



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)
گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

مطالعه روی پارامتر کنترل همگرایی در روش آنالیز هموتوپی و کاربرد آن در حل مسائل غیر خطی

استادان راهنما:

دکتر سعید عباس بندی

دکتر اسمعیل بابلیان

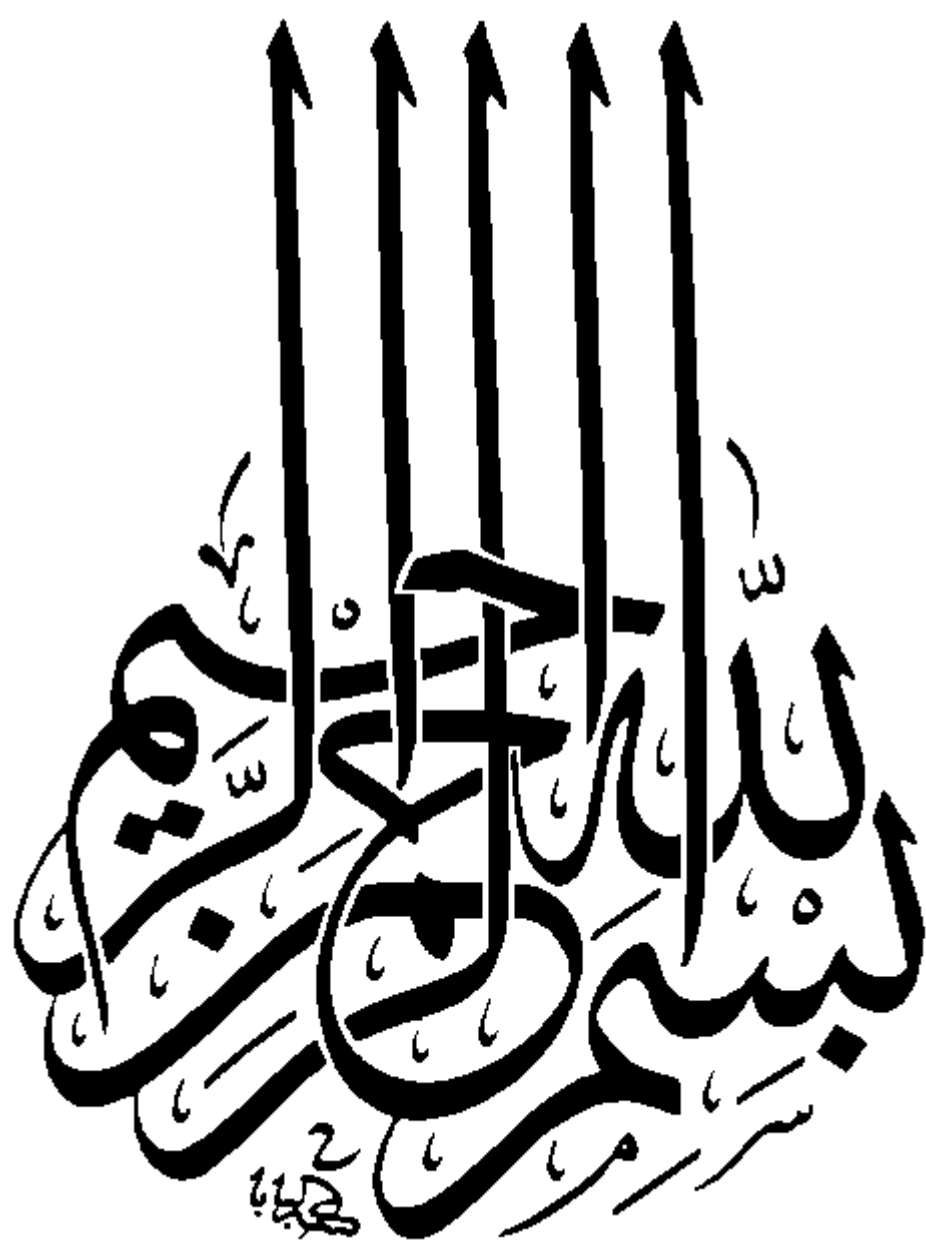
استاد مشاور:

دکتر علیرضا وحیدی

نگارش:

مریم جلیلی

زمستان ۱۳۹۱





معاونت پژوهش و فن آوری

به نام خدا

مشور اخلاق پژوهش

بایاری از خداوند بجان و اعتقاد به این که عالم محضر خداست و همواره ناظر بر اعمال انسان و به منظور پاس داشت مقام بلند دانش و پژوهش و نظریه ایست جایگاه دانشگاه در اعتلای فرهنگ و تمدن بشری،
مادان شبویان و اعضاء هیأت علمی واحد های دانشگاه آزاد اسلامی متعهد می گردیم اصول زیر را در انجام فعالیت های پژوهشی مد نظر قرار داده و از آن تخطی نکنیم:

- ۱- اصل حقیقت جویی: تلاش در راستای پی جویی حقیقت و وفاداری به آن و دوری از هرگونه پنهان سازی حقیقت.
- ۲- اصل رعایت حقوق: التزام به رعایت کامل حقوق پژوهشگران و پژوهیدگان (انسان، حیوان و نبات) و سایر صاحبان حق.
- ۳- اصل مالکیت مادی و معنوی: تعهد به رعایت کامل حقوق مادی و معنوی دانشگاه و کلیه بهکاران پژوهش.
- ۴- اصل منافع ملی: تعهد به رعایت مصالح ملی و در نظر داشتن پیشبرد و توسعه کشور در کلیه مراحل پژوهش.
- ۵- اصل رعایت انصاف و امانت: تعهد به اجتناب از هرگونه جانب داری غیر علمی و حفاظت از اموال، تجهیزات و منابع در اختیار.
- ۶- اصل رازداری: تعهد به صیانت از اسرار و اطلاعات محرمانه افراد، سازمان ها و کشورهای و کلیه افراد و نهادهای مرتبط با تحقیق.
- ۷- اصل احترام: تعهد به رعایت حریم ها و حرمت ها در انجام تحقیقات و رعایت جانب تقد و خودداری از هرگونه حرمت شکنی.
- ۸- اصل ترویج: تعهد به رواج دانش و اشاعه نتایج تحقیقات و انتقال آن به بهکاران علمی و دانشجویان به غیر از مواردی که منع قانونی دارد.
- ۹- اصل برانست: التزام به برانست جویی از هرگونه رفتار غیر حرفه ای و اعلام موضع نسبت به کسانی که حوزه علم و پژوهش را به شائبه های غیر علمی می آلائند.



تعهدنامه اصالت رساله یا پایان نامه

اینجانب **مریم جلیلی** دانش آموخته مقطع دکتری تخصصی در رشته ریاضی کاربردی-آنالیز عددی که در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۲۳ از پایان نامه / رساله خود تحت عنوان "مطالعه روی پارامتر کنترل همگرایی در روش آنالیز هموتویی و کاربرد آن در حل مسائل غیر خطی" با کسب نمره ۱۹ و درجه عالی دفاع نموده ام بدینوسیله متعهد می شوم:

(۱) این پایان نامه / رساله حاصل تحقیق و پژوهش انجام شده توسط اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از پایان نامه، کتاب، مقاله و...) استفاده نموده ام، مطابق ضوابط و رویه موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست مربوطه ذکر و درج کرده ام.

(۲) این پایان نامه / رساله قبلاً "برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پائین تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی ارائه نشده است.

(۳) چنانچه بعد از فراغت از تحصیل، قصد استفاده و هرگونه بهره برداری اعم از چاپ کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان نامه داشته باشم، از حوزه معاونت پژوهشی واحد مجوزهای مربوطه را اخذ نمایم.

(۴) چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را می پذیرم و واحد دانشگاهی مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی ام هیچ گونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

مریم جلیلی

تاریخ و امضاء:



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)
گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

مطالعه روی پارامتر کنترل همگرایی در روش آنالیز هموتوپی و کاربرد آن در حل مسائل غیر خطی

استادان راهنما:

دکتر سعید عباس بندی

دکتر اسمعیل بابلیان

استاد مشاور:

دکتر علیرضا وحیدی

نگارش:

مریم جلیلی

زمستان ۱۳۹۱

تقدیر و تشکر

پس از سپاس فراوان به درگاه خداوند مهربان که توفیق فراگیری علم را به این حقیر ارزانی داشت، بدین وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را از زحمات بی شائبه و صبورانه استادان بزرگوار و فرهیخته ام جناب آقای دکتر سعید عباس بندی و جناب آقای دکتر اسمعیل بابلیان که در مقطع دکتری مدیون عنایت آنها بوده ام و لطف آنها با قبول راهنمایی این پایان نامه بر من تمام شده است ابراز می دارم.

همچنین سپاس بی پایان خود را تقدیم می دارم به استاد مشاور محترم جناب آقای دکتر علیرضا وحیدی که از نظرات ارزشمندشان اینجانب را بهره مند ساختند.

از استادان داور گرامی جناب آقای دکتر توفیق الهویرنلو، جناب آقای دکتر شهنام جوادی و جناب آقای دکتر محمدعلی فریرزی عراقی به خاطر رهنمودهای ارزنده شان بسیار سپاسگزارم.

از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر جلال ایزدیان که در مقطع کارشناسی ارشد مدیون عنایت ایشان بوده ام و با درایت و روشنگری پیمودن این راه را برایم هموار ساخت نیز کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از خداوند متعال توفیق روز افزون همه این بزرگواران را خواستارم.

تقدیم به

مهربان ترین و صبورترین

مادر

آنکه توانش رفت تا به توان برسم

مویش سپید گشت تا رویم سپید بماند

آنکه شکستگی قامتش در راستی قامتم بقا یافت

خداوندا! عاقبت به خیری، عافیت و طول عمر را برای او از درگاهت مسئلت دارم.

اظهار نامه

این رساله مشتمل بر ۶ فصل است. فصل ۱ و ۲ به بیان مقدمات و مفاهیم اولیه و طرح مساله اختصاص یافته است و مطالب فصول ۳، ۴ و ۵ به طور کامل اصيل هستند و مقالات زیر از آن برگرفته شده اند :

1. S. Abbasbandy, M. Jalili, Determination of optimal convergence-control parameter value in homotopy analysis method, Numer. Algor., DOI 10.1007/s11075-012-9680-9
2. E. Babolian, M. Jalili, Application of the Homotopy-Padé Technique in the Prediction of Optimal Convergence-Control Parameter, submitted manuscript.
3. J. Izadian and M. MohammadzadeAttar, M. Jalili, Numerical Solution of Deformation Equations in Homotopy Analysis Method, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 8, 357 – 367.
4. M. Jalili and S. Abbasbandy, J. Izadian, A New Approach for Determining the Convergence-Control Parameter in HAM, The 43th Annual Iranian Mathematics Conference, University of Tabriz, 27- 30 August, 2012, Tabriz, Iran.

مقالات (۱) و (۴) از فصل ۳، مقاله (۲) از فصل ۴ و مقاله (۳) از فصل ۵ استخراج شده اند.

فهرست مطالب

عنوان	شماره صفحه
چکیده.....	۱
مقدمه.....	۲

فصل اول: مقدمه ای بر روش آنالیز هموتویی

۱-۱ تاریخچه و سوابق تحقیق.....	۶
۲-۱ روش هموتویی برای حل معادلات جبری غیر خطی.....	۸
۳-۱ خواص مشتق هموتویی.....	۱۱
۴-۱ معادلات دگر دیسی.....	۱۳
۵-۱ روش آنالیز هموتویی.....	۱۴
۱-۵-۱ روش آنالیز هموتویی اولیه.....	۱۵
۲-۵-۱ روش آنالیز هموتویی نرمال.....	۱۶
۳-۵-۱ روش آنالیز هموتویی چند پارامتری.....	۱۶
۶-۱ روش آنالیز هموتویی بهینه و تصحیح های آن.....	۱۸
۱-۶-۱ روش بهینه سازی هموتویی.....	۱۸
۲-۶-۱ روش مجانبی بهینه هموتویی.....	۱۹
۳-۶-۱ روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام.....	۲۰
۴-۶-۱ روش آنالیز هموتویی بهینه تعمیم یافته.....	۲۲
۷-۱ تقریب هموتویی پاده.....	۲۴

فصل دوم: اساس روش آنالیز هموتویی

۱-۲ آنالیز همگرایی روش آنالیز هموتویی و کران خطا.....	۲۷
۲-۲ خواص ریاضی منحنی های C_0	۳۲

فصل سوم: روش مینیم سازی برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی

- ۱-۳ کاربرد روش آنالیز هموتویی در مسائل مقدارمرزی دو نقطه ای..... ۳۷
- ۲-۳ روش مینیم سازی تابع خطای گسسته در نقاط متناظر با نقاط چبی شف..... ۴۱
- ۳-۳ آنالیز همگرایی روش..... ۴۴
- ۴-۳ الگوریتم روش..... ۴۶
- ۵-۳ نتایج عددی..... ۴۸
- ۶-۳ نتیجه گیری..... ۵۶

فصل چهارم: کاربرد تقریب هموتویی-پاده برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی

- ۱-۴ نگاه اجمالی به روش هموتویی-پاده..... ۵۸
- ۲-۴ شرح روش..... ۶۰
- ۳-۴ الگوریتم روش..... ۶۴
- ۴-۴ نتایج عددی..... ۶۶
- ۵-۴ نتیجه گیری..... ۸۲

فصل پنجم: روشهای گسسته سازی برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی

- ۱-۵ روشهای عددی حل معادلات دگردیسی در روش آنالیز هموتویی..... ۸۳
- ۱-۱-۵ روش تفاضلات متناهی برای حل معادلات دگردیسی مرتبه بالا..... ۸۵
- ۱-۱-۱-۵ الگوریتم روش..... ۸۸
- ۲-۱-۵ روش طیفی برای حل معادلات دگردیسی مرتبه بالا..... ۸۹
- ۱-۲-۱-۵ الگوریتم روش..... ۹۳
- ۲-۵ روشهای گسسته سازی برای تعیین پارامترهای کنترل..... ۹۴
- ۱-۲-۵ گسسته سازی روش بهینه سازی تک پارامتری..... ۹۵
- ۱-۱-۲-۵ الگوریتم روش..... ۹۶
- ۲-۲-۵ گسسته سازی روش مارینیکا..... ۹۸
- ۱-۲-۲-۵ الگوریتم روش..... ۹۸
- ۳-۵ نتایج عددی..... ۱۰۰

۵-۴ نتیجه گیری..... ۱۰۵

فصل ششم: پیشنهادهایی برای پژوهشهای آتی..... ۱۰۶

مراجع..... ۱۰۸

واژه نامه فارسی به انگلیسی..... ۱۱۲

واژه نامه انگلیسی به فارسی..... ۱۱۴

چکیده انگلیسی

فهرست جدول ها

عنوان

شماره صفحه

جدول ۳-۵-۱: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ۱۵ به دست آمده با روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی در $c_0 = -0.809995$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.810235$ مثال (۳-۵-۱)	۵۰
جدول ۳-۵-۲: مقایسه زمان اجرای الگوریتم بر حسب ثانیه در تقریب مرتبه $M = 1, \dots, 1!$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۱)	۵۰
جدول ۳-۵-۳: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ۱۵ به دست آمده با روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی در $c_0 = -0.998164$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.999999$ مثال (۳-۵-۲)	۵۲
جدول ۳-۵-۴: مقایسه زمان اجرای الگوریتم بر حسب ثانیه در تقریب مرتبه $M = 1, \dots, 1!$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۲)	۵۳
جدول ۳-۵-۵: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ۱۵ به دست آمده با روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی در $c_0 = -0.880401$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.887655$ مثال (۳-۵-۳)	۵۵
جدول ۳-۵-۶: مقایسه زمان اجرای الگوریتم بر حسب ثانیه در تقریب مرتبه $M = 1, \dots, 1!$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۳)	۵۵
جدول ۴-۴-۱: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0 = -0.553393$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.5$ در مثال (۴-۴-۱)	۶۷
جدول ۴-۴-۲: مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول C_0 در مثال (۴-۴-۱)	۶۷
جدول ۴-۴-۳: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0 = -1.0000007$ و روش ارائه شده در $c_0 = -1$ در مثال (۴-۴-۳)	۷۱
جدول ۴-۴-۴: مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول C_0 در مثال (۴-۴-۳)	۷۱
جدول ۴-۴-۵: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0 = -0.993664$ و روش ارائه شده در $c_0 = -1$ در مثال (۴-۴-۵)	۷۵
جدول ۴-۴-۶: مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول C_0 در مثال (۴-۴-۵)	۷۶
جدول ۴-۴-۷: تقریب هموتویی-پاده $y^{(6)}(0)$ در مثال (۴-۳-۶)	۷۸
جدول ۴-۴-۸: مقادیر مناسب c_{0_i} به عنوان ریشه های $P_M(c_0) = 0$ در مثال (۴-۳-۶)	۷۸
جدول ۴-۴-۹: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0 = -0.990214$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.99$ در مثال (۴-۴-۶)	۷۹

- جدول ۱-۳-۵: خطای مطلق به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در مثال (۱-۳-۵) برای $m=20$ و $n=40$
 ۱۰۱.....
- جدول ۲-۳-۵: خطای مطلق به دست آمده با روش طیفی در مثال (۱-۳-۵) برای $m=20$ و $n=40$
 ۱۰۱.....
- جدول ۳-۳-۵: خطای مطلق به دست آمده با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۱-۳-۵) برای $m=20$ و $n=40$
 ۱۰۲.....
- جدول ۴-۳-۵: مقایسه خطای مانده و زمان اجرای الگوریتم با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۱-۳-۵) برای $m=1,2,...,10$ و $n=40$
 ۱۰۲.....
- جدول ۵-۳-۵: مقادیر تقریبی جواب با روش تفاضلات متناهی در مثال (۲-۳-۵) برای $m=20$ و $n=40$
 ۱۰۳.....
- جدول ۶-۳-۵: مقادیر تقریبی جواب با روش طیفی در مثال (۲-۳-۵) برای $m=20$ و $n=40$
 ۱۰۳.....
- جدول ۷-۳-۵: مقادیر تقریبی جواب با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۲-۳-۵) برای $m=7$ و $n=20$
 ۱۰۴.....
- جدول ۸-۳-۵: مقایسه خطای مانده و زمان اجرای الگوریتم با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۲-۳-۵) برای $m=1,2,...,10$ و $n=20$
 ۱۰۴.....

فهرست شکل ها

عنوان

شماره صفحه

شکل ۱-۵-۳: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ۱۵ داده شده توسط (۱-۵-۳). خط تیره $y'(0)$ و خط چین $y''(0)$	۵۱
شکل ۲-۵-۳: مقایسه زمان اجرای الگوریتم در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 1, M$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۱-۵-۳).....	۵۱
شکل ۳-۵-۳: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ۱۵ داده شده توسط (۲-۵-۳). خط تیره $y'(1)$ و خط چین $y''(1)$	۵۳
شکل ۴-۵-۳: مقایسه زمان اجرای الگوریتم در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 1, M$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۲-۵-۳).....	۵۴
شکل ۵-۵-۳: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ۱۵ داده شده توسط (۳-۵-۳). خط تیره $y'(-1)$ و خط چین $y''(-1)$	۵۶
شکل ۶-۵-۳: مقایسه زمان اجرای الگوریتم در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 1, M$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۳).....	۵۶
شکل ۱-۲-۴: نمودار $f_1(x) = x^{50}$	۶۲
شکل ۲-۲-۴: نمودار $f_2(x) = x^{11}$	۶۳
شکل ۳-۲-۴: نمودار $f_3(x) = \frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{12}x^4 + x^2 + 2\cos x - 2$	۶۳
شکل ۴-۲-۴: نمودار $f_4(x) = x^3 + 6\sin x - 6x$	۶۳
۶۳.....	
شکل ۱-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y'(0)$ در مثال (۱-۴-۴).....	۶۸
شکل ۲-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M=2, 4, 6, 8, M$ ، برای $Y'_M(0)$ در مثال (۱-۴-۴).....	۶۸
شکل ۳-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y'(1)$ در مثال (۲-۳-۴).....	۶۹
شکل ۴-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M=2, 4, 6, 8, 1, M$ ، برای $Y'_M(1)$ در مثال (۱-۴-۴).....	۷۰
شکل ۵-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y'''(0)$ در مثال (۳-۴-۴).....	۷۲

شکل ۶-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M^{(3)}(0)$ در مثال (۴-۴-۴)	۷۲
شکل ۷-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y''(0)$ در مثال (۴-۴-۴)	۷۳
شکل ۸-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M''(0)$ در مثال (۴-۴-۴)	۷۴
شکل ۹-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y^{(5)}(0)$ در مثال (۵-۴-۴)	۷۶
شکل ۱۰-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M^{(5)}(0)$ در مثال (۴-۴-۴)	۷۷
شکل ۱۱-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y^{(6)}(0)$ در مثال (۶-۳-۴)	۷۹
شکل ۱۲-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M^{(6)}(0)$ در مثال (۴-۴-۴)	۸۰
شکل ۱۳-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y^{(8)}(0)$ در مثال (۷-۴-۴)	۸۱
شکل ۱۴-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M^{(8)}(0)$ در مثال (۴-۴-۴)	۸۱
شکل ۱-۳-۵: نمودار تقریب به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در مثال (۱-۳-۵) برای $m = 20$ و $n = 40$	۱۰۱
شکل ۲-۳-۵: نمودار تقریب به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در مثال (۲-۳-۵) برای $m = 20$ و $n = 40$	۱۰۴

چکیده

در این رساله هم از نقطه نظر آنالیزی و هم عددی، چگونگی تعیین پارامتر کنترل همگرایی C_0 را مورد بررسی قرار می دهیم و به جستجوی پارامتر کنترل همگرایی بهینه می باشیم. برای فائق آمدن بر محدودیت های تکنیک رسم منحنی های C_0 ، راهکارهایی را ارائه می کنیم که بهترین پارامتر کنترل همگرایی تعیین شود. در این رساله رویکردهای متفاوت از تکنیک رسم منحنی های C_0 ، برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی C_0 ارائه می شود که می تواند مقدار مطلوب C_0 را بدست آورد و متناظر با آن سری جواب با سریعترین همگرایی را داشته باشد. در این تحقیق به فرضیه های، وجود حداقل یک جواب برای مسأله غیر خطی مورد نظر، وجود جواب به صورت سری برای مسأله غیر خطی مورد نظر و همگرایی روش آنالیز هموتوپی برای مسأله غیر خطی مورد نظر نیاز داریم.

واژه های کلیدی :

روش آنالیز هموتوپی، سری جواب، تکنیک منحنی های C_0 ، پارامتر کنترل همگرایی، پارامتر کنترل همگرایی بهینه، تقریب هموتوپی-پاده.

رده بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 65H20; 41A10; 41A21; 90C59; 65L10.

هموتوپي یک ایده اساسی در توپولوژی و هندسه تحلیلی است و کاربرد گسترده ای در ریاضیات محض دارد. امروزه با توسعه سریع تکنیک های کامپیوتری و نرم افزارهای محاسباتی سمبلیک، در زمینه های کاربردی و الگوریتم های عددی نیز به کار میرود.

لیائو^۱ ایده اصلی و پایه ای روش آنالیز هموتوپي را در رساله دکتری خود در سال ۱۹۹۲ ارائه نمود و با چاپ کتاب وی با نام "آنسوی پریشندگی"^۲ در سال ۲۰۰۳ این روش در تئوری و کاربرد در حل مسائل غیر خطی در علوم و مهندسی نظیر معادلات جبری^۳، معادلات دیفرانسیل معمولی و جزئی^۴، معادلات انتگرال^۵، معادلات انتگرال-دیفرانسیل^۶، معادلات دیفرانسیل تفاضلی^۷ و معادلاتی از این قبیل توسعه یافت.

روش آنالیز هموتوپي یک روش نیمه-تحلیلی است که جواب به شکل سری تابعی برای معادلات غیر خطی بدست می دهد که به یک پارامتر کمکی ($C_0 \neq 0$) وابسته می شود که به عنوان یک عامل کنترل در نظر گرفته می شود اگر این پارامتر کمکی مناسب انتخاب شود، همگرایی سری جواب تضمین می شود. در حقیقت پارامتر کمکی زمینه را برای اثبات همگرایی فراهم می کند. با توجه به این مطلب برای این پارامتر کمکی نام "پارامتر کنترل همگرایی" انتخاب شده است.

لیائو برای به دست آوردن C_0 های مناسب، تکنیک رسم منحنی های C_0 را پیشنهاد می کند. بدین ترتیب که با رسم کمیت های وابسته به جواب معادله غیر خطی نسبت به C_0 ، ناحیه مجاز برای C_0 را تعیین می کند که در ناحیه ای است که باید خط مستقیم گردد.

کاربردهای موفقیت آمیز روش آنالیز هموتوپي در حل مسائل غیر خطی و کاربردهای زیبای دیگری نظیر روش نیوتن-هموتوپي توسط عباس بندی و دیگران و تعمیم تبدیل اوایلر توسط لیائو ارائه شده است. نسخه های متفاوت از این روش نظیر روش آنالیز هموتوپي تناوبی، روش آنالیز هموتوپي طیفی، روش آنالیز هموتوپي اصلاح شده، روش آنالیز هموتوپي چندگام و... منتشر شده است.

¹ Liao

² Beyond perturbation

³ Algebraic equations

⁴ Ordinary /Partial differential equations

⁵ Integral equations

⁶ Integral-differential equations

⁷ Difference-differential equations

در سال ۱۹۹۹ لیائو روش آنالیز هموتوپی را تعمیم داد و بردارهای کنترل همگرایی را معرفی کرد. در سال ۲۰۰۷ یابوشیتا^۸ و همکاران "روش بهینه" را برای پارامترهای کنترل همگرایی پیشنهاد کردند. این روش براساس مجذور خطای مانده شکل می گیرد. وو و چنگ^۹ در سال ۲۰۰۹ مقادیر بهینه پارامترهای کنترل همگرایی را با در نظر گرفتن منحنی های تراز کمیت های فیزیکی نسبت به پارامتر کنترل همگرایی C_0 محاسبه نمودند، و یک روش تکراری دو پارامتری را بر مبنای روش آنالیز هموتوپی گسترش دادند. مسیر بهینه وو و چنگ در اصل همان چیزی است که توسط یابوشیتا و همکاران پیشنهاد شده است. مارینیکا^{۱۰} و همکاران در سال ۲۰۰۸ یک تصحیح مهم از روش آنالیز هموتوپی ارائه کرد که "روش مجانبی بهینه هموتوپی" نام گرفت. در این روش با مینیم کردن مجذور خطای مانده، مقادیر پارامترهای کنترل همگرایی را با حل یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی محاسبه می کند. در سال ۲۰۱۰ نیو و وانگ^{۱۱} "روش آنالیز هموتوپی بهینه تک گام" را برای محاسبه پارامترهای کنترل همگرایی ارائه کردند که محدودیت روش مارینیکا و همکاران را ندارد و سریعتر از آن است. در این روش در هر مرحله خطای مجذور مانده را نسبت به یک پارامتر کنترل همگرایی مینیمم شده، و یک به یک پارامترهای کنترل همگرایی را فقط با حل یک معادله جبری غیرخطی در هر مرتبه از تقریب محاسبه می کند. لیائو در سال ۲۰۱۰ تغییری در روش آنالیز هموتوپی پیشنهاد نموده که به صورت همزمان از چند پارامتر کنترل همگرایی استفاده می کند و آنرا "رویکرد آنالیز هموتوپی بهین" نامگذاری می کند و نتایج خوبی را به دست می آورد.

لیائو در سال ۲۰۰۳ در کتاب "آنسوی پریشندگی" توجیه کرد که سری جواب هموتوپی همان سری تیلور تعمیم یافته است. در سال ۲۰۱۰ لیو^{۱۲} ثابت کرد که سری تیلور تعمیم یافته، سری تیلور معمولی در نقطه دیگری است. و بدین منظور با بررسی یک مثال ساده راز C_0 را در چهارچوب روش آنالیز هموتوپی آشکار کرد.

در سال ۲۰۱۰ اودیب^{۱۳} در مورد همگرایی روش آنالیز هموتوپی با تأثیر پارامتر کنترل همگرایی بحث کرد شرط کافی همگرایی روش آنالیز هموتوپی را اثبات و ماکزیمم خطای برشی مطلق سری جواب هموتوپی را تخمین زد. در سال ۲۰۱۱ ترکیمازاوغلو^{۱۴} ثابت کرد تحت شرایط خاص روش آنالیز هموتوپی به جواب دقیق معادله در رده مسائل معادلات دیفرانسیل غیر خطی همگراست و مقدار بهینه پارامتر کنترل همگرایی را با استفاده از مربع خطای مانده بدست آورد.

در سال ۲۰۱۲ مقاله عباس بندی و دیگران در بیان خواص ریاضی منحنی های C_0 در چهارچوب روش آنالیز هموتوپی منتشر شده است. بحث اصلی در این مقاله، آنچه که لیائو ناحیه مجاز پارامتر C_0 را در طول یک خط راست بدست

⁸ Yabushita

⁹ Wu and Cheung

¹⁰ Marinca

¹¹ Niu and Wang

¹² Liu

¹³ Odibat

¹⁴ Turkyilmazoglu

آورد ولی آنرا از دیدگاه ریاضی بررسی نکرد و اینکه چرا خط راست اتفاق می افتد، بررسی و ثابت می کند چرا در سری جواب هموتوبی در بعضی نقاط متناظر پارامتر کنترل همگرایی خط راست اتفاق می افتد. و بیشتر اینکه عباس بندی و دیگران نشان دادند که تکنیک منحنی های C_0 نقش مهمی در به دست آوردن جوابهای چندگانه یک مسأله غیر خطی بازی می کند. و روش آنالیز هموتوبی پیشگو را برای پیدا کردن جوابهای چند گانه یک مسأله غیر خطی ارائه نمودند.

در هیچیک از مقالات ارائه شده تاکنون به جنبه تئوری تعیین پارامتر کنترل همگرایی و فرایند رسم منحنی های C_0 ، به طور دقیق و با تکیه بر قضایای محض ریاضی پرداخته نشده است. تکنیک منحنی های C_0 نظریه پشتیبان ریاضی ندارد، به عبارت دیگر تعریف پارامتر کنترل همگرایی و تکنیک منحنی های C_0 که در تعیین و کنترل ناحیه همگرایی سری جواب هموتوبی موثر است، نیاز است به صورت مدون و بر اساس قضایای ریاضی بیان شده و کارایی و عدم کارایی به خوبی مشخص گردند.

تکنیک منحنی های C_0 روشی مفید برای یافتن C_0 های مناسب است ولی هیچ رویکردی برای انتخاب C_0 بهین ارائه نمی کند.

در این رساله هم از نقطه نظر آنالیزی و هم عددی، چگونگی تعیین پارامتر کنترل همگرایی C_0 را مورد بررسی قرار می دهیم و به جستجوی پارامتر کنترل همگرایی بهین می باشیم. برای فائق آمدن بر محدودیت های فرآیند رسم منحنی های C_0 ، راهکارهایی ارائه می کنیم که بهترین پارامتر کنترل همگرایی برای به دست آوردن سری جواب همگرا تعیین شود. بررسی می کنیم که آیا می توان بدون رسم منحنی های C_0 ، ناحیه مجاز C_0 را تعیین کرد، آیا تکنیک رسم منحنی های C_0 همیشه جواب می دهد، از چه کمیت های وابسته و از چه نقاطی می توان برای رسم منحنی های C_0 استفاده کرد. و اینکه آیا این تکنیک همیشه جواب می دهد. آیا می توان پایه های ریاضی و نواقص تکنیک رسم منحنی های C_0 را آدرس داد؟

در این تحقیق به فرضیه های، وجود حداقل یک جواب برای مسأله غیر خطی مورد نظر، وجود جواب به صورت سری برای مسأله غیر خطی مورد نظرو همگرایی روش آنالیز هموتوبی برای مسأله غیر خطی مورد نظر نیاز داریم. مطالب مورد بررسی در این رساله به صورت ذیل طبقه بندی شده اند.

در فصل ۱ مقدمات و مفاهیم مورد نیاز در فصول بعد را ارائه می کنیم. مفاهیم مشتق هموتوبی و معادلات دگرذیسی مرتبه بالا خواص آنها، روش آنالیز هموتوبی و تصحیح های متفاوت از آن، نظیر آنالیز هموتوبی بهینه و روشهای بهینه سازی پارامتر کنترل بر اساس بهینه سازی تک گام و بهینه سازی چند گام و غیره را به تفصیل بیان می کنیم.

در فصل ۲ شرایط لازم همگرایی روش آنالیز هموتویی و خواص ریاضی تکنیک منحنی های C_0 را تحت چند قضیه بیان و اثبات می کنیم. نشان می دهیم سری تیلور تعمیم یافته همان سری تیلور در نقطه دیگری است.

در فصل ۳ یک روش بر پایه مینیم سازی در نقاط متناظر با نقاط چبیشف را برای پیدا کردن پارامتر کنترل همگرایی مطلوب ارائه می کنیم و آن را در حل مسائل معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مرزی دو نقطه ای به کار می بریم. نتایج را با روشهای مرسوم بر پایه روش آنالیز هموتویی مقایسه می کنیم.

در فصل ۴ یک روش با اعمال تقریب هموتویی-پاده برای پیدا کردن پارامتر کنترل همگرایی C_0 مطلوب ارائه می کنیم. و کاربرد آن را در حل انواع مختلف از مسائل معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط اولیه یا مرزی دو نقطه ای نشان می دهیم و نتایج را با تکنیک رسم منحنی های C_0 و روشهای مرسوم بر پایه روش آنالیز هموتویی مقایسه می کنیم.

