

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (*Ph.D*)

عنوان:

حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه N -ام خطی، با ضرایب
ثابت با استفاده از مشتقات معمولی یا تعمیم یافته فازی

استاد راهنما:

دکتر سعید عباسبندی

استاد مشاور:

دکتر توفیق الهویرنلو

نگارنده:

پژمان دارابی

سال تحصیلی ۱۳۹۰-۱۳۸۹

سپاسگزاری

سپاس پروردگار دانا که گوناگونی آفرینش از نشانه‌های اوست، خداوندی که انسانها را به صورت قبایل و اقوام در کنار هم قرار داده است تا همدیگر را بهتر بشناسند و هیچ قومی را بر قومی ترجیح نداده است.

بر خود لازم می‌دانم از همه عزیزانی که با شیوه‌های مختلف در فرآیند انجام تحقیق حاضر، اینجانب را یاری نمودند کمال تشکر امتنان را داشته باشم که مطمئناً این مهم بدون بذل توجه و مساعی آن عزیزان به آسانی میسر نمی‌گشت. امیدوارم خداوند تمامی این سروران را در پناه خویش مصون و موفق بدارد.

در بادی امر از استاد گرانقدر **جناب آقای دکتر عباسبندی** در مقام استاد راهنما که پیوسته در مراحل مختلف این پژوهش همانند سالیان تحصیل با متانت و حوصله انجام تحقیق را تسهیل نموده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

تشکر و قدردانی از استاد ارجمند **جناب آقای دکتر توفیق الهویرنلو** که در مقام استاد مشاور، علی‌رغم مشغله‌ی فراوان بر غنای علمی این پژوهش افزودند

تشکر و قدردانی از اساتید محترم **جناب آقایان دکتر غلامرضا جهانشاهلو، دکتر فرهاد حسین‌زاده لطفی** که زحمات زیادی را در دوران تحصیل متحمل شدند.

در آخر از تمام کسانی که در انجام این تحقیق مرا یاری نمودند خصوصاً همسر بردبارم که در خلال این سالها همواره یگانه پشتیبان و مشوق من بوده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به

پدر و مادر و همسر مهربانم

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه‌ای بر نظریه مجموعه‌های فازی

- ۱-۱ مقدمه ۳
- ۱-۲ مفاهیم و تعاریف مقدماتی ۴
- ۱-۳ عملگرهای مجموعه‌های فازی ۱۲
- ۱-۴ اصل گسترش ۱۳
- ۱-۵ اعداد فازی ۱۷

فصل دوم: مروری بر مطالب در رابطه با تحقیق

- ۲-۱ مقدمه ۲۵
- ۲-۲ مفاهیم اساسی ۲۵
- ۲-۳ مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی (قطعی) ۲۶
- ۲-۴ روش اویلر ۳۰
- ۲-۵ روشهای تیلور از مرتبه بالاتر ۳۷
- ۲-۶ روشهای رونگه - کوتا ۴۲
- ۲-۷ معادلات مرتبه بالاتر و دستگاههای معادلات دیفرانسیل ۵۱
- ۲-۸ همگرایی و پایداری ۵۷

فصل سوم: حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی

- ۳-۱ مقدمه: ۶۰
- ۳-۲ روش اویلر فازی ۶۰
- ۳-۳ همگرایی ۶۲
- ۳-۴ روش رونگه کوتای مرتبه چهار ۶۶
- ۳-۵ مساله کوشی فازی ۶۷
- ۳-۶ روش رونگه کوتای فازی مرتبه چهار ۶۸

فصل چهارم: مساله مقدار اولیه فازی

- ۴-۱ مقدمه ۷۷
- ۴-۲ مساله مقدار اولیه مرتبه n ۷۷
- ۴-۳ روش رونگه - کوتا از مرتبه ۴ ۸۲
- ۴-۴ همگرایی و پایداری ۸۴

فصل پنجم: مثالهای عددی

- ۵-۱ مقدمه ۹۲
- ۵-۲ مثالهای عددی: ۹۲
- منابع: ۹۸
- واژنامه ۱۰۲
- چکیده انگلیسی ۱۰۹

چکیده:

در این تحقیق یک روش عددی (روش رونگه-کوتا) برای حل معادلات دیفرانسیل فازي مرتبه n -ام خطي به صورت $y'(x) = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ ارائه می گردد. در ابتدا نشان می دهیم که اگر f در شرط لیپ شیتس صدق کند، این مسأله دارای جواب منحصر به فرد فازي می باشد. سپس برای یافتن تقریبی از این جواب، معادله دیفرانسیل فازي مرتبه n -ام به دو معادله دیفرانسیل قطعی مرتبه n -ام تبدیل شده و روش رونگه-کوتا بر روی هر یک از این معادلات اعمال می شود. در نهایت ثابت می شود، جواب تقریبی بدست آمده، که یک روش تکراری است، پایدار بوده و به جواب مسأله اصلی همگرا است.

فصل اول

مقدمه‌ای بر نظریه مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفیسور لطفی عسگرزاده دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا عرضه شد. این نظریه از زمان ارائه تاکنون گسترش و تعمق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است. به کوتاهی نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای است برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان. این نظریه قادر است بسیاری از مفاهیم و متغیرها و سیستمهایی را که نادقیق و مبهم هستند، چنانچه در عالم واقع اکثراً چنین است، صورتبندی ریاضی بخشد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد.

همچنانکه می‌دانیم در نظریه مجموعه‌ها که زیربنای ریاضیات مدرن است، مجموعه‌ها به صورت گردایه‌ای معین از اشیاء تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش تعریف، مشخص می‌شود. اگر یک شیء مفروض دارای آن ویژگی باشد عضو مجموعه متناظر است و اگر نباشد عضو آن نیست به عنوان مثال فرض کنیم مجموعه مرجع X ، مجموعه اعداد حقیقی فرض شود و P ویژگی «بزرگتر از ده بودن» آنگاه P یک ویژگی خوش تعریف است که یک مجموعه مثلاً A با آن متناظر می‌شود. زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگتر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A است یا خیر. حال فرض کنیم بخواهیم در مورد آن دسته از مجموعه اعداد حقیقی که بزرگ هستند صحبت کنیم. اینکه چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند، بسته به نظر افراد مختلف، فرق می‌کند. به عبارت دیگر، عضویت یا عدم عضویت اعداد در گردایه‌ای با ویژگی بزرگ بودن قطعی نیست. مثلاً آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است و عضو گردایه اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰؟ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰؟ چطور؟ از قضا بیشتر مفاهیم و ویژگیهایی که در زندگی روزمره و واقعی و نیز در شاخه‌های مختلف علوم بویژه علوم انسانی و اجتماعی با آن سرو کار داریم اینگونه‌اند. یعنی مفاهیمی هستند منعطف و مجموعه‌هایی هستند با کرانهای نادقیق. برای مثال ما در زندگی روزمره، کمتر از کودکان بلند قد تر از ۱۱۰cm و زمینهای بزرگتر از ۱۰ هکتار مسافتهای طولانی تر از ۱۰۰km و ... صحبت می‌کنیم بلکه فهم و زبان طبیعی ما بیشتر با مفاهیمی مانند کودکان بلند قد (کوتاه قد)، زمینهای وسیع (کوچک)، اجناس گران (ارزان) سرو کار دارد. همچنین در علوم، به ویژه در علوم اجتماعی و انسانی به جای صحبت از کشورهای دارای ۱۰۰۰ کارخانه به بالا، شهرهای با جمعیت بیشتر از یک میلیون نفرو ...، با مفاهیم و عبارتی مانند جوامع پیشرفته صنعتی، فرهنگهای بومی، تراکم جمعیت، کودکان کند ذهن و ... روبرو هستیم. هیچکدام از این مفاهیم و تعاریف، تعاریف دقیقی نیستند که بتوان برای هر کدام مجموعه‌هایی دقیق تصور کرد. در قلمرو ریاضیات و نظریه مجموعه‌های کلاسیک جایی برای این مفاهیم نیست و قالبی برای صورتبندی این مفاهیم و ابزاری برای تجزیه و تحلیل آنها وجود ندارد.

نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و این ویژگی‌هاست. این نظریه، یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسانها نیز می‌باشد.

قبل از ورود به بحث اصلی و معرفی ساختار ریاضی این نظریه اساس کار پروفیسور عسگر زاده را شرح می‌دهیم.

این کار را با پیگیری مثال فوق درباره اعداد حقیقی بزرگ توضیح می‌دهیم. همانطور که در بالا گفته شد آنچه در مجموعه بودن «اعداد بزرگ» اشکال ایجاد می‌کند، معلوم نبودن عضویت و یا عدم عضویت اعداد مختلف در گردایه «اعداد بزرگ» است. مثلاً اینکه آیا ۱۰۰ عددی بزرگ است؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ و همچنین برای سایر اعداد. پروفیسور عسگرزاده پیشنهاد کردند؛ مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه $[0, 1]$ به عنوان درجه بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر چه یک عدد بزرگتر بود، عدد متناظر برای عضویت آن در A «مجموعه اعداد بزرگ» به یک نزدیکتر باشد و بالعکس هر چه عدد موردنظر کوچکتر بود، عدد مربوط به عضویت آن در A ، به صفر نزدیکتر باشد. به این ترتیب به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست و یا آنکه در این باره ساکت باشیم می‌گوییم درجه بزرگی آن مثلاً 0.7 است. به عبارت دیگر به جای آنکه بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو A است یا خیر می‌گوییم با درجه 0.7 عضو A است. مسلماً در این مورد باید برای هر عدد از R عددی از بازه $I = [0, 1]$ را به عنوان درجه و میزان عضویت و تعلق از A نسبت دهیم. یعنی تابعی در نظر بگیریم که قلمرو آن R و برد آن I باشد. مشاهده می‌شود که توانستیم به یک قالب ریاضی یعنی یک تابع از R به I برای تجزیه و تحلیل اعداد حقیقی بزرگ برسیم. بنابراین اساس کار چیزی نیست جز مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه که برد آن از مجموعه $\{0, 1\}$ به بازه $[0, 1]$ گسترش داده شده است. به این ترتیب می‌توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و مفاهیم و زبان و منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد.

۲-۱ مفاهیم و تعاریف مقدماتی

۱-۲-۱ تعریف (تابع نشانگر)^۱: فرض کنیم X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد، تابع نشانگر هر زیرمجموعه معمولی A از X ، یک تابع از X به مجموعه $\{0, 1\}$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

۱- Characteristic function

$$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\},$$

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

۲-۲-۱ تعریف (تابع عضویت)^۱: فرض کنید X یک مجموعه غیرتهی باشد و $A \subseteq X$ تابع عضویت A به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_A : X \rightarrow [0, 1],$$

بطوریکه $(x \in X)$ $\mu_A(x)$ درجه عضویت عنصر x ، در مجموعه A را نشان می دهد. در حقیقت $\mu_A(x)$ درجه پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A می باشد. نزدیکی مقدار $\mu_A(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه A است و نزدیکی آن به صفر نشان دهنده تعلق کمتر x به A است. در حالی که x کاملاً در A باشد داریم $\mu_A(x) = 1$ و چنانچه x اصلاً در A نباشد داریم $\mu_A(x) = 0$.

۳-۲-۱ تعریف (مجموعه فازی)^۲: در تعریف (۲-۲-۱) زیر مجموعه A از X را یک زیر مجموعه فازی از X گوئیم.

۴-۲-۱ نمادگذاری: برای اختصار و راحتی کار می توان از نماد $A(x)$ به جای $\mu_A(x)$ استفاده نمود. روش متداول توصیف یک مجموعه فازی، نشان دادن آن به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب به صورت زیر است:

$$A = \{ (x, A(x)) \mid x \in X \},$$

اگر X یک مجموعه متناهی (و یا نامتناهی شمارا) به صورت $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ باشد یک زیر مجموعه فازی A از X به صورت های زیر می باشد:

$$A = \left\{ \frac{A(x_1)}{x_1}, \frac{A(x_2)}{x_2}, \dots, \frac{A(x_n)}{x_n} \right\},$$

$$A = \frac{A(x_1)}{x_1} + \frac{A(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{A(x_n)}{x_n},$$

۱- Membership function

۲- Fuzzy set

که در عبارت دوم، منظور از +، اجتماع است نه جمع حسابی. و هنگامی که X یک مجموعه پیوسته باشد نماد زیر به کار می رود:

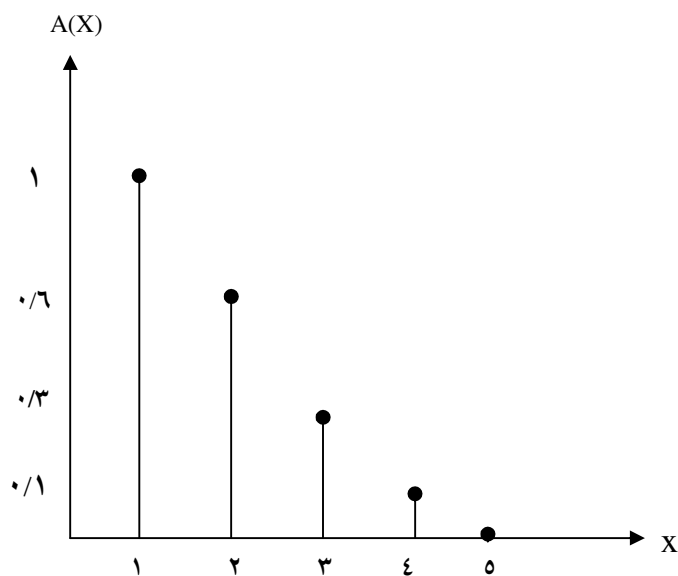
$$A = \int_X \frac{A(x)}{x},$$

که در آن منظور از علامت $\int$ ، اجتماع است. همچنین X هایی را که برای آنها $A(x)=0$ نخواهیم داشت.

۱-۲-۵ مثال: فرض کنید $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ یک زیرمجموعه فازی A از X که کوچک بودن را نشان می دهد، میتواند توسط تابع عضویت زیر تعریف شود:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & , x=1 \\ 0/6 & , x=2 \\ 0/3 & , x=3 \\ 0/1 & , x=4 \\ 0 & , x=5 \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $A(2) = 0/6$ یعنی عدد دو با درجه $0/6$ عضو مجموعه فازی A است.

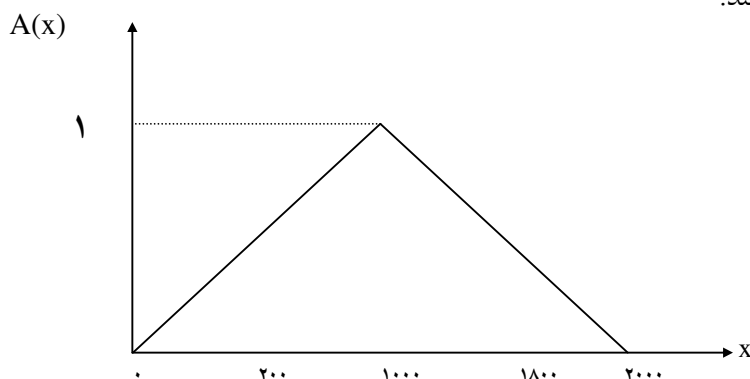


(شکل ۱-۱): نمودار تابع گسسته مجموعه فازی A : کوچک بودن

۱-۲-۶ مثال: فرض کنید $X = [0, 2000]$. یک زیرمجموعه فازی A از X که نشان دهنده ویژگی «نزدیک به ۱۰۰۰» می باشد، می تواند توسط تابع عضویت زیر تعریف شود:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{x}{1000} & , \quad x \leq 1000 \\ \frac{2000 - x}{1000} & , \quad 1000 < x \end{cases}$$

در اینجا $A(200) = A(1800) = 0.2$ یعنی اعداد ۲۰۰ و ۱۸۰۰، هر دو با درجه عضویت ۰/۲ عضو مجموعه فازی A هستند.



(شکل ۲-۱): نمودار تابع عضویت مجموعه فازی A : اعداد نزدیک به ۱۰۰۰

۷-۲-۱ **تعریف (تکیه گاه^۱):** فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $A(x) > 0$ تکیه گاه A نامیده شده و با $SUPP(A)$ نشان داده می شود یعنی:

$$SUPP(A) = \{x \in X \mid A(x) > 0\}.$$

۸-۲-۱ **تعریف (مجموعه فازی نرمال):** مجموعه فازی A از X نرمال نامیده میشود هرگاه فقط یک عضو مانند $x_0 \in X$ وجود داشته باشد به طوریکه $A(x_0) = 1$ در غیر اینصورت آن را زیر نرمال گوئیم.

۹-۲-۱ **تعریف (عدد اصلی مجموعه فازی^۲):** فرض کنید X یک مجموعه مرجع متناهی و A یک زیر مجموعه فازی از آن باشد. عدد اصلی A به صورت زیر تعریف می شود:

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x),$$

۱- Support

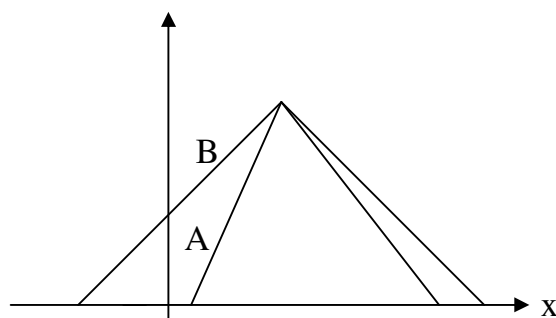
۲- Cardinal number of fuzzy set

در صورتیکه X نامتناهی باشد، عدد اصلی زیرمجموعه فازی A از X در صورت وجود انتگرال زیر به صورت زیر تعریف می شود:

$$|A| = \int_x A(x) dx,$$

۱-۲-۱۰ تعریف (زیر مجموعه های فازی): اگر A و B دو زیر مجموعه فازی از X باشند، A را زیر مجموعه فازی B گوئیم و می نویسیم $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر:

$$\forall x (x \in X \Rightarrow A(x) \leq B(x)),$$



(شکل ۱-۳): A زیر مجموعه فازی B

۱-۲-۱۱ تعریف (تساوی مجموعه های فازی): دو زیرمجموعه فازی A و B از X را مساوی گوئیم و می نویسیم $A = B$ اگر و تنها اگر:

$$\forall x (x \in X \Rightarrow A(x) = B(x)),$$

۱-۲-۱۲ تعریف (مجموعه فازی تهی): زیر مجموعه فازی A از X را تهی می گوئیم اگر و تنها اگر:

$$\forall x (x \in X \Rightarrow A(x) = 0),$$

۱-۲-۱۳ تعریف (مجموعه فازی تام): زیر مجموعه A فازی از X را تام می گوئیم اگر و تنها اگر:

$$\forall x (x \in X \Rightarrow A(x) = 1),$$

واضح است که اگر A زیرمجموعه فازی تام از X و B یک زیر مجموعه فازی از X باشد همواره داریم:

$$B \subseteq A,$$

۱-۲-۱۴ تعریف (متمم مجموعه فازی^۱): زیر مجموعه فازی A' از X که با تابع عضویت زیر تعریف می شود متمم زیرمجموعه فازی A از X می نامیم.

$$\forall x(x \in X \Rightarrow A'(x) = 1 - A(x)),$$

همچنین داریم: $X' = \emptyset$ و $\emptyset' = X$.

۱-۲-۱۵ تعریف (α - برش)^۲: عناصری از X را که درجه عضویت آنها در زیر مجموعه فازی A از X ، حداقل α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α - برش A گوئیم و به A_α نمایش می دهیم. پس:

$$A_\alpha = \{x \in X \mid A(x) \geq \alpha\}, \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

۱-۲-۱۶ مثال: فرض کنیم $X = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. زیر مجموعه فازی A از X به صورت زیر تعریف شود:

$$A = \left\{ \frac{0.2}{-2}, \frac{0.5}{-1}, \frac{0.9}{0}, \frac{0.32}{1}, \frac{0.7}{2}, \frac{0.1}{3} \right\},$$

در این صورت داریم:

$$A_\alpha = \begin{cases} \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} & , \quad 0 < \alpha \leq 0.2 \\ \{-1, 0, 2\} & , \quad 0.2 < \alpha \leq 0.32 \\ \{0\} & , \quad 0.32 < \alpha \leq 0.5 \\ \emptyset & , \quad 0.5 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

۱-۲-۱۷ تعریف (مجموعه فازی محدب^۲): زیر مجموعه فازی A از X را محدب گوئیم اگر و تنها اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall \lambda [(x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1]) \Rightarrow A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(A(x_1), A(x_2))].$$

۱-۲-۱۸ مثال: فرض کنیم $X = R$. زیر مجموعه فازی A از X که بیانگر ویژگی «تقریباً صفر» و با تابع عضویت زیر تعریف می شود یک مجموعه فازی محدب است.

۱- Complement of fuzzy set

۲- Convex fuzzy set

$$A(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty$$

زیرا اگر فرض کنیم $\min[A(x_1), A(x_2)] = A(x_1)$ (حالت دیگر اثبات مشابه می باشد) در اینصورت:

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \leq 0 \text{ پس: } -x_1x_2 \geq -\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}$$

$$e^{-x_1x_2} \geq e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{x_2^2}{2}} = A(x_1) \cdot A(x_2),$$

از طرفی:

$$\begin{aligned} A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] &= e^{-\frac{\lambda^2 x_1^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(1-\lambda)^2 x_2^2}{2}} \cdot e^{-\lambda(1-\lambda)x_1x_2} \\ &= [A(x_1)]^{\lambda^2} \cdot [A(x_2)]^{(1-\lambda)^2} \cdot e^{-\lambda(1-\lambda)x_1x_2} \\ &\geq [A(x_1)]^{\lambda^2} \cdot [A(x_2)]^{(1-\lambda)^2} \cdot [A(x_1) \cdot A(x_2)]^{\lambda(1-\lambda)} \\ &= [A(x_1)]^{\lambda^2 + (1-\lambda)^2 + 2\lambda(1-\lambda)} \\ &= A(x_1) \end{aligned}$$

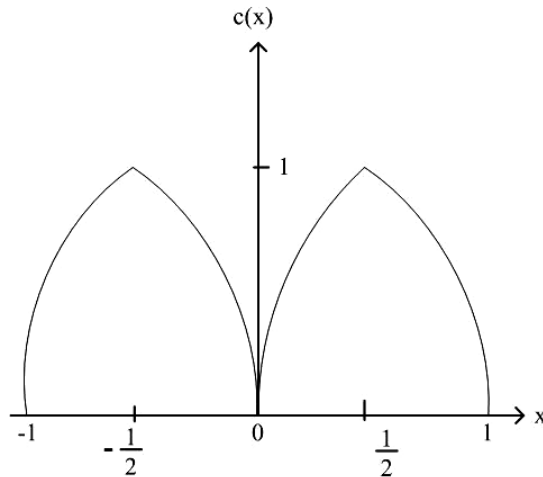
۱-۲-۱۹ مثال: فرض کنید زیرمجموعه فازی C از R نشان دهنده ویژگی «قدر مطلق عدد، نزدیک به $\frac{1}{2}$ »

با تابع عضویت زیر تعریف شود.

$$C(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 1 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2, & -1 < x \leq 0 \\ 1 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$$

در اینجا C یک مجموعه فازی محدب نیست زیرا با فرض $\lambda = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -\frac{1}{2}$ و داریم:

$$C[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] = 0, \quad \min[C(x_1), C(x_2)] = 1,$$



(شکل ۱-۴): نمودار تابع عضویت مجموعه فازی غیر محدب C

۲۰-۲-۱ تعریف (مجموعه فازی کراندار)^۱: زیر مجموعه فازی A از X را کراندار گوییم اگر $\alpha -$ برشهای A (برای هر $\alpha > 0$) کراندار باشد یعنی:

$$\forall \alpha > 0 \quad \exists M_\alpha ; \forall x (x \in A_\alpha \Rightarrow \|x\| \leq M_\alpha),$$

۲۱-۲-۱ مثال: مجموعه فازی C در مثال فوق یک مجموعه فازی کراندار است زیرا برای هر $\alpha > 0$ می توان در نظر گرفت $M_\alpha = 1$.

۲۲-۲-۱ مثال: زیرمجموعه فازی A از R^+ نشان دهنده ویژگی «بزرگ بودن» با تابع عضویت زیر تعریف می شود.

$$A(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 10 \\ \frac{x-10}{100}, & 10 \leq x \leq 100 \\ 1, & 100 \leq x \end{cases}$$

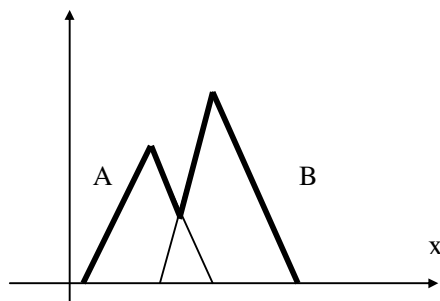
A یک مجموعه فازی کراندار نیست زیرا برای هر $\alpha > 0$ داریم $A_\alpha = R^+$ پس هیچ $\alpha -$ برش A کراندار نیست.

۱- Bounded fuzzy set

۳-۱ عملگرهای مجموعه های فازی

۱-۳-۱ تعریف (اجتماع)^۱: اجتماع دو زیر مجموعه فازی A و B از X به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

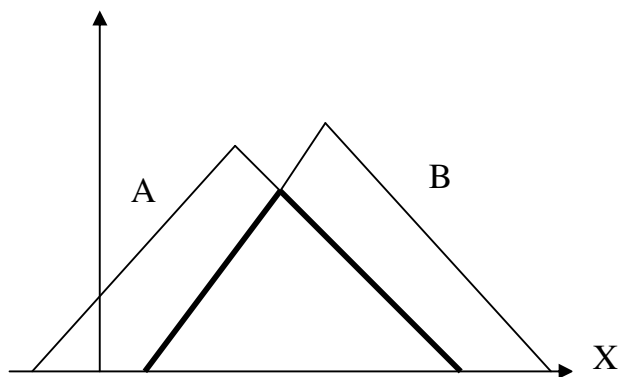
$$(A \cup B)(x) = \max [A(x), B(x)] = A(x) \vee B(x), \quad (\forall x \in X),$$



(شکل ۱-۵): نمودار تابع عضویت A و B و $A \cup B$

۲-۳-۱ تعریف (اشتراک)^۲: اشتراک دو زیرمجموعه فازی A و B از X به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف میشود:

$$(A \cap B)(x) = \min [A(x), B(x)] = A(x) \wedge B(x), \quad (\forall x \in X),$$



(شکل ۱-۶): نمودار تابع عضویت A و B و $A \cap B$

۱- Union

۲- Intersection

۳-۳-۱ تذکر: اگر X یک مجموعه مرجع و $\emptyset$ مجموعه فازی تهی باشد روابط زیربرقرارند:

$$\forall x(x \in X \Rightarrow X(x)=1),$$

$$\forall x(x \in X \Rightarrow \emptyset(x)=0),$$

تنها قوانین مربوط به مجموعه‌های معمولی که در زمینه مجموعه‌های فازی برقرار نیست قوانین شمولیت^۱ و طرد^۲ است. یعنی برای مجموعه‌های فازی در حالت کلی:

$$A \cap A' \neq \emptyset,$$

$$A \cup A' \neq X,$$

۴-۳-۱ مثال: فرض کنیم $X = \{1, 2, 3\}$ و A زیر مجموعه فازی از X که نشان‌دهنده ویژگی «تقریباً»^۲

باشد که با تابع عضویت زیر تعریف میشود.

$$A(x) = \begin{cases} 0/2 & , & x=1 \\ 1 & , & x=2 \\ 0/2 & , & x=3 \end{cases} \quad A'(x) = \begin{cases} 0/8 & , & x=1 \\ 0 & , & x=2 \\ 0/8 & , & x=3 \end{cases}$$

$$(A \cup A')(x) = \begin{cases} 0/8 & , & x=1 \\ 1 & , & x=2 \\ 0/8 & , & x=3 \end{cases} \Rightarrow (A \cup A')(x) \neq X(x)$$

$$(A \cap A')(x) = \begin{cases} 0/2 & , & x=1 \\ 0 & , & x=2 \\ 0/2 & , & x=3 \end{cases} \Rightarrow (A \cap A')(x) \neq \emptyset(x)$$

۴-۱ اصل گسترش^۳

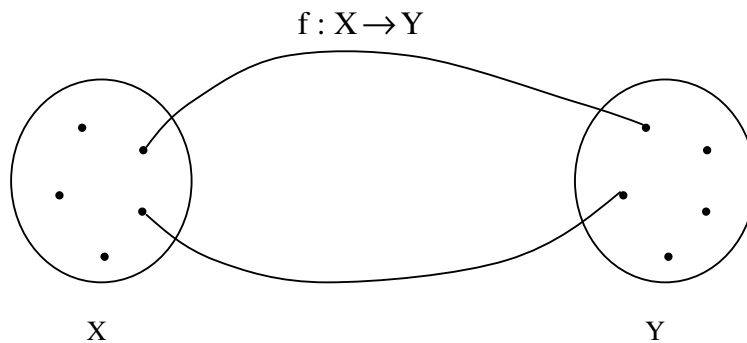
اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی و کلیدی در نظریه مجموعه‌های فازی است. این اصل ابزاری است برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیرفازی، به گونه‌ای که به صورت کمیت‌های فازی درآیند. این اصل به ویژه در تعمیم عملگرهای جبری بین اعداد و تعریف این عملگرها برای اعداد فازی مفید است.

