\cos \theta := \frac{(\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0) \cdot \mathbf{Y}^0}{\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\| \|\mathbf{Y}^0\|}, \quad (36.3)$$

$$\zeta := \|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|, \quad (37.3)$$

و با استفاده از معادلات (۳۳.۳)-(۳۵.۳) نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\|\mathbf{Y}^f\|}{\|\mathbf{Y}^0\|} = \cosh\left(\frac{\zeta}{\eta}\right) + \cos\theta \sinh\left(\frac{\zeta}{\eta}\right). \quad (38.3)$$

با تعریف

$$Z := \exp\left(\frac{\zeta}{\eta}\right), \quad (39.3)$$

برای Z ، معادله‌ی درجه‌ی دومی را از (۳۸.۳) به صورت

$$(1 + \cos\theta)Z^2 - \frac{2\|\mathbf{Y}^f\|}{\|\mathbf{Y}^0\|}Z + 1 - \cos\theta = 0, \quad (40.3)$$

به دست می‌آوریم. از سوی دیگر، با قرار دادن (۳۲.۳) برای $\mathbf{F}$ در معادله‌ی (۳۱.۳) خواهیم داشت:

$$\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|^2 = (\alpha - 1)(\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0) \cdot \mathbf{Y}^0 + \beta\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|\|\mathbf{Y}^0\|. \quad (41.3)$$

با تقسیم دو طرف رابطه بر $\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|\|\mathbf{Y}^0\|$ و با استفاده از معادلات (۳۴.۳)-(۳۷.۳) و (۳۹.۳) معادله‌ی درجه‌ی دومی برای Z را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$(1 + \cos\theta)Z^2 - 2\left(\cos\theta + \frac{\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|}{\|\mathbf{Y}^0\|}\right)Z + \cos\theta - 1 = 0. \quad (42.3)$$

با حذف جمله‌ی درجه‌ی دوم Z^2 از (۴۰.۳) و (۴۲.۳) به دست می‌آوریم:

$$Z = \frac{(\cos\theta - 1)\|\mathbf{Y}^0\|}{\cos\theta\|\mathbf{Y}^0\| + \|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\| - \|\mathbf{Y}^f\|}. \quad (43.3)$$

سپس از معادلات (۳۷.۳) و (۳۹.۳) داریم:

$$\eta = \frac{\|\mathbf{Y}^f - \mathbf{Y}^0\|}{\ln Z}. \quad (44.3)$$

بنابراین بین دو نقطه‌ی $(\mathbf{Y}^0, \|\mathbf{Y}^0\|)$ و $(\mathbf{Y}^f, \|\mathbf{Y}^f\|)$ روی مخروط، عضوی از گروه لی $G \in SO_o(2, 1)$ با نداشت از $(\mathbf{Y}^0, \|\mathbf{Y}^0\|)$ به روی $(\mathbf{Y}^f, \|\mathbf{Y}^f\|)$ وجود دارد که توسط

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y}^f \\ \|\mathbf{Y}^f\| \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \mathbf{Y}^0 \\ \|\mathbf{Y}^0\| \end{bmatrix}, \quad (45.3)$$

مشخص گردیده و G به طور منحصر به فردی توسط $\mathbf{Y}^0$ و $\mathbf{Y}^f$ از معادلات (۲۶.۳)، (۲۷.۳)، (۲۸.۳)، (۳۲.۳) و (۴۴.۳) تعیین می‌گردد.

۴.۳ روش تیراندازی گروه لی

با استفاده از (۵.۳)–(۷.۳) داریم

$$y_1'(x) = y_2(x), \quad (46.3)$$

$$y_2'(x) = -\lambda e^{y_1(x)-c}, \quad (47.3)$$

$$y_1(0) = c, \quad y_1(1) = c, \quad (48.3)$$

$$y_2(0) = A, \quad y_2(1) = B, \quad (49.3)$$

که در آن A و B ثابت‌های نامعلوم هستند و c ثابت داده شده است. از معادلات (۴۸.۳)، (۳۲.۳) و (۴۹.۳) نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} 0 \\ B - A \end{bmatrix}. \quad (50.3)$$

از معادلات (۳۶.۳)، (۴۳.۳) و (۴۴.۳) با قرار دادن معادله (۹.۳) در $\mathbf{Y}$ و با توجه به

$$\mathbf{Y}^0 = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ A \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^f = \begin{bmatrix} y_1(1) \\ y_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ B \end{bmatrix}, \quad (51.3)$$

به دست می آوریم

$$\eta = \frac{\sqrt{(A-B)^2}}{\ln Z}, \quad (52.3)$$

$$Z = \frac{\frac{\sqrt{c^2+B^2}}{\sqrt{c^2+A^2}} + \sqrt{\frac{c^2+B^2}{c^2+A^2} - 1 + \cos^2 \theta}}{1 + \cos \theta}, \quad (53.3)$$

$$\cos \theta = \frac{A(B-A)}{\sqrt{(A-B)^2} \sqrt{c^2 + A^2}}. \quad (54.3)$$

در مقایسه معادله (۵۰.۳) با (۲۵.۳) در جهت (۲۱.۳)، (۲۲.۳) و (۴۶.۳)-(۴۹.۳) به دست می آوریم

$$rA + (1-r)B = 0, \quad (55.3)$$

$$A - B - \frac{\eta\lambda}{\xi} = 0, \quad (56.3)$$

که در آن

$$\xi := \sqrt{c^2 + [rA + (1-r)B]^2} = c. \quad (57.3)$$

از معادله (۵۵.۳) به دست می آوریم $B = rA/(r-1)$ که با توجه به $0 < r < 1$ ، مختلف علامه با A خواهد بود. بنابراین یک عبارت جبری برای A به صورت زیر به دست می آوریم:

$$A - \frac{\lambda\sqrt{A^2}}{c \ln Z} = 0, \quad (58.3)$$

که در آن

$$Z = \frac{\sqrt{c^2 + B^2} + \sqrt{B^2}}{\sqrt{c^2 + A^2} - \sqrt{A^2}}. \quad (59.3)$$

۵.۳ مقدار A

برای مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم، اولین بار ليو [۹۹] به صورت تحلیلی مقدار A را به دست آورد. در این بخش ما تنها حالت $A > 0$ را برای معادله براتو مورد بررسی قرار می‌دهیم. از معادله (۵۸.۳) می‌توان به دست آورد:

$$\ln Z = \frac{\lambda}{c}. \quad (۶۰.۳)$$

با تعریف

$$\Theta := e^{\frac{\lambda}{c}}, \quad (۶۱.۳)$$

و جای‌گذاری معادله (۵۹.۳) برای Z در معادله (۶۰.۳) داریم:

$$\Theta = \frac{\sqrt{c^2 + B^2} + \sqrt{B^2}}{\sqrt{c^2 + A^2} - \sqrt{A^2}}. \quad (۶۲.۳)$$

حال با استفاده از $A > 0$ و $B < 0$ معادله (۶۲.۳) را می‌توان به صورت

$$\Theta A - B = \Theta \sqrt{c^2 + A^2} - \sqrt{c^2 + B^2}. \quad (۶۳.۳)$$

نوشت. با به توان دو رساندن معادله فوق و حذف جملات مشترک می‌توان آن را به صورت زیر مرتب سازی نمود:

$$2\Theta \sqrt{c^2 + B^2} \sqrt{c^2 + A^2} = (1 + \Theta^2)c^2 + 2\Theta AB. \quad (۶۴.۳)$$

با مجذورسازی دوباره و حذف جمله مشترک و فاکتورگیری داریم:

$$4\Theta^2(A^2 + B^2) - 4\Theta(1 + \Theta^2)AB = (1 - \Theta^2)^2 c^2. \quad (۶۵.۳)$$

با قرار دادن $B = rA/(r-1)$ و انجام برخی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{4\Theta}{(r-1)^2} [- (1-\Theta)^2 r^2 + (1-\Theta)^2 r + \Theta] A^2 = (1-\Theta^2)^2 c^2. \quad (۶۶.۳)$$

اگر شرط فوق برقرار باشد

$$\Psi(r) := -(1-\Theta)^2 r^2 + (1-\Theta)^2 r + \Theta > 0, \quad (۶۷.۳)$$

آنگاه A جواب مثبتی به صورت

$$A = \sqrt{\frac{(r-1)^2 (1-\Theta^2)^2 c^2}{4\Psi\Theta}}, \quad (۶۸.۳)$$

دارد. شرط (۶۷.۳) برای تعیین دامنه r مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بخش نتایج عددی، برای تمام مثال‌ها تابع $\Psi(r)$ را رسم خواهیم نمود.

۶.۳ وفق دادن شیب A

در بخش قبلی جوابی دقیق برای شیب A در دامنه مجاز r محاسبه گردید. حال اگر A در دست باشد، می‌توان طرح حافظ گروه را برای به‌دست آوردن جواب $(Y, x) - IVP$ از معادلات (۴۶.۳) - (۴۹.۳) مورد استفاده قرار داد. تا این لحظه باید توجه داشت که روش تیراندازی گروه لی یک روش تحلیلی برای حل مسائل مقدار مرزی غیرخطی مرتبه دوم خواهد بود، اگر هیچ فرضی یا تقریبی در به‌دست آوردن روابط مورد استفاده در آن به میان نیاید. با این حال طرز تعیین r و در نتیجه A نیاز به استفاده از روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی خواهد داشت.

۱.۶.۳ طرح حافظ گروه

جواب‌هایی را به فرم بسته برای شیب A در هر r ، محاسبه کردیم و بنابراین با انتگرال‌گیری از $(Y, x) - IVP$ در معادلات (۴۶.۳) - (۴۹.۳) به وسیله‌ی طرح حافظ گروه داریم:

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{2\tau \|Y_n\|^2 + 2\tau^2 f_n \cdot Y_n}{\|Y_n\|^2 - \tau^2 \|f_n\|^2} f_n, \quad (۶۹.۳)$$

که در آن

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(x_n, \mathbf{Y}_n), \quad \tau = h/2. \quad (۷۰.۳)$$

طرح حافظ گروه از تبدیلات کیلی^{۱۵} و تقریب پاد^{۱۶} در فضای افزوده به نام فضای مینکوفسکی استفاده می‌کند. تفاوت اساسی مابین طرح حافظ گروه و روش‌های عددی قبلی این است که در روش‌های قبلی از فضاهاى اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ استفاده می‌شود در حالی که در طرح حافظ گروه از فضای مینکوفسکی $\mathbb{M}^{n+1}$ استفاده می‌شود. یکی از مزایای استفاده از فضای مینکوفسکی در طرح حافظ گروه، اجتناب از جواب‌های جعلی^{۱۷} است.

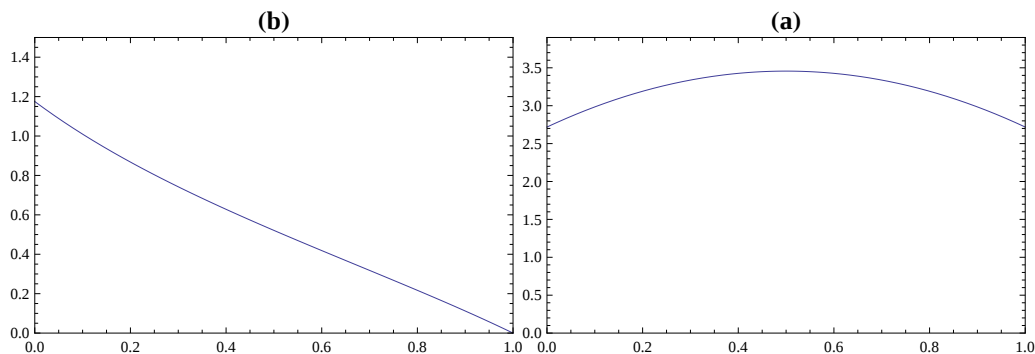
۲.۶.۳ تعیین A برای معادله براتو

برای مقدار آزمایشی r در ناحیه مجاز که توسط رابطه (۶۷.۳) تعیین می‌گردد، می‌توان مقدار A را محاسبه کرده و سپس جواب عددی (۴۶.۳)–(۴۹.۳) را از $x = 0$ تا $x = 1$ به‌دست آوریم. در نهایت $y_1^r(1)$ را با مقدار دقیق آن یعنی c و $y_1(1) = c$ مقایسه می‌کنیم. اگر $|y_1(r) - c|$ کوچکتر از مقدار خطای تولرانس داده شده ϵ باشد، روند به‌دست آوردن A خاتمه می‌یابد، در غیر این صورت نیاز به محاسبه مقادیر $y_1(1)$ متناظر با $r_1 < r$ و $r_2 > r$ خواهیم داشت که به ترتیب با نمادهای $y_1^{r_1}(1)$ و $y_1^{r_2}(1)$ نمایش داده می‌شوند. اگر $(y_1^{r_1}(1) - c)(y_1^r(1) - c) < 0$ ریشه بین r_1 و r است. سپس از روش تنصیف برای به‌دست آوردن مقدار مناسب r استفاده می‌کنیم که نیاز خواهیم داشت به محاسبه (۴۶)–(۴۹.۳) و تا زمانی که معیار $|y_1^r(1) - c| < \epsilon$ برآورد نشده این روند را ادامه خواهیم داد.

^{۱۵}Cayley

^{۱۶}Pade

^{۱۷}spurious



شکل ۱.۳: نمودار (a) $\Psi(r)$ و (b) $A(r)$ برای $\lambda = 1$.

۷.۳ نتایج عددی

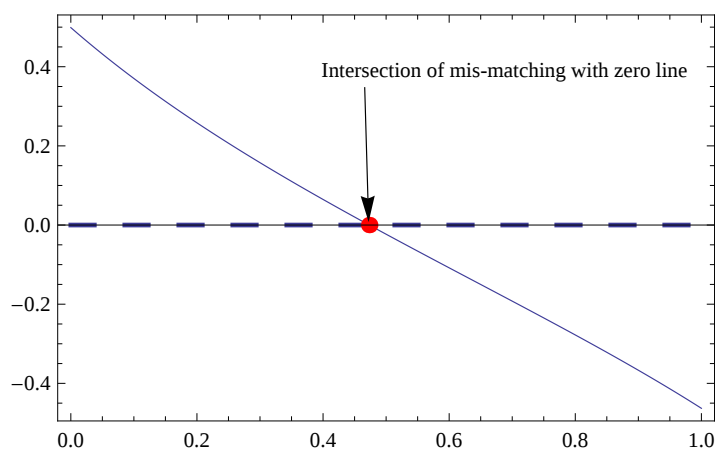
۱.۷.۳ مسئله براتو برای $\lambda = 1$

در معادله (۱.۳) ابتدا حالت $\lambda = 1$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با قرار دادن $c = 1$ در تبدیل (۳)، دستگاه معادلات (۵.۳)–(۷.۳) که به صورت زیر داده شده

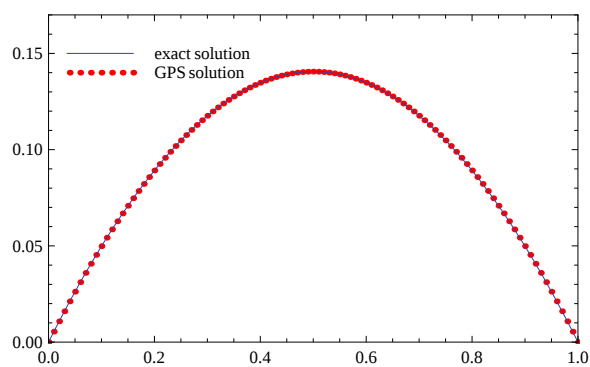
$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x), \\ y_2'(x) &= -e^{y_1(x)-1}, \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = A, \end{aligned}$$

با استفاده از روش تیراندازی گروه لی مقدار A را محاسبه می‌کنیم. شکل ۱.۳ ناحیه مجاز برای r که توسط $\Psi(r) > 0$ تعیین می‌شود و $A(r)$ برای $r \in [0, 1]$ را نشان می‌دهد که توسط روابط (۶۲.۳)، (۶۷.۳) و (۶۸.۳) به دست می‌آیند.

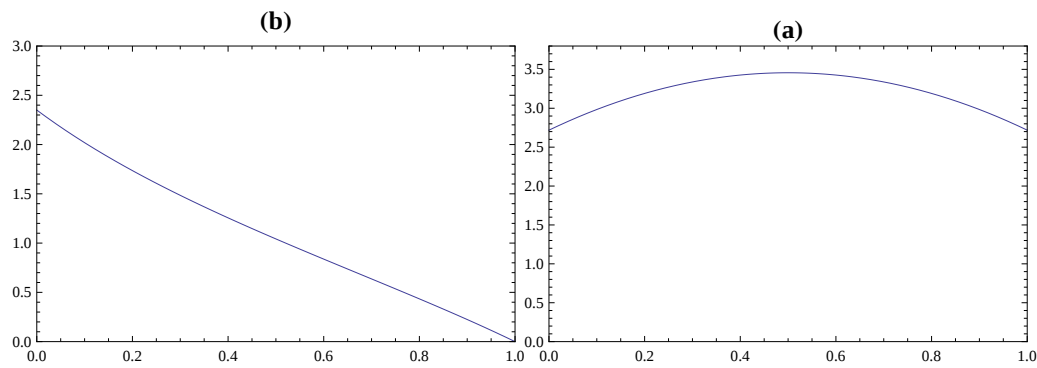
حال با استفاده از فرآیند توضیح داده شده بخش قبلی داریم $r = 0.47320174117$ و $A(r) = 0.54919267548$. موقعیت این ریشه در شکل ۲.۳ نمایش داده شده است. همچنین با ثابت فرض کردن طول گام $h = 0.0001$ جواب‌های به دست آمده تحلیلی و عددی را در شکل ۳.۳ نمایش می‌دهیم.



شکل ۲.۳: نمودار $y_1(1) - 1$ نسبت به r برای $\lambda = 1$.



شکل ۳.۳: نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده توسط طرح گروه لی به ازای $\lambda = 1$.



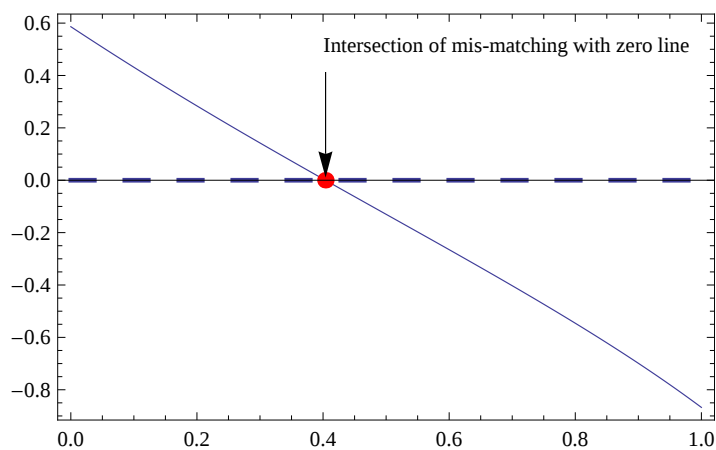
شکل ۴.۳: نمودار (a) $\Psi(r)$ و (b) $A(r)$ برای $\lambda = 2$.

۲.۷.۳ مسئله براتو برای $\lambda = 2$

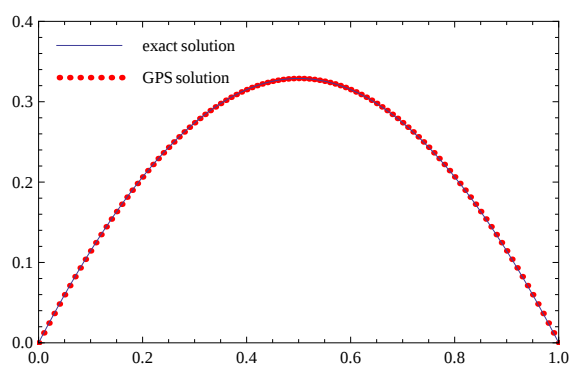
برای مسئله براتو با مقدار $\lambda = 2$ ثابت تبدیل $c = 2$ را در (۳.۳) در نظر می‌گیریم. دستگاه معادلات (۵.۳)–(۷.۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -2e^{y_1(x)-2}, \\ y_1(0) &= 2, \quad y_2(0) = A. \end{aligned}$$

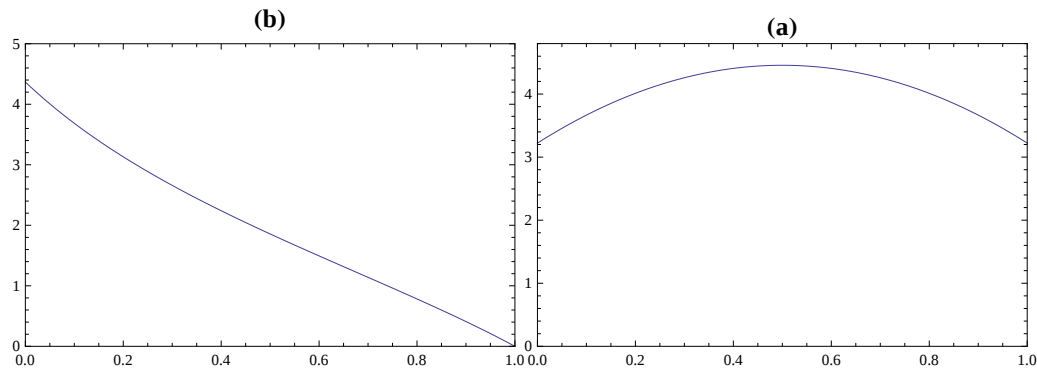
شکل ۴.۳ از معادلات (۶۲.۳)، (۶۷.۳) و (۶۸.۳) نمودار $\Psi(r)$ و $A(r)$ را در $r \in [0, 1]$ نشان می‌دهد. همچنین ریشه $r = 0.403701534425$ در شکل ۵.۳ نمایش داده شده است که مقدار $A(r) = 1.24786558329$ را نیز نتیجه می‌دهد. با ثابت در نظر گرفتن طول گام $h = 0.0001$ ، جواب تحلیلی و عددی را در شکل ۶.۳ رسم می‌کنیم.



شکل ۵.۳: نمودار $y_1(1) - 2$ نسبت به r برای $\lambda = 2$.



شکل ۶.۳: نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده توسط طرح گروه لی به ازای $\lambda = 2$.



شکل ۷.۳: نمودار (a) $\Psi(r)$ و (b) $A(r)$ برای $\lambda = 3.51$.

۳.۷.۳ مسئله براتو برای $\lambda = 3.51$

برای مسئله براتو با مقدار $\lambda = 3.51$ ثابت تبدیل $c = 3$ را در (۳.۳) در نظر می‌گیریم. دستگاه معادلات (۵.۳)–(۷.۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$y_1' = y_2, \quad (71.3)$$

$$y_2' = -3.51e^{y_1(x)-3}, \quad (72.3)$$

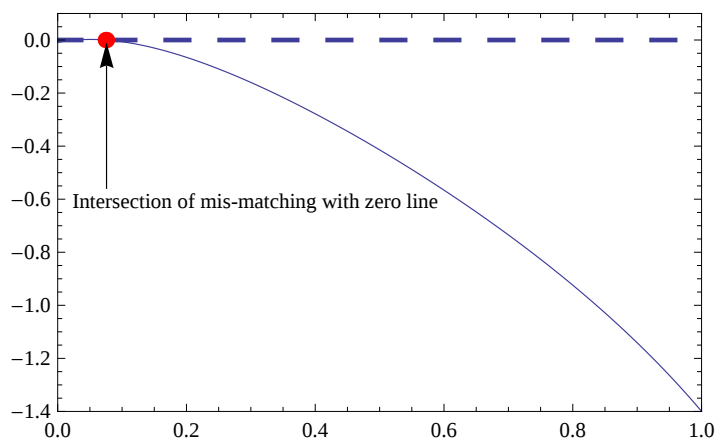
$$y_1(0) = 3, \quad y_2(0) = A. \quad (73.3)$$

شکل ۷.۳ نمودار $\Psi(r)$ و $A(r)$ را در $r \in [0, 1]$ نشان می‌دهد. با استفاده از فرآیند بخش قبلی می‌توان به دست آورد $r = 0.0748319489815$ و در نتیجه $A(r) = 3.841956895813646$. شکل ۸.۳ موقعیت این ریشه را نشان می‌دهد.

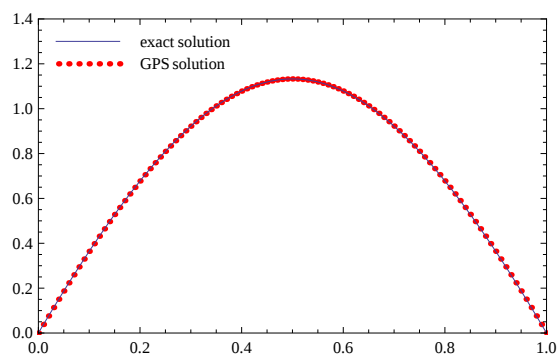
با ثابت در نظر گرفتن طول گام $h = 0.0001$ ، جواب تحلیلی و عددی را در شکل ۹.۳ رسم می‌کنیم. در نهایت شکل ۱۰.۳ خطاهای مطلق را برای حالت‌های بررسی شده، نشان می‌دهد.

