بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد علوم و تحقیقات

رساله دکتری رشته ریاضی کاربردی (Ph.D)

عنوان

حل عددی دستگاه معادلات خطی تماماً فازی

استادان راهنما

دکتر سعید عباس بندی

دکتر توفیق الهویرنلو

استاد مشاور

دکترمحمدعلی فریبرزی عراقی

نگارنده

سعید مولودزاده

سال تحصیلی ۱۳۹۰ـ ۱۳۸۹

تشکر و قدردانی:

حمد و سپاس خداوندی را که جان و خرد عطاء کرد و از لطف خود باران رحمت بی پایانش را بر بندگانش ارزانی داشت. سلام و درود فراوان بر حضرت محمد (ص) یگانه مربی تاریخ بشریت و بر یاران رهروان صادق راهش.

قبل از هر چیز به پاس قدردانی یادی کنم از پدر عزیزم و مادر مرحومم که با فداکاریها و زحمات دلسوزانه خود که قلم از بیان آن عاجز است بستری مناسب برای تحصیلات اینجانب فراهم آوردند و از هیچ کوششی برای تربیت و ارتقاء سطح علمی من دریغ نورزیدند و نیز از همسر عزیزم که با فداکاری و تشویق خود مایهٔ دلخوشی و تقویت روح و روانم گشته اند، تشکر کنم.

از اساتید محترم و فاضل جناب آقای دکتر سعید عباس بندی و جناب آقای دکتر توفیق الهویر نلو که در کمال سعه صدر و حسن خلق از هیچ کمکی به بنده دریغ نکردند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند و نیز از استاد صبور و محترم جناب آقای دکتر محمد علی فریبرزی عراقی که مشاوره ی این رساله را تقبل کردند و بدون مساعدت وی این پروژه به نتیجه مطلوب نمی رسید و تمام کسانی که اینجانب را در این عرصه یاری کردند نهایت تشکر و امتنان را دارم و امیدوارم خدای متعال در دنیا و آخرت این عزیزان را موفق گرداند و آخر دعوانا أن الحمدلله رب العالمین.

تقدیم به:

تمامی رهروان راه حق و حقیقت و راه پیامبران که سلام و درود و رحمت بی پایان خداوند بر او و یاران صادقش باد.

فهرست مطالب

چکیده ۱

پیشگفتار ۲

فصل اول   مروری برنظریهٔ مجموعه های فازی

۱-۱ مقدمه ۵

۱-۲ مجموعه های فازی ۷

۱-۳ عملیات پایه روی مجموعه های فازی ۱۱

۱-۴ اصل گسترش ۱۲

۱-۵ اعداد فازی ۱۶

۱-۶ اعداد فازی خاص ۲۱

۱-۷ ضرب برداری (خارجی) اعداد فازی ۲۷

فصل دوم   دستگاه معادلات خطی

۲-۱ مقدمه ۳۰

۲-۲ دستگاه معادلات خطی ۳۱

۲-۳ حل عددی دستگاه معادلات خطی مربعی ۳۸

فصل سوم دستگاه معادلات خطی تماماً فازی

۳-۱ مقدمه ۴۵
۳-۲ ماتریس فازی و دستگاه معادلات خطی تماماً فازی ۴۶
۳-۳ حل دستگاه معادلات خطی تماماً فازی ۴۸
۳-۴ روشهای عددی برای حل دستگاه $FFSLS$ ۶۳

فصل چهارم روش جدیدی برای حل دستگاه $FFSLS$

۴-۱ مقدمه ۷۶
۴-۲ حل دستگاه $FFSLS$ ۷۷

نتیجه گیری ۸۷

منابع ۸۹

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۹۳

چکیده انگلیسی ۹۸

چکیده:

در این رساله، ابتدا مقدمه ای کوتاه از نظریه مجموعه های فازی را بیان می کنیم و با انواع اعداد فازی و عملیات روی آنها آشنا می شویم. در فصل بعدی دستگاه معادلات خطی را مرور نموده و روشهایی برای حل آنها یادآور می شویم. در فصل سوم، پس از معرفی دستگاه معادلات خطی تماماً فازی[1]، آنها را در چهار حالت (دستگاه معادلات خطی مربعی یا غیر مربعی تمام فازی با اعداد فازی ذوزنقه ای یا مثلثی LR) تقسیم بندی کرده به طوری که در هر حالت دستگاه معادلات خطی تماماً فازی را به دو دستگاه معادلات خطی غیر فازی (کریسپ) تبدیل می کنیم و با حل آنها جواب دستگاه اصلی را تقریب می زنیم. سپس در ادامه فصل برای حل دستگاه معادلات خطی مربعی تمام فازی با اعداد فازی مثلثی LR روش های عددی همچون روش تکراری ژاکوبی[2] و روش تجزیه آدومین[3] را همراه با حل مثالهایی معرفی می کنیم و نشان خواهیم داد که روش تجزیه آدومین معادل روش تکراری ژاکوبی، البته بایک تکرار کمتر می باشد. در فصل چهارم، روشی ساده وکاربردی برای حل هرنوع دستگاه معادلات خطی مربعی تمام فازی با تمامی اعداد فازی مثلثی پیشنهاد می دهیم. ایده روش معرفی شده شامل الگوریتمی در سه مرحله است که براساس گسترش جوابهای ۰- برش و ۱- برش از دستگاه ساخته شده است و در پایان این فصل جواب فازی را تعریف نموده و شرایط لازم وکافی برای یکتایی آن بدست می آوریم.

کلمات کلیدی:

اعداد فازی، جواب فازی، دستگاه معادلات خطی تماماً فازی، دستگاه خطی فرامعین، دستگاه خطی فرومعین، روش تکراری ژاکوبی، روش تجزیه آدومین، ضرب برداری اعدا فازی، ماتریس شبه وارون و ماتریس فازی.

1-Full fuzzy linear system ($FFLS$)

2-Jacobi iterative method

۳-Adomian decomposition method (ADM)

پیش گفتار:

دستگاه معادلات خطی در حل بسیاری از مسائل در زمینه های مختلف علوم و رشته های مختلف دانشگاهی از جمله رشته های علوم پایه، فنی ومهندسی، کامپیوتر، آمار و اقتصاد و ... به کار رفته و هر روز برحجم پژوهشها در این زمینه افزوده می شود. همان طور که می دانیم در بیشتر مسائل کاربردی پارامترهای دستگاه مبهم و نادقیق هستند وچون ریاضیات فازی ابزاری کارا ومناسب برای مدل بندی این نوع مسائل می باشند، بنابراین ترجیح می دهیم که این پارامترها را به صورت اعداد فازی بیان کنیم لذا چنین دستگاههایی را، دستگاه معادلات خطی فازی گویند که باتوجه به اینکه تمامی یا بخشی از پارامترهای آن اعدادفازی باشند، انواع مختلفی دارد.

دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ که در آن ضرائب a_{ij} از ماتریس A اعداد قطعی (معمولی یاکریسپ یا کلاسیک)[1] و درایه های b_i از بردار b اعداد دلخواه فازی باشند را دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی ویا دستگاه فازی از معادلات خطی[2] ($FSLE$) می نامیم. روشهای متعددی برای حل دستگاه $FSLE$ درمنابع [۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۶,۱۷,۱۸,۱۹,۲۱,۲۴,۲۸,۳۳,۳۵,۳۶,۴۳,۴۴] ارائه شده است. ابتدا فریدمن و همکارانش در [۳۵,۳۶] یک روش عمومی برای حل دستگاه خطی $FSLE$ با استفاده از نگرش جایگذاری بیان کرده اند. در حقیقت در این روش برای بدست آوردن جواب، دستگاه خطی فازی $n\times n$ توسط یک دستگاه خطی کلاسیک (معمولی یاکریسپ یا قطعی) $2n\times 2n$ جایگزین می شود. آنها همچنین شرایط لازم برای وجود ویکتایی جواب فازی از دستگاه $FSLE$ ارائه دادند. همچنین در منابع [۱۱,۱۲,۱۶,۱۷,۱۸,۲۱,۲۴,۳۳,۴۳,۴۴] می توانیم با بعضی از روشهای عددی برای محاسبه جواب دستگاه $FSLE$ آشنا شویم.

دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ را که در آن ضرائب a_{ij} از ماتریس A ودرایه های b_i از بردار b اعداد فازی باشند یک دستگاه معادلات خطی تماماً فازی ($FFLS$) می گویند. در این دستگاه از تعریف ماتریس فازی را که در مرجع [۳۴] ذکر شده ودارای کاربردهای زیادی است استفاده شده است. اخیراً مقاله های متعددی جهت حل دستگاه معادلات خطی تمام فازی مطرح شده اند. باکلی وهمکارانش در [۲۸] با گرفتن برش α از معادلات دستگاه خطی، معادلات بازه ای بدست آوردند و جواب واقعی دستگاه $FFLS$ را بوسیله حل این دستگاههای بازه ای محاسبه کردند.

1-Crisp
2-Fuzzy system of linear equations

موزیولی[1] وهمکارانش در [۴۱] در مورد $FFLS$ بصورت $A_1x+b_1=A_2x+b_2$ بحث کرده اند. که آنها ارتباط بین دستگاه خطی بازه ای و دستگاه خطی فازی را توضیح داده اند. این نگرش شامل حل $2^{n(n+1)}$ دستگاه کلاسیک برای هر $\alpha\in[0,1]$ می شود. در حقیقت جواب ارائه شده یک جواب تقریبی است و چون این روش شامل محاسبات زیادی بوده و در نتیجه انتشار خطای زیادی خواهد داشت..

دهقان وهمکارانش در [۳۲,۳۱,۳۰] بانمایش اعدادفازی نوع LR و بابکار بردن عملگرهای تقریبی بین این اعداد توانستند جوابهای مثبت از $FFLS$ پیدا کنند. آنها دستگاه $FFLS$ را تبدیل به سه دستگاه معادلات خطی کلاسیک کردند وبا حل این سه دستگاه توانستند جواب دستگاه $FFLS$ را تقریب بزنند.

برای پیدا کردن جواب غیرصفر از دستگاه $FFLS$ الهویرنلو وهمکارانش در [۲۰] یک الگوریتم رامعرفی نمودند. آنها برای یافتن این جواب غیر صفر، دستگاه اصلی $n\times n$ را به یک دستگاه پارامتری $2n\times 2n$ تبدیل کردند و با حل دستگاه جدید جواب دستگاه اصلی رابدست آوردند. البته اینکار را با فرض آنکه دستگاه $A^{\cdot}x^{\cdot}=b^{\cdot}$ جواب غیر صفر دارد بیان کردند. همچنین الهویرنلو و همکارانش، یک روش جدید برای به دست آوردن جوابهای متقارن از دستگاه براساس ۱- برش پیشنهاد دادند [۲۲]. لیو نیز یک جواب برای حل دستگاه $FFLS$ پیشنهاد داد وآنرا به روش اختلال هوموتوپی بلوکی[2] برای پیدا کردن تقریبی از جوا ب گسترش داد. نتایج عددی لیو نشان داده است که همگرایی بلوک HPM برای جواب دستگاه $FFLS$، از همگرایی روشهای مستقیم وروشهای تکراری نظیر ژاکوبی و گاوس- سایدل سریعتر است [۳۹]. موضوع روش تجزیه آدومین در سالهای اخیر به سرعت در حال رشد است و به تازگی در به کار بردن این روش به یک دسته از معادلات خطی وغیر خطی آثار تحقیقات قابل توجهی انجام شده است. در این روش برای حل معادلات، تابعی به عنوان مجموع یک سری نامتناهی که همگرا به جواب باشد، در نظرگرفته می شود. بابلیان وهمکارانش برای اولین بار روش تجزیه آدومین را برای حل یک دستگاه معادلات خطی کلاسیک پیشنهاد داده اند [۲۵]. الهویرنلو نیز این روش رابرای حل دستگاه $FSLE$ گسترش داد [۲۱]. همچنین در [۳۱]دهقان وهمکارانش روش آدومین را برای حل دستگاه $FFLS$ (با تمامی درایه های مثبت) توسعه دادند.