در فصل ۵ روشهای عددی تفاضلاتی و طیفی با روش آنالیز هموتویی ترکیب می شوند تا حل تقریبی مسائل معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مرزی را میسر سازند و به کمک آنها روش هایی بر پایه گسسته سازی در دامنه مورد بررسی مساله برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی مطلوب ارائه می کنیم.

در نهایت در فصل ۶ به سوالات چالش انگیزی که می تواند موضوع و انگیزه تحقیقات آتی باشد، اشاره می کنیم.

فصل اول

مقدمه ای بر روش آنالیز هموتویی

در این فصل به ارائه روش هموتویی برای حل معادلات جبری و معادلات دیفرانسیل غیرخطی می پردازیم. برای این منظور نحوه ی کاربرد روش را با تبدیل معادلات دیفرانسیل غیرخطی به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل خطی به کمک معادلات دگردیسی مراتب مختلف ارائه می کنیم. مفاهیم مشتقات هموتویی را معرفی و خواص آن‌ها را بر اساس قضیه های مربوط بررسی می کنیم. سپس تصحیح های متفاوت روش آنالیز هموتویی را به تفصیل بیان می کنیم.

۱-۱ تاریخچه و سوابق تحقیق

حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی بسیار دشوار است، در چند دهه اخیر حل تحلیلی این معادلات با روش های پریشندگی کاربرد گسترده ای در علوم و مهندسی داشته و نقش بزرگی در درک پدیده های غیر خطی ایفا نموده اند. با این همه می دانیم که روش های پریشندگی به پارامترهای کوچک یا بزرگ فیزیکی وابسته اند و بنابراین فقط برای مسائل غیرخطی ضعیف قابل کاربردند. روش های دیگری موسوم به تکنیک های غیر پریشندگی مانند روش پارامتر کوچک لیپانوف^{۱۵}، روش بسط σ ^{۱۶}، روش تجزیه آدومیان^{۱۷}

¹⁵ Lyapunov's artificial small parameter

¹⁶ σ Expansion method

¹⁷ Adomian's decomposition method

که به طور رسمی به پارامترهای کوچک و بزرگ فیزیکی وابسته نیستند الزاماً همگرایی را تضمین نمی‌کنند و در حقیقت برای مسائل غیر خطی ضعیف معتبرند.

روش آنالیز هموتوپی که در مراجع [۲۰-۲۵، ۲۷-۲۸] پیشنهاد شده است، یک روش نیمه تحلیلی است که یک جواب به شکل سری تابعی برای معادلات غیرخطی به دست می‌دهد، که معادلات جبری، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات دیفرانسیل-انتگرال، معادلات دیفرانسیل تفاضلی و معادلاتی از این قبیل هستند.

روش آنالیز هموتوپی بر خلاف روش پریشندگی به پارامترهای فیزیکی کوچک یا بزرگ وابسته نیست و بنابراین برای حل مسائل عمومی غیرخطی قابل کاربرد است. برخلاف روش‌های پریشندگی و روش‌های سنتی غیر پریشندگی، روش هموتوپی راه ساده‌ای برای اطمینان از همگرایی سری‌های تابعی جواب برای مسائل غیرخطی قوی فراهم می‌سازد. هم‌چنین بر خلاف روش پریشندگی و روش‌های غیر پریشندگی قبلی در روش آنالیز هموتوپی آزادی زیادی برای انتخاب توابع پایه برای تقریب مسائل غیر خطی قوی وجود دارد.

روش آنالیز هموتوپی با انتشار کتاب لیائو با نام "آنسوی پریشندگی" در سال ۲۰۰۳ رسماً معرفی شد، و کاربردهای موفقیت آمیز در حل مسائل غیر خطی در علوم و مهندسی پیدا کرد. مسایل فیزیکی مهمی که متعاقباً نام برده می‌شوند، از آن جمله‌اند. سیال چسبناک از سیالات غیر نیوتونی و معادلات نوع Kdv ، انتقال حرارتی غیر خطی، جریان‌ات جت شکل گلارتر، امواج آبی غیر خطی، جریان‌ات آبی زیر زمینی، معادلات برگرز - هاکسلی، و معادلات دیفرانسیل تفاضلی.

اساس روش هموتوپی بر مباحثی از توپولوژی و هندسه دیفرانسیل است. به طور خلاصه روش آنالیز هموتوپی یک تابع پیوسته از یک حدس اولیه به جواب مسأله اصلی است و به یک عملگر خطی کمکی وابسته می‌شود. برای ساختن چنین توابع پیوسته‌ای به یک پارامتر کمکی که همگرایی سری جواب را تضمین می‌کند، نیاز داریم. این روش دارای امکان انتخاب وسیعی از تقریب اولیه و عملگر خطی کمکی است. با این آزادی که یک مسأله پیچیده غیرخطی می‌تواند به تعداد نامتناهی‌ای از مسائل خطی کوچک‌تر تبدیل شود که نحوه این تبدیل توسط لیائو و تان^{۱۸} [۲۹] نشان داده شده است.

¹⁸ Tan

۲-۱ روش هموتویی برای حل معادلات جبری غیر خطی

فرض کنیم معادله جبری غیر خطی زیر داده شده باشد [۲۴]:

$$f(x) = 0,$$

که $\hat{x}$ جواب آن است. برای حل مسأله فوق تابع هموتویی زیر را تشکیل می دهیم:

$$H(x, q) = (1-q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x),$$

که در آن x_0 یک حدس اولیه $\hat{x}$ (جواب معادله) است، و $q \in [0, 1]$ پارامتر جانشانده نامیده می شود. در $q=0$ و $q=1$ به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) - f(x_0), \\ H(x, 1) &= f(x). \end{aligned}$$

بنابراین با تغییر q از 0 تا 1، $H(x, q)$ به طور پیوسته از $f(x) - f(x_0)$ به $f(x)$ تغییر می کند. اکنون مسأله هموتویی زیر را تشکیل می دهیم:

$$(1-q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0,$$

حال یک خانواده از معادلات جبری بر حسب q داریم. آشکارا جواب x از خانواده معادلات جبری بالا به پارامتر جانشانده q وابسته است و می تواند به صورت $x = \varphi(q)$ بیان شود، بنابراین خانواده معادلات فوق می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$(1-q)[f(\varphi(q)) - f(x_0)] + qf(\varphi(q)) = 0, \quad (1-2-1)$$

در رابطه (1-2-1) به ازای $q=0$ داریم، $f(\varphi(0)) = f(x_0)$. واضح است $\varphi|_{q=0} = \varphi(0) = x_0$ و به ازای $q=1$ داریم، $f(\varphi(1)) = 0$ ، که دقیقاً همان معادله جبری اولیه است. بنابراین

$$f(\varphi(1)) = f(x) = 0,$$

$$\varphi|_{q=1} = \varphi(1) = \hat{x} \text{ و}$$

لذا هنگامی که پارامتر جانشانده از 0 تا 1 افزایش می یابد، $\varphi(q)$ از حدس اولیه x_0 به جواب $\hat{x}$ از $f(x) = 0$ تغییر می یابد. خانواده معادلات (1-2-1) را معادلات دگرسی مرتبه صفرم می نامیم. چون

$\varphi(q)$ تابعی از پارامتر جانشانده q است، می توان بسط تیلور آن را در صورت وجود، به شکل زیر نوشت :

$$\varphi(q) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k q^k, \quad (2-2-1)$$

به طوری که $x_0 = \varphi(0)$ و

$$x_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \varphi(q)}{dq^k} \right|_{q=0} = D_k(\varphi). \quad (3-2-1)$$

در این جا سری (2-2-1) سری هموتویی و $D_k(\varphi)$ مشتق هموتویی مرتبه k ام φ نامیده می شود. اگر سری هموتویی (2-2-1) در $q=1$ همگرا باشد، آنگاه از رابطه $\varphi(1) = \hat{x}$ برای تعیین جواب، استفاده می کنیم، که آن را سری جواب هموتویی نامند :

$$\varphi(1) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k. \quad (4-2-1)$$

شعاع همگرایی بسیاری از سریهای مک لورن کوچک تر از 1 است، و ممکن است سری در $q=1$ همگرا نباشد. اما فرض می کنیم که سری هموتویی در $q=1$ همگراست. این محدودیت با معرفی یک پارامتر اضافی، رفع می شود که در قسمت بعد به معرفی آن می پردازیم.

با گرفتن مشتق هموتویی مرتبه اول (نسبت به q) از دو طرف رابطه معادله دگرایی مرتبه صفر (1-2-1) معادله دگرایی مرتبه اول به دست می آید. با قرار دادن $q=0$ در معادله ی دگرایی مرتبه اول نتیجه می شود:

$$x_1 f'(x_0) + f(x_0) = 0,$$

بنابراین داریم :

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

با گرفتن مشتق مرتبه دوم از طرفین معادله دگرایی مرتبه صفرم (1-2-1) و قرار دادن $q=0$ ، معادلات دگرایی مرتبه دوم به دست می آید، لذا داریم :

$$x_2 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_1^2 f''(x_0) = 0,$$

که جواب آن به صورت زیر است:

$$x_2 = -\frac{x_1^2 f''(x_0)}{2 f'(x_0)} = -\frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2 [f'(x_0)]^3}.$$

به همین ترتیب $x_k, k=1, 2, \dots$ ، به دست می‌آیند. در این جا تأکید می‌کنیم که تمام معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر خطی هستند و بنابراین حل آن‌ها بسیار ساده تر است. حال تقریب سری هموتویی مرتبه اول با دو جمله اول آن نتیجه می‌شود:

$$\hat{x} \simeq x_0 + x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad (5-2-1)$$

و تقریب سری هموتویی مرتبه دوم عبارت است از:

$$\hat{x} \simeq x_0 + x_1 + x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2 [f'(x_0)]^3}, \quad (6-2-1)$$

باید توجه داشته باشیم که (5-2-1) دقیقاً همان فرمول تکراری نیوتن - رافسون است. اغلب می‌توان پارامتر جانشانده $q \in [0, 1]$ را برای ساختن معادلات دگرذیسی مرتبه صفرم معرفی کرده و سری جواب هموتویی را به دست آورد. روش بالا بر اساس فرض همگرایی هموتویی در $q=1$ شکل می‌گیرد. اما این فرض در حالت کلی، به ویژه برای مسائل غیر خطی قوی همیشه برقرار نیست. برای فائق آمدن بر این محدودیت، لیائو یک پارامتر کمکی $c_0 \neq 0$ معرفی کرد، و برای ساختن معادلات دگرذیسی مرتبه صفرم معادله زیر را به کار برد:

$$(1-q)[f(\varphi(q)) - f(x_0)] = qc_0 f(\varphi(q)), \quad c_0 \neq 0, \quad (7-2-1)$$

چون $c_0 \neq 0$ از معادله بالا وقتی $q=1$ نتیجه می‌شود:

$$c_0 f(\varphi(q)) = 0,$$

که هم ارز معادله اولیه $f(x)=0$ است، مشروط بر این که $\varphi(1) = \hat{x}$. بقیه محاسبات و نتیجه‌گیری‌ها یکسان است، به جز معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر. در واقع با گرفتن مشتق هموتویی مرتبه اول از دو طرف معادله (7-2-1) و قرار دادن $q=0$ ، متناظراً معادله دگرذیسی مرتبه اول زیر را داریم:

$$x_1 f'(x_0) - c_0 f(x_0) = 0,$$

که جواب آن $x_1 = c_0 \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ است، با گرفتن مشتق هموتوپی مرتبه دو از طرفین رابطه (۷-۲-۱) و قرار دادن $q=0$ ، معادله دگرذیسی مرتبه دوم به دست می آید که از آن نتیجه می شود :

$$x_2 = 2(1+c_0)x_1 - \frac{x_1^2 f''(x_0)}{2f'(x_0)} = 2(1+c_0) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - c_0^2 \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3},$$

متناظراً تقریب هموتوپی مرتبه دوم به صورت زیر به دست می آید :

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + c_0(1+c_0) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - c_0^2 \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}. \quad (۸-۲-۱)$$

واضح است که وقتی $c_0 = -1$ ، روابط (۵-۲-۱) و (۶-۲-۱) حالت خاصی از معادلات فوق هستند. پارامتر کمکی c_0 در (۷-۲-۱) به عنوان یک عامل کنترل در نظر گرفته می شود که کاربرد گسترده ای در محاسبات عددی دارد. اگر این پارامتر کنترل خوب انتخاب شود، همگرایی تضمین می شود. مشابهاً واضح است که همگرایی سری هموتوپی (۲-۲-۱) وابسته به مقدار c_0 است و می توان از همگرایی سری جواب هموتوپی، با انتخاب یک c_0 مناسب اطمینان یافت. در حقیقت پارامتر کمکی c_0 ، زمینه را برای اثبات همگرایی فراهم می کند. با توجه به این مطلب برای c_0 نام "پارامتر کنترل همگرایی" انتخاب شده است. تأکید می شود که بدون کاربرد پارامتر کنترل همگرایی ناچار هستیم، قبول کنیم سری (۲-۲-۱) همگراست، در صورتی که با کاربرد پارامتر کنترل همگرایی نیاز به چنین فرضی برای همگرایی سری جواب نیست، زیرا به نظر می رسد طی شرایطی، با یک انتخاب مناسب از مقدار c_0 سری جواب هموتوپی همگرا می شود. بنابراین استفاده از پارامتر همگرایی c_0 در معادله دگرذیسی مرتبه صفرم روش هموتوپی را تکامل می بخشد.

۳-۱ خواص مشتق هموتوپی

در بخش (۲-۱) مشتق هموتوپی را بیان کردیم و آن را برای استنباط معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر به کار بردیم. در این بخش بعضی از خاصیت های مشتق هموتوپی را ارائه می کنیم و به عنوان توصیف مجرد روش، برخی از لم ها و قضیه های مشتق هموتوپی ارائه می شوند. این خاصیت ها برای معادلات دگرذیسی مراتب بالاتر به کار برده می شوند. در آن چه می آید معادله غیر خطی می تواند معادله جبری یا معادله دیفرانسیل باشد. بنابراین تابع هموتوپی علاوه بر q ممکن است تابعی از متغیر مستقل معادله دیفرانسیل نیز باشد. زیرا در تعریف مشتق هموتوپی از نماد مشتق جزئی استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱-۳-۱: فرض کنیم φ یک تابع هموتوپی از پارامتر q باشد، در این صورت

$$D_m(\varphi) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \quad (1-3-1)$$

مشتق هموتوپی مرتبه m ام φ نامیده می‌شود، که در آن $m \geq 0$ یک عدد صحیح است.

قضیه ۲-۳-۱ [۲۴]: اگر f و g توابعی باشند که به پارامتر جانشانده q وابسته نیستند و $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^i$ ،

$$\psi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i, \text{ آن گاه}$$

$$D_m(f\varphi + g\psi) = fD_m(\varphi) + gD_m(\psi).$$

قضیه ۳-۳-۱ [۲۴]: اگر $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^i$ و $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i$ ، آنگاه

$$D_m(\varphi) = y_m \quad (1)$$

$$D_m(q^k \varphi) = D_{m-k}(\varphi) \quad (2)$$

$$D_m(\varphi\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\varphi) D_{m-i}(\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi) D_{m-i}(\varphi) \quad (3)$$

$$D_m(\varphi^n \psi^l) = \sum_{i=0}^m D_i(\varphi^n) D_{m-i}(\psi^l) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi^l) D_{m-i}(\varphi^n) \quad (4) \\ 0 \leq k \leq m$$

قضیه ۴-۳-۱ [۲۴]: اگر L یک عملگر خطی مستقل از پارامتر جانشانده q باشد برای سری هموتوپی

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^i, \text{ داریم:}$$

$$D_m(L\varphi) = LD_m(\varphi).$$

قضیه ۵-۳-۱ [۲۴]: اگر برای هر دو سری هموتوپی $\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^i$ و $\psi = \sum_{i=0}^{\infty} u_i q^i$ داشته باشیم

برای $q \in [0, 1]$ ، آنگاه داریم:

$$D_m(\varphi) = D_m(\psi),$$

و

$$y_m = u_m, \quad m \geq 0.$$

۱-۴ معادلات دگردیسی

در این بخش از خاصیت‌های مشتق هموتوپی در بخش قبل برای مطالعه معادلات دگردیسی مراتب مختلف به دست آمده از معادله دگردیسی مرتبه صفرم استفاده می‌کنیم.

لم ۱-۴-۱ [۲۴]: فرض کنید $\varphi = \sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x) q^m$ نمایشگر سری هموتوپی، $q \in [0,1]$ پارامتر جانشانده، L عملگر خطی کمکی به شرطی که $L[f] = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ و y_m تابعی از متغیر x باشد، آن-گاه

$$D_m \{(1-q)L[\varphi - y_0]\} = L[y_m - \chi_m y_{m-1}],$$

که در آن χ_m به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1, \\ 1 & m \geq 1. \end{cases}$$

قضیه ۱-۴-۲ [۲۴]: فرض کنید $\varphi = \sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x) q^m$ که در آن $q \in [0,1]$ پارامتر جانشانده است، L عملگر خطی کمکی است به شرطی که $L[f] = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ، N عملگر غیرخطی، $y_0(x)$ حدس اولیه، c_0 پارامتر کنترل همگرایی مستقل از q و $H(x)$ تابع کمکی مستقل از q باشد. اگر معادله دگردیسی مرتبه صفرم به صورت زیر داده شده باشد:

$$(1-q)L[\varphi - y_0] = qc_0 H(N[\varphi]),$$

آنگاه معادله دگردیسی مرتبه m ($m \geq 1$) متناظر آن به صورت زیر است:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = c_0 H(x) D_{m-1}(N[\varphi]),$$

که در آن χ_m همان پارامتر تعریف شده در لم (۱-۴-۱) است.

قضیه ۳-۴-۱ [۲۴]: اگر برای دو سری هموتوپی $\varphi = \sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x) q^m$ و $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k q^k$ که در آن $q \in [0,1]$ پارامتر جانشانده، α_k ها ثابت، L عملگر خطی کمکی به شرطی که $L[f] = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ، N عملگر غیرخطی، $y_0(x)$ حدس اولیه و $H(x)$ تابع مستقل از پارامتر q باشد. اگر معادله دگرذیسی مرتبه صفرم به صورت زیر داده شود:

$$(1-q)L[\varphi - y_0] = H(x) \left(\sum_{k=1}^m \alpha_k q^k \right) N[\varphi],$$

آنگاه معادله دگرذیسی مرتبه m ($m \geq 1$) متناظر آن به صورت زیر است:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = H(x) \sum_{k=1}^m \alpha_k D_{m-k}(N[\varphi]).$$

قضیه ۴-۴-۱ [۲۴]: برای دو سری هموتوپی $\varphi = \sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x) q^m$ و $\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(x) q^k$ و $q \in [0,1]$ پارامتر جانشانده، $\beta_k(x)$ تابعی غیر متحد صفر، L عملگر خطی کمکی به شرطی که $L[f] = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ، N عملگر غیرخطی، $y_0(x)$ حدس اولیه و $H(x)$ تابع مستقل از پارامتر q باشد. اگر معادله دگرذیسی مرتبه صفرم به صورت زیر داده شود:

$$(1-q)L[\varphi - y_0] = H(x) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(x) q^k \right) N[\varphi],$$

آنگاه معادله دگرذیسی مرتبه m ($m \geq 1$) متناظر با آن به صورت زیر است:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = H(x) \sum_{k=1}^m \beta_k(x) D_{m-k}(N[\varphi]).$$

۵-۱ روش آنالیز هموتوپی

روش آنالیز هموتوپی به طور نظری امکان محاسبه تقریب‌های جواب تحلیلی معادلات غیر خطی را فراهم می‌سازد. هموتوپی مفهومی توپولوژیکی است و کاربرد گسترده‌ای در ریاضیات محض دارد، امروزه نیز در زمینه‌های کاربردی و برای به دست آوردن تقریب‌های جواب تحلیلی معادله غیر خطی با ساختن خانواده‌ای از معادلات دگرذیسی استفاده می‌شود.

موضوع اصلی حل معادله دیفرانسیل معمولی یا جزئی غیر خطی

$$N[y(x)] = 0, \quad (1-5-1)$$

تحت شرایط مرزی مشخص است، که در آن x می تواند متغیری حقیقی یا برداری با درایه های حقیقی باشد.

۱-۵-۱ روش آنالیز هموتوپی اولیه

در سال ۱۹۹۲، لیائو [۲۸] برای حل معادله (۱-۵-۱) معادله دگرذیسی مرتبه صفرم زیر را ساخت:

$$(1-q)L[\varphi(x,q) - y_0(x)] + qN[\varphi(x,q)] = 0, \quad (1-1-5-1)$$

که در آن $q \in [0,1]$ پارامتر جانشانده، N عملگر دیفرانسیل غیر خطی، L یک عملگر دیفرانسیل خطی به شرطی که $L[f] = 0$ اگر و فقط اگر $f = 0$ ، $y(x)$ تابع مجهول، $y_0(x)$ حدس اولیه و x متغیر مستقل است. در $q = 0$ داریم $\varphi(x,0) = y_0(x)$ و در $q = 1$ داریم $\varphi(x,1) = y(x)$. بسط سری مک لورن تابع $\varphi(x,q)$ نسبت به پارامتر q به صورت زیر است:

$$\varphi(x,q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) q^m, \quad (2-1-5-1)$$

که در آن

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x,q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}. \quad (3-1-5-1)$$

و $y_m(x) (m > 1)$ ، از معادلات دگرذیسی مرتبه بالا ی زیر به دست می آیند:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = D_{m-1}(N[\varphi(x,q)]), \quad (4-1-5-1)$$

که χ_m همان پارامتر تعریف شده در لم (۱-۴-۱) است.

فرض می کنیم سری هموتوپی (۲-۱-۵-۱) در $q = 1$ همگراست، سری جواب هموتوپی زیر را داریم:

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) \quad (5-1-5-1)$$

اگر سری هموتوپی (۲-۱-۵-۱) در $q = 1$ واگرا باشد، روش فوق با شکست مواجه می شود.

۱-۵-۲ روش آنالیز هموتوپی نرمال

در حالت کلی روش آنالیز هموتوپی اولیه همگرایی سری جواب هموتوپی را در $q=1$ تضمین نمی کند. برای فائق آمدن بر این محدودیت، لیائو [۲۰] در سال ۱۹۹۹ پارامتر کمکی غیر صفر c_0 را که پارامتر کنترل همگرایی نامیده شده است، برای ساختن معادلات دگرذیسی زیر به کار برد:

$$(1-q)L[\varphi(x, q) - y_0(x)] = c_0 q N[\varphi(x, q)], \quad (1-2-5-1)$$

و این همان روش آنالیز هموتوپی نرمال است. معادلات دگرذیسی مرتبه بالا ی متناظر آن عبارت است از:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = c_0 D_{m-1}(N[\varphi(x, q)]). \quad (2-2-5-1)$$

که χ_m همان پارامتر تعریف شده در لم (۱-۴-۱) است. باید توجه داشت که سری هموتوپی $\varphi(x, q)$ از معادلات فوق نه تنها به پارامتر q بلکه به پارامتر کنترل همگرایی c_0 نیز وابسته است. لذا معادلات y_m که در (۳-۱-۵-۱) نشان داده شده است به پارامتر همگرایی c_0 نیز وابسته است. بنابراین c_0 در ناحیه همگرایی از سری تیلور (۲-۱-۵-۱) نیز تأثیر دارد. انتخاب مناسب پارامتر کمکی c_0 ما را از همگرایی سری تیلور (۲-۱-۵-۱) در $q=1$ مطمئن می سازد. همان طور که در [۲۷، ۲۹] نشان داده شده است با معرفی پارامتر کنترل همگرایی c_0 ، روش آنالیز هموتوپی پیشرفت زیادی پیدا کرد. تحقیقات لیائو و تان [۲۲]، عباس بندی [۱]، ساجد و حیات [۳۷] و لی یانگ و جفری [۳۱] حاکی از موفقیت روش اخیر هستند.

۱-۵-۳ روش آنالیز هموتوپی چند پارامتری

در سال ۱۹۹۹، لیائو [۲۱] مجدداً روش آنالیز هموتوپی را با ساختن نوع دیگری از معادله دگرذیسی مرتبه صفرم تعمیم داد:

$$(1-A(q))L[\varphi(x, q) - y_0(x)] = c_0 B(q)N[\varphi(x, q)], \quad (1-3-5-1)$$

که $A(q)$ و $B(q)$ توابع دگرذیسی نامیده شدند، دو تابع تحلیلی هستند که در $|q| \leq 1$ همگرا و به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A(q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m q^m, \quad B(q) = \sum_{m=1}^{+\infty} \beta_m q^m, \quad (2-3-5-1)$$

و در شرایط زیر صدق می کنند:

$$A(0) = B(0) = 0, \quad A(1) = B(1) = 1. \quad (3-3-5-1)$$

معادلات دگر دیسی مرتبه بالا ی متناظر آن عبارت است از :

$$L \left[y_m(x) - \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_m y_{m-k}(x) \right] = c_0 \sum_{k=1}^m \beta_k D_{m-k} (N[\varphi(x, q)]). \quad (2-2-5-1)$$

دو بردار α و β را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots).$$

حال جواب $\varphi(x, q)$ از معادلات (1-3-5-1) نه تنها به پارامتر کنترل همگرایی c_0 ، بلکه به بردار α و β که بردار کنترل همگرایی می نامیم، وابسته اند. لذا بر خلاف تکنیک های پریشندگی یا غیر پریشندگی، روش آنالیز هموتویی روش مناسب و مطمئنی را برای کنترل همگرایی سری های جواب توسط پارامتر کنترل همگرایی c_0 و بردارهای کنترل همگرایی α و β فراهم می کند.

همانطور که ذکر شد، مهمترین مولفه موجود در روش آنالیز هموتویی پارامتر کنترل همگرایی c_0 است. وقتی سری جواب هموتویی را به دست می آوریم این سری شامل پارامتر c_0 است و آزادی داریم که c_0 را چنان انتخاب کنیم که این سری همگرا گردد. به عبارت دیگر از طریق انتخاب مناسب پارامتر c_0 یک جواب تقریبی برای معادلات اصلی (1-5-1) محاسبه می شود. لیائو [20, 23-21] برای بدست آوردن c_0 های قابل قبول، تکنیک رسم منحنی های c_0 را پیشنهاد می کند و چنین استدلال می کند، اگر قرار باشد سری جواب هموتویی برای مقادیری از c_0 همگرا باشد آنگاه این سری برای تمام مقادیر c_0 که سری همگرا می دهند، به تابع واحدی که همان جواب معادله اصلی است همگرا خواهد بود. به علاوه همگرایی سری جواب هموتویی، همگرایی تمامی کمیت های وابسته، مانند $y'(a)$ و $y''(a)$ که توجیه فیزیکی مناسبی هم دارند، نتیجه می دهد. بنابراین اگر نمودار این کمیت ها را نسبت به c_0 رسم کنیم در ناحیه ای باید خط مستقیم گردند. در واقع هر جا که نمودار کمیتی چون $y''(a)$ نسبت به c_0 خط مستقیم باشد به ازای کل مقادیر در این ناحیه $y''(a)$ به مقداری واحد همگرا خواهد شد چرا که عدد همگرایی سری حاصل منحصر بفرد است. بدین ترتیب با رسم نمودار کمیت های وابسته نسبت به c_0 می توان ناحیه قابل قبول c_0 که با R_{c_0} نمایش می دهیم، به دست آورد. لیائو [23]، کاربرد موفقیت آمیز این تکنیک را در حل مسائل غیر خطی متعددی به کار برد.

۶-۱ روش آنالیز هموتوپی بهینه و تصحیح های آن

اگرچه تکنیک رسم منحنی های c_0 روشی مفید برای یافتن c_0 های مطلوب است ولی این تکنیک هیچ رویکردی برای انتخاب بهترین c_0 که متناظر آن سری جواب با سریع ترین همگرایی را داشته باشیم، ارائه نمی کند. در ادامه تحقیقاتی که برای انتخاب پارامتر کنترل همگرایی بهینه انجام شده است را ارائه می دهیم.

۱-۶-۱ روش بهینه سازی هموتوپی

در سال ۲۰۰۷، یابوشیتا و همکاران [۴۸] "روش بهینه سازی" را برای تعیین پارامترهای کنترل همگرایی پیشنهاد کردند. این روش بر اساس مجذور خطای مانده شکل می گیرد، مجذور خطای مانده در تقریب مرتبه M ام از سری جواب هموتوپی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta(c_0) = \int_{\Omega} (N[Y_M(x, c_0)])^2 d\Omega. \quad (1-1-6-1)$$

که در آن $Y_M(x, c_0) = y_0(x) + \sum_{m=1}^M y_m(x)$ تقریب مرتبه M ام سری جواب هموتوپی و Ω مجموعه یا فاصله تغییرات x است. در صورت همگرایی $\Delta(c_0) \rightarrow 0$ وقتی $M \rightarrow +\infty$. مقدار بهینه c_0 ، در M ام مرتبه از تقریب سری جواب هموتوپی توسط معادله جبری غیر خطی زیر به دست می آید:

$$\frac{d\Delta(c_0)}{dc_0} = 0. \quad (2-1-6-1)$$

در حالتی که دو جفت معادله غیر خطی به صورت زیر داشته باشیم:

$$N_1[y, u] = 0, \quad N_2[y, u] = 0, \quad (3-1-6-1)$$

ممکن است دو پارامتر کنترل همگرایی c_1 و c_2 داشته باشیم، در این حالت مجذور خطای مانده را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Delta(c_1, c_2) = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} (N_j \left[\sum_{k=0}^M y_k, \sum_{k=0}^M u_k \right])^2 d\Omega, \quad (4-1-6-1)$$

و مقدار بهینه c_1 و c_2 از حل معادلات جبری زیر به دست می آیند:

$$\frac{\partial \Delta(c_1, c_2)}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial \Delta(c_1, c_2)}{\partial c_2} = 0. \quad (5-1-6-1)$$

می توان همین روش را برای n معادله دیفرانسیل غیر خطی همزمان به کار برد.

وو و چنگ [۴۶] معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۱-۳-۵-۱) را در حالت خاص $B(q) = c_0 q$ و $A(q) = wq + (1-w)q^2$ به کار برده اند. مقادیر بهینه پارامترهای کنترل c_0 و w با در نظر گرفتن منحنی های تراز کمیت های فیزیکی نسبت به پارامتر c_0 محاسبه می شوند. مسیر بهینه وو و چنگ در اصل همان چیزی است که توسط یابوشیتا و همکاران پیشنهاد شده است. سپس وو و چنگ [۴۷] یک روش تکراری دو پارامتری را بر مبنای روش آنالیز هموتوپی گسترش دادند، و معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۱-۳-۵-۱) را در حالت خاص $B(q) = q$ و $A(q) = c_0 \sum_{m=1}^{+\infty} \beta_m q^m$ در نظر گرفتند.

۲-۶-۱ روش مجانبی بهینه هموتوپی

مارینیکاو همکاران [۳۲]، معادله دگرذیسی مرتبه صفرم زیر به کار برده اند :

$$(1-q)L[\varphi(x, q) - y_0(x)] = H(q)N[\varphi(x, q)], \quad (1-2-6-1)$$

که $H(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k q^k$ یک سری توانی همگرا در $q=1$ است. مقادیر پارامترهای کنترل همگرایی $c_1, c_2, \dots, c_M$ با مینیم کردن مجذور خطای مانده $\Delta(c_1, \dots, c_M)$ در تقریب مرتبه M محاسبه می شوند :

$$\frac{\partial \Delta(c_1, \dots, c_M)}{\partial c_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq M, \quad (2-2-6-1)$$

که در آن یک مجموعه از M معادله جبری غیرخطی داریم. آشکارا معادله (۱-۲-۶-۱) حالت خاصی از معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۱-۳-۵-۱) است، که $A(q) = q, B(q) = \frac{1}{c_0} H(q)$ و $c_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \neq 0$. گر چه این روش "روش مجانبی بهینه هموتوپی" نام گرفته، اما در اصل در گروه روش های آنالیز هموتوپی قرار می گیرد. در این روش باید یک دستگاه از M معادله جبری غیرخطی و M مجهول $c_1, \dots, c_M$ حل شود.

در سال ۲۰۱۰، لیائو [۲۲] روش آنالیز هموتوپی بهینه را معرفی کرد که شبیه روش مارینیکا [۳۲] است. در این روش معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۱-۳-۵-۱) فقط شامل سه پارامتر کنترل همگرایی c_0, c_1, c_2 است و دو نوع تابع دگرذیسی خاص استفاده می شود که هر یک به ترتیب با شرط $|c_1| < 1$ و $|c_2| < 1$ تعیین می شوند.

۱-۶-۳ روش آنالیز هموتوپی بهینه تک گام

در روش مارینیکا هر چه مرتبه M از تقریب کاهش یابد، حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی آسان تر و به عکس هر چه مرتبه M از تقریب افزایش یابد حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی دشوارتر شده و به علاوه زمان محاسبه مورد نیاز برای محاسبه به صورت توانی افزایش می یابد. برای فائق آمدن بر این محدودیت، نیو و وانگ [۳۴] یک روش جدید برای محاسبه پارامترهای کنترل همگرایی ارائه کردند که حتی برای M های بزرگ نسبت به روش مارینیکا کارآمدتر است. در روش مارینیکا یک دستگاه از M معادله جبری غیرخطی و M مجهول پارامتر کنترل همگرایی $c_1, \dots, c_M$ حل می شود، اما در روش نیو و وانگ در هر مرحله خطای مجذور مانده نسبت به یک پارامتر کنترل همگرایی مینیمم شده، و یک به یک پارامترهای کنترل همگرایی بهینه را محاسبه می کنیم. در این روش فقط یک معادله جبری غیرخطی که شامل یک پارامتر مجهول c_M است در تقریب مرتبه M ام از سری جواب هموتوپی حل می شود. لذا این روش برای تقریب های مراتب بالاتر ساده است و به زمان محاسبه کمتری نیاز دارد.