۱-Inclusion

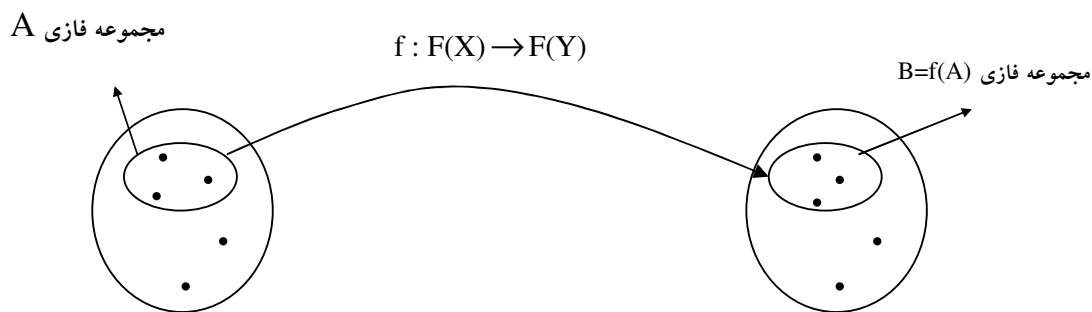
۲- Exclusion

۳- Extension principle

فرض کنید یک تابع معمولی مانند $f: X \rightarrow Y$ داریم. این تابع به هر x از X نقطه ای از Y را می‌نگارد. حال می‌خواهیم f را طوری گسترش دهیم که به جای اینکه بر یک نقطه از X عمل کند بر یک زیر مجموعه فازی از X عمل کند. یعنی قلمرو f از X به $F(X)$ (مجموعه زیرمجموعه‌های فازی X) تعمیم داده شود. آنچه مهم است، تعریف مقدار حاصل عمل f بر یک زیرمجموعه فازی از X ، مثلاً A است. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$ یعنی حاصل عمل f بر A دیگر یک نقطه از Y نباشد بلکه یک زیرمجموعه فازی از Y مانند B باشد. در حقیقت هدف اصلی از مطالب فوق این است که بدانیم تصویر یک عضو با میزان عضویتش از یک مجموعه فازی تحت یک تابع مانند f چه میزان عضویتی در برد تابع دارد.



(شکل ۱-۷): روش عمل یک تابع معمولی



(شکل ۱-۸): روش عمل یک تابع براساس اصل گسترش

۱-۴-۱ تعریف: فرض کنید X و Y دو مجموعه و f یک تابع به صورت $f: X \rightarrow Y$ و A یک زیر مجموعه فازی از X باشد. اصل گسترش بیان می‌کند که می‌توانیم قلمرو f را به زیر مجموعه‌های فازی X و به صورت زیر گسترش دهیم:

$$B = f(A) = \{ (y, B(y)) \mid y = f(x), x \in X \},$$

که در آن

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{x, y=f(x)} A(x), & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \cdot, & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

۱-۴-۲ مثال: فرض کنیم $X=Z$ و $y = f(x) = x^2$ زیرمجموعه فاز A از X بیانگر «تقریباً دو» به صورت زیر باشد.

$$A = \left\{ \frac{\cdot}{-2}, \frac{\cdot}{-1}, \frac{\cdot/6}{\cdot}, \frac{\cdot/8}{1}, \frac{1}{2}, \frac{\cdot/8}{3}, \frac{\cdot/6}{4}, \frac{\cdot/4}{5}, \frac{\cdot/2}{6} \right\},$$

در این صورت باتوجه به اصل گسترش داریم:

$$B = \left\{ \frac{\cdot/6}{\cdot}, \frac{\cdot/8}{1}, \frac{1}{4}, \frac{\cdot/8}{9}, \frac{\cdot/6}{16}, \frac{\cdot/4}{25}, \frac{\cdot/2}{36} \right\},$$

در این مثال اصل گسترش بیان می کند که با اعمال تابع $y = f(x) = x^2$ بر مجموعه فازی «تقریباً دو» مجموعه فازی «مجذور، تقریباً دو» حاصل شده است.

۱-۴-۳ تعریف (حاصلضرب دکارتی)^۱: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ ، n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times \dots \times X_n$ حاصلضرب دکارتی آنها باشد. همچنین $A_1, \dots, A_n$ زیرمجموعه فازی به ترتیب از $X_1, \dots, X_n$ باشند. در این صورت حاصلضرب دکارتی $A_1, \dots, A_n$ به صورت یک زیر مجموعه فازی از X تعریف می شود که برای آن:

$$A_1 \times \dots \times A_n = \int_{X_1 \times \dots \times X_n} \min \{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\} / (x_1, \dots, x_n),$$

به عبارت دیگر:

$$(A_1 \times \dots \times A_n)(x_1, \dots, x_n) = \min \{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\},$$

۱-۴-۴ مثال: فرض کنید $X_1 = \{1, 2\}$ و $X_2 = \{1, 2, 3\}$ و $A_1 = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{\cdot/2}{2} \right\}$ و $A_2 = \left\{ \frac{\cdot}{1}, \frac{\cdot/4}{2}, \frac{\cdot/7}{3} \right\}$.
آنگاه:

$$A_1 \times A_2 = \left\{ \frac{\cdot}{(1,1)}, \frac{\cdot/4}{(1,2)}, \frac{\cdot/7}{(1,3)}, \frac{\cdot}{(2,1)}, \frac{\cdot/2}{(2,2)}, \frac{\cdot/2}{(2,3)} \right\},$$

^۱- Cartesian product

۱-۴-۵ تعریف (اصل گسترش): مفروضات تعریف قبل را در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید f یک نگاشت از X به مجموعه Y باشد. یعنی $y = f(x_1, \dots, x_n)$. حال، حاصل عمل f بر n زیر مجموعه فازی $A_1, \dots, A_n$ به عنوان یک زیر مجموعه فازی B از Y به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B = f(A_1, \dots, A_n) = \{ (y, B(y)) \mid y = f(x_1, \dots, x_n), x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n \}$$

که در آن:

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{x_1, \dots, x_n} \min \{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\} & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ y = f(x_1, \dots, x_n) & \\ . & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

۱-۴-۶ مثال: فرض کنید $X_1 = X_2 = Z$ و A_1 و A_2 دو زیر مجموعه فازی از Z به ترتیب نمایشگر «تقریباً صفر» و «تقریباً یک» به صورت زیر باشند:

$$A_1 = \left\{ \frac{0.2}{-2}, \frac{0.5}{-1}, \frac{1}{0}, \frac{0.5}{1}, \frac{0.2}{2} \right\},$$

$$A_2 = \left\{ \frac{0.2}{-1}, \frac{0.5}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0.2}{3} \right\},$$

همچنین $f: X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ به صورت $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ در اینصورت

$$A_1 \times A_2 = \left\{ \frac{0.2}{(-2, -1)}, \frac{0.2}{(-2, 0)}, \dots, \frac{1}{(0, 1)}, \frac{0.5}{(0, 2)}, \dots, \frac{0.2}{(2, 3)} \right\},$$

و بنابراین طبق اصل گسترش

$$B = f(A_1, A_2) = \left\{ \frac{0.5}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0.5}{2}, \frac{0.5}{4}, \frac{0.5}{5}, \frac{0.2}{8}, \frac{0.2}{9}, \frac{0.2}{10}, \frac{0.2}{13} \right\},$$

به عنوان مثال اگر $y = 2$ پس زوجهای مرتبی که تابع f بر روی آنها اثر نموده و عدد دو حاصل شده عبارتند از $(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)$. در اینصورت:

$$\begin{aligned} B(2) &= \sup \{ (A_1 \times A_2)(-1, -1), (A_1 \times A_2)(-1, 1), (A_1 \times A_2)(1, -1), (A_1 \times A_2)(1, 1) \} \\ &= \sup \{ 0.2, 0.5, 0.2, 0.5 \} = 0.5 \end{aligned}$$

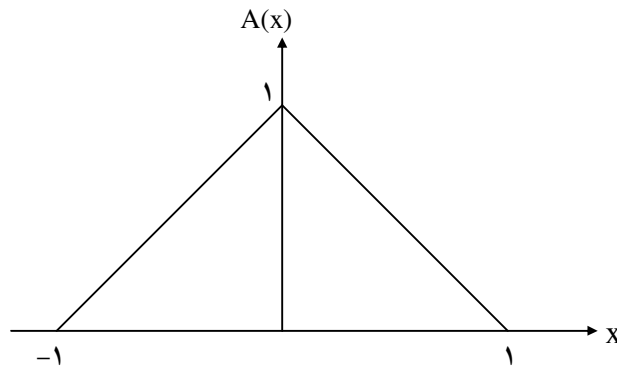
۵-۱ اعداد فازی^۱

۱-۵-۱ تعریف (اعداد فازی): زیرمجموعه فازی A از X را یک عدد فازی گوئیم هر گاه نرمال، محدب و دارای تابع عضویت پیوسته و کراندار باشد.

۲-۵-۱ قرارداد: مجموعه تمام اعداد فازی را با E نمایش می‌دهیم.

۳-۵-۱ مثال: زیرمجموعه فازی A از R با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می‌توان A را عدد فازی «تقریباً صفر» تعبیر کرد.

$$A(x) = \begin{cases} 1 - |x| & , x \in [-1, 1] \\ 0 & , o.w \end{cases}$$



(شکل ۱-۹): نمودار تابع عضویت عددی فازی «تقریباً صفر»

۴-۵-۱ تعریف (اعداد فازی LR): این اعداد نوع خاصی از اعداد فازی هستند که ویژگی آنها در نوع تابع عضویت آنهاست. اگر عدد فازی A دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد:

$$L(x) = \frac{1}{1+x^2} A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & , x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & , x > m \end{cases}$$

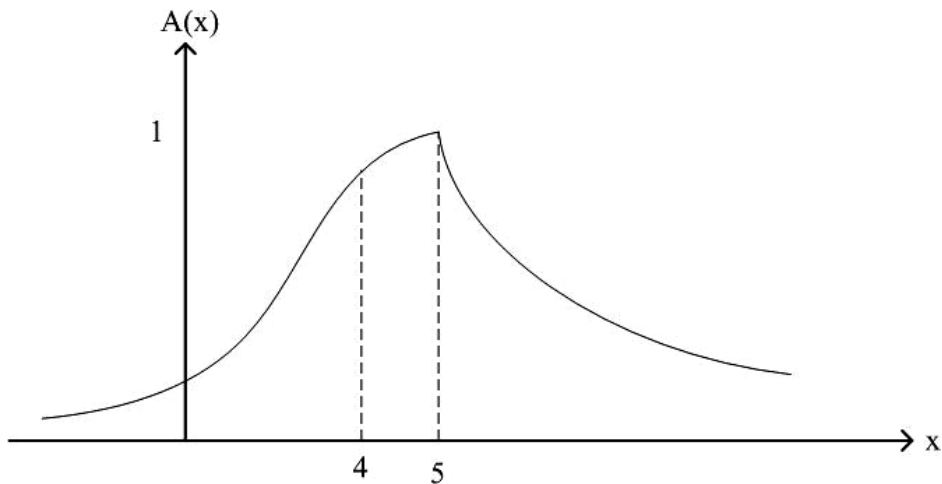
^۱- Fuzzy numbers

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ و $L(\cdot) = R(\cdot) = 1$ ، آنگاه A را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $A = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. L و R را توابع مرجع، m را میانه و α, β را به ترتیب پهنای چپ و راست A می‌نامیم.

۱-۵-۵ مثال: فرض کنید و $R(x) = \frac{1}{1+2|x|}$ و $m=5$ و $\alpha=2$ و $\beta=3$.

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{5-x}{2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{5-x}{2}\right)^2}, & x \leq 5 \\ R\left(\frac{x-5}{3}\right) = \frac{1}{1+\left|\frac{2(x-5)}{3}\right|}, & x > 5 \end{cases}$$

A را می‌توانیم عدد فازی «تقریباً ۵» تعبیر کنیم.



(شکل ۱-۱۰): نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً پنج»

۱-۵-۶ تعریف (عدد فازی L): اگر $A = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$. در این صورت A را یک عدد فازی L نامیده و آن را با نماد $A(m, \alpha, \beta)_L$ نمایش می‌دهیم.

۷-۵-۱ تعریف (عدد فازی مثلثی)^۱: فرض کنید $A = (m, \alpha, \beta)_L$. در این صورت A را یک عدد فازی مثلثی گوئیم اگر:

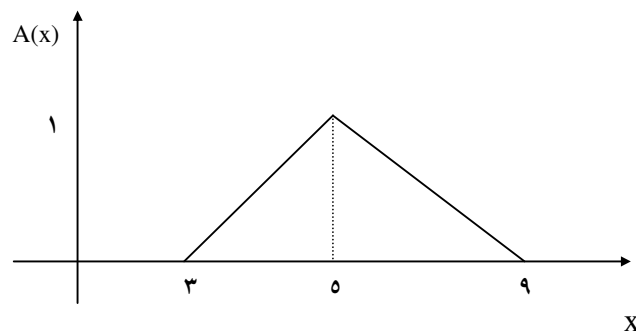
$$L(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

۸-۵-۱ مثال: فرض کنید

$$L(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases} \text{ و } A = (5, 2, 4)_L \text{ در اینصورت:}$$

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{5-x}{2}\right) = \frac{x-3}{2} & , \quad 3 \leq x \leq 5 \\ L\left(\frac{x-5}{4}\right) = \frac{9-x}{4} & , \quad 5 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

عدد فازی A را می توان عدد فازی «تقریباً ۵» تعبیر کرد.



(شکل ۱۱-۱): نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً ۵»

۹-۵-۱ تعریف (عدد فازی نرمال)^۲: فرض کنید $A = (m, \alpha, \beta)_L$. در این صورت A را یک عدد فازی نرمال گوئیم هر گاه $L(x) = e^{-x^2}$.

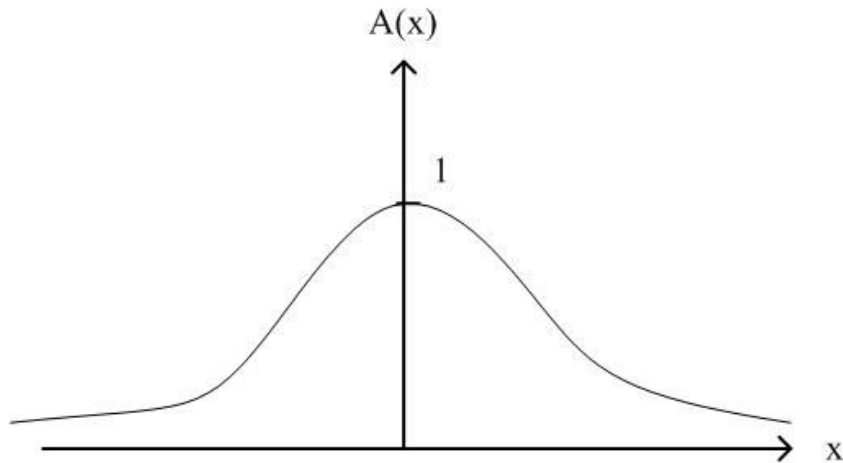
۱- Triangular fuzzy number

۲- Normal fuzzy number

۱-۵-۱۰ مثال: فرض کنیم $L(x) = e^{-x^2}$ و $A = (0, 1, 1)_L$ در اینصورت:

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{0-x}{1}\right) = e^{-x^2} & , \quad x \leq 0 \\ L\left(\frac{x-0}{1}\right) = e^{-x^2} & , \quad x > 0 \end{cases}$$

عدد فازی A را می توان عدد فازی «تقریباً صفر» تعبیر کرد.



(شکل ۱-۱۲): نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً صفر»

۱-۵-۱۱ تعریف (عدد فازی سهموی^۱): فرض کنید $A = (m, \alpha, \beta)_L$. در این صورت A را یک عدد

$$L(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$$

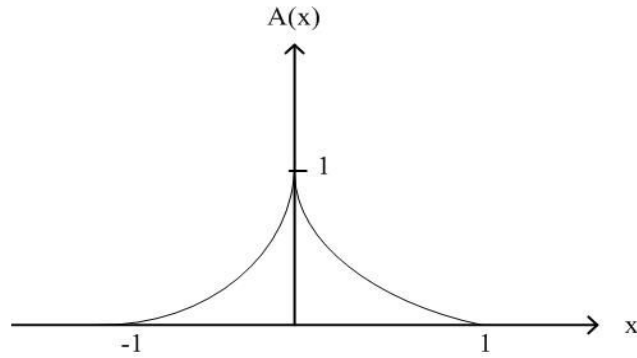
فازی سهموی گوئیم هر گاه:

۱-۵-۱۲ مثال: فرض کنیم $L(x) = \begin{cases} 1-x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad o.w \end{cases}$ و $A = (0, 1, 1)_L$ در اینصورت:

$$A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{0-x}{1}\right) = 1-x^2 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ L\left(\frac{x-0}{1}\right) = 1-x^2 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

عدد فازی A را می توان عدد فازی «تقریباً صفر» تعبیر کرد.

^۱- Parabolic fuzzy number



(شکل ۱-۱۳): نمودار تابع عضویت عدد فازی «تقریباً صفر»

۱-۵-۱۳ تعریف (فرم پارامتری عدد فازی): فرم پارامتری یک عدد فازی دلخواه را با یک زوج مرتب به

صورت $(\underline{U}(r), \bar{U}(r))$ که $0 \leq r \leq 1$ نشان می‌دهیم و شرایط زیر برقرار است.

(۱) $\underline{U}(r)$ یک تابع کراندار، غیرنزولی و پیوسته چپ روی $[0, 1]$ است.

(۲) $\bar{U}(r)$ یک تابع کراندار، غیرصعودی و پیوسته چپ روی $[0, 1]$ است.

(۳) برای $0 \leq r \leq 1$ ، $\underline{U}(r) \leq \bar{U}(r)$

واضح است که یک عدد قطعی β به صورت $\underline{U}(r) = \bar{U}(r) = \beta$ ، $0 \leq r \leq 1$ می‌باشد.

فرض کنیم E تمام اعداد فازی محدب، نرمال و نیم پیوسته بالا که همه α ترازهای آن پیوسته اند، باشد.

این بدان معنی است که اگر $v \in E$ آنگاه مجموعه α -ترازهای $[v]_\alpha = \{s \mid v(s) \geq \alpha\}$ یک بازه بسته

کراندار است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$[v]_\alpha = [\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)], \alpha \in (0, 1],$$

و داریم $[v]_\alpha = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} [v]_\alpha}$.

دو عدد فازی u و v مساوی نامیده، اگر $u = v$ ، اگر برای هر $s \in \mathfrak{R}$ داشته باشیم $u(s) = v(s)$ و یا برای

هر $\alpha \in [0, 1]$ داشته باشیم $[u]_\alpha = [v]_\alpha$

۱-۵-۱۴ لم: اگر $u, v \in E$ در این صورت برای $\alpha \in (0, 1]$ داریم

$$[u + v]_\alpha = [\underline{u}(\alpha) + \underline{v}(\alpha), \bar{u}(\alpha) + \bar{v}(\alpha)],$$

$$[u.v]_\alpha = [\min k, \max k],$$

که در آن

$$k = \{\underline{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \underline{u}(\alpha)\bar{v}(\alpha), \bar{u}(\alpha)\underline{v}(\alpha), \bar{u}(\alpha)\bar{v}(\alpha)\}.$$

۱-۵-۱۵ لم: فرض کنیم $\alpha \in (0, 1]$, $[\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)]$ یک خانواده از بازه های غیر تهی باشند. اگر

$$(\text{الف}) \quad 0 < \alpha \leq \beta, \quad [\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)] \supset [\underline{v}(\beta), \bar{v}(\beta)]$$

و

$$(\text{ب}) \quad [\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{v}(\alpha_k), \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}(\alpha_k)] = [\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)]$$

که در آن (α_k) یک دنباله غیر نزولی همگرا به $\alpha \in (0, 1]$ است، آنگاه خانواده $[\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)]$, $\alpha \in (0, 1]$, مجموعه های α -تراز یک عدد فازی مانند $v \in E$ نمایش می دهد. بالعکس اگر $[\underline{v}(\alpha), \bar{v}(\alpha)]$, $\alpha \in (0, 1]$ مجموعه های α -تراز یک عدد فازی مانند $v \in E$ باشند آنگاه شرایط (الف) و (ب) برقراراند.

۱-۵-۱۶ تعریف مشتق سیکالا: فرض کنیم I یک بازه حقیقی باشد. نگاشت $v: I \rightarrow E$ یک فرایند فازی

نامیده میشود و ما α -ترازهای آن را به $[\underline{v}(t, \alpha), \bar{v}(t, \alpha)]$ نمایش می دهیم. مشتق سیکالای v از $v'(t)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$[v'(t)]_\alpha = [\underline{v}'(t, \alpha), \bar{v}'(t, \alpha)], \quad \alpha \in (0, 1]$$

مشروط بر آنکه بازده های فوق تشکیل α -ترازهای عدد فازی $v'(t)$ را بدهد.

۱-۵-۱۷ تعریف انتگرال فازی: یک انتگرال فازی از فرایند فازی نمودن v , $\int_a^b v(t) d(t)$ برای a, b به صورت زیر تعریف می شود.

$$\alpha \in (0, 1] \quad \int_a^b v(t) d(t) \Big|_\alpha = \left[\int_a^b \underline{v}(t, \alpha) d(t), \int_a^b \bar{v}(t, \alpha) d(t) \right],$$

مشروط به آنکه انتگرال لیگ در سمت راست موجود باشد.

۱-۵-۱۸ تبصره: اگر $v: I \rightarrow E$ مشتق پذیر سیکالا و مشتق سیکالای v' روی I انتگرال پذیر باشد، آنگاه

$$v(t) = v(a) + \int_a^b v'(s) d(s), \quad a, t \in I$$

۱-۵-۱۹ تعریف فاصله هاسدورف: فرض کنیم u, v مجموعه های فازی در E باشند. در اینصورت

فاصله ها سدورف آنها که به صورت $D(u, v)$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود

$$D: E \times E \rightarrow R_+ \cup \{0\},$$

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} \max \{ |\underline{u}(\alpha) - \underline{v}(\alpha)|, |\overline{u}(\alpha) - \overline{v}(\alpha)| \}.$$

بدین معنی که $D(u, v)$ بیشترین فاصله بین α -ترازهای u و v است

فرض کنیم $u \in E^n$ یک بردار فازی n -بعدی باشد. در اینصورت $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t$ و α -تراز آن یک بردار بازه ای n -بعدی به صورت زیر است

$$[u]_{\alpha} = ([u_1]_{\alpha}, \dots, [u_n]_{\alpha})^t,$$

که برای $i=1, \dots, n$ داریم $u_i \in E$. همچنین می توان نوشت:

$$[u]_{\alpha} = [\underline{u}(\alpha), \overline{u}(\alpha)] = ([\underline{u}_1(\alpha), \overline{u}_1(\alpha)], \dots, [\underline{u}_n(\alpha), \overline{u}_n(\alpha)])^t.$$

فصل دوم

مروری بر مطالب در رابطه با تحقیق

۱-۲ مقدمه

در این فصل ابتدا روش های اویلر و تیلور و قضایای مربوط به آنها که زیربنای روش رونگه-کوتا است مطرح می شود سپس روش رونگه-کوتای مرتبه ۴ برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه ۱ در حالت قطعی را شرح داده و شرایطی، که روی آن یک معادله دیفرانسیل دارای جواب منحصر به فرد است را مطرح می نماید. در پایان فصل چگونگی اعمال روش رونگه-کوتا برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه- n و مباحث مربوط در خصوص همگرایی این روش به جواب معادله دیفرانسیل مفروض به صورت مبسوط مورد مطالعه قرار خواهد گرفت.

۲-۲ مفاهیم اساسی

در این بخش تعریف مرتبه همگرایی که در حالت خاص مفهومی برای شناسایی میزان سرعت همگرایی یک روش عددی به جواب معادله دیفرانسیل است ارائه می گردد.

۱-۲-۲ تعریف (مرتبه همگرایی): فرض کنید دنباله $\{x_n\}$ به عدد α همگرا باشد و اعداد ثابت، حقیقی

و مثبت c و p چنان باشند که $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{n+1} - \alpha}{(x_n - \alpha)^p} \right| = C$ در این صورت p را مرتبه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ به α نامند و می گویند همگرایی دنباله $\{x_n\}$ به α از مرتبه p است.

۲-۲-۲ تعریف ((اوی بزرگ) O): اگر $f(h)$ و $g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره

$g(h) \neq 0$ و داشته باشیم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = C \neq 0$ در این صورت می گوئیم $f(h) = O(g(h))$.

در حالت خاصی که $g(h) = h^p$ که در آن $P \in R^+$ داریم: $f(h) = O(h^p)$ هرچه p بزرگتر باشد $f(h)$ سریعتر به صفر میل می کند.

۳-۲-۲ تعریف ((اوی کوچک) o): اگر $f(h)$ و $g(h)$ دو تابع از h باشند، همواره $g(h) \neq 0$ و داشته

باشیم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{g(h)} = 0$ در این صورت می گوئیم $f(h) = o(g(h))$ و اگر $g(h) = h^p$ آنگاه $f(h) = o(h^p)$ به عبارت دیگر $f(h)$ سریعتر از h^p به صفر میل می کند.

۴-۲-۲ نماد: اگر $f(h)$ و $g(h)$ توابعی از h داشته باشیم

$f(h) = g(h) + O(h^P)$ در این صورت اصطلاحاً گفته می‌شود $g(h)$ تقریبی از $f(h)$ و خطا متناسب با h^P است.

۲-۳ مسائل مقدار اولیه در معادلات دیفرانسیل معمولی (قطعی)

یک مسئله مقدار اولیه مرتبه اول در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad \alpha \leq t \leq b \quad \text{به ازای هر} \quad (1-2)$$

با شرط اولیه

$$y(\alpha) = \alpha$$

و هدف تقریب جواب $y(t)$ از مسئله فوق است.

پیش از مبادرت به حل یک مسئله مقدار اولیه، می‌خواهیم بدانیم آیا جوابی وجود دارد و اگر چنین است، جواب منحصر بفرد است. بعلاوه، چون مسائل موجود در بررسی پدیده‌های فیزیکی معمولاً حالت واقعی را تقریب می‌کنند، جالب است بدانیم آیا تغییرات کوچکی در صورت مسئله موجب تغییرات کوچکی در جواب می‌شوند. این مطلب نیز مهم است که به دلیل استفاده از روشهای عددی احتمال خطاهای گرد کردن وجود دارد.

برای بحث در این مسائل به چند تعریف و نتایجی از نظریه معادلات دیفرانسیل معمولی نیاز داریم.

۲-۳-۱ تعریف: گوییم تابع $f(t, y)$ با متغیر y بر مجموعه $D \subset R^2$ در شرط لیب شیتس صدق می‌کند در صورتی که یک ثابت مانند $L > 0$ با این خاصیت وجود داشته باشد که هر وقت $(t, y_1), (t, y_2) \in D$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

ثابت L را یک ثابت لیب شیتس برای f گوییم.

۲-۳-۲ مثال: هرگاه $D = \{(t, y) \mid 1 \leq t \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$ و $f(t, y) = t|y|$ ، آنگاه به ازای هر

$$(t, y_1), (t, y_2) \in D$$

$$\begin{aligned} |f(t, y_1) - f(t, y_2)| &= |t|y_1| - t|y_2|| \\ &= |t| ||y_1| - |y_2|| \\ &\leq 2|y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

لذا، f با متغیر y بر D در شرط لیپ شیتس با ثابت لیپ شیتس ۲ صدق می کند. درواقع، در این مسئله، کوچکترین مقدار ممکن برای ثابت لیپ شیتس عبارت است از $L=2$.

۲-۳-۳ تعریف: گوییم مجموعه $D \subset R^2$ محدب است اگر، هر وقت $(t_1, y_1), (t_2, y_2)$ متعلق به D باشند، نقطه

$$f((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$$

نیز به ازای هر λ ، که $0 \leq \lambda \leq 1$ ، متعلق به D باشد.

به عبارت هندسی، تعریف ۲-۳-۳ بیان می کند که یک مجموعه محدب است در صورتی که هر وقت دو نقطه متعلق به این مجموعه باشد، تمام پاره خط مستقیم بین آن دو نقطه نیز متعلق به این مجموعه باشد.

۲-۳-۴ قضیه: فرض کنیم $f(t, y)$ بر یک مجموعه محدب $D \subset R^2$ تعریف شده باشد. اگر ثابتی چون $L > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $(t, y) \in D$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right| \leq L \quad (2-2)$$

آنگاه f نسبت به متغیر y بر D در شرط لیپ شیتس با ثابت لیپ شیتس L صدق می کند. همانطور که قضیه زیر نشان می دهد، اغلب سودمند است تعیین شود که آیا تابعی با یک مسئله مقدار اولیه نسبت به متغیر دوم آن در شرط لیپ شیتس صدق می کند، و آیا بکار بردن شرط (۲.۲) عموماً از تعریف خیلی ساده تر است یا نه. بهر حال، باید گفت که قضیه ۲-۳-۴ فقط شرایط کافی برای برقراری شرط لیپ شیتس را ارائه می دهد؛ بررسی مجدد مثال ۱ نشان می دهد که این شرایط حتماً الزامی نیستند. قضیه زیر شرحی است از قضیه اساسی وجود و یکتایی برای معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول. گرچه این قضیه، با تقلیل مفروضات به نحوی، قابل اثبات است، ولی برای اهداف ما این شکل قضیه کفایت می کند. [اثبات این قضیه، تقریباً به این شکل، را می توان در بیرکف^۱ و روتا^۲]، صفحات ۱۰۳ و ۱۱۵-۱۱۲ یافت.]

۲-۳-۵ قضیه: فرض کنیم $D = \{(t, y) \mid \alpha \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ و $f(t, y)$ بر D پیوسته باشد. هرگاه f نسبت به متغیر y بر D در شرط لیپ شیتس صدق کند، آنگاه مسئله مقدار اولیه

^۱. Birkhoff

^۲. Rota

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

دارای جواب منحصر بفرد $y(t)$ ، به ازای $\alpha \leq t \leq b$ است.