در این رساله برای حل دستگاه معادلات خطی تماماً فازی ($FFLS$) روشهایی را پیشنهاد می دهیم. باتوجه به اینکه مفاهیم اصلی این نوع دستگاهها در شاخه ای از ریاضیات به نام ریاضیات فازی مطرح می باشد، برآن شدیم تا ابتدا توضیح مختصری از نظریه مجموعه های فازی و تعاریف و قضایایی را که در فصول

۱-Muzzioli
۲-Block homotopy perturbation method (HPM)

بعدی از آنها استفاده می شود را به عنوان فصل اول بیان کنیم که برگرفته از منابع [۳,۴,۵,۶,۷,۸,۲۶,۲۷,۳۸] می باشد سپس در فصل دوم برای آشنایی بیشتر، دستگاه معادلات را در حالت غیرفازی بیان نموده و روش هایی برای حل آن یادآور می شویم که در این قسمت از منابع [۱,۲,۹,۱۰,۲۹,۴۰] کمک گرفته شده است ودر فصلهای سوم و چهارم دستگاه معادلات خطی تمام فازی را به دو دستگاه معادلات خطی غیرفازی تبدیل نموده و روشهایی برای حل آنها ارائه داده تا تقریبی از جواب دستگاه بدست آید که دراین زمینه توانستم چندین مقاله در ژورنالهای خارجی پذیرش و به چاپ برسانم.

فصل اول

مروری برنظریۀ مجموعه های فازی

۱-۱ مقدمه

نظریۀ مجموعه های فازی و منطق فازی را اولین بار لطفعلی عسگر زاده در سال ۱۹۶۵ در مقاله ای به نام مجموعه های فازی معرفی نمود. در این مقاله، عسگرزاده چیزی را که برتراند راسل، جان لوکاسیه ویچ، ماکس بلک و دیگران آن را ابهام یا چند ارزشی نامیده بودند، فازی نامید. هدف اولیه او در آن زمان، توسعه مدلی کارآمدتر برای توصیف فرآیند پردازش زبان های طبیعی بود. او مفاهیم و اصطلاحاتی همچون مجموعه های فازی، رویدادهای فازی، اعداد فازی و فازی سازی را وارد علوم ریاضیات و مهندسی نمود. یعنی این مقاله، آغاز یک جهان بینی جدید در عرصه ریاضیات وعلوم وگامی نوین در معرفی دیدگاهی واقع گرایانه به حل مسائل عملی دنیای واقعی بود.

پس از معرفی منطق فازی به دنیای علم، در ابتدا مقاومت های بسیاری دربرابر پذیرش این نظریه صورت گرفت. بخشی از این مقاومت ها، ناشی از برداشت های نادرست از منطق فازی و کارایی آن بود. جالب این

که، منطق فازی در سال های نخست تولدش بیشتر در دنیای مشرق زمین، به ویژه کشور ژاپن با استقبال روبه رو شد، اما استیلای اندیشه کلاسیک صفر و یک در کشورهای مغرب زمین، اجازه رشد اندکی به این نظریه داد. با این حال به تدریج که این علم کاربردهایی پیدا کرد و وسایل الکترونیکی و دیجیتالی جدیدی وارد بازار شدند که بر اساس منطق فازی کارمی کردند، مخالفت ها نیز اندک اندک کاهش یافتند.

در ژاپن استقبال از منطق فازی، عمدتاً به کاربرد آن در روباتیک و هوش مصنوعی مربوط می شود. موضوعی که یکی از نیروهای اصلی پیش برندهِ این علم طی چهل سال گذشته بوده است. در حقیقت می توان گفت بخش بزرگی از تاریخچه دانش هوش مصنوعی، با تاریخچه منطق فازی همراه و هم داستان است.

با توجه به این تاریخچه مختصر از منطق فازی، می توان گفت که پایه های منطق فازی از تئوری مجموعه های فازی منتج می گردد. نظریهٔ مجموعه های فازی را می توان شکل تعمیم یافته نظریهٔ مجموعه های کلاسیک دانست یعنی این نظریه تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسانها است. به این ترتیب با این نظریه می توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرده و تفکرات و مفاهیم و زبان و منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد. هدف ما در این فصل آشنایی با مفاهیم مقدماتی علم فازی است که در ابتدا لازم است تعریف مجموعه های کلاسیک را یادآوری کنیم.