۸.۳ نتیجه گیری

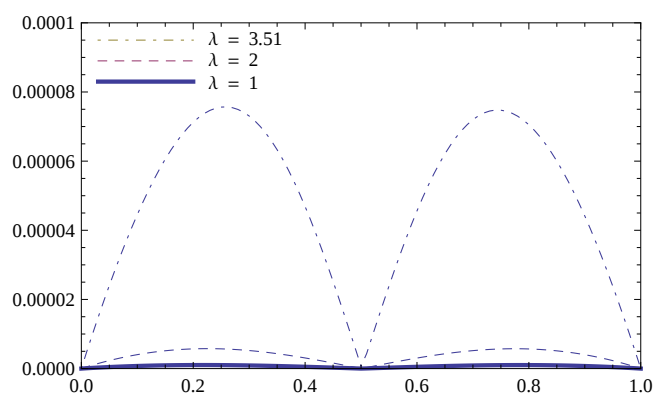
در این رساله روش تیراندازی گروه لی برای بررسی مسئله براتو مورد استفاده قرار گرفت. نتایج عددی بیانگر این است که نتایج به دست آمده از این روش انطباق زیادی با جواب تحلیلی مسئله دارد. جداول ۳.۳–۱.۳ برای سه حالت بررسی شده از مسئله نشان می‌دهد که این روش دقیق‌تر از روش تجزیه



شکل ۸.۳: نمودار $y_1(1) - 3$ نسبت به r برای $\lambda = 3.51$.



شکل ۹.۳: نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده توسط طرح گروه لی به ازای $\lambda = 3.51$.



شکل ۱۰.۳: نمودار خطاهای مطلق برای λ های مختلف

آدومین، روش تبدیل لاپلاس و روش B - اسپلین است. همچنین زمانی که λ نزدیک مقدار بحرانی λ_c است، روش تیراندازی گروه لی تا پنج رقم اعشار منطبق به جواب تحلیلی مسئله است در حالی که روش B - اسپلین خیلی ضعیفتر عمل می‌کند.

جدول ۱.۳: خطاهای باقی‌مانده‌ی به‌دست آمده به ازای $\lambda = 1$.

x	$B - Spline[34]$	$Laplace[88]$	$Decomposition[51]$	$LGSM$
0.1	2.98×10^{-6}	1.97877×10^{-6}	2.68×10^{-3}	7.50852×10^{-7}
0.2	5.46×10^{-6}	3.93944×10^{-6}	2.02×10^{-3}	1.01824×10^{-6}
0.3	7.33×10^{-6}	5.8548×10^{-6}	1.52×10^{-4}	9.04748×10^{-7}
0.4	8.50×10^{-6}	7.7038×10^{-6}	2.20×10^{-3}	5.23933×10^{-7}
0.5	8.89×10^{-6}	9.4665×10^{-6}	3.01×10^{-3}	5.06693×10^{-9}
0.6	8.50×10^{-6}	1.11117×10^{-5}	2.20×10^{-3}	5.13861×10^{-7}
0.7	7.33×10^{-6}	1.25716×10^{-5}	1.52×10^{-4}	8.94854×10^{-7}
0.8	5.46×10^{-6}	1.347531×10^{-5}	2.02×10^{-3}	1.00862×10^{-6}
0.9	2.98×10^{-6}	1.196784×10^{-5}	2.68×10^{-3}	7.4160×10^{-7}

جدول ۲.۳: خطاهای باقی‌مانده‌ی به‌دست آمده به ازای $\lambda = 2$.

x	$B - Spline[34]$	$Laplace[88]$	$Decomposition[51]$	$LGSM$
0.1	1.72×10^{-5}	2.13×10^{-3}	1.52×10^{-2}	4.03416×10^{-6}
0.2	3.26×10^{-5}	4.21×10^{-3}	1.47×10^{-2}	5.70266×10^{-6}
0.3	4.49×10^{-5}	6.19×10^{-3}	5.89×10^{-3}	5.22122×10^{-6}
0.4	5.28×10^{-5}	8.00×10^{-3}	3.25×10^{-3}	3.07485×10^{-6}
0.5	5.56×10^{-5}	9.60×10^{-3}	6.98×10^{-3}	1.4554×10^{-8}
0.6	5.28×10^{-5}	1.09×10^{-3}	3.25×10^{-3}	3.04637×10^{-6}
0.7	4.49×10^{-5}	1.19×10^{-2}	5.89×10^{-3}	5.19455×10^{-6}
0.8	3.26×10^{-5}	1.24×10^{-2}	1.47×10^{-2}	5.6787×10^{-6}
0.9	1.72×10^{-5}	1.09×10^{-2}	1.52×10^{-2}	4.01345×10^{-6}

جدول ۳.۳: خطاهای باقی مانده ی به دست آمده به ازای $\lambda = 3.51$.

x	$B - Spline[۳۴]$	$LGS M$
0.1	3.84×10^{-2}	4.45174×10^{-5}
0.2	7.48×10^{-2}	7.12487×10^{-5}
0.3	1.06×10^{-1}	7.30493×10^{-5}
0.4	1.27×10^{-1}	4.46877×10^{-5}
0.5	1.35×10^{-1}	6.75722×10^{-7}
0.6	1.27×10^{-1}	4.56074×10^{-5}
0.7	1.06×10^{-1}	7.20013×10^{-5}
0.8	7.48×10^{-2}	7.05097×10^{-5}
0.9	3.84×10^{-2}	4.41296×10^{-5}

فصل ۴

طرح حافظ گروه برای مسئله کشی در معادله لاپلاس

۱.۴ مقدمه

در این فصل، معادله لاپلاس زیر را مورد بررسی قرار خواهیم داد:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1, \quad (۱.۴)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (۲.۴)$$

$$u_y(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (۳.۴)$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (۴.۴)$$

اختلالات کوچک در $\phi(x)$ از (۲.۴) موجب خطای بزرگی در جواب $u(x, y)$ به ازای $0 < y \leq 1$ خواهد شد. به راحتی می توان تحقیق کرد که

$$u(x, y) = \frac{\lambda}{k^i} \sin(kx) \cosh(ky), \quad (۵.۴)$$

جواب تحلیلی مسئله (۱.۴)–(۴.۴) است هرگاه

$$\phi(x) = \frac{\lambda}{k^i} \sin(kx), \quad (۶.۴)$$

که در آن $k, i \in \mathbb{Z}^+$ و $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. اگر چه $\sup_{0 < x < \pi} |\phi(x)| \rightarrow 0$ وقتی $k \rightarrow \infty$ ، ولی برای مقادیر ثابت $y > 0$ داریم $\sup_{0 < x < \pi} |u(x, y)| \rightarrow \infty$ هرگاه $k \rightarrow \infty$. بنابراین معادله لاپلاس شدیداً بدوضع می باشد و حل آن با روش های کلاسیک معمولی غیر ممکن است و نیاز به روش های مخصوصی از جمله منظم سازی [۱۵۱] دارد. در این رساله بدون استفاده از منظم سازی مسئله را حل خواهیم کرد. در این جهت، هان^۱ [۷۳] معادله لاپلاس را به مسئله گشتاور کلاسیک^۲ تبدیل کرده و پایداری و همگرایی آن را بر پایه الگوریتم باکوس-گیلبرت^۳ مورد بررسی قرار داد. کوبو^۴ در مقاله [۸۹] یک حدس L^2 برای

^۱Hon

^۲Classical moment problem

^۳Backus-Gilbert

^۴Kubo

مسئله کشی معادله لاپلاس به دست آورد. پایداری این مسئله برای زمانی که

$$\phi \in L_p(\mathbb{R}), \quad u(\cdot, y) \in L_p(\mathbb{R}), \quad \|u(\cdot, y)\|_{L_p(\mathbb{R})} \leq M < \infty, \quad p \in [1, \infty].$$

در مقاله [۷۴] بررسی گردید. خطای حاصل از مسئله لاپلاس پیوسته و تقریب تفاضلی به وجود آمده از یک مسئله کمینه سازی مناسب توسط رینارد^۵ [۱۵۵] و به وسیله گسسته سازی و منظم سازی مورد بررسی قرار گرفت. کیو^۶ و فو^۷ از روش منظم سازی موجک ها برای برگرداندن پایداری جواب معادله لاپلاس دو بعدی در نوار $0 < x \leq 1$ استفاده کرد [۱۵۴]. جواب های عددی معادله لاپلاس با شرایط مرزی دیریکله و نیومن به وسیله روش آنالیز هموتوپی در مقاله [۸۳] به دست آورده شد. همچنین صدیقی و گنجی [۱۶۱] روش های اختلال هموتوپی و تجزیه آدومین را برای حل این معادله به کار بردند. تبدیل موجک میسر^۸ به عنوان یک روند منظم سازی برای بازگرداندن پایداری جواب معادله لاپلاس توسط ونی^۹ و همکارانش [۱۷۲] استفاده شد و تحت شرایط معینی نشان دادند که جواب منظم سازی شده همگرا به جواب تحلیلی مسئله خواهد بود. چنگ^{۱۰} و همکارانش [۳۹] مشتق مرتبه چهار آمیخته را به معادله لاپلاس اضافه کرده و پایداری آن را بررسی نمود. برخی دیگر از مقالات چاپ شده در مورد مسئله کشی معادله لاپلاس عبارتند از [۴۰، ۸۴، ۹۰، ۱۵۲، ۱۵۳، ۱۸۱].

در این بخش ابتدا با استفاده از روش خطی^{۱۱} معادله لاپلاس را در یک بعد گسسته سازی می کنیم [۱۸، ۱۶۲]، سپس طرح حافظ گروه را مورد استفاده قرار می دهیم.

۲.۴ بدحالتی مسئله کشی در معادله لاپلاس

در بخش قبلی گفته شد که مسئله کشی معادله لاپلاس به صورت ذاتی یک مسئله ناپایدار می باشد. برای بررسی ناپایداری این مسئله فرض می کنیم کران بالای پیشینی برای $u(x, 1) := f(x)$ به صورت زیر موجود باشد:

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq E.$$

^۵Reinhardt

^۶Qiu

^۷Fu

^۸Meyer

^۹Vani

^{۱۰}Cheng

^{۱۱}method of line

فرض کنیم مقدار آغازین دقیق $\phi(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ و مقدار آغازین اختلال وارد شده $\phi_\delta(\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ طوری باشند که

$$\|\phi(\cdot) - \phi_\delta(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \delta.$$

مسئله (۱.۴)-(۴.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{u}_{yy}(\xi, y) = \xi^2 \hat{u}(\xi, y), \quad y \in [0, 1], \quad \xi \in \mathbb{R},$$

$$\hat{u}(\xi, 0) = \hat{\phi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$\hat{u}_y(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

که در آن علامت هت نمایانگر تبدیل فوریه تابع وابسته به آن است. جواب دقیق این مسئله به صورت زیر داده شده است [۱۷۲]

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{\phi}(\xi) \cosh(|\xi|y). \quad (۷.۴)$$

جواب $\hat{u}(\xi, y)$ به طور پیوسته به داده $\hat{\phi}(\xi)$ وابسته نیست. یعنی مسئله (۱.۴)-(۴.۴) بد حالت است. زیرا $\cosh(|\xi|y)$ در (۷.۴) بی کران است وقتی که به ازای $0 < y \leq 1$ ، $|\xi|$ به بی نهایت میل می‌کند. زانگ^{۱۲} و همکارانش [۱۸۱] مشتق u_{xx} در معادله (۱.۴) را با تفاضل مرکزی تعویض نمود که با داده‌های اختلال یافته به صورت زیر در خواهد آمد:

$$v_{yy} + \frac{v(x-h, y) - 2v(x, y) + v(x+h, y)}{h^2} = 0, \quad 0 < y < 1,$$

$$v(x, 0) = \phi_\delta(x),$$

$$v_y(x, 0) = 0,$$

که جواب منظم‌سازی با استفاده از روش تبدیل فوریه به صورت زیر خواهد بود:

$$\hat{v}(\xi, y) = \cosh\left(\frac{2y}{h} \left|\sin\left(\frac{\xi h}{2}\right)\right|\right) \hat{\phi}_\delta(\xi). \quad (۸.۴)$$

^{۱۲}Xiong

همچنین قضیه‌ای را برای کنترل طول گام h به صورت زیر ارائه نمودند:

قضیه ۱.۲.۴. [۱۸۱] فرض کنیم $v(x, y)$ جواب منظم‌سازی شده و تبدیل فوریه آن به صورت (۸.۴) باشد و $u(x, y)$ جواب تحلیلی مسئله با تبدیل فوریه (۷.۴) باشد. اگر

$$h = \frac{2}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{E}{\delta}\right)}$$

آنگاه خطای همگرایی زیر را خواهیم داشت (برای $\delta \rightarrow 0$)

(۱) اگر $\frac{E}{\delta} < \cosh(3)$ آنگاه داریم:

$$\|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2E^y \left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-y} (1 + o(1)),$$

(۲) اگر $\frac{E}{\delta} > \cosh(3)$ آنگاه

(۲-۱) اگر $0 < y < 1 - \frac{3h}{2}$ در این صورت داریم:

$$\|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq E^y \left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-y} (1 + o(1)) + \max \left\{ \frac{9E}{e^3(1-y)^3 \left(\operatorname{arccosh}\left(\frac{E}{\delta}\right)\right)^2}, 2E^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-y} (1 + o(1)) \right\}.$$

(۲-۲) اگر $1 - \frac{3h}{2} \leq y < 1$ در این صورت

$$\|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq E^y \left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-y} (1 + o(1)) + \max \left\{ \frac{y \times \operatorname{arccosh}\left(\frac{E}{\delta}\right) E}{3e^{(1-y)\operatorname{arccosh}\left(\frac{E}{\delta}\right)}}, 2E^2 \left(\frac{\delta}{2}\right)^{1-y} (1 + o(1)) \right\}.$$

از این قضیه می‌توان نتیجه گرفت، وقتی شرط آغازین مسئله اختلال یافته داشته باشیم و طول گام h که در واقع پارامتر منظم‌سازی مسئله است در رابطه $h = \frac{2}{\operatorname{arccosh}\left(\frac{E}{\delta}\right)}$ صدق کند، آنگاه جواب عددی پایداری خواهیم داشت در صورتی که y نزدیک به یک باشد.

۳.۴ طرح حافظ گروه

۱.۳.۴ فرمول بندی جبر لی

طرح حافظ گروه در واقع گروه تقارنی دستگاه مورد بحث را حفظ می‌کند. برای دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی k بعدی به صورت

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(y, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^k, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (9.4)$$

می‌توان آن را به یک دستگاه دینامیکی افزوده‌ی $k + 1$ بعدی زیر تبدیل کرد

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & \frac{\mathbf{f}(y, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} \\ \frac{\mathbf{f}^T(y, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \|\mathbf{u}\| \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

به‌وضوح اولین معادله در (۱۰.۴) همان معادله‌ی اصلی (۹.۴) است اما دومین معادله ساختار مینکوفسکی را برای متغیرهای افزوده $X := (\mathbf{u}^T, \|\mathbf{u}\|)^T$ برقرار می‌کند که در شرط مخروط

$$X^T g X = 0, \quad (11.4)$$

صدق می‌کند و

$$g = \begin{bmatrix} I_k & 0_{k \times 1} \\ 0_{1 \times k} & -1 \end{bmatrix} \quad (12.4)$$

یک متر مینکوفسکی است، I_k ماتریس همانی از مرتبه‌ی k و T نمایانگر ترانهاده است. بر حسب $(\mathbf{u}, \|\mathbf{u}\|)$ معادله‌ی (۱۱.۴) می‌شود:

$$X^T g X = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 = 0, \quad (13.4)$$

که در آن علامت نقطه‌ی بین دو بردار k بعدی نمایانگر ضرب داخلی اقلیدسی است. بنابراین شرط مخروط (۱۱.۴) یک محدودیت طبیعی است که روی دستگاه دینامیکی افزوده (۱۰.۴) اعمال می‌گردد.

در نتیجه دستگاه افزوده‌ی $k + 1$ بعدی به صورت

$$X' = AX, \quad (۱۴.۴)$$

با محدودیت (۱۱.۴) داریم که در آن

$$A := \begin{bmatrix} 0_{k \times k} & \frac{\mathbf{f}(y, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} \\ \frac{\mathbf{f}^T(y, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} & 0 \end{bmatrix}, \quad (۱۵.۴)$$

و در رابطه‌ی

$$A^T g + gA = 0, \quad (۱۶.۴)$$

صدق می‌کند. در واقع این حقیقت ما را به استفاده از طرح حافظ گروه لی سوق می‌دهد که نگاشت گسسته شده G در خواص زیر صدق می‌کند:

$$G^T g G = g, \quad (۱۷.۴)$$

$$\det(G) = 1, \quad (۱۸.۴)$$

$$G_0^0 > 0, \quad (۱۹.۴)$$

که در آن G_0^0 مولفه‌ی ۰۰ ام از G است. همچنین عبارت اورتوکرونوس در نظریه نسبیت خاص به عنوان حافظ جهت زمان استفاده می‌شود. بنابراین دستگاه دینامیکی اصلی k بعدی (۹.۴) در $\mathbb{R}^k$ را می‌توان به یک دستگاه دینامیکی $k + 1$ بعدی (۱۴.۴) در $\mathbb{M}^{k+1}$ متناظر کرد. گرچه بعد دستگاه جدید یکی افزایش خواهد یافت، می‌توان نشان داد که تحت شرط لیپ شیتس

$$\|\mathbf{f}(y, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(y, \mathbf{v})\| \leq \mathbb{L} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|, \quad \forall (y, \mathbf{u}), (y, \mathbf{v}) \in \mathbb{D}, \quad (۲۰.۴)$$

که در آن $\mathbb{D}$ دامنه‌ی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ است و $\mathbb{L}$ ثابت لیپ شیتس، دستگاه جدید این مزیت را دارد که روش عددی حافظ گروهی به صورت

$$X_{n+1} = G(n)X_n, \quad (۲۱.۴)$$

را می‌توانیم توسعه دهیم که در آن X_n مقدار عددی X در نقطه‌ی گسسته‌ی y_n است و $G(n) \in SO_0(k, 1)$ مقدار گروه در y_n است.

۲.۳.۴ طرح حافظ گروه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل

گروه لی تولید شده از $A \in so(k, 1)$ به گروه لورنتزی اورتوکرونوس معروف است و نگاشت نمایی از $A(n)$ نمایش فرم بسته‌ی زیر را برآورد می‌کند

$$\exp[\Delta y A(n)] = \begin{bmatrix} I_k + \frac{(\alpha_n - 1)}{\|\mathbf{f}_n\|^2} \mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T & \frac{\beta_n \mathbf{f}_n}{\|\mathbf{f}_n\|} \\ \frac{\beta_n \mathbf{f}_n^T}{\|\mathbf{f}_n\|} & \alpha_n \end{bmatrix}, \quad (22.4)$$

که در آن

$$\alpha_n = \cosh\left(\frac{\Delta y \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{u}_n\|}\right), \quad (23.4)$$

$$\beta_n = \sinh\left(\frac{\Delta y \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{u}_n\|}\right). \quad (24.4)$$

برای صرفه‌جویی در نمایش، از $\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(y_n, \mathbf{u}_n)$ استفاده می‌کنیم. با جای‌گذاری $\exp[\Delta y A(n)]$ برای $G(n)$ در معادله‌ی (۲۱.۴) و در نظر گرفتن سطر اول آن، به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{(\alpha_n - 1)\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{u}_n + \beta_n \|\mathbf{u}_n\| \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{f}_n\|^2} \mathbf{f}_n = \mathbf{u}_n + \eta_n \mathbf{f}_n. \quad (25.4)$$

از $\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{u}_n \geq -\|\mathbf{f}_n\| \|\mathbf{u}_n\|$ می‌توان نشان داد که

$$\eta_n \geq \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta y \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{u}_n\|}\right)\right] \frac{\|\mathbf{u}_n\|}{\|\mathbf{f}_n\|} > 0, \quad \forall \Delta y > 0. \quad (26.4)$$

در واقع این طرح خواص گروه را به ازای تمام $\Delta y > 0$ حفظ می‌کند.

۴.۴ حل معادله لاپلاس به وسیله روش خطی و طرح حافظ گروه

روش عددی خطی مفهوم ساده‌ای دارد که در واقع دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به غیر از یک متغیر مستقل گسسته‌سازی می‌کند. روند نیم گسسته‌سازی دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی را نتیجه می‌دهد که به صورت عددی می‌توان آن را حل نمود.

گره‌های متساوی الفاصله $\{x_i\}_{i=0}^N$ با طول گام $h = \frac{\pi}{N}$ روی بازه $[0, \pi]$ را در نظر می‌گیریم. یعنی $x_i = ih, i = 0, \dots, N$ حال گسسته‌سازی زیر را به کار می‌بریم:

$$u_{xx}(x, y) \cong \frac{u(x_{i+1}, y) - 2u(x_i, y) + u(x_{i-1}, y)}{h^2}.$$

این نیم گسسته‌سازی با قرار دادن $u_i(y) = u(x_i, y), i = 0, \dots, N$ دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر را نتیجه می‌دهد:

$$u_i''(y) + \frac{u_{i+1}(y) - 2u_i(y) + u_{i-1}(y)}{h^2} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (27.4)$$

با شرایط آغازین

$$u_i(0) = \sin(ih), \quad u_i'(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (28.4)$$

و شرایط مرزی

$$u_0(y) = u_N(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (29.4)$$

آنگاه (۲۷.۴)–(۲۹.۴) را به $(2N-2)$ معادله دیفرانسیل معمولی

$$\begin{cases} \dot{u}_i^1(y) = u_i^2(y) \\ \dot{u}_i^2(y) = \frac{-u_{i+1}^1(y) + 2u_i^1(y) - u_{i-1}^1(y)}{h^2} \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (30.4)$$

با شرایط آغازین

$$u_i^1(0) = \sin(ih), \quad u_i^2(0) = 0, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (31.4)$$

و شرایط مرزی

$$u_0^1(y) = u_N^1(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (32.4)$$

تبدیل می‌کنیم. معادله (۳۰.۴) با شرایط آغازین (۳۱.۴) و شرایط مرزی (۳۲.۴) دارای $2N - 2$ معادله دیفرانسیل معمولی برای متغیرهای $u_i^1(y)$ و $u_i^2(y)$ ، $i = 1, \dots, N - 1$ ، است که به صورت عددی می‌توان جواب آن را به دست آورد. فرض کنیم

$$\begin{aligned} \dot{u}_i^1(y)|_{y=j\Delta y} &= \frac{u_i^1((j+1)\Delta y) - u_i^1(j\Delta y)}{\Delta y}, \\ \dot{u}_i^2(y)|_{y=j\Delta y} &= \frac{u_i^2((j+1)\Delta y) - u_i^2(j\Delta y)}{\Delta y}, \end{aligned}$$

با استفاده از تفاضل پیشرو نسبت به y و با حفظ علامت‌های موجود، در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} u_i^{1,j} &= u^1(ih, j\Delta y), \\ u_i^{2,j} &= u^2(ih, j\Delta y), \end{aligned}$$

و فرض می‌کنیم $\gamma = \frac{\Delta y}{h^2}$ اندیس پایداری باشد. آنگاه دستگاه معادلات (۳۰.۴) را به صورت کامل می‌توان گسسته‌سازی نمود:

$$\begin{cases} u_i^{1,j+1} = u_i^{1,j} + \Delta y u_i^{2,j} \\ u_i^{2,j+1} = u_i^{2,j} + \gamma(-u_{i+1}^{1,j} + 2u_i^{1,j} - u_{i-1}^{1,j}) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 0, 1, \dots, M, \quad (33.4)$$

که در آن $M = \frac{1}{\Delta y}$.

اگر اندیس پایداری γ خیلی بزرگ اختیار شود، ناپایداری باعث شکست طرح حافظ گروه برای معادله لاپلاس می‌شود.

۱.۴.۴ طرح حافظ گروه

در بخش قبلی یک طرح صریح از نوع اوایلر معرفی گردید. حال روش صریح دیگری را توسعه خواهیم داد. با به کارگیری طرح حافظ گروه برای معادله (۳۰.۴) داریم:

$$\begin{cases} u_i^{1,j+1} = u_i^{1,j} + \Delta y \eta_j u_i^{2,j}, \\ u_i^{2,j+1} = u_i^{2,j} + \gamma \eta_j (-u_{i+1}^{1,j} + 2u_i^{1,j} - u_{i-1}^{1,j}), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, M. \\ u_0^{1,j} = u_N^{1,j} = 0 \end{cases} \quad (۳۴.۴)$$

به وضوح اگر برای هر j ، داشته باشیم $\eta_j = 1$ آنگاه طرح فوق به طرح اوایلر برای معادله (۳۳.۴) تبدیل می شود.