۲-۳-۶ مثال: مسئله مقدار اولیه

$$y' = 1 + t \sin(ty), \quad 0 \leq t \leq 2, \quad y(0) = 0,$$

را در نظر می گیریم. با ثابت گرفتن t و بکار بردن قضیه مقدار میانگین در تابع

$$f(t, y) = 1 + t \sin(ty)$$

در می یابیم که هر وقت $y_1 < y_2$ ، نقطه ای مانند ξ ، که $y_1 < \xi < y_2$ ، وجود دارد که

$$t^2 \cos(\xi t) = \frac{\partial}{\partial y} f(t, \xi) = \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1}$$

لذا، به ازای تمام $y_1 < y_2$ ،

$$\begin{aligned} |f(t, y_2) - f(t, y_1)| &= |y_2 - y_1| |t^2 \cos(\xi t)| \\ &\leq 4 |y_2 - y_1|, \end{aligned}$$

و f نسبت به متغیر y در شرط لیب شیتس با ثابت لیب چهار صدق می کند.

چون، بعلاوه، $f(t, y)$ وقتی $0 \leq t \leq 2$ و $-\infty < y < \infty$ پیوسته است، قضیه ۲-۳-۵ ایجاب می کند که یک جواب منحصر بفرد برای این مسئله مقدار اولیه وجود دارد.

حال که تا حدی از این سؤال که چه زمانی مسائل مقدار اولیه جواب منحصر بفرد دارند فارغ شده ایم، به سوال دیگری که قبلا در این بخش مطرح شده بود می پردازیم. آیا روشی برای تعیین اینکه مسئله بخصوصی این خاصیت را دارا باشد که تغییرات کوچکی در صورت مسئله موجب تغییرات کوچکی در جواب شود وجود دارد؟ طبق معمول، ابتدا تعریف قابل استفاده ای برای بیان این مفهوم مورد نیاز است.

۲-۳-۷ تعریف: گوئیم مسئله مقدار اولیه

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (3-2)$$

یک مسئله خوش وضع است اگر:

(یک) یک جواب منحصر بفرد، مثلا $y(t)$ ، برای این مسئله وجود داشته باشد؛

(دو) عددی مانند $\varepsilon > 0$ با این خاصیت باشد که جواب منحصر بفرد $z(t)$ برای مسئله

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \varepsilon, \quad (4-2)$$

هرگاه $|\varepsilon| < \varepsilon$ و به ازای هر $\alpha \leq t \leq b$, $|\delta(t)| < \varepsilon$ وجود داشته باشد؛

(سه) ثابتی مانند $k > 0$ با این خاصیت باشد که به ازای هر $a \leq t \leq b$, $|z(t) - y(t)| < k\varepsilon$

مسئله ای که با معادله (4.2) مشخص شد را اغلب یک مسئله منحرف شده وابسته به مسئله اصلی (3.2) می نامند. قضیه زیر شرایطی را مشخص می کند که خوش وضع بودن یک مسئله مقدار اولیه را بدست می دهد.

[برهان این قضیه را در مرجعی که قبلاً ذکر شد می توان یافت، بیرکف و روتا [7]، صفحات 107-103.]

۸-۳-۲ قضیه: فرض کنیم $D = \{(t, y) | \alpha \leq t \leq b, c \leq y \leq d\}$. مسئله مقدار اولیه

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (5-2)$$

خوش وضع است اگر f پیوسته و نسبت به متغیر y بر مجموعه D در شرط لپ شیتس صدق کند.

۹-۳-۲ مثال: فرض کنیم $D = \{(t, y) | 0 \leq t \leq 1, -\infty < y < \infty\}$ و مسئله مقدار اولیه

$$\frac{dy}{dt} = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad (6-2)$$

را در نظر می گیریم. چون

$$\left| \frac{\partial(-y+t+1)}{\partial y} \right| = 1$$

قضیه ۴-۳-۲ نتیجه می دهد که $f(t, y) = -y + t + 1$ بر D در شرط لپ شیتس با ثابت لپ شیتس ۱

صدق می کند. چون، بعلاوه، f بر D پیوسته است، طبق قضیه ۸-۳-۲ و معادله (6-2) یک مسئله خوش وضع است.

مسئله منحرف شده

$$\frac{dz}{dt} = -z + t + 1 + \delta, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad z(0) = 1 + \varepsilon, \quad (7-2)$$

را در نظر می گیریم، که در آن δ و ε ثابت اند. می توان نشان داد که جوابهای معادلات (6-2) و (7-2)،

به ترتیب، عبارتند از

$$y(t) = e^{-t} + t$$

$$z(t) = (1 + \varepsilon - \delta)e^{-t} + t + \delta$$

به آسانی معلوم می شود که اگر $|\delta| < \varepsilon$ و $|\varepsilon| < \varepsilon$ ، آنگاه، به ازای هر t ,

$$|y(t) - z(t)| = |(\delta - \varepsilon)e^{-t} - \delta|$$

$$\leq |\varepsilon| + |\delta| |1 - e^{-t}|$$

$$\leq 2\varepsilon,$$

که نتیجه حاصل از بکار بردن قضیه ۲-۳-۸ را تایید می کند.

۲-۴ روش اویلر^۳

گرچه روش اویلر در عمل بندرت بکار می رود، سادگی بدست آوردن آن را می توان برای تشریح تکنیکهای ساختن بعضی از روشهای پیشرفته تر، بدون وارد شدن در جبر ملال آور این ساختنها، بکار گرفت.

هدف این روش تعیین تقریبی برای مسئله مقدار اولیه خوش وضع

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (۸-۲)$$

است. در عمل، یک تقریب پیوسته به جواب $y(t)$ بدست نمی آید؛ در عوض، تقریبهایی به y در نقاط متعدد بازه $[a, b]$ ، به نام نقاط شبکه ای، پدید می آیند. وقتی جواب تقریبی در این نقاط بدست آمد، جواب تقریبی در سایر نقاط بازه با استفاده از یکی از روندهای درونیابی حاصل می شود.

در این بخش مقیدیم که توزیع نقاط شبکه ای در طول بازه $[a, b]$ به طور یکسان باشد. این شرط با انتخاب عدد صحیح مثبت N و نقاط $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_N\}$ که در آن

به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N$ $t_i = a + ih$ حاصل می شود. $h = (b - a) / N$ ، یعنی فاصله مشترک بین این نقاط، اندازه گام نامیده می شود.

فرض کنیم $y(t)$ ، یعنی جواب منحصر بفرد معادله (۸.۲)، دو مشتق پیوسته بر $[a, b]$ داشته باشد، بطوری که به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ می توان $y(t_{i+1})$ را به صورت

$$y(t_{i+1}) = y(t_i + h) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i), \quad (۹-۲)$$

به ازای نقطه ای مانند ξ_i ، که $t_i < \xi_i < t_{i+1}$ ، نوشت.

با استفاده از نماد $h = t_{i+1} - t_i$ ، نتیجه می شود که عدد θ_i ، که $0 < \theta_i < 1$ ، وجود دارد بطوری که

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i + \theta_i h), \quad (۱۰-۲)$$

و، چون $y(t)$ در معادله دیفرانسیل (۸.۲) صدق می کند،

^۳. Euler

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(t_i + \theta_i h),$$

با دوباره نویسی این معادله، به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N-1$ ، نتیجه می شود که

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} = f(t_i, y(t_i)) + \frac{h}{2} y''(t_i + \theta_i h), \quad (11-2)$$

وقتی h به قدر کافی کوچک باشد، بنابر پیوستگی y'' ، جمله $(\frac{h}{2})y''(t_i + \theta_i h)$ نیز کوچک بوده و

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \approx f(t_i, y(t_i)), \quad (12-2)$$

در روش اویلر از این فرض با تعریف

$$w_i = a,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \quad (13-2)$$

و فرض $w_i \approx y(t_i)$ ، به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N$ ، استفاده می شود.

شکل الگوریتمی روش اویلر در زیر ارائه می شود.

۲-۴-۱ الگوریتم اویلر

برای بدست آوردن تقریبی به جواب مسئله مقدار اولیه خوش وضع

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

در $(N+1)$ نقطه هم فاصله در بازه $[a, b]$ ، مراحل زیر را انجام می دهیم:

مرحله ۱. قرار می دهیم

$$h = \frac{b-a}{N},$$

$$t_i = a,$$

$$w_i = \alpha.$$

مرحله ۲. قرار می دهیم $i = 1$.

مرحله ۳. قرار می دهیم

$$t_i = t_{i-1} + ih,$$

$$w_i = w_{i-1} + hf(t_{i-1}, w_{i-1})$$

مرحله ۴. اگر $i < N$ ، ۱ را به i افزوده و به مرحله ۳ می رویم.

مرحله ۵. اگر $i = N$ ، روند کامل است و w_i ، به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N$ ، $y(t_i)$ را تقریب می کند.

۲-۴-۲ مثال: برای یافتن تقریبهایی به مسئله مقدار اولیه

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1, \quad (14-2)$$

فرض کنیم $N = 10$ ؛ در نتیجه، $h = 0.1$ ، $t_i = 0.1i$

با استفاده از نمادگذاری الگوریتم ۲-۴-۱ و این مطلب که $f(t, y) = -y + t + 1$ ، به ازای $i = 1, 2, \dots, 10$ داریم

$$w_0 = 1$$

$$w_i = w_{i-1} + h(-w_{i-1} + t_{i-1} + 1)$$

$$= w_{i-1} + 0.1(-w_{i-1} + 0.1(i-1) + 1)$$

$$= 0.9w_{i-1} + 0.1(i-1) + 0.1,$$

(جدول ۲-۱)

t_i	w_i	y_i	$ w_i - y_i = \text{خطا}$
۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰	۰
۰/۱	۱/۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۴۸۳۷	۰/۰۰۴۸۳۷
۰/۲	۱/۰۱۰۰۰۰	۱/۰۱۸۷۳۱	۰/۰۰۸۷۳۱
۰/۳	۱/۰۲۹۰۰۰	۱/۰۴۰۸۱۸	۰/۰۱۱۸۱۸
۰/۴	۱/۰۵۶۱۰۰	۱/۰۷۰۳۲۰	۰/۰۱۴۲۰
۰/۵	۱/۰۹۰۴۹۰	۱/۱۰۶۵۳۱	۰/۰۱۶۰۴۱
۰/۶	۱/۱۳۱۴۴۱	۱/۱۴۸۸۱۲	۰/۰۱۷۳۷۱
۰/۷	۱/۱۷۸۲۹۷	۱/۱۹۶۵۸۵	۰/۰۱۸۲۸۸
۰/۸	۱/۲۳۰۴۶۷	۱/۲۴۹۳۲۹	۰/۰۱۸۸۶۲
۰/۹	۱/۲۸۷۴۲۰	۱/۳۰۶۵۷۰	۰/۰۱۹۱۵۰
۱	۱/۳۴۸۶۷۸	۱/۳۶۷۸۷۹	۰/۰۱۹۲۰۱

ملاحظه می شود که جواب واقعی (۲-۱۴) برابر $y(t) = t + e^{-t}$ است، و جدول ۲-۱ مقایسه بین مقادیر تقریبی در t_i و مقادیر واقعی را نشان می دهد.

توجه کنید که خطا با افزایش مقدار t_i بتدریج زیاد می شود. این کنترل افزایش خطا لازمه پایداری روش اوایلر است، که نتیجه می دهد که، برای خطاهای گرد کردن، انتظار افزایشی نه بدتر از یک روش خطی وجود دارد.

برای بدست آوردن یک کران خطا در حالت کلی روش اویلر، شایسته است دو لم محاسباتی، که در جریان کار مورد نیازند، ارائه شود.

۲-۴-۳ لم: به ازای هر $x > -1$ و هر عدد صحیح مثبت m ,

$$(15-2) \quad 0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}.$$

برهان. با استفاده از قضیه تیلور با $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, و $n=1$, نتیجه می شود که

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi},$$

که در آن ξ بین x و صفر است. بنابراین،

$$0 \leq 1+x \leq 1+x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi} = e^x,$$

و، چون $1+x \geq 0$,

$$0 \leq (1+x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx},$$

۲-۴-۴ لم: اگر m و n اعداد حقیقی مثبتی بوده و $\{a_i\}_{i=0}^k$ دنباله ای با $a_i \geq 0$ باشد که در

$$(16-2) \quad a_{i+1} \leq (1+m)a_i + n, \quad i=0,1,2,\dots,k$$

صدق کند، آنگاه

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)m} \left(\frac{n}{m} + a_0 \right) - \frac{n}{m} \quad (17-2)$$

برهان. به ازای عدد صحیح و ثابت i , از معادله (۱۶-۲) نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+m)a_i + n \\ &\leq (1+m)[(1+m)a_{i-1} + n] + n \\ &\leq (1+m)\{(1+m)[(1+m)a_{i-2} + n] + n\} + n \\ &\vdots \\ &\leq (1+m)^{i+1} a_0 + [1 + (1+m) + (1+m)^2 + \dots + (1+m)^i]n. \end{aligned}$$

اما

$$1 + (1+m) + (1+m)^2 + \dots + (1+m)^i = \sum_{j=0}^i (1+m)^j,$$

یک سری هندسی با قدر نسبت $(1+m)$ است و در نتیجه، دارای مجموع

$$\frac{1-(1+m)^{i+1}}{1-(1+m)},$$

می باشد. لذا،

$$\begin{aligned} a_{i+1} &\leq (1+m)^{i+1} a_i + \frac{(1+m)^{i+1} - 1}{m} n \\ &= (1+m)^{i+1} \left(\frac{n}{m} + a_i \right) - \frac{n}{m}, \end{aligned}$$

و طبق لم ۲-۴-۳

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)m} \left(\frac{n}{m} + a_i \right) - \frac{n}{m}.$$

۲-۴-۵ قضیه: فرض کنیم $y(t)$ جواب منحصر بفرد مسئله مقدار اولیه خوش وضع

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

بوده و $w_0, w_1, \dots, w_N$ تقریبهای تولید شده به وسیله روش اوایلر، به ازای عدد صحیح مثبت N ، با استفاده از نمادگذاری الگوریتم ۲-۴-۱، باشد. هرگاه f بر

$$D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\},$$

در شرط لیب شیتس با ثابت L صدق کرده و ثابت M با این خاصیت که

$$|y''(t)| \leq M, \quad t \in [a, b]$$

وجود داشته باشد، آنگاه به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N$

$$|y(t_i) - w_i| \leq \frac{hM}{2L} \left[e^{L(t_i - a)} - 1 \right], \quad (18-2)$$

برهان. وقتی $i = 0$ ، درستی مطلب واضح است.

از معادله (۱۱-۲)، به ازای $i = 0, 1, \dots, N-1$ ، داریم

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(t_i + \theta_i h),$$

و، از معادله (۱۳-۲)،

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i),$$

در نتیجه، با استفاده از نماد $y_i = y(t_i)$ و $y_{i+1} = y(t_{i+1})$ ، خواهیم داشت

$$y_{i+1} - w_{i+1} = y_i - w_i + h[f(t_i + y_i) - f(t_i, w_i)] + \frac{h^2}{2} y''(t_i, \theta_i h),$$

و

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq |y_i - w_i| + h \left| f(t_i + y_i) - f(t_i, w_i) \right| + \frac{h^2}{2} y''(t_i, \theta_i h).$$

از فرض اینکه f نسبت به متغیر دوم در شرط لیپ شیتس با ثابت L صدق می کند و اینکه $|y''(t)| \leq M$ نتیجه می شود که

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq |y_i - w_i| (1 + hL) + \frac{h^2 M}{2},$$

با توجه به لم ۲-۴-۵ و قرار دادن $\alpha_j = |y_j - w_j|$ ، به ازای هر $j = 0, 1, \dots, N$ ، در حالی که $m = hL$ و $n = h^2 M / 2$ می بینیم که

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq e^{(i+1)hL} \left(|y_0 - w_0| + \frac{h^2 M}{2hL} \right) - \frac{h^2 M}{2hL},$$

یا، چون $|y_0 - w_0| = 0$ و $(i+1)h = t_{i+1} - t_0 = t_{i+1} - \alpha$ ، نتیجه مطلوب

$$|y_{i+1} - w_{i+1}| \leq \frac{hM}{2L} \left(e^{(t_{i+1}-\alpha)L} - 1 \right),$$

حاصل می شود.

ضعف قضیه ۲-۴-۵ در نیاز به شناختن کرانی برای مشتق دوم جواب است. گرچه اغلب این شرط ما را از بدست آوردن یک کران خطای واقعی باز می دارد، باید توجه داشت که اگر $\partial f / \partial t$ و $\partial f / \partial y$ هر دو وجود داشته باشند،

$$\begin{aligned} y''(t) &= \frac{dy'}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t, y(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t))(f(t, y(t))), \end{aligned}$$

و برای مسائل معینی، بدون شناخت واقعی $y(t)$ ، احتمال بدست آوردن کرانی برای $y''(t)$ وجود دارد.

۲-۴-۶ مثال: به مسئله مقدار اولیه

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

مطرح شده در مثال ۲-۴-۲ بازگشته، ملاحظه می کنیم که، با $f(t, y) = -y + t + 1$ داریم $\partial f / \partial y = -1$ ؛ در نتیجه، قضیه ۲-۳-۴ ایجاب می کند که f در شرط لیپ شیتس با $L = 1$ صدق می کند.

همچنین، چون در این حالت می دانیم که جواب دقیق $y(t) = t + e^{-t}$ است، داریم $y''(t) = e^{-t}$ و

$$|y''(t)| \leq e = 1, \quad t \in [0, 1]$$

با استفاده از معادله (۲-۱۸) با $h = 0.1$ و $M = L = 1$ کران خطای

$$|y_i - w_i| \leq 0.5(e^{t_i} - 1),$$

نتیجه می شود.

در جدول زیر این کران خطا همراه با خطای واقعی حاصل از مثال ۲-۴-۲ آمده است.

(جدول ۲-۲)

t_i	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱
خطای واقعی	۰/۰۰۴۸۴	۰/۰۰۸۷۳	۰/۰۱۱۸۲	۰/۰۱۴۲۲	۰/۰۱۶۰۴	۰/۰۱۷۳۷	۰/۰۱۸۲۹	۰/۰۱۸۸۶	۰/۰۱۹۱۵	۰/۰۱۹۲۰
کران خطا	۰/۰۰۵۲۶	۰/۰۱۱۰۷	۰/۰۱۷۴۹	۰/۰۲۴۵۹	۰/۰۳۲۴۴	۰/۰۴۱۱۱	۰/۰۵۰۶۹	۰/۰۶۱۲۸	۰/۰۷۲۹۸	۰/۰۸۵۹۱

توجه کنید که، اگرچه خطای واقعی برای مشتق دوم جواب بکار رفته، کران خطا به طور قابل ملاحظه ای بیشتر از خطای واقعی است.

اهمیت اصلی فرمول کران خطا، ارائه شده در قضیه ۲-۴-۵ این است که این کران به طور خطی به اندازه گام h بستگی دارد. در نتیجه، کم شدن اندازه گام متناظراً دقت بیشتری به تقریبها می دهد. آنچه در قضیه ۲-۴-۵ نادیده گرفته شد اثر خطای گرد کردن در انتخاب اندازه گام است. واضح است که هرچه h کوچکتر باشد، محاسبات بیشتری لازم می شود؛ و وقتی عرفاً ارقام حساب متناهی بکار می رود، باید خطای گرد کردن بیشتری را انتظار داشت. در عمل، معادله تفاضلی به شکل

$$w_i = \alpha,$$

$$w_i = w_{i-1} + hf(t_{i-1}, w_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

به ازای هر جهت محاسبه تقریب جواب y_i در نقطه شبکه t_i بکار نمی رود، بلکه به جای آن معادله ای به شکل

$$u_i = \hat{\alpha},$$

$$u_i = u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1}) + \delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (19-2)$$

بکار می رود، که در آن $\hat{\alpha}$ تقریبی برای مقدار اولیه α است و δ_i خطای گرد کردن وابسته به محاسبه $u_{i-1} + hf(t_{i-1}, u_{i-1})$ می باشد.

۲-۴-۷ قضیه: فرض کنیم $y(t)$ جواب منحصر بفرد مسئله مقدار اولیه خوش وضع

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (20-2)$$

بوده و $u_0, u_1, \dots, u_N$ تقریبهای حاصل از بکار بردن (۱۹-۲) باشد. هرگاه به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N$ $|\delta_i| < \delta$ که در آن δ مقدار $\hat{\alpha} - \alpha$ باشد، مفروضات قضیه ۲-۴-۵ در مورد (۲۰-۲) برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N$

$$|y(t_i) - u_i| \leq \frac{1}{L} \left(\frac{hM}{2} + \frac{\delta}{h} \right) [e^{L(t_i-a)} - 1] + |\delta| e^{L(t_i-a)}, \quad (2-21)$$

۲-۵ روشهای تیلور از مرتبه بالاتر

چون منظور از روشهای عددی معمولاً تعیین تقریبهای به قدر کافی دقیق با حداقل کار است، لازم است وسیله ای جهت مقایسه کارایی روشهای مختلف برحسب مورد استفاده آنها در محاسبه داشته باشیم.

در روشهای معادله تفاضلی جهت حل معادلات دیفرانسیل معمولی، نظیر روش اوایلر، اولین سنجش مورد نیاز خطای برشی موضعی روش نامیده می شود. این خطا «موضعی» نام دارد، چون مقدار دقت روش را در یک مرحله معین، به فرض دقیق بودن آن در مرحله قبل، اندازه گیری می کند. این خطا به معادله دیفرانسیل تقریب شده، به اندازه گام، و به مرحله خاص در تقریب نیز بستگی دارد. در روش اوایلر، خطای برشی موضعی در مرحله $i-1$ ام برای مسئله

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

عبارت است از

$$\tau_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} - f(t_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N$$

به ازای هر

که در آن، طبق معمول، $y_i = y(t_i)$ مقدار دقیق جواب در t_i است.

با در نظر گرفتن معادله (۲-۱۱) در بخش قبل، نتیجه می شود که به ازای θ_i ای، که $0 < \theta_i < 1$ ،

$$\tau_i = \frac{h}{2} y''(t_i + \theta_i h),$$

و وقتی $y''(t)$ به وسیله ثابت M بر $[a, b]$ کراندار باشد، نتیجه می شود که

$$|\tau_i| \leq \frac{h}{2} M,$$

که نتیجه می گیریم خطای برشی در روش اوایلر برابر $O(h)$ است. این نتیجه به ما رهنمود می دهد که یک طریق انتخاب روشهای معادله تفاضلی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی باید چنان باشد که خطاهای برشی موضعی در آنها $O(h^p)$ ، به ازای یک مقدار p ی حتی الامکان بزرگ، بوده، و در عین حال تعداد و پیچیدگی محاسبات روشها در حد معقولی باشند.

پیش از بررسی روشهای انجام این منظور، دو تعریف ارائه می دهیم که به همگرایی روش معادله تفاضلی، وقتی اندازه گام h کوچک می شود، مربوطند.

۲-۵-۱ تعریف: یک روش معادله تفاضلی با خطای برشی موضعی τ_i در مرحله i م را با معادله تفاضلی، وقتی اندازه گام h کوچک می شود، مربوطند.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |\tau_i| = 0,$$

باید توجه داشت که این تعریف نیز اساساً تعریفی «موضعی» است، زیرا به ازای هر یک از مقادیر τ_i ، مقدار دقیق $f(t_i, y_i)$ را با معادله تفاضلی که y' را تقریب می کند مقایسه می کنیم. یک وسیله واقعی تر از تحلیل اثرات کوچک ساختن h تعیین اثر «کلی» این روش است که باید خطای ماکزیمم روش در تمام برد تقریب باشد، تنها با این فرض که این روش در مقدار اولیه نتیجه دقیق را ارائه می دهد. تعریف توصیف کننده روشی که با این معنی دارای همگرایی است در زیر ارائه می شود.

۲-۵-۲ تعریف: یک روش معادله تفاضلی را نسبت به معادله دیفرانسیلی که آن را تقریب می کند همگرا گوئیم اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{1 \leq i \leq N} |y_i - w_i| = 0,$$

که در آن $y_i = y(t_i)$ مقدار دقیق جواب معادله دیفرانسیل بوده و w_i تقریب حاصل از روش تفاضلی در مرحله i م است.

با بررسی نامعادله (۲-۱۸) در فرمول کران خطای روش اوایلر، می توان دید که، تحت مفروضات قضیه ۲-۵-۴،

$$\max_{1 \leq i \leq N} |y_i - w_i| \leq \frac{Mh}{2L} (e^{L(b-a)} - 1),$$

در نتیجه، روش اوایلر نسبت به معادله دیفرانسیلی که در شرایط این قضیه صدق می کند همگراست و درجه همگرایی برابر $O(h)$ است.

چون روش اوایلر با استفاده از قضیه تیلور با $n=2$ برای تقریب جواب این معادله دیفرانسیل بدست می آید، اولین سعی ما در بدست آوردن روشهایی با خواص همگرایی بهتر از روشهای تفاضلی، تعمیم این روش به مقادیر بزرگتر n می باشد.

فرض کنیم جواب $y(t)$ را برحسب چندجمله ای تیلور درجه n -ام آن حول t_i بسط داده، بدست می آوریم که به ازای θ_i ، که $0 < \theta_i < 1$ ،

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

دارای $(n+1)$ مشتق پیوسته باشد، و جواب $y(t)$ را برحسب چندجمله ای تیلور درجه n -ام آن حول t_i بسط داده، بدست می آوریم که به ازای θ_i ، که $0 < \theta_i < 1$ ،

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(t_i) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(t_i + \theta_i h) \quad (22-2)$$

مشتقگیری متوالی از جواب، یعنی از $y(t)$ ، نتیجه می دهد که

$$y'(t) = f(t, y(t));$$

$$y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) f(t, y(t)) \equiv f'(t, y(t)),$$

$$y'''(t) = \frac{df'}{dt}(t, y(t)) \equiv f''(t, y(t)),$$

و، در حالت کلی،

$$y^{(k)}(t) = \frac{dy^{(k-1)}}{dt} = \frac{df^{(k-1)}}{dt}(t, y(t)) \equiv f^{(k-1)}(t, y(t)).$$

با جایگذاری این نتایج در معادله (22-2)، به ازای θ_i ای، که $0 < \theta_i < 1$ بدست می آید

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} f'(t_i, y(t_i)) + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(t_i, y(t_i)) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n)}(t_i + \theta_i h, y(t_i + \theta_i h)). \quad (23.2)$$

روش تفاضلی متناظر با معادله (23-2) با صرف نظر کردن از جمله باقیمانده شامل θ_i بدست می آید، و روش تیلور مرتبه n نامیده می شود.

$$w_i = a, \quad (24.2)$$

$$w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad \text{به ازای هر}$$

که در آن

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \dots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i).$$

توجه کنید که، با این اصطلاح، روش اوایلر همان روش تیلور مرتبه اول است.

۲-۵-۳ مثال: برای بکار بردن روش تیلور مرتبه های دو و چهار در مسئله مقدار اولیه

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1$$

که در مثال ۲-۴-۲ از بخش ۲-۴ بررسی شد، باید سه مشتق اول $f(t, y(t)) = -y + t + 1$ را بدست آوریم.

$$f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(-y + t + 1) = -y' + 1 = y - t - 1 + 1 = y - t,$$

$$f''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t) = y' - 1 = -y - t + 1 - 1 = -y + t,$$

و

$$f'''(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(-y + t) = -y' + 1 = y - t - 1 + 1 = y - t$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} T^{(1)}(t_i, w_i) &= f(t_i, w_i) + \frac{h}{1} f'(t_i, w_i) \\ &= -w_i + t_i + 1 + \frac{h}{1} (w_i - t_i) \\ &= \left(1 - \frac{h}{1}\right) (t_i - w_i) + 1, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} T^{(2)}(t_i, w_i) &= f(t_i, w_i) + \frac{h}{1} f'(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} f''(t_i, w_i) + \frac{h^3}{6} f'''(t_i, w_i) \\ &= -w_i + t_i + 1 + \frac{h}{1} (w_i - t_i) + \frac{h^2}{2} (-w_i + t_i) \\ &= \left(1 - \frac{h}{1} + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}\right) (t_i - w_i) + 1. \end{aligned}$$

در نتیجه، روشهای تیلور مرتبه دو و چهار به ترتیب عبارتند از

$$w_0 = 1, \quad (2-25)$$

$$w_{i+1} = w_i + h \left[\left(1 - \frac{h}{1}\right) (t_i - w_i) + 1 \right], \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

و

$$w_0 = 1, \quad (2-26)$$

$$w_{i+1} = w_i + h \left[\left(1 - \frac{h}{1} + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}\right) (t_i - w_i) + 1 \right], \quad (i = 0, 1, \dots, N-1)$$

با بکار بردن $h=0.1$ نتیجه می شود که $N=10$ و، به ازای هر $i=1,2,\dots,10$ ، $t_i=0.1$ ؛ در نتیجه، معادله (۲۵-۲) می شود

$$w_i = 1, \quad (27-2)$$

$$w_{i+1} = w_i + 0.1 \left[\left(1 - \frac{0.1}{2} \right) (0.1i - w_i) + 1 \right]$$

$$= 0.905w_i + 0.095i + 0.1,$$

و (۲۶-۲)، به ازای هر $i=1,2,\dots,9$ ، خواهد شد.

$$w_i = 1, \quad (28-2)$$

$$w_{i+1} = w_i + 1 \left[\left(1 - \frac{0.1}{2} + \frac{0.01}{6} - \frac{0.001}{24} \right) (0.1i - w_i) + 1 \right]$$

$$= 0.948375w_i + 0.051625i + 0.1$$

مقادیر واقعی جواب $y(t) = t + e^{-t}$ همراه با تقریبهای حاصل از روش اویلر در مثال ۲-۴-۲ از بخش ۲.۴، و نتایج حاصل از روشهای تیلور مرتبه های دو و چهار و خطاهای واقعی مربوط به این روشها، در جدول (۳-۲) آمده اند.