مجموعه های کلاسیک، مجموعه ای از عناصر مشخص ومعین (اعداد، نمادها، اشیاء و...) است که در یک صفت یا ویژگی خوش تعریف، اشتراک دارند. بدین علت، ما به آنها مجموعه های قطعی، کلاسیک می گوییم. عناصر همه مجموعه های مورد نظر، متعلق به مجموعه ثابت بزرگتری می باشد که به آن مجموعه مرجع یا جهانی گفته می شود. این امر که عناصر مورد نظر به مجموعه A متعلق بوده ویا به آن تعلق نداشته باشند را می توانیم مشخصاً بوسیله تابع مشخصه (نشانگر) A و به صورت زیر نشان دهیم:

$$X_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

بطوریکه زوج اعداد $\{۰,۱\}$ مجموعه مشخصه نامیده می شود. رابطه (۱-۱) را می توان به صورت زیر نیز نمایش داد:

$$X_A(x) : U \to \{۰,۱\} \qquad (۱-۲)$$

رابطه (۱-۲) یعنی اینکه تابع $X_A(x)$ هر عنصر مجموعه U (مجموعه مرجع) را به مجموعه {۰,۱} نگاشت می نماید. این مطلب تأکید دارد که تابع نشانگر، مکانیزمی جهت نگاشت مجموعه U به مجموعه مشخصه {۰,۱} است. عملگرهای مهم در مجموعه های کلاسیک نظیر اجتماع، اشتراک ومتمم هستند که ما با آنها از ریاضیات مقدماتی آشنایی داریم. این عملگرها معمولاً بوسیله نمودارهای ون و گاهی برحسب تابع مشخصه نشان داده می شوند.

۱-۲ مجموعه های فازی

همانطور که در قسمت قبل نشان دادیم، در تئوری مجموعه های کلاسیک، عضویت مفهومی محض برای یک مجموعه است؛ یعنی یک عنصر یا متعلق به مجموعه است ویا به آن تعلق ندارد. با این وجود، عضویت در مجموعه های فازی می تواند مفهوم منعطف تری داشته باشد.

نقطه عزیمت به سوی مجموعه های فازی، همانا تعمیم مجموعه مشخصه {۰,۱} به تمام اعداد در بازه [۰,۱] است. با توسعه مجموعه مشخصه به صورت فوق، شکل تابع مشخصه به تابع عضویت تغییر یافته وبا نماد $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش داده می شود. بدین ترتیب، ما به جای مجموعه های کلاسیک، مجموعه های فازی داریم. از آنجا که فاصله [۰,۱] شامل تعداد نا متناهی از اعداد است، لذا بی شمار درجه عضویت وجود دارد.

باتوجه به رابطه (۱-۲) می توان گفت که تابع عضویت، هرعضو از مجموعه مرجع U را به فاصله [۰,۱] نگاشت می کند یعنی:

$$\mu_{\tilde{A}}(x):U \rightarrow [۰,۱] \qquad (۱-۳)$$

رابطه فوق، تعمیمی از رابطه (۱-۲) است. توابع عضویت، ابزار ریاضی ساده و درعین حال متنوعی برای بیان عضویت منعطف در یک مجموعه هستند وهمانطور که بعداً خواهیم دید، ابزاری برای مدل نمودن و تعیین کمیت مفاهیم نمادها می باشند.

۱-۲-۱ تعریف مجموعه فازی: هرگاه U مجموعه عناصری باشد که توسط x مشخص می گردند، آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ در U یک مجموعه از زوجهای مرتب به صورت زیر است:

$$\tilde{A}=\left\{\left(x,\mu_{\tilde{A}}(x)\right)\middle| x\in U\right\} \qquad (۱-٤)$$

$\mu_{\tilde{A}}(x)$را تابع عضویت، درجه عضویت، درجه سازگاری ویا درجه صحت عنصر x در $\tilde{A}$ گویند به طوری که $\tilde{A}$ نگاشتی از U به فضای عضویت M می باشد (وقتی M فقط شامل دونقطه صفر ویک

باشد، $\tilde{A}$ غیر فازی است و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ مشابه تابع نشانگر یک مجموعه غیر فازی می باشد). برد تابع عضویت، زیر مجموعه ای از اعدا حقیقی غیر منفی است که حد بالای ان محدود است و معمولاً عناصری که درجه عضویت صفر دارند در آن مجموعه نشان داده نمی شوند.