شبیه روش مارینیکا در معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۱-۳-۵-۱) قرار می دهیم $H(q) = c_0 B(q)$ و $A(q) = q$ داریم:

$$(1-q)L[\varphi(x, q) - y_0(x)] = H(q)N[\varphi(x, q)], \quad (1-3-6-1)$$

که $H(q)$ تابع کنترل همگرایی با $H(0) = 0$. با بسط سری تیلور تابع کنترل همگرایی $H(q)$ داریم:

$$H(q) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_k q^k,$$

که

$$c_k = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m H(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}.$$

فرض کنیم که سری هموتوپی $\phi(x, q)$ و $H(q)$ در $q=1$ همگرا باشند، با جایگزینی در معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۱-۳-۶-۱) داریم :

$$(1-q)L\left[\sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x)q^m - y_0(x)\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k q^k N\left[\sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x)q^m\right], \quad (2-3-6-1)$$

و معادله دگرذیسی مرتبه m متناظر آن عبارت است از :

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k R_{m-k}, \quad (3-3-6-1)$$

که

$$R_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N(\phi(x, q))}{\partial q^m} \bigg|_{q=0}, \quad (4-3-6-1)$$

و χ_m همان پارامتر تعریف شده در لم (۱-۴-۱) است.

تقریب مرتبه M ام سری جواب هموتوپی، $Y_M(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^M y_m(x)$ وابسته به پارامترهای کنترل همگرایی $c_1, \dots, c_M$ است.

مجذور خطای مانده برای معادله اصلی (۱-۵-۱) در تقریب مرتبه M ام به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\Delta_M = \int_{\Omega} (N[Y_M(x)])^2 d\Omega. \quad (5-3-6-1)$$

ملاحظه می شود که در تقریب مرتبه اول، Δ_1 فقط به مقدار c_1 وابسته است، می توان c_1 را با حل کردن معادله جبری زیر به دست آورد :

$$\frac{d\Delta_1}{dc_1} = 0,$$

در تقریب مرتبه دوم مجذور خطای مانده تابعی از c_1 و c_2 است، یعنی $\Delta(c_1, c_2)$. اما چون c_1 در مرحله قبل به دست آمده است، لذا در این مرحله فقط c_2 مجهول است. مقدار بهینه آن را با حل معادله جبری زیر تعیین می شود :

$$\frac{d\Delta_2}{dc_2} = 0.$$

روش بهینه تک گام آنالیز هموتوبی سریع تر از روش مارینیکا است، چون در این روش ما در هر مرحله نیاز به حل یک معادله جبری غیرخطی فقط با یک پارامتر کنترل همگرایی مجهول داریم. توجه داریم که در کاربردهای قبلی روش آنالیز هموتوبی بیشتر از $H(q) = c_0 q$ استفاده می‌شد، و c_0 را با رسم منحنی موسوم به "منحنی c_0 " تعیین می‌کردیم، اما در این جا مجذور خطای مانده Δ_M در تقریب مرتبه M تابعی از c_M است، و مقدار بهینه آن با حل معادله‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{d\Delta_M}{dc_M} = 0. \quad (6-3-6-1)$$

6-1-4 روش آنالیز هموتوبی بهینه تعمیم یافته

در سال ۲۰۱۲، لیائو [۲۷] روش آنالیز هموتوبی بهینه تعمیم یافته را با انتخاب $A(q) = q$ و یک تابع دگرذیسی خاص $B(q) = \frac{1}{c_0} \sum_{n=1}^{\kappa} c_n q^n$ ، که $\kappa \geq 1$ یک عدد صحیح مثبت است و $c_0 = \sum_{n=1}^{\kappa} c_n \neq 0$ در معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۱-۳-۵-۱) پیشنهاد کرد:

$$(1-q)L[\varphi(x, q) - y_0(x)] = \left(\sum_{n=1}^{\kappa} c_n q^n\right) N[\varphi(x, q)], \quad (1-4-6-1)$$

معادلات دگرذیسی مرتبه m متناظر آن عبارت است از:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-k}(x)] = \sum_{n=1}^{\min\{m, \kappa\}} c_n D_{m-n} (N[\varphi(x, q)]). \quad (2-4-6-1)$$

تقریب مرتبه M سری جواب هموتوبی، $Y_M(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^M y_n(x)$ ، شامل حداکثر κ پارامترهای کنترل همگرایی مجهول $c_1, \dots, c_{\kappa}$ است. لذا در تئوری یک تعداد متناهی از پارامترهای کنترل همگرایی $c_1, \dots, c_{\kappa}$ وجود دارد حتی اگر مرتبه تقریب به بی نهایت میل کند ($M \rightarrow \infty$). در این حالت پارامترهای کنترل همگرایی بهینه توسط حل یک مجموعه از $\min\{M, \kappa\}$ معادله جبری غیرخطی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial c_n} = 0, \quad 1 \leq n \leq \min\{M, \kappa\} \quad (3-4-6-1)$$

اگر $\kappa \rightarrow \infty$ ، این روش دقیقا همان روش مجانبی بهینه هموتویی است که توسط مارینیکا و همکاران [۳۲] پیشنهاد شده است. اگر $c_1 = c_0$ و برای $n > 1$ داشته باشیم $c_n = 0$ روش آنالیز هموتویی بهینه [۲۹] است. لذا روش فوق عمومی تر است.

روشهای بهینه آنالیز هموتویی ذکر شده در بالا، در حالت کلی می توانند همگرایی سری جواب هموتویی را بهتر کنند. توصیه می شود از روش بهینه آنالیز هموتویی شامل یک یا دو پارامتر کنترل همگرایی استفاده شود. یک روش بهینه با تعداد زیادی پارامتر کنترل همگرایی از لحاظ محاسباتی کارا نیست. همچنین گاهی اوقات با استفاده از روش بهینه تک گام نمی توان نتایج همگرا به دست آورد. برای غلبه به این ضعف می توان از رویکرد بهینه چندگامی استفاده کرد. تحقیقات بیشتری نیاز است تا بتوان مقادیر بهینه پارامتر کنترل همگرایی را در چارچوب روش آنالیز هموتویی به دست آورد.

از طرفی برخی روش ها برای سرعت بخشیدن به همگرایی سری جواب وجود دارد. در میان آنها، روش تقریب پاده را می توان در چارچوب روش آنالیز هموتویی موسوم به تکنیک هموتویی-پاده [۲۳، ۲۷] به کار گرفت. تکنیک هموتویی-پاده تا حد زیادی می تواند همگرایی سری جواب هموتویی را تسریع بخشد.

۷-۱- تقریب هموتویی-پاده

تعریف ۱-۷-۱: برای بسط سری داده شده $f(q) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i q^i$ ، تقریب پاده $[r, s]$ ، تابع کسری است که به صورت زیر تعریف می شود [۷]:

$$[r, s] = \frac{a_0 + a_1 q + \dots + a_r q^r}{b_0 + b_1 q + \dots + b_s q^s}, \quad (1-7-1)$$

و در شرط زیر صدق می کند:

$$f(q) = \frac{a_0 + a_1 q + \dots + a_r q^r}{b_0 + b_1 q + \dots + b_s q^s} + O(q^{r+s+1}).$$

می توان نوشت:

$$(b_0 + b_1 q + \dots + b_s q^s)(y_0 + y_1 q + \dots) = a_0 + a_1 q + \dots + a_r q^r. \quad (2-7-1)$$

قرار داد می کنیم $b_0 = 1$. با مساوی قرار دادن ضرایب $q^{r+1}, q^{r+2}, \dots, q^{r+s}$ در معادله (۱-۷-۲)، s معادله با ضرایب مجهول $b_1, b_2, \dots, b_s$ داریم. و با مساوی قرار دادن ضرایب $1, q^1, \dots, q^r$ در معادله (۱-۷-۲)، داریم :

$$a_0 = y_0$$

$$a_1 = c_1 + b_1 y_0$$

$$a_2 = c_2 + b_1 y_1 + b_2 y_2$$

...

$$a_r = y_r + \sum_{i=1}^{\min(r,s)} b_i y_{r-i}$$

با استفاده از دستور کرامر می توان ضرایب $b_1, b_2, \dots, b_s$ را محاسبه کرد. تعریف می کنیم :

$$Q^{[r,s]}(q) = \begin{vmatrix} y_{r-s+1} & y_{r-s+2} & \cdots & y_r & y_{r+1} \\ y_{r-s+2} & y_{r-s+3} & \cdots & y_{r+1} & y_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{r-1} & y_r & \cdots & y_{r+s-2} & y_{r+s-1} \\ y_r & y_{r+1} & \cdots & y_{r+s-1} & y_{r+s} \\ q^s & q^{s-1} & \cdots & q & 1 \end{vmatrix}$$

و

$$P^{[r,s]}(q) = \begin{vmatrix} y_{r-s+1} & y_{r-s+2} & \cdots & y_r & y_{r+1} \\ y_{r-s+2} & y_{r-s+3} & \cdots & y_{r+1} & y_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{r-1} & y_r & \cdots & y_{r+s-2} & y_{r+s-1} \\ y_r & y_{r+1} & \cdots & y_{r+s-1} & y_{r+s} \\ q^s f_{r-s}(q) & q^{s-1} f_{r-s+1}(q) & \cdots & q f_{s-1}(q) & f_s(q) \end{vmatrix}$$

که در آن $f_{r-s}(q) = \sum_{i=0}^{r-s} y_i q^i$. با این تعریف، تقریب پاده (۱-۷-۱) به صورت زیر محاسبه می شود :

$$[r, s] = \frac{P^{[r, s]}(q)}{Q^{[r, s]}(q)}, \quad Q^{[r, s]}(q) \neq 0, \quad (3-7-1)$$

با این ویژگی که

$$Qf - P = O(q^{r+s+1}), \quad \text{as } q \rightarrow 0. \quad (4-7-1)$$

تکنیک هموتوپی - پاده [۲۳، ۲۷] ترکیبی از تقریب پاده و روش آنالیز هموتوپی می باشد. با اطمینان از اینکه سری هموتوپی $y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x) q^m$ در $q=1$ همگراست، ابتدا تقریب پاده $[r, s]$ را نسبت به پارامتر جانسانده q برای سری هموتوپی مذکور، به صورت زیر به کار می بریم:

$$\frac{\sum_{k=0}^r A_k(x) q^k}{1 + \sum_{k=1}^s A_{r+k}(x) q^k}, \quad (5-7-1)$$

که در آن توابع $A_k(x)$ ، $k = 0, 1, \dots, r+s$ ، توسط مؤلفه های $y_m(x)$ ، $m = 0, 1, 2, \dots, r+s$ ، تعیین می شوند و سپس جایگذاری $q=1$ ، تقریب هموتوپی - پاده $[r, s]$ می شود:

$$\frac{\sum_{k=0}^r A_k(x)}{1 + \sum_{k=1}^s A_{r+k}(x)}. \quad (6-7-1)$$

روش آنالیز هموتوپی بر اساس این فرض است که با داشتن درجه آزادی در انتخاب مولفه های L ، C_0 و $y_0(x)$ سری جواب هموتوپی در $q=1$ همگراست. از طرفی پارامتر کنترل همگرایی C_0 امکان تنظیم و کنترل ناحیه همگرایی سری جواب هموتوپی را مهیا می کند. بنابراین، تقریب هموتوپی - پاده نیز همگراست. علاوه بر این، همانطور که لیاو اشاره کرده است [۲۳، ۲۷]، وقتی $q \rightarrow \infty$ ، تقریب پاده $[r, r]$ به 0 یا ∞ میل می کند ولی تقریب هموتوپی - پاده $[r, r]$ وقتی $q \rightarrow \infty$ ، به 1 میل می کند، لذا تقریب هموتوپی - پاده دقت بالاتری دارد و اغلب سریع تر از سری جواب محاسبه شده با استفاده از روش آنالیز هموتوپی همگراست. در بسیاری از موارد، تقریب هموتوپی - پاده به پارامتر کنترل همگرایی C_0 بستگی ندارد. اگرچه تاکنون اثبات نشده است. روش هموتوپی - پاده تا حد زیادی می تواند ناحیه همگرایی و نرخ همگرایی سری جواب هموتوپی را بزرگ کند. در این موارد، حتی اگر سری جواب واگرا باشد، با استفاده از

تکنیک هموتویی- پاده غالباً سری همگرا می شود. . تکنیک هموتویی- پاده را می توان برای تسریع همگرایی سریهای وابسته به سری جواب هموتویی به کار برد. به طور مثال می توان برای تسریع همگرایی سری $y'(0)$, $y''(0)$ ، به صورت

$$\frac{\partial \varphi(x, c_0, q)}{\partial x} \Big|_{x=0} = y'_0(0) + \sum_{m=1}^{\infty} y'_m(0) q^m,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, c_0, q)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = y''_0(0) + \sum_{m=1}^{\infty} y''_m(0) q^m,$$

روش هموتویی- پاده را به کار برد.

فصل دوم

اساس روش آنالیز هموتویی

در این فصل شرایط لازم همگرایی روش آنالیز هموتویی و خواص ریاضی تکنیک منحنی های C_0 را تحت چند قضیه بیان و اثبات می کنیم.

۱-۲ آنالیز همگرایی روش آنالیز هموتویی و کران خطا

در این قسمت به تحلیل همگرایی روش آنالیز هموتویی [۲۵] می پردازیم و قضیه های مربوط را بیان و اثبات خواهیم کرد.

معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر را در حالت کلی در نظر بگیرید:

$$N[y(x)] = 0, \quad (1-1-2)$$

که در آن x متغیر مستقل و $y(x)$ تابع مجهول است. لیائو، با انتخاب یک حدس اولیه مناسب $y_0(x)$ ، عملگر خطی کمکی مناسب L و با استفاده از $q \in [0,1]$ به عنوان پارامتر جانشانده، معادله دگرذیسی مرتبه صفرم را به صورت زیر ارائه داد :

$$(1-q)L[\varphi(x,q) - y_0(x)] = qc_0H(x)N[\varphi(x,q)], \quad (2-1-2)$$

که $c_0 \neq 0$ پارامتر کنترل همگرایی و $\varphi(x, q)$ جواب (۱-۱-۲) که وابسته به c_0 ، L ، $y_0(x)$ ، q و H است. با فرض این که حدس اولیه $y_0(x)$ ، عملگر خطی کمکی L ، تابع کمکی H و پارامتر کنترل همگرایی c_0 به درستی انتخاب شده اند، آنگاه سری تیلور

$$\varphi(x, q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x) q^m, \quad (3-1-2)$$

که

$$y_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \quad (4-1-2)$$

احتمالاً در $q=1$ همگراست و سری جواب هموتویی به صورت زیر به دست می آید :

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x). \quad (5-1-2)$$

مولفه های y_m ، ($m \geq 1$) از معادله دگرذیسی مرتبه m زیر به دست می آید :

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = c_0 H(x) R_m[\vec{y}_{m-1}, \varphi], \quad (6-1-2)$$

که در آن $\vec{y}_m = (y_0(x), y_1(x), \dots, y_{m-1}(x))$ و χ_m به صورت زیر تعریف می شود :

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \quad (7-1-2)$$

و همچنین

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x), \varphi] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[x, \varphi(x, q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}. \quad (8-1-2)$$

قضیه ۱-۱-۲ : فرض کنید سری (۳-۱-۲) وقتی $q=1$ همگرا باشد، یعنی

$$y_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x), \quad (9-1-2)$$

که در آن $y_0(x)$ تابع حدس آغازین برای جواب (۱-۱-۲) و $y_m(x)$ ، $m \geq 1$ ، از معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۶-۱-۲) به دست می آید. آنگاه سری (۹-۱-۲) جواب معادله اصلی (۱-۱-۲) خواهد بود.

اثبات : فرض کنیم سری (۹-۱-۲) به تابع $s(x)$ همگرا باشد، یعنی

$$s(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x), \quad (10-1-2)$$

در این صورت با استفاده از معادله دگر دیسی مرتبه بالا (۶-۱-۲) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} & c_0 H(x) \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\bar{y}_{m-1}, \varphi) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} L[y_{m-1}(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] \\ &= L\left\{\sum_{m=1}^{+\infty} [y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)]\right\} \\ &= L\{y_1(x)\} + L\{y_2(x) - y_1(x)\} + L\{y_3(x) - y_2(x)\} + \dots + L\{y_n(x) - y_{n-1}(x)\} + \dots \\ &= L\{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)\} \\ &= L\{0\} = 0. \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $c_0 \neq 0$ و $H(x) \neq 0$ ، آنگاه

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\bar{y}_{m-1}, \varphi) = 0, \quad (11-1-2)$$

در نتیجه

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N[\varphi(x; q)]}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\varphi(x; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} = 0. \quad (12-1-2)$$

حال تابع مانده معادله اصلی (۱-۱-۲) را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\psi(x; q) = N[\varphi(x; q)], \quad (13-1-2)$$

اینک برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که $\psi(x; 1) = 0$ زیرا خواهیم داشت :

$$N[\varphi(x; 1)] = 0.$$

و از طرف دیگر می دانیم $\varphi(x; 1) = s(x)$. حال بسط تیلور تابع $\psi(x; q)$ را نسبت به q می نویسیم :

$$\psi(x; q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m,$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱۲-۱-۲) داریم :

$$\psi(x;1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \psi(x;q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N[\varphi(x;q)]}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = 0,$$

و اثبات کامل می شود.

قضیه ۲-۱-۲ [۲۵] : فرض کنید جمله های سری (۲-۱-۵) به دست آمده از معادله دگر دیسی مرتبه بالا (۲-۲)

(۶-۱)، $y_0(x)$ ، $y_1(x)$ و $y_2(x)$... باشند. در این صورت اگر $0 < \gamma < 1$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0 : \|y_{k+1}(x)\| \leq \gamma \|y_k(x)\|, \quad (۱۴-۱-۲)$$

آنگاه سری جواب $\sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x)$ همگراست.

اثبات : فرض کنیم x مقدار ثابت و دلخواه باشد. دنباله $\{S_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} S_0(x) = y_0(x), \\ S_1(x) = y_0(x) + y_1(x), \\ S_2(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x), \\ \vdots \\ S_n(x) = y_0(x) + y_1(x) + \dots + y_n(x). \end{cases}$$

حال ثابت می کنیم $\{S_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ است. در نظر می گیریم که

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|y_{n+1}(x)\| \leq \gamma \|y_n(x)\| \leq \gamma^2 \|y_{n-1}(x)\| \leq \dots \leq \gamma^{n-k_0+1} \|y_{k_0}(x)\|,$$

برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ و $n \geq m \geq k_0$ داریم :

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &\leq \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \dots + \|(S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \gamma^{n-k_0} \|y_{k_0}(x)\| + \gamma^{n-k_0-1} \|y_{k_0}(x)\| + \dots + \gamma^{m-k_0+1} \|y_{k_0}(x)\| \\ &= \frac{1 - \gamma^{n-m}}{1 - \gamma} \gamma^{m-k_0+1} \|y_{k_0}(x)\|. \end{aligned}$$

بنابراین چون $0 < \gamma < 1$ به دست می آوریم :

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0.$$

بنابراین $\{S_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ بوده و سری $\sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x)$ همگرا و اثبات کامل می شود.

قضیه ۳-۱-۲ [۲۵]: فرض کنیم سری $\sum_{m=0}^{+\infty} y_m(x)$ در قضیه (۲-۱-۲) به جواب مسأله اصلی (۱-۱-۲) همگرا است، و بر طبق (۵-۱-۲)، مجموع جزئی مرتبه M ام $Y_M(x) = \sum_{m=0}^M y_m(x)$ جواب تقریبی مسأله (۱-۱-۲) باشد، آنگاه

$$\|y(x) - Y_M(x)\| \leq \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|y_{k_0}(x)\|. \quad (۱۵-۱-۲)$$

اثبات: از قضیه (۲-۱-۲) نامساوی زیر را داریم:

$$\|S_n - S_M\| \leq \frac{1-\gamma^{n-M}}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|y_{k_0}(x)\|,$$

حال n را به سمت $+\infty$ میل می دهیم آنگاه $S_n(x) \rightarrow y(x)$ و $\gamma^{n-M} \rightarrow 0$. بنابراین

$$\|y(x) - Y_M(x)\| \leq \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|y_{k_0}(x)\|,$$

و اثبات کامل است.

به عبارت دیگر اگر برای هر $i \geq k_0$ تعریف کنیم:

$$\beta_{i+1} = \begin{cases} \frac{\|y_{i+1}(x)\|}{\|y_i(x)\|}, & \|y_i(x)\| \neq 0, \\ 0, & \|y_i(x)\| = 0, \end{cases} \quad (۸-۱-۲)$$

و اگر برای $\forall i \geq k_0$ داشته باشیم، $0 \leq \beta_i < 1$ ، آنگاه مجموع جزئی مرتبه M ام $Y_M(x) = \sum_{m=0}^M y_m(x)$ به

جواب $y(x)$ همگرا خواهد بود و کران خطا عبارت خواهد بود از

$$\|y(x) - Y_M(x, c_0)\| \leq \frac{1}{1-\beta} \beta^{M-k_0+1} \|y_{k_0}(x)\|. \quad (9-1-2)$$

در حالت کلی در روش آنالیز هموتوبی پارامتر کنترل کننده همگرایی c_0 طوری به دست می آید که شرط بالا رخ می دهد. معمولاً این پارامتر با استفاده از روش رسم نمودار منحنی های c_0 به دست می آید.

۲-۲ خواص ریاضی منحنی های c_0

در این بخش بر اساس این مطلب که با تغییرات پارامتر کنترل کننده همگرایی c_0 ، مقدار تابع در محدوده همگرایی ثابت می شود و تغییر نمی کند و ارتباط آن با بسط سری تیلور می پردازیم.

قضیه ۱-۲-۲ [۴]: فرض کنیم $f(x)$ تابعی پیوسته در $[a, b]$ و مشتق پذیر در بازه (a, b) باشد و $f(a) = f(b) = 0$ ، آنگاه حداقل یک نقطه $\xi \in (a, b)$ وجود دارد به طوری که $f'(\xi) = 0$.

قضیه ۲-۲-۲ [۴]: فرض کنیم $g(c_0)$ تابعی پیوسته در $[a, b]$ و مشتقات مراتب مختلف تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد و عدد M مشتقات وجود وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall k \in \mathbb{N} : \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)| \leq M. \quad (1-2-2)$$

همچنین فرض کنیم $G_n(x, \alpha)$ چند جمله ای تیلور از درجه n برای تابع $f(x)$ حول $\alpha = g(c_0)$ باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و $\gamma \in (a, b)$ زیر بازه (c, d) و $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\forall c_0 \in (c, d), n \geq N : |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(c_0))| < \varepsilon. \quad (2-2-2)$$

اثبات: فرض کنیم $\beta \in [a, b]$ ، و بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $\beta > \alpha$ باشد. تعریف می کنیم:

$$s(x) = f(\beta) - f(x) - \frac{(\beta-x)}{1!} f'(x) - \frac{(\beta-x)^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{(\beta-x)^n}{n!} f^{(n)}(x), \quad (3-2-2)$$

آنگاه $s'(x)$ در بازه (a, b) وجود دارد و

$$s'(x) = -\frac{(\beta-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x).$$

حال تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$U(x) = s(x) - \left(\frac{\beta - x}{\beta - \alpha}\right)^{n+1} s(\alpha), \quad (۴-۲-۲)$$

آنگاه

$$U(\alpha) = U(\beta) = 0.$$

از مشتق پذیری $s(x)$ و $\left(\frac{\beta - x}{\beta - \alpha}\right)^{n+1}$ نتیجه می شود که $U(x)$ روی هر زیر بازه ای از (a, b) مشتق پذیر است. لذا مطابق با قضیه (۱-۲-۲) نتیجه می شود که $\xi_\beta \in (\alpha, \beta)$ وجود دارد به طوری که

$$U'(\xi_\beta) = 0,$$

که نتیجه می دهد :

$$-\frac{(\beta - \xi_\beta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi_\beta) + (n+1) \frac{(\beta - \xi_\beta)^n}{(\beta - \alpha)^{n+1}} s(\alpha) = 0,$$

آنگاه چون $\xi_\beta \neq \beta$ داریم :

$$s(\alpha) = \frac{(\beta - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_\beta),$$

اینک از رابطه (۳-۲-۲) نتیجه می شود که

$$s(\alpha) = f(\beta) - G_n(\beta, \alpha) = \frac{(\beta - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_\beta),$$

چون β بصورت دلخواه انتخاب شده بود، می توان نوشت :

$$\forall x \in [a, b], \alpha \in [a, b]: f(x) - G_n(x, \alpha) = \frac{(x - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_\beta), \quad \xi_\beta \in (\alpha, x). \quad (۵-۲-۲)$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ و $\gamma \in (a, b)$. با در نظر گرفتن $\alpha \in (a, x)$ روشن است که $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n \geq N: \frac{|(\gamma - \alpha)^{n+1}|}{(n+1)!} \leq \frac{\varepsilon}{M}, \quad (۶-۲-۲)$$

آنگاه از روابط (۱-۲-۲)، (۵-۲-۲) و (۶-۲-۲) نتیجه می شود که

$$|f(\gamma) - G_n(\gamma, \alpha)| \leq \frac{(\gamma - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi_\gamma)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$$

بنابراین ثابت کردیم که

$$\forall \gamma \in (a, b), \forall \alpha \in (a, \gamma), \forall \varepsilon > 0, \exists N \Rightarrow \forall n \geq N : |f(\gamma) - G_n(\gamma, \alpha)| < \varepsilon. \quad (7-2-2)$$

چون $g(c_0)$ تابعی پیوسته روی $[a, b]$ است، آنگاه زیر بازه‌ای از $[a, b]$ مثل (c, d) وجود دارد که

$$g\{(c, d)\} = (a, \gamma),$$

که نتیجه آن تبدیل (7-2-2) به رابطه زیر است :

$$\forall \gamma \in (a, b), c_0 \in (c, d), \varepsilon > 0, \exists N \Rightarrow \forall n \geq N : |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(c_0))| < \varepsilon.$$

و لذا اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۳-۲-۲ : فرض کنید $f(x)$ به اندازه کافی در $[a, b]$ هموار باشد، $g(x)$ تابعی پیوسته بروی

$[a, b]$ ، $G_n(x, \alpha)$ چند جمله‌ای تیلور f از درجه n حول $g(c_0)$ باشد. آنگاه هنگامی که $n \rightarrow +\infty$ ، در رسم نمودار تابع $G_n(\gamma, g(c_0))$ بر حسب c_0 خط افقی رخ می‌دهد.

اثبات : نتیجه مستقیم قضیه (۲-۲-۲) می‌باشد.

قضیه زیر نشان می‌دهد که قضیه (۲-۲-۲) با شرط ضعیف تری می‌تواند برقرار باشد.

قضیه ۴-۲-۲ [۴] : فرض کنید $g(c_0)$ تابعی پیوسته بروی $[a', b']$ باشد و

$G_n(x, \alpha) = \sum_{k=0}^n a_k(\alpha)(x - \alpha)^k$ چند جمله‌ای تیلور از درجه n برای $f(x)$ حول $\alpha = g(c_0) \in (a', b')$ است. علاوه بر این فرض کنید :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha \in [a', b'], x \in [a, b] : |x - \alpha| \leq \left| \frac{a_k(\alpha)}{a_{k+1}(\alpha)} \right|, \quad (8-2-2)$$

آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و $\gamma \in [a, b]$ بازه (c, d) و $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که

$$\forall c_0 \in (c, d), n \geq N : |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(c_0))| < \varepsilon. \quad (9-2-2)$$

اثبات : از رابطه (۸-۲-۲) نتیجه می شود که $0 < \theta < 1$ وجود دارد به طوری که

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha \in [a', b'], x \in [a, b]: |a_{k+1}(\alpha)| |x - \alpha| \leq \theta |a_k(\alpha)|. \quad (۱۰-۲-۲)$$

برای اثبات (۹-۲-۲) فرض کنید $\gamma \in [a, b]$ ثابت است، نشان می دهیم $G_n(\gamma, \alpha)$ برای $\alpha \in (a', b')$ یک دنباله همگراست. نشان می دهیم که $\{G_n(\gamma, \alpha)\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ است. از رابطه (۱۰-۲-۲) بدست می آوریم :

$$\begin{aligned} \|G_{n+1}(\gamma, \alpha) - G_n(\gamma, \alpha)\| &= |a_{n+1}(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^{n+1} \\ &\leq \theta |a_n(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^n \\ &\leq \theta^2 |a_{n-1}(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^{n-1} \\ &\leq \dots \\ &\leq \theta^{n-p+1} |a_p(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^p, \end{aligned}$$

اینک برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ با $n \geq m > p$ داریم :

$$\begin{aligned} \|G_n(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha)\| &= \|(G_n(\gamma, \alpha) - G_{n-1}(\gamma, \alpha)) + (G_{n-1}(\gamma, \alpha) - G_{n-2}(\gamma, \alpha)) + \dots + (G_{m+1}(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha))\| \\ &\leq \|(G_n(\gamma, \alpha) - G_{n-1}(\gamma, \alpha))\| + \|(G_{n-1}(\gamma, \alpha) - G_{n-2}(\gamma, \alpha))\| + \dots + \|(G_{m+1}(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha))\| \\ &\leq \theta^{n-p} |a_p(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^p + \theta^{n-p-1} |a_p(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^p + \dots + \theta^{m-p+1} |a_p(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^p \\ &= \frac{1 - \theta^{n-m}}{1 - \theta} \theta^{m-p+1} |a_p(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^p. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \|G_n(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha)\| = 0,$$

که نتیجه می دهد که $\{G_n(\gamma, \alpha)\}_{n=0}^{+\infty}$ همگراست.

از طرف دیگر $G_n(\gamma, \alpha)$ چند جمله ای تیلور از درجه n برای $f(x)$ در $x = \gamma$ است، بنابراین برای هر $N \in \mathbb{N}$ ، $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\forall n \geq N: |f(\gamma) - G_n(\gamma, \alpha)| < \varepsilon.$$

حال با توجه به این حقیقت که α از بازه (a', b') به صورت دلخواه انتخاب شده است و $g(c_0)$ تابعی پیوسته بروی $[a', b']$ است، می‌توانیم بگوییم که برای هر $\varepsilon > 0$ ، $N \in \mathbb{N}$ ، بازه (c, d) وجود دارد به طوری که

$$\forall c_0 \in (c, d), n \geq N: |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(c_0))| < \varepsilon. \quad (11-2-2)$$

و لذا اثبات کامل می‌شود.

قضیه (2-1-2) به همراه قضیه (2-2-2) تاکید می‌کنند که همگرایی در سری جواب هموتوپی نتیجه‌اش تولید خط راست افقی به اصطلاح، منحنی‌های c_0 است که بازه معتبر همگرایی برای پارامتر کنترل کننده همگرایی c_0 را می‌دهد به طوری که به ازای آن سری جواب هموتوپی همگرا می‌شود.

فصل سوم

روش مینیم سازی برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی

در چارچوب روش آنالیز هموتوپی پارامتر کنترل همگرایی نقش کلیدی در همگرایی سری جواب هموتوپی دارد. تعریف پارامتر کنترل همگرایی C_0 و تکنیک رسم منحنی های C_0 امکان تشخیص و تعیین و کنترل ناحیه همگرایی سری جواب را دارد. هر چند این تکنیک روشی مفید برای یافتن C_0 های مطلوب است ولی هیچ رویکردی برای انتخاب بهترین C_0 ارائه نمی کند.

در این فصل ابتدا کاربرد روش آنالیز هموتوپی در حل مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای غیر خطی ارائه می شود. سپس، بعد از تعریف پارامتر کنترل همگرایی بهینه، برای تعیین آن از مینیم سازی نرم تابع مانده که در نقاط چبیشف گسسته سازی شده اند، استفاده می کنیم. قضیه های مربوط بیان و اثبات می شوند.

۳-۱ کاربرد روش آنالیز هموتوپی در مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای

روش آنالیز هموتوپی در حل مسائل مقدار مرزی در دامنه های کراندار [۱۷] کاربرد بسزایی دارد. در این بخش روش آنالیز هموتوپی را برای حل مسائل مقدار مرزی دو نقطه ای غیر خطی در معادلات دیفرانسیل معمولی اعمال می کنیم.

مسأله غیر خطی زیر را در نظر می گیریم :

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0 \quad a \leq x \leq b \quad (3-1-1)$$

$$y(a) = \alpha \quad y(b) = \beta \quad (2-1-3)$$

که در آن x متغیر مستقل، $y(x)$ تابع مجهول، F تابع هموار غیرخطی و a ، b ، α و β ثابتهای حقیقی هستند. فرض می کنیم معادله اصلی (۱-۱-۳) و (۲-۱-۳) دارای جواب یکتا باشد. شرایط تضمین یکتایی جواب معادله اصلی فوق را می توان در [۱۵] یافت. معادله دیفرانسیل فوق را می توان با روشهای عددی نظیر روش پرتابی [۱۶]، روش تفاضلات متناهی [۱۱] و روش اجزای محدود [۱۰] حل کرد.

هدف یافتن تابع مجهول $y(x)$ است. بدین منظور لیائو یک حدس اولیه برای تابع جواب $y(x)$ ، مانند $y_0(x)$ را انتخاب می کند و با استفاده از یک عملگر خطی کمکی L با ویژگی $L[f(x)] = 0$ هنگامی که $f(x) = 0$ ، و پارامتر جانشانده $q \in [0, 1]$ ، هموتوبی زیر را می سازد:

$$(1-q)L[\phi(x, c_0, q) - y_0(x)] = qc_0N[x, \phi(x, c_0, q)], \quad (3-1-3)$$

تحت شرایط مرزی $\phi(a, c_0, q) = \alpha$ و $\phi(b, c_0, q) = \beta$.