برای نمایش دستگاه معادلات (۳۰.۴) در حالت ماتریسی داریم

$$\mathbf{u}(y) = (u_1^1(y), \dots, u_{N-1}^1(y), u_1^2(y), \dots, u_{N-1}^2(y))^T,$$

و

$$\mathbf{f}(y, \mathbf{u}) = (u_1^2(y), \dots, u_{N-1}^2(y), w_1(y), \dots, w_{N-1}(y))^T,$$

که در آن

$$w_i(y) = \frac{-u_{i+1}^1(y) + 2u_i^1(y) - u_{i-1}^1(y)}{h^2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (۳۵.۴)$$

و بنابراین با به کار بردن طرح (۲۵.۴) برای معادله (۹.۴) می توانیم جواب معادله لاپلاس را با استفاده از طرح حافظ گروه محاسبه کنیم.

۲.۴.۴ تحلیل پایداری

برای بررسی پایداری طرح حافظ گروه برای معادله لاپلاس که به (۳۴.۴) تقلیل یافته، آن را به شکل ماتریسی زیر بیان می کنیم:

$$\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{u}_j + \Delta y \eta_j \mathbf{f}_j = A \mathbf{u}_j,$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{j+1} &= \left(u_1^{1,j+1}, u_2^{1,j+1}, \dots, u_{N-1}^{1,j+1}, u_1^{2,j+1}, u_2^{2,j+1}, \dots, u_{N-1}^{2,j+1} \right)^T, \\ \mathbf{u}_j &= \left(u_1^{1,j}, u_2^{1,j}, \dots, u_{N-1}^{1,j}, u_1^{2,j}, u_2^{2,j}, \dots, u_{N-1}^{2,j} \right)^T, \\ \mathbf{f}_j &= \left(u_1^{2,j}, \dots, u_{N-1}^{2,j}, \frac{-u_2^{1,j} + 2u_1^{1,j}}{h^2}, \frac{-u_3^{1,j} + 2u_2^{1,j} - u_1^{1,j}}{h^2}, \dots, \frac{2u_{N-1}^{1,j} - u_{N-2}^{1,j}}{h^2} \right)^T, \\ \eta_j &= \frac{(\alpha_j - 1)\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{u}_j + \beta_j \|\mathbf{u}_j\| \|\mathbf{f}_j\|}{\|\mathbf{f}_j\|^2},\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \Delta y \eta_j & & \\ & 1 & & \Delta y \eta_j & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & 1 & & \Delta y \eta_j \\ 2\gamma \eta_j & -\gamma \eta_j & & & 1 & \\ -\gamma \eta_j & 2\gamma \eta_j & -\gamma \eta_j & & & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & -\gamma \eta_j & 2\gamma \eta_j & & 1 \end{pmatrix}$$

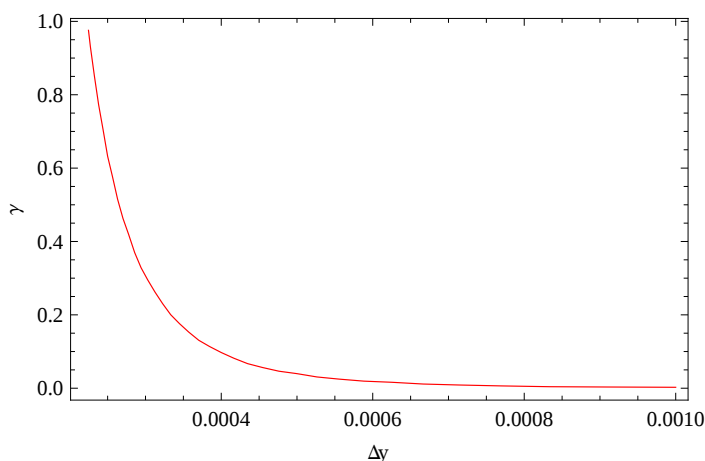
یا به عبارتی در شکل فشرده آن، اگر قرار دهیم

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}_{N-1 \times N-1},$$

آنگاه

$$A = \begin{pmatrix} I_{N-1} & \Delta y \eta_j I_{N-1} \\ -\gamma \eta_j C & I_{N-1} \end{pmatrix}.$$

می‌دانیم اگر مقادیر ویژه ماتریس وابسته به گسسته‌سازی با مدول کمتر یا مساوی یک باشد آنگاه خطای روش گسسته‌سازی افزایش پیدا نمی‌کند یا به عبارتی روش پایدار است. برای ماتریس A ، با به‌کارگیری



شکل ۱.۴: شرط کافی برای پایداری طرح حافظ گروه

روش‌های عددی برای محاسبه مقادیر ویژه می‌توان نتیجه گرفت که طرح حافظ گروه برای معادله لاپلاس همیشه پایدار نیست و دامنه مجاز γ برای پایداری روش $0 < \gamma \leq 1$ است. در شکل ۱.۴ نمودار متغیر γ را نسبت به Δy طوری ترسیم می‌کنیم که در آن مقادیر ویژه A از یک تجاوز نکند.

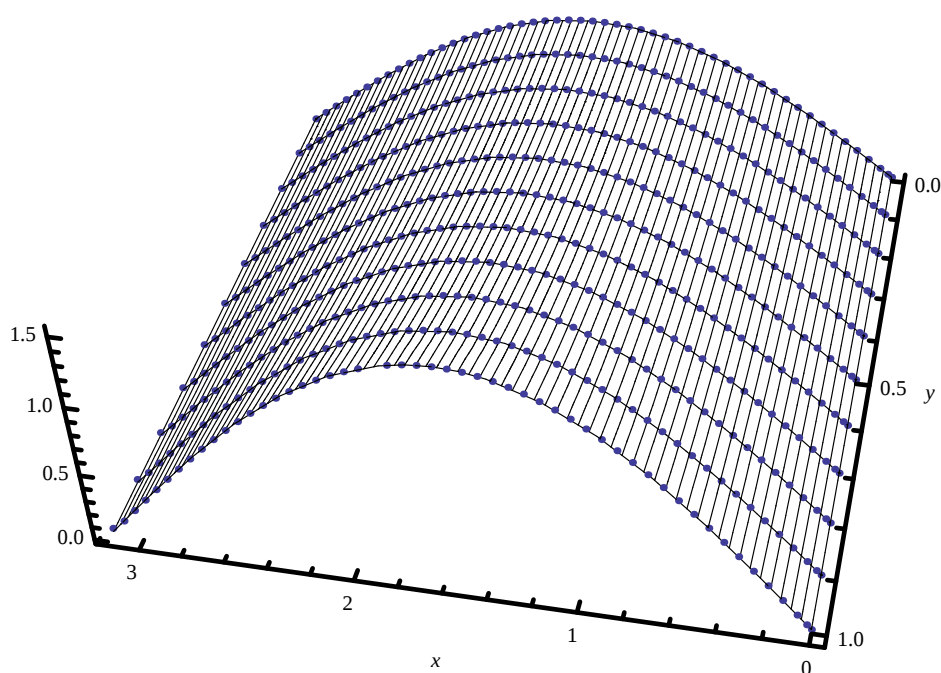
۵.۴ نتایج عددی

در این بخش جواب‌های عددی و تحلیلی معادله لاپلاس را برای مقادیر مختلف آغازین مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج گزارش شده نشان می‌دهد که طرح حافظ گروه روشی دقیق و موثر برای حل مسائل بدو ضلع است. در تمام شکل‌های سه بعدی خطی نمایانگر جواب تحلیلی معادله لاپلاس نسبت به شرایط آغازین است و نقاط نمایانگر جواب تقریبی به‌دست آمده توسط طرح حافظ گروه است.

۱.۵.۴ مثال ۱

ابتدا معادله لاپلاس را برای $\lambda = k = i = 1$ یعنی $\phi(x) = \sin(x)$ بررسی می‌کنیم. آنگاه با استفاده از (۵.۴) جواب دقیق معادله (۱.۴)–(۴.۴) به‌صورت زیر است:

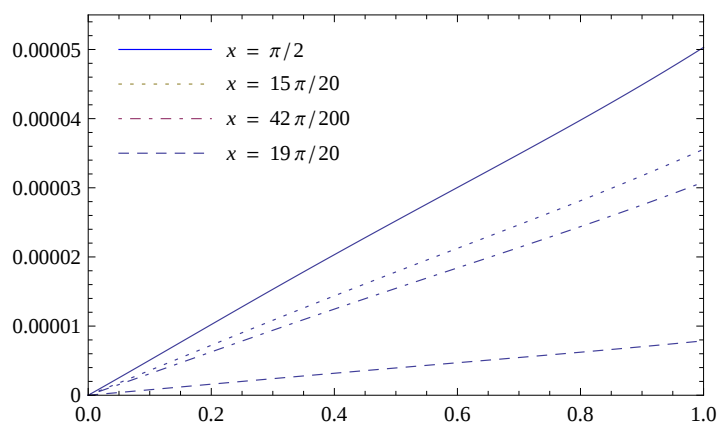
$$u(x, y) = \sin(x) \cosh(y). \quad (۳۶.۴)$$



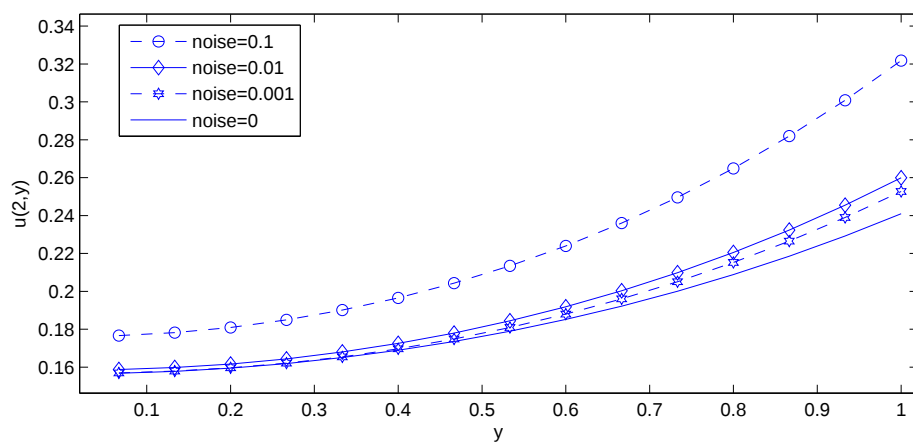
شکل ۲.۴: مقایسه جواب تحلیلی و عددی به دست آمده مثال ۱ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 200$.

نتایج عددی با در نظر گرفتن $\Delta y = 0.0001$ و $h = \pi/200$ به دست آورده شده‌اند. شکل ۲.۴ نمودار جواب تقریبی و تحلیلی به دست آمده توسط طرح حافظ گروه را نشان می‌دهد. خطاهای مطلق عددی به ازای $x = 49\pi/200, \pi/2, 15\pi/20$ و $19\pi/20$ در شکل ۳.۴ نمایش داده شده‌اند که همه خطاها کوچکتر از 5×10^{-5} هستند. ماکزیمم خطای مطلق گزارش شده توسط کیان^{۱۳} [۱۵۲] در حدود ۰.۱۵ است (شکل ۱-۷). در مقالات موجود تنها مثال برای معادله لاپلاس به ازای $k = \lambda = j = 1$ است، مانند [۱۵۲، ۱۸۱]. همچنین برای این مثال در شکل ۴.۴ با وارد کردن اختلال در شرایط مسئله پایداری این روش نسبت به اختلالات وارده را نشان دهیم. در مثال‌های بعدی حالت‌های سخت‌تری مورد بررسی قرار خواهید گرفت.

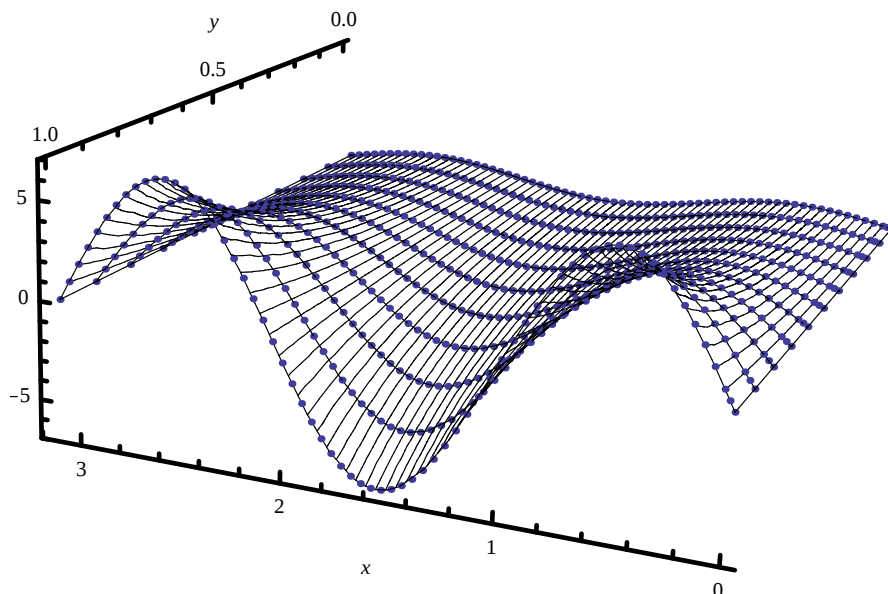
^{۱۳}Qian



شکل ۳.۴: خطای مطلق مثال ۱ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 200$.



شکل ۴.۴: نمودار اختلالات وارد شده به ازای $x = 2$ برای مثال ۱



شکل ۵.۴: مقایسه جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده برای مثال ۲ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$.

۲.۵.۴ مثال ۲

در این مثال معادله لاپلاس را برای $k = 3$, $\lambda = 2$, و $i = 1$ بررسی می‌کنیم، یعنی $\phi(x) = \frac{2}{3} \sin(3x)$.
 آنگاه از رابطه (۵.۴) جواب دقیق معادله (۱.۴)–(۴.۴) به صورت

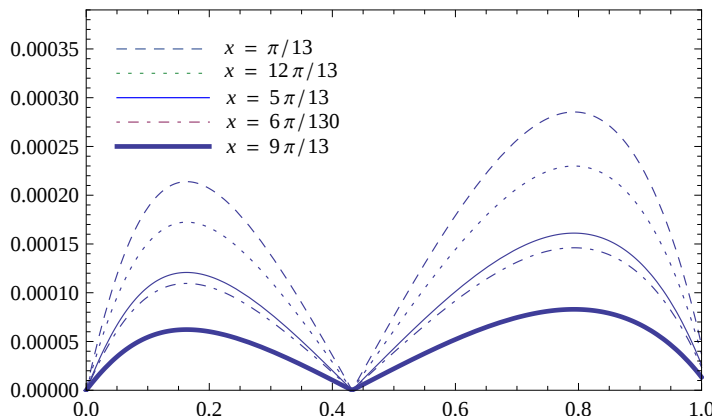
$$u(x, y) = \frac{2}{3} \sin(3x) \cosh(3y).$$

است. نتایج عددی این مثال با قرار دادن $\Delta y = 0.0001$ و $h = \pi/130$ محاسبه شده‌اند. شکل ۵.۴ نمودار جواب تحلیلی و تقریبی به دست آمده توسط طرح حافظ گروه را نشان می‌دهد. شکل ۶.۴ نشان می‌دهد که خطاهای مطلق عددی به ازای $x = 6\pi/130, \pi/13, 5\pi/13, 12\pi/13$ و $9\pi/13$ کمتر از 3×10^{-4} می‌باشد.

۳.۵.۴ مثال ۳

در این مثال معادله لاپلاس را برای $k = 5$, $\lambda = 5$, و $i = 2$ یا به عبارتی $\phi(x) = \frac{1}{5} \sin(5x)$ بررسی می‌شود. آنگاه از رابطه (۵.۴) جواب تحلیلی معادله (۱.۴)–(۴.۴) عبارت است از

$$u(x, y) = \frac{1}{5} \sin(5x) \cosh(5y).$$



شکل ۴.۶: خطاهای مطلق مثال ۲ با $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$.

نتایج عددی این مثال با در نظر گرفتن $\Delta y = 0.0001$ و $h = \pi/150$ محاسبه می‌شوند. شکل ۷.۴ جواب‌های تحلیلی و عددی به دست آمده توسط طرح حافظ گروه را نشان می‌دهد. شکل ۸.۴ نتایج عددی خطای مطلق را به ازای $x = \pi/15, 48\pi/150, 64\pi/150, 74\pi/150$ نشان می‌دهد که خطاها کوچک‌تر از 3×10^{-3} هستند.

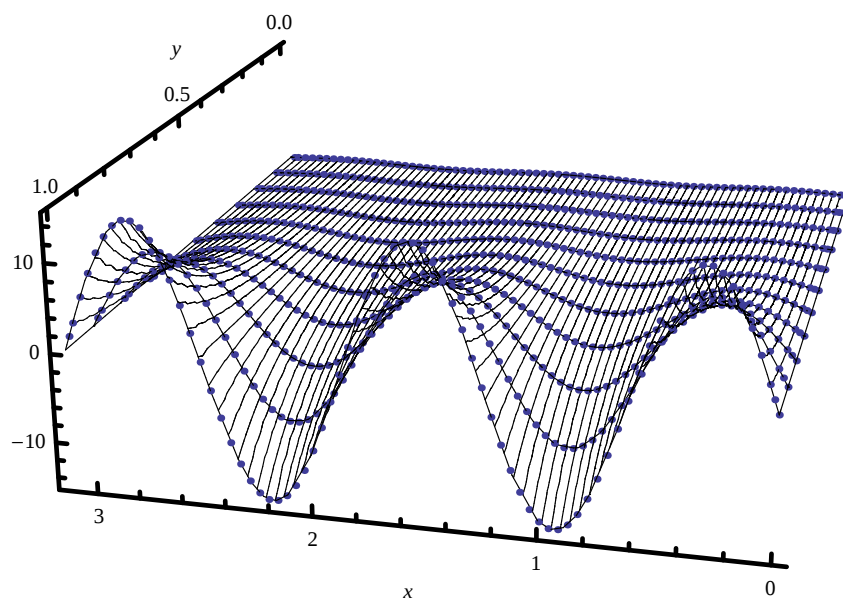
۴.۵.۴ مثال ۴

در این مثال معادله لاپلاس برای $k = 3$, $\lambda = 5$, و $i = 1$ یعنی $\phi(x) = \frac{5}{3} \sin(3x)$ بررسی می‌شود. جواب معادلات (۱.۴)–(۴.۴) از رابطه (۵.۴) به صورت زیر است:

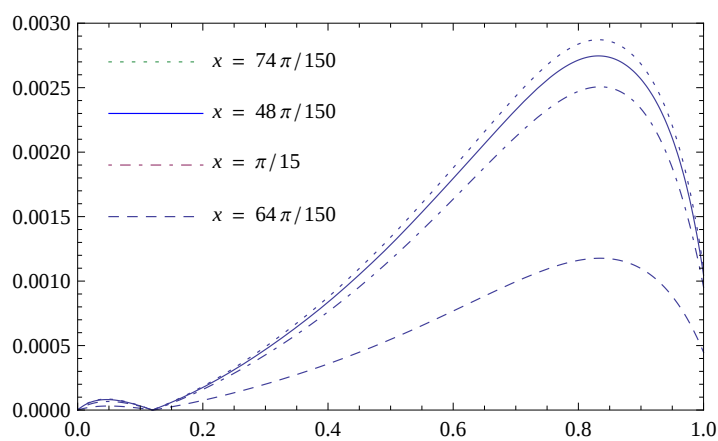
$$u(x, y) = \frac{5}{3} \sin(3x) \cosh(3y).$$

شکل ۹.۴ نمودار جواب عددی و تقریبی به دست آمده توسط طرح حافظ گروه را به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $h = \pi/130$ نشان می‌دهد.

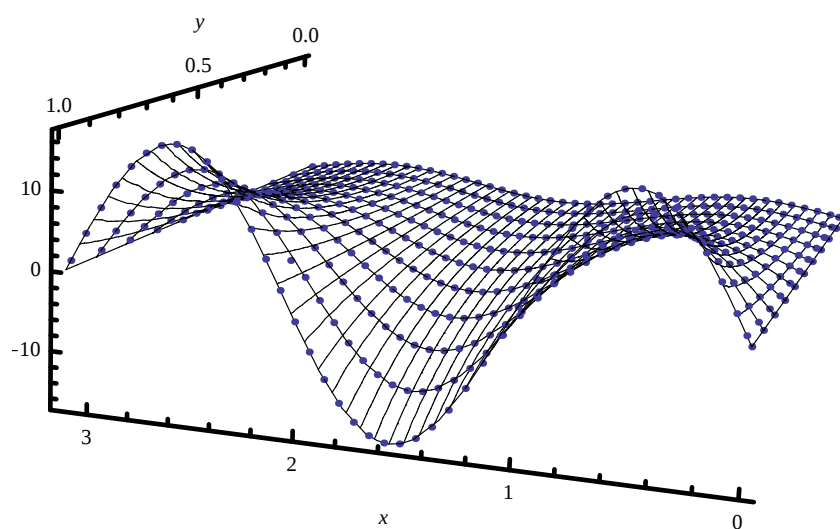
در شکل ۱۰.۴ خطاهای مطلق را به ازای $x = 6\pi/130, \pi/13, 5\pi/13, 12\pi/13$ و $9\pi/13$ داریم که خطاها کوچک‌تر از 7.6×10^{-3} هستند. همچنین با مقایسه این مثال و مثال ۲ خواهیم دید که با افزایش λ خطاهای مطلق نیز افزایش می‌یابند. در کل با ثابت در نظر گرفتن k و j و با افزایش λ می‌بینیم که شکل $u(x, y)$ تغییری نمی‌کند اما برد نمودار افزایش می‌یابد. این امر باعث افزایش خطا به ازای مقادیر بزرگ λ خواهد شد.



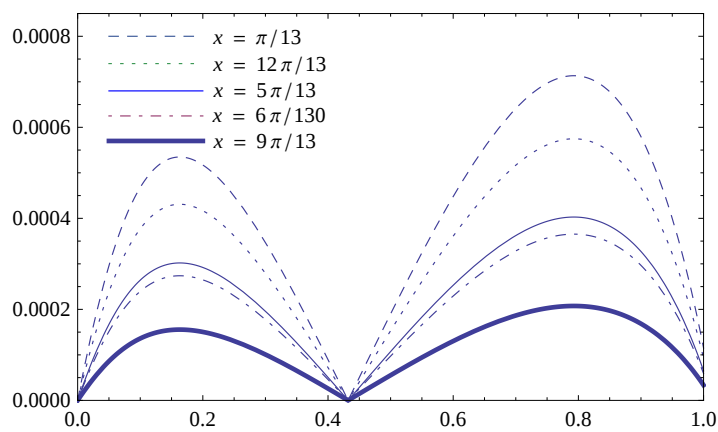
شکل ۷.۴: مقایسه جواب تحلیلی و عددی به دست آمده برای مثال ۳ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 150$.



شکل ۸.۴: خطاهای مطلق مثال ۳ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 150$.



شکل ۹.۴: مقایسه جواب‌های عددی و تحلیلی مثال ۴ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$.



شکل ۱۰.۴: خطاهای مطلق مثال ۴ به ازای $\Delta y = 0.0001$ و $N = 130$.

۶.۴ نتیجه گیری

در این فصل ترکیبی از روش خطی و طرح حافظ گروه را برای به دست آوردن جواب معادله بدو ضلع لاپلاس استفاده کردیم. نتایج عددی نمایانگر این است که جواب‌های به دست آمده با جواب‌های تحلیلی مطابقت دارد.

فصل ۵

آنالیز گروه لی معادله اصلاح شده تعمیم یافته
واخنکو

مقدمه

در این فصل گروه تقارنی لی، تقلیل‌های تقارنی متناظر و جواب‌های ناوردای معادله اصلاح شده تعمیم یافته واخنکو $mGVE$ به دست آورده خواهد شد. همچنین الگوریتمی جدید که بر پایه گروه‌های تقارنی لی و طرح حافظ گروه GPS است معرفی گردیده و برای معادلات با مشتقات معمولی به دست آمده از تقلیل تقارنی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

روش‌های متداول زیادی مانند اویلر، رونگه-کوتا و ... برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل پیشنهاد شده‌اند. در تمامی این روش‌ها معادله دیفرانسیل به وسیله‌ی گسسته‌سازی تبدیل به معادله تفاضلی می‌گردد. به وضوح معادلات تفاضلی مختلفی از یک معادله دیفرانسیل به وسیله روش‌های عددی مختلف قابل حصول است و نکته قابل تأمل این است که دینامیک و ساختار این معادلات تفاضلی باید نزدیک به معادله دیفرانسیل باشند.