۱-۲-۲ مثال: مجموعه اعداد طبیعی کوچک، $\tilde{A}$ روی مجموعه مرجع تمام اعداد صحیح می تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{A}=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۰/۷۵),(۴,۰/۵),(۵,۰/۳),(۶,۰/۳),(۷,۰/۱),(۸,۰/۱)\}$$

چهارمین عنصر از سمت چپ به ما می گوید که عدد ٤ با درجه عضویت ۰/۵ به مجموعه $\tilde{A}$ متعلق است.

مجموعه های فازی را به شکل زیر نیز نمایش می دهند(بیان گسسته):

$$\tilde{A}=\sum_{i=۱}^{n}\mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i \qquad (۱-۵)$$

علامت Σ در رابطه فوق، بیانگر اجتماع تمام عناصر مجموعه های فازی می باشد. علامت / به معنای تقسیم نمی باشد بلکه تنها یک علامت جدا کننده است. دررابطه (۱-۵) فرض براین است که مجموعه مرجع گسسته است. نمایش مجموعه اعداد طبیعی کوچک (که در مثال بالا ذکر شد) بوسیله این نماد به شکل زیر است:

$$\tilde{A}=۱/۱+۱/۲+۰/۷۵/۳+۰/۵/۴+۰/۳/۵+۰/۳/۶+۰/۱/۷+۰/۱/۸$$

برای بیان گسسته ، دو قاعده دیگر نیز وجود دارد:

الف) هنگامی که درجه عضویت عنصری مانند x صفر است $(\mu_{\tilde{A}}(x)=۰)$ آن را حذف کرده و دیگر $۰/x$ نوشته نمی شود.

ب) چنانچه بیش از یک مقدار به یک عنصر از مجموعه مرجع تعلق داشته باشد ، بزرگترین مقدار به عنوان مقدار درجه عضویت در نظر گرفته می شود. مثلا برای x : $۰/۶/x+۰/۳/x+۰/۷/x\rightarrow ۰/۷/x$

برای مجموعه مرجع پیوسته، مجموعه های فازی را به شکل زیر نمایش می دهند(بیان پیوسته):

$$\tilde{A}=\int_U \mu_{\tilde{A}}(x)/x \qquad (۱-٦)$$

باز در اینجا نماد $\int$ به عنوان توسیعی از Σ به دنیای پیوسته به کار گرفته شده است و هیچ ارتباطی با انتگرال ندارد یعنی بیانگر اجتماع تمام عناصر مجموعه فازی است. در سمت راست پایین این نماد ، نام مجموعه مرجع نوشته می شود تا مشخص شود مجموعه فازی به کار گرفته شده نمایانگر کدام مجموعه مرجع است. در عبارات پیوسته تعداد نامتناهی عنصر وجود دارند و لذا نمی توان عناصر و مقادیر عضویت آنها را لیست کرد. از این رو عنصر به صورت متغیری مثل x در سمت راست جداکننده نوشته و تابع عضویت در سمت چپ درج می گردد.

۱-۲-۳ تعریف تساوی مجموعه های فازی: دومجموعه $\tilde{A}$و $\tilde{B}$ را مساوی گویند و می نویسند $\tilde{A}=\tilde{B}$ هرگاه توابع عضویت آنها در تمام نقاط مجموعه مرجع با هم برابر باشند؛ یعنی:

$$\forall x \ \left(x \in U \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \tag{۱-۷}$$

۱-۲-٤ تعریف مجموعه پشتیبان(تکیه گاه یا محمل): مجموعه پشتیبان مجموعه فازی $\tilde{A}$ که با $Supp\left(\tilde{A}\right)$ یا $S\left(\tilde{A}\right)$ نشان داده می شود عبارت است از مجموعه عناصری از U که درجه عضویت آنها بزرگتر از صفر باشد؛ به عبارت دیگر، تکیه گاه $\tilde{A}$، مجموعه ای غیر فازی (کریسپ) است که به شکل زیر تعریف می شود:

$$S\left(\tilde{A}\right) = \left\{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > ۰ \right\} = U - \left\{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = ۰ \right\} \tag{۱-۸}$$

نکات:

- کل عناصر x از U که در آن xهایی با درجه عضویت صفر $(\mu_{\tilde{A}}(x)=۰)$ حذف می شوند، محمل را می سازند.
- مجموعه $\tilde{A}$ را سینگلتون فازی[۱] گویند هرگاه محمل آن تنها یک عنصر داشته باشد.
- اگر $S(\tilde{A})=\phi$ (محمل $\tilde{A}$ مجموعه تهی باشد)، آنگاه $\tilde{A}$ را مجموعه فازی تهی گویند؛ به عبارت دیگر مجموعه فازی $\tilde{A}$ تهی نامیده می شود هرگاه تابع عضویت آن در تمام نقاط مرجع U صفر باشد.