(جدول ۳-۲)

ε	مقدار دقیق	روش اویلر	خطا در روش اویلر	روش تیلور مرتبه دو	خطا در روش تیلور مرتبه دو	روش تیلور مرتبه چهار	خطا در روش تیلور مرتبه چهار
0	1.0000000000	1.000000	0	1.000000	0	1.0000000000	0
.1	1.0048374180	1.000000	4.837×10^{-3}	1.005000	1.626×10^{-4}	1.0048375000	8.200×10^{-8}
.2	1.0187307531	1.010000	8.731×10^{-3}	1.019025	2.942×10^{-4}	1.0187309014	1.483×10^{-7}
.3	1.0408182207	1.029000	1.182×10^{-3}	1.041218	3.998×10^{-4}	1.0408184220	2.013×10^{-7}
.4	1.0703200460	1.056100	1.422×10^{-3}	1.070802	4.820×10^{-4}	1.0703202889	2.429×10^{-7}
.5	1.1065306597	1.090490	1.604×10^{-3}	1.107076	5.453×10^{-4}	1.1065309344	2.747×10^{-7}
.6	1.1488116360	1.131441	1.737×10^{-3}	1.149404	5.924×10^{-4}	1.1488119344	2.984×10^{-7}
.7	1.1965853038	1.178297	1.829×10^{-3}	1.197211	6.257×10^{-4}	1.1965856187	3.149×10^{-7}
.8	1.2493289641	1.230467	1.887×10^{-3}	1.249976	6.470×10^{-4}	1.2493282897	3.256×10^{-7}
.9	1.3065696597	1.287420	1.915×10^{-3}	1.307228	6.583×10^{-4}	1.3065699912	3.315×10^{-7}
1.0	1.368794412	1.348678	1.920×10^{-3}	1.368541	6.616×10^{-4}	1.368797744	3.332×10^{-7}

همانطور که از بحث ما در روش اویلر انتظار می رود، روش تیلور مرتبه n دارای خطای برشی موضعی $O(h^n)$ است، مشروط بر اینکه جواب معادله دیفرانسیل به قدر کافی خوشرفتار باشد. این مطلب به سادگی با توجه به اینکه معادله (۲-۲۳) را می توان به صورت

$$\begin{aligned} y_{i+1} - y_i - hf(t_i, y_i) - \frac{h^2}{2} f'(t_i, y_i) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t_i, y_i) \\ = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t_i, \theta_i h, y(t_i + \theta_i h)) \end{aligned}$$

نوشت ملاحظه می شود. در نتیجه، خطای برشی موضعی در $(i+1)$ مین مرحله به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \tau_{i+1} &= \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - T^{(n)}(t_i, y_i) \quad i = 1, \dots, N-1 \\ &= \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t_i + \theta_i h, y(t_i + \theta_i h)), \end{aligned}$$

اگر $y \in C^{n+1}[a, b]$ ، نتیجه می شود که $y^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t, y(t))$ بر $[a, b]$ کراندار است و، به ازای هر $i = 1, 2, \dots, N-1$ ، $\tau_i = O(h^n)$.

۶-۲ روشهای رونگه^۴ - کوتا^۵

روشهای تیلور خلاصه شده در بخش قبل دارای خاصیت مطلوب خطای برشی موضعی از مرتبه بالا هستند، لیکن لزوم محاسبه و ارزیابی مشتقهای $f(t, y)$ نقص آن است. این امر در بسیاری مسائل می تواند پیچیده و وقتگیر باشد و، در نتیجه، روشهای تیلور بندرت در عمل بکار می روند. روشهای رونگه - کوتا از خطای برشی موضعی مرتبه بالای روشهای تیلور استفاده می کند، در حالی که محاسبه و ارزیابی مشتقهای $f(t, y)$ را حذف می کند. پیش از ارائه مفاهیم و رای این مطالب، لازم است قضیه تیلور با دو متغیر را بیان کنیم. برهان این قضیه را می توان در هر کتاب معمولی در باب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت (مثلاً، ر.ک. فولکس [۱۶]، صفحه ۲۶۰).

۶-۲-۱ قضیه: فرض کنیم $f(t, y)$ و همه مشتقهای جزئی آن از مرتبه نایبتر از $(n+1)$ بر

$$D = \{(t, y) \mid a \leq t \leq b, c \leq y \leq d\},$$

^۴. Runge

^۵. Kutta

پیوسته باشد. همچنین، $(t, y) \in D$ به ازای هر $(t, y) \in D$ ، نقطه ای مانند $(\xi, \eta) \in D$ وجود دارد با خاصیت

$$f(t, y) = P_n(t, y) + R_n(t, y),$$

که در آن

$$\begin{aligned} P_n(t, y) = & f(t, y) + \left[(t-t) \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + (y-y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right] \\ & + \left[\frac{(t-t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y) + (t-t)(y-y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y) \right. \\ & \left. + \frac{(y-y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y) \right] \\ & + \dots + \left[\frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (t-t)^{n-j} (y-y)^j \frac{\partial^n f}{\partial t^{n-j} \partial y^j}(t, y) \right] \end{aligned}$$

و

$$R_n(t, y) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (t-t)^{n+1-j} (y-y)^j \frac{\partial^{n+1} f(\xi, \eta)}{\partial t^{n+1-j} \partial y^j}$$

P_n چندجمله ای تیلور درجه n دومتغیره برای تابع f حول (t, y) ، و $R_n(t, y)$ خطای برشی وابسته به $P_n(t, y)$ نامیده می شود.

۲-۶-۲ مثال: چند جمله ای تیلور درجه سه برای $f(t, y) = \sin(ty)$ حول $(0, \pi)$ از

$$\begin{aligned} P_3(t, y) = & f(t, y) + (t-t) \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + (y-y) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \\ & + \left[\frac{(t-t)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t, y) + (t-t)(y-y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t, y) \right. \\ & \left. + \frac{(y-y)^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, y) \right] \\ & + \left[\frac{(t-t)^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3}(t, y) + \frac{(t-t)^2(y-y)}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial y}(t, y) \right. \\ & \left. + \frac{(t-t)(y-y)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial y^2}(t, y) \right. \\ & \left. + \frac{(y-y)^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t, y) \right] \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{(y - y_0)^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t, y_0) \right].$$

بدست می آید. با محاسبه هر یک از این مشتقهای جزئی در $(t, y_0) = (0, \pi)$ ، $P_3(y, u)$ به

$$P_3(t, y) = \pi t + t(y - \pi) - \frac{\pi^3}{6} t^3,$$

تقلیل می یابد. این چند جمله ای تقریب نزدیکی به $\sin(ty)$ است مشروط بر اینکه t به صفر و y به π نزدیک باشد. مثلاً،

$$P_3(0.01, \pi + 0.01) = 0.03151076,$$

در حالی که

$$\sin(0.01(\pi + 0.01)) = 0.03151071,$$

اولین وسیله حصول به روش رونگه - کوتا تعیین مقادیر α_1 ، α_2 و β_1 با این خاصیت است که عبارت $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$

$$T^{(v)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{v} f'(t, y),$$

را با خطایی نه بیشتر از $O(h^2)$ ، یعنی خطای برشی موضعی روش تیلور مرتبه دو، تقریب کند. چون

$$\begin{aligned} f'(t, y) &= \frac{df}{dt}(t, y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot y'(t), \end{aligned}$$

و

$$y'(t) = f(t, y),$$

نتیجه می شود که

$$T^{(v)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{v} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{h}{v} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \cdot f(t, y), \quad (29-2)$$

با بسط $f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ به چند جمله ای تیلور خود از درجه یک حول (t, y) ، داریم

$$\begin{aligned} a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1) &= a_1 f(t, y) + a_1 \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial t}(t, y) \\ &\quad + a_1 \beta_1 \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) + a_1 R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1), \end{aligned} \quad (30-2)$$

که در آن به ازای نقطه ای مانند (ξ, η) در مجموعه

$\{\hat{t}, \hat{y}\}$ بین t و $t + \alpha_1$ و $\hat{y}$ بین y و $y + \beta_1$ است |

$$R_1(t + \alpha_1, y + \beta_1) = \frac{\alpha_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \eta) + \alpha_1 \beta_1 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \eta) + \frac{\beta_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \eta), \quad (31-2)$$

از مقابله ضرایب f و مشتقهای آن در معادلات (2-29) و (2-30) سه معادله زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} f(t, y): \quad a_1 &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(t, y): \quad a_1 \alpha_1 &= \frac{h}{2}, \end{aligned}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, y): \alpha_1 \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y).$$

پارامترهای a_1 ، α_1 و β_1 به طور منحصربفرد به صورت

$$a_1 = 1, \quad \alpha_1 = \frac{h}{2}, \quad \beta_1 = \frac{h}{2} f(t, y),$$

تعیین می شوند؛ در نتیجه،

$$T^{(v)}(t, y) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) - R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right),$$

و از (2-31)

$$\begin{aligned} R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right) &= \frac{h^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\xi, \eta) + \frac{h^2}{4} f(t, y) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(\xi, \eta) \\ &+ \frac{h^2}{8} (f(t, y))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi, \eta). \end{aligned}$$

اگر تمام مشتقهای جزئی مرتبه دوم f کراندار باشند،

$$R_1\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t, y)\right),$$

برابر $O(h^2)$ ، یعنی مرتبه خطای برشی موضعی روش تیلور مرتبه دو، خواهد بود.

روش تفاضلی حاصل از جایگذاری $T^{(v)}(t, y)$ در روش تیلور مرتبه دو روش خاصی از رونگه - کوتا

است، که به روش نقطه میانی موسوم است و به صورت زیر ارائه می شود:

2-6-3 روش نقطه میانی:

$$w_i = a, \quad (32-2)$$

$$w_{i+1} = w_i + hf \left(t_i + \frac{h}{\gamma}, w_i + \frac{h}{\gamma} f(t_i, w_i) \right), i = 0, 1, \dots, N-1,$$

چون فقط سه پارامتر در $a_1 f(t + \alpha_1, y + \beta_1)$ حضور داشته، و همگی در رسیدن به $T^{(2)}$ مورد نیاز بودند، انتظار لزوم شکل پیچیده تری در برقراری شرایط لازم برای هر روش تیلور درجه بالاتر را باید داشت. درواقع،

مناسبتین شکل، با چهار پارامتر برای تقریب

$$T^{(3)}(t, y) = f(t, y) + \frac{h}{\gamma} f'(t, y) + \frac{h^2}{\epsilon} f''(t, y),$$

عبارت است از

$$a_1 f(t, y) + a_\gamma f(t + \alpha_\gamma, y + \delta_\gamma f(t, y)), \quad (2-33)$$

و، حتی با این عبارت، قابلیت ناکافی جهت رسیدن به جمله

$$\frac{h^2}{\epsilon} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) \right]^2 f(t, y),$$

وجود دارد، که از بسط $(h^2/\epsilon) f''(t, y)$ نتیجه می شود. در نتیجه، بهترین روشی که می توان با استفاده از (2-33) بدست آورد. روشهایی با کران خطای $O(h^2)$ است. اگرچه (2-33) دارای چهار پارامتر است، لیکن انعطافی در انتخاب آنهاست بطوری که تعدادی از روشهای $O(h^2)$ حاصل می شوند. دو تا از مهمترین آنها عبارتند از روش پیراسته اوایلر، که متناظر انتخاب $a_1 = a_\gamma = \frac{1}{\gamma}$ و $\alpha_\gamma = \delta_\gamma = h$ بوده و دارای شکل معادله تفاضلی زیر:

۲-۶-۴ روش پیراسته اوایلر:

$$w_i = \alpha, \quad (2-34)$$

به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$,

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{\gamma} \left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i)) \right],$$

و روش هیون^۶، که متناظر انتخاب $a_1 = \frac{1}{\epsilon}$ ، $a_\gamma = \frac{3}{\epsilon}$ ، $\alpha_\gamma = \delta_\gamma = \frac{2}{3}h$ بوده و دارای شکل معادله تفاضلی زیر است:

^۶. Heun

۲-۶-۵ روش هیون:

$$w_i = \alpha, \quad (2-35)$$

به ازای هر $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4} \left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + \frac{2}{3}h, w_i + \frac{2}{3}hf(t_i, w_i)\right) \right],$$

هر دو روش به عنوان روشهای رونگه - کوتا رده بندی شده اند.

۲-۶-۶ مثال: با استفاده از هریک از روشهای رونگه - کوتای مرتبه دو در مثال همیشگی، یعنی

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

بخاطر سرشت این معادله دیفرانسیل، همان معادله تفاضلی حاصل از روش تیلور مرتبه دو زیر را می دهد:

$$w_i = 1,$$

$$w_{i+1} = 0.905w_i + 0.095i + 0.1$$

برای مقایسه نتایج مختلف این روشها، به جای مسئله مقدار اولیه قبلی،

$$y' = -y + t^2 + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1,$$

را بکار می بریم که $y(t) = -2e^{-t} + t^2 - 2t + 3$ جواب دقیق آن است.

(جدول ۲-۴)

t_i	مقادیر دقیق	روش نقطه میانی	خطا برای روش نقطه میانی	روش پیراسته اولیتر	خطا برای روش پیراسته اولیتر	روش هیون	خطا برای روش هیون
0	1.0000000	1.0000000	0	1.0000000	0	1.0000000	0
.1	1.0003252	1.0002500	7.52×10^{-5}	1.0005000	1.75×10^{-4}	1.0003333	8.10×10^{-6}
.2	1.0025385	1.0024263	1.12×10^{-4}	1.0029025	3.64×10^{-4}	1.0025850	4.65×10^{-5}
.3	1.0083636	1.0082458	1.18×10^{-4}	1.0089268	5.63×10^{-4}	1.0084728	1.09×10^{-4}
.4	1.0193599	1.0192624	9.75×10^{-5}	1.0201288	7.69×10^{-4}	1.0195512	1.91×10^{-4}
.5	1.0369387	1.0368825	6.52×10^{-5}	1.0379166	9.78×10^{-4}	1.0372272	2.88×10^{-4}
.6	1.0623767	1.0623787	2.00×10^{-6}	1.0635645	1.19×10^{-3}	1.0627739	3.97×10^{-4}
.7	1.0968294	1.0969027	7.33×10^{-5}	1.0982259	1.40×10^{-3}	1.0973437	5.14×10^{-4}
.8	1.1413421	1.1414969	1.55×10^{-4}	1.1429444	1.60×10^{-3}	1.1419794	6.37×10^{-4}
.9	1.1968607	1.1971047	2.44×10^{-4}	1.1986647	1.80×10^{-3}	1.1976247	7.64×10^{-4}
1.0	1.2642411	1.2645798	3.39×10^{-4}	1.2662416	2.00×10^{-3}	1.2651337	8.93×10^{-4}

گرچه $T^{(3)}(t, y)$ با خطای $O(h^3)$ را می توان با عبارتی به شکل

$$f\left(t+\alpha_1, y+\delta_1 f\left(t+\alpha_2, y+\delta_2 f\left(t, y\right)\right)\right),$$

شامل چهار پارامتر تقریب کرد، لیکن جبر لازم برای تعیین $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2$ کاملاً پیچیده است و ارائه نخواهد شد. درواقع، روش رونگه - کوتای مرتبه سه که از این عبارت نتیجه می شود عموماً در عمل بکار نمی رود. در عوض، معمولترین روش رونگه - کوتا در عمل از مرتبه چهار و دارای شکل تفاضلی زیر است: به ازای هر $i=0,1,\dots,N-1$,

$$w_i = a, \quad (3.36)$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{4}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

این روش دارای خطای برشی موضعی $O(h^4)$ است، مشروط بر اینکه جواب $y(t)$ دارای پنج مشتق پیوسته باشد. دلیل معرفی نمادهای k_1, k_2, k_3, k_4 در این روش این است که نیاز به آشیانه ای بودن متوالی متغیر دوم تابع $f(t, y)$ را برطرف کند.

۷-۶-۲ الگوریتم رونگه - کوتا (مرتبه چهار)

برای تقریب جواب مسئله مقدار اولیه

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

عدد صحیح مثبت N را انتخاب می کنیم.

مرحله ۱. قرار می دهیم $h = (b-a)/N$, $t_i = a$, $w_i = \alpha$

مرحله ۲. قرار می دهیم $i = 0$.

مرحله ۳. قرار می دهیم

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_p = hf \left(t_i + \frac{h}{4}, w_i + \frac{1}{4}k_p \right),$$

$$k_f = hf(t_i, h, w_i + k_p),$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_p + 2k_f + k_f)$$

$$t_{i+1} = a + (i+1)h.$$

مرحله ۴. اگر $i = N - 1$ ، به مرحله ۶ می رویم.

مرحله ۵. ۱ را به i افزوده و به مرحله ۳ می رویم.

مرحله ۶. روند کامل است، و w_i ، به ازای هر $i = 1, 2, \dots, N$ ، $y(t_i)$ را تقریب می کند.

۲-۶-۸ مثال: استفاده از روش رونگه - کوتای مرتبه چهار در بدست آوردن تقریبهایی به جواب مسئله مقدار اولیه

$$y' = -y + t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad y(0) = 1$$

با $h = 0.1$, $N = 10$, $t_i = 0.1i$ ، نتایج و خطاهای فهرست شده در جدول ۵.۲ را نتیجه می دهد.

(جدول ۵-۲)

خط	مقادیر رونگه - کوتای مرتبه چهار	مقادیر حقیقی	t_i
.	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	.
$8/20 \times 10^{-8}$	۱/۰۰۴۸۳۷۵۰۰۰	۱/۰۰۴۸۳۷۴۱۸۰	۰/۱
$1/483 \times 10^{-7}$	۱/۰۱۸۷۳۰۹۰۱۴	۱/۰۱۸۷۳۰۷۵۳۱	۰/۲
$2/013 \times 10^{-7}$	۱/۰۴۰۸۱۸۴۲۲۰	۱/۰۴۰۸۱۸۲۲۰۷	۰/۳
$2/429 \times 10^{-7}$	۱/۰۷۰۳۲۰۲۸۸۹	۱/۰۷۰۳۲۰۰۴۶۰	۰/۴
$2/747 \times 10^{-7}$	۱/۱۰۶۵۳۰۹۳۴۴	۱/۱۰۶۵۳۰۶۵۹۷	۰/۵
$2/984 \times 10^{-7}$	۱/۱۴۸۸۱۹۳۴۴	۱/۱۴۸۸۱۱۶۳۶۰	۰/۶
$3/149 \times 10^{-7}$	۱/۱۹۶۵۸۵۶۱۸۷	۱/۱۹۶۵۸۵۳۰۳۸	۰/۷
$3/256 \times 10^{-7}$	۱/۲۴۹۳۲۸۲۸۹۷	۱/۲۴۹۳۲۸۹۶۴۱	۰/۸
$3/315 \times 10^{-7}$	۱/۳۰۶۵۶۹۹۹۱۲	۱/۳۰۶۵۶۹۶۵۹۷	۰/۹
$3/332 \times 10^{-7}$	۱/۳۶۷۸۷۹۷۷۴۴	۱/۳۶۷۸۷۹۴۴۱۲	۱

مهمترین عمل محاسباتی در بکار بردن روشهای رونگه - کوتا محاسبه f است. در روشهای مرتبه دوم خطای برشی $O(h^2)$ است، لیکن هزینه محاسبه دو مقدار تابعی در هر مرحله است. روش رونگه - کوتای

مرتبه چهار نیاز به چهار محاسبه در هر مرحله دارد، ولی خطای برشی $O(h^4)$ است. بوچر^۷ [۱۱] رابطه زیر را بین تعداد محاسبات در هر مرحله و مرتبه خطای برشی موضعی بیان کرده است.

(جدول ۶-۲)

تعداد محاسبه در هر مرحله	۲	۳	۴	۵	۶	۷	$n \geq 8$
بهترین امکان خطای							
برشی موضعی	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^5)$	$O(h^6)$	$O(h^7)$	$O(h^{n-2})$

در نتیجه، روشهای مرتبه پایین تر، با اندازه گام کوچکتر، با دادن ارجحیت به روشهای مرتبه بالاتر ممکن، که از اندازه گام بزرگتری استفاده می کنند، بکار می روند.

یک مقیاس که با آن روشهای مرتبه پایین رونگه - کوتا مقایسه می شوند را به صورت زیر شرح می دهیم: چون روش رونگه - کوتای مرتبه چهار در هر مرحله به چهار محاسبه نیاز دارد، اگر بخواهد برتر باشد، باید جوابهای دقیقتری نسبت به روش اویلر با اندازه شبکه ای یک چهارم بدهد (که در آن منظور از اندازه شبکه ای تفاضل بین نقاط شبکه ای متوالی است). مشابهاً، اگر روش رونگه - کوتای مرتبه چهار بخواهد از روشهای رونگه - کوتای مرتبه دو بهتر باشد، باید دقت بیشتری با اندازه گام h نسبت به روش مرتبه دومی با اندازه گام $\frac{1}{4}h$ بدهد، زیرا روش مرتبه چهار، به دو برابر محاسبه در هر مرحله نیاز دارد. یک بررسی از تفوق روش رونگه - کوتای مرتبه چهار داده شده در (۳۶-۲) با این مقیاس، در مثال زیر نشان داده می شود.

۹-۶-۲ مثال: برای مسئله

$$y' = -y + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$y(0) = 0,$$

روش اویلر با $h = 0.025$ ، روش پیراسته اویلر معادله (۳۴-۲) با $h = 0.05$ ، و روش رونگه - کوتای مرتبه چهار معادله (۳۶-۲) با $h = 0.1$ در نقاط شبکه ای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ مقایسه می شوند. نتایج در جدول ۷-۲ ارائه شده اند. در این مثال واضح است که روش مرتبه چهار بهتر است.

^۷. Butcher

(جدول ۲-۷)

t	روش رونگه - کوتای			
	مقدار واقعی	مرتبه چهار	روش پیراسته	روش اوایلر
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	
0.1	0.095162582	0.0951623	0.096312	
0.2	0.181269247	0.18126910	0.181198	
0.3	0.259181779	0.25918158	0.259085	
0.4	0.329679954	0.32967971	0.329563	
0.5	0.393469340	0.39346906	0.393337	

۲-۷ معادلات مرتبه بالاتر و دستگاههای معادلات دیفرانسیل

این بخش مشتمل بر مقدمه ای از حل عددی معادلات دیفرانسیل مرتبه بالاتر تحت شرایط اولیه است. روشهای مورد بحث محدود به آنهایی است که یک معادله مرتبه بالاتر از یک را به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می کند. پیش از بحث درباره روند تبدیل، نکاتی چند در باب دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول لازم است.

یک دستگاه مرتبه m از مسائل مقدار اولیه مرتبه اول را می توان به صورت

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ \frac{du_2}{dt} &= f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ &\vdots \\ \frac{du_m}{dt} &= f_m(t, u_1, u_2, \dots, u_m), \end{aligned} \quad (2-37)$$

به ازای $a \leq t \leq b$ ، با شرایط اولیه زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} u_1(a) &= \alpha_1, \\ u_2(a) &= \alpha_2, \\ &\vdots \\ u_m(a) &= \alpha_m, \end{aligned} \quad (2-37)$$

هدف تعیین m تابع $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ است که در دستگاه معادلات دیفرانسیل و شرایط اولیه صدق کنند.

برای بحث وجود و یکتایی جوابهای دستگاه معادلات، ابتدا لازم است تعریف شرط لیپ شیتس را به توابع چند متغیره تعمیم دهیم.

۲-۷-۱ تعریف: گوئیم تابع $f(t, y_1, \dots, y_m)$ تعریف شده بر مجموعه

$\{ (t, u_1, \dots, u_m) \mid a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2, \dots, m \}$ در شرط لیپ شیتس بر D با متغیرهای $u_1, u_2, \dots, u_m$ صدق می کند اگر ثابتی مانند $L > 0$ با خاصیت زیر وجود داشته باشد:

به ازای هر $(t, z_1, \dots, z_m)$ و $(t, u_1, u_2, \dots, u_m)$ در D ،

$$|f(t, u_1, \dots, u_m) - f(t, z_1, \dots, z_m)| \leq L \sum_{j=1}^m |u_j - z_j|. \quad (۲. ۳۹)$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین، می توان نشان داد که هرگاه f و مشتقات جزئی اول آن در D پیوسته بوده و به ازای هر $i = 1, 2, \dots, m$ و هر $(t, u_1, \dots, u_m)$ در D

$$\left| \frac{\partial f(t, u_1, \dots, u_m)}{\partial u_i} \right| \leq L,$$

آنگاه f در شرط لیپ شیتس بر D با ثابت لیپ شیتس L صدق می کند. (ر.ک. بیرکف - روتا) [۷]، صفحه ۱۰۲). یک قضیه وجودی و یکتایی اساسی در زیر ارائه می شود. اثباتش را می توان در صفحات ۱۱۳-۱۱۲ بیرکف و روتا [۷] یافت.

۲-۷-۲ قضیه: فرض کنیم

$\{ (t, u_1, u_2, \dots, u_m) \mid a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2, \dots, m \}$ و نیز $f_i(t, u_1, \dots, u_m)$ ، به ازای هر $i = 1, 2, \dots, m$ ، در D پیوسته و بر آن در شرط لیپ شیتس صدق کنند. در این صورت، دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول (۲-۳۷)، تحت شرایط اولیه (۲-۳۸)، دارای جواب منحصر بفرد $u_1(t), \dots, u_m(t)$ ، به ازای $a \leq t \leq b$ است.

برای تحویل یک معادله دیفرانسیل مرتبه m کلی به شکل

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}), \quad a \leq t \leq b,$$

با شرایط اولیه $y(\alpha) = \alpha_1, y'(\alpha) = \alpha_2, \dots, y^{(m-1)}(\alpha) = \alpha_m$ به یک دستگاه معادلات به شکل (۲-۳۷) و (۲-۳۸)، فرض می کنیم

$$u_1(t) = y(t), \quad u_r(t) = y'(t), \dots, \quad y_m(t) = y^{(m-1)}(t),$$

با این نمادها، دستگاه مرتبه اول

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= \frac{dy}{dt} = u_r, \\ \frac{du_r}{dt} &= \frac{dy'}{dt} = u_r, \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{du_m}{dt} &= \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(m-1)}\right) \\ &= f\left(t, u_1, u_r, \dots, u_m\right), \end{aligned}$$

با شرایط اولیه زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} u_1(a) &= y(a) = \alpha_1, \\ u_r(a) &= y'(a) = \alpha_r, \\ &\vdots \\ u_m(a) &= y^{(m-1)}(a) = \alpha_m, \end{aligned}$$

۲-۷-۳ مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

$$y'' - 2y' + 2y = e^{it} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2-40)$$

با شرایط اولیه $y(0) = -1/4, y'(0) = -1/6$ را در نظر می گیریم. با فرض

$$u_1(t) = y(t) \quad \text{و} \quad u_r(t) = y'(t), \quad (2-40) \quad \text{به دستگاه}$$

$$u_1'(t) = u_r(t), \quad (2-41)$$

$$u_r'(t) = e^{it} \sin t - 2u_1(t) + 2u_r(t),$$

با شرایط اولیه زیر تبدیل می شود:

$$u_r(0) = -1/6, \quad (2-42)$$

$$u_1(0) = -1/4,$$

واضح است که $f_1(t, u_1, u_r)$ بر

$$D = \{(t, u_1, u_r) \mid 0 \leq t \leq 1, -\infty < u_1, u_r < \infty\}, \quad \text{با } L=1, \quad \text{در شرط لیب شیتس صدق}$$

می کند، و بر D پیوسته است. با فرض $f_r(t, u_1, u_r) = e^{it} \sin t - 2u_1 + 2u_r$ داریم

$$\begin{aligned} &|f_r(t, u_1, u_r) - f_r(t, z_1, z_r)| \\ &= |e^{it} \sin t - 2u_1 + 2u_r - e^{it} \sin t + 2z_1 - 2z_r| \end{aligned}$$

$$\leq 2|u_1 - z_1| + 2|u_2 - z_2|,$$

در نتیجه، f_2 نیز به D در شرط لیپ شیتس، لیکن با $L=2$ ، صدق می کند. بعلاوه، f_2 نیز بر D پیوسته است؛ در نتیجه، دستگاه به ازای $0 \leq t \leq 1$ دارای جواب منحصر بفرد است. به سادگی می توان تحقیق کرد که این جواب برابر است با

$$u_1(t) = 0.2e^{2t}(\sin t - 2\cos t),$$

$$u_2(t) = 0.2e^{2t}(4\sin t - 3\cos t),$$

در نتیجه، $y(t) = 2e^{2t}(\sin t - 2\cos t)$ جواب منحصر بفرد معادله مرتبه دوم است که در $y(0) = -0.4$ و $y'(0) = -0.6$ صدق می کند.

روشهای حل دستگاههای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول چیزی جز تعمیم روشهای حل یک معادله مرتبه اول که پیشتر در این فصل ارائه شد نیست. مثلاً، روش کلاسیک مرتبه چهار رونگه - کوتای ارائه شده با

$$w_i = a,$$

$$k_1 = hf(t_i, w_i),$$

$$k_2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(t_{i+1}, w_i + k_3),$$

و، به ازای هر $i = 0, 1, \dots, N-1$ ،

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{4}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

برای حل مسئله مقدار اولیه مرتبه اول

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

را می توان به صورت زیر تعمیم داد: عدد صحیح $N > 0$ را اختیار و قرار می دهیم $h = (b-a)/N$. بازه $[a, b]$ را به N زیر بازه با نقاط شبکه ای

$$t_j = a + jh, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

افراز می کنیم. نمادگذاری w_{ij} را جهت نمایش تقریب $u_i(t_j)$ به ازای هر $i = 1, 2, \dots, m$ ، $j = 0, 1, \dots, N$ بکار می بریم، به این معنی که w_{ij} تقریب جواب i -ام از $u_i(t)$ در t_j ، یعنی نقطه شبکه ای j -ام، است. برای شرایط اولیه، قرار می دهیم.

$$w_{1,0} = \alpha_1, \quad (43-2)$$

$$w_{2,0} = \alpha_2,$$

⋮

$$w_{m,j} = \alpha_m$$

اگر فرض کنیم مقادیر $w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m,j}$ محاسبه شده باشند، با اولین محاسبه $w_{1,j+1}, w_{2,j+1}, \dots, w_{m,j+1}$ را بدست می آوریم:

$$k_{1,i} = hf_i(t_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \dots, w_{m,j}), i = 1, 2, \dots, m \quad \text{به ازای هر} \quad (44-2)$$

به ازای هر $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{2,i} = hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m}\right), \quad (45-2)$$

به ازای هر $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{3,i} = hf_i\left(t_j + \frac{h}{3}, w_{1,j} + \frac{1}{3}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{3}k_{2,2}, \dots, w_{m,j} + \frac{1}{3}k_{2,m}\right), \quad (46-2)$$

به ازای هر $i = 1, 2, \dots, m$

$$k_{4,i} = hf_i(t_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \dots, w_{m,j} + k_{3,m}) \quad (47-2)$$

$$w_{i,j+1} = w_{i,j} + \frac{1}{4}[k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}], \quad (48-2)$$

باید توجه داشت که لازم است تمام $k_{1,1}, k_{1,2}, \dots, k_{1,m}$ پیش از آنکه بتوان $k_{2,1}$ را تعیین کرد، محاسبه شوند. در حالت کلی، باید هریک از $k_{1,1}, k_{1,2}, \dots, k_{1,m}$ پیش از هریک از عبارات $k_{l+1,i}$ محاسبه شوند.