N عملگر غیر خطی و برابر است با

$$N[x, y(x)] = F(x, y(x), y'(x), y''(x)) \quad (4-1-3)$$

$c_0 \neq 0$ پارامتر کنترل همگرایی و $\phi(x, c_0, q)$ جواب (۱-۱-۳) و (۲-۱-۳) است که وابسته به L ، c_0 ، $y_0(x)$ و q می باشد. یک حدس آغازین از جواب دقیق $y(x)$ به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$y_0(x) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}x + \frac{b\alpha - a\beta}{b - a}, \quad (5-1-3)$$

که در شرایط مرزی (۲-۱-۳) صدق می کند. عملگر خطی کمکی L نیز به صورت زیر پیشنهاد می شود:

$$L = \mu_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \mu_1(x) \frac{d}{dx} + \mu_0(x)I, \quad (6-1-3)$$

که در آن $\mu_0(x)$ ، $\mu_1(x)$ و $\mu_2(x)$ توابع حقیقی هستند که مناسب انتخاب می شوند.

معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۳-۱-۳)، وقتی $q = 0$ ، دارای جواب بدیهی $\phi(x, c_0, 0) = y_0(x)$ است و در حالت $q = 1$ با توجه به اینکه $c_0 \neq 0$ با معادله اصلی $N[x, y(x)] = 0$ هم ارز می شود. لذا با

افزایش پارامتر جانشانده q از صفر تا یک تابع $\phi(x, c_0, q)$ از تابع حدس اولیه $y_0(x)$ تا تابع جواب معادله اصلی $y(x)$ را می پیماید. بسط سری توانی تابع $\phi(x, c_0, q)$ را نسبت به q می نویسیم:

$$\phi(x, c_0, q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, c_0) q^m \quad (7-1-3)$$

که در آن

$$y_m(x, c_0) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(x, c_0, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}. \quad (8-1-3)$$

اگر سری توانی تابع $\phi(x, c_0, q)$ در $q=1$ همگرا باشد، به سری جواب هموتوبی از معادله اصلی (3-1-1) می رسیم که به صورت زیر است:

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, c_0). \quad (9-1-3)$$

برای محاسبه جملات سری (3-1-9) بردار زیر را تعریف می کنیم:

$$\bar{y}_m(x, c_0) = (y_0(x, c_0), y_1(x, c_0), \dots, y_{m-1}(x, c_0)).$$

از طرفین معادله دگرذیسی مرتبه صفر، مشتق مرتبه m ام می گیریم و سپس به $m!$ تقسیم کرده و آنگاه حاصل را در $q=0$ حساب می کنیم. آنگاه معادله دگرذیسی مرتبه m را به صورت زیر داریم:

$$L[y_m(x, c_0) - \chi_m y_{m-1}(x, c_0)] = c_0 R_m[\bar{y}_{m-1}(x, c_0), x], \quad (10-1-3)$$

که در آن

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \quad (11-1-3)$$

و

$$R_m[\bar{y}_{m-1}(x, c_0), x] = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[x, \phi(x, c_0, q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0}. \quad (12-1-3)$$

تبصره ۱-۱-۳: بر طبق قضیه (۱-۱-۲)، با در نظر گرفتن $H(x)=1$ ، ثابت کردیم که اگر سری

$$y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, c_0) q^m \quad (۱۳-۱-۳)$$

حاصل از معادلات دگرذیسی مراتب بالا (۱۰-۱-۳) در $q=1$ همگرا باشد، آنگاه این سری باید جواب دقیق معادله اصلی (۱-۱-۳) باشد.

تبصره ۲-۱-۳: قضیه های همگرایی دیگری از روش آنالیز هموتوبی را می توان در مراجع [۴۳-۴۱، ۱۴] یافت. این قضیه ها شرایط لازم برای همگرایی یا واگرایی سری هموتوبی در فضای باناخ با نرم L_2 را بیان می کند.

سری جواب هموتوبی (۹-۱-۳) شامل پارامتر c_0 است و آزادی داریم که c_0 را چنان انتخاب کنیم که سری (۹-۱-۳) همگرا گردد. لیثو [۲۳] برای بدست آوردن c_0 های قابل قبول، تکنیک رسم منحنی های c_0 را پیشنهاد می کند. بدین ترتیب با رسم نمودار کمیت های وابسته نسبت به c_0 می توان ناحیه قابل قبول R_{c_0} را به دست آورد. تکنیک رسم منحنی های c_0 روشی مفید برای یافتن c_0 های مطلوب است ولی هیچ رویکردی برای انتخاب بهترین c_0 ارائه نمی کند. از طرفی ناحیه قابل قبول R_{c_0} با مشاهده و آزمون سعی و خطا به دست می آید و با مرتبه تقریب سری هموتوبی تغییر می کند. لذا نواقص قابل تاملی در خصوص پارامتر c_0 وجود دارد. اکنون این سوالات مطرح می شود :

آیا تکنیک رسم منحنی های c_0 همیشه جواب می دهد؟

از چه کمیت های وابسته و از چه نقاطی می توان برای رسم منحنی های c_0 استفاده کرد؟

آیا می توان پایه های ریاضی و نواقص تکنیک رسم منحنی های c_0 را آدرس داد؟

آیا این امکان هست که بتوان بدون رسم منحنی های c_0 ، ناحیه قابل قبول R_{c_0} را تعیین کرد؟

آیا بهترین پارامتر کنترل همگرایی وجود دارد؟ اگر بله چگونه می توان آن را به دست آورد؟

تعداد جملات تقریب مورد استفاده چه تاثیری در ناحیه قابل قبول R_{c_0} دارد؟

تقریب های مناسب سری هموتوبی، برای رسم منحنی های c_0 چگونه به دست می آیند؟

پاسخ به این سوالات تا حدی دشوار است. در ادامه راهکاری معرفی می کنیم که بر اساس آن می توان تا حدی به سوالات چالش انگیز فوق پاسخ داد.

۲-۳ روش مینیم سازی تابع خطا در نقاط متناظر با نقاط چبیشف

تقریب مرتبه M ام سری جواب هموتوپی زیر را در نظر می گیریم :

$$Y_M(x, c_0) = y_0(x) + \sum_{m=1}^M y_m(x, c_0), \quad (۱-۲-۳)$$

که به پارامتر کنترل همگرایی c_0 نیز وابسته است.

تعریف ۱-۲-۳ : فرض کنید $\psi_M(x, c_0) = N[x, Y_M(x, c_0)]$ تابعی پیوسته روی $[a, b]$ باشد، پارامتر کنترل c_0 قابل قبول است، اگر

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \|\psi_M(x, c_0)\|_2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \|N[x, Y_M(x, c_0)]\|_2 = 0, \quad (۲-۲-۳)$$

که $(\|\cdot\|_2)$ نماد نرم L_2 است.

تعریف ۲-۲-۳ : فرض کنید $\Delta = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b\}$ افرازی از بازه $[a, b]$ باشد، تابع ψ_M به صورت زیر تعریف می شود :

$$\Lambda_M^\Delta(c_0) = \|(\psi_M(x_1, c_0), \dots, \psi_M(x_{n+1}, c_0))\|_2. \quad (۳-۲-۳)$$

تعریف ۳-۲-۳ : پارامتر کنترل همگرایی $\hat{c}_0$ بهینه است، اگر برای هر پارامتر کنترل همگرایی c_0 قابل قبول داشته باشیم :

$$\Lambda_M^\Delta(\hat{c}_0) \leq \Lambda_M^\Delta(c_0). \quad (۴-۲-۳)$$

بنابراین طبق تعریف (۳-۲-۳)، می توان یک مقدار بهینه پارامتر کنترل همگرایی c_0 را با استفاده از مینیم کردن $\Lambda_M^\Delta(c_0)$ ، متناظر با حل یک معادله جبری غیرخطی $\frac{d\Lambda_M^\Delta(c_0)}{dc_0} = 0$ ، برای M به اندازه کافی بزرگ، به دست آورد.

تبصره ۴-۲-۳ : می توان نقاط x_i را با استفاده از تبدیل خطی زیر، متناظر با گره های چبیشف

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad \text{روی بازه } [-1, 1] \text{ انتخاب کرد :}$$

$$x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)t_i + \left(\frac{a+b}{2}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (5-2-3)$$

برتری انتخاب افراز نقاط x_i ، متناظر با گره های چبیشف، در مینیمم بودن خطای درونیابی است.

خطای چند جمله ای درونیاب را یادآوری می کنیم. فرض کنید $f(x)$ روی بازه $[a, b]$ ، $n+1$ با مشتق پذیر و $p_n(x)$ یک چند جمله ای از درجه n و درونیاب تابع $f(x)$ در $n+1$ نقطه گسسته از افراز $\Delta = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b\}$ باشد، آنگاه خطای درونیاب مساوی است با :

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j) \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x))}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [a, b], \quad (6-2-3)$$

که $\xi_n(x) \in (a, b)$. چون تابع $f^{(n+1)}(\xi_n(x))$ مستقل و $\xi_n(x)$ مجهول است بدیهی است که باید x_i هایی را جستجو کنیم که حداکثر $|\prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)|$ حداقل شود. یک انتخاب عمومی نقاط x_i ، نقاط متساوی الفاصله هستند، اما مقدار $|\prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)|$ در نقاط میانی بازه $[a, b]$ کم و نزدیک نقاط انتهایی بازه بزرگ است و تخمین روی کل بازه به اندازه کافی قابل قبول نیست. نقاط چبیشف حداکثر $|\prod_{j=1}^{n+1} (x - x_j)|$ را حداقل می کند.

قضیه ۵-۲-۳: نقاط چبیشف $t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right)$ ، $i = 1, 2, \dots, n+1$ را در بازه $[-1, 1]$ و تبدیل خطی متناظر با این نقاط روی بازه $[a, b]$ به صورت $x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)t_i + \left(\frac{a+b}{2}\right)$ ، $i = 1, 2, \dots, n+1$ ، $(n+1)$ نقطه متساوی الفاصله $y_0, y_1, \dots, y_{n+1} \in [a, b]$ را در نظر بگیرید. داریم :

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_{n-i+2}) \right| \leq \max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=1}^{n+1} (x - y_i) \right|. \quad (7-2-3)$$

اثبات: تابع زیر بازه درونیاب $[a, b]$ را به بازه $[-1, 1]$ تبدیل می کند :

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \left(\frac{a+b}{2}\right), \quad t \in [-1, 1], \quad (8-2-3)$$

و تبدیل معکوس آن به صورت زیر است :

$$t = \left(\frac{2}{b-a}\right)\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right). \quad (9-2-3)$$

با توجه به نقاط متناظر با x_{n-i+2} داریم :

$$x - x_{n-i+2} = x - \left(\frac{b-a}{2}\right)t_i - \left(\frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\left(\frac{2}{b-a}\right)\left(x - \left(\frac{a+b}{2}\right)\right) - t_i\right). \quad (10-2-3)$$

بر طبق (۸-۲-۳) نتیجه می شود :

$$x - x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)(t - t_i). \quad (11-2-3)$$

بنابراین

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_{n-i+2}) \right| = \left| \frac{b-a}{2} \right|^{n+1} \max_{-1 \leq t \leq 1} \left| \prod_{i=1}^{n+1} (t - t_i) \right|. \quad (12-2-3)$$

از طرف دیگر، فرض کنید $Q_{n+1}(t) = \prod_{i=1}^{n+1} (t - t_i)$ تابع چند جمله ای بر حسب t از درجه $n+1$ با ضریب پیشرو یک باشد، که t_i ، $i=1, 2, \dots, n+1$ ، ریشه های $Q_{n+1}(t)$ می باشند. ترفتن $[40]$ ، با توزیع پیوسته متناظر نقاط t_i ثابت کرد :

$$\max_{-1 \leq t \leq 1} |Q_{n+1}(t)| = \max_{-1 \leq t \leq 1} \prod_{i=1}^{n+1} |t - t_i| \cong 2^{-(n+1)}. \quad (13-2-3)$$

بر طبق (۱۲-۲-۳) و (۱۳-۲-۳) نتیجه می شود :

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_{n-i+2}) \right| \cong \left| \frac{b-a}{4} \right|^{n+1}. \quad (14-2-3)$$

فرض کنید $h = \frac{b-a}{n}$ و نقاط متساوی الفاصله زیر را روی بازه $[a, b]$ در نظر بگیرید :

$$y_1 = a, y_{n+1} = b, \quad y_{i+1} - y_i = h, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (15-2-3)$$

داریم :

$$\max_{a \leq x \leq b} \prod_{i=1}^{n+1} |x - y_i| \cong \left| \frac{h}{2} \right| \left| \frac{h}{2} \right| |2h| \dots |nh| = \left| \frac{h^{n+1} n!}{4} \right|. \quad (16-2-3)$$

بنابراین

$$\max_{a \leq x \leq b} \prod_{i=1}^{n+1} |x - y_i| \cong \left| \frac{b-a}{n} \right|^{n+1} \left| \frac{n!}{4} \right|. \quad (17-2-3)$$

بر طبق (۱۴-۲-۳) و (۱۷-۲-۳) رابطه (۷-۲-۳) برقرار است.

تحت شرایط قضیه های زیر یک تقریب از c_0 با روال مینیم سازی نرم تابع خطای $\Lambda_M^\Delta(c_0)$ تعیین می شود.

۳-۳ آنالیز همگرایی روش

در این قسمت برای تحلیل همگرایی روش ارائه شده در بخش (۲-۳)، قضیه های مربوط را بیان و اثبات می شوند.

قضیه ۱-۳-۳: فرض کنیم که سری جواب $\sum_{m=0}^{\infty} y_m(x, c_0)$ و $\sum_{m=1}^{\infty} y'_m(x, c_0)$ و $\sum_{m=1}^{\infty} y''_m(x, c_0)$ همگرا باشند، آنگاه

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m[\vec{y}_m(x, c_0), x] = 0. \quad (۱-۳-۳)$$

اثبات: فرض کنیم که سری جواب $\sum_{m=0}^{\infty} y_m(x, c_0)$ همگرا به $y(x, c_0)$ باشد، بدیهی است

$$\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x, c_0) = 0. \quad (۲-۳-۳)$$

با استفاده از تعاریف (۵-۱-۳) و (۱۱-۱-۳) و همگرایی $\sum_{m=0}^{\infty} y_m(x, c_0)$ و $\sum_{m=1}^{\infty} y'_m(x, c_0)$ و $\sum_{m=1}^{\infty} y''_m(x, c_0)$ داریم:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^M L[y_m(x, c_0) - \chi_m y_{m-1}(x, c_0)] \\ &= L\left(\sum_{m=1}^M [y_m(x, c_0) - \chi_m y_{m-1}(x, c_0)]\right) \\ &= L[y_M(x, c_0)], \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sum_{m=1}^{\infty} L[y_m(x, c_0) - \chi_m y_{m-1}(x, c_0)] = L[\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x, c_0)], \quad (۳-۳-۳)$$

و بر طبق (۲-۳-۳) داریم:

$$L[\lim_{m \rightarrow \infty} y_m(x, c_0)] = 0, \quad (4-3-3)$$

و

$$\sum_{m=1}^{\infty} L[y_m(x, c_0) - \chi_m y_{m-1}(x, c_0)] = 0. \quad (5-3-3)$$

از معادلات (۱۰-۱-۳) و (۵-۳-۳) نتیجه می شود :

$$\sum_{m=1}^{\infty} R_m[\vec{y}_{m-1}(x, c_0), x] = 0. \quad (6-3-3)$$

قضیه ۲-۳-۳: با فرض های قضیه (۱-۳-۳)، اگر سری جواب هموتوپی تعریف شده در (۸-۱-۳) به ازای یک پارامتر کنترل همگرایی غیر صفر c_0 ، به جواب معادله اصلی (۱-۱-۳) با شرایط مرزی (۲-۱-۳) همگرا باشد، آنگاه

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \psi_M(x, c_0) = 0, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (7-3-3)$$

اثبات: بدیهی است، سری ماک لورن تابع $N[x, \phi(x, c_0, q)]$ حول پارامتر جانشانده q عبارت است از

$$N[x, \phi(x, c_0, q)] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[x, \phi(x, c_0, q)]}{\partial q^{m-1}} q^{m-1} \Big|_{q=0}.$$

بر طبق قضیه (۱-۳-۳) و تعریف (۱۲-۱-۳)، $N[x, \phi(x, c_0, 1)] = 0$ ، یا $N[x, y(x, c_0)] = 0$. بنابراین

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \psi_M(x, c_0) = \lim_{M \rightarrow \infty} N[x, Y_M(x, c_0)] = 0.$$

تبصره ۳-۳-۳: بر طبق قضیه (۲-۳-۳) و تعریف (۳-۲-۳) می توان نتیجه گرفت پارامتر کنترل همگرایی c_0 قابل قبول است.

قضیه ۴-۳-۳: با فرض های قضیه (۱-۳-۳) داریم :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b [F(x, Y_M(x, c_0), Y'_M(x, c_0), Y''_M(x, c_0))]^2 dx = 0. \quad (8-3-3)$$

اثبات: بر طبق (۴-۱-۳) و تعریف $\psi_M(x, c_0)$ ، داریم :

$$F(x, Y_M(x, c_0), Y'_M(x, c_0), Y''_M(x, c_0)) = N[x, Y_M(x, c_0)] = \psi_M(x, c_0),$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \int_a^b [F(x, Y_M(x, c_0), Y'_M(x, c_0), Y''_M(x, c_0))]^2 dx \\ &= \int_a^b [N[x, Y_M(x, c_0)]]^2 dx \\ &= \int_a^b [\psi_M(x, c_0)]^2 dx. \end{aligned}$$

با استفاده از (۷-۳-۳)، بدیهی است که

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_M(x, c_0)^2 dx = 0.$$

قضیه ۵-۳-۳: با فرض های قضیه (۱-۳-۳)، اگر Δ یک افراز از بازه $[a, b]$ باشد، داریم:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Lambda_M^\Delta(c_0) = 0. \quad (۹-۳-۳)$$

اثبات: با استفاده از قاعده مستطیلی در انتگرال گیری عددی و انتخاب x_i ها تحت تعریف (۴-۲-۳) داریم:

$$\int_a^b [\psi_M(x, c_0)]^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h_i [\psi_M(x_i, c_0)]^2,$$

که در آن $i = 1, 2, \dots, n$ ، $h_i = x_{i+1} - x_i$ بر طبق قضیه های (۲-۳-۳) و (۳-۱-۳) بدیهی است:

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_M(x, c_0)^2 dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h_i [\psi_M(x_i, c_0)]^2 \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

یا به عبارت دیگر

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \Lambda_M^\Delta(c_0) = 0.$$

۴-۳ الگوریتم روش

معادله غیر خطی (۱-۱-۳) تحت شرایط مرزی (۲-۱-۳) را در نظر بگیرید. با انتخاب فرض آغازین به صورت معادله (۵-۱-۳) و عملگر خطی کمکی بر طبق معادله (۶-۱-۳) و انتخاب افرازی از بازه $[a, b]$ طبق تعریف (۲-۲-۳) و تبصره (۴-۲-۳)، در M امین مرتبه از تقریب سری هموتوبی، می توان یک مقدار

بهینه پارامتر کنترل همگرایی c_0 را با استفاده از مینیم کردن $\Lambda_M^\Delta(c_0)$ ، طبق تعریف (۳-۲-۲)، متناظر با حل یک معادله جبری غیرخطی $\frac{d\Lambda_M^\Delta(c_0)}{dc_0} = 0$ ، برای M به اندازه کافی بزرگ، طبق روال الگوریتم زیر به دست آورد.

$$(۱) \quad F, a, b, \alpha, \beta, n, M, \mu_0, \mu_1, \mu_2 \text{ را بخوان.}$$

(۲) قرار بده:

$$y_0 = \frac{\beta - \alpha}{b - a}x + \frac{b\alpha - \beta\alpha}{b - a},$$

$$L = \mu_2 \frac{d^2}{dx^2} + \mu_1 \frac{d}{dx} + \mu_0,$$

(۳) برای $m = 1, 2, \dots, M$ محاسبه کن :

$$\chi(m) = \begin{cases} 1, & m = 2, 3, 4, \dots, M, \\ 0, & m = 1, \end{cases}$$

(۴) معادله زیر را تشکیل بده:

$$\phi = y_0 + \sum_{i=1}^M y_i q^i.$$

(۵) قرار بده:

$$H(q) = F[x, \phi, \phi', \phi''].$$

(۶) عبارت زیر را محاسبه کن :

$$R_{m-1} = \frac{\partial^{m-1} H(q)}{\partial q^{m-1}} \times \frac{1}{(m-1)!} \Big|_{q=0},$$

(۷) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\mu_2 y_m'' + \mu_1 y_m' + \mu_0 y_m = \chi[m] \mu_2 y_{m-1}'' + \chi[m] \mu_1 y_{m-1}' + \chi[m] \mu_0 y_{m-1} + c_0 R_{m-1}$$

(۸) معادله دیفرانسیل فوق را تحت شرایط مرزی زیر با روش تحلیلی محاسبه کن :

$$y_m(a) = 0, y_m(b) = 0$$

$$(۹) \quad m = m + 1.$$

(۱۰) پایان حلقه (۳).

(۱۱) قرار بده $Y_M = \phi|_{q=1}$.

(۱۲) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ ، محاسبه کن :

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right),$$

$$x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{2}\right)t_i + \left(\frac{a+b}{2}\right),$$

(۱۳) پایان حلقه (۱۲).

(۱۴) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ ، محاسبه کن :

$$v_i = F\left[x_i, Y_M|_{x_i}, Y'_M|_{x_i}, Y''_M|_{x_i}\right].$$

(۱۵) پایان حلقه (۱۴)

(۱۶) معادله زیر را تشکیل بده:

$$\Delta_M = \left(\sum_{i=1}^{n+1} v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(۱۷) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\frac{d\Delta_M}{dc_0} = 0.$$

(۱۸) با حل معادله فوق مقدار c_0 را محاسبه کن.

(۱۹) پایان.

۳-۵ نتایج عددی

در این بخش سه مسأله مقدار مرزی دو نقطه ای غیر خطی را انتخاب کرده و روش ارائه شده (Pro-App) در بخش (۲-۳) را به کار می بریم. نتایج را با تکنیک رسم منحنی های c_0 و روش آنالیز هموتوبی بهینه تک گام (OSO-HAM) بخش (۱-۶-۳) و روش بهینه سازی (OP-HAM) بخش (۱-۶-۱) مقایسه می کنیم. مقادیر خطای مطلق و زمان اجرای الگوریتم (بر حسب ثانیه) هر سه روش در هر مسأله گزارش شده اند. نتایج میزان دقت، سرعت و برتری روش ارائه شده را نشان می دهند.

مثال ۳-۵-۱: مسأله زیر را در نظر بگیرید [۳۶]:

$$\begin{cases} y''(x) = 3y'(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, y(1) = 1, \end{cases} \quad (۱-۵-۳)$$

که دارای جواب دقیق $y(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^3 - 1}$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۳-۱-۳)، پارامترهای معادله هموتویی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

با ویژگی $L[c_1 + c_2 x] = 0$ که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری می باشند، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^2 \phi(x, q, c_0)}{dx^2} - 3 \frac{d\phi(x, q, c_0)}{dx}$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ بر طبق معادله (۳-۱-۵) که در شرایط مرزی (۳-۵-۱) صدق می کند به صورت

$$y_0(x) = x$$

در نظر گرفته می شود.

منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی مرتبه پانزده در شکل (۳-۵-۱) آمده است که با توجه به آن بازه $-0.36 < c_0 < -1.26$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول عبارت است از $c_0 = -0.809995$. با روش ارائه شده در بخش (۳-۲) مقدار c_0 قابل قبول برابر است با $c_0 = -0.810235$.

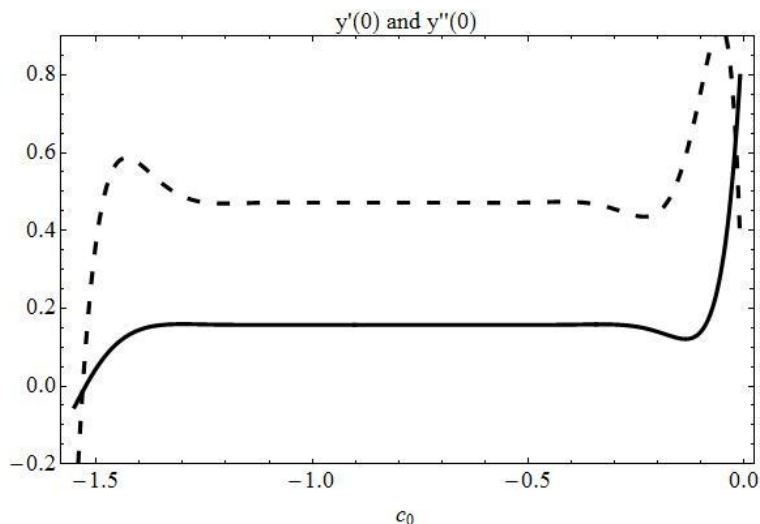
مقادیر خطای مطلق و زمان اجرای الگوریتم (بر حسب ثانیه) روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی و روش ارائه شده، به ترتیب در جدول (۳-۵-۱) و (۳-۵-۲) گزارش شده اند. مقایسه زمان اجرای الگوریتم هر سه روش در تقریب مرتبه $M = 1, \dots, 15$ ، در شکل (۳-۵-۲) آمده است.

جدول ۳-۵-۱: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ۱۵ به دست آمده با روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی در $c_0 = -0.809995$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.810235$ مثال (۳-۵-۱).

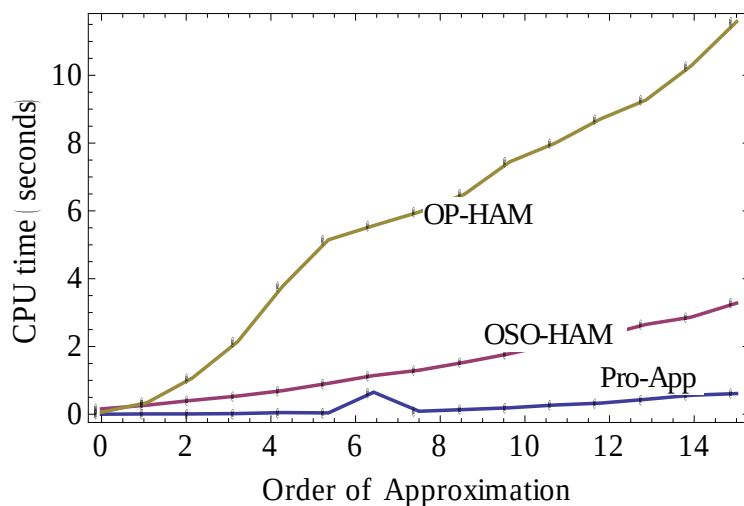
	OSO – HAM	OP – HAM ($c_0 = -0.809995$)	Pro-App ($c_0 = -0.810235$)
x	$ y(x) - Y_{15}(x) $	$ y(x) - Y_{15}(x) $	$ y(x) - Y_{15}(x) $
0	0	0	0
0.0244717	7.80392e-05	6.77274e-08	6.78432e-08
0.0954915	3.44998e-04	2.42596e-07	2.43567e-07
0.206107	9.01907e-04	3.90064e-07	3.93504e-07
0.345492	1.89752e-03	2.83356e-07	2.90207e-07
0.5	3.39123e-03	1.08760e-07	1.00468e-07
0.654508	5.01017e-03	4.53217e-07	4.47095e-07
0.793893	5.67432e-03	4.68806e-07	4.66208e-07
0.904508	4.28205e-03	2.61429e-07	2.60940e-07
0.975528	1.48929e-03	6.89578e-08	6.89536e-08
1	2.55872e-17	4.73296e-11	7.37538e-11

جدول ۳-۵-۲: مقایسه زمان اجرای الگوریتم بر حسب ثانیه در تقریب مرتبه M ، $M=1, \dots$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۱).

M	OSO – HAM	OP – HAM	Pro-App
1	0.187	0.215	0.004
2	0.29	0.36	0.032
3	0.42	1.1	0.011
4	0.56	2.158	0.044
5	0.746	3.851	0.028
6	0.933	5.098	0.045
7	1.142	5.589	0.06
8	1.356	6.003	0.102
9	1.576	6.536	0.133
10	1.831	7.179	0.193
11	2.09	8.022	0.283
12	2.43	8.824	0.346
13	2.9	9.332	0.452
14	2.97	10.17	0.525
15	3.745	11.903	0.657



شکل ۳-۵-۱: منحنی های C_0 نظیر تقریب مرتبه ۱۵ داده شده توسط (۳-۵-۱). خط تیره $y'(0)$ و خط چین $y''(0)$.



شکل ۳-۵-۲: مقایسه زمان اجرای الگوریتم در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 15$ ، در روش آنالیز هموتوبی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۱).

مثال ۳-۵-۲: مسأله زیر را در نظر بگیرید [۱۶]:

$$\begin{cases} y''(x) = y(x)^3 - y(x)y'(x), & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = \frac{1}{2}, y(2) = \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (3-5-2)$$

با در نظر گرفتن معادله (۳-۱-۳)، پارامترهای معادله هموتوبی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^2}{dx^2}$ با ویژگی $L[c_1 + c_2x] = 0$ که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری می باشند ، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^2\phi(x, q, c_0)}{dx^2} - \phi(x, q, c_0)^3 + \phi(x, q, c_0) \frac{d\phi(x, q, c_0)}{dx}.$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ بر طبق معادله $(3-1-5)$ که در شرایط مرزی $(3-5-1)$ صدق می کند به صورت $y_0(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$ در نظر گرفته می شود.

منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی مرتبه پانزده در شکل $(3-5-3)$ آمده است که با توجه به آن بازه $-0.3 < c_0 < -1.7$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول عبارت است از $c_0 = -0.998164$. با روش ارائه شده در بخش $(3-2)$ مقدار c_0 قابل قبول برابر است با $c_0 = -0.999999$.

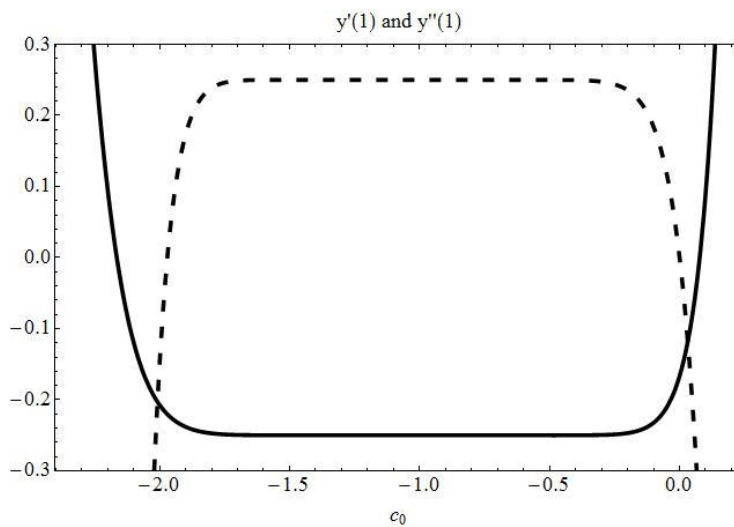
مقادیر خطای مطلق و زمان اجرای الگوریتم (بر حسب ثانیه) روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی و روش ارائه شده ، به ترتیب در جدول $(3-5-3)$ و $(3-5-4)$ گزارش شده اند. مقایسه زمان اجرای الگوریتم هر سه روش در تقریب مرتبه M ، $M = 1, \dots, 15$ ، در شکل $(3-5-4)$ آمده است.

جدول $3-5-3$: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ۱۵ به دست آمده با روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی در $c_0 = -0.998164$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.999999$ در مثال $(3-5-2)$.

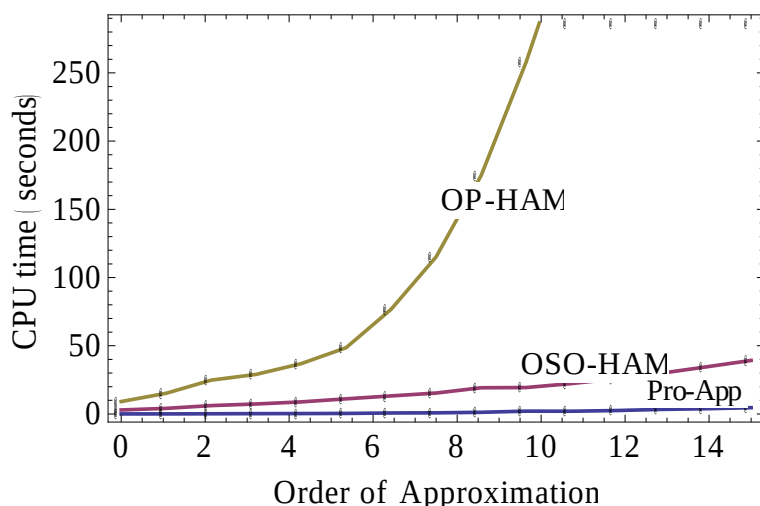
	OSO – HAM	OP – HAM ($c_0 = -0.998164$)	Pro-App ($c_0 = -0.999999$)
x	$ y(x) - Y_8(x) $	$ y(x) - Y_{15}(x) $	$ y(x) - Y_{15}(x) $
1	1.81900e-02	2.01500e-12	2.11497e-13
1.02447	1.82905e-02	2.36053e-12	1.26232e-13
1.09549	1.84276e-02	3.81667e-12	3.87301e-13
1.20611	1.82710e-02	7.81147e-12	2.33893e-12
1.34549	1.76182e-02	1.91631e-11	1.02602e-11
1.5	1.65207e-02	5.09198e-11	3.61415e-11
1.65451	1.52037e-02	1.27721e-10	1.23422e-10
1.79389	1.39263e-02	3.53616e-10	3.46448e-10
1.90451	1.28930e-02	5.69251e-10	7.78230e-10
1.97553	1.22310e-02	8.42223e-10	1.12391e-09
2	1.20042e-02	8.65874e-10	1.30511e-09

جدول ۳-۵-۴: مقایسه زمان اجرای الگوریتم بر حسب ثانیه در تقریب مرتبه $M=1, \dots, M$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۲).