۱-۲-۵ تعریف زیر مجموعه فازی: مجموعه فازی $\tilde{A}$ زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ است و می نویسند $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ هرگاه :

$$\forall x \ \left(x \in U \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x) \right) \tag{۱-۹}$$

۱-Fuzzy Singelton

بدین ترتیب واضح است که:

$$\begin{cases}\phi \subseteq \tilde{A} \subseteq U \\ (\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \ \& \ \tilde{B} \subseteq \tilde{A}) \Rightarrow \tilde{A} = \tilde{B}\end{cases} \quad (۱-۱۰)$$

۱-۲-۶ تعریف ارتفاع یک مجموعه فازی: ارتفاع یک مجموعه فازی، بزرگترین مقدار درجه عضویت در آن مجموعه است؛ یعنی:

$$hgt\left(\tilde{A}\right) = \max\left\{\mu_{\tilde{A}}(x)\right\} \quad (۱-۱۱)$$

۱-۲-۷ تعریف مجموعه فازی نرمال: یک مجموعه فازی را نرمال می نامند هرگاه درجه عضویت حداقل یکی از اعضای آن مثلاً x_i برابر ۱ باشد یعنی $\left(\exists x \in U ; \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱\right)$. به عبارت دیگر، اگر $hgt(\tilde{A}) = ۱$ آنگاه مجموعه فازی $\tilde{A}$ را مجموعه فازی نرمال و اگر $hgt(\tilde{A}) < ۱$ آن را مجموعه فازی غیر نرمال نامند.

همه مجموعه های کلاسیک، به غیر از مجموعه های تهی، نرمال هستند. همچنین می توان هر مجموعه فازی غیر نرمال $\tilde{A}$ ، را با تقسیم $\mu_{\tilde{A}}(x)$ بر ارتفاع آن نرمال کرد.

اگر x عضوی باشد که برای آن $\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{۱}{۲}$ ، در این صورت x را نقطهٔ گذر (معبر) $\tilde{A}$ گویند.

۱-۲-۸ تعریف هسته (کرنل) یک مجموعه فازی: هسته مجموعه فازی $\tilde{A}$ که با نماد $Cor\left(\tilde{A}\right)$ نشان داده می شود عبارت است از، زیر مجموعه ای از مجموعه مرجع U که درجه عضویت عناصر آن در $\tilde{A}$ برابریک است یعنی:

$$Cor\left(\tilde{A}\right) = \left\{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = ۱\right\} \quad (۱-۱۲)$$

۱-۲-۹ تعریف مجموعه در سطح α (α- برش): α- برش ای مجموعه فازی $\tilde{A}$ که با $\left[\tilde{A}\right]^{\alpha}$ نمایش می دهند، مثل محمل $\tilde{A}$ ، $Supp\left(\tilde{A}\right)$ ، یک مجموعه کلاسیک (غیر فازی) است وعبارت است از، مجموعه ای از تمام اعدادی که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی بزرگتر یا مساوی α باشد؛ یعنی:

$$\left[\tilde{A}\right]^{\alpha} = \begin{cases}\left\{ x \in U \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\right\} & \alpha > ۰ \\ \overline{(Supp(\tilde{A}))} & \alpha = ۰\end{cases} \quad (۱-۱۳)$$

که در آن $\overline{(Supp(\tilde{A}))}$ ، بستار $Supp\left(\tilde{A}\right)$ می باشد.