۲-۷-۴ مثال: دستگاه مرتبه اول مثال (۲-۷-۳)، داده شده با

$$u'_1 = u_2, \quad (49-2)$$

$$u'_2 = e^{2t} \sin t - 2u_1 + 2u_2,$$

به ازای $0 \leq t \leq 1$ ، با شرایط اولیه زیر را در نظر می گیریم:

$$u_1(0) = -0.4, \quad (50-2)$$

$$u_2(0) = -0.6,$$

روش کلاسیک مرتبه چهار رونگه-کوتا را برای تقریب جواب این مسئله با استفاده از $h = 0.1$ بکار می

بریم. از شرایط اولیه نتیجه می شود که $w_{1,j} = -0.4$ و $w_{2,j} = -0.6$. بنابر معادلات (۲-۴۴) تا (۲-۴۷) با

$j = 1$

$$k_{1,1} = hf_1(t, w_{1,j}, w_{2,j}) = hw_{2,j} = -0.6,$$

$$k_{1,2} = hf_2(t, w_{1,j}, w_{2,j})$$

$$\begin{aligned}
&= h \left[e^{\gamma t} \sin t - \gamma w_{\gamma, \cdot} + \gamma w_{\gamma, \cdot} \right] = -0.04, \\
k_{\gamma, 1} &= hf_1 \left(t, +\frac{h}{\gamma}, w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1}, w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1} \right) \\
&= h \left(w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1} \right) = -0.062, \\
k_{\gamma, 2} &= hf_2 \left(t, +\frac{h}{\gamma}, w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1}, w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1} \right) \\
&h \left[e^{\gamma(t+\cdot/\cdot\delta)} \sin(t+\cdot/\cdot\delta) - \gamma \left(w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \gamma \left(w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1} \right) \right] \\
&= -0.03247644757, \\
k_{\gamma, 1} &= h \left[w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 2} \right] = -0.06162382238, \\
k_{\gamma, 2} &= h \left[e^{\gamma(t+\cdot/\cdot\delta)} \sin(t+\cdot/\cdot\delta) - \gamma \left(w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \gamma \left(w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 2} \right) \right], \\
k_{\gamma, 1} &= h \left[w_{\gamma, \cdot} + k_{\gamma, 2} \right] = -0.06315240924, \\
k_{\gamma, 2} &= h \left[e^{\gamma(t+\cdot/\cdot\delta)} \sin(t+\cdot/\cdot\delta) - \gamma \left(w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, 1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \gamma \left(w_{\gamma, \cdot} + k_{\gamma, 2} \right) \right] \\
&= -0.02178637298;
\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$w_{\gamma, 1} = w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} \left[k_{\gamma, 1} + \gamma k_{\gamma, 1} + \gamma k_{\gamma, 1} + k_{\gamma, 1} \right] = -0.04617333423,$$

و

$$w_{\gamma, 1} = w_{\gamma, \cdot} + \frac{1}{\gamma} \left[k_{\gamma, 2} + \gamma k_{\gamma, 2} + \gamma k_{\gamma, 2} + k_{\gamma, 2} \right] = -0.06316312421$$

مقدار $w_{\gamma, 1}$ تقریب $u_1(\cdot/\cdot) = y(\cdot/\cdot) = 0.2e^{\gamma(\cdot/\cdot)} [\sin \cdot/\cdot - 2 \cos \cdot/\cdot]$ و $w_{\gamma, 1}$ تقریب $u_2(\cdot/\cdot) = y'(\cdot/\cdot) = 0.2e^{\gamma(\cdot/\cdot)} [4 \sin \cdot/\cdot - 3 \cos \cdot/\cdot]$ می باشد.

مقادیر $w_{\gamma, j}$ و $w_{\gamma, j}$ به ازای $w_{\gamma, j}$ به ازای $j = 0, 1, \dots, 10$ در جدول ۲-۸ درج شده اند، و مقدار واقعی $u_1(t) = 0.2e^{\gamma t} [\sin t - 2 \cos t]$ نیز داده شده است. چون $u_2 = u_1'$ ، مقادیر $u_2(t)$ داده نشده اند.

(جدول ۲-۸)

t_j	$w_{1,j}$	$w_{\lambda,j}$	$y(t_j) = u_1(t_j)$	$ y(t_j) - w_{1,j} $
۰	-۰/۴۰۰۰۰۰۰۰	-۰/۶۰۰۰۰۰۰۰	-۰/۴۰۰۰۰۰۰۰	۰
۰/۱	-۰/۴۶۱۷۳۳۳۴	-۰/۶۳۱۶۳۱۲۴	-۰/۴۶۱۷۳۲۹۷	$۳/۷ \times 10^{-۷}$
۰/۲	-۰/۵۲۵۵۵۹۸۸	-۰/۶۴۰۱۴۸۹۵	-۰/۵۲۵۵۵۹۰۵	$۸/۳ \times 10^{-۷}$
۰/۳	-۰/۵۸۸۶۰۱۴۴	-۰/۶۱۳۶۶۳۸۱	-۰/۵۸۸۶۰۰۰۵	$۱/۳۹ \times 10^{-۶}$
۰/۴	-۰/۶۴۶۶۱۲۳۱	-۰/۵۳۶۵۸۲۰۳	-۰/۶۴۶۶۱۰۲۸	$۲/۰۳ \times 10^{-۶}$
۰/۵	-۰/۶۹۳۵۶۶۶۶	-۰/۳۸۸۷۳۸۱۰	-۰/۶۹۳۵۶۳۹۵	$۲/۷۱ \times 10^{-۶}$
۰/۶	-۰/۷۲۱۱۵۱۹۰	-۰/۱۴۴۳۸۰۸۷	-۰/۷۲۱۱۴۸۴۹	$۳/۴۱ \times 10^{-۶}$
۰/۷	-۰/۷۱۸۱۵۲۹۵	۰/۲۸۹۹۷۰۲	-۰/۷۱۸۱۴۸۹۰	$۴/۰۵ \times 10^{-۶}$
۰/۸	-۰/۶۶۹۷۱۱۳۳	۰/۷۱۹۹۱۸۰	-۰/۶۶۹۷۰۶۷۷	$۴/۵۶ \times 10^{-۶}$
۰/۹	-۰/۵۵۶۴۴۲۹۰	۰/۱۵۳۴۷۸۱۵	-۰/۵۵۶۴۳۸۱۴	$۴/۷۶ \times 10^{-۶}$
۱	-۰/۳۵۳۳۹۸۸۶	۰/۲۵۷۸۷۶۶۳	-۰/۳۵۳۳۹۴۳۶	$۴/۵۰ \times 10^{-۶}$

۲-۷-۵ قرارداد: با فرض $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T$ معادله (۲-۳۷) به صورت زیر نوشته می شود

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (۲-۵۱)$$

و نیز قضیه (۲-۷-۱) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

۲-۷-۶ قضیه [۱۷]: اگر $f(t, u)$ تابعی پیوسته از t و بر روی ناحیه

$$D = \{(t, u) | a \leq t \leq b, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2, \dots, m\},$$

در شرط لیپ شیتس صدق کند در اینصورت یک جواب منحصر به فرد برای دستگاه (۲-۵۱) وجود دارد.

شرط لیپ شیتس با این نمادگذاری به این معنی است که ثابتی مانند L چنان یافت شود که

$$\|f(t, u) - f(t, u^*)\| \leq \|u - u^*\|, \quad (۲-۵۲)$$

۲-۸ همگرایی و پایداری

۲-۸-۱ تعریف روش تک گامی: یک روش تک گامی برای تقریب جواب یک معادله دیفرانسیل، روشی

است که می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$u_{n+1} = u_n + h\psi(t_n, u_n, h), \quad (53-2)$$

۲-۸-۲ تعریف همگرایی: روش تک گامی (۵۳-۲) همگراست، اگر برای هر معادله دیفرانسیل

$$u' = f(u) \text{ هنگامی که } n \rightarrow \infty, \text{ برای هر } 0 \leq t \leq b \text{ داشته باشیم } u_n \rightarrow u(t).$$

۲-۸-۳ تعریف پایداری: یک روش تک گامی پایدار نامیده می شود، هرگاه برای هر معادله دیفرانسیل که

در شرط لیب شیتس صدق می کند، ثابتهای مثبت h_0 و K چنان وجود داشته باشند که تفاضل بین دو جواب عددی متفاوت u_n و u_n^* که در رابطه (۵۳-۲) صدق می کنند، در شرط زیر صدق نمایند

$$\|u_n - u_n^*\| \leq K \|u - u^*\|,$$

برای هر $0 \leq h \leq h_0$

۲-۸-۴ قضیه [۱۷]: اگر $\psi(t, u, h)$ نسبت به u در شرط لیب شیتس صدق کند، در اینصورت روش ارائه

شده توسط (۵۳-۲) پایدار است.

۲-۸-۵ قضیه [۱۷]: اگر $\psi(t, u, h)$ تابعی پیوسته از t و بر روی ناحیه

$$D = \{(t, u, h) \mid a \leq t \leq b, 0 \leq h \leq h_0, -\infty < u_i < \infty, i = 1, 2, \dots, m\}$$

در شرط لیب شیتس صدق کند، یک شرط لازم و کافی برای همگرایی آن است که

$$\psi(t, u(t), \cdot) = f(t, u(t)).$$

۲-۸-۶ قضیه [۱۷]: روش عددی رونگه - کوتا مرتبه ۴ برای تقریب معادله دیفرانسیل

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(\cdot) = u, \end{cases}$$

پایدار است.

فصل سوم

حل عددی معادلات دیفرانسیل فازی

۳-۱ مقدمه:

موضوع معادلات دیفرانسیل فازی در سالهای اخیر به سرعت در حال رشد است. مفهوم مشتق فازی در ابتدا به وسیله زاده و چنگ [۱۲] معرفی شد، سپس این مفهوم توسط دبیوس و پراد [۵] با استفاده از اصل گسترش ادامه یافت. سایر روشها توسط پوری و رالسکو [۲۸] و گوتشل و واگسمن [۱۸] مورد بحث قرار گرفت. کندل و بیات [۲۳] مفهوم معادله دیفرانسیل فازی را برای تجزیه و تحلیل مسائل دینامیکی فازی به کار بردند. معادله دیفرانسیل فازی و مسأله مقدار اولیه (مسأله کوشی) به صورت جدی توسط کالو [۲۲] و [۲۱]، سیکالا [۲۵]، هی و یای [۱۹]، کولدن [۲۴] و دیگر محققین [۲۰-۱۳-۹-۸-۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. روشهای عددی برای حل معادلات دیفرانسیل فازی توسط محققین [۴-۲-۱] معرفی شده است ما در این فصل با استفاده از بیان مشتق سیکالا در حل معادلات دیفرانسیل فازی، روشهای اویلر و رونگه- کوتای مرتبه چهار فازی را به همراه قضایای مربوط به همگرایی و مثال هایی در بیان صحت قضایای ذکر شده بیان می نماییم.

۳-۲ روش اویلر فازی

در این بخش به جای معادله دیفرانسیل فازی، فرم پارامتری آن را جایگزین و سپس آن را حل می کنیم. حال سیستم جدید شامل دو معادله دیفرانسیل فازی با شرایط اولیه می باشد. معادله دیفرانسیل فازی مرتبه اول زیر را در نظر بگیرید:

$$X'(t) = F(t, x), \quad (1-3)$$

که X یک تابع فازی از t است و $F(t, x)$ یک تابع فازی با متغیر قطعی t و متغیر فازی x و X' مشتق فازی X . اگر مقدار اولیه $X(t_0) = X_0$ داده شده باشد، یک مسأله کوشی فازی مرتبه اول را خواهیم داشت:

$$X' = F(t, x), \quad X(t_0) = X_0. \quad (2-3)$$

حال بنابر قضیه ۲.۵ از مرجع [۲۱] می توانیم معادله (۲-۳) را با سیستم زیر جایگزین کنیم،

$$\underline{X}' = \underline{F}(t, x) = F(t, \underline{x}, \bar{x}), \quad \underline{X}(t_0) = \underline{X}_0, \quad (3-3)$$

$$\bar{X}' = \bar{F}(t, x) = G(t, \underline{x}, \bar{x}), \quad \bar{X}(t_0) = \bar{X}_0,$$

که فرم پارامتری معادلات (۳-۳) بصورت زیر است:

^۱. Crisp

$$\underline{X}'(t;r) = F(t, \underline{x}(t;r), \bar{x}(t;r)), \quad \underline{X}(t;r) = \underline{X}_*(r), \quad (4-3)$$

$$\bar{X}'(t;r) = G(t, \underline{x}(t;r), \bar{x}(t;r)), \quad \bar{X}(t;r) = \bar{X}_*(r), \quad r \in [0, 1]$$

برای بدست آوردن معادله (3-5)، $T > t_*$ قرار داده و بازه $[t_*, T]$ را با یک مجموعه از نقاط گسسته به نام نقاط شبکه ای جایگزین می کنیم:

$$t_* < t_1 < \dots < t_N = T, \quad (5-3)$$

که جواب دقیق $[\underline{Y}(t;r), \bar{Y}(t;r)]$ توسط $(\underline{y}(t;r), \bar{y}(t;r))$ تقریب زده می شود. (توجه به این نکته لازم است که در هر بار محاسبه، r تغییر نمی کند.)

جواب های دقیق و تقریبی در t_n ، برای $0 \leq n \leq N$ را بصورت زیر نشان می دهند:

$$Y_n(r) = [\underline{Y}(t_n;r), \bar{Y}(t_n;r)], \quad (6-3)$$

$$y_n(r) = [\underline{y}(t_n;r), \bar{y}(t_n;r)],$$

نقاط شبکه ای که جواب در آنها محاسبه می شود بصورت زیر می باشند:

$$t_n = t_* + nh, \quad h = \frac{(T - t_*)}{N}; \quad 1 \leq n \leq N,$$

روش اویلر براساس تقریب مرتبه اول $\underline{Y}'(t;r), \bar{Y}'(t;r)$ است و داریم:

$$Z'(t;r) \approx \frac{Z(t+h;r) - z(t;r)}{h}, \quad (7-3)$$

که $Z(t;r)$ به ترتیب $\underline{Y}(t;r), \bar{Y}(t;r)$ است.

بنابر معادله (3-7) داریم:

$$\underline{Y}_{n+1}(r) \approx \underline{Y}_n(r) + hF_n(r), \quad (8-3)$$

$$\bar{Y}_{n+1}(r) \approx \bar{Y}_n(r) + hG_n(r),$$

که

$$F_n(r) = F(t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)), \quad (9-3)$$

$$G_n(r) = G(t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)),$$

با توجه به معادلات (۸-۳) تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned}\underline{y}_{n+1}(r) &= \underline{y}_n(r) + hF_n[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)], \\ \bar{y}_{n+1}(r) &= \bar{y}_n(r) + hG_n[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r)],\end{aligned}\quad (۱۰-۳)$$

که در آن $\bar{y}_*(r) = \bar{X}_*(r)$ و $\underline{y}_*(r) = \bar{X}_*(r)$.

$$\begin{aligned}\underline{y}_{(t;h;r)} &= \{[t, \underline{y}_*(r)], [t, \underline{y}_1(r)], \dots, [t_N, \underline{y}_N(r)]\}, \\ \bar{y}_{(t;h;r)} &= \{[t, \bar{y}_*(r)], [t, \bar{y}_1(r)], \dots, [t_N, \bar{y}_N(r)]\},\end{aligned}\quad (۱۱-۳)$$

۳-۳ همگرایی

لم های زیر برای بیان همگرایی تقریبهای ذکر شده در بالا بیان می شوند.

۳-۳-۱ لم [۱۵]: فرض کنید دنباله اعداد $\{W_n\}_{n=0}^N$ در شرط

$$|W_{n+1}| \leq A|W_n| + B, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (۱۲-۳)$$

با ثابت های مثبت A و B صدق کند. آنگاه

$$|W_n| \leq A^n |W_0| + B \frac{A^n - 1}{A - 1}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (۱۳-۳)$$

۳-۳-۲ لم [۱۵]: فرض کنید دنباله اعداد $\{W_n\}_{n=0}^N$ و $\{V_n\}_{n=0}^N$ در شروط

$$\begin{aligned}|W_{n+1}| &\leq |W_n| + A \max\{|W_n|, |V_n|\} + B, \\ |V_{n+1}| &\leq |V_n| + A \max\{|W_n|, |V_n|\} + B,\end{aligned}\quad (۱۴-۳)$$

با ثابت های مثبت A و B صدق کنند، با تعریف

$$U_n = |W_n| + |V_n|, \quad 0 \leq n \leq N,$$

آنگاه

$$U_n \leq \bar{A}^n U_0 + \bar{B} \frac{\bar{A}^n - 1}{\bar{A} - 1}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (3-15)$$

که در آن $\bar{A} = 1 + 2A$ و $\bar{B} = 2B$.

برهان. می دانیم که $\max\{|W_n|, |V_n|\} \leq |W_n| + |V_n|$ ، لذا بنابر روابط (3-14) داریم:

$$\begin{aligned} |W_{n+1}| + |V_{n+1}| &\leq |W_n| + |V_n| + 2A(|W_n| + |V_n|) + 2B \\ &= (1 + 2A)(|W_n| + |V_n|) + 2B, \end{aligned}$$

لذا

$$U_{n+1} \leq (1 + 2A)U_n + 2B$$

بنابراین با توجه به لم (3-3-1) برای U_n ، رابطه (3-15) برقرار خواهد بود.

فرض کنید $G(t, u, v), F(t, u, v)$ توابع F, G رابطه (3-3) باشند، که u, v ثابت اند و $u \leq v$. دامنه F, G بصورت زیر می باشد:

$$K = \{(t, u, v) \mid 0 \leq t \leq T, -\infty < v < \infty, -\infty < u < v\}.$$

3-3-3 قضیه: فرض کنید $G(t, u, v), F(t, u, v)$ متعلق به $C^1(K)$ باشند و مشتقات جزئی F, G روی K کراندار باشند، آنگاه برای ثابت دلخواه r که $0 \leq r \leq 1$ ، تقریب های اویلر برای مساله (3-11) به جواب های دقیق $\underline{Y}(t; r), \bar{Y}(t; r)$ بطور یکنواخت در t همگراست.

برهان. با توجه به آنچه در معادلات دیفرانسیل معمولی مطالعه کردیم بسادگی می توان نشان داد که

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \underline{y}_N(r) &= \underline{Y}(T; r), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \bar{y}_N(r) &= \bar{Y}(T; r), \end{aligned}$$

از طرفی بنابر قضیه تیلور داریم:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{n+1}(r) &= \underline{Y}_n(r) + h F_n[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n), \\ \bar{Y}_{n+1}(r) &= \bar{Y}_n(r) + h G_n[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r)] + \frac{h^2}{2} Y''(\xi_n), \end{aligned}$$

که $t_n < \underline{\xi}_n, \bar{\xi}_n < t_{n+1}$ و

$$\begin{aligned} \underline{Y}_{n+1}(r) - \underline{Y}_{n+1}(r) &= \underline{Y}_n(r) - \underline{y}_n(r) \\ &+ h \left\{ F \left[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r) \right] - F \left[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r) \right] \right\} + \frac{h^\gamma}{\gamma} \underline{Y}''(\underline{\xi}_n), \\ \bar{Y}_{n+1}(r) - \bar{y}_{n+1}(r) &= \bar{Y}_n(r) - \bar{y}_n(r) \\ &+ h \left\{ G \left[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r) \right] - G \left[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r) \right] \right\} + \frac{h^\gamma}{\gamma} \bar{Y}''(\bar{\xi}_n), \end{aligned}$$

تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} W_n &= \underline{Y}_n(r) - \underline{y}_n(r), \\ V_n &= \bar{Y}_n(r) - \bar{y}_n(r), \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |W_{n+1}| &\leq |W_n| + h \left| F \left[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r) \right] - F \left[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r) \right] \right| + \frac{h^\gamma}{\gamma} \underline{M}, \quad (*) \\ |V_{n+1}| &\leq |V_n| + h \left| G \left[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r) \right] - G \left[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r) \right] \right| + \frac{h^\gamma}{\gamma} \bar{M}, \end{aligned}$$

که در اینجا

$$\underline{M} = \max_{t, \leq t \leq T} \underline{Y}''(t; r),$$

$$\bar{M} = \max_{t, \leq t \leq T} \bar{Y}''(t; r),$$

از طرفی بنابر شرط لیب شیتس برای توابع دومتغیره داریم:

$$\begin{aligned} &\left| F \left[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r) \right] - F \left[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r) \right] \right| \\ &\leq L \cdot \left\{ \left| \underline{Y}_n(r) - \underline{y}_n(r) \right| + \left| \bar{Y}_n(r) - \bar{y}_n(r) \right| \right\} \\ &\leq \gamma L \cdot \max \left\{ \left| \underline{Y}_n(r) - \underline{y}_n(r) \right|, \left| \bar{Y}_n(r) - \bar{y}_n(r) \right| \right\} \\ &= \gamma L \cdot \max \left\{ |W_n|, |V_n| \right\}, \\ &\left| G \left[t_n, \underline{Y}_n(r), \bar{Y}_n(r) \right] - G \left[t_n, \underline{y}_n(r), \bar{y}_n(r) \right] \right| \\ &\leq L \cdot \left\{ \left| \underline{Y}_n(r) - \underline{y}_n(r) \right| + \left| \bar{Y}_n(r) - \bar{y}_n(r) \right| \right\} \\ &\leq \gamma L \cdot \max \left\{ \left| \underline{Y}_n(r) - \underline{y}_n(r) \right|, \left| \bar{Y}_n(r) - \bar{y}_n(r) \right| \right\} \\ &= \gamma L \cdot \max \left\{ |W_n|, |V_n| \right\}, \end{aligned}$$

با دوباره نویسی روابط (*) داریم:

$$|W_{n+1}| \leq |W_n| + \epsilon h L \max\{|W_n|, |V_n|\} + \frac{h^\epsilon}{\epsilon} \underline{M},$$

$$|V_{n+1}| \leq |V_n| + \epsilon h L \max\{|W_n|, |V_n|\} + \frac{h^\epsilon}{\epsilon} \bar{M},$$

و $L > 0$ کران بالایی برای مشتقات جزئی F, G می باشد.

بنابر لم (۳-۳-۲)

$$|W_n| \leq (1 + \epsilon h L)^n |U_\cdot| + h^\epsilon \underline{M} \frac{(1 + \epsilon h L)^n - 1}{\epsilon h L},$$

$$|V_n| \leq (1 + \epsilon h L)^n |U_\cdot| + h^\epsilon \bar{M} \frac{(1 + \epsilon h L)^n - 1}{\epsilon h L},$$

که در اینجا $|U_\cdot| = |W_\cdot| + |V_\cdot|$ می باشد و

$$|W_n| \leq (1 + \epsilon h L)^n |U_\cdot| + h^\epsilon \underline{M} \frac{(1 + \epsilon h L)^{(T-t)/h} - 1}{\epsilon h L},$$

$$|V_n| \leq (1 + \epsilon h L)^n |U_\cdot| + h^\epsilon \bar{M} \frac{(1 + \epsilon h L)^{(T-t)/h} - 1}{\epsilon h L},$$

از آنجایی که $|W_\cdot| = |V_\cdot|$ است خواهیم داشت:

$$|W_N| \leq \underline{M} \frac{e^{\epsilon L(T-t)} - 1}{\epsilon L} h,$$

$$|V_N| \leq \bar{M} \frac{e^{\epsilon L(T-t)} - 1}{\epsilon L} h,$$

که وقتی $h \rightarrow 0$ آنگاه $W_n \rightarrow 0$ و $V_n \rightarrow 0$.

۳-۳-۴ مثال: مساله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$X'(t) = x(t), \quad x(\cdot) = (0/75 + 0/25r, 1/125 - 0/125r),$$

که جواب دقیق آن عبارت است از

$$Y(1; r) = \left[(0/75 + 0/25r)e, (1/125 - 1/125r)e \right], 0 \leq r \leq 1$$

با استفاده از تقریب اویلر با $N = 10$ داریم:

با فرض اینکه $y(\cdot) = \underline{x}(\cdot)$ و $\bar{y}(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ و با توجه به اینکه $h = \frac{1}{\cdot}$ داریم:

$$\underline{y}(\cdot/\cdot; r) = \underline{y}(\cdot; r) + h\underline{x}(\cdot) = (\cdot + h)\underline{y}(\cdot),$$

$$\bar{y}(\cdot/\cdot; r) = \bar{y}(\cdot; r) + h\bar{x}(\cdot) = (\cdot + h)\bar{y}(\cdot),$$

در گام بعدی با فرض دقیق بودن تقریب در گام قبلی داریم:

$$\underline{y}(\cdot/\cdot; r) = \underline{y}(\cdot/\cdot; r) + h\underline{x}(\cdot/\cdot; r) = \underline{y}(\cdot/\cdot; r) + h\underline{y}(\cdot/\cdot; r) = (\cdot + h)^{\cdot} \underline{y}(\cdot; r),$$

$$\bar{y}(\cdot/\cdot; r) = \bar{y}(\cdot/\cdot; r) + h\bar{x}(\cdot/\cdot; r) = \bar{y}(\cdot/\cdot; r) + h\bar{y}(\cdot/\cdot; r) = (\cdot + h)^{\cdot} \bar{y}(\cdot; r),$$

اگر روند فوق را تا نقطه $t = 1$ ادامه دهیم داریم:

$$\underline{y}(1; r) = (\cdot + \cdot/\cdot)^{\cdot} \underline{y}(\cdot; r) = (\cdot + \cdot/\cdot)^{\cdot} (\cdot/\cdot\cdot\cdot + \cdot/\cdot\cdot\cdot r),$$

$$\bar{y}(1; r) = (\cdot + \cdot/\cdot)^{\cdot} \bar{y}(\cdot; r) = (\cdot + \cdot/\cdot)^{\cdot} (\cdot/\cdot\cdot\cdot + \cdot/\cdot\cdot\cdot r),$$

لذا تقریب مورد نظر عبارت است از:

$$y(1; r) = \left[\left((\cdot + \cdot/\cdot)^{\cdot} (\cdot/\cdot\cdot\cdot + \cdot/\cdot\cdot\cdot r), (\cdot + \cdot/\cdot)^{\cdot} (\cdot/\cdot\cdot\cdot - \cdot/\cdot\cdot\cdot r) \right) \right],$$

$$\cdot < r \leq 1$$

۳-۴ روش رونگه - کوتای مرتبه چهار

همانطور که می دانید روش های تیلور به علت نیاز به محاسبه مشتقات مراتب بالا خیلی مناسب نیستند، لذا روشهای رونگه کوتاه با همان مرتبه خطای تیلور و بدون نیاز به محاسبه مشتقات بیان شدند. مساله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) + y(t), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = \alpha, \end{cases} \quad (3-16)$$

اساس روش رونگه - کوتا بر بیان تفاضل بین دو مقدار y در نقاط t_n و t_{n+1} گذاشته شده است،

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^m w_i k_i \quad (3-17)$$

برای $i = 1, \dots, m$ که w_i ها ثابت اند و

$$k_i = h.f\left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} k_j\right), \quad (18-3)$$

که رابطه (۱۷-۳) برای توانهای h تا h^m دقیق است، زیرا این روش براساس روش تیلور از مرتبه m بیان شده است.

ضرایب غیر صفر α_i و $\beta_{i,j}$ در روش رونگه کوتای مرتبه چهار عبارتند از:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_4 = 1, \quad \beta_{2,1} = \frac{1}{4}, \quad \beta_{3,2} = \frac{1}{4}, \quad \beta_{4,3} = 1,$$

بنابر مرجع [۲۶] داریم:

$$y(\cdot) = \alpha, \quad (19-3)$$

$$k_1 = h.f(t_i, y_i),$$

$$k_2 = h.f\left(t_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{1}{4}k_1\right),$$

$$k_3 = h.f\left(t_i + \frac{h}{4}, y_i + \frac{1}{4}k_2\right),$$

$$k_4 = h.f(t_i + h, y_i + k_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

جایکه

$$a = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N = b, \quad h = \frac{(b-a)}{N} = t_{i+1} - t_i,$$

۳-۴ قضیه: فرض $f(t, y)$ متعلق به $C^4[a, b]$ باشد و مشتقات جزئی آن موجود و کراندار باشند و

p, M اعداد مثبت باشند بطوری که

$$|f(t, y)| < M, \quad \left| \frac{\partial^{i+j} f}{\partial^i t \partial^j y} \right| < \frac{P^{i+j}}{M^{j-1}},$$

آنگاه در روش رونگه- کوتای مرتبه چهار داریم:

$$y_{i+1} - y_i \approx \frac{1}{4} h^5 M P^4 + O(h^6),$$

برهان. به مرجع [۲۶] رجوع کنید.