زمینه کاری نسبتاً جدیدی به نام انتگرال‌گیری عددی هندسی وجود دارد که در واقع انتگرال‌گیری هندسی روی رده‌ای از روش‌های عددی به منظور حفظ خواص کیفی و هندسی معادله دیفرانسیل می‌باشد. [۳۲، ۱۲] هایرر^۱ در [۷۰] فرآیندی را توصیف نمود که در آن روش‌های انتگرال‌گیری عددی کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل روی منیفلدها به منظور حفظ خواص هندسی معادله تعمیم داده می‌شود. در این زمینه کتاب [۷۱] جزء بیشترین ارجاع شده‌ها است. از بین تعداد زیاد الگوریتم‌های عددی موجود برای تقریب جواب‌های معادلات دیفرانسیل معمولی، حل کننده گروه لی تحت گسسته‌سازی ساختار گروه لی را حفظ می‌کند که این یک اصل مهم در کشف کیفی رفتار صحیح در کمینه‌سازی خطاهای عددی می‌باشد. در مقاله ایسرلس^۲ [۸۲] نظریه جدیدی از روش‌های عددی که ساختار گروه لی را حفظ می‌کند مورد بررسی قرار گرفت.

یکی از روش‌های عددی از این رده طرح حافظ گروه معرفی شده به وسیله [۹۳] است. این طرح از تبدیلات کیلی^۳ و تقریب‌های پاد در فضای مینکوفسکی افزوده $\mathbb{M}^{n+1}$ استفاده می‌کند. بنابراین عمده تفاوت بین طرح حافظ گروه و روش‌های عددی موجود که در رده روش‌های انتگرال‌گیری هندسی نیستند در این است که روش‌های عددی موجود همگی در فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ قرار دارند. یکی از مزایای طرح حافظ گروه در فضای مینکوفسکی افزوده این است که جواب‌های جعلی تولید نمی‌کند.

در کتاب اخیر [۵۰] ساختاری سیستماتیک از طرح‌های تفاضلی ناوردا برای معادلات دیفرانسیل

^۱Hairer^۲Iserles^۳Cayley

غیر خطی آورده شده است. به ویژه این کتاب روی ناوردایی تقارنی کامل از معادلات دیفرانسیل در طرح‌های عددی تمرکز می‌کند.
معادله واخنکو

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{D}u + u = 0, \quad \left(\mathfrak{D} := \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

توسط واخنکو در [۱۶۷] برای توصیف موج‌های با فرکانس بالا^۴ معرفی شد. انتگرال‌پذیری معادله واخنکو تعمیم یافته توسط واخنکو و همکارانش با به‌کارگیری روش پراکندگی معکوس بررسی گردید و همچنین وجود تعداد متناهی از قوانین بقاء برای این معادله اثبات شد [۱۶۹]. جواب‌های هامپ-سولیتون^۵ و کاسپ-سولیتون^۶ برای معادلات واخنکو تعمیم یافته و واخنکو تعمیم یافته اصلاح شده توسط واخنکو و همکارانش [۱۲۰، ۱۷۰، ۱۷۱] به‌دست آورده شد.
آنالیز گروه لی برای معادله واخنکو و همچنین حالت کلی آن

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{D}u = F(u) \quad (۱.۵)$$

در [۱۳] به منظور پیدا کردن توابعی مانند $F(u)$ که در آن گروه‌های تقارنی لی انتقالی یعنی ∂_t و ∂_x موجود باشند، مورد بررسی قرار گرفت. همچنین چندین مقاله برای پیدا کردن جواب‌های دقیق معادله واخنکو توسط روش‌های $\exp$ و $\tanh$ و... چاپ شده است [۸۶، ۸۷، ۱۴۵، ۱۴۶، ۱۴۷]. در این بخش ما آنالیز گروه لی و همچنین طرح حافظ گروه تقارنی لی که یک روش ترکیبی جدید از گروه‌های تقارنی لی و طرح حافظ گروه است را روی معادله واخنکو تعمیم یافته اصلاح شده

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{D}^2 u + \frac{1}{2} p u^2 + \beta u) + q \mathfrak{D}u = 0, \quad \left(\mathfrak{D} := \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (۲.۵)$$

به‌کار می‌بریم که در آن p, q و β ثابتهای دلخواه غیر صفر هستند.
این معادله در سال ۲۰۰۳ توسط موريسن^۷ و پارکس^۸ معرفی گردید [۱۲۱]. معادله واخنکو معمولی با قرار دادن $p = q = 1$ و $\beta = 0$ به‌دست می‌آید در حال که معادله واخنکو تعمیم یافته با قرار دادن

^۴High-frequency waves

^۵Hump-soliton

^۶cusp-soliton

^۷Morrison

^۸Parkes

همچنین در مقاله اخیر [۶۲] توسط گانداریاس^۹ و بروزن^{۱۰} روش تقارنی کلاسیک و غیر کلاسیک برای معادله‌ای که با استفاده از یک تبدیل غیر محلی از معادله واخنکو به دست آمده به کار برده شده است.

۱.۵ طرح حافظ گروه

خیلی از دستگاه‌های فیزیکی را می‌توان به صورت دستگاه k بعدی از معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\frac{d\mathbf{W}}{d\xi} = \mathbf{f}(\xi, \mathbf{W}), \quad \xi \in \mathbb{R}, \mathbf{W} \in \mathbb{R}^k, \quad (3.5)$$

نوشت که در آن (۳.۵) یک معادله دیفرانسیل روی منیفلد $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^k$ است، اگر $\mathbf{W}_0 \in \mathcal{M}$ نتیجه دهد $\mathbf{W}(\xi) \in \mathcal{M}$.

خیلی از روش‌ها مانند روش اوایلر، رانگ-کوتا و غیره برای تقریب جواب معادله دیفرانسیل (۳.۵) پیشنهاد شده‌اند. تمامی این روش‌ها دستگاه معادلات دیفرانسیل را به منظور تولید معادلات تفاضلی، گسسته‌سازی می‌کنند. واضح است که از یک معادله دیفرانسیل، معادلات تفاضلی متفاوتی نسبت به روش به کار برده شده، به دست می‌آید. ولی در تمامی این معادلات تفاضلی هدف این است که دینامیک معادله دیفرانسیل نزدیک به دینامیک معادله تفاضلی باشد.

در این بخش ابتدا روشی به نام طرح حافظ گروه را معرفی خواهیم کرد که به رده‌ی جدیدی از روش‌های موجود در آنالیز عددی به نام انتگرال‌گیری هندسی تعلق دارد. عنوان کلی انتگرال‌گیری هندسی برای رده‌ای از روش‌های عددی به کار می‌رود که در آنها خصوصیات کیفی و هندسی معادله دیفرانسیل حفظ می‌شود [۱۲، ۳۲، ۵۰]. هایرر^{۱۱} در مقاله‌ی [۷۰] راه کاری را برای بهبود روش‌های انتگرال‌گیری کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل روی منیفلدها ارائه نمود که خواص هندسی مشخصی از شار دقیق را حفظ می‌کند. مفاهیم انتگرال‌گیری عددی هندسی روی مثال‌های مهمی که با روش اشتورم-ورلت^{۱۲} حل شده در مقاله‌ای توسط هایرر و همکارانش [۷۱] بررسی شد.

^۹Gandarias

^{۱۰}Bruzon

^{۱۱}Hairer

^{۱۲} Stormer-Verlet

در طرح حافظ گروه دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مانند (۳.۵) را می‌توان به‌وسیله‌ی رابطه‌ی تکراری^{۱۳} زیر حل کرد:

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \frac{(\alpha_n - 1)\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{W}_n + \beta_n \|\mathbf{W}_n\| \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{f}_n\|^2} \mathbf{f}_n = \mathbf{W}_n + \eta_n \mathbf{f}_n, \quad (۴.۵)$$

که در آن

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{f}(\xi_n, \mathbf{W}_n), \quad \alpha_n = \cosh\left(\frac{\Delta \xi \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{W}_n\|}\right), \quad \beta_n = \sinh\left(\frac{\Delta \xi \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{W}_n\|}\right).$$

۱.۱.۵ LSGPS

LSGPS در واقع ترکیبی جدید از تقارنی لی و طرح حافظ گروه است. برای استفاده از این روش ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل یا مشتقات جزئی داده شده را با استفاده از تقارنی لی به یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی تقلیل می‌دهیم و سپس معادله‌ی تقلیل یافته را با استفاده از طرح حافظ گروه حل می‌کنیم. فرض کنیم معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی به‌صورت زیر را داشته باشیم:

$$\Pi u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (۵.۵)$$

که در آن Π یک عمل‌گر غیر خطی و $u = u(t, x)$ متغیر وابسته‌ی مجهول است. اگر مشتقات مکانی (زمانی) (۵.۵) توسط یکی از روش‌های تفاضلات متناهی، عناصر متناهی، حجم متناهی و غیره گسسته‌سازی شود، آنگاه این نیم گسسته‌ساز تولید دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌کند که می‌توان آن را به‌وسیله‌ی طرح حافظ گروه حل کرد. اما برخی مشکلات در این میان امکان دارد به وجود آید:

نیم گسسته‌سازی در انتخاب طول گام گسسته‌سازی Δx (Δt) خیلی حساس است، یعنی معیارهای زیادی مانند سازگاری، پایداری، شرط CFL و غیره باید مورد بررسی گیرد. بنابراین اگر Δx (Δt) را خیلی کوچک یا خیلی بزرگ انتخاب کنیم، سازگاری یا پایداری روش گسسته‌سازی را تحت الشعاع قرار داده و جواب نهائی (۵.۵) قابل اعتماد نخواهد بود.

امکان دارد که ما مقادیر Δx (Δt) را به منظور به‌دست آوردن نتایج مناسب خیلی کوچک بگیریم، مثلاً $\Delta x = 0.0001$ که با این کار تعداد زیادی از معادلات دیفرانسیل معمولی نتیجه خواهد شد، یعنی برای

^{۱۳} جزئیات بیشتر در مورد طرح حافظ گروه را می‌توان در مقالات [۱، ۲، ۹۳] پیدا کرد.

Δx فوق به میزان 10000 معادله‌ی دیفرانسیل معمولی خواهیم داشت. در نتیجه طرح حافظ گروهی که تا کنون مورد استفاده قرار می‌گرفت نیازمند تعداد زیادی از عملیات و محاسبات خواهد بود. در عوض در روش جدید $LSGPS$ ما به جای تعداد زیاد معادلات، فقط یک معادله‌ی دیفرانسیل معمولی خواهیم داشت. همچنین با توجه به این که گسسته‌سازی با استفاده از روش‌های مختلف عددی دقت را پایین می‌آورد و باعث تحمیل خطا می‌گردد، بنابراین در حل معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی وقتی از طرح حافظ گروه استفاده می‌کنیم ابتدا آن را با استفاده از یک گسسته‌سازی تبدیل به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل معمولی می‌کنیم و سپس از طرح حافظ گروه استفاده می‌کنیم. در حالی که در $LSGPS$ با استفاده از تقارنی لی ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل مشتقات جزئی را به صورت بدون خطا به معادله‌ی دیفرانسیل معمولی تقلیل می‌دهیم و سپس از طرح حافظ گروه استفاده می‌کنیم.

۲.۵ آنالیز گروه لی، تقلیل‌های تقارنی و جواب‌های معادله تعمیم یافته اصلاح شده واخنکو

تبدیلات بی‌نهایت کوچک از گروه لی تک پارامتری را با متغیرهای مستقل t, x و متغیر وابسته u به صورت

$$t^* = t + \epsilon \xi^1(t, x, u) + O(\epsilon^2),$$

$$x^* = x + \epsilon \xi^2(t, x, u) + O(\epsilon^2),$$

$$u^* = u + \epsilon \phi(t, x, u) + O(\epsilon^2),$$

را در نظر بگیرید که در آن ϵ پارامتر گروه می‌باشد. جبر لی وابسته به تقارنی‌های بی‌نهایت کوچک تشکیل مجموعه‌ای از میدان‌های برداری به صورت

$$V = \xi^1(t, x, u) \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2(t, x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \phi(t, x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

می‌دهد. اگر $\text{Pr}^{(3)} X$ نمایانگر سومین تطویل X باشد، آنگاه شرط ناوردانی

$$\text{Pr}^{(3)} V(F)|_{F=0} = 0,$$

با

$$F := \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{D}^2 u + \frac{1}{2} p u^2 + \beta u) + q \mathfrak{D} u,$$

دستگاه فرا معینی از معادلات با مشتقات جزئی خطی شامل ξ^1 , ξ^2 و ϕ را نتیجه می‌دهد. با استفاده از حل معادلات تعیینی برای معادله (۲.۵) جبر تقارنی لی سه بعدی L تولید شده توسط مولدهای زیر نتیجه می‌شود:

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad V_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad V_3 = pt \frac{\partial}{\partial t} - (px + 2\beta t) \frac{\partial}{\partial x} - (2\beta + 2pu) \frac{\partial}{\partial u}.$$

که جدول جابجاگر به صورت زیر می‌باشد

جدول ۱.۵: جدول جابجاگر برای مولدهای معادله $mGVE$			
$[\cdot, \cdot]$	V_1	V_2	V_3
V_1	0	0	$pV_1 - 2\beta V_2$
V_2	0	0	$-pV_2$
V_3	$-pV_1 + 2\beta V_2$	pV_2	0

این جبر به وسیله نمادهای زیر

$$e_1 = -\frac{\beta}{2}V_2, \quad e_2 = pV_1 - \beta V_2, \quad e_3 = -\frac{1}{p}V_3,$$

متناظر با $A_{3,4}$ در رده‌بندی انجام شده توسط پاترا^{۱۴} و وینترنیتز^{۱۵} در مقاله [۱۴۸] است. در این صورت رده‌های مزدوج از زیرجبرهایش به صورت زیر خواهد بود:

• دو بعدی

$$L_{1,2} = \langle e_1, e_3 \rangle, \quad L_{2,2} = \langle e_2, e_3 \rangle, \quad L_{3,2} = \langle e_1, e_2 \rangle.$$

• یک بعدی

$$L_{1,1} = \langle e_1 \rangle, \quad L_{2,1} = \langle e_2 \rangle, \quad L_{3,1} = \langle e_3 \rangle, \quad L_{4,1}(\epsilon) = \langle e_1 + \epsilon e_2 \rangle, \quad \text{که } \epsilon = \pm 1.$$

هر زیر جبر یک بعدی معادله (۲.۵) را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تقلیل می‌دهد.

۱.۲.۵ زیر جبر $L_{1,1}$

این زیر جبر به وسیله

$$e_1 = -\frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x}$$

^{۱۴}Patera

^{۱۵}Winternitz

تولید می‌شود و شرط سطح ناوردای^{۱۶} برای آن $u_x = 0$ است. بنابراین با جای‌گذاری $u(t, x) = F(t)$ در (۲.۵) خواهیم داشت

$$F'(t) = 0 \Rightarrow u(t, x) = C,$$

که در واقع جواب بدیهی معادله را نتیجه می‌دهد.

۲.۲.۵ زیر جبر $L_{2,1}$

این زیر جبر به‌وسیله‌ی

$$e_2 = p \frac{\partial}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial x},$$

تولید می‌شود و معادله تقلیل یافته به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(\beta + pF)^2 F''' + 2p(\beta + pF) F' F'' + p^2(p + q) F F' + p\beta(p + q) F' = 0, \quad (۶.۵)$$

که در آن متغیر مستقل تشابهی $\xi = x + \frac{\beta}{p}t$ و متغیر وابسته تشابهی به‌صورت F است که $u(t, x) = F(\xi)$.

معادله ی (۶.۵) دارای جبر تقارنی لی دو بعدی تولید شده توسط مولدهای

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad X_2 = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} + 2\left(F + \frac{\beta}{p}\right) \frac{\partial}{\partial F},$$

است و در نتیجه می‌تواند به یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول تقلیل یابد. به جای استفاده از روش معمول ناورداها از روش تقلیلی معرفی شده توسط نوچی^{۱۷} [۱۴۱] استفاده می‌کنیم. معادله (۵) را می‌توان به‌صورت دستگاه سه معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} w'_1 = w_2, \\ w'_2 = w_3, \\ w'_3 = -\frac{2pw_2w_3 + p(p+q)w_2}{\beta + pw_1}, \end{cases}$$

^{۱۶}Invariance surface condition

^{۱۷}Nucci

که در آن

$$w_1(\xi) = F(\xi), \quad w_2(\xi) = F'(\xi), \quad w_3(\xi) = F''(\xi).$$

به منظور ساده سازی معادله فوق متغیر وابسته جدیدی به صورت $r_1(\xi) = \beta + pw_1(\xi)$ تعریف می کنیم که با این تعریف دستگاه فوق تبدیل می شود به

$$\begin{cases} r_1' = pw_2, \\ w_2' = w_3, \\ w_3' = -\frac{2pw_2w_3 + p(p+q)w_2}{r_1}, \end{cases} \quad (۷.۵)$$

با توجه به این که این دستگاه مستقل است، می توان r_1 را به عنوان یک متغیر مستقل در نظر گرفت. دستگاه (۷.۵) به صورت دستگاهی از دو معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول زیر در می آید:

$$\begin{cases} \frac{dw_2}{dr_1} = \frac{w_3}{pw_2}, \\ \frac{dw_3}{dr_1} = -\frac{p+q+2w_3}{r_1}, \end{cases} \quad (۸.۵)$$

معادله دوم در (۸.۵) مستقل از معادله اولی و جدائی پذیر است. بنابراین با انتگرال گیری از آن خواهیم داشت:

$$w_3 = \frac{a_1}{r_1^2} - (p+q), \quad (۹.۵)$$

که در آن a_1 ثابت دلخواه است. به وضوح این جواب متناظر است با اولین انتگرال معادله (۶.۵):

$$\xi^2 \left(F''(\xi) + \frac{p+q}{2} \right) = a_1.$$

با جای گذاری (۹.۵) در (۸.۵) داریم:

$$\frac{dw_2}{dr_1} = \frac{2a_1 - (p+q)r_1^2}{2pr_1^2w_2},$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدائی پذیر است و در نتیجه جواب عمومی آن به صورت زیر خواهد

بود:

$$w_2 = \sqrt{\frac{-2a_1 + a_2(p + q - 2a_1)r_1 - (p + q)r_1^2}{pr_1}}, \quad (۱۰.۵)$$

که در آن a_2 ثابت دلخواه است. با جای‌گذاری a_1 در این عبارت بر حسب متغیرهای اصلی F و ξ اولین انتگرال دیگری از معادله (۶.۵) به صورت

$$\frac{2\xi^2 F''(\xi) + p(\beta + pF(\xi))F'^2(\xi) + (p + q)(p^2 F^2(\xi) + 2p\beta F(\xi) + \xi^2 + \beta^2)}{(\beta + pF(\xi))(2\xi^2 F''(\xi) + (p + q)\xi^2 - (p + q))} = a_2.$$

قابل محاسبه است. حال با جای‌گذاری (۱۰.۵) در معادله اول دستگاه (۷.۵) معادله مرتبه اول جدائی‌پذیر زیر به دست می‌آید:

$$r_1' = p \sqrt{\frac{-2a_1 + a_2(p + q - 2a_1)r_1 - (p + q)r_1^2}{pr_1}},$$

که جواب عمومی آن به صورت ضمنی زیر خواهد بود^{۱۸}

$$\frac{\sqrt{(p + q)(\Theta^2 - \Psi^2)r_1}}{(p + q)^2 \sqrt{-pr_1 \Psi (2a_1 a_2 r_1 + 2a_1 + (p + q)(r_1^2 - a_2 r_1))}} \times$$

$$\left[2\Psi \times \text{EllipticE} \left(\sqrt{\frac{\Theta + \Psi}{\Lambda + \Psi}}, \sqrt{\frac{\Lambda + \Psi}{2\Psi}} \right) + \right.$$

$$\left. (2a_1 a_2 - (p + q)a_2 - \Psi) \times \text{EllipticF} \left(\sqrt{\frac{\Theta + \Psi}{\Lambda + \Psi}}, \sqrt{\frac{\Lambda + \Psi}{2\Psi}} \right) \right] = \xi + a_3$$

^{۱۸} در این بخش از نمادهای استفاده شده در نرم افزار میپل استفاده می‌کنیم

$$\text{EllipticE}(z, k) = \int_0^z \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt, \quad \text{EllipticF}(z, k) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - k^2 t^2}} dt.$$

که در آن

$$\Lambda = 2a_1a_2 - (p+q)a_2,$$

$$\Theta = (p+q)(2r_1 - a_2) + 2a_1a_2,$$

$$\Psi = \sqrt{4a_1^2a_2^2 - 4(p+q)a_1a_2^2 + (p+q)^2a_2^2 - 8(p+q)a_1},$$

و در نتیجه با تعویض r_1 با $\beta + pF(\xi)$ جواب عمومی (۶.۵) را به دست می آوریم. یک زیر رده از جواب های صریح با قرار دادن $a_1 = 0$ قابل به دست آوردن است. بنابراین

$$F(\xi) = \frac{4(a_2 - \beta) - p(p+q)(\xi + a_3)^2}{4p},$$

و در نتیجه رده ای از جواب های (۲.۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$u(t, x) = \frac{4p(a_2 - \beta) - (p+q)(px + pa_3 + \beta t)^2}{4p^2}.$$

۳.۲.۵ زیر جبر $L_{3,1}$

این زیر جبر توسط

$$e_3 = -\frac{1}{p}V_3 = -t\frac{\partial}{\partial t} + (x + 2\frac{\beta}{p}t)\frac{\partial}{\partial x} + 2(u + \frac{\beta}{p})\frac{\partial}{\partial u},$$

تولید می شود و شرط سطح ناوردائی متناظر با آن به صورت

$$-tu_t + (x + 2\frac{\beta}{p}t)u_x = 2(u + \frac{\beta}{p}),$$

می باشد و

$$\xi = tx + \frac{\beta}{p}t^2, \quad u(t, x) = \frac{F(\xi)}{t^2} - \frac{\beta}{p}, \quad (11.5)$$

متغیرهای تشابهی هستند.

با جای گذاری (۱۱.۵) در (۲.۵) معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه سوم زیر به دست می آید:

$$(\xi + F)^2 F''' + 2(-\xi + \xi F' + FF')F'' - 2(F')^2 + 2F' + (p+q)FF' + q\xi F' - 2qF = 0, \quad (12.5)$$

که دارای تقارنی نقطه لی نیست.

همچنین دو جواب ویژه با فرض این که F یک چند جمله ای درجه دو باشد، قابل به دست آوردن است. در حقیقت این دو جواب به صورت

$$F_1(\xi) = \frac{q}{p+q}\xi - 2\frac{q}{(p+q)^2}, \quad F_2(\xi) = -\frac{p+q}{4}\xi^2 - \frac{p+q}{p}\xi - \frac{(p+q)^2}{p^2q}$$

می باشند که جواب های (۲.۵) را به صورت

$$u_1(t, x) = \frac{txpq + txq^2 - \beta t^2q - 2q - \beta t^2p}{(p+q)^2t^2},$$

و

$$u_2(t, x) = -\frac{(p+q)(\beta^2qt^4 + 2pqx\beta t^3 + 4pqxt + 4(p+q))}{4qp^2t^2} - \frac{x^2p^3 + 8p\beta + qx^2p^2 + 4q\beta}{4p^2},$$

به ترتیب نتیجه می دهند.

حال روش جدید $LSGPS$ را برای (۱۲.۵) به کار می بریم:

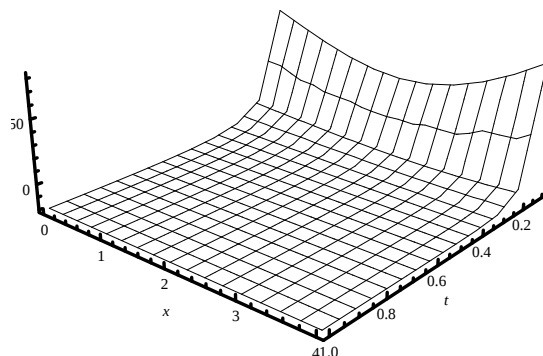
$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\xi, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ \frac{2w_2^2 - 2w_2 - (p+q)w_1w_2 - 2(-\xi + \xi w_2 + w_1w_2)w_3}{(\xi + w_1)^2} \end{pmatrix}$$

که در آن

$$w_1 = F(\xi), \quad w_2 = F'(\xi), \quad w_3 = F''(\xi).$$

بنابراین تکرار زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ w_2^{n+1} \\ w_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \\ w_3^n \end{pmatrix} + \eta_n \begin{pmatrix} w_2^n \\ w_3^n \\ \frac{2(w_2^n)^2 - 2w_2^n - (p+q)w_1^n w_2^n - 2(-\xi_n + \xi_n w_2^n + w_1^n w_2^n)w_3^n}{(\xi_n + w_1^n)^2} \end{pmatrix}$$



شکل ۱.۵: جواب به دست آمده از زیر جبر $L_{3,1}$ با $p = 1$, $q = 2$ و $\beta = 5$

که $\xi_n = n\Delta\xi$ و $\Delta\xi$ طول گام به کار رفته در تکرار فوق است و η_n به وسیله

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{W}_n + \frac{(\alpha_n - 1)\mathbf{f}_n \cdot \mathbf{W}_n + \beta_n \|\mathbf{W}_n\| \|\mathbf{f}_n\|}{\|\mathbf{f}_n\|^2} \mathbf{f}_n = \mathbf{W}_n + \eta_n \mathbf{f}_n, \quad (13.5)$$

تعریف می‌گردد.