M	OSO – HAM	OP – HAM	Pro-App
1	2.907	8.608	0.011
2	4.134	14.674	0.03
3	6.591	29.126	0.098
4	7.533	29.032	0.207
5	9.366	36.817	0.27
6	11.073	52.677	0.425
7	12.668	71.246	0.588
8	14.635	109.299	0.836
9	16.818	165.624	1.13
10	20.253	242.016	1.524
11	22.49	369.403	2.352
12	28.782	563.434	2.529
13	30.363	759.659	3.444
14	42.431	1140.796	3.962
15	38.29	1403.092	4.929



شکل ۳-۵-۳: منحنی های C_0 نظیر تقریب مرتبه ۱۵ داده شده توسط (۳-۵-۲). خط تیره $y'(1)$ و خط چین $y''(1)$.



شکل ۳-۵-۴: مقایسه زمان اجرای الگوریتم در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 15$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۲).

مثال ۳-۵-۳: مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y''(x) - y(x)y'(x)^2 + 9x^7 - 6x = 0, & -1 \leq x \leq 1, \\ y(-1) = -1, y(1) = 1, \end{cases} \quad (3-5-3)$$

که دارای جواب دقیق $y(x) = x^3$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۳-۱-۳)، پارامترهای معادله هموتویی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^2}{dx^2}$ با ویژگی $L[c_1 + c_2x] = 0$ که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری می باشند، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^2 \phi(x, q, c_0)}{dx^2} + \phi(x, q, c_0) \left(\frac{d\phi(x, q, c_0)}{dx} \right)^2 + 9x^7 - 6x.$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ بر طبق معادله (۳-۱-۵) که در شرایط مرزی (۳-۵-۱) صدق می کند به صورت $y_0(x) = x$ در نظر گرفته می شود.

منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی مرتبه پانزده در شکل (۳-۵-۵) آمده است که با توجه به آن بازه $-1.2 < c_0 < -0.4$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول عبارت است از $c_0 = -0.880401$. با روش ارائه شده در بخش (۳-۲) مقدار c_0 قابل قبول برابر است با $c_0 = -0.887655$. مقادیر خطای مطلق و زمان اجرای الگوریتم (بر حسب ثانیه) برای روش

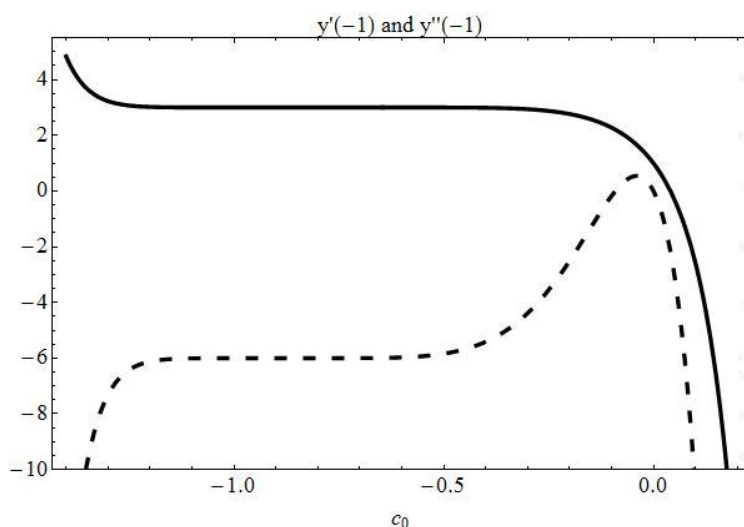
آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی و روش ارائه شده به ترتیب در جدول (۳-۵-۵) و (۳-۵-۶) گزارش شده اند. مقایسه زمان اجرای الگوریتم هر سه روش در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 15$ ، در شکل (۳-۵-۶) آمده است.

جدول ۳-۵-۵: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ۱۵ به دست آمده با روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام و روش بهینه سازی در $c_0 = -0.880401$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.887655$ مثال (۳-۵-۳).

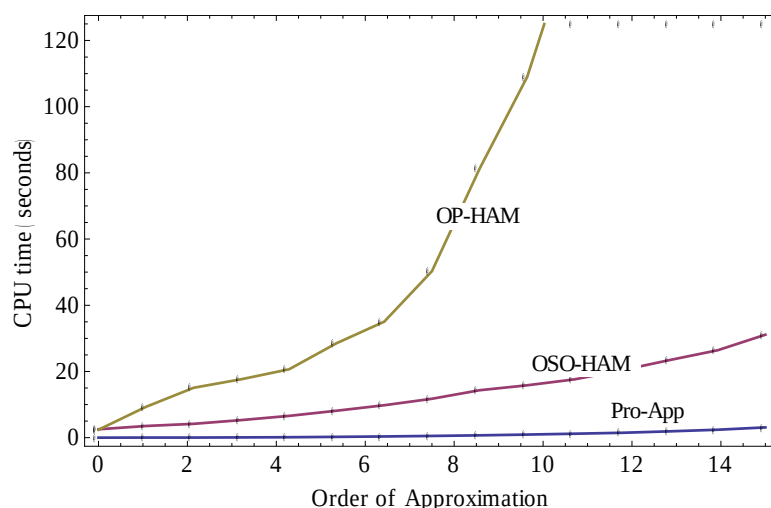
	OSO – HAM	OP – HAM ($c_0 = -0.880401$)	Pro-App ($c_0 = -0.887655$)
x	$ y(x) - Y_{15}(x) $	$ y(x) - Y_{15}(x) $	$ y(x) - Y_{15}(x) $
-1	1.06165e-15	2.23218e-10	2.48833e-10
-0.951057	3.17918e-03	2.85475e-07	3.04375e-07
-0.809017	7.71413e-03	5.31398e-07	4.76571e-07
-0.587785	9.61701e-03	5.00837e-07	4.72182e-07
-0.309017	6.92160e-03	4.12458e-07	4.07069e-07
0	0	0	0
0.309017	6.92160e-03	4.12458e-07	4.07069e-07
0.587785	9.61701e-03	5.00837e-07	4.72182e-07
0.809017	7.71413e-03	5.31398e-07	4.76571e-07
0.951057	3.17918e-03	2.85475e-07	3.04375e-07
1	1.06165e-15	2.23218e-10	2.48833e-10

جدول ۳-۵-۶: مقایسه زمان اجرای الگوریتم بر حسب ثانیه در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 15$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۳).

M	OSO – HAM	OP – HAM	Pro-App
1	2.52	2.41	0.01
2	3.529	9.338	0.04
3	4.17	15.082	0.03
4	5.3	17.56	0.09
5	6.562	20.65	0.14
6	8.14	28.55	0.24
7	9.8	35.04	0.36
8	11.742	50.288	0.51
9	14.33	81.27	0.69
10	15.812	108.972	0.93
11	17.63	153.43	1.18
12	20.406	228.463	1.48
13	23.466	329.04	1.90
14	26.416	460.202	2.402
15	31.102	669.867	3.084



شکل ۳-۵-۵: منحنی های C_0 نظیر تقریب مرتبه ۱۵ داده شده توسط (۳-۵-۳). خط تیره $y'(-1)$ و خط چین $y''(-1)$.



شکل ۳-۵-۶: مقایسه زمان اجرای الگوریتم در تقریب مرتبه $M=1, \dots, 15$ ، در روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام، روش بهینه سازی و روش ارائه شده برای مثال (۳-۵-۳).

۳-۶ نتیجه گیری

در انتهای بخش (۱-۳) سوالات قابل تأملی در خصوص پارامتر کنترل همگرایی C_0 و تکنیک رسم منحنی های C_0 مطرح شد. سری جواب هموتویی (۳-۱-۹) شامل پارامتر C_0 است و آزادی داریم که C_0 را چنان انتخاب کنیم که سری (۳-۱-۹) همگرا گردد. اگر سری جواب حاصل از روش آنالیز هموتویی، که به پارامتر C_0 وابسته است، به جواب معادله همگرا باشد همگرایی تمام کمیت های وابسته، که دارای تعبیر

فیزیکی بامعنا باشند، را نتیجه می دهد. بدین ترتیب با رسم نمودار این کمیت ها نسبت به C_0 می توان ناحیه قابل قبول R_{c_0} را به دست آورد. هر چند تکنیک رسم منحنی های C_0 بتواند بازه قابل قبول R_{c_0} را تعیین کند، ولی برای یافتن مقادیری از C_0 که همگرایی را برای مقادیر متغیرها تضمین کند نیاز به محاسبات جانبی دیگری نیز داریم. از طرفی ناحیه قابل قبول R_{c_0} با مشاهده و آزمون سعی و خطا به دست می آید و با مرتبه تقریب سری هموتویی تغییر می کند به عبارت دیگر، بازه قابل قبول R_{c_0} ، با افزایش جملات تقریب کوچکتر می شود. لذا تکنیک رسم منحنی های C_0 ، در هر مرتبه از تقریب، بازه قابل قبول R_{c_0} یکسانی به دست نمی دهد. با ایده مطرح شده در بخش (۳-۲)، یک مقدار مطلوب از C_0 با روند مینیمم سازی نرم تابع خطا تعیین می شود.

فصل چهارم

کاربرد تقریب هموتویی-پاده برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی

یک موضوع مهم در همگرایی سری جواب هموتویی، انتخاب مناسب پارامتر کنترل همگرایی است. در این فصل یک روش جدید بر اساس روش هموتویی-پاده، در پیش بینی مقادیر پارامتر های کنترل همگرایی پیشنهاد شده است. با استفاده از این روش، حداقل یک پارامتر کنترل همگرایی c_0 مطلوب برای داشتن سری جواب هموتویی با همگرایی سریع، به دست می آید. کارایی روش در حل معادلات دیفرانسیل غیر خطی مرتبه n ام با شرایط اولیه یا مرزی دو نقطه ای نشان داده می شود. نتایج به دست آمده با تکنیک منحنی های c_0 و روش بهینه سازی مقایسه می شود، نتایج نشان می دهد روش پیشنهادی می تواند بر بهبود سرعت همگرایی سری جواب هموتویی تاثیر گذارد.

۴-۱ نگاه اجمالی به روش هموتویی-پاده

معادله دیفرانسیل غیر خطی زیر را در حالت کلی در نظر بگیرید:

$$N(x, y(x)) = 0, \quad (4-1-1)$$

که در آن x متغیر مستقل و $y(x)$ تابع مجهول است. فرض بر این است که معادله اصلی جواب منحصر به فرد دارد. لیانو با انتخاب یک حدس اولیه مناسب $y_0(x)$ و عملگر خطی کمکی مناسب L و با استفاده از $q \in [0, 1]$ به عنوان پارامتر جانشانده، معادله دگرذیسی مرتبه صفرم را به صورت زیر ارائه داد :

$$(1-q)L[\phi(x, c_0, q) - y_0(x)] = qc_0N[x, \phi(x, c_0, q)], \quad (4-1-2)$$

که $c_0 \neq 0$ پارامتر کنترل همگرایی و $\varphi(x, c_0, q)$ جواب (۲-۱-۴) است که وابسته به L ، c_0 و $y_0(x)$ و q می باشد. با فرض این که حدس اولیه $y_0(x)$ ، عملگر خطی کمکی L ، و پارامتر کنترل همگرایی c_0 به درستی انتخاب شده اند، آنگاه سری تیلور

$$\varphi(x, c_0, q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, c_0) q^m, \quad (۳-۱-۴)$$

که

$$y_m(x, c_0) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \varphi(x, c_0, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \quad (۴-۱-۴)$$

در $q=1$ همگراست و سری جواب هموتویی به صورت زیر به دست می آید :

$$y(x, c_0) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, c_0). \quad (۵-۱-۴)$$

بردار زیر را تعریف می کنیم:

$$\vec{y}_m(x, c_0) = (y_0(x, c_0), y_1(x, c_0), \dots, y_{m-1}(x, c_0)),$$

با جایگزینی سری (۳-۱-۴) در معادله دگرذیسی مرتبه صفرم (۲-۱-۴) و پس از آن برابر قرار دادن ضرایب توان های یکسان پارامتر جانشانده q ، معادله دگرذیسی مرتبه m را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$L[y_m(x, c_0) - \chi_m y_{m-1}(x, c_0)] = c_0 R_m[\vec{y}_{m-1}(x, c_0), x], \quad (۶-۱-۴)$$

که در آن

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1, \end{cases} \quad (۷-۱-۴)$$

و

$$R_m[\vec{y}_{m-1}(x, c_0), x] = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[x, \phi(x, c_0, q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0}. \quad (۸-۱-۴)$$

تقریب مرتبه M ام سری هموتویی زیر را در نظر می گیریم :

$$Y_M(x, c_0) = y_0(x) + \sum_{m=1}^M y_m(x, c_0), \quad (9-1-4)$$

که به پارامتر کنترل همگرایی c_0 نیز وابسته است.

تبصره ۴-۱-۱: بر طبق قضیه (۱-۱-۲)، با در نظر گرفتن $H(x)=1$ ، ثابت کردیم که اگر سری

$$y_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} y_m(x, c_0) q^m \quad (10-1-4)$$

حاصل از معادلات دگرذیسی مراتب m ام (۶-۱-۴) تحت تعاریف (۷-۱-۴) و (۸-۱-۴) در $q=1$ همگرا باشد، آنگاه این سری باید جواب دقیق معادله اصلی (۱-۱-۴) باشد.

همانطور که در فصل اول بیان شد، تکنیک هموتوپی - پاده قطری اغلب مستقل از پارامتر کنترل همگرایی c_0 است و آن را می توان برای تسریع همگرایی سریهای وابسته به سری جواب هموتوپی به کار برد.

۴-۲ شرح روش

پارامتر کنترل همگرایی c_0 ، یک راه ساده برای تنظیم یا کنترل ناحیه همگرایی و نرخ همگرایی تقریب داده شده از طریق روش آنالیز هموتوپی را فراهم می کند. در بسیاری از موارد، ناحیه همگرایی را می توان تا حد زیادی با روش هموتوپی - پاده توسعه داد. برای توضیح روش پیشنهادی، روش آنالیز هموتوپی را در یک رده از معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام به صورت زیر به کار می بریم:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad (1-2-4)$$

با توجه به شرایط اولیه یا مرزی داده شده، که در آن F یک تابع پیوسته حقیقی خطی یا غیر خطی است، در M امین مرتبه از تقریب، سری (۳-۱-۴) به صورت زیر است:

$$\varphi_M(x, c_0, q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^M y_m(x, c_0) q^m. \quad (2-2-4)$$

M امین مرتبه از تقریب سری جواب هموتوپی به صورت $Y_M(x, c_0) = \varphi_M(x, c_0, q)|_{q=1}$ است.

تقریب پاده $[r, r]$ ، $2r = M$ ، را برای سری زیر به کار می بریم:

$$\frac{\partial^n \varphi_M(x, c_0, q)}{\partial x^n} \Big|_{x=a} = y_0^{(n)}(a) + \sum_{m=1}^M y_m^{(n)}(a, c_0) q^m, \quad (3-2-4)$$

نتیجه می شود :

$$\frac{\partial^n \varphi_M(x, c_0, q)}{\partial x^n} \Big|_{x=a} = \frac{\sum_{k=0}^r W_k q^k}{1 + \sum_{k=1}^r W_{r+k} q^k}, \quad (4-2-4)$$

که در آن W_k ، $k = 0, 1, \dots, 2r$ ، طبق رابطه (3-10-1) توسط مولفه های $y_j^{(n)}(a, c_0)$ ، $j = 0, 1, 2, \dots, 2r$ ، تعیین می شوند. با جایگذاری $q = 1$ در رابطه آخر داریم :

$$\frac{\partial^n \varphi_M(x, c_0, 1)}{\partial x^n} \Big|_{x=a} = \frac{\sum_{k=0}^r W_k}{1 + \sum_{k=1}^r W_{r+k}}, \quad (5-2-4)$$

که نتیجه می دهد :

$$Y_M^{(n)}(a, c_0) = \frac{\sum_{k=0}^r W_k}{1 + \sum_{k=1}^r W_{r+k}}. \quad (6-2-4)$$

لیانو [5, 7] اشاره کرد که مقدار $\frac{\sum_{k=0}^r W_k}{1 + \sum_{k=1}^r W_{r+k}}$ یک عدد اسکالر است، و $Y_M^{(n)}(a, c_0)$ وابسته به پارامتر کنترل همگرایی c_0 است.

تبصره 4-2-1: در صورتی که $Y_M^{(n)}(a, c_0)$ مستقل از پارامتر کنترل همگرایی c_0 باشد، می توانیم به جای آن از $Y_M^{(n+1)}(a, c_0)$ یا $Y_M^{(n+2)}(a, c_0)$ و... استفاده کنیم.

به منظور تعیین مقدار مطلوب برای پارامتر کنترل همگرایی c_0 در M امین مرتبه از تقریب سری جواب هموتوبی، تابعی از c_0 زیر را تعریف می کنیم :

$$P_M(c_0) = Y_M^{(n)}(a, c_0) - \frac{\sum_{k=0}^r W_k}{1 + \sum_{k=1}^r W_{r+k}}. \quad (7-2-4)$$

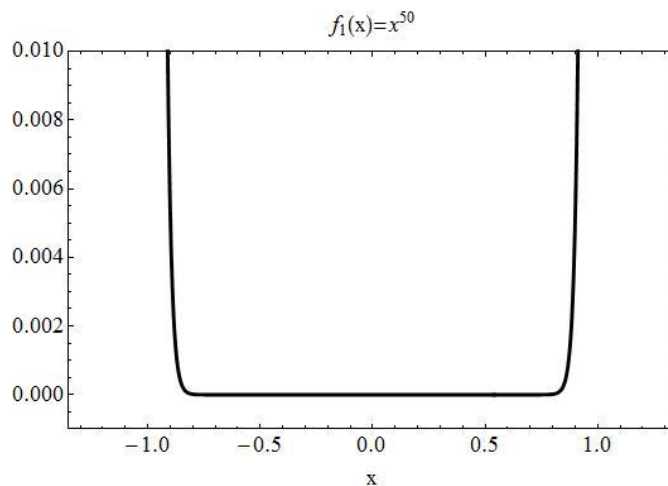
اکنون به پیدا کردن ریشه (جواب) های $P_M(c_0) = 0$ می پردازیم.

تبصره ۴-۲-۲: توجه داشته باشید که ممکن است $P_M(c_0)$ یک چند جمله ای از درجه M باشد. در این صورت دارای دقیقاً M ریشه $c_{0,i}$ است، حقیقی یا مختلط، که با چندگانگی هایش محاسبه می شود. یا ممکن است $P_M(c_0)$ یک تابع متعالی باشد.

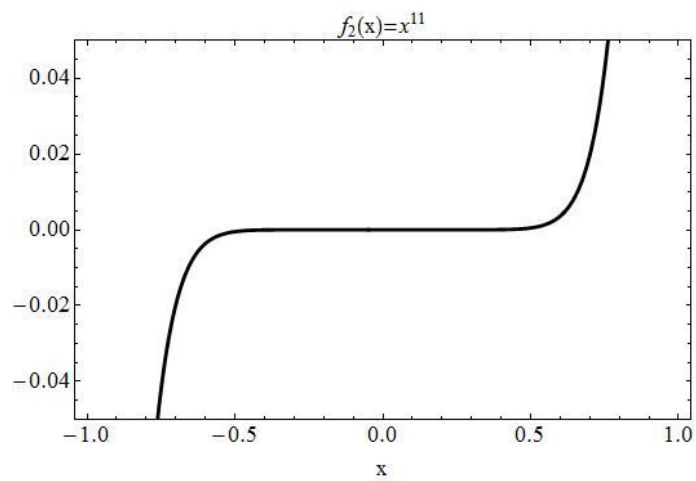
در هر حالت، با استفاده از یک روش مناسب می توان ریشه های معادله $P_M(c_0) = 0$ را محاسبه کرد.

تبصره ۴-۲-۳: همانطور که می دانید، اگر $f(x)$ دارای یک صفر با چندگانگی بیشتر از یک باشد، آنگاه نمودار آن در همسایگی این صفر نسبت به محور x ها تقریباً مماس است، به عبارت دیگر، شیب تقریباً صفر وجود دارد. در این حالت نمودار این تابع در یک همسایگی کوچک از این صفر، تقریباً یک خط افقی است.

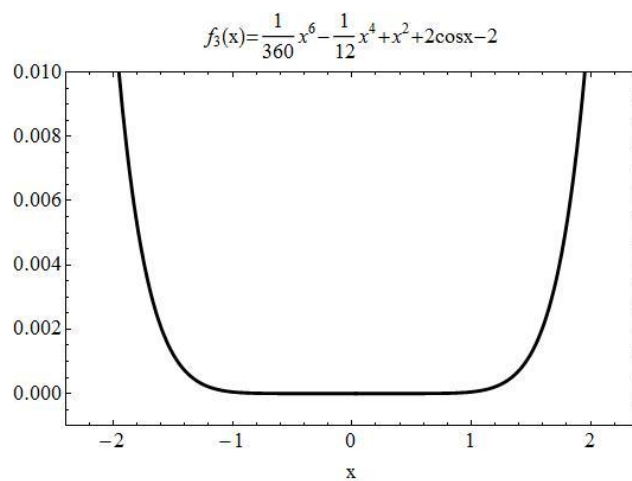
به عنوان مثال، $x = 0$ یک صفر از توابع $f_1(x) = x^{50}$ ، $f_2(x) = x^{11}$ ، $f_3(x) = \frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{12}x^4 + x^2 + 2\cos x - 2$ و $f_4(x) = x^3 + 6\sin x - 6x$ ، با چندگانگی، به ترتیب، 50، 11، 8 و 5 است. نمودار توابع f_i ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، در شکل های (۴-۲-۱) تا (۴-۲-۴) رسم شده اند. همانطور که مشاهده می شود، هر یک از نمودارها در یک همسایگی از $x = 0$ شامل یک خط افقی هستند.



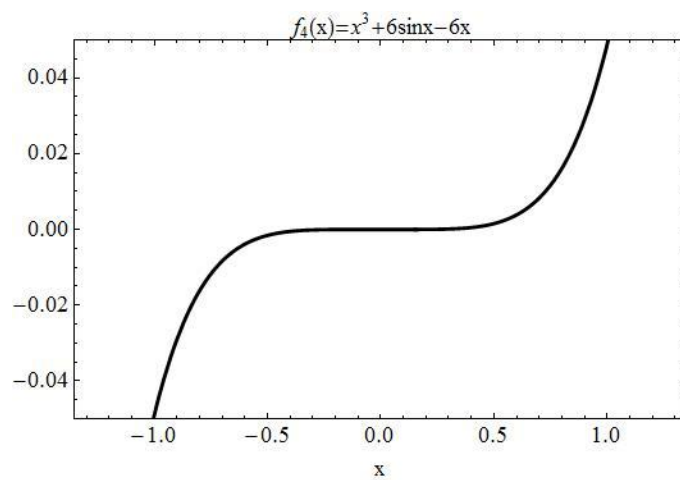
شکل ۴-۲-۱: نمودار $f_1(x) = x^{50}$



شکل ۴-۲-۲: نمودار $f_2(x) = x^{11}$



شکل ۴-۲-۳: نمودار $f_3(x) = \frac{1}{360}x^6 - \frac{1}{12}x^4 + x^2 + 2\cos x - 2$



شکل ۴-۲-۴: نمودار $f_4(x) = x^3 + 6\sin x - 6x$

در واقع، طبق تبصره (۳-۲-۴) و روند تکنیک منحنی های c_0 ، ممکن است بتوان مقدار مطلوب پارامتر کنترل همگرایی c_0 را پیش بینی کرد. فرض کنید که c_{0_i} بیانگر i امین صفر از $P_M(c_0)$ و m_i ($m_i \geq 2$) چندگانگی آن باشد. واضح است که در نمودار $P_M(c_0)$ نسبت به c_0 ، در یک همسایگی کوچک یک خط تقریباً افقی رخ می دهد. هرچه چندگانگی صفر بزرگتر شود این خط افقی نیز گسترده تر می شود.

بنابراین ما به دنبال پیدا کردن تمام ریشه های $P_M(c_0) = 0$ می باشیم. روش پیشنهادی برتری قابل توجهی نسبت به روند متعارف تکنیک منحنی های c_0 دارد که از آن جمله انعطاف پذیری، همگرایی و توانایی پیش بینی مقدار مطلوب پارامتر کنترل همگرایی c_0 را در M امین مرتبه از تقریب سری جواب هموتویی دارد، حتی اگر مرتبه تقریب بزرگ باشد.

فرض کنید که c_{0_i} با چندگانگی m_i ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، صفرهای $P_M(c_0)$ در M امین مرتبه از تقریب سری جواب هموتویی باشد. می توان مقدار بهینه پارامتر کنترل همگرایی c_0 را به صورت زیر پیش بینی کرد :

$$c_{0_{optimal}} = c_{0_i}, \quad m_i = \max\{m_1, m_2, \dots, m_r\}. \quad (۸-۲-۴)$$

هنگامی که همه ریشه ها ساده باشند و یا ریشه چندگانگی یکسان وجود داشته باشد، پیشنهاد می شود از دستورالعمل زیر استفاده شود :

قرار دهید $\Delta = \{a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b\}$ و $\psi_M(x, c_{0_i}) = N[x, y_M(x, c_{0_i})]$ یک افراز از بازه $[a, b]$ باشد، برای n به اندازه کافی بزرگ نرم تابع گسسته مانده ψ_M با رابطه زیر داده می شود :

$$\Lambda_M^\Delta(c_0) = \|(\psi_M(x_1, c_0), \dots, \psi_M(x_{n+1}, c_0))\|_2. \quad (۹-۲-۴)$$

بنابراین، می توان مقدار بهینه پارامتر کنترل همگرایی c_0 را به صورت زیر پیش بینی کرد :

$$c_{0_{optimal}} = \{c_{0_i} \mid \Lambda_M^\Delta(c_{0_i}) = \min\{\Lambda_M^\Delta(c_{0_j}), j = 1, 2, \dots, M\}\}. \quad (۱۰-۲-۴)$$

۳-۴ الگوریتم روش

معادله غیر خطی (۱-۲-۴) تحت شرایط اولیه یا مرزی مشخص را در نظر بگیرید. فرض کنیم حدس آغازین $y_0(x)$ و عملگر خطی کمکی L به طور مناسب انتخاب شده اند. در M امین مرتبه از تقریب سری هموتویی، طبق تعریف (۷-۲-۴) می توان حد اقل یک مقدار پارامتر کنترل همگرایی c_0 مطلوب را با یافتن ریشه های تابع $P_M(c_0)$ طبق روال الگوریتم زیر به دست آورد.

(۱) F, M, a, n, y_0, L را بخوان.

(۲) برای $m = 1, 2, \dots, M$ محاسبه کن:

$$\chi(m) = \begin{cases} 1, & m = 2, 3, 4, \dots, M, \\ 0, & i = 1, \end{cases}$$

(۳) معادله زیر را تشکیل بده:

$$\phi = y_0 + \sum_{i=1}^M y_i q^i.$$

(۴) قرار بده:

$$H(q) = F[x, \phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}].$$

(۵) عبارت زیر را محاسبه کن:

$$R_{m-1} = \frac{\partial^{m-1} H(q)}{\partial q^{m-1}} \times \frac{1}{(m-1)!} \Big|_{q=0}.$$

(۶) معادله زیر را تشکیل بده:

$$L[y_m] = \chi(m)L[y_{m-1}] + c_0 R_{m-1},$$

(۷) جواب معادله دیفرانسیل فوق را تحت شرایط داده شده به صورت تحلیلی محاسبه کن.

(۸) $m = m+1$.

(۹) پایان حلقه (۲).

$$(۱۰) \text{ قرار بده } \varphi_M^{(n)} = \frac{\partial^n \phi}{\partial x^n} \Big|_{x=a}.$$

(۱۱) قرار بده عدد α را مساوی با تقریب پاده $\left[\frac{M}{2}, \frac{M}{2}\right]$ ، نسبت به پارامتر جانشانده q و

سپس قرار بده $q=1$.

$$(۱۲) \text{ قرار بده } Y_M^{(n)} = \varphi_M^{(n)} \Big|_{q=1}.$$

(۱۳) معادله زیر را تشکیل بده:

$$P_M = Y_M^{(n)} - \alpha.$$

(۱۴) ریشه های معادله فوق را محاسبه کن.

(۱۵) پایان

۴-۴ نتایج عددی

در این بخش، برای اعتبار بخشی روش ارائه شده (Pro-App) در بخش (۲-۴) چندین مسئله غیر خطی اولیه و مقدار مرزی بررسی می شود. نتایج تجربی پتانسیل ها و محدودیت های روش جدید را نشان می دهد و حاکی از لزوم انجام کارهای پژوهشی بیشتر در آینده است. این روش به طور قابل توجهی عملکرد همگرایی سری جواب را در مقایسه با روش های متعارف بر اساس روش آنالیز هموتوپی نظیر روش بهینه سازی (OP-HAM) در بخش (۱-۶-۱) بهبود می دهد.

مثال ۴-۴-۱: معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۱]:

$$\begin{cases} (1+y(x))y'(x) + y(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (۱-۴-۴)$$

که دارای جواب دقیق $\ln(y(x)) + y(x) = 1 - x$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۲-۱-۴)، پارامترهای معادله هموتوپی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d}{dx}$ با ویژگی $L[c_1] = 0$ که در آن ثابت انتگرال گیری است، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = (1 + \phi(x, q, c_0)) \frac{d\phi(x, q, c_0)}{dx} + \phi(x, q, c_0)$$

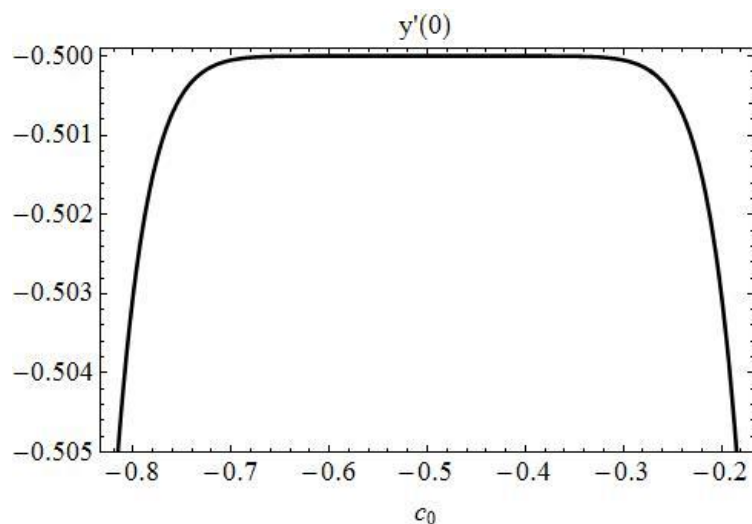
و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ که در شرایط مرزی (۱-۴-۴) صدق می کند به صورت $y_0(x) = e^{-x}$ در نظر گرفته می شود. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوپی مرتبه ده در شکل (۱-۴-۴) آمده است که با توجه به آن بازه $-0.7 < c_0 < -0.3$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. تقریب هموتوپی - پاده $[r, r]$ ، $r = 1, 2, \dots, 5$ ، نتیجه می دهد $y'(0) = -0.5$. صفر های $P_M(c_0)$ مقادیر مناسب c_{0i} را $c_{0i} = -0.5$ با چندگانگی $m_i = 2r$ نتیجه می دهد. بنابراین بر اساس (۸-۲-۴)، $c_{0_{optimal}} = -0.5$ نتیجه می شود. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول عبارت است از $c_0 = -0.553393$. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوپی M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ در شکل (۲-۴-۴) آمده است. مقادیر خطای مطلق روش بهینه سازی و روش ارائه شده، در جدول (۱-۴-۴) و مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول c_0 در جدول (۲-۴-۴) گزارش شده اند.

جدول ۴-۱: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0 = -0.553393$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.5$ در مثال (۴-۱).

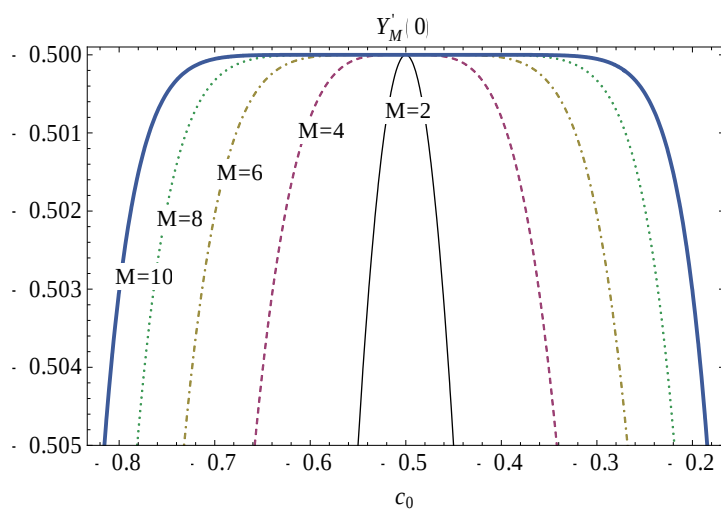
	OP-HAM ($c_0 = -0.553393$)	Pro-App ($c_0 = -0.5$)
x	$ y(x) - Y_{10}(x) $	$ y(x) - Y_{10}(x) $
0	2.44249e-15	0
0.1	1.25626e-09	1.01315e-10
0.2	2.01210e-08	1.85766e-09
0.3	3.54163e-08	3.14688e-08
0.4	3.50424e-07	1.28972e-07
0.5	1.02858e-06	2.89626e-07
0.6	2.08927e-06	4.27769e-07
0.7	3.49214e-06	3.76264e-07
0.8	5.09641e-06	1.01584e-07
0.9	6.58434e-06	1.29314e-06
1	7.38889e-06	3.50442e-06

جدول ۴-۲: مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول c_0 در مثال (۴-۱).

c_0	$\Lambda_{10}(c_0)$
-0.7	4.66680e-04
-0.68	1.13760e-04
-0.66	4.17227e-05
-0.64	1.02550e-04
-0.62	9.61047e-05
-0.6	5.98530e-05
-0.58	2.08016e-05
-0.56	7.05974e-06
-0.54	1.66914e-05
-0.52	1.31910e-05
-0.5	3.79336e-06
-0.48	5.90464e-06
-0.46	8.24275e-06
-0.44	4.18434e-06
-0.42	5.58856e-06
-0.4	1.08331e-05
-0.38	8.83934e-06
-0.36	1.12720e-05
-0.34	2.97630e-05
-0.32	4.23748e-05
-0.3	4.18470e-05



شکل ۱-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y'(0)$ در مثال (۱-۴-۴).