۳-۵ مساله کوشی فازی

مساله مقدار اولیه فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in I = [\cdot, T] \\ y(\cdot) = y. \end{cases} \quad (20-3)$$

که در آن f یک نگاشت پیوسته از $R_+ \times R$ بتوی R بوده و $y \in E$ با مجموعه $-r$ برش زیر

$$[y.]_r = [y_\lambda(\cdot; r), y_\tau(\cdot; r)], \quad r \in (\cdot, 1]$$

که بنابر اصل گسترش زاده تعریف زیر از $f(t, y(t))$ وقتی $y = y(t)$ یک عدد فازی باشد

$$f(t, y)(s) = \sup \{ y(y(\tau)) \mid s = f(t, \tau) \}, \quad s \in R$$

و به دنبال آن داریم:

$$f_\lambda(t, y; r) = \min \{ f(t, u) \mid u \in [y_\lambda(r), y_\tau(r)] \}, \quad (21-3)$$

$$f_\tau(t, y; r) = \max \{ f(t, u) \mid u \in [y_\lambda(r), y_\tau(r)] \},$$

۳-۵-۱ لم فرض f در شرط زیر صدق کند

$$|f(t, v) - f(t, \bar{v})| \leq g(t, |v - \bar{v}|), \quad t \geq \cdot, \quad v, \bar{v} \in R,$$

که در آن $g : R_+ \times R_+ \rightarrow R_+$ یک نگاشت پیوسته است بطوریکه $r \rightarrow g(t, r)$ غیر نزولی است، مساله مقدار اولیه زیر

$$u'(t) = g(t, u(t)), \quad u(\cdot) = u.,$$

دارای جواب روی R_+ برای $u. > 0$ می باشد و $u(t) = 0$ تنها جواب آن را برای $u. = 0$ است.

آنگاه مساله مقدار اولیه (۲۰-۳) دارای جواب منحصر به فرد است.

برهان. به مرجع [۱۸] مراجعه شود.

۳-۶ روش رونگه-کوتای فازی مرتبه چهار

فرض جواب دقیق $[Y(t)]_r = [Y_\lambda(t; r), Y_\tau(t; r)]$ توسط مقدار $[y(t)]_r = [y_\lambda(t; r), y_\tau(t; r)]$

تقریب زده شود، بنابر روابط (۳-۱۷)، (۳-۱۸) داریم:

$$y_\lambda(t_{n+1}; r) - y_\lambda(t_n; r) = \sum_{i=1}^r w_i k_{i,\lambda}(t_n, y(t_n; r)), \quad (22-3)$$

$$y_\tau(t_{n+1}; r) - y_\tau(t_n; r) = \sum_{i=1}^r w_i k_{i,\tau}(t_n, y(t_n; r)),$$

که در اینجا w_i ها مقادیر ثابت اند و

$$\left[k_i(t, y(t; r)) \right]_r = \left[k_{i,\lambda}(t, y(t; r)), k_{i,\gamma}(t, y(t; r)) \right], \quad (23-3)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$k_{i,\lambda}(t_n, y(t_n; r)) = h.f\left(t_n + \alpha_i h, y_\lambda(t_n) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} k_{j,\lambda}(t_n, y(t_n; r))\right),$$

$$k_{i,\gamma}(t_n, y(t_n; r)) = h.f\left(t_n + \alpha_i h, y_\gamma(t_n) + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{i,j} k_{j,\gamma}(t_n, y(t_n; r))\right),$$

و

$$k_{1,\lambda}(t, y(t; r)) = \min\left\{ h.f(t, u) \mid u \in [y_\lambda(t; r), y_\gamma(t; r)] \right\}, \quad (24-3)$$

$$k_{1,\gamma}(t, y(t; r)) = \max\left\{ h.f(t, u) \mid u \in [y_\lambda(t; r), y_\gamma(t; r)] \right\},$$

$$k_{2,\lambda}(t, y(t; r)) = \min\left\{ h.f\left(t + \frac{h}{\gamma}, u\right) \mid u \in [z_{1,\lambda}(t; y(t; r)), z_{1,\gamma}(t; y(t; r))] \right\},$$

$$k_{2,\gamma}(t, y(t; r)) = \max\left\{ h.f\left(t + \frac{h}{\gamma}, u\right) \mid u \in [z_{1,\lambda}(t; y(t; r)), z_{1,\gamma}(t; y(t; r))] \right\},$$

$$k_{3,\lambda}(t, y(t; r)) = \min\left\{ h.f\left(t + \frac{h}{\gamma}, u\right) \mid u \in [z_{2,\lambda}(t; y(t; r)), z_{2,\gamma}(t; y(t; r))] \right\},$$

$$k_{3,\gamma}(t, y(t; r)) = \max\left\{ h.f\left(t + \frac{h}{\gamma}, u\right) \mid u \in [z_{2,\lambda}(t; y(t; r)), z_{2,\gamma}(t; y(t; r))] \right\},$$

$$k_{4,\lambda}(t, y(t; r)) = \min\left\{ h.f(t + h, u) \mid u \in [z_{3,\lambda}(t; y(t; r)), z_{3,\gamma}(t; y(t; r))] \right\},$$

$$k_{4,\gamma}(t, y(t; r)) = \max\left\{ h.f(t + h, u) \mid u \in [z_{3,\lambda}(t; y(t; r)), z_{3,\gamma}(t; y(t; r))] \right\},$$

که در روش رونگه کوتای مرتبه چهار داریم:

$$z_{1,\lambda}(t, y(t; r)) = y_\lambda(t; r) + \frac{1}{\gamma} k_{1,\lambda}(t, y(t; r)), \quad (25-3)$$

$$z_{1,\gamma}(t, y(t; r)) = y_\gamma(t; r) + \frac{1}{\gamma} k_{1,\gamma}(t, y(t; r)),$$

$$z_{2,\lambda}(t, y(t; r)) = y_\lambda(t; r) + \frac{1}{\gamma} k_{2,\lambda}(t, y(t; r)),$$

$$z_{2,\gamma}(t, y(t; r)) = y_\gamma(t; r) + \frac{1}{\gamma} k_{2,\gamma}(t, y(t; r)),$$

$$z_{3,\lambda}(t, y(t; r)) = y_\lambda(t; r) + k_{3,\lambda}(t, y(t; r)),$$

$$z_{3,\gamma}(t, y(t; r)) = y_\gamma(t; r) + k_{3,\gamma}(t, y(t; r)),$$

تعریف می کنیم:

$$\begin{aligned} F[t, y(t; r)] &= k_{\lambda, \lambda}(t, y(t; r)) + \nu k_{\nu, \lambda}(t, y(t; r)) + \nu k_{\nu, \lambda}(t, y(t; r)) + k_{\nu, \lambda}(t, y(t; r)), \\ G[t, y(t; r)] &= k_{\lambda, \nu}(t, y(t; r)) + \nu k_{\nu, \nu}(t, y(t; r)) + \nu k_{\nu, \nu}(t, y(t; r)) + k_{\nu, \nu}(t, y(t; r)), \end{aligned}$$

که جواب دقیق و تقریبی در $t_n, 0 \leq n \leq N$ ، با $[Y(t_n)]_r = [Y_\lambda(t_n; r), y_\nu(t_n; r)]$ و $[y(t_n)]_r = [y_\lambda(t_n; r), y_\nu(t_n; r)]$ به ترتیب بیان می شوند. با توجه به مراجع [۲۵] و [۸] داریم:

$$Y_\lambda(t_{n+1}; r) \approx Y_\lambda(t_n; r) + \frac{1}{\varphi} F[t_n, Y(t_n; r)], \quad (26-3)$$

$$Y_\nu(t_{n+1}; r) \approx Y_\nu(t_n; r) + \frac{1}{\varphi} G[t_n, Y(t_n; r)],$$

تعریف می کنیم:

$$y_\lambda(t_{n+1}; r) = y_\lambda(t_n; r) + \frac{1}{\varphi} F[t_n, y(t_n; r)], \quad (27-3)$$

$$y_\nu(t_{n+1}; r) = y_\nu(t_n; r) + \frac{1}{\varphi} G[t_n, y(t_n; r)],$$

که مشابه اثبات همگرایی روش اویلر (۳-۳-۳) روابط زیر ثابت می شود.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} y_\lambda(t; r) &= Y_\lambda(t; r), \\ \lim_{h \rightarrow 0} Y_\nu(t; r) &= Y_\nu(t; r), \end{aligned}$$

(اثبات این روابط در مرجع [۳] ارائه شده است)

۳-۶-۱- مثال: مساله مقدار اولیه فازی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = y(t), & t \in [0, 1], \\ y(0) = (0.75 + 0.25r, 1/125 - 0.125r), & 0 < r \leq 1, \end{cases}$$

با استفاده از روش رونگه- کوتای مرتبه چهار داریم:

$$\begin{aligned} y_\lambda(t_{n+1}; r) &= y_\lambda(t_n; r) \left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right], \\ y_\nu(t_{n+1}; r) &= y_\nu(t_n; r) \left[1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + \frac{h^4}{24} \right], \end{aligned}$$

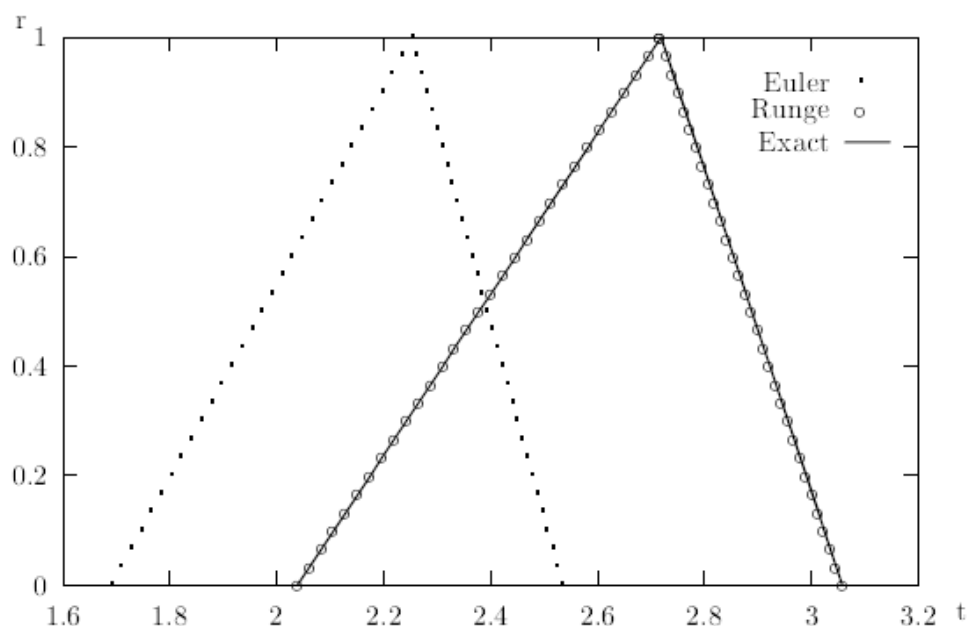
که جواب دقیق عبارت است از:

$$Y_\lambda(t; r) = y_\lambda(0; r) e^t, \quad Y_\nu(t; r) = y_\nu(0; r) e^t,$$

که در $t=1$ داریم،

$$Y(1; r) = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{1}{5}r \right) e, \left(\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{5}r \right) e \right], \quad 0 < r \leq 1,$$

که جواب دقیق و تقریبی بدست آمده توسط روشهای اویلر و رونگه کوتا ($t=1$) در شکل (۳-۱) مقایسه شده اند.



شکل (۳-۱): $h=0.05$

۳-۶-۲ مثال: مساله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y'(t) = ty(t), & [a, b] = [1, 1], \\ y(1) = \left(\sqrt{e} - \frac{1}{5}(1-r), \sqrt{e} + \frac{1}{5}(1-r) \right), \end{cases} \quad 0 < r \leq 1,$$

مساله را در دو گام باید حل شود، یکبار برای $t < 0$ و بار دیگر برای $t \geq 0$.

(۱) $t < 0$

فرم پارامتری مساله بصورت زیر است:

$$y_1'(t; r) = ty_r(t; r), \quad y_r'(t; r) = ty_1(t; r),$$

با مقادیر اولیه داده شده در صورت مساله. جواب منحصر به فرد و دقیق عبارت است از:

$$Y_r(t; r) = \frac{A+B}{2} y_r(0; r) + \frac{A-B}{2} y_1(0; r),$$

$$Y_1(t; r) = \frac{A-B}{2} y_r(0; r) + \frac{A+B}{2} y_1(0; r),$$

$$A = e^{\frac{(t^* - \alpha^*)}{\gamma}}, B = \frac{1}{A} \quad \text{که در آن } t \geq 0 \quad (2)$$

فرم پارامتری مساله بصورت زیر است:

$$y_1'(t; r) = t y_\gamma(t; r), \quad y_\gamma'(t; r) = t y_1(t; r),$$

با مقادیر اولیه داده شده در صورت مساله. جواب منحصر به فرد و دقیق عبارت است از:

$$Y_1(t; r) = y_1(\cdot; r) e^{\frac{t^2}{\gamma}}, \quad Y_\gamma(t; r) = y_\gamma(\cdot; r) e^{\frac{t^2}{\gamma}},$$

با استفاده از روش رونگه- کوتای مرتبه چهار در t_n ، $0 \leq n \leq N$ داریم:

$$k_{1,1}(t_n; r) = \min \left\{ h.t.u \mid u \in [y_1(t_n; r), y_\gamma(t_n; r)] \right\},$$

$$k_{1,\gamma}(t_n; r) = \max \left\{ h.t.u \mid u \in [y_1(t_n; r), y_\gamma(t_n; r)] \right\},$$

$$k_{\gamma,1}(t_n; r) = \min \left\{ h.\left(t + \frac{h}{\gamma}\right).u \mid u \in [z_{1,1}(t_n; r), z_{1,\gamma}(t_n; r)] \right\},$$

$$k_{\gamma,\gamma}(t_n; r) = \max \left\{ h.\left(t + \frac{h}{\gamma}\right).u \mid u \in [z_{1,1}(t_n; r), z_{1,\gamma}(t_n; r)] \right\},$$

$$k_{\gamma,1}(t_n; r) = \min \left\{ h.\left(t + \frac{h}{\gamma}\right).u \mid u \in [z_{\gamma,1}(t_n; r), z_{\gamma,\gamma}(t_n; r)] \right\},$$

$$k_{\gamma,\gamma}(t_n; r) = \max \left\{ h.\left(t + \frac{h}{\gamma}\right).u \mid u \in [z_{\gamma,1}(t_n; r), z_{\gamma,\gamma}(t_n; r)] \right\},$$

$$k_{\gamma,1}(t_n; r) = \min \left\{ h.t.u \mid u \in [z_{\gamma,1}(t_n; r), z_{\gamma,\gamma}(t_n; r)] \right\},$$

$$k_{\gamma,\gamma}(t_n; r) = \max \left\{ h.t.u \mid u \in [z_{\gamma,1}(t_n; r), z_{\gamma,\gamma}(t_n; r)] \right\},$$

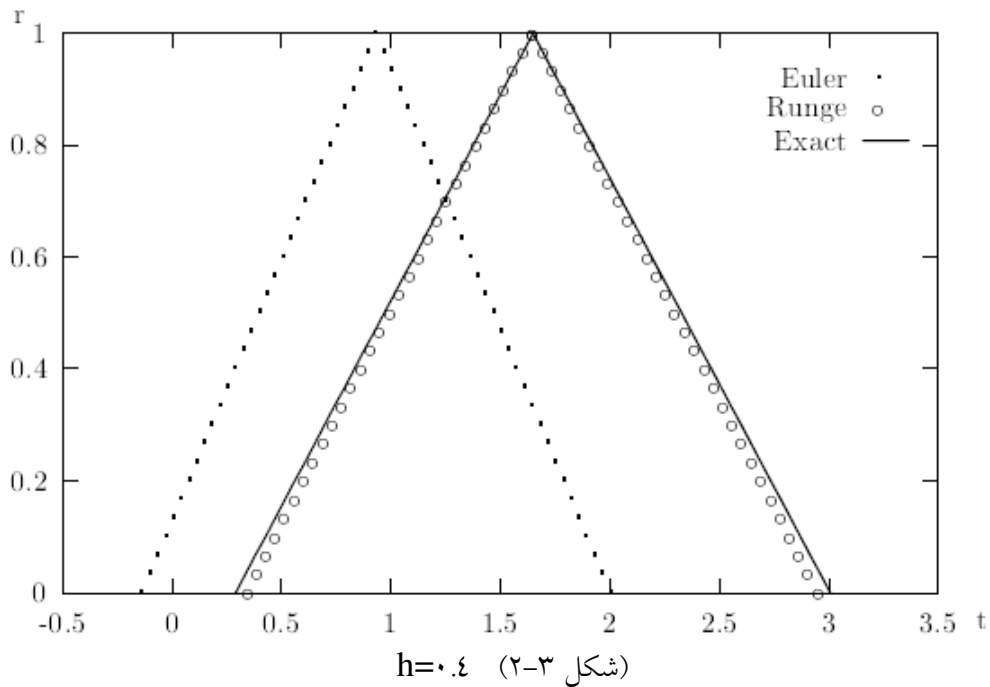
که در اینجا

$$z_{1,1}(t_n; r) = y_1(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{1,1}(t_n; r), \quad z_{1,\gamma}(t_n; r) = y_\gamma(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{1,\gamma}(t_n; r),$$

$$z_{\gamma,1}(t_n; r) = y_1(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma,1}(t_n; r), \quad z_{\gamma,\gamma}(t_n; r) = y_\gamma(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma,\gamma}(t_n; r),$$

$$z_{\gamma,1}(t_n; r) = y_1(t_n; r) + k_{\gamma,1}(t_n; r), \quad z_{\gamma,\gamma}(t_n; r) = y_\gamma(t_n; r) + k_{\gamma,\gamma}(t_n; r),$$

با فرض $t > 0$ و $t < 0$ جواب های دقیق و تقریبی به کمک نرم افزار GAMS در شکل زیر رسم شده اند



۳-۶-۳ مثال: مساله مقدار اولیه فازی زیر را در نظر بگیرید.

$$y'(t) = c_1 y^*(t) + c_2, \quad y(0) = 0,$$

که $c_i > 0$ ، به ازای $i = 1, 2$ عدد فازی مثلثی است [۲۷].

جواب دقیق بصورت زیر است:

$$Y_1(t; r) = L_1(r) \tan(w_1(r)t),$$

$$Y_2(t; r) = L_2(r) \tan(w_2(r)t),$$

با

$$L_1(r) = \sqrt{c_{2,1}(r)/c_{1,1}(r)}, \quad L_2(r) = \sqrt{c_{2,2}(r)/c_{1,2}(r)},$$

$$W_1(r) = \sqrt{c_{1,1}(r).c_{2,1}(r)}, \quad W_2(r) = \sqrt{c_{1,2}(r).c_{2,2}(r)},$$

بطوری که

$$[c_1]_r = [c_{1,1}(r), c_{1,2}(r)], \quad [c_2]_r = [c_{2,1}(r), c_{2,2}(r)],$$

که مجموعه های $-r$ برش $y'(t)$ بصورت زیر است:

$$Y'_1(t; r) = c_{2,1}(r) \sec^*(w_1(r)t),$$

$$Y'_2(t; r) = c_{2,2}(r) \sec^*(w_2(r)t),$$

که معرف عدد فازی است و داریم:

$$f_{\lambda}(t, y; r) = \min \{c_{\lambda} \cdot u^{\lambda} + c_{\gamma} \mid u \in [y_{\lambda}(t; r), y_{\gamma}(t; r)]\},$$

$$c_{\lambda} \in [c_{\lambda, \lambda}(r), c_{\lambda, \gamma}(r)], c_{\gamma} \in [c_{\gamma, \lambda}(r), c_{\gamma, \gamma}(r)]\},$$

$$f_{\gamma}(t, y; r) = \max \{c_{\lambda} \cdot u^{\lambda} + c_{\gamma} \mid u \in [y_{\lambda}(t; r), y_{\gamma}(t; r)]\},$$

$$c_{\lambda} \in [c_{\lambda, \lambda}(r), c_{\lambda, \gamma}(r)], c_{\gamma} \in [c_{\gamma, \lambda}(r), c_{\gamma, \gamma}(r)]\},$$

با استفاده از روش رونگه کوتای مرتبه چهار در t_n $0 \leq n \leq N$

$$k_{\lambda, \lambda}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \lambda}(r) \cdot y_{\lambda}^{\lambda}(t_n; r) + c_{\gamma, \lambda}(r)),$$

$$k_{\lambda, \gamma}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \gamma}(r) \cdot y_{\gamma}^{\lambda}(t_n; r) + c_{\gamma, \gamma}(r)),$$

$$k_{\gamma, \lambda}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \lambda}(r) \cdot z_{\lambda, \lambda}^{\gamma}(t_n; r) + c_{\gamma, \lambda}(r)),$$

$$k_{\gamma, \gamma}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \gamma}(r) \cdot z_{\lambda, \gamma}^{\gamma}(t_n; r) + c_{\gamma, \gamma}(r)),$$

$$k_{\gamma, \lambda}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \lambda}(r) \cdot z_{\gamma, \lambda}^{\gamma}(t_n; r) + c_{\gamma, \lambda}(r)),$$

$$k_{\gamma, \gamma}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \gamma}(r) \cdot z_{\gamma, \gamma}^{\gamma}(t_n; r) + c_{\gamma, \gamma}(r)),$$

$$k_{\gamma, \lambda}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \lambda}(r) \cdot z_{\gamma, \lambda}^{\gamma}(t_n; r) + c_{\gamma, \lambda}(r)),$$

$$k_{\gamma, \gamma}(t_n; r) = h(c_{\lambda, \gamma}(r) \cdot z_{\gamma, \gamma}^{\gamma}(t_n; r) + c_{\gamma, \gamma}(r)),$$

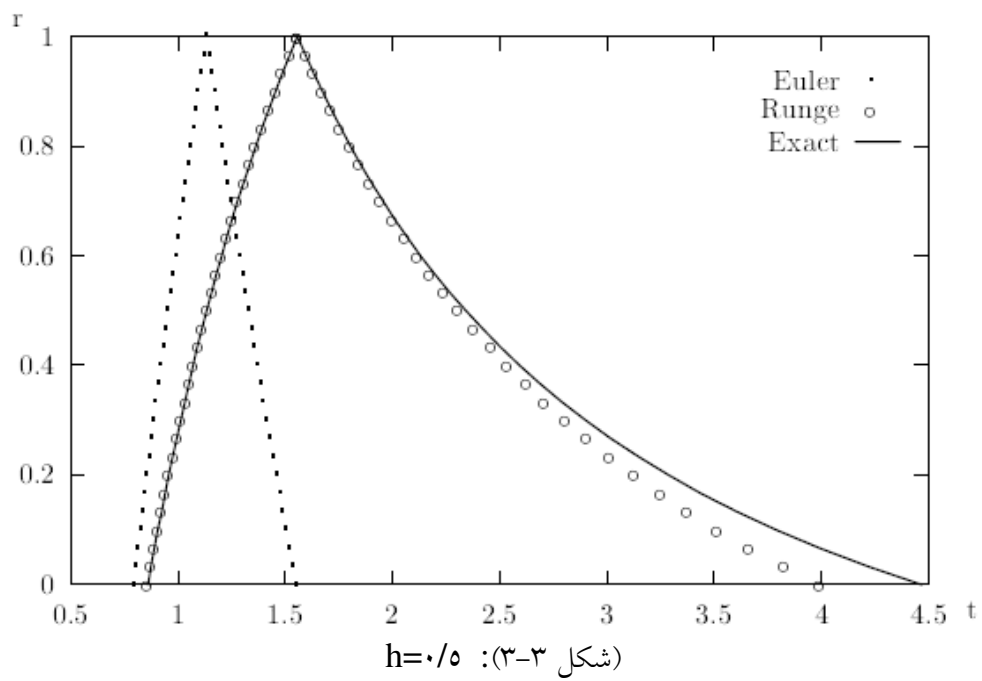
که

$$z_{\lambda, \lambda}(t_n; r) = y_{\lambda}(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{\lambda, \lambda}(t_n; r), \quad z_{\lambda, \gamma}(t_n; r) = y_{\gamma}(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{\lambda, \gamma}(t_n; r),$$

$$z_{\gamma, \lambda}(t_n; r) = y_{\lambda}(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, \lambda}(t_n; r), \quad z_{\gamma, \gamma}(t_n; r) = y_{\gamma}(t_n; r) + \frac{1}{\gamma} k_{\gamma, \gamma}(t_n; r),$$

$$z_{\gamma, \lambda}(t_n; r) = y_{\lambda}(t_n; r) + k_{\gamma, \lambda}(t_n; r), \quad z_{\gamma, \gamma}(t_n; r) = y_{\gamma}(t_n; r) + k_{\gamma, \gamma}(t_n; r),$$

جواب های دقیق و تقریبی به وسیله نرم افزار GAMS در شکل زیر رسم شده اند .



فصل چهارم

مساله مقدار اوليه فازى

۴-۱ مقدمه

باکلی و فیورینگ [۱۰] دو روش آنالیزی برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه n با مقادیر اولیه فازی ارائه نمودند. اولین روش، فازی نمودن جواب قطعی و بررسی نمودن اینکه آیا جواب قطعی حاصل، در معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه فازی صدق خواهد نمود و دومین روش عکس روش اول بود، یعنی آنها ابتدا مسئله مقدار اولیه فازی را حل نمودند و سپس بررسی کردند که آیا این جواب معرف یک تابع فازی خواهد بود. در این فصل روش حل یک معادله دیفرانسیل مرتبه n به کمک روش رونگه - کوتا مطرح می شود. سپس نشان داده می شود این روش پایدار است و به جواب معادل دیفرانسیل اولیه همگراست.

۴-۲ مساله مقدار اولیه مرتبه n

مساله مقدار اولیه زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} x^{(n)}(t) = \psi(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \\ x(\cdot) = a_1, \dots, x^{(n-1)}(\cdot) = a_n, \end{cases} \quad (1-4)$$

که در آن ψ یک نگاشت پیوسته از $R_+ \times R^n$ به R و a_i اعداد فازی در E می باشند. معادله دیفرانسیل فازی مرتبه n مذکور با تغییر متغیرهای زیر

$$y_1(t) = x(t), y_2(t) = x'(t), \dots, y_n(t) = x^{(n-1)}(t),$$

به سیستم فازی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(t, y_1, \dots, y_n), \\ \vdots \\ y'_n = f_n(t, y_1, \dots, y_n), \\ y_1(\cdot) = y_1^{[\cdot]} = a_1, \dots, y_n(\cdot) = y_n^{[\cdot]} = a_n, \end{cases} \quad (2-4)$$

که f_i ($1 \leq i \leq n$) نگاشتهای پیوسته ای $R_+ \times R^n$ به R بوده و $y_i^{[\cdot]}$ اعداد فازی در E با α - ترازهای زیر می باشند:

$$[y_i^{[\cdot]}]_\alpha = [\underline{y_i^{[\cdot]}}(\alpha), \overline{y_i^{[\cdot]}}(\alpha)] \quad i=1, \dots, n, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

با فرض $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ هنگامی که y_i برای $i=1, \dots, n$ اعداد فازی باشند، اصل گسترش زاده به تعریف زیر از $f_i(t, y)$ منجر می شود:

$$f_i(t, y)(s) = \sup_{\eta_1, \dots, \eta_n} \min\{y_1(\eta_1), \dots, y_n(\eta_n); s = f_i(t, \eta_1, \dots, \eta_n)\}, \quad \forall s \in \mathfrak{R}$$

که نتیجه می شود مجموعه α - ترازهای α برای $\alpha \in (0, 1]$ به صورت زیر است:

$$[f_i(t, y)]_\alpha = [\underline{f_i}(t, y(t, \alpha)), \overline{f_i}(t, y(t, \alpha))],$$

که برای $i=1, \dots, n$ داریم

$$\begin{aligned} \underline{f_i}(t, y(t, \alpha)) &= \min\{f_i(t, u_1, \dots, u_n); u_j \in [\underline{y_j}(t, \alpha), \overline{y_j}(t, \alpha)], \text{ for } j=1, \dots, n\}, \\ \overline{f_i}(t, y(t, \alpha)) &= \max\{f_i(t, u_1, \dots, u_n); u_j \in [\underline{y_j}(t, \alpha), \overline{y_j}(t, \alpha)], \text{ for } j=1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

که

$$[y_i(t)]_\alpha = [\underline{y_i}(t, \alpha), \overline{y_i}(t, \alpha)],$$

چون مشتق فازی از $y'_i(t)$ فرآیند فازی برای $i=1, \dots, n$ $y_i: R_+ \rightarrow E$ به صورت

$[y'_i(t)]_\alpha = [\underline{y'_i}(t, \alpha), \overline{y'_i}(t, \alpha)]$ به ازای $\alpha \in (0, 1]$ تعریف شده است، می گوئیم $y = (y_1, \dots, y_n)^t$ یک جواب فازی از روی بازه I است اگر

$$\underline{y}'_i(t, \alpha) = \min\{f_i(t, u_1, \dots, u_n); u_j \in [\underline{y}_j(t, \alpha), \overline{y}_j(t, \alpha)]\} = \underline{f}_i(t, \mathbf{y}(t, \alpha)), \quad (3-4)$$

$$\overline{y}'_i(t, \alpha) = \max\{f_i(t, u_1, \dots, u_n); u_j \in [\underline{y}_j(t, \alpha), \overline{y}_j(t, \alpha)]\} = \overline{f}_i(t, \mathbf{y}(t, \alpha)), \quad (4-4)$$

و

$$\underline{y}_i(\cdot, \alpha) = \underline{y}_i^{[1]}(\alpha), \quad \overline{y}_i(\cdot, \alpha) = \overline{y}_i^{[1]}(\alpha)$$

پس برای α -ی ثابت، یک سیستم از مساله مقدار اولیه را در R^n داریم. اگر بتوانیم آن را به صورت منحصر بفرد حل کنیم، آنگاه کفایت ثابت کنیم $[\underline{y}_j(t, \alpha), \overline{y}_j(t, \alpha)]$ یک عدد فازی $\mathbf{y}_i(t) \in E$ را تعریف می کند. اکنون در نظر می گیریم $\underline{\mathbf{y}}^{[1]}(\alpha) = (\underline{y}_1^{[1]}(\alpha), \dots, \underline{y}_n^{[1]}(\alpha))^t$ و $\overline{\mathbf{y}}^{[1]}(\alpha) = (\overline{y}_1^{[1]}(\alpha), \dots, \overline{y}_n^{[1]}(\alpha))^t$. با توجه به روابط فوق، سیستم (4-1) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = F(t, \mathbf{y}(t)), \\ \mathbf{y}(\cdot) = \mathbf{y}^{[1]} \in E^n. \end{cases} \quad (5-4)$$

با فرض $\mathbf{y}(t, \alpha) = [\underline{\mathbf{y}}(t, \alpha), \overline{\mathbf{y}}(t, \alpha)]$ و $\mathbf{y}'(t, \alpha) = [\underline{\mathbf{y}}'(t, \alpha), \overline{\mathbf{y}}'(t, \alpha)]$ که

$$\underline{\mathbf{y}}(t, \alpha) = (\underline{y}(t, \alpha), \dots, \underline{y}(t, \alpha))^t, \quad (6-4)$$

$$\overline{\mathbf{y}}(t, \alpha) = (\overline{y}(t, \alpha), \dots, \overline{y}(t, \alpha))^t, \quad (7-4)$$

$$\underline{\mathbf{y}}'(t, \alpha) = (\underline{y}'(t, \alpha), \dots, \underline{y}'(t, \alpha))^t, \quad (8-4)$$

$$\overline{\mathbf{y}}'(t, \alpha) = (\overline{y}'(t, \alpha), \dots, \overline{y}'(t, \alpha))^t, \quad (9-4)$$

و با فرض $F(t, \mathbf{y}(t, \alpha)) = [\underline{F}(t, \mathbf{y}(t, \alpha)), \overline{F}(t, \mathbf{y}(t, \alpha))]$ که

$$\underline{F}(t, \mathbf{y}(t, \alpha)) = (\underline{f}_1(t, \mathbf{y}(t, \alpha)), \dots, \underline{f}_n(t, \mathbf{y}(t, \alpha)))^t, \quad (10-4)$$

$$\overline{F}(t, \mathbf{y}(t, \alpha)) = (\overline{f}_1(t, \mathbf{y}(t, \alpha)), \dots, \overline{f}_n(t, \mathbf{y}(t, \alpha)))^t, \quad (11-4)$$

$\mathbf{y}(t)$ یک جواب فازی دستگاه (5.4) روی بازه I برای $\alpha \in (0, 1]$ است، اگر:

$$\begin{cases} \underline{y}'(t, \alpha) = \underline{F}(t, y(t, \alpha)); \\ \overline{y}'(t, \alpha) = \overline{F}(t, y(t, \alpha)) \\ \underline{y}(\cdot, \alpha) = \underline{y}^{[1]}(\alpha), \overline{y}(\cdot, \alpha) = \overline{y}^{[1]}(\alpha) \end{cases} \quad (12-4)$$

یا

$$\begin{cases} y'(t, \alpha) = F(t, y(t, \alpha)), \\ y(\cdot, \alpha) = y^{[1]}(\alpha). \end{cases} \quad (13-4)$$

اکنون نشان می دهیم، تحت شرایطی روی f_i که $i=1, \dots, n$ ، چگونه می توان یک جواب منحصر بفرد فازی برای دستگاه بدست آورد.