با فرض $\Delta\xi = 0.004$ جواب تقریبی جدیدی از معادله واخنکو تعمیم یافته اصلاح شده را با شرایط آغازین $F(0) = 1$, $F'(0) = -1$, $F''(0) = 0$ به دست می‌آوریم. شکل ۱.۵ این جواب را به ازای $\beta = 5$ و $p = 1$, $q = 2$ نمایش می‌دهد.

۴.۲.۵ زیر جبرهای $L_{4,1}$

با توجه به این که این زیر جبرها به وسیله

$$e_1 + \epsilon e_2 = \epsilon p \frac{\partial}{\partial t} - \beta \left(\frac{1}{2} + \epsilon \right) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\epsilon = \pm 1).$$

تولید می‌شوند، دو حالت قابل بررسی است:

$$\bullet \epsilon = -1$$

در این حالت شرط سطح ناوردائی، متغیرهای تشابهی $u(t, x) = F(\xi)$ و $\xi = x + \frac{\beta}{2p}t$ را نتیجه می‌دهد که با جای‌گذاری در (۲.۵) معادله دیفرانسیل مرتبه سه مستقل زیر به دست می‌آید:

$$(\beta + 2pF)^2 F''' + 4p(\beta + 2pF)F'F'' + 4p^2(p + q)FF' + 2p\beta(2p + q)F' = 0, \quad (14.5)$$

که فقط مولد تقارنی لی $\frac{\partial}{\partial \xi}$ را دارا می باشد.

حال با به کارگیری روش تقلیل برای معادله (۱۴.۵) و با در نظر گرفتن دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} w'_1 = w_2, \\ w'_2 = w_3, \\ w'_3 = -\frac{4p(\beta + 2pw_1)w_2w_3 + 4p^2(p+q)w_1w_2 + 2p\beta(2p+q)w_2}{(\beta + 2pw_1)^2}, \end{cases}$$

که

$$w_1(\xi) = F(\xi), \quad w_2(\xi) = F'(\xi), \quad w_3(\xi) = F''(\xi).$$

با استفاده از تبدیل $r_1(\xi) = \beta + 2pw_1(\xi)$ ساده سازی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} r'_1 = 2pw_2, \\ w'_2 = w_3, \\ w'_3 = -\frac{2\beta p^2w_2 + 2p^2r_1w_2 + 2pqr_1w_2 + 4pr_1w_2w_3}{r_1^2}. \end{cases} \quad (۱۵.۵)$$

حال اگر r_1 را به عنوان متغیر مستقل در نظر بگیریم، آنگاه (۱۵.۵) به صورت دستگاهی از دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول مستقل در خواهد آمد. یعنی

$$\begin{cases} \frac{dw_2}{dr_1} = \frac{w_3}{2pw_2}, \\ \frac{dw_3}{dr_1} = -\frac{p\beta + (p+q)r_1 + 2w_3r_1}{r_1^2}, \end{cases} \quad (۱۶.۵)$$

معادله دوم از (۱۶.۵) به راحتی قابل حل است و داریم:

$$w_3 = \frac{2a_1 - 2p\beta r_1 - (p+q)r_1^2}{2r_1^2}, \quad (۱۷.۵)$$

که در آن a_1 ثابت دلخواه است و متناظر با اولین انتگرال معادله (۱۴.۵) به صورت زیر می باشد:

$$\left(F''(\xi) + \frac{p+q}{2}\right)(\beta + 2pF(\xi))^2 + p\beta(\beta + 2pF(\xi)) = const.$$

جای‌گذاری (۱۷.۵) در (۱۶.۵) نتیجه می‌دهد:

$$\frac{dw_2}{dr_1} = \frac{2(a_1 - p\beta r_1) - (p+q)r_1^2}{4pr_1^2 w_2}$$

که با حل آن خواهیم داشت:

$$w_2 = \sqrt{\frac{2p\beta r_1 (a_2 - \log(r_1)) - 2a_1(1 + a_2 r_1) + (p+q)(a_2 r_1 - r_1^2)}{2pr_1}},$$

و a_2 ثابت دلخواه می‌باشد که متناظر با اولین انتگرال دیگر از معادله (۱۴.۵) به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(\frac{\beta}{2} + pF(\xi)\right) \left(3p\beta + q\beta + 2p(p+q)F(\xi) + \left(\frac{\beta}{2} + pF(\xi)\right) F''(\xi)\right) = const.$$

در نهایت با جای‌گذاری w_2 در اولین معادله دستگاه (۱۵.۵) معادله مرتبه اول زیر را به دست خواهیم آورد:

$$r_1' = 2\sqrt{\frac{p((p+q+2p\beta)a_2 - (p+q)r_1)r_1 - 2p(1+a_2 r_1)a_1 - 2p^2\beta r_1 \log(r_1)}{2r_1}}, \quad (18.5)$$

و در نتیجه با استفاده از انتگرال‌گیری داریم:

$$\int \frac{\sqrt{2r_1} dr_1}{\sqrt{p((p+q+2p\beta)a_2 - (p+q)r_1)r_1 - 2p(1+a_2 r_1)a_1 - 2p^2\beta r_1 \log(r_1)}} = \sqrt{2}\xi + a_3.$$

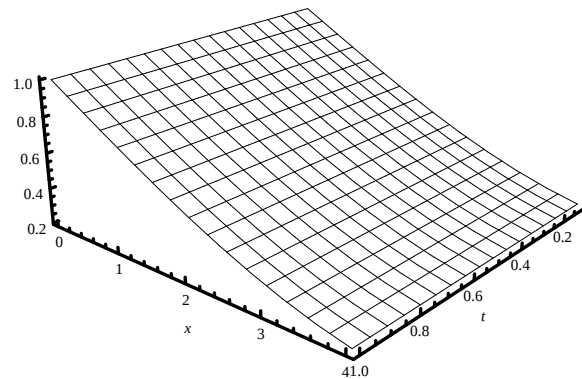
اگر $\beta = 0$ جوابی به صورت بیضوی به دست می‌آید.

حال با فرض $\beta \neq 0$ و با به کارگیری روش $LSGPS$ برای حالت (۱۴.۵) داریم:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\xi, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ -\frac{4p(\beta + 2pw_1)w_2w_3 + 4p^2(p+q)w_1w_2 + 2p\beta(2p+q)w_2}{(\beta + 2pw_1)^2} \end{pmatrix}$$

که در آن

$$w_1 = F(\xi), \quad w_2 = F'(\xi), \quad w_3 = F''(\xi),$$



شکل ۲.۵: جواب به دست آمده از زیر جبر $L_{4,1}$ با $\epsilon = -1$ و $p = 1$, $q = 2$ و $\beta = 5$

با استفاده از تکرار

$$\begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ w_2^{n+1} \\ w_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \\ w_3^n \end{pmatrix} + \eta_n \begin{pmatrix} w_2^n \\ w_3^n \\ -\frac{4p(\beta + 2pw_1^n)w_2^n w_3^n + 4p^2(p+q)w_1^n w_2^n + 2p\beta(2p+q)w_2^n}{(\beta + 2pw_1^n)^2} \end{pmatrix}$$

جواب معادله را به دست می آوریم که در آن $\xi_n = n\Delta\xi$ و $\Delta\xi$ طول گام تکرار می باشد و η_n از رابطه (۱۳.۵) تعریف می شود.

شکل ۲.۵ جواب به دست آمده از روش $LSGPS$ برای معادله واخنکو تعمیم یافته اصلاح شده با مفروضات $\Delta\xi = 0.004$, $F(0) = 1$, $F'(0) = -1$, $F''(0) = 0$ و $p = 1$, $q = 2$ و $\beta = 5$ را نشان می دهد.

• $\epsilon = 1$

در این حالت شرط سطح ناوردائی، متغیرهای تشابهی $u(t, x) = F(\xi)$ و $\xi = x + \frac{3\beta}{2p}t$ را نتیجه می دهد که با جای گذاری در (۲.۵) معادله دیفرانسیل مرتبه سه مستقل زیر به دست می آید:

$$(3\beta + 2pF)^2 F''' + 4p(3\beta + 2pF)F'F'' + 4p^2(p+q)FF' + 2p\beta(2p+3q)F' = 0, \quad (۱۹.۵)$$

که دارای تنها عملگر تقارنی لی $\frac{\partial}{\partial \xi}$ است.

روش تقلیل را برای معادله (۱۹.۵) با در نظر گرفتن دستگاه معادله مرتبه اول زیر مورد بررسی قرار

می‌دهیم:

$$\begin{cases} w'_1 = w_2, \\ w'_2 = w_3, \\ w'_3 = -\frac{4p(3\beta + 2pw_1)w_2w_3 + 4p^2(p+q)w_1w_2 + 2p\beta(2p+3q)w_2}{(3\beta + 2pw_1)^2}, \end{cases}$$

که در آن

$$w_1(\xi) = F(\xi), \quad w_2(\xi) = F'(\xi), \quad w_3(\xi) = F''(\xi).$$

با استفاده از تبدیل $r_1(\xi) = 3\beta + 2pw_1(\xi)$ ساده سازی به صورت زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} r'_1 = 2pw_2, \\ w'_2 = w_3, \\ w'_3 = \frac{2\beta p^2w_2 - 2p(p+q)r_1w_2 - 4pr_1w_2w_3}{r_1^2}, \end{cases} \quad (20.5)$$

حال اگر r_1 را به عنوان متغیر مستقل جدید در نظر بگیریم آنگاه (۲۰.۵) به صورت دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر در خواهد آمد:

$$\begin{cases} \frac{dw_2}{dr_1} = \frac{w_3}{2pw_2}, \\ \frac{dw_3}{dr_1} = \frac{p\beta - (p+q)r_1 - 2w_3r_1}{r_1^2}, \end{cases} \quad (21.5)$$

معادله دوم (۲۱.۵) به راحتی قابل حل است، بنابراین

$$w_3 = \frac{2a_1 + 2p\beta r_1 - (p+q)r_1^2}{2r_1^2}, \quad (22.5)$$

که در آن a_1 ثابت دلخواه است و متناظر با اولین انتگرال معادله (۱۹.۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$F''(\xi)(3\beta + 2pF(\xi))^2 + (3\beta + 2pF(\xi))(p\beta + 3q\beta + 2p(p+q)F(\xi)) = const.$$

با جای‌گذاری (۲۲.۵) در (۲۱.۵) خواهیم داشت:

$$\frac{dw_2}{dr_1} = \frac{2(a_1 + p\beta r_1) - (p+q)r_1^2}{4pr_1^2w_2}$$

که با حل آن داریم:

$$w_2 = \sqrt{\frac{((p+q-2p\beta)a_2 - (p+q)r_1)r_1 - 2a_1(1+a_2r_1) + 2p\beta r_1 \log(r_1)}{2pr_1}},$$

و a_2 ثابت انتگرال گیری می باشد که متناظر با اولین انتگرال معادله (۱۹.۵) می باشد، یعنی

$$\frac{-2(2p(p+q)F - p\beta \ln(3\beta + 2pF) + pF'^2 + (2p+3q)\beta + (3\beta + 2pF)F'')}{2(3\beta + 2pF)^2 F'' + (p+q)(4p^2 F^2 - 1) + 3\beta^2(p+3q) + 2p\beta(1+4pF+6qF)} = const.$$

در نهایت با جای گذاری w_2 در معادله اول دستگاه (۲۰.۵) معادله مرتبه اول زیر را به دست خواهیم آورد:

$$r_1' = 2\sqrt{\frac{p((p+q-2p\beta)a_2 - (p+q)r_1)r_1 - 2p(1+a_2r_1)a_1 + 2p^2\beta r_1 \log(r_1)}{2r_1}},$$

و با انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\int \frac{\sqrt{r_1} dr_1}{\sqrt{((p+q-3p\beta)a_2 - (p+q)r_1)r_1 - 2(1+a_2r_1)a_1 + 2p\beta r_1 \log(r_1)}} = \sqrt{2p}\xi + a_3,$$

که به صورت صریح قابل محاسبه نیست. اگر فرض کنیم $\beta = 0$ آنگاه تابع بیضوی زیر قابل محاسبه است:

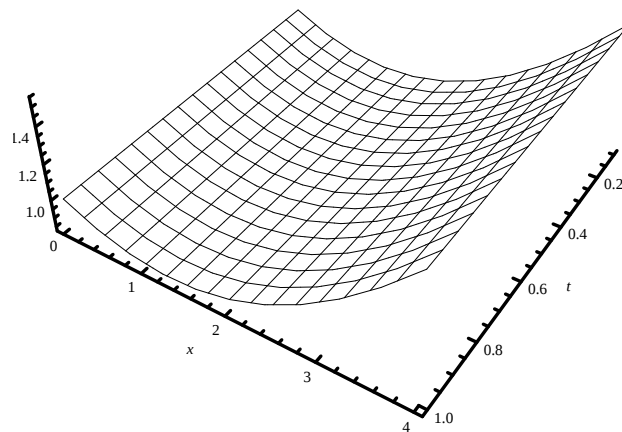
$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{(p+q)(\Theta^2 - \Psi^2)r_1}}{(p+q)^2 \sqrt{-pr_1\Psi(2a_1a_2r_1 + 2a_1 + (p+q)(r_1^2 - a_2r_1))}} \times \\ & \left[2\Psi \times \text{EllipticE}\left(\sqrt{\frac{\Theta + \Psi}{\Lambda + \Psi}}, \sqrt{\frac{\Lambda + \Psi}{2\Psi}}\right) + \right. \\ & \left. (2a_1a_2 - (p+q)a_2 - \Psi) \times \text{EllipticF}\left(\sqrt{\frac{\Theta + \Psi}{\Lambda + \Psi}}, \sqrt{\frac{\Lambda + \Psi}{2\Psi}}\right) \right] = -\frac{4}{\sqrt{2}}\xi + a_3 \end{aligned}$$

که در آن

$$\Lambda = 2a_1a_2 - (p+q)a_2,$$

$$\Theta = (p+q)(2r_1 - a_2) + 2a_1a_2,$$

$$\Psi = \sqrt{4a_1^2a_2^2 - 4(p+q)a_1a_2^2 + (p+q)^2a_2^2 - 8(p+q)a_1}.$$



شکل ۳.۵: جواب به دست آمده از زیر جبر $L_{4,1}$ با $\epsilon = +1$ و $p = 1$, $q = 2$ و $\beta = 5$

حال فرض می‌کنیم $\beta \neq 0$ و روش $LSGPS$ را به کار می‌بریم. مشابه دستگاه فوق داریم:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\xi, \mathbf{W}) = \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \\ -\frac{4p(3\beta + 2pw_1)w_2w_3 + 4p^2(p+q)w_1w_2 + 2p\beta(2p+3q)w_2}{(3\beta + 2pw_1)^2} \end{pmatrix}$$

که

$$w_1 = F(\xi), \quad w_2 = F'(\xi), \quad w_3 = F''(\xi),$$

و با استفاده از تکرار

$$\begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ w_2^{n+1} \\ w_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^n \\ w_2^n \\ w_3^n \end{pmatrix} + \eta_n \begin{pmatrix} w_2^n \\ w_3^n \\ -\frac{4p(3\beta + 2pw_1^n)w_2^n w_3^n + 4p^2(p+q)w_1^n w_2^n + 2p\beta(2p+3q)w_2^n}{(3\beta + 2pw_1^n)^2} \end{pmatrix}$$

که در آن $\xi_n = n\Delta\xi$ و $\Delta\xi$ طول گام تکرار است و η_n به وسیله (۱۳.۵) تعریف می‌شود. شکل ۳.۵ جواب $LSGPS$ را برای معادله واخنکو تعمیم یافته اصلاح شده را با فرض $\Delta\xi = 0.004$ ، $F(0) = 1$, $F'(0) = -1$, $F''(0) = 3$, $p = 1$, $q = 2$, $\beta = 5$ نشان می‌دهد.

۳.۵ نتیجه‌گیری

در این فصل آنالیز گروه لی برای معادله‌ی اصلاح شده تعمیم یافته واخنکو مورد استفاده قرار گرفت. روش تقلیل معرفی شده توسط نوچی برای حل معادله‌ی دیفرانسیل معمولی به دست آمده از زیر جبرها استفاده شده و جواب‌های تحلیلی معادله به دست آمدند. همچنین روش جدیدی به نام $LSGPS$ برای اولین بار، برای حالتی که معادلات دیفرانسیل معمولی تقلیل یافته قابل حل نمی‌باشد معرفی گردید.

فصل ۶

تقارنی‌های غیرکلاسیک رده‌ای از معادلات
واکنش-انتشار به وسیله‌ی معادلات وراثتی

مقدمه

در مقاله اخیر [۱۹] رده‌ای از معادلات واکنش-انتشار به صورت

$$u_t = u_{xx} + cu_x + R(u, x), \quad (۱.۶)$$

معرفی گردید که در آن $R(u, x)$ تابع دلخواهی از u و x است. یکی از کاربردهای این مدل در توصیف انتقال آب و هوا می‌باشد. در این مدل فرض بر این است که در طی جابجایی آب و هوا^۱، انتقال بخشی از آب و هوا با سرعت ثابت c در یک بعد، معادله (۱.۶) متناظر خواهد بود با مدل

$$u_t = u_{zz} + R(u, z - ct)$$

که در واقع بازنویسی شده مدل برحسب دستگاه مختصات انتقال یافته به صورت $x = z - ct$ است [۱۹].

در این بخش از رساله، هدف پیدا کردن عبارتهای صریح $R(u, x)$ در معادله (۱.۶) با استفاده از تقارنی‌های غیرکلاسیک و سپس به دست آوردن جواب‌های تحلیلی مسئله است. بلومن^۲ و کل^۳ برای اولین بار در سال ۱۹۶۹ در مقاله [۲۲] تقارنی‌های غیرکلاسیک را معرفی کردند. سپس بعد از بیست سال که گاه و بیگاه مقالاتی راجع به این زمینه چاپ می‌شد ([۲۳، ۱۴۴])، در اوائل دهه نود موج جدیدی از علاقه‌مندی در این زمینه ایجاد گردید که برخی از مقالات چاپ شده در این زمینه عبارتند از [۸، ۹، ۴۷، ۴۸، ۵۲، ۵۶، ۱۱۰، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۹، ۱۴۰]. از آن زمان به بعد، روش تقارنی غیرکلاسیک برای معادلات مختلفی به کار برده شد و مقالات زیادی از جمله [۱۰، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۶۴، ۶۵، ۷۵، ۱۱۳، ۱۴۹، ۱۶۴، ۱۷۳] در این زمینه چاپ شده‌اند.

باید توجه داشت که برخی نویسندگان در مقالات خود از جمله [۴۱]، تقارنی‌های غیرکلاسیک را با نام تقارنی‌های Q -شرطی نوع دوم مورد استفاده قرار دادند و برخی دیگر مانند [۱۴۹] از آن به عنوان عمل‌گرهای تقلیلی یاد بردند.

در بخش بعدی مفهوم معادلات وراثتی^۴ [۱۳۵] و ارتباط آنها با تقارنی‌های غیرکلاسیک را مرور خواهیم کرد [۱۳۸].

^۱Climate shift

^۲Bluman

^۳Cole

^۴Heir-equations

۱.۶ معادلات وراثتی و تقارنی‌های غیرکلاسیک

معادله تکاملی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته را به صورت

$$u_t = H(t, x, u, u_x, u_{xx}) \quad (۲.۶)$$

در نظر می‌گیریم. اگر

$$\Gamma = V_1(t, x, u)\partial_t + V_2(t, x, u)\partial_x - F(t, x, u)\partial_u \quad (۳.۶)$$

مولد تقارنی لی معادله (۲.۶) باشد، آنگاه شرط سطح ناوردا به صورت

$$V_1(t, x, u)u_t + V_2(t, x, u)u_x = F(t, x, u). \quad (۴.۶)$$

خواهد بود. فرض کنیم داشته باشیم $V_1 = 0$ و $V_2 = 1$ به طوری که رابطه (۴.۶) به صورت زیر نوشته شود:^۵

$$u_x = G(t, x, u). \quad (۵.۶)$$

در این صورت رابطه‌ای صریح برای G به دست خواهیم آورد که آن را معادله‌ی G [۱۳۴] می‌نامیم. شرط سطح ناوردا برای این معادله به صورت

$$\xi_1(t, x, u, G)G_t + \xi_2(t, x, u, G)G_x + \xi_3(t, x, u, G)G_u = \eta(t, x, u, G) \quad (۶.۶)$$

خواهد بود. حالت $\xi_1 = 0$ ، $\xi_2 = 1$ و $\xi_3 = G$ را در نظر می‌گیریم به طوری که معادله (۶.۶) به صورت زیر نوشته شود:

$$G_x + GG_u = \eta(t, x, u, G). \quad (۷.۶)$$

^۵برای پرهیز از ابهام در نوشتار، به جای $F(t, x, u)$ از نماد $G(t, x, u)$ استفاده خواهیم نمود.

در این صورت معادله‌ای را برای η به دست می‌آوریم که آن را معادله‌ی η می‌نامیم. به وضوح

$$G_x + GG_u \equiv u_{xx} \equiv \eta. \quad (۸.۶)$$

به همین ترتیب می‌توان معادلات مرتبه‌های بالاتر را به دست آورد. هر یک از این معادلات، جبر تقارنی معادله اصلی را با تطویل متناظرش به ارث می‌برد. یعنی تطویل مرتبه اول برای معادله G ، تطویل مرتبه دوم برای معادله η و غیره. به همین علت این معادلات را وراثتی [۱۳۵] می‌نامیم. در مقاله [۱۳۵] نشان داده شد که روش تکراری به کار گرفته شده هم تقارنی‌های جزئی ارائه شده توسط وروبف^۶ [۱۷۴] را نتیجه می‌دهد و هم محدودیت‌های دیفرانسیلی که توسط الور^۷ [۱۴۳] معرفی شده‌اند. فکاس^۸ و لیو^۹ در مقاله‌ی [۵۵] به طور جداگانه با زدائف^{۱۰}، روش تقارنی‌های شرطی تعمیم یافته یا به عبارتی تقارنی‌های لی-بکلوند^{۱۱} شرطی را معرفی کردند. همچنین نوچی در مقاله‌ی [۱۳۶] نشان داد که تمام تقارنی‌های لی-بکلوند به دست آمده توسط زدائف را می‌توان به شکل راحت‌تری، با استفاده از معادلات وراثتی به دست آورد. گارد^{۱۲} در مقاله‌ی [۶۶] نشان داد که روش تکراری معادلات وراثتی که توسط نوچی معرفی شده، معادل روش تقارنی شرطی تعمیم یافته است.

مشکلی که در به دست آوردن تقارنی‌های غیرکلاسیک با آن مواجه هستیم این است که معادلات تعیینی تولید شده برای این دسته از تقارنی‌ها غیرخطی است، در حالی که برای تقارنی‌های کلاسیک معادلات تعیینی خطی می‌باشند. در مقاله‌ی [۱۳۸] نشان داده شد که تقارنی‌های غیرکلاسیک هر معادله تکاملی را با استفاده از معادله وراثتی مناسب و به دست آوردن جواب ویژه، می‌توان بدون محاسبات پیچیده‌ی معمول در بقیه‌ی روش‌ها به دست آورد. این روش را برای معادله‌ی (۲.۶) به کار می‌بریم. مقدار u_t را می‌توان از (۲.۶) به دست آورده و آن را در شرط (۴.۶) جای‌گذاری کرد که با شرط $V_1 = 1$ خواهیم داشت:

$$H(t, x, u, u_x, u_{xx}) + V_2(t, x, u)u_x = F(t, x, u). \quad (۹.۶)$$

^۶Vorobev

^۷Olver

^۸Fokas

^۹Liu

^{۱۰}Zhdanov

^{۱۱}Lie-Bäcklund

^{۱۲}Goard

سیس معادله η را که در آن $\eta = \eta(x, t, u, G)$ است را تولید کرده و در رابطه‌ی (۹.۶) قرار می‌دهیم
 $: u_{xx} = \eta$ و $u_x = G$

$$H(t, x, u, G, \eta) = F(t, x, u) - V_2(t, x, u)G. \quad (۱۰.۶)$$

حال η را در رابطه‌ی (۱۰.۶) جداسازی می‌کنیم، یعنی:

$$\eta = [h_1(t, x, u, G) + F(t, x, u) - V_2(t, x, u)G] h_2(t, x, u, G) \quad (۱۱.۶)$$

که در آن $h_i(t, x, u, G) (i = 1, 2)$ توابع معلومی هستند. بنابراین جواب ویژه‌ای برای η به‌دست آوردیم که باید در معادله‌ی وراثتی η صدق کند. در این مرحله، تنها توابعی که مجهولند $V_2 = V_2(t, x, u)$ و $F = F(t, x, u)$ می‌باشند. حال اگر هر یک از چنین جواب‌هایی منفرد باشد، یعنی شکل گروه را به خود نگیرند، در این صورت تقارنی‌های غیرکلاسیک را به‌دست آورده‌ایم. در غیر این صورت این توابع تقارنی‌های کلاسیک هستند [۱۳۸].