شکل ۲-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y'_M(0)$ در مثال (۱-۴-۴).

مثال ۲-۴-۴: معادله دیفرانسیل مرتبه اول غیر خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} xy(x) - y(x)^2 y'(x) = \frac{1+x^2}{x^4}, & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = 2, \end{cases} \quad (۲-۴-۴)$$

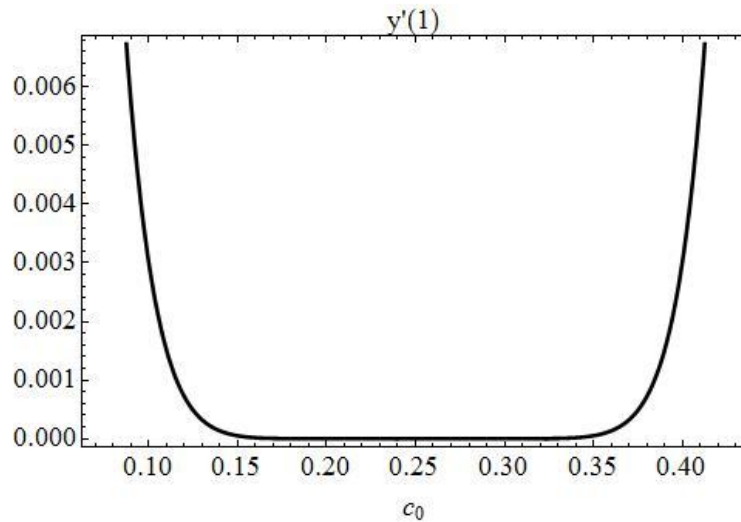
که دارای جواب دقیق $y(x) = x + \frac{1}{x}$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۲-۱-۴)، پارامترهای معادله هموتوبی را به صورت زیر در نظر می گیریم :

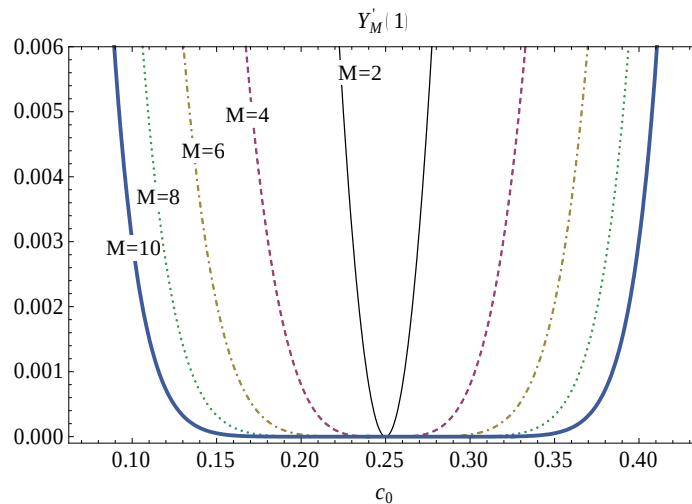
عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d}{dx}$ با ویژگی $L[c_1] = 0$ که در آن c_1 ثابت انتگرال گیری است، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = x\phi(x, q, c_0) - \phi(x, q, c_0)^2 \frac{d\phi(x, q, c_0)}{dx} - \frac{1+x^2}{x^4}$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ که در شرایط مرزی (۲-۴-۴) صدق می کند به صورت $y_0(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ در نظر گرفته می شود. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی مرتبه ده در شکل (۳-۴-۴) آمده است که با توجه به آن بازه $0.15 < c_0 < 0.35$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. تقریب هموتویی - پاده $c_{0_i} = 0.25$ را c_{0_i} مقادیر مناسب $P_M(c_0)$ صفر های $y'(1) = 0$ نتیجه می دهد $r = 1, 2, \dots, 5$ ، $[r, r]$ با چندگانگی $m_i = 2r$ نتیجه می دهد. بنابراین بر اساس (۸-۲-۴)، $c_{0_{optimal}} = 0.25$ نتیجه می شود. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول در تقریب مرتبه ده عبارت است از $c_0 = 0.207201$. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، M در شکل (۴-۴-۴) آمده است.



شکل ۴-۴-۳: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y'(1)$ در مثال (۲-۳-۴).



شکل ۴-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y'_M(1)$ در مثال (۲-۴-۴).

مثال ۳-۴-۴: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} y''(x) = 6y^2(x) + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, \end{cases} \quad (۳-۴-۴)$$

که جواب دقیق آن در اختیار نیست. با در نظر گرفتن معادله (۲-۴-۱)، پارامتر های معادله هموتوبی را به صورت زیر در نظر می گیریم :

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^2}{dx^2}$ با ویژگی $L[c_1 + c_2x] = 0$ ، که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری می باشند، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^2\phi(x, q, c_0)}{dx^2} - 6\phi^2(x, q, c_0) - x$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ که در شرایط مرزی (۳-۴-۴) صدق می کند به صورت $y_0(x) = x$ در نظر گرفته می شود. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوبی مرتبه ده در شکل (۵-۴-۴) آمده است که با توجه به آن بازه $-0.5 < c_0 < 1.5$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. تقریب هموتوبی-پاده $[r, r]$ ، $r = 1, 2, \dots, 5$ ، نتیجه می دهد $y'''(0) = 1$. صفر های $P_M(c_0)$ مقادیر مناسب c_{0_i} را $c_{0_i} = -1$ با چندگانگی $m_i = 2r$ نتیجه می دهد. بنابراین بر اساس (۴-۲-۸)، $c_{0_{optimal}} = -1$ نتیجه می شود. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول در تقریب مرتبه ده عبارت است از $c_0 = -1.0000007$. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوبی M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ در شکل (۶-۴-۴) آمده است. مقادیر خطای مطلق

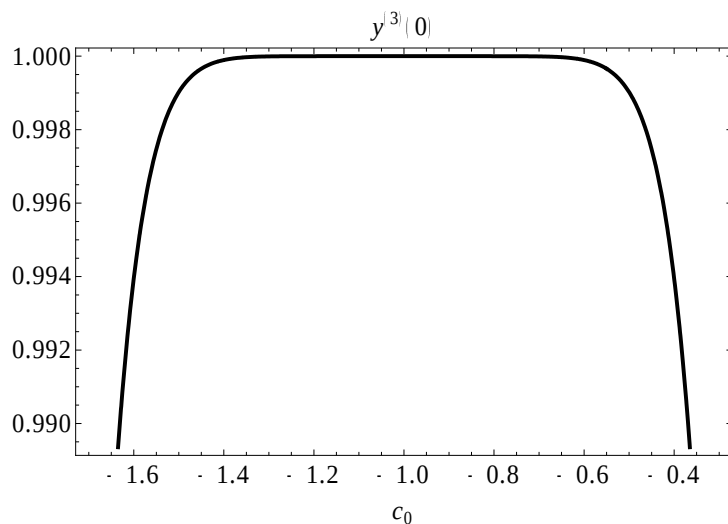
روش بهینه سازی و روش ارائه شده، در جدول (۳-۴-۴) و مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول c_0 در جدول (۴-۴-۴) گزارش شده اند.

جدول ۳-۴-۴: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0 = -1.00000007$ و روش ارائه شده در $c_0 = -1$ در مثال (۳-۴-۴).

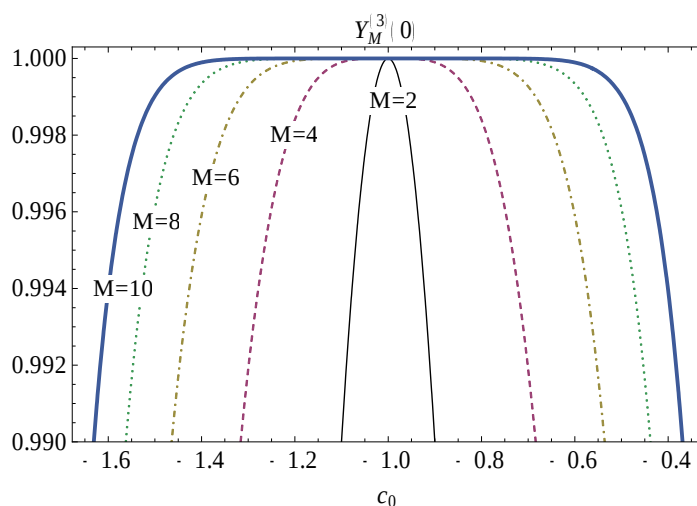
	OP-HAM ($c_0 = -1.00000007$)	Pro-App ($c_0 = -1$)
x	$ y(x) - Y_{10}(x) $	$ y(x) - Y_{10}(x) $
0	0	0
0.1	1.11022e-15	6.20737e-33
0.2	1.44300e-15	5.55112e-24
0.3	7.14430e-14	1.96311e-19
0.4	2.61732e-14	2.37334e-15
0.5	3.38511e-13	1.08830e-13
0.6	6.74537e-10	8.14782e-10
0.7	1.91296e-08	1.92286e-08
0.8	2.04000e-06	2.04036e-06
0.9	4.58271e-05	4.58282e-05
1	1.23353e-03	1.23355e-03

جدول ۴-۴-۴: مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول c_0 در مثال (۳-۴-۴).

c_0	$\Lambda_{10}(c_0)$
-1.36	3.05176e-05
-1.32	3.05176e-05
-1.28	3.81470e-05
-1.24	2.28882e-05
-1.2	0
-1.16	9.53647e-07
-1.12	4.76837e-07
-1.08	2.38419e-07
-1.04	2.38419e-07
-1	0
-0.96	5.96046e-08
-0.92	1.04308e-06
-0.88	5.11855e-06
-0.84	2.10181e-05
-0.8	7.54041e-05
-0.76	2.41725e-04
-0.72	7.03102e-04
-0.68	1.87879e-03
-0.64	4.65770e-03



شکل ۵-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y'''(0)$ در مثال (۳-۴-۴).



شکل ۶-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M'''(0)$ در مثال (۳-۴-۴).

مثال ۴-۴-۴: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۲۵]:

$$\begin{cases} y''(x) + y(x)y'(x) + y(x) = \frac{1}{2}\sin(2x), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases} \quad (۴-۴-۴)$$

که دارای جواب دقیق $y(x) = \cos x$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۴-۱-۴)، پارامترهای معادله هموتوپی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت

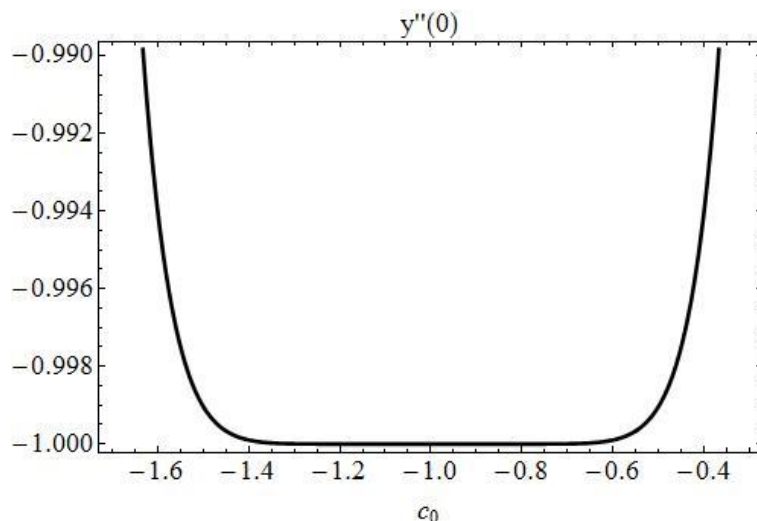
$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

با ویژگی $L[c_1 + c_2 x] = 0$ که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری می باشند ، عملگر غیر خطی N به صورت

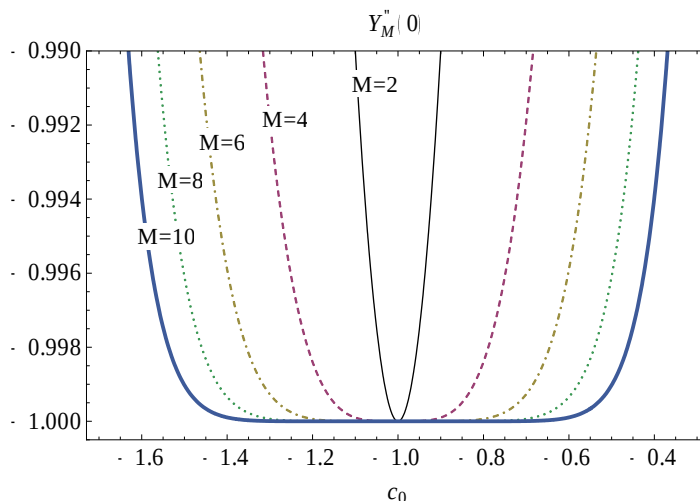
$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^2 \phi(x, q, c_0)}{dx^2} + \phi(x, q, c_0) \frac{d\phi(x, q, c_0)}{dx} + \phi(x, q, c_0) - \frac{1}{2} \sin(2x)$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ که در شرایط مرزی $(\xi - \xi - \xi)$ صدق می کند به صورت $y_0(x) = 1$ در نظر گرفته می شود. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوپی مرتبه ده در شکل $(\gamma - \xi - \xi)$ آمده است که با توجه به آن بازه $-1.4 < c_0 < -0.6$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید.

تقریب هموتوپی - پاده $[r, r]$ ، $r = 1, 2, \dots, 5$ ، نتیجه می دهد $y''(0) = -1$. صفر های $P_M(c_0)$ مقادیر مناسب c_{0_i} را $c_{0_i} = -1$ با چندگانگی $m_i = 2r$ نتیجه می دهد. بنابراین بر اساس $(\lambda - 2 - \xi)$ ، $c_{0_{optimal}} = -1$ نتیجه می شود. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول در تقریب مرتبه ده عبارت است از $c_0 = -0.930768$. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوپی M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ در شکل $(\lambda - \xi - \xi)$ آمده است.



شکل $\gamma - \xi - \xi$: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y''(0)$ در مثال $(\xi - \xi - \xi)$.



شکل ۸-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M''(0)$ در مثال (۴-۴-۴).

مثال ۵-۴-۴: معادله دیفرانسیل مرتبه پنج زیر را در نظر بگیرید [۴۵]:

$$\begin{cases} y^{(5)}(x) - y(x) = 5\cos x - x(\cos x + \sin x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (5-4-4)$$

که دارای جواب دقیق $y(x) = x\cos x$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۴-۱-۲)، پارامترهای معادله هموتوپي را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^5}{dx^5}$ با ویژگی $L[\sum_{i=1}^5 c_i x^{i-1}] = 0$ ، که در آن c_i ، $i = 1, 2, \dots, 5$ ، ثابت های انتگرال گیری می باشند، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^5 \phi(x, q, c_0)}{dx^5} - \phi(x, q, c_0) - 5\cos x + x(\cos x + \sin x)$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ را به صورت $y_0(x) = x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ در نظر می گیریم. با توجه به شرایط مرزی (۵-۴-۴)، ضرایب $a_4, \dots, a_1, a_0$ با حل یک دستگاه شامل پنج معادله خطی تعیین می شوند. لذا داریم:

$$y_0(x) = x^5 - \left(\frac{-16 + 4\pi + \pi^4}{\pi^3}\right)x^4 - \left(\frac{48 - 8\pi - \pi^4}{4\pi^2}\right)x^3 + x$$

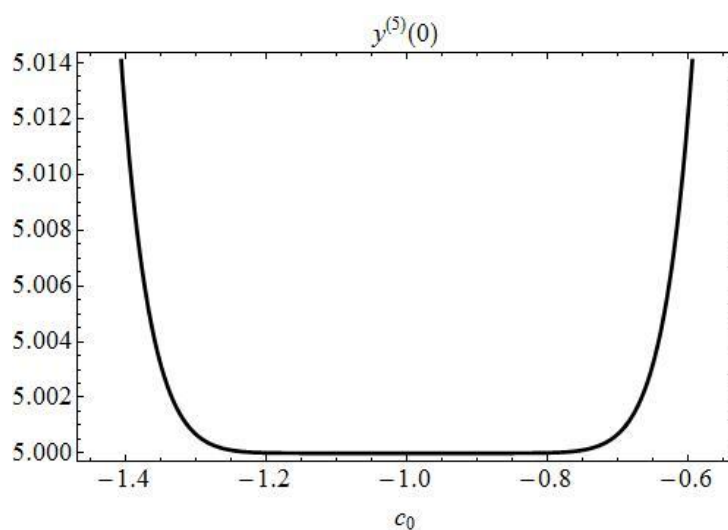
منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی مرتبه ده در شکل (۹-۴-۴) آمده است که با توجه به آن بازه $-1.2 < c_0 < -0.8$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. تقریب هموتویی- پاده $[r, r]$ ، $r=1,2,...,5$ ، نتیجه می دهد $y^{(5)}(0)=5$. صفر های $P_M(c_0)$ مقادیر مناسب c_{0_i} را $c_{0_i}=-1$ با چندگانگی $m_i=2r$ نتیجه می دهد. بنابراین بر اساس (۸-۲-۴)، $c_{0_{optimal}}=-1$ نتیجه می شود. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول در تقریب مرتبه ده عبارت است از $c_0=-0.993664$. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی $M=2,4,6,8,10$ ، در شکل (۱۰-۴-۴) آمده است. مقادیر خطای مطلق روش بهینه سازی و روش ارائه شده، در جدول (۵-۴-۴) و مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول c_0 در جدول (۶-۴-۴) گزارش شده اند.

جدول ۵-۴-۴: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0=-0.993664$ و روش ارائه شده در $c_0=-1$ در مثال (۵-۴-۴).

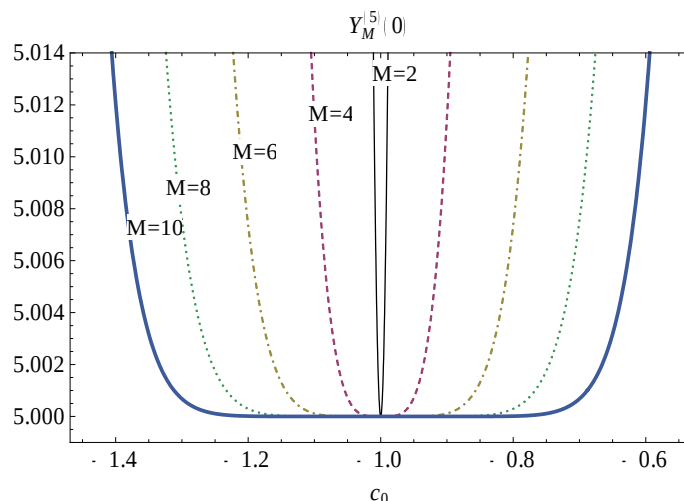
	OP-HAM ($c_0 = -0.993664$)	Pro-App ($c_0 = -1$)
x	$ y(x) - Y_{10}(x) $	$ y(x) - Y_{10}(x) $
0	5.86198e-13	0
$\frac{\pi}{20}$	3.36120e-13	1.42109e-14
$\frac{\pi}{10}$	3.17541e-13	7.10543e-15
$\frac{3\pi}{20}$	3.42448e-13	1.42109e-14
$\frac{\pi}{5}$	6.17367e-13	2.84217e-14
$\frac{\pi}{4}$	6.27387e-13	2.84217e-14
$\frac{3\pi}{10}$	1.88738e-13	0
$\frac{7\pi}{20}$	1.09079e-12	1.42109e-14
$\frac{2\pi}{5}$	3.52429e-12	2.84217e-14
$\frac{9\pi}{20}$	7.55995e-12	2.13163e-14
$\frac{\pi}{2}$	1.36264e-11	5.6834e-14

جدول ۴-۶: مقادیر خطای مانده به ازای مقادیر قابل قبول c_0 در مثال (۴-۵).

c_0	$\Lambda_{10}(c_0)$
-1.2	3.72113e-05
-1.18	1.28956e-05
-1.16	3.94120e-06
-1.14	1.02690e-06
-1.12	2.17034e-07
-1.1	3.44568e-08
-1.08	3.57708e-09
-1.06	1.90425e-10
-1.04	3.32695e-11
-1.02	2.67537e-11
-1	1.92022e-11
-0.98	2.75926e-11
-0.96	2.89214e-11
-0.94	2.87902e-10
-0.92	4.82918e-09
-0.9	4.36058e-08
-0.88	2.64243e-07
-0.86	1.21565e-06
-0.84	4.56860e-06
-0.82	1.47059e-05
-0.8	4.18825e-05



شکل ۴-۹: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y^{(5)}(0)$ در مثال (۴-۵).



شکل ۱۰-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M^{(5)}(0)$ در مثال (۵-۴-۴).

مثال ۶-۴-۴: معادله دیفرانسیل مرتبه شش زیر را در نظر بگیرید [۳۰]:

$$\begin{cases} y^{(6)}(x) = 2y^{(4)}(x) - y''(x) + x, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 0, \\ y(1) = \frac{7}{6} + \sinh 1, y'(1) = \frac{1}{2} + \cosh 1, y''(1) = 1 + \sinh 1, \end{cases} \quad (6-4-4)$$

که دارای جواب دقیق $y(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \sinh x$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۶-۴-۴)، پارامترهای معادله هموتوپي را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^6}{dx^6}$ با ویژگی $L[\sum_{i=1}^6 c_i x^{i-1}] = 0$ که در آن c_i ، $i = 1, 2, \dots, 6$ ، ثابت های انتگرال گیری می باشند، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^6 \phi(x, q, c_0)}{dx^6} - 2 \frac{d^4 \phi(x, q, c_0)}{dx^4} + \frac{d^2 \phi(x, q, c_0)}{dx^2} - x$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ را به صورت $y_0(x) = x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ در نظر می گیریم. با توجه به شرایط مرزی (۶-۴-۴)، ضرایب $a_5, \dots, a_2, a_1, a_0$ با حل یک دستگاه شامل شش معادله خطی تعیین می شوند. لذا داریم:

$$y_0(x) = x^6 - \left(\frac{-19 + 24e - 7e^2}{4e}\right)x^5 - \left(\frac{23 + 22e - 9e^2}{2e}\right)x^4 - \left(\frac{87 + 82e - 39e^2}{12e}\right)x^3 + x + 1$$

منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی مرتبه ده در شکل (۱۱-۴-۴) آمده است که با توجه به آن بازه $-0.85 < c_0 < -1.15$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. جدول (۷-۴-۴) تقریب هموتویی-پاده د $[r, r]$ ، $r = 1, 2, \dots, 5$ را برای $y^{(6)}(0)$ نتیجه می دهد. بر اساس (۱۰-۲-۴)، مقادیر $c_{0_{optimal}}$ در جدول (۸-۴-۴) گزارش شده است و پارامتر کنترل همگرایی بهینه را -0.99 انتخاب می کنیم. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول در تقریب مرتبه ده عبارت است از $c_0 = -0.990214$. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتویی M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ در شکل (۱۲-۴-۴) آمده است. مقادیر خطای مطلق روش بهینه سازی و روش ارائه شده، در جدول (۹-۴-۴) گزارش شده اند.

جدول ۷-۴-۴: تقریب هموتویی-پاده $y^{(6)}(0)$ در مثال (۶-۳-۴)

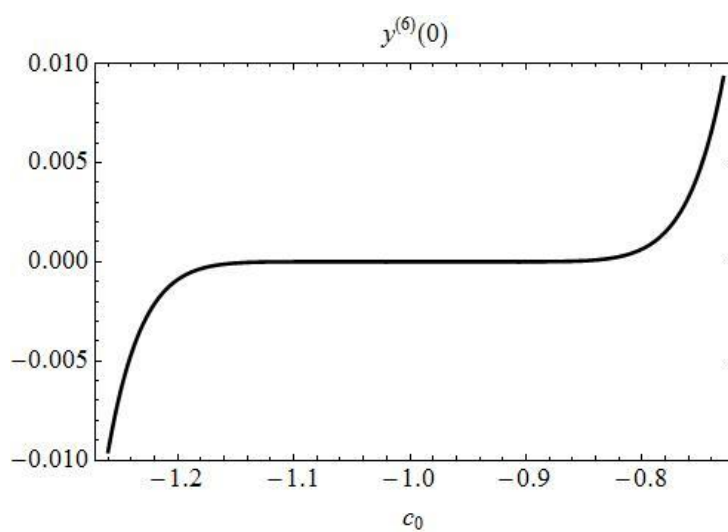
$[r, r]$	$y^{(6)}(0)$
[1,1]	-48.572700
[2,2]	-1.5627e-04
[3,3]	-6.6862e-10
[4,4]	-1.7267e-14
[5,5]	-1.6922e-12

جدول ۸-۴-۴: مقادیر مناسب c_{0_i} به عنوان ریشه های $P_M(c_0) = 0$ در مثال (۶-۳-۴)

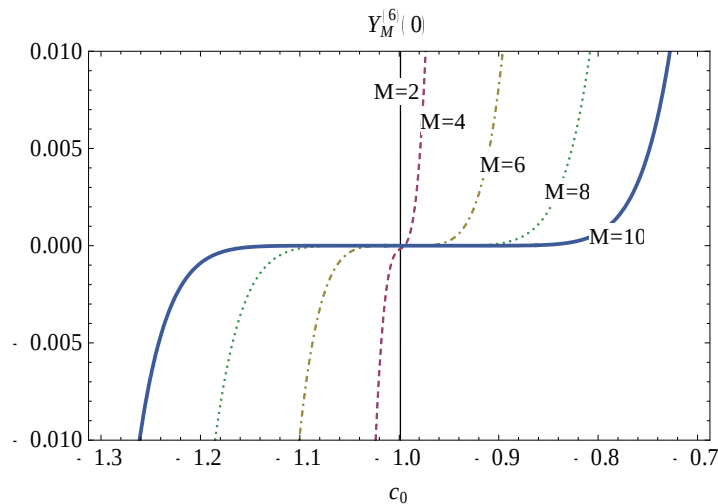
M	c_{0_i}	$c_{0_{optimal}}$
2	-1.33414, -1.33414	-1.33414
4	-0.99868, -5.08598, -0.99869 $\pm$ 0.00722i	-0.99868
6	-0.99281, 4.86037, -1.005880 $\pm$.015078i, -0.99433 $\pm$ 0.00646i	-0.99281
8	-0.99135, -0.99106, -0.99212, 1.64443, -1.01158 $\pm$ 0.02188i, -0.99532 $\pm$ 0.01127i	-0.99135
10	-0.99100, 0.989625, -1.01764 $\pm$ 0.02870i, -0.99665 $\pm$ 0.01610i, -0.99260 $\pm$ 0.00726i, -0.99132 $\pm$ 0.00392i	-0.99100

جدول ۴-۹: مقایسه خطای مطلق تقریب مرتبه ده به دست آمده با روش بهینه سازی در $c_0 = -0.990214$ و روش ارائه شده در $c_0 = -0.99$ در مثال (۶-۴-۴).

	OP-HAM ($c_0 = -0.990214$)	Pro-App ($c_0 = -0.99$)
x	$ y(x) - Y_{10}(x) $	$ y(x) - Y_{10}(x) $
0	0	0
0.1	1.11022e-16	0
0.2	1.44329e-15	5.55112e-17
0.3	6.93889e-15	3.33067e-16
0.4	2.10387e-14	1.49880e-15
0.5	5.09592e-14	4.21885e-15
0.6	1.05582e-13	1.05471e-14
0.7	1.97953e-13	2.18714e-14
0.8	3.42948e-13	4.20775e-14
0.9	5.59774e-13	7.34968e-14
1	8.71303e-13	1.21680e-13



شکل ۴-۱۱: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y^{(6)}(0)$ در مثال (۶-۳-۴).



شکل ۴-۱۲: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه M ، $M = 2, 4, 6, 8, 10$ ، برای $Y_M^{(6)}(0)$ در مثال (۴-۱-۶).

مثال ۴-۷: معادله دیفرانسیل مرتبه هشت زیر را در نظر بگیرید :

$$\begin{cases} y^{(8)}(x) + xy(x) = -e^x(48 + 15x + x^3), & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, y''(0) = 0, y^{(4)}(0) = -8, y^{(6)}(0) = -24, \\ y(1) = 0, y''(1) = -4e, y^{(4)}(1) = -16e, y^{(6)}(1) = -36e, \end{cases} \quad (۴-۷-۷)$$

که دارای جواب دقیق $y(x) = x(1-x)e^x$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۴-۱-۲)، پارامترهای معادله هموتوبی را به صورت زیر در نظر می گیریم :

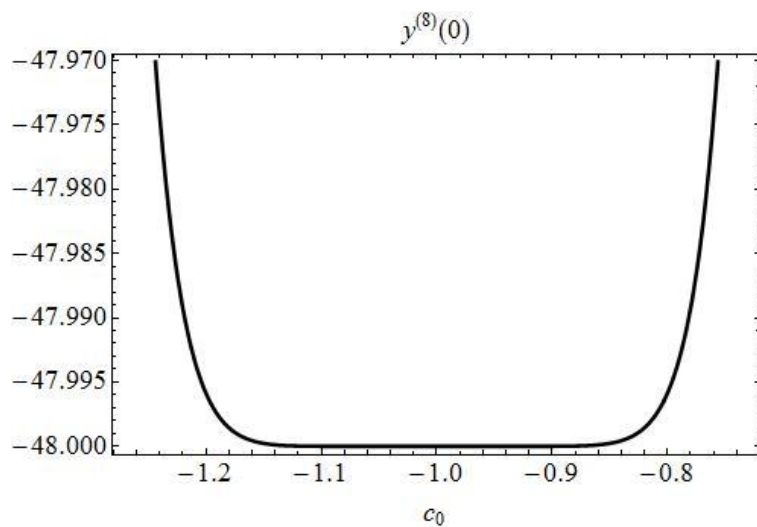
عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^8}{dx^8}$ با ویژگی $L[\sum_{i=1}^8 c_i x^{i-1}] = 0$ که در آن c_i ، $i = 1, 2, \dots, 8$ ، ثابت های انتگرال گیری می باشند، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^8 \phi(x, q, c_0)}{dx^8} + x\phi(x, q, c_0) + e^x(48 + 15x + x^3)$$

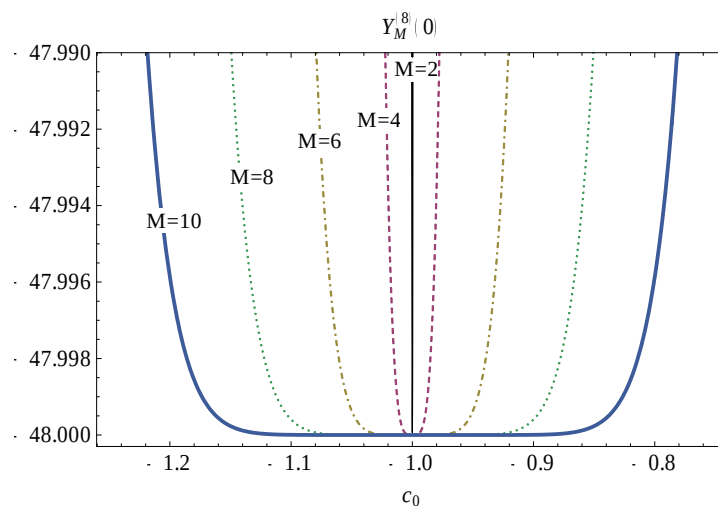
و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ را به صورت $y_0(x) = x^8 + a_7 x^7 + a_6 x^6 + \dots + a_1 x + a_0$ در نظر می گیریم. با توجه به شرایط مرزی (۴-۷-۷)، ضرایب $a_7, \dots, a_2, a_1, a_0$ با حل یک دستگاه شامل هشت معادله خطی تعیین می شوند. لذا داریم :

$$y_0(x) = x^8 - \left(\frac{1678+3e}{420}\right)x^7 - \frac{1}{30}x^6 + \left(\frac{848-5e}{60}\right)x^5 - \frac{1}{3}x^4 - \left(\frac{4976+61e}{180}\right)x^3 + \left(\frac{21260+541e}{1260}\right)x$$

در نظر گرفته می شود. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوبی مرتبه ده در شکل (۱۳-۴-۴) آمده است که با توجه به آن بازه $-1.15 < c_0 < -0.85$ به عنوان بازه قابل قبول R_{c_0} به دست می آید. تقریب هموتوبی- پاده $[r, r]$ ، $r=1,2,\dots,5$ ، نتیجه می دهد $y^{(8)}(0) = -48$. صفر های $P_M(c_0)$ مقادیر مناسب c_{0_i} را $c_{0_i} = -1$ با چندگانگی $m_i = 2r$ نتیجه می دهد. بنابراین بر اساس (۸-۲-۴)، $c_{0_{optimal}} = -1$ نتیجه می شود. با روش بهینه سازی مقدار c_0 قابل قبول در تقریب مرتبه ده عبارت است از $c_0 = -0.992312$. منحنی های c_0 نظیر تقریب سری هموتوبی $M = 2, 4, 6, 8, 10$ در شکل (۱۴-۴-۴) آمده است.