۴-۲-۱ قضیه: اگر $f_i(t, u_1, \dots, u_n)$ برای $i=1, \dots, n$ توابعی پیوسته از t و بتوانند در $u = (u_1, \dots, u_n)^t$ روی ناحیه $D = \{(t, u) | t \in I = [1, \infty), -\infty < u_i < \infty, \text{ for } i = 1, \dots, n\}$ در شرط لیپ شیتس با ثابت L_i صدق کنند در اینصورت مساله مقدار اولیه دارای یک جواب منحصر بفرد فازی است.

اثبات: قرار می دهیم $G = (\underline{F}, \overline{F})^t = (\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n, \overline{f}_1, \dots, \overline{f}_n)^t$ که

$$\underline{f}_i(t, u) = \min\{f_i(t, u_1, \dots, u_n); u_j \in [\underline{y}_j, \overline{y}_j], \text{ for } j = 1, \dots, n\}, \quad (14-4)$$

$$\overline{f}_i(t, u) = \max\{f_i(t, u_1, \dots, u_n); u_j \in [\underline{y}_j, \overline{y}_j], \text{ for } j = 1, \dots, n\}, \quad (15-4)$$

و $y = (\underline{y}, \overline{y})^t = (\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n)^t \in R^{2n}$ به راحتی می توان نشان داد که برقراری شرط لیپ شیتس برای f_i ، منتج به رابطه زیر خواهد شد

$$\|F(t, z) - F(t, z^*)\| \leq L \|z - z^*\|,$$

قضیه (۲-۷-۲)، متضمن وجود و منحصر بفرد بودن جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), \\ y(\cdot) = y^{[1]} = (\underline{y}^{[1]}, \overline{y}^{[1]})^t \in R^{2n} \end{cases} \quad (16-4)$$

همچنین برای هر تابع پیوسته $y^{[1]}: R_+ \rightarrow R^{2n}$ تقریبهای تکراری

$$\mathbf{y}^{[m+1]}(t) = \mathbf{y}^{[1]} + \int_0^t F(s, \mathbf{y}^{[m]}(s))ds, \quad t \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (17-4)$$

روی زیر بازه بسته R_+ بطور یکنواخت به جواب دستگاه (۱۶-۴) همگراست. به عبارت دیگر ما تقریبهای تکراری زیر را داریم

$$\underline{y}_i^{[m+1]}(t) = \underline{y}_i^{[1]} + \int_0^t \underline{f}_i(s, \mathbf{y}^{[m]}(s))ds, \quad \text{for } i = 1, \dots, n \quad (18-4)$$

$$\overline{y}_i^{[m+1]}(t) = \overline{y}_i^{[1]} + \int_0^t \overline{f}_i(s, \mathbf{y}^{[m]}(s))ds, \quad \text{for } i = 1, \dots, n \quad (19-4)$$

با انتخاب $\mathbf{y}^{[1]} = (\underline{\mathbf{y}}^{[1]}(\alpha), \overline{\mathbf{y}}^{[1]}(\alpha))$ در (۱۶-۴) یک جواب منحصر بفرد $\mathbf{y}^\alpha(t) = (\underline{\mathbf{y}}(t, \alpha), \overline{\mathbf{y}}(t, \alpha))$ برای $(3-4)$ و $(4-4)$ ، روی هر $\alpha \in (0, 1]$ ، بدست می آوریم. حال نشان خواهیم داد $\mathbf{y}(t, \alpha) = (\underline{\mathbf{y}}(t, \alpha), \overline{\mathbf{y}}(t, \alpha))$ ، یک عدد فازی در E^n برای هر $0 \leq t \leq T$ تعریف می کند. یعنی $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^t$ یک جواب فازی برای $(4-4)$ و $(5-4)$ است. بنابر این نشان خواهیم داد که بازه های $[\underline{y}_i(t, \alpha), \overline{y}_i(t, \alpha)]$ برای $i = 1, \dots, n$ در شرایط لم (۱-۵-۵) صدق می کند. تقریبهای تکراری

$$\mathbf{y}^{[1]} = \mathbf{y}^{[1]} \in E^n$$

$$\mathbf{y}^{[m+1]}(t) = \mathbf{y}^{[1]} + \int_0^t F(s, \mathbf{y}^{[m]}(s))ds, \quad t \geq 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (20-4)$$

که انتگرال یک انتگرال فازی است، یک دنباله از اعداد فازی $\mathbf{y}^{[m]}(t) = (y_1^{[m]}(t), \dots, y_n^{[m]}(t))^t$ را برای هر $0 \leq t \leq T$ تعریف می کند. پس

$$[y_i^{[m]}(t)]_\beta \subset [y_i^{[m]}(t)]_\alpha, \quad 0 < \alpha \leq \beta \leq 1,$$

که نتیجه می شود

$$[\underline{y}_i^{[m]}(t, \beta), \overline{y}_i^{[m]}(t, \beta)] \subset [\underline{y}_i^{[m]}(t, \alpha), \overline{y}_i^{[m]}(t, \alpha)], \quad (0 < \alpha \leq \beta \leq 1),$$

با همگرایی دنباله های (۱۸-۴) و (۱۹-۴)، نقاط انتهایی $[y_i^{[m]}(t)]_\alpha$ به $\underline{y}_i(t, \alpha)$ و $\overline{y}_i(t, \alpha)$ همگراست. که این به مفهوم آن است که

$$\underline{y}_i^{[m]}(t, \alpha) \rightarrow \underline{y}_i(t, \alpha) \quad \text{و} \quad \overline{y}_i^{[m]}(t, \alpha) \rightarrow \overline{y}_i(t, \alpha) \quad (21-4)$$

بنابر این خاصیت (الف) از لم (۱-۵-۵) برای بازه های $[y_i(t, \alpha), \overline{y_i}(t, \alpha)]$ روی $0 < \alpha \leq 1$ برقرار است .
 برای اثبات خاصیت (ب) از لم (۱-۵-۵) فرض کنیم (α_p) یک دنباله غیر نزولی در $[0, 1]$ و همگرا به α باشد .
 پس $\underline{y}^{[1]}(\alpha_p) \rightarrow \underline{y}^{[1]}(\alpha)$ و $\overline{y}^{[1]}(\alpha_p) \rightarrow \overline{y}^{[1]}(\alpha)$ به علت آنکه $\underline{y}^{[1]} \in E^n$. اما با پیوستگی مربوط
 به مقدار اولیه از جواب (۴-۱۶)

$$\underline{y}(t, \alpha_p) \rightarrow \underline{y}(t, \alpha), \quad \overline{y}(t, \alpha_p) \rightarrow \overline{y}(t, \alpha),$$

که این یعنی (ب) برای بازه های $[\underline{y}(t, \alpha), \overline{y}(t, \alpha)]$ روی $0 < \alpha \leq 1$ برقرار است. پس بنا به لم (۱-۵-۵)
 $y(t) \in E^n$ و بنابراین y یک جواب فازی از (۴-۱) است. منحصر بفردی، از منحصر بفرد بودن جواب (۴-۱۶)
 بدست می آید.

۴-۳ روش رونگه - کوتا از مرتبه ۴

با مفروضات قبلی، مساله مقدار اولیه (۴-۲) دارای جواب منحصر بفرد مانند $y = (y_1, \dots, y_n)^t \in E^n$ است.
 برای یافتن یک جواب تقریب برای (۴-۲) با روش رونگه - کوتا از مرتبه ۴ ابتدا تعریف می کنیم:

$$\underline{k}_{i1}(t, y(t, \alpha)) = \min \{ f_i(t, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{y_j}(t, \alpha), \overline{y_j}(t, \alpha)] \}, \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$$\overline{k}_{i1}(t, y(t, \alpha)) = \max \{ f_i(t, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{y_j}(t, \alpha), \overline{y_j}(t, \alpha)] \},$$

$$\underline{k}_{i\gamma}(t, y(t, \alpha)) = \min \{ f_i(t + \frac{h}{\gamma}, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{z_{j1}}(t, y(t, \alpha), h), \overline{z_{j1}}(t, y(t, \alpha), h)] \},$$

$$\overline{k}_{i\gamma}(t, y(t, \alpha)) = \max \{ f_i(t + \frac{h}{\gamma}, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{z_{j1}}(t, y(t, \alpha), h), \overline{z_{j1}}(t, y(t, \alpha), h)] \},$$

$$\underline{k}_{i\gamma}(t, y(t, \alpha)) = \min \{ f_i(t + \frac{h}{\gamma}, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h), \overline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h)] \},$$

$$\overline{k}_{i\gamma}(t, y(t, \alpha)) = \max \{ f_i(t + \frac{h}{\gamma}, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h), \overline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h)] \},$$

$$\underline{k}_{i\gamma}(t, y(t, \alpha)) = \min \{ f_i(t + h, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h), \overline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h)] \},$$

$$\overline{k}_{i\gamma}(t, y(t, \alpha)) = \max \{ f_i(t + h, s_1, \dots, s_n); s_j \in [\underline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h), \overline{z_{j\gamma}}(t, y(t, \alpha), h)] \},$$

بطوریکه

$$\underline{z_{j1}}(t, y(t, \alpha), h) = \underline{y_j}(t, \alpha) + \frac{h}{\gamma} \underline{k}_{j1}(t, y(t, \alpha)),$$

$$\begin{aligned}\overline{z_{j\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) &= \overline{y_j}(t, \alpha) + \frac{h}{\varphi} \overline{k_{j\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha)), \\ \underline{z_{j\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) &= \underline{y_j}(t, \alpha) + \frac{h}{\varphi} \underline{k_{j\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h), \\ \overline{z_{j\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) &= \overline{y_j}(t, \alpha) + \frac{h}{\varphi} \overline{k_{j\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h), \\ \underline{z_{j\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) &= \underline{y_j}(t, \alpha) + h \underline{k_{j\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h), \\ \overline{z_{j\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) &= \overline{y_j}(t, \alpha) + h \overline{k_{j\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h),\end{aligned}$$

حال روابط زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{aligned}F_i(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) &= \underline{k_{i\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha)) + \varphi \underline{k_{i\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) + \varphi \overline{k_{i\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) + \overline{k_{i\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h), \\ G_i(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) &= \overline{k_{i\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha)) + \varphi \overline{k_{i\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) + \varphi \underline{k_{i\uparrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h) + \underline{k_{i\downarrow}}(t, \mathbf{y}(t, \alpha), h),\end{aligned}$$

و همچنین فرض می کنیم که $\{t = \cdot, t_1, \dots, t_N = T\}$ یک افزار برای $[\cdot, T]$ باشد. اگر α - برش مولفه i -ام جواب دقیق و تقریبی در در t_m ($\cdot \leq m \leq N$) به ترتیب با $[\underline{y_i}^{[m]}(\alpha), \overline{y_i}^{[m]}(\alpha)]$ و $[\underline{w_i}^{[m]}(\alpha), \overline{w_i}^{[m]}(\alpha)]$ نمایش داده شوند، در اینصورت روش عددی برای تقریب α - برش مولفه i -ام جواب تقریبی با روش رو نگه - کوتا به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\underline{w_i}^{[m+1]}(\alpha) &= \underline{w_i}^{[m]}(\alpha) + \frac{h}{\varphi} F_i(t_m, \mathbf{w}^m(\alpha), h), & \underline{w_i}^{[1]}(\alpha) &= \underline{y_i}^{[1]}(\alpha), \\ \overline{w_i}^{[m+1]}(\alpha) &= \overline{w_i}^{[m]}(\alpha) + \frac{h}{\varphi} G_i(t_m, \mathbf{w}^m(\alpha), h), & \overline{w_i}^{[1]}(\alpha) &= \overline{y_i}^{[1]}(\alpha),\end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}[w_i(t)]_\alpha &= [\underline{w_i}(t, \alpha), \overline{w_i}(t, \alpha)] , & \mathbf{w}^{[m]}(\alpha) &= [\underline{\mathbf{w}}^{[m]}(\alpha), \overline{\mathbf{w}}^{[m]}(\alpha)], \\ \underline{\mathbf{w}}^{[m]}(\alpha) &= (\underline{w_1}^{[m]}(\alpha), \dots, \underline{w_n}^{[m]}(\alpha))^t, & \overline{\mathbf{w}}^{[m]}(\alpha) &= (\overline{w_1}^{[m]}(\alpha), \dots, \overline{w_n}^{[m]}(\alpha))^t.\end{aligned}$$

اکنون قرار می دهیم

$$F^*(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) = \frac{1}{\varphi} (F_1(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h), \dots, F_n(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h))^t, \quad (22-2)$$

$$G^*(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) = \frac{1}{\varphi} (G_1(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h), \dots, G_n(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h))^t, \quad (23-4)$$

روش رو نگه-کوتا برای تقریب α -برش جواب معادله دیفرانسیل (4-14) به صورت زیر است:

$$\mathbf{w}^{[m+1]}(\alpha) = \mathbf{w}^{[m]}(\alpha) + hH(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h), \quad \mathbf{w}^{[1]}(\alpha) = \mathbf{y}^{[1]}(\alpha) \quad (24-4)$$

که

$$H(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) = [F^*(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h), G^*(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h)],$$

و داریم

$$F^*(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) = \frac{1}{\varphi} [\underline{k}_1(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha)) + \varphi \underline{k}_2(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) + \varphi \underline{k}_3(t_m, \mathbf{w}(\alpha), h) + \underline{k}_4(t_m, \mathbf{w}(t, \alpha), h)], \quad (25-4)$$

$$G^*(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) = \frac{1}{\varphi} [\overline{k}_1(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha)) + \varphi \overline{k}_2(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) + \varphi \overline{k}_3(t_m, \mathbf{w}(\alpha), h) + \overline{k}_4(t_m, \mathbf{w}(t, \alpha), h)], \quad (26-4)$$

همچنین

$$\underline{k}_j(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) = (\underline{k}_{1j}(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h), \dots, \underline{k}_{nj}(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h))^t, \\ \overline{k}_j(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) = (\overline{k}_{1j}(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h), \dots, \overline{k}_{nj}(t, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h))^t,$$

4-4 همگرایی و پایداری

4-4-1 قضیه: در رابطه (4-5) اگر $F(t, \mathbf{y})$ در شرط لیپ شیتس نسبت به $\mathbf{y}$ صدق کند، آنگاه روش ارایه شده توسط (4-24) پایدار است.

اثبات: چون F در شرط لیپ شیتس صدق می کند، هر یک از f_i در رابطه (۴-۲) نیز صدق می کند. همچنین نتیجه می شود که هر یک از $\underline{k}_{ij}, \bar{k}_{ij}$ ($1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 4$) نیز در شرط لیپ شیتس صدق می کند. بنابراین

$$| \underline{k}_{i1}(t, y(t, \alpha)) - \underline{k}_{i1}(t, y^*(t, \alpha)) | \leq L \sum_{j=1}^n (| \underline{y}_{j1}(t, \alpha) - \underline{y}_{j1}^*(t, \alpha) | + | \overline{y}_{j1}(t, \alpha) - \overline{y}_{j1}^*(t, \alpha) |),$$

در این صورت

$$\| \underline{k}_1(t, y(t, \alpha)) - \underline{k}_1(t, y^*(t, \alpha)) \| \leq nL (\| \underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha) \| + \| \overline{y}(t, \alpha) - \overline{y}^*(t, \alpha) \|),$$

مشابها

$$\| \bar{k}_1(t, y(t, \alpha)) - \bar{k}_1(t, y^*(t, \alpha)) \| \leq nL (\| \underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha) \| + \| \overline{y}(t, \alpha) - \overline{y}^*(t, \alpha) \|),$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} & | \underline{k}_{i2}(t, y(t, \alpha)) - \underline{k}_{i2}(t, y^*(t, \alpha)) | \\ & \leq L \sum_{j=1}^n (| \underline{z}_{j1}(t, y(t, \alpha), h) - \underline{z}_{j1}^*(t, y(t, \alpha), h) | + | \overline{z}_{j1}(t, y(t, \alpha), h) - \overline{z}_{j1}^*(t, y(t, \alpha), h) |), \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \| \underline{k}_2(t, y(t, \alpha), h) - \underline{k}_2(t, y^*(t, \alpha), h) \| \\ & \leq nL (1 + \frac{1}{4}(nhL)) (\| \underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha) \| + \| \overline{y}(t, \alpha) - \overline{y}^*(t, \alpha) \|), \end{aligned}$$

روابط زیر مشابها بدست می آیند:

$$\begin{aligned} & \| \bar{k}_2(t, y(t, \alpha), h) - \bar{k}_2(t, y^*(t, \alpha), h) \| \\ & \leq nL (1 + \frac{1}{4}(nhL)) (\| \underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha) \| + \| \overline{y}(t, \alpha) - \overline{y}^*(t, \alpha) \|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| \underline{k}_3(t, y(t, \alpha), h) - \underline{k}_3(t, y^*(t, \alpha), h) \| \\ & \leq nL (1 + \frac{1}{4}(nhL) + \frac{1}{4}(nhL)^2) (\| \underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha) \| + \| \overline{y}(t, \alpha) - \overline{y}^*(t, \alpha) \|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \| \bar{k}_3(t, y(t, \alpha), h) - \bar{k}_3(t, y^*(t, \alpha), h) \| \\ & \leq nL (1 + \frac{1}{4}(nhL) + \frac{1}{4}(nhL)^2) (\| \underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha) \| + \| \overline{y}(t, \alpha) - \overline{y}^*(t, \alpha) \|), \end{aligned}$$

$$\| \underline{k}_4(t, y(t, \alpha), h) - \underline{k}_4(t, y^*(t, \alpha), h) \|$$

$$\leq nL(1 + nhL + \frac{1}{\gamma}(nhL)^{\gamma} + \frac{1}{\varphi}(nhL)^{\varphi})(\|\underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha)\| + \|\bar{y}(t, \alpha) - \bar{y}^*(t, \alpha)\|),$$

$$\begin{aligned} & \|\bar{k}_{\varphi}(t, y(t, \alpha), h) - \bar{k}_{\varphi}(t, y^*(t, \alpha), h)\| \\ & \leq nL(1 + nhL + \frac{1}{\gamma}(nhL)^{\gamma} + \frac{1}{\varphi}(nhL)^{\varphi})(\|\underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha)\| + \|\bar{y}(t, \alpha) - \bar{y}^*(t, \alpha)\|), \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \|f^*(t, y(t, \alpha), h) - f^*(t, y^*(t, \alpha), h)\| \\ & \leq nL(1 + \frac{1}{\gamma}(nhL) + \frac{1}{\varphi}(nhL)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma\varphi}(nhL)^{\varphi})(\|\underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha)\| + \|\bar{y}(t, \alpha) - \bar{y}^*(t, \alpha)\|), \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} & \|G^*(t, y(t, \alpha), h) - G^*(t, y^*(t, \alpha), h)\| \\ & \leq nL(1 + \frac{1}{\gamma}(nhL) + \frac{1}{\varphi}(nhL)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma\varphi}(nhL)^{\varphi})(\|\underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha)\| + \|\bar{y}(t, \alpha) - \bar{y}^*(t, \alpha)\|), \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} & \|H(t, y(t, \alpha), h) - H(t, y^*(t, \alpha), h)\| \\ & \leq \|f^*(t, y(t, \alpha), h) - f^*(t, y^*(t, \alpha), h)\| + \|G^*(t, y(t, \alpha), h) - G^*(t, y^*(t, \alpha), h)\| \\ & \leq \gamma nL(1 + \frac{1}{\gamma}(nhL) + \frac{1}{\varphi}(nhL)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma\varphi}(nhL)^{\varphi})(\|\underline{y}(t, \alpha) - \underline{y}^*(t, \alpha)\| + \|\bar{y}(t, \alpha) - \bar{y}^*(t, \alpha)\|). \end{aligned}$$

۴-۴-۲ قضیه : اگر

$$w^{[m+1]}(\alpha) = w^{[m]}(\alpha) + h\psi(t_m, w^{[m]}(\alpha), h), \quad w^{[1]}(\alpha) = y^{[m]}(\alpha) \quad (۲۶-۴)$$

که $\psi(t_m, w^{[m]}(\alpha), h) = [\psi_1(t_m, w^{[m]}(\alpha), h), \psi_{\gamma}(t_m, w^{[m]}(\alpha), h)]$ یک روش عددی برای تقریب معادله دیفرانسیل (۴-۲۶) است و ψ_1 و ψ_{γ} در t, y, h برای $0 \leq h \leq h, 0 \leq t \leq T$ پیوسته و اگر این روش در شرایط لیپ شیتس روی ناحیه

$$D = \{(t, u, v, h) | 0 \leq t \leq T, -\infty < u_i \leq v_i, -\infty < v_i \leq +\infty, 0 \leq h \leq h, i = 1, \dots, n\},$$

صدق کند، شرط لازم و کافی برای همگرایی روش مذکور آن است که

$$\psi(t, y(t, \alpha), h) = F(t, y(t, \alpha)) \quad (27-4)$$

اثبات : فرض کنیم $\psi(t, y(t, \alpha), \cdot) = F(t, y(t, \alpha))$ چون $F(t, y(t, \alpha))$ در شرایط قضیه (4-2-1) صدق می کند پس معادله زیر

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), \\ y(\cdot) = y^{[1]}(\alpha). \end{cases} \quad (28-4)$$

دارای یک جواب منحصر بفرد مانند $y(t, \alpha) = ([\underline{y}(t, \alpha), \bar{y}(t, \alpha)])$ است که $\underline{y}(t, \alpha) = (\underline{y}_1(t, \alpha), \dots, \underline{y}_n(t, \alpha))^t$ و $\bar{y}(t, \alpha) = (\bar{y}_1(t, \alpha), \dots, \bar{y}_n(t, \alpha))^t$. نشان می دهیم جواب عددی ارایه شده توسط (26.4) به $y(t)$ همگراست. بنا به قضیه مقدار میانگین

$$\underline{y}_i^{[m+1]} = \underline{y}_i^{[m]} + h \underline{f}_i(t_m + \underline{\theta}_i h, y(t_m + \underline{\theta}_i h), \quad \text{for } 0 < \underline{\theta}_i < 1, \quad (29-4)$$

$$\bar{y}_i^{[m+1]} = \bar{y}_i^{[m]} + h \bar{f}_i(t_m + \bar{\theta}_i h, y(t_m + \bar{\theta}_i h), \quad \text{for } 0 < \bar{\theta}_i < 1, \quad (30-4)$$

با فرض $\underline{\psi} = (\underline{\psi}_1, \dots, \underline{\psi}_n)^t$ و $\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_n)^t$ از معادلات روابط زیر را بدست می آوریم

$$\underline{w}_i^{[m+1]}(\alpha) = \underline{w}_i^{[m]}(\alpha) + h \underline{\psi}_i(t_m, \underline{w}^{[m]}(\alpha), h), \quad (31-4)$$

$$\bar{w}_i^{[m+1]}(\alpha) = \bar{w}_i^{[m]}(\alpha) + h \bar{\psi}_i(t_m, \bar{w}^{[m]}(\alpha), h), \quad (32.4)$$

و با تفریق (31-4) و (32-4) به ترتیب از (29-4) و (30-4) و جایگذاری:

$$e^{[m]}(\alpha) = ([\underline{e}^{[m]}(\alpha), \bar{e}^{[m]}(\alpha)]),$$

که

$$\underline{e}^{[m]}(\alpha) = \underline{e}(t_m, \alpha) = \underline{w}^{[m]}(\alpha) - \underline{y}^{[m]}(\alpha), \quad \bar{e}^{[m]}(\alpha) = \bar{e}(t_m, \alpha) = \bar{w}^{[m]}(\alpha) - \bar{y}^{[m]}(\alpha),$$

داریم:

$$\begin{aligned} \underline{e}_i^{[m+1]}(\alpha) &= \underline{e}_i^{[m]}(\alpha) + h\{\underline{\psi}_i(t_m, \mathbf{w}^{[m]}(\alpha), h) - \underline{\psi}_i(t_m, \mathbf{y}^{[m]}(\alpha), h) + \underline{\psi}_i(t_m, \mathbf{y}^{[m]}(\alpha), h) \\ &\quad - \underline{\psi}_i(t_m, \mathbf{y}^{[m]}(\alpha), \cdot) + \underline{\psi}_i(t_m, \mathbf{y}^{[m]}(\alpha), \cdot) - \underline{f}_i(t_m + \underline{\theta}_i h, \mathbf{y}(t_m + \underline{\theta}_i h))\} \\ &\quad \underline{\psi}_i(t_m, \mathbf{y}^{[m]}(\alpha), \cdot) - \underline{f}_i(t_m, \mathbf{y}^{[m]}(\alpha)) \end{aligned}$$

از طرف دیگر با توجه به رابطه

می توان نوشت

$$\begin{aligned} &|\underline{\psi}_i(t_m, \mathbf{y}^{[m]}(\alpha), \cdot) - \underline{f}_i(t_m + \underline{\theta}_i h, \mathbf{y}(t_m + \underline{\theta}_i h))| \\ &\leq hL_\gamma \underline{\theta}_i + L_\gamma \sum_{i=1}^n |\underline{y}_i(t_m + \underline{\theta}_i h) - \underline{y}_i(t_m)| + L_\gamma \sum_{i=1}^n |\overline{y}_i(t_m + \overline{\theta}_i h) - \overline{y}_i(t_m)| \\ &= hL_\gamma \underline{\theta}_i + L_\gamma \sum_{i=1}^n |\underline{y}'_i(t_m + \underline{\xi}_i \underline{\theta}_i h) \underline{\theta}_i h| + L_\gamma \sum_{i=1}^n |\overline{y}'_i(t_m + \overline{\xi}_i \overline{\theta}_i h) \overline{\theta}_i h| = hL_\gamma, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |\underline{e}_i^{[m+1]}(\alpha)| &\leq |\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)| + hL_\gamma \left\{ \sum_{j=1}^n |\underline{e}_j^{[m]}(\alpha)| + |\overline{e}_j^{[m]}(\alpha)| \right\} + h^\gamma L_\gamma + h^\gamma L_\gamma \\ &\leq |\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)| + nhL_\gamma \max_{1 \leq j \leq n} \{|\underline{e}_j^{[m]}(\alpha)| + |\overline{e}_j^{[m]}(\alpha)|\} + h^\gamma (L_\gamma + L_\gamma). \end{aligned}$$

از سوی دیگر

$$\max_{1 \leq j \leq n} \{|\underline{e}_j^{[m]}(\alpha)|\} = k_i |\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)|, \quad \max_{1 \leq j \leq n} \{|\overline{e}_j^{[m]}(\alpha)|\} = k'_i |\overline{e}_i^{[m]}(\alpha)|$$

با فرض $k_\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \{k_i, k'_i\}$ و $M = L_\gamma + L_\gamma$ می توان نوشت

$$\begin{aligned} |\underline{e}_i^{[m+1]}(\alpha)| &\leq |\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)| + nhk_\gamma L_\gamma \{|\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)| + |\overline{e}_i^{[m]}(\alpha)|\} + M_\gamma h^\gamma \quad (33-4) \\ &\leq |\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)| + \gamma nhk_\gamma L_\gamma \cdot \max\{|\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)|, |\overline{e}_i^{[m]}(\alpha)|\} + M_\gamma, \end{aligned}$$

مشابها می توانیم رابط زیر را بدست آوریم

$$|\overline{e}_i^{[m+1]}(\alpha)| \leq |\overline{e}_i^{[m]}(\alpha)| + \gamma nhk_\gamma L'_\gamma \cdot \max\{|\underline{e}_i^{[m]}(\alpha)|, |\overline{e}_i^{[m]}(\alpha)|\} + M_\gamma h \quad (34-4)$$

اکنون قرار می دهیم $L = \max\{L_\gamma, L'_\gamma\}$, $M = \max\{M_\gamma, M_\gamma\}$

بنابراین روابط (33-4) و (34-4) می توانند به صورت زیر نوشته شوند

$$| \underline{e}_i^{[m+1]}(\alpha) | \leq | \underline{e}_i^{[m]}(\alpha) | + \imath nhkL \max \{ | \underline{e}_i^{[m]}(\alpha) |, | \bar{e}_i^{[m]}(\alpha) | \} + Mh^\imath,$$

$$| \bar{e}_i^{[m+1]}(\alpha) | \leq | \bar{e}_i^{[m]}(\alpha) | + \imath nhkL \max \{ | \underline{e}_i^{[m]}(\alpha) |, | \bar{e}_i^{[m]}(\alpha) | \} + Mh^\imath,$$

قرار می دهیم $| \underline{e}_i^{[m]}(\alpha) | + | \bar{e}_i^{[m]}(\alpha) | = e_i^{[m]}$. در اینصورت با توجه به قضیه لم (۳-۳-۲)

$$e_i^{[m]}(\alpha) \leq (1 + \imath nhkL)^m e_i^{[1]}(\alpha) + \imath Mh^\imath \frac{(1 + \imath nhkL)^m - 1}{\imath nhkL},$$

که $| \underline{e}_i^{[1]}(\alpha) | + | \bar{e}_i^{[1]}(\alpha) | = e_i^{[1]}$. بنابراین

$$| \underline{e}_i^{[m]}(\alpha) | \leq e^{\imath mnkh} \times e_i^{[1]} + M \frac{e^{\imath mnklh}}{\imath nhkL} h, \quad | \bar{e}_i^{[m]}(\alpha) | \leq e^{\imath mnkh} \times e_i^{[1]} + M \frac{e^{\imath mnklh}}{\imath nhkL} h,$$

در حالت خاص

$$| \underline{e}_i^{[m]}(\alpha) | \leq e^{\imath mnkh} \times e_i^{[1]} + M \frac{e^{\imath mnklh}}{\imath nhkL} h, \quad | \bar{e}_i^{[m]}(\alpha) | \leq e^{\imath mnkh} \times e_i^{[1]} + M \frac{e^{\imath mnklh}}{\imath nhkL} h,$$

چون $| \underline{e}_i^{[1]}(\alpha) | = | \bar{e}_i^{[1]}(\alpha) | = e_i^{[1]}$ و $h = \frac{T}{N}$ در اینصورت $\| e^{[N]}(\alpha) \| \leq M \frac{e^{\imath Nnklh}}{\imath nhkL} h$ و

$$\| e^{[N]}(\alpha) \| \leq \imath M \frac{e^{\imath Nnklh}}{\imath nhkL} h \quad \text{بنابراین} \quad \| e^{[N]}(\alpha) \| \leq \imath M \frac{e^{\imath Nnklh}}{\imath nhkL} h$$

$\| e^{[N]}(\alpha) \| \rightarrow 0$ بنابراین روش عددی (۴-۲۶) به جواب (۴-۲۸) همگراست.