۲.۶ تقارنی‌های غیرکلاسیک معادله (۱.۶)

قبل از این‌که به بحث روی معادلات وراثتی بپردازیم، یادآور می‌شویم که برنامه‌ی مورد استفاده در این بخش میپل می‌باشد. معادله‌ای G که برای (۱.۶) به‌دست می‌آید، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$G_t + RG_u - G_{xx} - 2GG_{xu} - G^2G_{uu} - cG_x - R_uG - R_x = 0. \quad (۱۲.۶)$$

همچنین معادله‌ی η را به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \eta_t + R\eta_u + R_uG\eta_G - \eta_{xx} - 2G\eta_{xu} - 2\eta\eta_{xG} - G^2\eta_{uu} - 2G\eta\eta_{uG} \\ - \eta^2\eta_{GG} - c\eta_x - R_{uu}G^2 - R_u\eta - 2GR_{xu} + R_x\eta_G - R_{xx} = 0. \end{aligned} \quad (۱۳.۶)$$

جواب ویژه‌ای از معادله‌ی η که جستجو خواهیم کرد، به‌صورت

$$\eta(t, x, u, G) = -R(u, x) - cG + F(t, x, u) - V_2(t, x, u)G, \quad (۱۴.۶)$$

است که با جای‌گذاری در (۱۳.۶) دستگاهی فرامعین با مجهولات $F(t, x, u)$ ، $V_2(t, x, u)$ و $R(u, x)$ خواهیم داشت. با توجه به این‌که معادله‌ی η به یک چندجمله‌ای درجه سه بر حسب G تبدیل می‌شود، با استفاده از نرم‌افزار میپل چهار ضریب d_i ، $i = 0, 1, 2, 3$ را محاسبه می‌کنیم که i در واقع متناظر با توان‌های G می‌باشد. برای این‌که معادله‌ی η برقرار باشد، ضرائب d_i را صفر قرار می‌دهیم. از d_3 می‌توان به‌دست آورد:

$$V_2(t, x, u) = ss_1(t, x)u + ss_2(t, x), \quad (15.6)$$

و از d_2 داریم:

$$F(t, x, u) = -\frac{1}{3}ss_1^2u^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial ss_1}{\partial x} - 2css_1 - 2ss_1ss_2\right) + ss_3(t, x)u + ss_4(t, x), \quad (16.6)$$

که در آن $ss_j(t, x)$ ، $j = 1, \dots, 4$ توابع دلخواهی بر حسب t و x هستند. سپس با چهار بار مشتق‌گیری از d_1 نسبت به u به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^4 R(u, x)}{\partial u^4} = 0, \quad (17.6)$$

که می‌توان نتیجه گرفت، $R(u, x)$ چندجمله‌ای حداکثر از درجه‌ی چهار نسبت به u می‌تواند باشد. یعنی:

$$R(u, x) = -\frac{a_3^2(x)}{6}u^3 + \frac{a_2(x)}{2}u^2 + a_1(x)u + a_0(x), \quad (18.6)$$

که در آن $a_i(x)$ ، $i = 0, 1, 2, 3$ توابع دلخواهی از x هستند. حال با توجه به این‌که تمام توابع دلخواه باقی‌مانده مستقل از u هستند و d_1 یک چندجمله‌ای از درجه سه نسبت به u است، بنابراین سعی بر صفر کردن ضرائب توان‌های u ، یعنی $d_{1,j}$ ، $j = 0, 1, 2, 3$ خواهیم نمود. از $d_{1,3}$ دو حالت را برای $ss_1(t, x)$ می‌توان در نظر گرفت:

حالت ۱: $ss_1 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} a_3(x)$ و
حالت ۲: $ss_1 = 0$.

دو حالت فوق را به صورت مجزا می‌توان ^{۱۳} مورد بحث قرار داد. همچنین در حالت ۱ باید $a_3(x) \neq 0$ باشد، زیرا در غیر این صورت حالت ۲ نتیجه خواهد شد. برای حالت ۲، می‌توان دید که تقارنی‌های غیرکلاسیک به ازای

$$R(u, x) = \frac{f(u)}{k^2(x)} \quad (۱۹.۶)$$

موجود خواهد بود که در آن $f(u)$ تابعی دلخواه از u است و $k(x)$ یکی از سه تابع زیر می‌تواند باشد:

$$k(x) = -\frac{cx+2}{2x}, \quad k(x) = \frac{c}{e^{c(b_0-x)}-1}, \quad k(x) = \frac{1}{b_1} \tan\left(\frac{x+b_2}{b_1}\right) - \frac{c}{2}. \quad (۲۰.۶)$$

بنابراین ابتدا تقارنی‌های غیرکلاسیک را برای حالت ۱ مورد بحث قرار می‌دهیم:

$$R(u, x) = -\frac{a_3^2(x)}{6}u^3 + \frac{a_2(x)}{2}u^2 + a_1(x)u + a_0(x) \quad \text{حالت ۱:} \quad ۱.۲.۶$$

از ضرائب $d_{1,0}$ ، $d_{1,1}$ ، $d_{1,2}$ به ترتیب ss_2 ، ss_3 و ss_4 را می‌توان به دست آورد. به راحتی نتیجه می‌شود که تمامی آنها توابعی فقط برحسب x هستند. به عنوان مثال:

$$ss_2 = -\frac{1}{2a_3(x)} \left(-4a_3'(x) + \sqrt{3}a_2(x) + 2ca_3(x) \right), \quad (۲۱.۶)$$

که در آن علامت ' نمایانگر مشتق نسبت به x است. حال تنها ضریب باقی‌مانده d_0 است که یک چند جمله‌ای خطی نسبت به u است. در این مرحله دستگاهی فرومعیین از دو معادله را خواهیم داشت که به ترتیب شامل مشتقات مراتب پنج و چهار $a_3(x)$ هستند و شامل مشتقات مراتب پایین‌تر برای $a_2(x)$ ،

^{۱۳} در حالت ۱، علامت‌های مثبت و منفی نتایج یکسانی را به دست می‌دهند.

$a_0(x)$ و $a_1(x)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}
 & -a_3^3 a_3^{(iv)} - 4a_3^3 a_3'' a_1 - c^2 a_3^3 a_3'' - 5a_2^2 a_3 a_3'' + 3a_2 a_3^2 a_2'' + a_3^3 \sqrt{3} a_2''' - 36a_3 (a_3')^2 a_3'' \\
 & - 2a_3^3 a_3''' c + 8a_3^2 a_3' a_3''' + a_0' \sqrt{3} a_3^5 - 2a_3' a_3^3 a_1' - 18a_3'^3 \sqrt{3} a_2 + ca_3^4 a_1' + 4a_3^2 a_3'^2 a_1 \\
 & - a_2^3 \sqrt{3} a_3' - 2a_2 \sqrt{3} a_3^2 a_3'' c + 16a_3 a_3' a_3'' \sqrt{3} a_2 + 14a_3^2 a_3' a_3'' c + 3a_3^2 a_2'^2 + 5a_3^2 a_2''^2 \\
 & + ca_3^3 \sqrt{3} a_2'' - 5a_3^2 a_3' \sqrt{3} a_2'' - 6a_3^2 a_3'' \sqrt{3} a_2' - 2a_2 \sqrt{3} a_3^2 a_3''' + 13a_3'^2 a_2^2 + a_1' a_3^3 \sqrt{3} a_2 \\
 & + a_3^3 \sqrt{3} a_2' a_1 + 14a_3 a_3'^2 \sqrt{3} a_2' - a_2^2 a_3 ca_3' + a_0 \sqrt{3} a_3^4 a_3' + a_2^2 \sqrt{3} a_3 a_2' \\
 & - 12a_3 a_3'^3 c + c^2 a_3^2 a_3'^2 + 4a_3 a_3'^2 c \sqrt{3} a_2 - a_3^2 a_3' \sqrt{3} a_2 a_1 - 3a_3^2 ca_3' \sqrt{3} a_2' \\
 & + 24a_3'^4 - 14a_3 a_3' a_2 a_2' + a_2 a_3^2 ca_2' + 3a_3^4 a_1'' = 0, \quad (22.6) \\
 & \frac{6}{\sqrt{3}} a_3^4 a_3^{(v)} + 7c \sqrt{3} a_3^2 a_3' a_2' a_2 - ca_3^6 a_0' - 3a_3'^2 a_2^3 + 192 \sqrt{3} a_3'^5 - 26c \sqrt{3} a_3^3 a_3''' a_3' \\
 & + 2c \sqrt{3} a_3^4 a_1' a_3' - 264a_3'^4 a_2 + 5a_3^3 a_3^{(iv)} a_2 + 104 \sqrt{3} a_3'^2 a_3^2 a_3''' - 18 \sqrt{3} a_3^3 a_3^{(iv)} a_3' \\
 & + 2c^2 \sqrt{3} a_3^4 a_3''' + 4c \sqrt{3} a_3^4 a_3^{(iv)} - 2c \sqrt{3} a_3^5 a_1'' - 26c \sqrt{3} a_3^3 a_3''^2 + 19ca_3^3 a_2'' a_3' + 27ca_3^3 a_2' a_3'' \\
 & + 6ca_3^3 a_3''' a_2 + c^2 a_3^3 a_3'' a_2 - 416 \sqrt{3} a_3'^3 a_3 a_3'' + 10 \sqrt{3} a_3^4 a_3'' a_1' + 178 \sqrt{3} a_3^2 a_3''^2 a_3' \\
 & - 42 \sqrt{3} a_3^3 a_3'' a_3''' - 6a_3^3 \sqrt{3} a_2' a_2'' + \sqrt{3} a_3^2 a_3''' a_2^2 - \sqrt{3} a_3^3 a_2''' a_2 + 350a_3'^2 a_3 a_3'' a_2 - 204a_3^2 a_3'' a_2' a_3' \\
 & - 56a_3' a_2 a_3^2 a_3''' + 2a_1 \sqrt{3} a_3^4 a_3''' + 5a_1 a_3^3 a_3'' a_2 - 54ca_3^2 a_3' a_3'' a_2 - c^2 a_3^4 a_2'' - 4ca_3^4 a_2''' \\
 & - 2 \sqrt{3} a_3^5 a_1''' + 3a_0 a_3^5 a_3'' - 88a_3'^2 a_3^2 a_2'' + 39a_3^3 a_3'' a_2'' - 55a_3^2 a_3''' a_2 + 24a_3^3 a_2' a_3''' \\
 & + 20a_3^3 a_2'' a_3' - 3a_1 a_3^4 a_2'' - 4a_0' a_3^5 a_3' + 34 \sqrt{3} a_3'^3 a_2^2 - 4a_3'^2 a_3^4 a_0 + 232a_3'^3 a_3 a_2' \\
 & - 6a_3^4 a_2' a_1' - 3a_3^2 a_2'^2 a_2 - a_1 a_3^4 ca_2' + 6c^2 \sqrt{3} a_3^2 a_3'^3 - 2c \sqrt{3} a_3^3 a_2'^2 - 64c \sqrt{3} a_3 a_3'^4 \\
 & + 3c^2 a_3^3 a_3' a_2' - 3c^2 a_3^2 a_3'^2 a_2 - 56ca_3^2 a_3'^2 a_2' + 62ca_3 a_3'^3 a_2 - 12 \sqrt{3} a_3'^2 a_3^3 a_1' + 16a_3^2 \sqrt{3} a_2'^2 a_3' \\
 & - a_0 a_3^5 a_3' c + a_0' a_3^5 \sqrt{3} a_2 + 6a_3 a_2' a_3' a_2^2 + 6a_3' a_2 a_3^3 a_1' + a_1 a_3^3 ca_3' a_2 - 50a_3 \sqrt{3} a_2' a_3'^2 a_2 \\
 & - 5c \sqrt{3} a_3 a_3'^2 a_2^2 + a_3' \sqrt{3} a_2 a_3^4 a_0 - 2a_1 \sqrt{3} a_3^5 a_1' + 8a_1 \sqrt{3} a_3^2 a_3'^3 + 8a_1 a_3^3 a_2' a_3' - 10a_1 a_3^2 a_3'^2 a_2 \\
 & - a_1 \sqrt{3} a_3^3 a_2' a_2 - 2a_1 \sqrt{3} a_3^3 ca_3'^2 + a_1 \sqrt{3} a_3^2 a_3' a_2^2 - 3a_3^6 a_0'' - 3a_3^4 a_2^{(iv)} - c \sqrt{3} a_3^3 a_2'' a_2 \\
 & + 11a_3' \sqrt{3} a_2 a_3^2 a_2'' + 16 \sqrt{3} a_3^2 a_3'' a_2' a_2 - 8c^2 \sqrt{3} a_3^3 a_3' a_3'' + 112c \sqrt{3} a_3^2 a_3'^2 a_3'' + c \sqrt{3} a_3^2 a_3'' a_2^2 \\
 & - 21 \sqrt{3} a_3 a_3'' a_3' a_2^2 - 10a_1 \sqrt{3} a_3^3 a_3'' a_3' + 2a_1 \sqrt{3} a_3^4 a_3'' + 4 \sqrt{3} a_3^4 a_1'' a_3' = 0. \quad (23.6)
 \end{aligned}$$

با توجه به این که این دستگاه بی نهایت جواب دارد، فقط به چند جواب ویژه اکتفا می‌کنیم.

حالت ۱.۱: $R(u, x) = -\frac{1}{2}x^2u^3 + 3u^2 + \frac{1}{2}c^2u$
 اگر فرض کنیم $a_3(x) = \sqrt{3}x$ و $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ مقادیر ثابتی باشند، آنگاه از (۲۲.۶)-(۶) (۲۳) خواهیم داشت:

$$R(u, x) = -\frac{1}{2}x^2u^3 + 3u^2 + \frac{1}{2}c^2u, \quad (24.6)$$

و

$$ss_1(t, x) = \frac{3x}{2}, \quad ss_2(t, x) = -\frac{1+cx}{x}, \quad ss_3(t, x) = c\frac{-2+3cx}{4x}, \quad ss_4(t, x) = 0. \quad (25.6)$$

بنابراین معادله‌ی (۱۴.۶) به صورت زیر خواهد بود:

$$\eta = -\frac{x^3u^3 + 2cu - c^2xu + 6x^2uG - 4G}{4x}, \quad (26.6)$$

یا به عبارتی

$$u_{xx} = -\frac{x^3u^3 + 2cu - c^2xu + 6x^2uu_x - 4u_x}{4x}. \quad (27.6)$$

جواب تحلیل معادله‌ی فوق به راحتی به دست می‌آید:

$$u(t, x) = \frac{c^2R_2(t)e^{\frac{cx}{2}} - c^2(1+cx)e^{\frac{-cx}{2}}}{R_1(t) + (cx-2)R_2(t)e^{\frac{cx}{2}} + (10+5cx+c^2x^2)e^{\frac{-cx}{2}}}, \quad (28.6)$$

که در آن $R_k(t), k = 1, 2$ توابع دلخواهی نسبت به t هستند.
 با جای‌گذاری (۲۸.۶) در معادله‌ی (۱۰.۶) جوابی از تقارنی‌های غیرکلاسیک را به صورت زیر به دست خواهیم آورد:

$$u(t, x) = \frac{c^2c_1e^{c^2t+\frac{cx}{2}} - c^2(1+cx)e^{\frac{-cx}{2}}}{c_2e^{\frac{-c^2t}{4}} + c_1(cx-2)e^{c^2t+\frac{cx}{2}} + (10+5cx+c^2x^2)e^{\frac{-cx}{2}}}, \quad (29.6)$$

که در آن $c_k, k = 1, 2$ ثابت‌های دلخواهی هستند. همچنین مشاهده می‌شود که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = \frac{c^2}{cx - 2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(t, x) = 0 \quad (۳۰.۶)$$

و برای $t > 0, x < 0$ داریم $u(t, x) < 0$. بنابراین جواب (۲۹.۶) در $x = 2/c$ تعریف نشده و اگر $x \geq 0$ آنگاه جواب مثبت خواهد بود.

حالت ۱.۲: $R(u, x) = -\frac{1}{2}e^{cx}u^3 + \frac{c^2}{4}u + e^{\frac{cx}{2}}$
فرض کنیم $a_3(x) = \sqrt{3}e^{cx}, a_2(x) = 0, a_0(x) = b_0$ و $a_1(x) = b_1$ ، آنگاه از (۲۲.۶)-(۲۳.۶) به دست می‌آوریم:

$$R(u, x) = -\frac{1}{2}e^{cx}u^3 + b_1u + b_0e^{\frac{cx}{2}} \quad (۳۱.۶)$$

که در آن b_0, b_1 ثابت‌های دلخواه هستند و در نتیجه η به صورت زیر خواهد بود:

$$\eta = -\frac{1}{8} \left(2e^{cx}u^3 + (3c^2 - 4b_1)u + 8cG + 6e^{\frac{cx}{2}}cu^2 + 12e^{\frac{cx}{2}}uG - 4b_0e^{-\frac{cx}{2}} \right), \quad (۳۲.۶)$$

یا به عبارتی

$$u_{xx} = -\frac{1}{8} \left(2e^{cx}u^3 + (3c^2 - 4b_1)u + 8cu_x + 6e^{\frac{cx}{2}}cu^2 + 12e^{\frac{cx}{2}}uu_x - 4b_0e^{-\frac{cx}{2}} \right), \quad (۳۳.۶)$$

که جوابی به شکل بسته قابل حصول است، گرچه این جواب خیلی طولانی است. در حالت خاص، اگر فرض کنیم

$$b_1 = \frac{c^2}{4}, \quad b_0 = 1, \quad (۳۴.۶)$$

آنگاه جواب (۳۳.۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$u(t, x) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2 \left(R_1(t) e^{\frac{\sqrt[3]{2}x}{2}} - R_2(t) e^{-\frac{\sqrt[3]{2}x}{4}} \sin \left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x}{4} \right) + e^{-\frac{\sqrt[3]{2}x}{4}} \cos \left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x}{4} \right) \right) e^{\frac{cx}{2}}} \times \\ \times \left[2R_1(t) e^{\frac{\sqrt[3]{2}x}{2}} + R_2(t) e^{-\frac{\sqrt[3]{2}x}{4}} \left(\sin \left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x}{4} \right) - \sqrt{3} \cos \left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x}{4} \right) \right) \right. \\ \left. - e^{-\frac{\sqrt[3]{2}x}{4}} \left(\sqrt{3} \sin \left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x}{4} \right) + \cos \left(\frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}x}{4} \right) \right) \right] \quad (۳۵.۶)$$

که با جای‌گذاری در (۱.۶) خواهیم داشت:

$$R_1(t) = 0, \quad R_2(t) = -\tan \left(\frac{3\sqrt{3}\sqrt[3]{4}}{8}(t + c_1) \right). \quad (۳۶.۶)$$

این جواب بین مقادیر مثبت و منفی تغییر وضعیت می‌دهد. در نتیجه این جواب به دست آمده جواب قابل قبولی برای مدل بیولوژیکی ارائه شده در [۱۹] نمی‌تواند باشد. با این حال احتمالاً معادله‌ی

$$u_t = u_{xx} + cu_x - \frac{1}{2}e^{cx}u^3 + \frac{c^2}{4}u + e^{\frac{cx}{2}} \quad (۳۷.۶)$$

در سایر مدل‌های بیولوژیکی و فیزیکی جالب توجه باشد.

$$\text{حالت ۱.۳: } R(u, x) = -\frac{u^3}{6} - \frac{\sqrt{3}u^2}{x} + \frac{c^2u}{6} + \frac{\sqrt{3}c^2}{3x}$$

با در نظر گرفتن $a_3(x) = b_3$, $a_1(x) = b_1$ و جای‌گذاری آن‌ها در دستگاه (۲۲.۶)-(۲۳.۶) و انجام برخی ساده‌سازی‌ها مانند $b_1 = c^2/6$ و تحمیل شرط $b_3 = -1$ ، به دست می‌آوریم:

$$R(u, x) = -\frac{u^3}{6} - \frac{\sqrt{3}u^2}{x} + \frac{c^2u}{6} + \frac{\sqrt{3}c^2}{3x}. \quad (۳۸.۶)$$

بنابراین (۱۴.۶) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\eta = \frac{36xG - 36u + 6\sqrt{3}Gu x^2 - u^3x^2 - 6\sqrt{3}u^2x + c^2ux^2 + 12\sqrt{3}c + 2\sqrt{3}c^2x}{12x^2}, \quad (۳۹.۶)$$

یا به عبارتی

$$u_{xx} = \frac{36xu_x - 36u + 6\sqrt{3}u_xux^2 - u^3x^2 - 6\sqrt{3}u^2x + c^2ux^2 + 12\sqrt{3}c + 2\sqrt{3}c^2x}{12x^2}. \quad (۴۰.۶)$$

حال با فرض $c = 0$ جواب معادله به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$u(t, x) = -\frac{2\sqrt{3}(4R_2(t)x^3 + 2x)}{R_1(t) + R_2(t)x^4 + x^2} \quad (۴۱.۶)$$

که با جای‌گذاری در (۱.۶) جوابی به صورت زیر را خواهیم داشت:

$$u(t, x) = \frac{4\sqrt{3}x(2x^2 + c_1 + 12t)}{6c_1t + 36t^2 - c_2 - x^4 - x^2c_1 - 12tx^2}. \quad (۴۲.۶)$$

مشاهده می‌شود که جواب (۴۲.۶) دارای رفتاری به صورت

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(t, x) = 0 \quad (۴۳.۶)$$

است. همچنین برای مقادیر x و t گزارش شده در زیر تعریف نشده می‌باشد:

$$\left\{ x = \frac{1}{2}\sqrt{-2c_1 - 24t + 2\sqrt{c_1^2 + 48c_1t + 288t^2 - 4c_2}}, \forall t \right\}, \quad (۴۴.۶)$$

$$\left\{ x = -\frac{1}{2}\sqrt{-2c_1 - 24t + 2\sqrt{c_1^2 + 48c_1t + 288t^2 - 4c_2}}, \forall t \right\}, \quad (۴۵.۶)$$

$$\left\{ x = \frac{1}{2}\sqrt{-2c_1 - 24t - 2\sqrt{c_1^2 + 48c_1t + 288t^2 - 4c_2}}, \forall t \right\}, \quad (۴۶.۶)$$

$$\left\{ x = -\frac{1}{2}\sqrt{-2c_1 - 24t - 2\sqrt{c_1^2 + 48c_1t + 288t^2 - 4c_2}}, \forall t \right\}. \quad (۴۷.۶)$$

زیر حالت ۱.۴: $R(u, x) = -u^3 + 6\frac{u}{x^2} + 6\frac{\sqrt{2}}{x^3}$
 اگر فرض کنیم $a_3(x) = b_3, a_2(x) = 0$ و $c = 0$ آنگاه خواهیم داشت:

$$R(u, x) = -u^3 + 6\frac{u}{x^2} + 6\frac{\sqrt{2}}{x^3}. \quad (۴۸.۶)$$

بنابراین معادله‌ی (۱۴.۶) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\eta = -\frac{6\sqrt{2} - 6xu + 3\sqrt{2}x^3uG + x^3u^3}{2x^3}, \quad (۴۹.۶)$$

یا به عبارتی

$$u_{xx} = -\frac{6\sqrt{2} - 6xu + 3\sqrt{2}x^3uu_x + x^3u^3}{2x^3}. \quad (۵۰.۶)$$

جواب آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$u(t, x) = \frac{\sqrt{2}(-R_1(t) + 3R_2(t)x^4 + x^2)}{x(R_1(t) + R_2(t)x^4 + x^2)} \quad (۵۱.۶)$$

که با جای‌گذاری در (۱.۶) جواب زیر را خواهیم داشت:

$$u(t, x) = -\frac{3\sqrt{2}(12c_2^2 + 24c_2t + 4c_2x^2 + 4c_1 + 12t^2 + 4tx^2 + x^4)}{x(36c_2^2 + 72c_2t - 12c_2x^2 + 12c_1 + 36t^2 - 12tx^2 - x^4)}. \quad (۵۲.۶)$$

گرچه به خاطر $c = 0$ این جواب برای مدل ارائه شده در [۱۹] معتبر نیست، ولی با توجه به این‌که معادله‌ی

$$u_t = u_{xx} + \frac{-x^3u^3 + 6xu + 6\sqrt{2}}{x^3} \quad (۵۳.۶)$$

احتمالاً مورد علاقه‌ی مسائل فیزیکی و بیولوژیکی دیگری باشد، آن را ارائه می‌دهیم. می‌توان دید که

جواب (۵۲.۶) دارای این خاصیت است که

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, x) = -\frac{\sqrt{2}}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(t, x) = 0 \quad (۵۴.۶)$$

و برای $t > 0, x < 0$ داریم $u(t, x) < 0$. همچنین برای مقادیر x و t زیر، جواب (۵۲.۶) تعریف شده نیست.