شکل ۱۳-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه ده برای $y^{(8)}(0)$ در مثال (۷-۴-۴).



شکل ۱۴-۴-۴: منحنی های c_0 نظیر تقریب مرتبه $M = 2, 4, 6, 8, 10$ برای $Y_M^{(8)}(0)$ در مثال (۷-۴-۴).

۴-۵ نتیجه گیری

حدس بابلیان - جلیلی : اگر $R_{c_0} = [c_l, c_u]$ ، آنگاه $c_{0_{optimal}} = \frac{c_l + c_u}{2}$. این برای همه مثال ها درست است. بنابراین ما حدس می زنیم که نقطه میانی ناحیه قابل قبول R_{c_0} به دست آمده توسط تکنیک رسم منحنی های c_0 ، مقدار مطلوب پارامتر کنترل همگرایی c_0 است. با بررسی منحصر به فردی پیش بینی شده پارامتر کنترل همگرایی c_0 ، خطای مطلق تقریب M داده شده توسط روش پیشنهادی با سرعت بیشتری نسبت به روش بهینه سازی کاهش می یابد.

در این فصل، یک روش برای پیدا کردن پارامتر کنترل همگرایی c_0 بهینه در چارچوب روش آنالیز هموتوپی پیشنهاد دادیم. در M امین مرتبه از تقریب سری جواب هموتوپی، با استفاده از روش پیشنهادی، لازم است یک معادله غیر خطی که ریشه های آن پارامترهای کنترل همگرایی c_{0_i} هستند، حل شود. با استفاده از تقریب هموتوپی - پاده می توان مقدار اسکالر کمیت های وابسته به مساله غیر خطی مورد بررسی که در رسم منحنی های c_0 استفاده می شوند را برآورد کرد. اگر این برآورد به اندازه کافی دقیق باشد، حداقل یک پارامتر کنترل همگرایی c_0 مطلوب با پیدا کردن ریشه های $P_M(c_0) = 0$ تعیین می شود. از مزیت قابل توجه روش پیشنهادی نسبت به تکنیک متعارف منحنی های c_0 ، توانایی پیدا کردن یک مقدار مطلوب برای پارامتر کنترل همگرایی c_0 در M امین مرتبه از تقریب سری جواب هموتوپی است. اما با استفاده از تکنیک منحنی های c_0 ، می توانیم یک ناحیه قابل قبول R_{c_0} به دست آوریم که وابسته به انتخاب فاصله عمودی و مرتبه تقریب سری جواب است.

فصل پنجم

روشهای گسسته سازی برای تعیین پارامتر کنترل همگرایی

در این فصل ابتدا به ارائه روشهای عددی تفاضلاتی و طیفی و ترکیب آنها با روش آنالیز هموتوپی می پردازیم تا حل تقریبی مسائل معادلات دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مرزی را میسر سازند. سپس با استفاده از گسسته سازی، روشهای بهینه سازی هموتوپی تک گام و بهینه سازی چند گام را برای تعیین پارامترهای کنترل با روشهای عددی مذکور ترکیب می کنیم.

۱-۵ روشهای عددی حل معادلات دگرذیسی در روش آنالیز هموتوپی

فرض می کنیم معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی تحت شرایط مرزی زیر داده شده باشد:

$$N[y(x)] = 0, \quad (1-1-5)$$

$$y(a) = \alpha, y(b) = \beta, \quad (2-1-5)$$

به طور دقیق تر یک عملگر دیفرانسیل مرتبه دوم غیر خطی از y است. بنابراین مسأله ترکیب شده از معادله (۱-۱-۵) و (۲-۱-۵) که یک مسأله معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم با شرایط مرزی است. x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است، که خود تابعی از $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و دوبار دیفرانسیل پذیر است. برای مسأله ی فوق از جواب به صورت سری تابعی زیر استفاده می کنیم:

$$y(x) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x), \quad (3-1-5)$$

به عبارت دیگر می‌خواهیم توابع $y_1, y_2, \dots$ را به گونه‌ای تعیین کنیم که تابع فوق جواب مسأله (1-1-5) و (2-1-5) باشد. برای این منظور از معادله دگر دیسی مرتبه صفرم زیر استفاده می‌کنیم:

$$(1-q)L[\phi(x, q) - y_0(x)] = qN[\phi(x, q)], \quad (4-1-5)$$

که در آن

$$\phi(x, q) = y_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} y_m(x)q^m, \quad (5-1-5)$$

و

$$y_m = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(x, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}. \quad (6-1-5)$$

قرار می‌دهیم:

$$R_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N(\phi(x, q))}{\partial q^m} \Big|_{q=0}. \quad (7-1-5)$$

عملگر خطی L را عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم زیر در نظر می‌گیریم:

$$L = \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} + \alpha_1 \frac{d}{dx} + \alpha_0 I, \quad (8-1-5)$$

که α_0, α_1 و α_2 اعداد ثابت هستند. اکنون در هر مرحله معادلات دیفرانسیل خطی شده با شرایط مرزی زیر را حل می‌کنیم:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = R_{m-1}(x), \quad y_m(a) = y_m(b) = 0, \quad (9-1-5)$$

حدس آغازین جواب $y(x)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y_0(x) = \frac{(\beta - \alpha)}{b - a} x + \frac{b\alpha - \beta b}{b - a}, \quad (10-1-5)$$

تابع فوق شرایط (2-1-5) را برمی‌آورد. توجه داریم که معادله تحت شرایط مرزی (9-1-5) برای m طبیعی، یک معادله دیفرانسیل معمولی خطی تحت شرایط مرزی است و بنابراین می‌توان آن را با نرم

افزارهای متمتیکا^{۱۹} یا مپیل^{۲۰} به صورت تحلیلی حل کرد، یا از روش‌های عددی برای حل این معادلات خطی استفاده کرد.

تقریب مناسبی از $y(x)$ به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\tilde{y}(x) = y_0(x) + \sum_{k=1}^M y_m(x), \quad (11-1-5)$$

که تقریب فوق تحت شرایط همگرایی سری هموتویی به دست آمده است.

برای حل عددی معادلات دگرذیسی دو روش ارائه می‌کنیم. برای دو معادله دیفرانسیل غیر خطی، خطای مطلق ترکیب این دو روش را با روش‌های بهینه سازی تک گام [۳۴] و بهینه‌سازی مارینیکا [۳۲] ارائه می‌کنیم.

۵-۱-۱ روش تفاضلات متناهی برای حل معادلات دگرذیسی مرتبه بالا

از روش تفاضلات متناهی [۳۶، ۳۹-۴۰]، برای حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی شده حاصل از معادلات دگرذیسی مرتبه m ، $m=1, 2, \dots$ ، تحت شرایط مرزی استفاده می‌کنیم و به کمک y_{m-1} تقریب y_m را به دست آورده، تابع $\tilde{y}$ محاسبه می‌شود.

معادله دگرذیسی مرتبه m ام تحت شرایط مرزی زیر را در نظر می‌گیریم :

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = R_{m-1}(x), \quad y_m(a) = y_m(b) = 0, \quad m \geq 1, \quad (1-1-1-5)$$

عملگر خطی L به صورت (۵-۱-۸) و تابع $y_0(x)$ را طبق رابطه (۵-۱-۱۰) در نظر می‌گیریم. با بسط معادله (۵-۱-۱-۵) با توجه به تعریف L نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} y_m(x) + \alpha_1 \frac{d}{dx} y_m(x) + \alpha_0 y_m(x) \\ &= R_{m-1}(x) + \chi_m \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} y_{m-1}(x) + \alpha_1 \chi_m \frac{d}{dx} y_{m-1}(x) + \alpha_0 \chi_m y_{m-1}(x). \end{aligned} \quad (2-1-1-5)$$

توجه داریم که $y_{m-1}(x)$ در مرحله قبل تعیین شده است، لذا فقط $y_m(x)$ مجهول است.

¹⁹ Mathematica

²⁰ Maple

اکنون برای حل عددی این معادلات با روش تفاضلاتی، فاصله $[a, b]$ را به n زیرفاصله، با نقاط تقسیم زیر در نظر می گیریم :

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n+1} = b, \quad (3-1-1-5)$$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{b-a}{n+1}. \quad (4-1-1-5)$$

به جای مشتقات تابع مجهول و توابع معلوم در عبارت فوق از مشتقات عددی مرتبه اول و دوم با تفاضلات متناهی مرکزی استفاده می کنیم :

$$y'_m(x_i) = \frac{v_{i+1}^{(m)} - v_{i-1}^{(m)}}{2h}, \quad (5-1-1-5)$$

$$y''_m(x_i) = \frac{v_{i+1}^{(m)} - 2v_i^{(m)} + v_{i-1}^{(m)}}{h^2}. \quad (6-1-1-5)$$

قرارداد می کنیم :

$$v_i^{(m)} \simeq y_m(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7-1-1-5)$$

بنابراین خطاهای هردو تقریب $O(h^2)$ است. با جایگذاری (5-1-1-5) و (6-1-1-5) در معادله (5-1-1-5) داریم:

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \frac{v_{i+1}^{(m)} - 2v_i^{(m)} + v_{i-1}^{(m)}}{h^2} + \alpha_1 \frac{v_{i+1}^{(m)} - v_{i-1}^{(m)}}{2h} + \alpha_0 v_i^{(m)} \\ &= R_{m-1}(x) + \chi_m \alpha_2 \frac{v_{i+1}^{(m-1)} - 2v_i^{(m-1)} + v_{i-1}^{(m-1)}}{h^2} \\ &+ \alpha_1 \chi_m \frac{v_{i+1}^{(m-1)} - v_{i-1}^{(m-1)}}{2h} + \alpha_0 \chi_m v_i^{(m-1)} \end{aligned} \quad (8-1-1-5)$$

با توجه به شرایط مرزی $v_0^{(m)} = 0$ و $v_{n+1}^{(m)} = 0$. دستگاه معادلات خطی $AV = b$ نتیجه می شود که ماتریس های V, A و b را به صورت زیر به دست می آیند :

$$A = \begin{bmatrix} 2h^2\alpha_0 - 4\alpha_2 & 2\alpha_2 + h\alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2\alpha_2 - h\alpha_1 & 2h^2\alpha_0 - 4\alpha_2 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 2\alpha_2 - h\alpha_1 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 2\alpha_2 + h\alpha_1 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 2h^2\alpha_0 - 4\alpha_2 & 2\alpha_2 + h\alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2\alpha_2 - h\alpha_1 & 2h^2\alpha_0 - 4\alpha_2 \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} 2h^2R_{m-1}(x_1) + \chi_m(2\alpha_2 + h\alpha_1)v_2^{(m-1)} + \chi_m(2h^2\alpha_0 - 4\alpha_2)v_1^{(m-1)} + \chi_m(2\alpha_2 - h\alpha_1)v_0^{(m-1)} \\ \vdots \\ 2h^2R_{m-1}(x_n) + \chi_m(2\alpha_2 + h\alpha_1)v_{n+1}^{(m-1)} + \chi_m(2h^2\alpha_0 - 4\alpha_2)v_n^{(m-1)} + \chi_m(2\alpha_2 - h\alpha_1)v_{n-1}^{(m-1)} \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} v_1^{(m)} \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n^{(m)} \end{bmatrix}.$$

با حل دستگاه معادلات فوق با یکی از روش‌های حل دستگاه معادلات خطی مقادیر $v_i^{(m)}$ ، $i=1,2,\dots,n$ ، به دست می‌آیند. محاسبه تا آن‌جا ادامه می‌یابد که شرط توقف زیر برآورده شود:

$$\left\| N \left[y_0(x) + \sum_{i=1}^M y_i(x) \right] \right\| \leq \varepsilon \quad (9-1-1-5)$$

که در آن $\|\cdot\|$ یک نرم تابعی است، که می‌تواند نرم بی‌نهایت فرض شود. ضمناً فضای مورد مطالعه یک فضای نرم‌دار است. اما در عمل به دلیل گسسته بودن مقادیر تقریبی $y_i(x)$ از آزمون توقف $\|E\| \leq \varepsilon$ استفاده می‌کنیم، که در آن $E = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ و E_i ها به صورت زیر تعریف میشوند:

$$E_i = \left(N \left[v_i^{(0)} + \sum_{k=1}^M v_i^{(k)} \right] \right). \quad (10-1-1-5)$$

۵-۱-۱-۱ الگوریتم روش

در این الگوریتم $L = \frac{d^2}{dl^2}$ در نظر گرفته شده است.

(۱) $N, n, M, b, a, \alpha, \beta$ را بخوان.

$$(۲) \quad m=1, h = \frac{b-a}{n}$$

$$(۳) \quad x_i = a + (i-1)h, \quad i = 1, 2, \dots, n+1$$

(۴) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$

$$y_0^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x_i + \frac{b\alpha - \beta a}{b - a},$$

$$y_0'^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a},$$

$$y_0''^{(i)} = 0,$$

$$v_i^{(0)} = \tilde{y}_i^{(0)}, \quad \tilde{y}_i^{(0)} = y_0^{(i)}.$$

(۵) مادامی که $m \leq M + 1$ و $\|E\| \geq \varepsilon$ مراحل زیر را انجام بده:

(۶) قرار بده:

$$\chi(j) = \begin{cases} 1, & j > 2 \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases},$$

(۷) معادله زیر را تشکیل بده:

$$\phi = y_0 + \sum_{i=1}^M y_i q^i,$$

(۸) قرار بده:

$$H(q) = N[\phi],$$

(۹) محاسبه کن

$$R_{m-1}(x) = \frac{\partial^{m-1} H(q)}{\partial q^{m-1}} \times \frac{1}{(m-1)!} \Big|_{q=0},$$

(۱۰) مقادیر $R_{m-1}^{(i)} = R_{m-1}(x_i)$ را برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ محاسبه کن.

(۱۱) معادلات زیر را برای m تشکیل بده

$$\frac{v_i^{(m)} - 2v_i^{(m-1)} + v_i^{(m-2)}}{h^2} - \chi_m \frac{v_i^{(m-1)} - 2v_i^{(m-2)} + v_i^{(m-3)}}{h^2} = R_{m-1}^{(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

(۱۲) دستگاه معادلاتی خطی (۱۱) را حل کن.

(۱۳) برای $m = 1, 2, \dots, M$ قرار بده:

$$\tilde{y}_i^{m+1} = \tilde{y}_i^m + \tilde{v}_i^m, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

$$m = m + 1 \quad (۱۴)$$

$$\text{پایان حلقه (۵).} \quad (۱۵)$$

$$\text{جواب‌های تقریبی } \tilde{y}_i^{m+1} \text{ را چاپ کن.} \quad (۱۶)$$

۵-۱-۲ روش طیفی برای حل معادلات دگرذیسی مرتبه بالا

از روش طیفی [۸، ۴۰]، برای حل معادلات دیفرانسیل حاصل از معادلات دگرذیسی مرتبه $m = 1, 2, \dots, m$ ، تحت شرایط مرزی استفاده می‌کنیم، و $\tilde{y}$ را تقریب می‌کنیم.

بار دیگر معادلات دگرذیسی مرتبه m زیر را در نظر می‌گیریم:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = R_{m-1}(x), \quad y_m(a) = y_m(b) = 0, \quad (۱-۲-۱-۵)$$

که در آن

$$L = \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} + \alpha_1 \frac{d}{dx} + \alpha_0, \quad (۲-۲-۱-۵)$$

تابع $y_0(x)$ را تابعی صدق کننده در معادله $L(y) = 0$ با شرایط $y_0(a) = a$ و $y_0(b) = \beta$ در نظر می‌گیریم. با تأثیر L بر معادله دگرذیسی فوق داریم:

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} y_m(x) + \alpha_1 \frac{d}{dx} y_m(x) + \alpha_0 y_m(x) \\ &= R_{m-1}(x) + \chi_m \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} y_{m-1}(x) + \alpha_1 \chi_m \frac{d}{dx} y_{m-1}(x) \\ &+ \alpha_0 \chi_m y_{m-1}(x) \end{aligned} \quad (۳-۲-۱-۵)$$

که $y_{m-1}(x)$ در مرحله قبل تعیین شده است، لذا در هر مرحله فقط یک تابع مجهول $y_m(x)$ داریم. برای حل عددی این معادلات با استفاده از روش طیفی در فاصله $[a, b]$ ، نخست ریشه‌های چند جمله‌ای‌های چبی‌شف را در فاصله $[-1, 1]$ در نظر می‌گیریم و سپس با تبدیل خطی نقاط متناظر آن را روی فاصله $[a, b]$ تعیین می‌کنیم، قرار می‌دهیم:

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (۴-۲-۱-۵)$$

این نقاط به نقاط چبی شف موسوم هستند. به منظور در نظر گرفتن نقاط وابسته به t_i ها از فاصله $[a, b]$ تبدیل خطی زیر استفاده می کنیم :

$$x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{2} \right) t_i + \left(\frac{a+b}{2} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (5-2-1-5)$$

تبدیل فوق نقاط x_i متناظر با t_i در فاصله $[a, b]$ را به دست می دهد. بنابراین اگر معادله $(5-3-1-5)$ در نقاط $x_i, i = 2, 3, \dots, n$ در نظر بگیریم، معادلات زیر به دست می آیند :

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} y_m(x) \Big|_{x=x_i} + \alpha_1 \frac{d}{dx} y_m(x) \Big|_{x=x_i} + \alpha_0 y_m(x) \Big|_{x=x_i} \\ &= R_{m-1}(x) \Big|_{x=x_i} + \chi_m \alpha_2 \frac{d^2}{dx^2} y_{m-1}(x) \Big|_{x=x_i} + \alpha_1 \chi_m \frac{d}{dx} y_{m-1}(x) \Big|_{x=x_i} \\ &+ \alpha_0 \chi_m y_{m-1}(x) \Big|_{x=x_i} \end{aligned} \quad (6-2-1-5)$$

به کمک روش لاگرانژ تقریب زیر را برای $y_m(x), m = 1, 2, \dots$ در نظر می گیریم :

$$y_m(x) \simeq v_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) y_m(x_i), \quad m = 1, \dots, n+1, \quad (7-2-1-5)$$

که در آن

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \quad (8-2-1-5)$$

قرارداد می کنیم :

$$v_i^{(m)} = y_m(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (9-2-1-5)$$

اما

$$\begin{aligned} v_m(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) v_i^{(m)}, \\ v'_m(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} L'_i(x) v_i^{(m)}. \end{aligned} \quad (10-2-1-5)$$

قرار می دهیم:

$$d_i(x) = L'_i(x) \quad (11-2-1-5)$$

و قرارداد می کنیم:

$$d_{ij} = L'_i(x_j) = d_i(x_j), \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad j = 1, 2, \dots, n+1, \quad (12-2-1-5)$$

بنابراین

$$\nu'_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} d_i(x) \nu_i^{(m)}, \quad (13-2-1-5)$$

$$\nu'_m(x_j) = \sum_{i=1}^{n+1} d_i(x_j) \nu_i^{(m)} = \sum_{i=1}^{n+1} d_{ij} \nu_i^{(m)},$$

که در آن درایه‌های d_{ij} به صورت زیرند:

$$d_{11} = \left(\frac{-2n^2+1}{6}\right)\left(\frac{2}{b-a}\right),$$

$$d_{n+1,n+1} = -d_{11},$$

$$d_{jj} = \frac{-t_{n+1-j}}{2(1-t_{n+1}^2-j)}\left(\frac{2}{b-a}\right), \quad j=2,\dots,n,$$

$$d_{ij} = \left(\frac{c_i}{c_j}\right)\left(\frac{(-1)^{i+j}}{t_{n+1-i}-t_{n+1-j}}\right)\left(\frac{2}{b-a}\right), \quad i \neq j, \quad i, j=1,\dots,n+1,$$

$$C_i = \begin{cases} 2, & i=1,n+1, \\ 1, & i=2,\dots,n, \end{cases}$$

اگر از طرفین رابطه (13-2-1-5) یک بار مشتق بگیریم نتیجه می شود :

$$\nu''_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} d'_i(x) \nu_i^{(m)}. \quad (14-2-1-5)$$

برای محاسبه مشتق دوم $\nu_m(x)$ می توان از یک درونیابی مجدد نیز استفاده نمود :

$$\nu'_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) \nu'_m(x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} L_i(x) \left(\sum_{k=1}^{n+1} d_{ki} \nu_k^{(m)}\right)$$

بنابراین

$$\nu'_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} L_i(x) d_{ki} \nu_k^{(m)} \quad (15-2-1-5)$$

در نتیجه

$$\nu''_m(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_i(x) d_{ki} \nu_k^{(m)},$$

و

$$\begin{aligned}
v_m''(x_j) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_i(x_j) d_{ki} v_k^{(m)} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m)}.
\end{aligned} \tag{۱۶-۲-۱-۵}$$

اکنون به جای $y_m(x_i)$ ، $\frac{d}{dx} y_m(x_i)$ و $\frac{d^2}{dx^2} y_m(x_i)$ در معادلات (۱۶-۲-۱-۵) مقادیر v_i ، $v_m'(x_i)$ و $v_m''(x_i)$ از روابط (۱۵-۲-۱-۵) و (۱۶-۲-۱-۵) قرار می دهیم. لذا داریم:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m)} + \alpha_1 \sum_{i=1}^{n+1} d_{ij} v_i^{(m)} + \alpha_0 v_j^{(m)} \\
&= R_{m-1}(x_i) + \chi_m \alpha_2 \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m-1)} \\
&+ \alpha_1 \chi_m \sum_{i=1}^{n+1} d_{ij} v_i^{(m-1)} + \alpha_0 \chi_m v_j^{(m-1)}, \quad j = 2, 3, \dots, n,
\end{aligned} \tag{۱۷-۲-۱-۵}$$

قرار داد می کنیم

$$W = (v_2^{(m)}, \dots, v_n^{(m)}), \quad v_1^{(m)} = v_{n+1}^{(m)} = 0, \quad m \geq 1,$$

اکنون دستگاه معادلات خطی $AW = b$ را داریم که ماتریس A و b به صورت زیر داده می شوند:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_2 \sum_{i=2}^n d_{i2} d_{2i} + \alpha_1 d_{22} + \alpha_0 & \dots & \alpha_2 \sum_{i=2}^n d_{i2} d_{ni} + \alpha_1 d_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 \sum_{i=2}^n d_{in} d_{2i} + \alpha_1 d_{2n} & \dots & \alpha_2 \sum_{i=2}^n d_{in} d_{ni} + \alpha_1 d_{nn} + \alpha_0 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} R_{m-1}(x_2) + \chi_m \alpha_2 \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{i2} d_{ki} v_k^{(m-1)} + \alpha_1 \chi_m \sum_{i=1}^{n+1} d_{i2} v_i^{(m-1)} + \alpha_0 \chi_m v_2^{(m-1)} \\ \vdots \\ R_{m-1}(x_n) + \chi_m \alpha_2 \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{in} d_{ki} v_k^{(m-1)} + \alpha_1 \chi_m \sum_{i=1}^{n+1} d_{in} v_i^{(m-1)} + \alpha_0 \chi_m v_n^{(m-1)} \end{bmatrix}$$

با حل دستگاه معادلات فوق جواب را که حاوی مقادیر v در نقاط x_i ، تعیین می‌شوند. مجدداً محاسبات را برای m بعدی آغاز می‌کنیم.

۱-۲-۱-۵ الگوریتم روش

در این الگوریتم $L = \frac{d^2}{dl^2}$ فرض شده است.

(۱) $N, n, M, b, a, \alpha, \beta$ را بخوان.

(۲) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ محاسبه کن :

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right),$$

$$x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{n}\right)t_i + \left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(۳) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ قرار بده :

$$x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{n}\right)t_i + \left(\frac{a+b}{2}\right),$$

$$y_0^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x_i + \frac{b\alpha - \beta\alpha}{b - a},$$

$$y_0'^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a},$$

$$y_0''^{(i)} = 0,$$

$$\tilde{y}_i^{(0)} = y_0^{(i)}, \quad \nu_i^{(0)} = y_0^{(i)}.$$

(۴) قرار بده :

$$y_i^{(0)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x_i + \frac{b\alpha - \beta\alpha}{b - a}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

(۵) محاسبه کن :

$$d_{11} = \left(\frac{-2n^2 + 1}{6}\right)\left(\frac{2}{b - a}\right),$$

$$d_{n+1, n+1} = -d_{11},$$

$$d_{jj} = \frac{-t_{n+1-j}}{2(1 - t_{n+1}^2 - j)}\left(\frac{2}{b - a}\right), \quad j = 2, \dots, n,$$

$$d_{ij} = \left(\frac{c_i}{c_j}\right)\left(\frac{(-1)^{i+j}}{t_{n+1-i} - t_{n+1-j}}\right)\left(\frac{2}{b - a}\right), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n+1,$$

$$C_i = \begin{cases} 2 & i=1, n+1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases},$$

(۶) قرار بده $m=1$ و

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & i = 3, 4, \dots, M+1, \\ 0, & i = 1, 2 \end{cases},$$

(۷) مادامی که $m \leq M+1$ و $\|E\| \geq \varepsilon$ محاسبات زیر را انجام بده:

(۸) قرار بده:

$$\phi = y_0 + \sum_{i=1}^M y_i q^i,$$

(۹) معادله زیر را تشکیل بده:

$$H(q) = N[\phi],$$

(۱۰) عبارت زیر را محاسبه کن:

$$R_{m-1} = \frac{\partial^{m-1} H(q)}{\partial q^{m-1}} \times \frac{1}{(m-1)!} \Big|_{q=0},$$

(۱۱) مقادیر $R_{m-1}^{(i)} = R_{m-1}(x_i)$ را محاسبه کن.

(۱۲) معادلات زیر را تشکیل بده:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m)} - \chi(m) \sum_{i=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m-1)} = R_{m-1}(x_i), \quad j=1, 2, \dots, n,$$

(۱۳) دستگاه فوق را حل کن:

(۱۴) برای $m=1, 2, \dots, M$ قرار بده:

$$\tilde{y}_i^{(m+1)} = \tilde{y}_i^{(m)} + v_i^{(0)},$$

(۱۵) $m = m+1$.

(۱۶) پایان حلقه (۷).

(۱۷) $\tilde{y}_i^{(m)}$ جواب‌های تقریبی در نقاط x_i هستند

۲-۵ روشهای گسسته سازی برای تعیین پارامترهای کنترل

از آن جا که برای حل معادله دیفرانسیل تحت شرایط مرزی در آنالیز هموتوپی با در نظر گرفتن سری توانی $\varphi(x, q)$ نمی‌توان همه جملات سری را در عمل محاسبه کرد و در نظر گرفتن M بزرگ برای مجموع جزئی سری، حجم محاسبات را افزایش می‌دهد، لذا در عمل برای تقلیل حجم محاسبات، تقریبی از سری جواب را در نظر گرفته و به منظور یافتن جواب دقیق‌تر از روش‌های تعیین پارامترهای کنترل بهینه تک گام و بهینه چندگام با گسسته سازی روی دامنه داده شده در معادلات اصلی استفاده می‌کنیم.

۵-۲-۱ گسسته سازی روش بهینه سازی تک گام

در این بخش روش عددی کاربرد پارامترهای کنترل نیو و وانگ [۳۴] را ارائه می‌کنیم. برای این منظور معادله هموتوپی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(1-q)L[\varphi(x, q) - y_0(x)] = H(q)N[\varphi(x, q)] \quad (۵-۲-۱)$$

$$\text{که } H(q) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k q^k, \quad \varphi(x, q) = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k q^k$$

$$y_m = \frac{1}{m!} \times \frac{\partial^m \varphi(x, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \quad c_m = \frac{1}{m!} \times \frac{\partial^m H(q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \quad m=1, 2, 3, \dots,$$

که y_m ها از حل معادلات دیفرانسیل خطی دگرذیسی مرتبه m ($m \geq 1$) به دست می‌آیند، که معادلات تحت شرایط مرزی زیر هستند:

$$L[y_m(x) - \chi_m y_{m-1}(x)] = \sum_{k=1}^m c_k R_{m-k}(x), \quad y_m(a) = y_m(b) = 0, \quad (۵-۲-۱)$$

اکنون با حل عددی مسأله فوق، مقادیر عددی y_m را در n نقطه‌ی شبکه، یعنی نقاط زیر می‌یابیم:

$$v^{(m)} = (v_1^{(m)}, \dots, v_n^{(m)}), \quad v_i^{(m)} \simeq y_m(x_i), \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (۵-۲-۳)$$

این مقادیر می‌تواند با هر یک از روش‌های تفاضلاتی یا طیفی تعیین شوند. اکنون در هر مرحله عبارت $\Delta_m(c_i)$ را به صورت زیر می‌یابیم:

$$\Delta_1(c_1) = \sum_{i=1}^n (N_i(v^{(1)}))^2$$

$$\Delta_2(c_2) = \sum_{i=1}^n (N_i(v^{(2)}))^2$$

⋮

$$\Delta_m(c_m) = \sum_{i=1}^n (N_i(v^{(m)}))^2$$

که در آن $N_i(v^{(j)})$ عبارت است از مقدار تقریبی تابع $N[y(x)]$ ، وقتی به جای $y(x)$ و مشتقات ظاهر شده در آن $y_j(x_i)$ و مشتقات $y_j(x)$ را در x_i قرار دهیم. اکنون در مرحله i ام c_i بهینه را بدست آورده و آن را در معادله دگرذیسی مرتبه بعدی به کار برده و c_{i+1} بهینه بعدی را تعیین می‌کنیم. برای این منظور در هر مرحله معادلات زیر را حل می‌کنیم:

$$\frac{d\Delta_k(c_k)}{dc_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (4-1-2-5)$$

۱-۱-۲-۵ الگوریتم روش

(۱) $N, n, M, b, a, \alpha, \beta$ را بخوان.

(۱) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ محاسبه کن:

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right),$$

$$x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{n}\right)t_i + \left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(۱) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ قرار بده:

$$y_0^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x_i + \frac{b\alpha - \beta a}{b - a},$$

$$y_0'^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a},$$

$$y_0''^{(i)} = 0,$$

$$\tilde{y}_i^{(0)} = y_0^{(i)}, v_i^{(0)} = y_0^{(i)}.$$

(۱) قرار بده:

$$y_i^{(0)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x_i + \frac{b\alpha - \beta a}{b - a}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

(۱) محاسبه کن:

$$d_{11} = \left(\frac{-2n^2 + 1}{6}\right)\left(\frac{2}{b - a}\right),$$

$$d_{n+1, n+1} = -d_{11},$$

$$d_{jj} = \left(\frac{-t_{n+1-j}}{2(1 - t_{n+1}^2 - j)}\right)\left(\frac{2}{b - a}\right), \quad j = 2, \dots, n,$$

$$d_{ij} = \left(\frac{c_i}{c_j}\right)\left(\frac{(-1)^{i+j}}{t_{n+1-i} - t_{n+1-j}}\right)\left(\frac{2}{b - a}\right), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n+1,$$

$$C_i = \begin{cases} 2 & i=1, n+1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases},$$

(۱) قرار بده $m=1$ و

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & i=3, 4, \dots, M+1, \\ 0, & i=1, 2 \end{cases},$$

(۱) مادامی که $m \leq M+2$ و $\|E\| \geq \varepsilon$ محاسبات زیر را انجام بده :

(۱) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\phi = y_0 + \sum_{i=1}^M y_i q^i,$$

(۱) قرار بده :

$$H(q) = N[\phi],$$

(۱) عبارت زیر را محاسبه کن :

$$R_{m-1} = \frac{\partial^{m-1} H(q)}{\partial q^{m-1}} \times \frac{1}{(m-1)!} \Big|_{q=0},$$

(۱) معادلات زیر را تشکیل بده :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m)} - \chi(m) \sum_{i=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m-1)} = \sum_{k=1}^m R_{m-1}(x_i) c_k, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

(۱) جواب دستگاه فوق را با استفاده از روش نیوتن بر حسب c_m محاسبه کن :

$$\tilde{v}_i^{(m+1)} = \tilde{y}_i^{(m)} + v_i^{(m)}, \quad i=1, 2, \dots, n+1,$$

(۱) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\Delta_m(c_m) = \sum_{i=1}^{n+1} \left(N_i(\tilde{v}_i^m) \right)^2,$$

(۱) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\frac{d\Delta_m}{dc_m} = 0,$$

(۱) با حل معادله فوق با یک روش عددی مقدار c_m را محاسبه کن. c_m را در $\tilde{y}_i^{(m)}$ قرار بده.

(۱) $m = m+1$.

(۱) پایان حلقه (۷).

۲-۲-۵ گسسته سازی روش مارینیکا

در روش مارینیکا [۱۶، ۱۷]، عبارت Δ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\Delta(c_0) = \sum_{i=0}^n (N_i \left[\sum_{k=0}^M y_k(x) \right])^2 \quad (۱-۲-۲-۵)$$

که $N_i \left[\sum_{k=0}^M y_k(x) \right]$ عبارت است از مقدار N در نقاط x_i به ازای تابع $\sum_{k=0}^M y_k(x)$.

اکنون برای حل مسأله، تابع فوق را می نیمم می کنیم. برای یافتن نقطه می نیمم معادلات زیر را تشکیل می دهیم:

$$\frac{\partial \Delta(c_1, \dots, c_m)}{\partial c_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq M, \quad (۲-۲-۲-۵)$$

این معادلات دستگاهی از M معادله جبری غیرخطی و m مجهول است که آنرا با روش نیوتن حل می کنیم.

۱-۲-۲-۵ الگوریتم روش

(۱) $N, n, M, b, a, \alpha, \beta$ را بخوان.