برعکس فرض کنیم روش عددی (۴-۲۶) به جواب سیستم (۴-۲۸) همگراست. با فرض خلف، فرض کنیم (۴-

۲۷) برقرار نباشد. بنابراین $\psi(t, y(t, \alpha), \cdot) = g(t, y(t, \alpha)) \neq F(t, y(t, \alpha))$. مشابه می توان ثابت نمود که

روش عددی (۴-۲۶) همگرا به جواب سیستم زیر است

$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = g(t, \mathbf{y}(t)), \\ \mathbf{u}(\cdot) = \mathbf{y}^{[1]}(\alpha). \end{cases} \quad (۴-۳۵)$$

بنابراین $\mathbf{y}(t, \alpha) = \mathbf{u}(t)$. چون $g(t, \mathbf{y}(t, \alpha)) \neq F(t, \mathbf{y}(t, \alpha))$ فرض کنیم که F و g در یک نقطه مانند

$(t_a, \mathbf{y}(t_a, \alpha))$ متفاوت باشند. اگر فرض کنیم مسایل مقدار اولیه (۴-۲۸) و (۴-۳۵) از $(t_a, \mathbf{y}(t_a, \alpha))$ شروع

شوند، در اینصورت

$$\mathbf{y}'(t_a, \alpha) = F(t_a, \mathbf{y}(t_a, \alpha)) \neq g(t_a, \mathbf{y}(t_a, \alpha)) = g(t_a, \mathbf{u}(t_a)) = \mathbf{u}'(t_a).$$

که یک تناقض است

۴-۴-۲ نتیجه : روش رونگه - کوتا پیشنهاد شده با (۴-۲۴) به جواب سیستم (۴-۱۳) همگراست .

اثبات : بنا به قضیه (۴-۴-۱)، H در شرط لپ شیتس صدق می کند، همچنین واضح است که روی h پیوسته است. بنابراین ما کافیت ثابت کنیم $H(t, y(t, \alpha), \cdot) = F(t, y(t, \alpha))$. بنا به روابط (۴-۲۵) و (۴-۲۶) داریم :

$$H(t_m, y(t, \alpha), h) = \frac{1}{\varphi} [k_1(t, y(t, \alpha)) + \nu k_r(t, y(t, \alpha), h) + \nu k_p(t, y(t, \alpha), h) + k_f(t, y(t, \alpha), h)]$$

که در آن $k_i = [\underline{k_i}, \overline{k_i}]$ بنابراین

$$\begin{aligned} H(t_m, y(t, \alpha), \cdot) &= \frac{1}{\varphi} [k_1(t, y(t, \alpha)) + \nu k_r(t, y(t, \alpha), \cdot) + \nu k_p(t, y(t, \alpha), \cdot) + k_f(t, y(t, \alpha), \cdot)] \\ &= k_1(t, y(t, \alpha)) = y'(t, \alpha) = F(t, y(t, \alpha)). \end{aligned}$$

فصل پنجم

مثالهای عددی

۵-۱ مقدمه:

در این فصل چند مثال عددی را برای بدست آوردن تقریبی از جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه - n را بدست میاوریم سپس این جواب با جواب حاصل از روش مقدار ویژه - بردار ویژه مقایسه می کنیم.

۵-۲ مثال های عددی

۵-۲-۱ مثال : معادله دیفرانسیل فازی زیر را با مقدار اولیه فازی در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} y'''(t) = 2y''(t) + 3y'(t) & (0 \leq t \leq 1), \\ y(0) = (3 + \alpha, 5 - \alpha) \\ y'(0) = (-3 + \alpha, -1 - \alpha) \\ y''(0) = (8 + \alpha, 10 - \alpha) \end{cases}$$

جواب مقدار ویژه - بردار ویژه به صورت زیر است.

$$y(t, r) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{12}e^{3t} + \left(\frac{11}{4} + r\right)e^{-t}, -\frac{1}{3} + \frac{7}{12}e^{3t} + \left(\frac{19}{4} - r\right)e^{-t}\right),$$

و جواب رونگه - کوتا به صورت زیر حاصل خواهد شد:

$$\underline{w}_1^{[m+1]} = \underline{w}_1^{[m]} + \left(h + \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{4}\right)\underline{w}_2^{[m]} + \left(\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{7h^4}{24}\right)\underline{w}_3^{[m]},$$

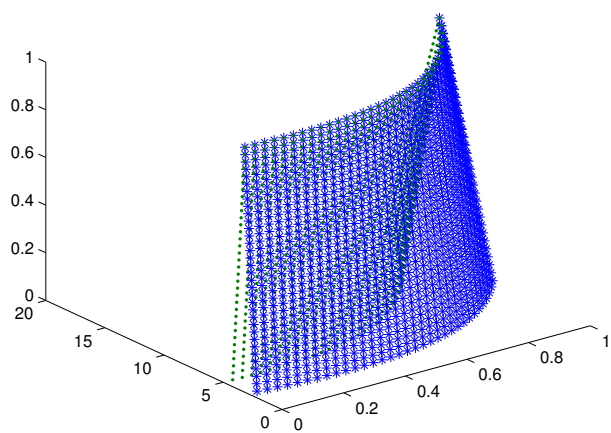
$$\overline{w}_1^{[m+1]} = \overline{w}_1^{[m]} + \left(h + \frac{h^2}{6} + \frac{h^4}{4}\right)\overline{w}_2^{[m+1]} + \left(\frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{7h^4}{24}\right)\overline{w}_3^{[m]},$$

$$\underline{w}_2^{[m+1]} = \underline{w}_2^{[m]} + \left(h + h^2 + \frac{7h^3}{6} + \frac{5h^4}{6}\right)\underline{w}_3^{[m]} + \left(\frac{3h^2}{2} + h^3 + \frac{7h^4}{8}\right)\underline{w}_1^{[m]},$$

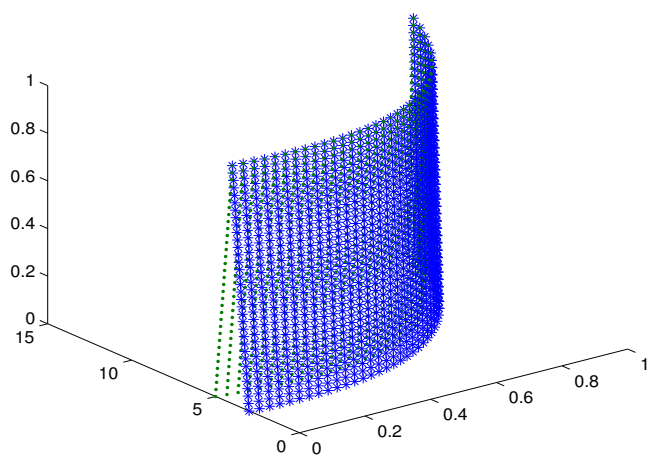
$$\overline{w}_2^{[m+1]} = \overline{w}_2^{[m]} + \left(h + h^2 + \frac{7h^3}{6} + \frac{5h^4}{6}\right)\overline{w}_1^{[m]} + \left(\frac{3h^2}{2} + h^3 + \frac{7h^4}{8}\right)\overline{w}_2^{[m]},$$

$$\underline{w}_3^{[m+1]} = \underline{w}_3^{[m]} + \left(3h + 3h^2 + \frac{7h^3}{2} + \frac{5h^4}{2}\right)\underline{w}_3^{[m]} + \left(2h + \frac{7h^2}{2} + \frac{10h^3}{3} + \frac{61h^4}{24}\right)\underline{w}_2^{[m]},$$

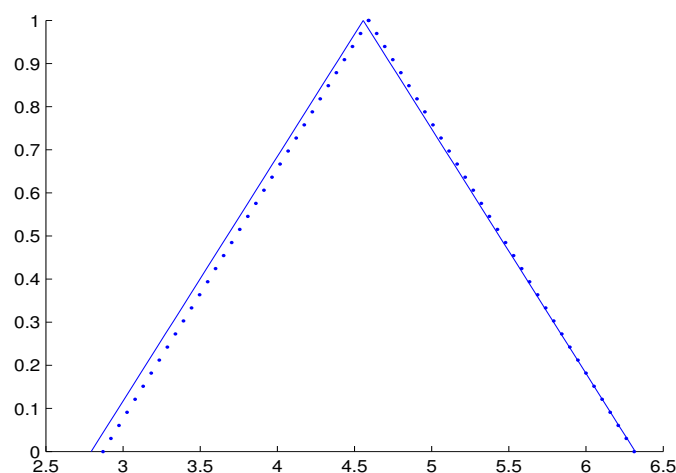
$$\overline{w}_3^{[m+1]} = \overline{w}_3^{[m]} + \left(3h + 3h^2 + \frac{7h^3}{2} + \frac{5h^4}{2}\right)\overline{w}_3^{[m]} + \left(2h + \frac{7h^2}{2} + \frac{10h^3}{3} + \frac{61h^4}{24}\right)\overline{w}_3^{[m]},$$



(شکل ۵-۱): جواب عددی رونگه - کوتا



(شکل ۵-۲): جواب مقدار ویژه - بردار ویژه



(شکل ۳-۵): مقایسه جواب بدست آمده برای $h = \frac{1}{4}$ و $h = \frac{1}{8}$ در $t=0.5$
 $h = \frac{1}{4}$ (نقطه چین) ، $h = \frac{1}{8}$ (خط)

(جدول ۱-۵)

t	$D(w_1^{[100]}(t), w_1^{[50]}(t))$	$D(w_1^{[50]}(t), w_1^{[25]}(t))$	$D(w_1^{[25]}(t), w_1^{[12]}(t))$
0.2	4/2994e-0.7	1/7281e-0.6	6/9784e-0.6
0.4	6/6132e-0.7	2/6164e-0.6	1/0.237e-0.5
0.6	2/3060e-0.6	9/1653e-0.6	3/6200e-0.5
0.8	5/6995e-0.6	2/2687e-0.5	8/9883e-0.5
1	1/2208e-0.5	4/8627e-0.5	1/9292e-0.4

در مثال بعد نشان می دهیم که روش مقدار ویژه- بردار ویژه منتهی به یک جواب فازی نشده اما روش رونگه - کوتا تقریبی از جواب را ارائه می کند که در هر نقطه از سراسر دامنه یک عدد فازی است .

۲-۲-۵ مثال: مساله مقدار اولیه فازی زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} y''(t) = 15y'(t) - 50y(t), & (0 \leq t \leq 1) \\ y(0) = (0/75 + 0/25\alpha, 125 - 0/25\alpha), \\ y'(0) = (1/5 + 0/5\alpha, 2/5 - 0/5\alpha), \end{cases}$$

جواب مقدار ویژه- بردار ویژه به صورت زیر ارائه شده است:

$$y(t, r) = \left(\frac{1}{5}(\phi + 2r)e^{5t} + \frac{1}{10}(-4/5 - 1/5r)e^{1t}, \frac{1}{5}(10 - 2r)e^{5t} + \frac{1}{10}(-7/5 + 1/5r)e^{1t}\right),$$

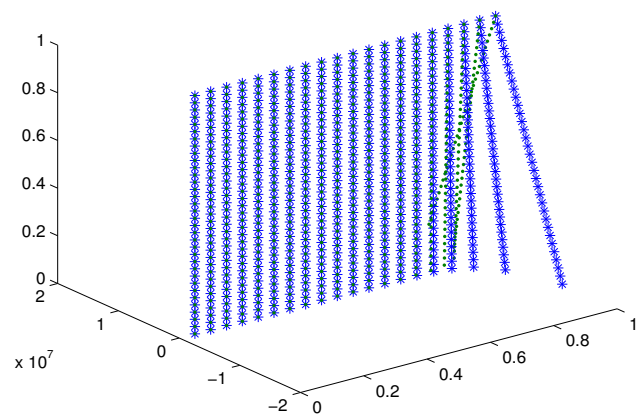
و جواب رونگه - کوتاه به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \underline{w_1}^{[m+1]} &= \underline{w_1}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(\phi + 45h + 225h^2 + \frac{15h^3}{4})\underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(-150h - 750h^2 + \frac{11250h^3}{4})\underline{w_1}^{[m]} \\ &\quad - \frac{h}{\phi}(50h^2 + 3750h^3)\underline{w_2}^{[m]} + \frac{2500h^4}{24}\underline{w_1}^{[m]}, \end{aligned}$$

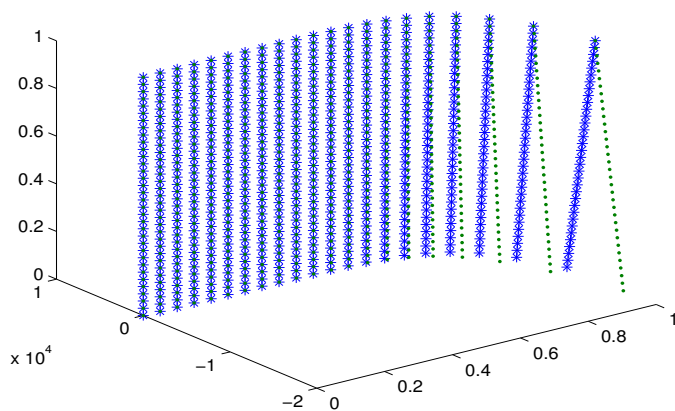
$$\begin{aligned} \underline{w_1}^{[m+1]} &= \underline{w_1}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(\phi + 45h + 225h^2 + \frac{15h^3}{4})\underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(-150h - 750h^2 + \frac{11250h^3}{4})\underline{w_1}^{[m]} \\ &\quad - \frac{h}{\phi}(50h^2 + 3750h^3)\underline{w_2}^{[m]} + \frac{2500h^4}{24}\underline{w_1}^{[m]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{w_2}^{[m+1]} &= \underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(-300 - 3750h - 11250h^2 - \frac{25(15h)^3}{2})\underline{w_1}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(90 + 3(15)^2h + (15)^3h^2 \\ &\quad + 15^2(\frac{2125h^3}{36}))\underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(-150h - 1500h^2 - \frac{75(15h)^2}{2})\underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(50h^2(1 + \frac{15h}{2})\underline{w_1}^{[m]}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{w_2}^{[m+1]} &= \underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(-300 - 3750h - 11250h^2 - \frac{25(15h)^3}{2})\underline{w_1}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(90 + 3(15)^2h + (15)^3h^2 \\ &\quad + 15^2(\frac{2125h^3}{36}))\underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(-150h - 1500h^2 - \frac{75(15h)^2}{2})\underline{w_2}^{[m]} + \frac{h}{\phi}(50h^2(1 + \frac{15h}{2})\underline{w_1}^{[m]}, \end{aligned}$$

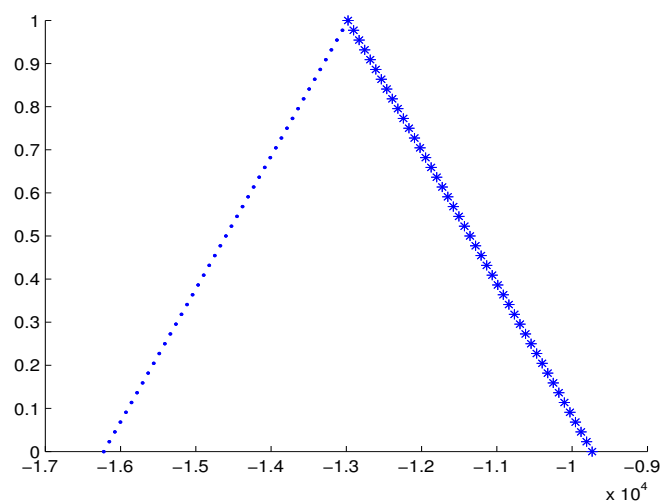


(شکل ۴-۵) : جواب عددی رونگه - کوتا

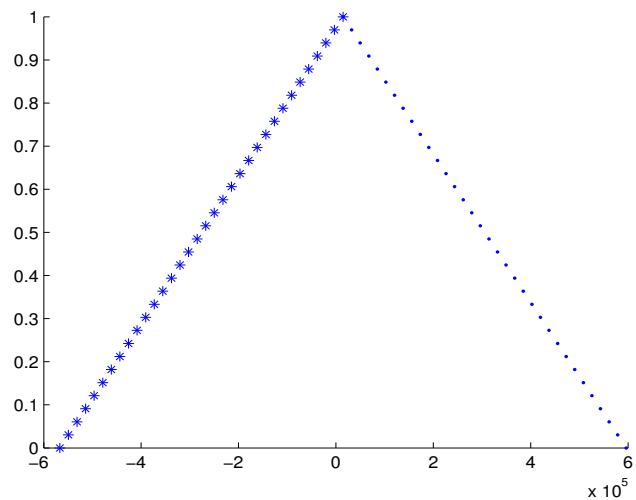


(شکل ۵-۵) : جواب مقدار ویژه - بردار ویژه

در شکل زیر می بینیم که در نقطه $t=1$ جواب مقدار ویژه - بردار ویژه یک عدد فازی نیست اما روش ارائه شده توسط رونگه - کوتا در همان نقطه یک عدد فازی است .



(شکل ۵-۶): جواب مقدار ویژه - بردار ویژه در $t=1$ (*) پهنه چپ و (•) پهنه راست D



(شکل ۵-۷): جواب عددی رونگه- کوتا در $t=1$ (*) پهنه چپ و (•) پهنه راست

ERROR: undefined
OFFENDING COMMAND: xD

STACK:

REFERENCES

- [1] Abbasbandy.S, Allahviranloo.T, (2002), Numerical solutions of fuzzy differential equations by Taylor method, Comput. Methods Appl. Math. (2) 113-124.
- [2] Abbasbandy.S, Allahviranloo.T, Oscar L'opez-Pouso, Nieto.J.J, (2004), Numerical Methods for Fuzzy Differential Inclusions, Comput. Math. Appl. (48) 1633-1641.
- [3] Abbasbandy.S, Allahviranloo.T, (2004), Numerical solution of fuzzy differential equations by Runge- Kutta method, Nonlinear studies (11) 117-129
- [4] Allahviranloo. T, Ahmady. N, Ahmady. E, (2005), Numerical solution of fuzzy differential equations by predictor–corrector method, Infor. Sci. (177) 1633-1647.
- [5] Allahviranloo. T, Ahmady. N, Ahmady. E, (2006), A method for solving n-th order fuzzy linear differential equations, Comput. Math. Appl (52) 730-742.
- [6] Bede. B, Rudas. I.J, Bencsik.A.L, (2005), First order linear fuzzy differential equations under generalized differentiability, Inform. Sci. (177) 1648-1662.
- [7] Birkhoff. G, and Rota. G, (1962), Ordinary differential equations. Blaisdell, Walt man , Mass: 317pp.
- [8] Buckley. J.J, Feuring. T, (2000), Fuzzy differential equations, Fuzzy sets and Systems (110) 43-54.
- [9] Buckley. J.J, Feuring. T, (1999), Introduction to fuzzy partial differential equations, Fuzzy Sets and Systems (100) 241-248.
- [10] Buckley. J.J, Feuring. T, (2001), Fuzzy initial value problem for n-th-order fuzzy linear differential equations, Fuzzy Sets and Systems (121) 247-250.
- [11] Butcher. J.C, (1960), “On the attainable order of Runge- Kutta methods” Mathematics of Computation, 408-417.

[12] Chang. S.L, Zadeh. L.A, (1972), On fuzzy mapping and control, IEEE Trans. Systems Man Cyber-net, (2) 30-34.

[13] Congxin.W, Shiji. S, (1998), Existence theorem to the Cauchy problem of fuzzy differential equations under compactness-type conditions, Infor. Sci. (108) 123-134.

[14] Dubois.D, prade. H, (1982), Towards fuzzy differential calculus, Part 3: Differentiation, Fuzzy Sets and Systems, (8) 225-233.

[15] Friedman. M, Ming. M, Kandel.A, (1998), Fuzzy linear systems , Fuzzy Set and Systems, (96) 201-209.

[16] Fulks. W, (1969), Advanced calculus (Second edition). John Wiley & Sons New York , 999 pp.

[17] Gear.C.W, (1971), Numerical Initial Value Problem In Ordinary Differential Equations , 25-59.

[18] Goetschel.R, Voxman.W, (1986), Elementary fuzzy calculus, Fuzzy Sets and Systems , (18) 31-43.

[19] He. O, Yi. W, (1989), On fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems , (24) 321-325.

[20] Jowers. L.J, Buckley. J.J, Reilly. K.D, (2007), Simulating continuous fuzzy systems, Infor. Sci. (177) 436-448.

[21] Kaleva. O, (1987), Fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems , (24) 301-317.

[22] Kaleva. O, (1990), The Cauchy problem for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems , (30) 389-396.

[23] Kandel. A, Byatt. W.J, (1978), Fuzzy differential equations, in: Proceedings of the International Conference on Cybernetics and Society, Tokyo, 1213-1216.

[୪୧] Kloeden. P,(୧୯୯୧), Remarks on peano-like theorems for fuzzy differential equations, Fuzzy Sets and Systems, (୧୧) ୧୬୧-୧୬୧.

[୪୨] Seikkala. S,(୧୯୮୯), On the fuzzy initial value problem, Fuzzy Sets and Systems ,(୪୧) ୩୧୯-୩୩୦.

[୪୩] Ralston. A,Rabinowitz. P,(୧୯୮୯) First cours in Numerical Analysis.

[୪୪] Pederson. S,Sambandham. M,(୨୦୦୯), Numerical solution to hybrid fuzzy systems, Mathematical and Computer modeling ,(୧୦) ୧୧୩୩-୧୧୪୧.

[୪୫] Puri. M.L, Ralescu. D.A,(୧୯୮୩), Differentials of fuzzy functions, J. Math. Anal. Appl. (୯୧) ୦୦୨-୦୦୮.

«واژه‌نامه»

A

Absolute value	قدر مطلق
Abstract	خلاصه
Accordingly	بنابراین
Agreement	قرارداد
Algorithm	الگوریتم
Approximation	تقریب
Approximation theory	نظریه تقریب
Assume	فرض

B

Bound	کران
Bounded fuzzy set	مجموعه فازی کراندار

C

Cardinal number	عدد اصلی
Cartesian product	حاصلضرب دکارتی
Characteristic function	تابع نشانگر
Coefficient	ضریب
Column	ستون
Collection	گردایه
Compare	مقایسه کردن
Complement	متمم
Complete	تام

Composite	مركب
Conclude	نتيجه گرفتن
Conclusion	نتيجه
Continuous	پيوسته
Convex	محدب
Convexity	تحدب
Countable	شمارا
Crisp	قطعي

D

Decreasing	نزولي
Definite	معين
Definition	تعريف
Degree of membership	درجه عضويت
Deletion	حذف
Domain	دامنه - قلمرو
Derivative	مشتق

E

Euler method	روش اويلر
Eliminate	حذف کردن
Engineering	مهندسي
Equal	تساوي
Error	خطا
Establish	ثابت کردن

Estimate	ارزيايي كردن، برآورد
----------	----------------------

Exact	دقيق
-------	------

Example	مثال
---------	------

Exist	وجود داشتن
-------	------------

Extrapolation	برونيايي
---------------	----------

F

Finite	متناهي
--------	--------

Foundation	اساس، پايه
------------	------------

Function	تابع
----------	------

Fuzzy function	تابع فاري
----------------	-----------

Fuzzy numbers	اعداد فاري
---------------	------------

G

Generalization

تعميم دادن

Generalized form	فرم كلي
------------------	---------

I

Imprecise	نادقيق
-----------	--------

Increasing	صعودي
------------	-------

Independence	مستقل
--------------	-------

Inference	استنتاج
-----------	---------

Integral	انتگرال
----------	---------

Interpolation	درونيابي
---------------	----------

Intersection	اشترك
--------------	-------

Interval	بازه
----------	------

Introduction	مقدمه
--------------	-------

L

Law exclusion		قانون طرد
Law inclusion		قانون شمولیت
Mean value	M	مقدار میانگین
Measurements		انداز گیری
Member		عضو
Membership function		تابع عضویت
Method		روش
Non – empty	N	غیر تهی
Normal		نرمال
Number		عدد
Numerical		عددی
Ordered pair	O	زوج مرتب
	P	
Periodic		متناوب
Positive		مثبت
Preliminary		مقدماتی - اولیه
Projection		تصویر
Proof		اثبات - برهان
Rang	R	بُرد - مجموعه مقادیر
Real number		عدد حقیقی

Runge-Kutta method		روش رونگه-کوتا
	S	
Set		مجموعه
Sequence		دنباله
Simplify		ساده کردن
Statistics		آمار
Subnormal		زیر نرمال
Subset		زیر مجموعه
Support		تکیه‌گاه
Symmetric		متقارن
	T	
Trapezoidal rule		قاعده ذوزنقه‌ای
Triangular		مثلثی
	U	
Union		اجتماع
	V	
Variable		متغیر
Vague		مبهم
	W	
Well – defined		خوش تعریف
	Z	
Zero		صفر - ریشه (تابع)

Numerical solution of N-th order linear fuzzy differential equation with constant coefficient by using ordinary or generalized differentiability

Abstract

In this study a numerical method (*RUNGE-KUTTA* method) for solving n -th fuzzy differential equation of the form $y'(x) = f(x, y)$ $y(0) = y_0$ is presented. First we show that iff satisfy the *Lipschitz* condition, the original problem has a unique fuzzy solution. Then to find an approximate of this solution we convert the original problem in two n -th crisp differential equation and *RUNGE-KUTTA* method is applied for each of them. Finally we prove that the approximate solution of the iterative method, is stable and convergent to the solution of original problem.

By: Pejman Darabi



Islamic Azad University
Science and Research Branch

Faculty of Science – Department of Applied Mathematics

Thesis Ph.D.
On Applied mathematical

Subject:
Numerical Solution Of N-Order Linear Fuzzy Differential Equation
By Using Ordinary Or Generalized Differentiability

Supervisor:
Dr. Saied Abbasbandy
Advisor:
Dr. Tofiq Allahviranloo

By:
Pejman Darabi

Summer ۱۴۰۱