$$x = 0, \quad (۵۵.۶)$$

$$\left\{ x = \sqrt{-6t - 6c_2 + 2\sqrt{18t^2 + 36tc_2 + 18c_2^2 + 3c_1}}, \forall t \right\}, \quad (۵۶.۶)$$

$$\left\{ x = -\sqrt{-6t - 6c_2 + 2\sqrt{18t^2 + 36tc_2 + 18c_2^2 + 3c_1}}, \forall t \right\}, \quad (۵۷.۶)$$

$$\left\{ x = \sqrt{-6t - 6c_2 - 2\sqrt{18t^2 + 36tc_2 + 18c_2^2 + 3c_1}}, \forall t \right\}, \quad (۵۸.۶)$$

$$\left\{ x = -\sqrt{-6t - 6c_2 - 2\sqrt{18t^2 + 36tc_2 + 18c_2^2 + 3c_1}}, \forall t \right\}, \quad (۵۹.۶)$$

$$\left\{ \forall x, t = \frac{1}{6}x^2 - c_2 + \frac{1}{6}\sqrt{2x^4 - 12c_1} \right\}, \quad (۶۰.۶)$$

$$\left\{ \forall x, t = \frac{1}{6}x^2 - c_2 - \frac{1}{6}\sqrt{2x^4 - 12c_1} \right\}. \quad (۶۱.۶)$$

$$R(u, x) = \frac{f(u)}{k^2(x)}: \text{حالت ۲} \quad ۲.۲.۶$$

اگر فرض کنیم $ss_1 = 0$ آنگاه $V_2(t, x, u) = ss_2(t, x)$ و d_0 نتیجه می‌دهد که

$$R(u, x) = \frac{f(u)}{k^2(x)}, \quad ss_2 = k(x). \quad (۶۲.۶)$$

همانند [۲۵] شرط $F(t, x, u) = 0$ را اعمال می‌کنیم. بنابراین صفر کردن d_1 نتیجه می‌دهد که $k(x)$ باید یکی از سه حالت (۲۰.۶) باشد که عمل‌گرهای تقارنی غیرکلاسیک آن‌ها به‌ترتیب به‌صورت زیر

می‌باشند:

$$\partial_t - \frac{cx+2}{2x} \partial_x \quad \partial_t + \frac{c}{e^{c(b_0-x)} - 1} \partial_x, \quad \partial_t + \left(\frac{1}{b_1} \tan \left(\frac{x+b_2}{b_1} \right) - \frac{c}{2} \right) \partial_x, \quad (۶۳.۶)$$

در هر کدام از حالت‌ها می‌توان شرط سطح ناوردای متناظر (۴.۶) را حل کرده و معادله انتشار اصلی (۱.۶) را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تقلیل داد که با توجه به دلخواه بودن تابع $f(u)$ ، معادله دیفرانسیل معمولی نیز دلخواه خواهد بود. چند حالت خاص برای $f(u)$ را در نظر گرفته و جواب‌های تقارنی غیرکلاسیک متناظر معادله‌ی (۱.۶) را به دست می‌آوریم.

$$\text{حالت ۲.۱: } k(x) = -\frac{cx+2}{2x}$$

شرط سطح ناوردای (۴.۶) یا به عبارتی

$$u_t - \frac{cx+2}{2x} u_x = 0 \quad (۶۴.۶)$$

را حل کرده و جواب آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$u(t, x) = H(\xi), \quad \xi = \frac{4 \log(cx+2) - 2cx - c^2 t}{c^2} \quad (۶۵.۶)$$

که در آن $H(\xi)$ تابعی دلخواه برحسب ξ است. سپس با جای‌گذاری جواب به دست آمده در معادله‌ی (۱.۶)، یا به عبارتی

$$u_t = u_{xx} + cu_x + \frac{4x^2}{(cx+2)^2} f(u), \quad (۶۶.۶)$$

معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زیر را به دست می‌آوریم:

$$4 \frac{d^2 H}{d\xi^2} - c^2 \frac{dH}{d\xi} + 4f(H) = 0. \quad (۶۷.۶)$$

با فرض $f(u) = 1/u$ معادله‌ی (۶۷.۶) دارای جبر تقارنی نقطه لی انتقالی غیرآبلی دوبعدی خواهد

بود که دارای مولدهای

$$\partial_{\xi}, \quad e^{\frac{c^2\xi}{4}} (4\partial_{\xi} + c^2 H \partial_H), \quad (68.6)$$

است و در نتیجه معادله‌ی (۶۷.۶) را با انتگرال‌گیری می‌توان حل کرد. در حقیقت با در نظر گرفتن شکل کانونی مولدهای جبر تقارنی نقطه لی دو بعدی به صورت

$$4e^{\frac{c^2\xi}{4}} (4\partial_{\xi} + c^2 H \partial_H), \quad -\frac{4}{c^2} \partial_{\xi} + 4e^{\frac{c^2\xi}{4}} (4\partial_{\xi} + c^2 H \partial_H), \quad (69.6)$$

می‌توان متغیرهای کانونی متناظر

$$\tilde{\xi} = H e^{-\frac{c^2\xi}{4}}, \quad \tilde{H} = 1 + e^{-\frac{c^2\xi}{4}} \left(-\frac{1}{4c^2} + H \right). \quad (70.6)$$

را استخراج کرد. این متغیرها، معادله‌ی (۶۷.۶) را به شکل کانونی زیر تبدیل می‌کند:

$$\frac{d^2 \tilde{H}}{d\tilde{\xi}^2} = \frac{1}{\tilde{\xi}} \left(256 \left(\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{\xi}} \right)^3 - 3 \left(\frac{d\tilde{H}}{d\tilde{\xi}} \right)^2 + 3 \frac{d\tilde{H}}{d\tilde{\xi}} - 1 \right) \quad (71.6)$$

که با دوبار انتگرال‌گیری قابل حل است و در نتیجه جواب عمومی آن به صورت

$$\tilde{H} = \tilde{\xi} + c_2 \pm 16 \int \frac{d\tilde{\xi}}{\sqrt{2c_1 - 2\log(\tilde{\xi})}}. \quad (72.6)$$

خواهد بود.

حالت ۲.۲: $k(x) = \frac{c}{e^{c(b_0-x)} - 1}$

شرط سطح ناوردای (۴.۶) را به صورت

$$u_t + \frac{c}{e^{c(b_0-x)} - 1} u_x = 0 \quad (73.6)$$

حل می‌کنیم. جواب این معادله به صورت

$$u(t, x) = H(\gamma), \quad \gamma = -\frac{cx + c^2t + e^{c(b_0-x)}}{c^2}, \quad (74.6)$$

می‌باشد که در آن $H(\gamma)$ تابعی دلخواه از γ است. بعد از جای‌گذاری جواب به دست آمده در معادله‌ی (۱.۶)، یا به عبارتی

$$u_t = u_{xx} + cu_x + \frac{(e^{c(b_0-x)} - 1)^2}{c^2} f(u), \quad (75.6)$$

معادله دیفرانسیل معمولی زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 H}{d\gamma^2} + f(H) = 0. \quad (76.6)$$

جواب عمومی این معادله به شکل ضمنی زیر قابل نمایش است:

$$\pm \int \frac{dH}{\sqrt{c_1 - 2 \int f(H) dH}} - \gamma - c_2 = 0. \quad (77.6)$$

چند حالت خاص زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:
(آ)

$$f(u) = u^2 \implies u(t, x) = -6WeierstrassP(\gamma + c_1, 0, c_2), \quad (78.6)$$

که در آن $WeierstrassP$ تابع بیضوی وایرستراس می‌باشد.
(ب)

$$f(u) = u^3 \implies u(t, x) = c_2 JacobiSN \left(\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}} + c_1 \right) c_2, \sqrt{-1} \right) \quad (79.6)$$

که در آن $JacobiSN(z, k) = \sin(JacobiAM(z, k))$.

(ج)

$$f(u) = u^2(1-u) \Rightarrow \int \frac{6 dH}{\sqrt{18H^4 - 24H^3 + 36c_1}} - \gamma - c_2 = 0 \quad (۸۰.۶)$$

دو حالت را برای c_1 بررسی می‌کنیم. اگر $c_1 = \frac{1}{6}$ آنگاه خواهیم داشت:

$$u(t, x) = \frac{(1-H)\sqrt{18H^2 + 12H + 6}}{\sqrt{18H^4 - 24H^3 + 6}} \operatorname{arctanh} \left(\frac{2(1+2H)}{\sqrt{18H^2 + 12H + 6}} \right) - \gamma - c_2 = 0,$$

که جواب ضمنی از معادله‌ی (۷۵.۶) است. همچنین با قرار دادن $c_1 = 0$ داریم:

$$u(t, x) = -\frac{12}{4c_2\gamma + 2c_2^2 + 2\gamma^2 - 9},$$

که در واقع یک جواب تقارنی غیرکلاسیک برای معادله‌ی (۷۵.۶)، یا به عبارتی

$$u_t = u_{xx} + cu_x + \frac{(e^{c(b_0-x)} - 1)^2}{c^2} u^2(1-u), \quad (۸۱.۶)$$

است. توجه شود که اگر متغیرهای زمان و مکان به سمت بی‌نهایت میل کنند، آنگاه جواب حاصل به صفر میل خواهد کرد.

حالت ۲.۳: $k(x) = \frac{1}{b_1} \tan \left(\frac{x+b_2}{b_1} \right) - \frac{c}{2}$
ابتدا شرط سطح ناوردای (۴.۶) که به صورت

$$u_t + \left(\frac{1}{b_1} \tan \left(\frac{x+b_2}{b_1} \right) - \frac{c}{2} \right) u_x = 0 \quad (۸۲.۶)$$

می‌باشد را حل می‌کنیم. جواب این معادله به صورت

$$\begin{aligned} u(t, x) &= H(\varrho), \\ \varrho &= t + \frac{2b_1}{4+b_1^2c^2} \left[c(x+b_2) + \log \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x+b_2}{b_1} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \log \left(2 \tan \left(\frac{x+b_2}{b_1} \right) - b_1c \right) \right], \end{aligned} \quad (۸۳.۶)$$

است که در آن $H(\varrho)$ تابعی دلخواه از ϱ است. با جای‌گذاری در معادله‌ی (۱۰۶) که به‌صورت

$$u_t = u_{xx} + cu_x + \frac{4b_1^2}{\left(2 \tan\left(\frac{x+b_2}{b_1}\right) - b_1c\right)^2} f(u), \quad (۸۴.۶)$$

است، معادله‌ی دیفرانسیل معمولی زیر را به‌دست خواهیم آورد:

$$4b_1^2 \frac{d^2 H}{d\varrho^2} + (4 + b_1^2 c^2) \frac{dH}{d\varrho} + 4b_1^2 f(H) = 0. \quad (۸۵.۶)$$

با فرض $f(u) = u$ ، جواب عمومی معادله‌ی (۸۴.۶) را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

$$u(t, x) = c_1 e^{-\frac{4 + b_1^2 c^2 - \varrho \sqrt{(b_1^2 c^2 + 4)^2 - 64b_1^4}}{8b_1^2}} + c_2 e^{-\frac{4 + b_1^2 c^2 + \varrho \sqrt{(b_1^2 c^2 + 4)^2 - 64b_1^4}}{8b_1^2}}. \quad (۸۶.۶)$$

۳.۶ نتیجه‌گیری

با به‌کارگیری روش تقارنی غیرکلاسیک برای معادله‌ی (۱۰۶) عبارت‌های مختلفی برای $R(u, x)$ به‌دست آورده شد و در برخی حالت‌ها جواب صریح معادله محاسبه گردید.

نشان داده شد که تقارنی‌های غیرکلاسیک برای دسته‌ی معادلات واکنش-انتشار زیر موجود است:

$$u_t = u_{xx} + cu_x - \frac{a_3^2(x)}{6} u^3 + \frac{a_2(x)}{2} u^2 + a_1(x)u + a_0(x), \quad (۸۷.۶)$$

که در آن a_0, a_1, a_2, a_3 در دستگاه (۲۲.۶)–(۲۳.۶) صدق می‌کنند. حالت‌های خاص

$$u_t = u_{xx} + cu_x - \frac{1}{2}x^2u^3 + 3u^2 + \frac{1}{2}c^2u, \quad (۸۸.۶)$$

$$u_t = u_{xx} + cu_x - \frac{1}{2}e^{cx}u^3 + \frac{c^2}{4}u + e^{\frac{cx}{2}}, \quad (۸۹.۶)$$

$$u_t = u_{xx} + cu_x - \frac{u^3}{6} - \frac{\sqrt{3}u^2}{x} + \frac{c^2u}{6} + \frac{\sqrt{3}c^2}{3x}, \quad (۹۰.۶)$$

$$u_t = u_{xx} - u^3 + \frac{6u}{x^2} + \frac{6\sqrt{2}}{x^3}, \quad (۹۱.۶)$$

مورد بررسی قرار گرفت. همچنین وجود تقارنی‌های غیرکلاسیک برای خانواده‌ای از معادلات (۱.۶) به صورت

$$u_t = u_{xx} + cu_x + \frac{4x^2}{(cx+2)^2} f(u), \quad \forall f(u) \quad (۹۲.۶)$$

$$u_t = u_{xx} + cu_x + \frac{(e^{c(b_0-x)} - 1)^2}{c^2} f(u), \quad \forall f(u) \quad (۹۳.۶)$$

$$u_t = u_{xx} + cu_x + \frac{4b_1^2}{\left(2 \tan\left(\frac{x+b_2}{b_1}\right) - b_1c\right)^2} f(u), \quad \forall f(u), \quad (۹۴.۶)$$

مورد بحث قرار گرفت. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت، برخلاف روش‌های دیگر تقارنی‌های غیرکلاسیک، روش معادلات وراثتی [۱۳۸] بسیار خوب عمل کرده و جواب‌ها به راحتی قابل استخراج هستند.

فصل ۷

بحث و نتیجه‌گیری و کارهای آتی

در این رساله با به‌کارگیری گروه‌های لی در به‌دست آوردن جواب‌های عددی و تحلیلی برخی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی مورد بحث و بررسی قرار گرفت. برای این‌کار، ابتدا مقدمه‌ای بر گروه‌های لی و پژوهش‌های انجام شده در این زمینه آورده شد. سپس در فصل دوم و سوم با طرز استفاده از گروه‌های تقارنی در به‌دست آوردن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی آشنا شدیم. در فصل چهارم این رساله، روش تیراندازی گروه لی که از رده‌ی روش‌های عددی مستخرج از گروه‌های لی می‌باشد، برای حل معادله‌ی براتو مورد استفاده قرار گرفت و در مقایسه‌ای که با مقالات منتشر شده در مورد این معادله انجام شد، دقت بالا و قدرت روش تیراندازی گروه لی نتیجه‌گیری شد. در فصل پنجم رساله به حل معادله‌ی کشی لاپلاس پرداخته شد که با استفاده از طرح حافظ گروه و همچنین بررسی پایداری این روش، جواب‌های قابل قبولی برای معادله‌ی بدوضع لاپلاس به‌دست آورده شد. همچنین در فصل شش برای اولین بار معادله‌ی اصلاح شده تعمیم یافته واخننکو بدون استفاده از تبدیلات، توسط گروه‌های تقارنی لی مورد بررسی قرار گرفت. جبرهای لی دو بعدی و یک بعدی این معادله به‌دست آورده شد و با روش‌های مختلف، از جمله روش تقلیل معرفی شده توسط نوچی، معادلات دیفرانسیل معمولی تقلیل یافته حاصل، حل شدند. همچنین روشی جدید به‌نام $LSGPS$ برای اولین بار معرفی شد و برای این معادله مورد استفاده قرار گرفت. در نهایت معادلات وراثتی برای استخراج تقارنی‌های غیرکلاسیک دسته‌ای از معادلات واکنش-انتشار مورد استفاده قرار گرفت که در حین استفاده از معادلات وراثتی، معادلات جدیدی که در بیولوژی کاربرد دارند، ساخته شدند و به‌دنبال آن جواب‌های تحلیلی آنها به‌دست آورده شدند.

به عنوان پیشنهاد برای دانشجویانی که تمایل به کار در این زمینه دارند، می‌توان معادلات وراثتی را برای دسته‌ی وسیعی از معادلات تکاملی به‌کار برده و آن‌ها را برای معادلات با بعد بالاتر نیز تعمیم دهند. همچنین با توجه به این‌که روش‌های GPS ، LGS و $LSGPS$ روش‌های نوینی برای حل معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شوند، می‌توان آن‌ها را برای حل معادلات بدووضع موجود مورد استفاده قرار داد.

مراجع

- [1] S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, C.-S. Liu, The Lie-group shooting method for solving the Bratu equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16 (2011) 4238-4249.
- [2] S. Abbasbandy, M.S. Hashemi, Group preserving scheme for the Cauchy problem of the Laplace equation, *Engineering Analysis with Boundary Elements* 35 (2011) 1003-1009.
- [3] S. Abbasbandy, A. Shirzadi, The first integral method for modified Benjamin-Bona-Mahony equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15 (2010) 1759-1764.
- [4] S. Abbasbandy, E. Shivanian, I. Hashim, Exact analytical solution of forced convection in a porous-saturated duct, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16 (2011) 3981-3989.
- [5] Y.A.S. Aregbesola, Numerical solution of Bratu problem using the method of weighted residual, *Electron. J. South Afr. Math. Sci.* 3 (1) (2003) 1-7.
- [6] Y. Aksoy, M. Pakdemirli, New perturbation-iteration solutions for Bratu-type equations, *Comput. Math. Appl.* 59 (2010) 2802-2808.
- [7] F. Allasia and M.C. Nucci, Symmetries and heir equations for the laminar boundary layer model, *J. Math. An. Appl.* **201** (1996) 911-942.
- [8] D.J. Arrigo, P. Broadbridge, J.M. Hill, Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman-Cole and Clarkson-Kruskal, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 4692-4703.
- [9] D.J. Arrigo, P. Broadbridge, J.M. Hill, Nonclassical symmetry reductions of the linear diffusion equation with a nonlinear source, *IMA J. Appl. Math.* **52** (1994) 1-24.
- [10] D.J. Arrigo, D.A. Ekrut, J.R. Fliss, Long Le, Nonclassical symmetries of a class of Burgers' systems, *J. Math. Anal. Appl.* **371** (2010) 813-820.
- [11] H. Berland. Lie Group and Exponential Integrators: Theory, Implementation, and Applications. Doctoral theses at NTNU,(2006).
- [12] C.J. Budd, A. Iserles, Geometric integration: numerical solution of differential equations on manifolds, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* 357 (1999) 945-956.

- [13] V. Boyko, Symmetry properties of some equations of hydrodynamic type, in Symmetry and Analytic Methods in Mathematical Physics, Proceedings of Institute of Mathematics 19, Kyiv, 1998, 32-42 (in Russian).
- [14] L. Bianchi, Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti, Mem. Soc. it. delle Sc. dei XL (3) 11 (1897) 267-352 [English translation by Robert Jantzen in: L. Bianchi, On the Three-dimensional Spaces Which Admit a Continuous Group of Motions, Gen. Rel. Grav. 33 (2001) 2171-2253].
- [15] R. Buckmire, Application of a Mickens finite-difference scheme to the cylindrical Bratu-Gelfand problem, Numer. Methods Partial Diff. Eq. 20 (3) (2004) 327-337.
- [16] J. P. Boyd, Chebyshev polynomial expansions for simultaneous approximation of two branches of a function with application to the one-dimensional Bratu equation, Appl. Math. Comput. 143 (2003) 189-200.
- [17] B. Batiha, Numerical Solution of Bratu-type equations by the Variational Iteration Method, Hacettepe J. Math. Stat. 39 (1) (2010) 23-29.
- [18] A. Bouziani, N. Merazga, Rothe time-discretization method applied to a quasilinear wave equation subject to integral conditions, Adv. Diff. Eq. 3 (2001) 211-235.
- [19] H. Berestycki, O. Diekmann, C.J. Nagelkerke, P.A. Zegeling, Can a Species Keep Pace with a Shifting Climate? *Bull. Math. Biol.* **71** (2009) 399-429.
- [20] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni*, Enrico Spoerri, Pisa (1918)
- [21] N. Bîlă and J. Niesen, On a new procedure for finding nonclassical symmetries, *J. Symbol. Comp.* **38** (2004) 1523-1533.
- [22] G.W. Bluman and J.D. Cole, The general similarity solution of the heat equation, *J. Math. Mech.* **18** (1969) 1025-1042.
- [23] G.W. Bluman, G.J. Reid, S. Kumei, New classes of symmetries for partial differential equations, *J. Math. Phys.* **29** (1988) 806-811.
- [24] G.W. Bluman, S.-f. Tian, Z. Yang, Nonclassical analysis of the nonlinear Kompaneets equation *J. Eng. Math.* (2012).

- [25] B.H. Bradshaw-Hajek, M.P. Edwards, P. Broadbridge, G.H. Williams, Nonclassical symmetry solutions for reaction–diffusion equations with explicit spatial dependence, *Nonlin. Anal.* **67** (2007) 2541-2552.
- [26] M.S. Bruzón and M.L. Gandarias, Applying a new algorithm to derive nonclassical symmetries, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **13** (2008) 517-523.
- [27] A. Bekir, A.C. Cevikel, New exact travelling wave solutions of nonlinear physical models, *Chaos, Solitons & Fractals* **41** (2009) 1733-1739.
- [28] G.W. Bluman, A.F. Cheviakov, S.C. Anco, Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC 2010.
- [29] G.W. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, Springer-Verlag, World Publishing Corp., 1989.
- [30] W.D. Curtis, F.R. Miller, Differential Manifolds And Theoretical Physics, Academic Press, (1985).
- [31] B.J. Cantwell, Introduction to Symmetry Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [32] P.G. Ciarlet (Editor), F. Cucker (Guest Editor), Handbook of Numerical Analysis Volume XI. Special Volume. Foundations of Computational Mathematics, Elsevier, Amsterdam, 2003.
- [33] T. Cerquetelli, N. Ciccoli, M.C. Nucci, Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth-order ordinary differential equations, *J. Nonlinear Math. Phys.* 9-suppl.2 (2002) 24-35.
- [34] H. Caglar, N. Caglar, M. Özer, Antonios Valaristos, Antonios N. Anagnostopoulos, B-spline method for solving Bratu's problem, *Int. J. Comput. Math.* **87** (8) (2010) 1885-1891.
- [35] H. Caglar, N. Caglar, M. Özer, A. Valaristos, A. N. Miliou, A. N. Anagnostopoulos, Dynamics of the solution of Bratu's equation, *Nonlinear Anal.* **71** (2009) 672-678.
- [36] C.W. Chang, C.-S. Liu, J.R. Chang, The Lie-group shooting method for quasi-boundary regularization of backward heat conduction problems, *ICCES Online J.* **3** (2007) 69-79.
- [37] J.R. Chang, C.-S. Liu, C.W. Chang, A new shooting method for quasi-boundary regularization of backward heat conduction problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **50** (2007) 2325-2332.

- [38] C.-W. Chang , C.-S. Liu, A new algorithm for direct and backward problems of heat conduction equation, *Int. J. Heat Mass Transfer* **53** (2010) 5552-5569.
- [39] H. Cheng, C.-L. Fu, X.-L. Feng, Determining surface heat flux in the steady state for the Cauchy problem for the Laplace equation, *Appl. Math. Comput.* **211** (2009) 374-382.
- [40] M. Charton, H.-J. Reinhardt, Approximation of Cauchy problems for elliptic equations using the method of lines, *WSEAS Trans. Math.* **4/2** (2005) 64-69.
- [41] R. Cherniha, New Q-conditional symmetries and exact solutions of some reaction–diffusion–convection equations arising in mathematical biology, *J. Math. Anal. Appl.* **326** (2007) 783-799.
- [42] R. Cherniha and V. Davydovych, Conditional symmetries and exact solutions of nonlinear reaction-diffusion systems with non-constant diffusivities, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** (2012) 3177-3188.
- [43] R. Cherniha and O. Pliukhin, New conditional symmetries and exact solutions of reaction-systems with power diffusivities, *J. Phys. A: Math. Gen.* **41** (2008) 185208-185222.
- [44] R.M. Cherniha and M.I. Serov, Symmetries, Ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term, *European J. Appl. Math.* **9** (1998) 527-542.
- [45] R. Cherniha and M. Serov, Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, Ansätze and solutions, *J. Math. Anal. Appl.* **282** (2003) 305-328.
- [46] P.A. Clarkson, Nonclassical symmetry reductions of nonlinear partial differential equations, *Math. Comput. Modell.* **18** (1993) 45-68.
- [47] P.A. Clarkson and E.L. Mansfield, Symmetry reductions and exact solutions of a class of nonlinear heat equations, *Physica D*, **70** (1993) 250-288.
- [48] P.A. Clarkson and P. Winternitz, Nonclassical symmetry reductions for the Kadomtsev-Petviashvili equation, *Physica D* **49** (1991) 257-272.
- [49] R. Cherniha, V. Davydovycha, Conditional symmetries and exact solutions of the diffusive Lotka-Volterra system, *Math. Comput.* **54** (2011) 1238-1251.