(۲) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ محاسبه کن :

$$t_i = \cos\left(\frac{\pi(i-1)}{n}\right),$$

$$x_{n-i+2} = \left(\frac{b-a}{n}\right)t_i + \left(\frac{a+b}{2}\right).$$

(۳) برای $i = 1, 2, \dots, n+1$ قرار بده:

(۴)

$$y_0^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x_i + \frac{b\alpha - \beta a}{b - a},$$

$$y_0'^{(i)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a},$$

$$y_0''^{(i)} = 0,$$

$$\tilde{y}_i^{(0)} = y_0^{(i)}, \nu_i^{(0)} = y_0^{(i)}.$$

(۵) قرار بده :

$$y_i^{(0)} = \frac{\beta - \alpha}{b - a} x_i + \frac{b\alpha - \beta a}{b - a}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

(۶) محاسبه کن :

$$d_{11} = \left(\frac{-2n^2+1}{6}\right)\left(\frac{2}{b-a}\right),$$

$$d_{n+1,n+1} = -d_{11},$$

$$d_{jj} = \frac{-t_{n+1-j}}{2(1-t_{n+1}^2-j)}\left(\frac{2}{b-a}\right), \quad j=2,\dots,n,$$

$$d_{ij} = \left(\frac{c_i}{c_j}\right)\left(\frac{(-1)^{i+j}}{t_{n+1-i}-t_{n+1-j}}\right)\left(\frac{2}{b-a}\right), \quad i \neq j, \quad i, j=1,\dots,n+1,$$

$$c_i = \begin{cases} 2 & i=1,n+1 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases},$$

(۷) قرار بده :

$$\chi(i) = \begin{cases} 1, & i=3,4,\dots,M+1, \\ 0, & i=1,2 \end{cases},$$

(۸) مادامی که $m \leq M+2$ و $\|E\| \leq \varepsilon$ محاسبات زیر را انجام بده:

(۹) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\phi = y_0 + \sum_{i=1}^M y_i q^i,$$

(۱۰) قرار بده :

$$H(q) = N[\phi],$$

(۱۱) عبارت زیر را محاسبه کن :

$$R_{m-1} = \frac{\partial^{m-1} H(q)}{\partial q^{m-1}} \times \frac{1}{(m-1)!} \Big|_{q=0},$$

(۱۲) معادلات زیر را تشکیل بده :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m)} - \chi(m) \sum_{i=1}^{n+1} d_{ij} d_{ki} v_k^{(m-1)} = \sum_{k=1}^m R_{m-1}(x_i) c_k, \quad j=2,\dots,n,$$

(۱۳) دستگاه فوق را بر حسب c_m محاسبه کن :

$$\tilde{v}_i^{(m+1)} = \tilde{y}_i^{(m)} + v_i^{(m)}, \quad i=1,2,\dots,n+1,$$

(۱۴) پایان حلقه (۷).

(۱۵) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\Delta(c_k) = \sum_{i=0}^n \left(N_i \left(\sum_{k=0}^M y_k^{(m)} \right) \right)^2,$$

(۱۶) معادله زیر را تشکیل بده :

$$\frac{\partial \Delta(c_1, \dots, c_m)}{\partial c_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq M,$$

(۱۷) دستگاه معادلات فوق را با روش نیوتن حل کن.

(۱۸) جواب دستگاه (۱۶) را در (۱۲) قرار بده.

(۱۹) پایان.

۳-۵ نتایج عددی

در این بخش دو مساله مقدار مرزی دو نقطه ای را انتخاب کرده و روشهای ارائه شده در بخش (۱-۵) و (۲-۵) را به کار می بریم.

مثال ۱-۳-۵: مساله زیر را در نظر بگیرید [۳۴]:

$$\begin{cases} y''(x) + xy'(x) - y(x) = f(x), & -1 \leq x \leq 1, \\ y(-1) = e^{-5} + \sin 1, y(1) = e^5 + \sin 1, \end{cases} \quad (۱-۳-۵)$$

که در آن

$$f(x) = (24 + 5x)e^{5x} + (2 + 2x^2)\cos x^2 - (4x^2 + 1)\sin x^2$$

دارای جواب دقیق $y(x) = e^{5x} + \sin x^2$ است.

با در نظر گرفتن معادله (۱-۱-۱-۳)، پارامترهای معادله هموتوپي را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^2}{dx^2}$ با ویژگی $L[c_1 + c_2x] = 0$ که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^2 \phi(x, q)}{dx^2} + x \frac{d\phi(x, q)}{dx} - \phi(x, q) - f(x).$$

و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ بر طبق معادله (۱۰-۱-۵) که در شرایط مرزی (۱-۳-۵) صدق می کند به صورت $y_0(x) = \frac{e^5 - e^{-5}}{2}x + \frac{e^5 + e^{-5}}{2} + \sin 1$ است. خطای مطلق به دست آمده با روشهای تفاضلات متناهی در جدول (۱-۳-۵)، طیفی در جدول (۲-۳-۵)، مارینیکا و نیو-وانگ در جدول (۳-۳-۵) گزارش شده است. مقادیر خطای مانده و زمان اجرای الگوریتم در روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در جدول (۳-۳-۵)

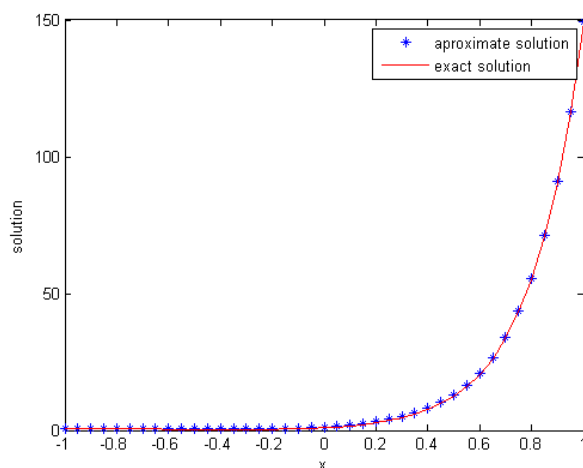
۴) آمده است. نمودار تقریبی جواب به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در شکل (۱-۳-۵) نشان داده شده است.

جدول ۱-۳-۵: خطای مطلق به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در مثال (۱-۳-۵) برای $n=40$ و $m=20$

x_i	y_i^*	y_i	$ y_i - y_i^* $
-1	0.008484e02	0.008482e02	0
-0.5	0.004465e02	0.003294e02	1.170599e-01
0	0.012962e02	0.010000e02	2.962307e-01
0.5	0.129219e02	0.124298e02	4.920621e-01
1	1.492546e02	1.492546e02	0
CPU Time	2.03 s		

جدول ۲-۳-۵: خطای مطلق به دست آمده با روش طیفی در مثال (۱-۳-۵) برای $n=40$ و $m=20$

x_i	y_i^*	y_i	$ y_i - y_i^* $
-1	0.008482e02	0.008420e02	0
-0.7071	0.0050946e02	0.005085e02	0.897315e-03
0	0.0100166e02	0.010000e02	1.662300e-03
0.7071	0.3479365e02	0.347927e02	0.89731e-03
1	1.4925460e02	1.492546e02	0
CPU Time	1132.65 s		



شکل ۱-۳-۵: نمودار تقریب به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در مثال (۱-۳-۵) برای $n=40$ و $m=20$

جدول ۳-۳-۵: خطای مطلق به دست آمده با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۱-۳-۵) برای $m=40$ و $n=20$

	روش مارینیکا	روش نیو-وانگ
x_i	$ y_i - y_i^* $	$ y_i - y_i^* $
-1	0	0
-0.89	-0.003429e-04	0.379770e-01
-0.309	-0.236328e-04	0.853065e-01
0.309	-0.210992e-04	0.773184e-01
0.809	-0.143959e-04	0.244865e-01
1	0	0
CPU Time	18.84 s	14.24 s
Max of relative error	e-06	e-03

جدول ۴-۳-۵: مقایسه خطای مانده و زمان اجرای الگوریتم با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۱-۳-۵) برای $n=20$ و $m=1,2,\dots,10$

M	روش مارینیکا		روش نیو-وانگ	
	$\ N(\tilde{y})\ $	CPU Time	$\ N(\tilde{y})\ $	CPU Time
1	-1.44900000	6.5400	5.96252e-00	9.0430
2	-0.48387e-01	8.0980	8.95400e-01	8.2280
3	-0.53378e-03	11.310	0.61195e-01	11.590
4	-0.43144e-04	14.847	0.89122e-01	14.721
5	0.24574e-05	18.619	0.25520e-01	18.731
6	*	*	0.15802e-02	23.010
7	*	*	0.17988e-02	27.440
8	*	*	0.47841e-03	44.430
9	*	*	0.45417e-04	38.098
10	*	*	0.47731e-04	43.896

مثال ۲-۳-۵: مساله زیر را در نظر بگیرید [۳۴]:

$$\begin{cases} y''(x) - y(x)y''(x) - \frac{1}{2}y'^2(x) = \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, y(1) = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad (۲-۳-۵)$$

جواب دقیق معادله در دسترس نیست. با در نظر گرفتن معادله (۳-۱-۳)، پارامترهای معادله هموتوپی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

عملگر خطی کمکی L به صورت $L = \frac{d^2}{dx^2}$ با ویژگی $L[c_1 + c_2x] = 0$ که در آن c_1 و c_2 ثابت های انتگرال گیری هستند ، عملگر غیر خطی N به صورت

$$N[\phi(x, q, c_0)] = \frac{d^2\phi(x, q)}{dx^2} - \phi(x, q) \frac{d^2\phi(x, q)}{dx^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi(x, q)}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2}.$$

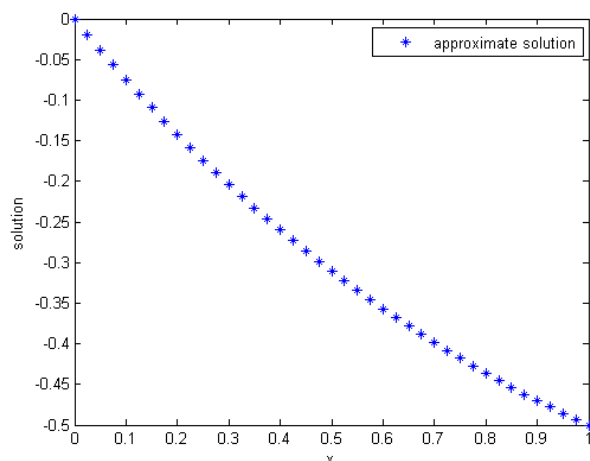
و تابع حدس اولیه $y_0(x)$ بر طبق معادله (۵-۱-۱۰) که در شرایط مرزی (۵-۳-۲) صدق می کند به صورت $y_0(x) = -\frac{1}{2}x$ است. . مقادیر تقریبی جواب به دست آمده با روشهای تفاضلات متناهی در جدول (۵-۳-۵)، طیفی در جدول (۵-۳-۶)، مارینیکا و نیو-وانگ در جدول (۵-۳-۷) گزارش شده است. مقادیر خطای مانده و زمان اجرای الگوریتم در روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در جدول (۵-۳-۸) آمده است. نمودار تقریبی جواب به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در شکل (۵-۳-۲) نشان داده شده است.

جدول ۵-۳-۵ : مقادیر تقریبی جواب با روش تفاضلات متناهی در مثال (۵-۳-۲) برای $n=40$ و $m=20$

x_i	y_i^*
0	0
0.25	-0.17406
0.5	-0.31091
0.75	-0.41809
1	-0.50000
CPU Time	1.67 s
$\ N(\tilde{y})\ $	3.6552e-06

جدول ۵-۳-۶ : مقادیر تقریبی جواب با روش طیفی در مثال (۵-۳-۲) برای $n=40$ و $m=20$

x_i	y_i^*
0	0
0.1464	-0.10708
0.5	-0.31092
0.8535	-0.45490
1	-0.50000
CPU Time	1059.54 s
$\ N(\tilde{y})\ $	1.1010e-05



شکل ۵-۳-۲: نمودار تقریب به دست آمده با روش تفاضلات متناهی در مثال (۵-۳-۲) برای $m=20$ و $n=40$

جدول ۵-۳-۷: مقادیر تقریبی جواب با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۵-۳-۲) برای $m=7$ و $n=20$

	روش مارینیکا	روش نیو-وانگ
x_i	y_i^*	y_i^*
0	0	0
0.0945	-0.0715797	-0.071579
0.3454	-0.2302274	-0.230228
0.6545	-0.3803379	-0.380330
0.9045	-0.4715012	-0.471501
1	-0.5	-0.5
CPU Time	3907.02	32.78 s
$\ N(\tilde{y})\ $	2.82800e-06	3.42076e-11

جدول ۵-۳-۸: مقایسه خطای مانده و زمان اجرای الگوریتم با روشهای مارینیکا و نیو-وانگ در مثال (۵-۳-۲) برای

$n=20$ و $m=1,2,\dots,10$

	روش مارینیکا		روش نیو-وانگ	
M	$\ N(\tilde{y})\ $	CPU Time	$\ N(\tilde{y})\ $	CPU Time
1	2.1578e-01	6.4310000	2.33290e-01	5.1950
2	0.5003e-02	20.722000	6.39100e-02	8.3500
3	1.1810e-02	92.763000	1.71300e-02	12.016
4	2.7500e-03	356.43000	0.59550e-02	16.078
5	6.3775e-04	1193.0100	0.20700e-02	21.640
6	1.4687e-04	2480.6600	7.04243e-04	26.499
7	6.5759e-04	3907.0600	2.4362e-04	32.781
8	5.7093e-04	6693.3400	8.7062e-05	39.750
9	3.8133e-04	119343.05	3.0987e-05	49.020
10	7.0395e-04	21432.840	3.0987e-05	57.830

در این فصل برای حل معادلات دگردیسی در روش آنالیز هموتوپی، دو روش تفاضلات متناهی و طیفی به کار گرفته و جوابهای عددی به دست آمده را به عنوان تقریب های جوابهای معادلات دگردیسی مورد استفاده قرار دادیم. جوابهای عددی با جوابهای تحلیلی این معادلات مقایسه و دقت نتایج حاصل نشان داده شده است. در کاربردهای عددی روش طیفی دقت بیشتر و سرعت کمتر و روش تفاضلاتی دقت کمتر ولی سرعت بیشتری را به نمایش گذاشته است. همین روشها برای حل مسائل آنالیز هموتوپی بهینه نیز مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج عددی برای روش مارینیکا فقط در حالت تعداد کم پارامترهای کنترل رضایت بخش است. در روش بهینه سازی پارامترهای کنترل، در همه حالات جواب مناسب و رضایت بخش نتیجه می دهد. به هر حال چون روشهای عددی جواب دقیق معادلات را تقریب می کنند، بنابراین کاربرد پارامترهای کنترل در روشهای عددی برای تسریع روند همگرایی تقریبها مناسب می باشند.

فصل ششم

پیشنهادهایی برای پژوهشهای آتی

کاربردهای موفقیت آمیز روش آنالیز هموتویی در حل مسائل غیر خطی [۲،۶،۱۲،۱۳،۱۸] و نسخه های متفاوت از این روش نظیر روش آنالیز هموتویی تناوبی [۹]، روش آنالیز هموتویی طیفی [۳۳]، روش آنالیز هموتویی اصلاح شده [۳۸]، روش آنالیز هموتویی چندگام [۱۹] و... منتشر شده است که بیشتر جنبه کاربردی دارد.

با این که همه این مقالات کارایی روش آنالیز هموتویی را تاکید می کنند ولی هنوز سوالات اساسی راجع به این روش وجود دارد.

همانطور که لیائو [۲۳] ادعا می کند درجه آزادی در انتخاب مولفه های y_0 ، L ، c_0 و H وجود دارد و می توان آنها را به گونه ای انتخاب کرد که سری هموتویی به جواب اصلی مساله همگرا گردد به عبارت دیگر، اگر یک معادله غیر خطی حداقل یک جواب داشته باشد، آنگاه حداقل یک معادله دگرذیسی مرتبه صفر وجود دارد به طوری که سری جواب هموتویی به جواب معادله اصلی همگراست.

البته لیائو [۲۳] برای تعیین این مولفه ها قاعده صورت نمایش جواب، قاعده پایه کامل و قاعده وجود جواب را پیشنهاد داده است که به فیزیک مساله وابسته است. همچنین ونگورد^{۲۱} و همکاران [۴۴] راهکارهای محدودی را در ارتباط با تعیین این مولفه ها ارائه کرده اند. موستا^{۲۲} و همکاران [۳۳] با استفاده از روش شبه طیفی چپیشف درجه آزادی در انتخاب عملگر خطی کمکی در اختیار می گذارد. امید است بتوان با استفاده از این ایده و توابع خاص نظیر چند جمله ای هرمیت، چند جمله ای لژاندر، تابع بسل، تابع زتای ریمان و غیره درجه آزادی بیشتری در انتخاب عملگر خطی کمکی و حدس آغازین مهیا کرد. عباسبندی و همکاران [۳] روش آنالیز هموتویی پیشگو را پیشنهاد دادند که با استفاده از آن با مقادیر مختلف پارامتر

²¹ Van Gorder

²² Motsa

کنترل همگرایی c_0 و با یک عملگر خطی کمکی و حدس آغازین یکسان جوابهای چندگانه معادلات دیفرانسیل محاسبه می شود.

تحقیقات بیشتری نیاز است تا بتوان یک دستور جامع برای انتخاب این مولفه ها ارائه نمود و مشکلات اعمال روش آنالیز هموتوپی را برطرف کرد.

از کاربردهای زیبای روش آنالیز هموتوپی می توان روش نیوتن-هموتوپی [۵] و تعمیم تبدیل اویلر [۲۶] را نام برد . امید است با استفاده از این ایده فرمولهای محاسباتی جدید برای سایر تبدیلات انتگرال و تعمیم آنها به حالت دو بعدی و یا بالاتر ارائه نمود.

در فصل اول روش هموتوپی-پاده را معرفی و در فصل چهار برای پیش بینی مقدار مطلوب پارامتر کنترل همگرایی c_0 به کار گرفتیم. روش ارائه شده در این فصل بر پایه این حدس است که در تقریب هموتوپی-پاده پارامتر کنترل همگرایی c_0 حذف می شود، به عبارت دیگر، تقریب هموتوپی-پاده مستقل از پارامتر کنترل همگرایی c_0 است.

اکنون این سوال مطرح می شود :

آیا می توان در حالت کلی تحت قضیه ای ثابت کرد که تقریب هموتوپی-پاده مستقل از پارامتر کنترل همگرایی c_0 است.

پاسخ به سوال فوق دارای این مزیت است که می توان از ابتدا ی اجرای روش، c_0 را مقدار ثابت در نظر گرفت که باعث می شود حجم محاسبات و فضای اشغالی حافظه CPU را کاهش داد.

- [١] Abbasbandy S., The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Phys. Lett. A*, 360 (2006) 109-113.
- [٢] Abbasbandy S., Homotopy analysis method for quadratic Riccati differential equation, *Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simulat.* 13 (2008) 539-546.
- [٣] Abbasbandy S., Shivanian E., Predictor homotopy analysis method and its application to some nonlinear problems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16 (2011) 2456–2468.
- [٤] Abbasbandy S., Shivanian E., Vajravelu k., Mathematical properties of h-curve in the frame work of the homotopy analysis method, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 16 (2011) 4268–4275.
- [٥] Abbasbandy S., Tan Y., Liao S.J., Newton-homotopy analysis method for nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation* 188 (2007) 1794–1800.
- [٦] Babolian E., Saeidian J., Paripour M., Analytic solutions to diffusion equations, *Math. Com. Mod.* 51 (2010) 649-657.
- [٧] Baker G. A. Jr., The Theory and Application of The Pade Approximant Method, In *Advances in Theoretical Physics*, 1 (1965) 1-58.
- [٨] Canuto C., Quarteroni A., Spectral methods, John Wiley & Sons, Ltd (2004).
- [٩] Chong Fook Seng, Lem Kong Hoong, Chin Fung Yuen, An A alternative Homotopy Analysis Method In Solving Differential Equation Under Finite Order of Deformation, *Proceedings of the 6th IMT-GT Conference on Mathematics, Statistics and its Applications (ICMSA2010)*. Universiti Tunku Abdul Rahman, Kuala Lumpur, Malaysia.
- [١٠] Deacon A.G., Osher S., Finite-element method for a boundary-value problem of mixed type, *SIAM J. Numer. Anal.* 16 (1979) 756-778.
- [١١] Doedel E., Finite difference methods for nonlinear two-point boundary-value problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 16 (1979) 173-185.

- [۱۶] Fariborzi Araghi M.A. , Behzadi Sh. S., Numerical solution of Nonlinear Volterra-Fredholm Integro-differential Equations Using Homotopy Analysis Method, Journal of Applied Mathematics and Computing, 37 (2011) 1-12.
- [۱۷] Fariborzi Araghi M.A., Fallahzadeh A., Explicit series solution of Boussinesq equation by homotopy analysis method, Journal of American Science, 8(11) (2012) 448-452 .
- [۱۸] Fariborzi Araghi M.A., Fallahzadeh A., On the Convergence of the Homotopy Analysis Method for Solving the Schrodinger Equation, Journal of Basic and Applied Scientific Research, 2(6) (2012) 6076-6083.
- [۱۹] Greenspan D., Casulli V., Numerical Analysis for Applied Mathematics, Science, and Engineering, Addison-Wesley, (1988).
- [۲۰] Ha S.N., A nonlinear shooting method for two-point boundary value problems, Comput. Math. Appl. 42 (2001) 1411-1420.
- [۲۱] Hayat T., Naz R., Sajid M., On the homotopy solution for Poiseuille flow of a fourth grade uid, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 15 (2010) 581-589.
- [۲۲] Izadian J., Salahshour Sa., Salahshour S., A numerical method for solving Volterra and Fredholm integral equations using homotopy analysis method, Proced. Comput. Sci. In press.
- [۲۳] Jafari H, Firoozjaee M. A., Multistage Homotopy Analysis Method for Solving Nonlinear Integral Equations, Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM), 1 (2010) 34 – 45.
- [۲۴] Liao S.J., A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters (II): an application in fluid mechanics, Int. J. Non-Linear Mech. 32 (1997) 815-822.
- [۲۵] Liao S.J., An explicit, totally analytic approximation of Blasius viscous flow problems. Int J Non-Linear Mech 34(4) (1999) 759–78.
- [۲۶] Liao S.J., An optimal homotopy-analysis approach for strongly nonlinear differential equations, Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul 15 (2010) 2003-2016.
- [۲۷] Liao S.J., Beyond perturbation: introduction to the homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC Press; 2003.
- [۲۸] Liao S.J., Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 14 (2009) 983-997.
- [۲۹] Liao S.J., Numerically solving nonlinear problems by the homotopy analysis method, Comput. Mech. 20 (1997) 530-540.

- [٢٦] Liao S.J., On the relationship between the homotopy analysis method and Euler transform, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 15 (2010) 1421–1431.
- [٢٧] Liao S.J., *The Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*, Higher Education Press and Springer, Beijing and Heidelberg, (2012).
- [٢٨] Liao S.J., The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. PhD thesis, Shanghai Jiao Tong University, (1992).
- [٢٩] Liao S.J., Tan Y., A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 119 (2007) 297-354.
- [٣٠] Liang S., Jeffrey D.J., Approximate solutions to a parameterized sixth order boundary value problem, *Computers and Mathematics with Applications* 59 (2010) 247-253.
- [٣١] Liang S., Jeffrey D.J., Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Volume 14, Issue 12, (2009) 4057-4064.
- [٣٢] Marinca V., Herisanu N., Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer. *Int Commun Heat Mass Transfer* 35 (2008) 710–715.
- [٣٣] Motsa S.S., Sibanda P., Shateyi S., A new spectral homotopy analysis method for solving a nonlinear second order BVP, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 15 (2010) 2293-2302.
- [٣٤] Niu Zh., Wang, Ch., A One-Step Optimal Homotopy Analysis Method for Nonlinear Differential Equation, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 1 (2010) 2026–2036.
- [٣٥] Odibat Z., A study on the convergence of homotopy analysis method. *Appl Math Comput* 217 (2010) 782-789.
- [٣٦] Quarteroni A., Sacco R., Saleri F. *Numerical mathematics*, Springer–Verlag, (2000).
- [٣٧] Sajid M., Hayat T., Comparison of HAM and HPM methods in nonlinear heat conduction and convection equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Volume 9, Issue 5, (2008) 2296–2301.
- [٣٨] Sami Bataineh A., Noorani M.S.M., Hashim I., Approximate solutions of singular two-point BVPs by modified homotopy analysis method, *Physics Letters A* 372 (2008) 4062–4066.

- [٣٩] Stoer J., Burlirsch R., Introduction to Numerical Analysis, Springer–Verlag, (1983).
- [٤٠] Trefethen N., Spectral methods in Matlab SIAM ed., Philadelphia, (2000).
- [٤١] Turkyilmazoglu M., Solution of the Thomas-Fermi equation with a convergent approach, Commun. Nonlin. Sci. Num. Simulat. 17 (2012) 4097-4103.
- [٤٢] Turkyilmazoglu M., Some issues on HPM and HAM methods: A convergence scheme, Math. Comput. Modelling 53 (2011) 1929-1936.
- [٤٣] Van Gorder R.A., Control of error in the homotopy analysis of semi-linear elliptic boundary value problems, Numer. Algo. 61 (4) (2012) 613-629.
- [٤٤] Van Gorder R. A., Vajravelu K., On the selection of auxiliary functions, operators and convergence control parameters in the application of the Homotopy Analysis Method to nonlinear differential equations: A general approach, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14 (2009) 4078-4089.
- [٤٥] Wazwaz A.M., The numerical solution of fifth-order boundary value problems by decomposition method, J. Comp. and Appl. Math. 136 (2001) 259-270.
- [٤٦] Wu YY., Cheung KF., Homotopy solution for nonlinear differential equations in wave propagation problems. Wave Motion 46 (2009) 1–14.
- [٤٧] Wu YY., Cheung KF., Two-parameter homotopy method for nonlinear equations, Numerical Algorithms, 53 (2010) 555-572.
- [٤٨] Yabushita K., Yamashita M., Tsuboi K., An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method, J. Phys. A: Math. Theor. 40 (2007) 8403-8416

واژه نامه فارسی به انگلیسی

Through trial and error	آزمون سعی و خطا
Beyond perturbation	آنسوی پریشندگی
Convergence-control vectors	بردارهای کنترل همگرایی
Taylor's Expansion	بسط تیلور
Embedding parameter	پارامتر جانشانده
Auxiliary parameter	پارامتر کمکی
Convergence-control parameter	پارامتر کنترل همگرایی
Residual function	تابع مانده
Euler transform	تبدیل اویلر
Pade approximant	تقریب پاده
Multiple solutions	جواب های چندگانه
Interpolation error	خطای درونیابی
Minimization process	روال مینیمم سازی
Homotopy analysis method	روش آنالیز هموتویی
Modified homotopy analysis method	روش آنالیز هموتویی اصلاح شده
The early HAM	روش آنالیز هموتویی اولیه
The optimal HAM	روش آنالیز هموتویی
One-Step optimal homotopy analysis method	روش آنالیز هموتویی بهینه تک گام
Optimal homotopy asymptotic method	روش آنالیز هموتویی بهینه مجانبی
Predictor homotopy analysis method	روش آنالیز هموتویی پیشگو
Alternative homotopy analysis method	روش آنالیز هموتویی تناوبی
Multistage homotopy analysis method	روش آنالیز هموتویی چند گام
Spectral homotopy analysis method	روش آنالیز هموتویی طیفی
The normal HAM	روش آنالیز هموتویی نرمال
Optimization method	روش بهینه سازی

Shooting Method	روش پرتابی
Perturbation method	روش پیرشندگی
Finite difference Method	روش تفاضلات متناهی
Finite element method	روش تفاضلات محدود
Spectral method	روش طیفی
Non-perturbation method	روش غیر پیرشندگی
Rectangle method	روش مستطیلی
Semi-analytic approach	روش نیمه تحلیلی
Newton-homotopy method	روش نیوتن هموتویی
Optimal homotopy-analysis approach	رویکرد آنالیز هموتویی بهین
Series function	سری تابعی
Homotopy-series	سری هموتویی
Square residual error	مربع خطای مانده
Homotopy-derivative	مشتق هموتویی
Kth-order homotopy derivative	مشتق هموتویی مرتبه k
The zeroth-order deformation equation	معادله دگر دیسی مرتبه صفر
The m-order deformation equation	معادله دگر دیسی مرتبه m
Two point boundary value problem	مسأله مقدار مرزی دونقطه ای
Optimal value	مقدار بهینه
C_0 -curves	منحنی های C_0
Valid region	ناحیه قابل قبول
L_2 -norm	نرم L_2
Chebyshev points	نقاط چبیشف
Homotopy-Pade	هموتویی پاده

واژه نامه انگلیسی به فارسی

Alternative homotopy analysis method	روش آنالیز هموتوپی تناوبی
Auxiliary parameter	پارامتر کمکی
Beyond perturbation	آنسوی پریشندگی
C_0 -curves	منحنی های C_0
Chebyshev points	نقاط چبیشف
Convergence-control parameter	پارامتر کنترل همگرایی
Convergence-control vectors	بردارهای کنترل همگرایی
Embedding parameter	پارامتر جانشانده
Taylor's Expansion	بسط تیلور
Euler transform	تبدیل اویلر
Finite difference Method	روش تفاضلات متناهی
Finite element method	روش تفاضلات محدود
Homotopy analysis method	روش آنالیز هموتوپی
Homotopy-derivative	مشتق هموتوپی
Homotopy-Pade	هموتوپی پاده
Homotopy-series	سری هموتوپی
Interpolation error	خطای درونیابی
Kth-order homotopy derivative	مشتق هموتوپی مرتبه k
L_2 -norm	نرم L_2
Modified homotopy analysis method	روش آنالیز هموتوپی اصلاح شده
Multiple solutions	جواب های چندگانه
Multistage homotopy analysis method	روش آنالیز هموتوپی چند گام
Minimization process	روال مینیم سازی
Newton-homotopy method	روش نیوتن هموتوپی
Non-perturbation method	روش غیر پریشندگی
One-Step optimal homotopy analysis method	روش آنالیز هموتوپی بهینه تک گام

Optimal homotopy-analysis approach	رویکرد آنالیز هموتوپی بهین
Optimal homotopy asymptotic method	روش آنالیز هموتوپی بهینه مجانبی
Optimal value	مقدار بهینه
Optimization method	روش بهینه سازی
Pade approximant	تقریب پد
Predictor homotopy analysis method	روش آنالیز هموتوپی پیشگو
Perturbation method	روش پریشندگی
Rectangle method	روش مستطیلی
Residual function	تابع مانده
Semi-analytic approach	روش نیمه تحلیلی
Series function	سری تابعی
Shooting Method	روش پرتابی
Spectral homotopy analysis method	روش آنالیز هموتوپی طیفی
Spectral method	روش طیفی
Square residual error	مربع خطای مانده
The early HAM	روش آنالیز هموتوپی اولیه
The m-order deformation equation	معادله دگر دیسی مرتبه m
The normal HAM	روش آنالیز هموتوپی نرمال
The optimal HAM	روش آنالیز هموتوپی بهینه
The zeroth-order deformation equation	معادله دگر دیسی مرتبه صفر
Through trial and error	آزمون سعی و خطا
Two point boundary value proble	مسأله مقدار مرزی دونقطه ای
Valid region	ناحیه قابل قبول

نمایه (فهرست راهنما)

۴۰	آزمون سعی و خطا	۱۶	روش آنالیز هموتوپی نرمال
۲۲	بردارهای کنترل همگرایی	۱۸	روش بهینه سازی
۹	بسط تیلور	۸۵	روش تفاضلات متناهی
۸	پارامتر جانسانده	۸۹	روش طیفی
۱۰	پارامتر کمکی	۱۹	رویکرد آنالیز هموتوپی بهینه
۱۱	پارامتر کنترل همگرایی	۹	سری هموتوپی
۲۳	تقریب پاده	۹	مشتق هموتوپی
۴۲	خطای درونیابی	۱۳	معادله دگر دیسی مرتبه صفر
۴۴	روال مینیمم سازی	۳۷	سأله مقدار مرزی دونقطه ای
۱۴	روش آنالیز هموتوپی	۱۸	مقدار بهینه
۱۵	روش آنالیز هموتوپی اولیه	۱۷	منحنی های C_0
۲۰	روش آنالیز هموتوپی بهینه	۱۷	ناحیه قابل قبول
۲۰	روش هموتوپی بهینه تک گام	۴۱	نقاط چبیشف
۱۹	روش هموتوپی بهینه مجانبی	۲۵	هموتوپی پاده

Abstract

In this thesis based on pure and applied feature, we study how to determine the convergence-control parameter. We specifically seek the optimal convergence-control parameter c_0 without plotting c_0 – curves. To overcome the limitations of the curves, we offer how to find a proper convergence-control parameter. In this study, different approaches propose to determine the optimal convergence control parameter value, instead of the c_0 – curves technique, to get a convergent series solution, or even better, to get a faster convergent one. The hypothesis of this research are existence of at least a solution for the non-linear problem, existence of a solution as a series form for the non-linear problem and convergence of homotopy analysis method for the foregoing non-linear problem.

Key Words :

Homotopy; Homotopy Analysis Method (HAM); c_0 – Curves; Convergence-Control Parameter; Optimal Convergence-Control Parameter; Homotopy-Pade Technique.

Mathematics Subject Classification 2010 : 65H20; 41A10; 41A21; 90C59; 65L10.



Islamic Azad University
Science and Research Branch
Faculty of Basic Sciences- Department of Mathematic

Ph.D Thesis Applied Mathematic
Numerical Analysis

Subject:

**A study on the convergence-control parameter of homotopy analysis
method and application in solving nonlinear problems**

Thesis Advisor:

S. Abbasbandy Ph.D.
E. Babolian Ph.D.

Consulting Advisor:

A. Vahidi Ph.D.

By:

Maryam Jalili

Winter 2013