- [50] V. Dorodnitsyn, Applications of Lie Groups to Difference Equations, CRC Press, Boca Raton, 2011.
- [51] E. Deeba, S.A. Khuri, S. Xie, An algorithm for solving boundary value problems, J. Comput. Phys. 159 (2000) 125-138.
- [52] P.G. Estevez, P.R. Gordoa, Nonclassical symmetries and the singular manifold method: The Burgers equation, *Theor. Math. Phys.* **99** (1994) 562-566.
- [53] M. Fecko. Differential Geometry And Lie Groups For Physicists. *Cambridge University Press*, (2006).
- [54] D.A. Frank-Kamenetski, Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955.
- [55] A.S. Fokas and Q.M. Liu, Generalised conditional symmetries and exact solutions of nonintegrable equations, *Theor. Math. Phys.* **99** (1994) 263-277.
- [56] W.I. Fushchych, M.I. Serov, L.A. Tulupova, The conditional invariance and exact solutions of the nonlinear diffusion equation, Proc. Acad. of Sci. Ukraine, 1993, N 4, 37-40.
- [57] W.I. Fushchych, W.M. Shtelen, M.I. Serov, Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics, Kluwer, Dordrecht, (1993).
- [58] W.I. Fushchych, W.M. Shtelen, M.I. Serov, R.O. Popovych, Q-conditional symmetry of the linear heat equation, Proc. Acad. of Sci. Ukraine, 12 (1992) 28-33.
- [59] R. Gilmore, Lie groups, Lie algebras and some of their applications. Wiley, (1974).
- [60] R. Gilmore, Lie groups, Physics and Geometry, Cambridge, (2008).
- [61] P.M. Gadea , J.M. Masqué, Analysis and Algebra on Differentiable Manifolds, Springer, (2009).
- [62] M. L. Gandarias, M. S. Bruzón, Symmetry analysis and exact solutions of some Ostrovsky equations, Theoretical and Mathematical Physics 168 (2011) 898-911.
- [63] D. Gidaspow, B.S. Baker, A model for discharge of storage batteries, J. Electrochem. Soc. 120 (1973) 1005-1010.

- [64] M.L. Gandarias, Nonclassical symmetries of a porous medium equation with absorption, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 6081-6091.
- [65] M.L. Gandarias, J.L. Romero, J.M. Díaz, Nonclassical symmetry reductions of a porous medium equation with convection, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** (1999) 1461-1473.
- [66] J. Goard, Generalised conditional symmetries and Nucci's method of iterating the nonclassical symmetries method, *Appl. Math. Lett.* **16** (2003) 481-486.
- [67] G. Guthrie, Constructing Miura transformations using symmetry groups, *Research Report No. 85* (1993).
- [68] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura, Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095-1097.
- [69] B.C. Hall, *Lie Group, Lie Algebra, and Representations*, Springer, (2004).
- [70] E. Hairer, Geometric Integration of Ordinary Differential Equations on Manifolds, *BIT Numerical Mathematics* **41** (2001) 996-1007.
- [71] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, II edition, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [72] I.H.A.H. Hassan, V.S. Erturk, Applying differential transformation method to the one-dimensional planar Bratu problem, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* **2** (2007) 1493-1504.
- [73] Y. C. Hon, T. Wei, Backus-Gilbert algorithm for the Cauchy problem of the Laplace equation, *Inverse Problems* **17** (2001) 261-271.
- [74] D.N. Hào, P.M. Hien, Stability results for the Cauchy problem for the Laplace equation in a strip, *Inverse Problems* **19** (2003) 833-844.
- [75] D.-J. Huang and S. Zhou, Group-theoretical analysis of variable coefficient nonlinear telegraph equations, *Acta Appl. Math.* **117** (2012) 135-183.
- [76] R. Hirota, J. Satsuma, A variety of nonlinear network equations generated from the Bäcklund transformation for the Toda lattice, *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **59** (1976) 64-100.
- [77] T. Hawkins, *Emergence of the Theory of Lie Groups*, Springer. Berlin, 2000.

- [78] N.H. Ibragimov, Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations, Wiley, Chichester, 1999.
- [79] N.H. Ibragimov, R.N. Ibragimov, Internal gravity wave beams as invariant solutions of Boussinesq equations in geophysical fluid dynamics, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15 (2010) 1989-2002.
- [80] N.H. Ibragimov, Invariant Lagrangians and a new method of integration of nonlinear equations, J. Math. Anal. Appl. 304 (2005) 212-235.
- [81] N.H. Ibragimov, S.V. Meleshko, A solution to the problem of invariants for parabolic equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 14 (2009) 2551-2558.
- [82] A. Iserles, H.Z. Munthe-Kaas, P.S. Nørsett, A. Zanna, Lie-group methods, Acta Numerica 9 (2000) 215-365.
- [83] M. Inc, On exact solution of Laplace equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions by the homotopy analysis method, Phys. Lett. A 365 (2007) 412-415.
- [84] B. Jin, A meshless method for the Laplace and biharmonic equations subjected to noisy boundary data, CMES-Comput. Model. Engrg. Sci. 6 (2004) 253-261.
- [85] R. Jililian, Non-polynomial spline method for solving Bratu's problem, Comput. Phys. Commun. 181 (2010) 1868-1872.
- [86] N.A. Kudryashov, N.B. Loguinova, Be careful with the Exp-function method, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14 (2009) 1881-1890.
- [87] N.A. Kudryashov, Redundant exact solutions of nonlinear differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16 (2011) 3451-3456.
- [88] S.A. Khuri, A new approach to Bratu's problem, Appl. Math. Comput. 147 (2004) 131-136.
- [89] M. Kubo, L^2 -conditional stability estimate for the Cauchy problem for the Laplace equation, J. Inverse Ill-Posed Probl. 2 (1994) 253-261.
- [90] M. Kubo, Y. Iso, O. Tanaka, Numerical analysis for the initial value problem for the Laplace equation, in: M. Tanaka, Q. Du, T. Honma (Eds.), Boundary Element Methods, Elsevier, Amsterdam, (1993) 337-344.
- [91] F. Lachello, Lie Algebras and Applications, Springer, (2006).

- [92] S. Lie, Theorie der Transformationsgruppenm, Math. Ann. 16 (1880) 441-528.
- [93] C.-S. Liu, Cone of non-linear dynamical system and group preserving schemes, Int. J. Non-Linear Mech. 36 (2001) 1047-1068.
- [94] C.-S. Liu, Group preserving scheme for backward heat conduction problems, Int. J. Heat Mass Transfer 47 (2004) 2567-2576.
- [95] C.-S. Liu, The Lie-group shooting method for singularly perturbed two-point boundary value problems, Comput. Model Eng. Sci. 15 (2006) 179-196.
- [96] S. Li, S.J. Liao, An analytic approach to solve multiple solutions of a strongly nonlinear problem, Appl. Math. Comput. 169 (2005) 854-865.
- [97] S. Liao, Y. Tan, A general approach to obtain series solutions of non-linear differential equations, Stud. Appl. Math. 119 (2007) 297-354.
- [98] C.-S. Liu, The Lie-group shooting method for singularly perturbed two-point boundary value problems, CMES: Comput. Model. Eng. Sci. 15 (2006) 179-196.
- [99] C.-S. Liu, The Lie-group shooting method for nonlinear two-point boundary value problems exhibiting multiple solutions, CMES: Comput. Model. Eng. Sci. 13 (2006) 149-163.
- [100] C.-S. Liu, An LGEM to identify time-dependent heat conductivity function by an extra measurement of temperature gradient, CMC: Comput. Mater. Continua 7 (2008) 81-95.
- [101] C.-S. Liu, An LGSM to identify nonhomogeneous heat conductivity functions by an extra measurement of temperature, Int. J. Heat Mass Transfer 51 (2008) 2603-2613.
- [102] C.-S. Liu, Solving an inverse Sturm-Liouville problem by a Lie-group method, Boundary Value Prob. 2008 (2008) (Article ID 749865).
- [103] C.-S. Liu, A two-stage LGSM for three-point BVPs of second-order ODEs, Boundary Value Prob. 2008 (2008) (Article ID 963753).
- [104] C.-S. Liu, A two-stage LGSM to identify time-dependent heat source through an internal measurement of temperature, Int. J. Heat Mass Transfer 52 (2009) 1635-1642.
- [105] C.-S. Liu, A two-stage Lie-group shooting method (TSLGSM) to identify time-dependent thermal diffusivity, Int. J. Heat Mass Transfer 53 (2010) 4876-4884.

- [106] C.-S. Liu, One-step GPS for the estimation of temperature-dependent thermal conductivity, *Int. J. Heat Mass Transfer* 49 (2006) 3084-3093.
- [107] C.-S. Liu, An efficient backward group preserving scheme for the backward in time Burgers equation, *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.* 12 (2006) 55-65.
- [108] H.C. Lee, C.K. Chen, C.I. Hung, A modified group-preserving scheme for solving the initial value problems of stiff ordinary differential equations, *Appl. Math. Comput.* 133 (2002) 445-459.
- [109] W. Yeih, C.-S. Liu, A three-point BVP of time-dependent inverse heat source problems solving by a TSLGSM, *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.* 46 (2009) 107-127.
- [110] D. Levi and P. Winternitz, Nonclassical symmetry reduction: Example of the Boussinesq equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) 2915-2924.
- [111] S. Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Teubner, Leipzig (1912).
- [112] S.-Y. Lou, Nonclassical symmetry reductions for the dispersive wave equations in shallow water, *J. Math. Phys.* 33 (1992) 4300-4305.
- [113] D.K. Ludlow, P.A. Clarkson, A.P. Bassom, Nonclassical symmetry reductions of the three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 7965-7980.
- [114] S. Lie, *Theorie der Transformationsgruppen*, *Math. Ann.* 16 (1880) 441-528.
- [115] H. Liu, J. Li, L. Liu, Y. Wei, Group classifications, optimal systems and exact solutions to the generalized Thomas equations, *J. Math. Anal. Appl.* 383 (2011) 400-408.
- [116] H. Liu, J. Li, L. Liu, Painlevé analysis, Lie symmetries, and exact solutions for the time-dependent coefficients Gardner equations, *Nonlinear Dynam.* 59 (2010) 497-502.
- [117] H. Liu, J. Li, Lie symmetry analysis and exact solutions for the extended mKdV equation, *Acta Appl. Math.* 109 (2010) 1107-1119.
- [118] H. Liu, J. Li, Lie symmetries, conservation laws and exact solutions for two rod equations, *Acta Appl. Math.* 110 (2010) 573-587.

- [119] H. Liu, J. Li, Q. Zhang, Lie symmetry analysis and exact explicit solutions for general Burgers' equation, *J. Comput. Appl. Math.* 228 (2009) 1-9.
- [120] A.J. Morrison, E.J. Parkes, V.O. Vakhnenko, The N -loop soliton solution of the Vakhnenko equation, *Nonlinearity* 12 (1999) 1427-1437.
- [121] A.J. Morrison, E.J. Parkes, The N -soliton solution of the modified generalised Vakhnenko equation (a new nonlinear evolution equation), *Chaos, Solitons and Fractals* 16 (2003) 13-26.
- [122] G.M. Mubarakzjanov, On solvable Lie algebras, *Izv. Vyss. Uchebn. Zaved. Mat.* 1 (1963) 114-123 (in Russian).
- [123] J.S. McGough, Numerical continuation and the Gelfand problem, *Appl. Math. Comput.* 89 (1998) 225-239.
- [124] A.S. Mounim, B.M. de Dormale, From the fitting techniques to accurate schemes for the Liouville-Bratu-Gelfand problem, *Numer. Methods Partial Diff. Eq.* 22 (4) (2006) 761-775.
- [125] V.S. Markin, A.A. Chernenko, Y.A. Chizmadehev, Y.G. Chirkov, Aspects of the theory of gas porous electrodes, in: V.S. Bagotskii, Y.B. Vasilev (Eds.), *Fuel Cells: Their Electrochemical Kinetics*, Consultants Bureau, New York, (1966) 21-33.
- [126] S. Momani, S. Abuasad, Z. Odibat, Variational iteration method for solving nonlinear boundary value problems, *Appl. Math. Comput.* 183 (2006) 1351-1358.
- [127] S. Martini, N. Ciccoli, M.C. Nucci, Group analysis and heir-equations of a mathematical model for thin liquid films, *J. Nonlinear Math. Phys.* 16 (2009) 77-92.
- [128] R.J. Moitsheki, T. Hayat, M.Y. Malik, F.M. Mahomed, Symmetry analysis for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts, *Nonlinear Analysis: RWA* 11 (2010) 3031-3036.
- [129] W.X. Ma, J.H. Lee, A transformed rational function method and exact solutions to the (3+1)-dimensional Jimbo-Miwa equation, *Chaos, Solitons & Fractals* 42 (2009) 1356-1363.
- [130] M.C. Nucci, The complete Kepler group can be derived by Lie group analysis, *J. Math. Phys.* 37 (1996) 1772-1775.
- [131] M.C. Nucci, Lie symmetries of a Panlevé-type equation without Lie symmetries, *J. Nonlinear Math. Phys.* 15 (2008) 205-211.

- [132] M.C. Nucci, Interactive REDUCE programs for calculating classical, non-classical, and approximate symmetries of differential equations, in *Computational and Applied Mathematics II. Differential Equations*, W.F. Ames and P.J. Van der Houwen, Eds., Elsevier, Amsterdam (1992) 345-350.
- [133] M.C. Nucci, Symmetries of linear, C-integrable, S-integrable, and non-integrable equations, in *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Proceedings NEEDS '91*, M. Boiti, L. Martina, and F. Pempinelli, Eds., World Scientific, Singapore (1992) 374-381.
- [134] M.C. Nucci, Nonclassical symmetries and Bäcklund transformations, *J. Math. An. Appl.* **178** (1993) 294-300.
- [135] M.C. Nucci, Iterating the nonclassical symmetries method, *Physica D* **78** (1994) 124-134.
- [136] M.C. Nucci, Iterations of the nonclassical symmetries method and conditional Lie-Bäcklund symmetries, *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** (1996) 8117-8122.
- [137] M.C. Nucci, Interactive REDUCE programs for calculating Lie point, non-classical, Lie-Bäcklund, and approximate symmetries of differential equations: manual and floppy disk, in *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. Vol. 3: New Trends in Theoretical Developments and Computational Methods*, ed. N. H. Ibragimov, CRC Press, Boca Raton (1996) 415-481.
- [138] M.C. Nucci, Nonclassical symmetries as special solutions of their equations, *J. Math. Anal. Appl.* **279** (2003) 168-179.
- [139] M.C. Nucci and W.F. Ames, Classical and nonclassical symmetries of the Helmholtz equation, *J. Math. An. Appl.* **178** (1993) 584-591.
- [140] M.C. Nucci and P.A. Clarkson, The nonclassical method is more general than the direct method for symmetry reduction. An example of the Fitzhugh-Nagumo equation, *Phys. Lett. A* **184** (1992) 49-56.
- [141] M.C. Nucci, The complete Kepler group can be derived by Lie group analysis, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 1772-1775.
- [142] P.J. Olver, Application of Lie groups to differential equations, New York: Springer-Verlag; 1993.
- [143] P.J. Olver, Direct reduction and differential constraints, *Proc. R. Soc. Lond. A* **444** (1994) 509-523.

- [144] A. Oron and P. Rosenau, Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations, *Phys. Lett. A* **118** (1986) 172-176.
- [145] E.J. Parkes, A note on travelling-wave solutions to Lax's seventh-order KdV equation, *Applied Mathematics and Computation* **215** (2009) 864-865.
- [146] R.O. Popovych, O.O. Vaneeva, More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **15** (2010) 3887-3899.
- [147] E.J. Parkes, A note on "New travelling wave solutions to the Ostrovsky equation", *Applied Mathematics and Computation* **217** (2010) 3575-3577.
- [148] J. Patera, P. Winternitz, Subalgebras of real three- and four-dimensional Lie algebras, *J. Math. Phys.* **18** (1977) 1449-1455.
- [149] R.O. Popovych, Reduction operators of linear second-order parabolic equations, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 31. 185202
- [150] E. Pucci, Similarity reductions of partial differential equations, *J. Phys. A* **25**, 2631-2640, (1992).
- [151] Z. Qian, C.-L. Fu, Z.-P. Li, Two regularization methods for a Cauchy problem for the Laplace equation, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008) 479-489.
- [152] Z. Qian, C.-L. Fu, X.-T. Xiong, Fourth-order modified method for the Cauchy problem for the Laplace equation, *J. Comput. Appl. Math.* **192** (2006) 205-218.
- [153] A. Qian, Y. Wu, A computational method for a Cauchy problem of Laplace's equation, *Appl. Math. Comput.* **207** (2009) 478-485.
- [154] C.-Y. Qiu, C.-L. Fu, Wavelets and regularization of the Cauchy problem for the Laplace equation, *J. Math. Anal. Appl.* **338** (2008) 1440-1447.
- [155] J.-J. Reinhardt, H. Han, D.N. Hào, Stability and regularization of discrete approximation to the Cauchy problem for the Laplace's equation, *SIAM Numer. Anal.* **36** (1999) 890-905.
- [156] F. Schwarz. Algorithmic Lie theory for solving ordinary differential equations . *CRC Press Inc*, (2008).
- [157] R. Sepanski. Global actions of Lie symmetries for the nonlinear heat equation. *J. Math. Anal. Appl.* **360** (2009) p. 35

- [158] W. Steeb. Continuous Symmetries_ Lie Algebras_ Differential Equations And Computer Algebra. *World Scientific*,(2007).
- [159] M.R. Sepanski. Compact Lie Groups. *Springer*,(2007).
- [160] M.I. Syam, A. Hamdan, An efficient method for solving Bratu equations, *Appl. Math. Comput.* 176 (2006) 704-713.
- [161] A. Sadighi, D.D. Ganji, Exact solutions of Laplace equation by homotopy-perturbation and Adomian decomposition methods, *Phys. Lett. A* 367 (2007) 83-87.
- [162] W. E. Schiesser, G. W. Griffiths, A compendium of partial differential equation models, *Method of Lines Analysis with Matlab*, Cambridge University Press, 2009.
- [163] M.R. Scott, On the conversion of boundary-value problems into stable initial-value problems via several invariant imbedding algorithms, in: A.K. Aziz (Ed.), *Numerical Solutions of Boundary-Value Problems for Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, (1975) 89-146.
- [164] C. Sophocleous, Transformation properties of a variable-coefficient Burgers equation, *Chaos, Solitons and Fractals* **20** (2004) 1047-1057.
- [165] T. Tsuda, K. Ichida, T. Kiyono, Monte Carlo path-integral calculations for two-point boundary-value problems, *Numer. Math.* 10 (1967) 110-116.
- [166] N. Taghizadeh, M. Mirzazadeh, F. Farahrooz, Exact soliton solutions of the modified KdV-KP equation and the Burgers-KP equation by using the first integral method, *Appl. Math. Modelling* 35 (2011) 3991-3997.
- [167] V.O. Vakhnenko, Solitons in a nonlinear model medium, *J. Phys. A: Math. Nucl. Gen.* 25 (1992) 4181-4187.
- [168] V.O. Vakhnenko, High-frequency soliton-like waves in a relaxing medium, *J. Math. Phys.* 40 (1999) 2011-2020.
- [169] V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes, A.J. Morrison, A Bäcklund transformation and the inverse scattering transform method for the generalised Vakhnenko equation, *Chaos, Solitons and Fractals* 17 (2003) 683-692.
- [170] V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes, The calculation of multi-soliton solutions of the Vakhnenko equation by the inverse scattering method, *Chaos, Solitons and Fractals* 13 (2002) 1819-1826.

- [171] V.O. Vakhnenko, E.J. Parkes, The two loop soliton solution of the Vakhnenko equation, *Nonlinearity* 11 (1998) 1457-64.
- [172] C. Vani, A. Avudainayagam, Regularized Solution of the Cauchy Problem for the Laplace Equation Using Meyer Wavelets, *Math. Comput. Model.* 36 (2002) 1151-1159.
- [173] O.O. Vaneeva, R.O. Popovych, C. Sophocleous, Extended group analysis of variable coefficient reaction–diffusion equations with exponential nonlinearities, *J. Math. Anal. Appl.* **396** (2012) 225–242.
- [174] E.M. Vorob'ev, Partial symmetries and integrable multidimensional differential equations, *Differ. Eqs.* 25 (1989) 322-325.
- [175] A.M. Wazwaz, Solitons and singular solutions for the Gardner-KP equation, *Appl. Math. Comput.* 204 (2008) 162-169.
- [176] E.S. Weibel, On the confinement of a plasma by magnetostatic fields, *Phys. Fluids* 2 (1) (1959) 52-56.
- [177] F.W. Warner. *Foundation of Differential Manifolds And Lie Group.* Springer,(1971).
- [178] A. M. Wazwaz, Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations, *Appl. Math. Comput.* 166 (2005) 652-663.
- [179] M.L. Wang, Exact solutions for a compound KdV-Burgers equation, *Phys. Lett. A* 213 (1996) 279-287.
- [180] M. Wang, X. Li, J. Zhang, The (G'/G) -expansion method and traveling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics, *Phys. Lett. A* 372 (2008) 417-423.
- [181] X.-T. Xiong, C.-L. Fu, Central difference regularization method for the Cauchy problem of the Laplace's equation, *Appl. Math. Comput.* 181 (2006) 675-684.
- [182] W. Yeih, C.-S. Liu, A three-point BVP of time-dependent inverse heat source problems solving by a TSLGSM, *CMES: Comput. Model. Eng. Sci.* 46 (2009) 107-127.
- [183] D. Zwillinger. *Handbook of Differential Equations.* Academic Press,(1997).
- [184] R.Z. Zhdanov, Conditional Lie-Bäcklund symmetry and reduction of evolution equations, *J. Phys. A: Math. Gen.* 28 (1995) 3841-3850.
E-mail:hashemi_math396@yahoo.com

واژه‌نامه

Abelian Group	گروه آبدلی
Adjoint Representation	نمایش الحاقی
Antisymmetric	پاد متقارن
Augmented	افزوده
Casimir Operator	عمل گر کازیمیر
Commutator	جابجاگر
Conjugate Subgroup	زیر گروه مزدوج
Conservation law	قانون بقاء
Cone condition	شرط مخروط
Coordinate charts	نمودارهای مختص
Coordinate Functions	توابع مختصاتی
value Critical	مقدار بحرانی
	value Critical
Curve	منحنی
Determining equations	معادلات تعیینی
Differentiable Manifold	منیفلد دیفرانسیل پذیر
Diffeomorphism	دیفئومورفسم
equation Evolution	معادله تکاملی
Extension	توسیع
Finite Group	گروه متناهی
First integral	اولین انتگرال

Flow	شار
Gradient Operator	عملگر گرادینان
Generator	مولد
Group preserving scheme	طرح حافظ گروه
Homeomorphism	همومورفیسم
Heir-equation	معادله وراثتی
Ideal	ایده آل
Identity Element	عضو همانی
Infinitesimal Transformations	تبدیلات بی نهایت کوچک
Isomorphism	ایزومورفیسم
Integral curve	منحنی انتگرال
Invariant Function	تابع ناورد
Invariance surface condition	شرط سطح ناورد
Invariance	ناوردائی
Invariant Solution	جواب ناورد
inverse scattering method	روش پراکندگی معکوس
Jacobian Identity	اتحاد ژاکوبی
Lie Bracket	کروشه لی
Lie point symmetry	تقارنی نقطه لی
Manifold	مینفلد
metric Minkowski	متر مینکوفسکی
Nilpotent	پوچ توان
Optimal System	سیستم بهینه
Orbit	مدار
Prolongation	تطویل
Semisimple Algebra	جبر نیم ساده
Simple Algebra	جبر ساده
Solvable algebra	جبر حل پذیر

Spurious.....	جعلی
Structure Constants.....	ضرایب ساختار
Subgroup	زیرگروه
Symmetry Group.....	گروه تقارنی
Tangent Bundle.....	کلاف مماس
Tangent Space.....	فضای مماس
Topological Group.....	گروه توپولوژیکی
Transformation Group.....	گروه تبدیلات

Abstract

Lie groups can be applied to obtain numerical and analytical solutions of PDEs and ODEs. In this thesis, the Bratu's equation is considered by LGSM which firstly is introduced to solve dynamical systems. Comparison of obtained results and other reported results with various applied methods, manifest that LGSM is powerful than the otherones.

Then, by comparision of GPS and method method of line, accompained by stability analysis is applied to cauchy problem of Laplace equation. Exact solutions of mGVE by using the Lie symmetries is obtained and a new method namely LSGPS is introduced and applied to obtain trustfully solutions.

Finally, nonclassical symmetries of a reaction-diffusion equations class achieved by heir-equations, introduced by nucci, and analytical solutions of extracted equations is obtained.