۱-۲-۱۰ مثال: فرض کنیدکه $U=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\}$ ، مجموعه مرجع و مجموعه $\tilde{A}$ به صورت $\tilde{A}=۰/۱/_{-۲}+۰/۳/_{-۱}+۰/۶/_{۰}+۱/۰/_{۱}+۰/۶/_{۲}+۰/۳/_{۳}+۰/۱/_{۴}$ باشد در این حالت:

$$\left[\tilde{A}\right]^{\alpha}=\begin{cases}\{-۱,۰,۱,۲,۳\} & ۰\le\alpha\le۰/۳\\ \{۰,۱,۲\} & ۰/۳<\alpha\le۰/۶\\ \{۱\} & ۰/۶<\alpha\le۱\end{cases}$$

۱-۲-۱۱ تعریف عدد اصلی یا کاردینالیتی[۱]: عدد اصلی برای مجموعه متناهی $\tilde{A}$، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left|\tilde{A}\right|=\sum_{x\in U}\mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (۱-۱٤)$$

به عبارت دیگر، مجموعه درجه عضویتهای یک مجموعه فازی متناهی را کاردینالیتی آن مجموعه می نامند.

همچنین $\left\|\tilde{A}\right\|=\frac{\left|\tilde{A}\right|}{|X|}$ را کاردینالیتی نسبی گویند.

در مورد مجموعه هایی که مجموعه مرجع پیوسته دارند عدد اصلی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\left|\tilde{A}\right|=\int_{U}\mu_{\tilde{A}}(x)dx \qquad (۱-۱۵)$$

لازم به ذکر است که کاردینالیتی در بعضی مواقع وجود ندارد.

۱-۲-۱۲ تعریف مجموعه فازی محدب: مجموعه فازی $\tilde{A}$ را محدب گویند هر گاه هر $\alpha-$ برش، $\tilde{A}$ (برای تمام $۰<\alpha\le۱$) محدب باشد و یا مجموعه فازی $\tilde{A}$ محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x_{۱}, x_{۲}\in X$ و هر $\lambda\in[۰,۱]$ داشته باشیم :

$$\mu_{\tilde{A}}\left[\lambda x_{۱}+(۱-\lambda)x_{۲}\right]\ge\min\left[\mu_{\tilde{A}}(x_{۱}),\mu_{\tilde{A}}(x_{۲})\right] \qquad (۱-۱٦)$$

۱-۳ عملیات پایه روی مجموعه های فازی:

از آنجا که تابع عضویت، یکی از اجزاء بسیار مهم در مجموعه های فازی است، لذا جای تعجب نخواهد بود اگر عملیات روی مجموعه های فازی بوسیله توابع عضویت آنها تعریف شود؛ با این تعریف می توان نتیجه گرفت که عملگرهای مجموعه های فازی، تعمیم عملگرهای مجموعه ای برای مجموعه های کلاسیک می باشند.

۱-Cardinality

۱-۳-۱ تعریف اجتماع: اجتماع مجموعه های فازی $\tilde{A}$و $\tilde{B}$ یعنی $\tilde{A}\bigcup\tilde{B}$ به کمک تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}\bigcup\tilde{B}}(x)=\max\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}=\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x), \qquad \forall x\in U \quad (۱۷-۱)$$

۱-۳-۲ تعریف اشتراک: اشتراک مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یعنی $\tilde{A}\bigcap\tilde{B}$ به کمک تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}\bigcap\tilde{B}}(x)=\min\{\mu_{\tilde{A}}(x),\mu_{\tilde{B}}(x)\}=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x), \qquad \forall x\in U \quad (۱۸-۱)$$

۱-۳-۳ تعریف متمم: متمم مجموعه فازی $\tilde{A}$ یعنی $\tilde{A}'$ خود یک مجموعه فازی است که تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_{\tilde{A}'}(x)=1-\mu_{\tilde{A}}(x). \qquad (۱۹-۱)$$

۱-۳-٤ تذکر:

بایستی توجه کرد که تعاریف قبلی تنها راه ممکن برای بیان اجتماع، اشترک و متمم برای مجموعه های فازی نیست. بلکه این یکی از ساده ترین روشهایی است که توسط خود عسگر زاده درسال ۱۹٦۵ ارائه گردیده است و به طور وسیعی نیز بکار برده شده است [۵].

۱-۳-۵ لم: خاصیتهای مهم تناقض، طرد شق ثالث و جذب متمم برای مجموعه های فازی برقرار نمی باشد [۷].

۱-٤ اصل گسترش[۱] (توسیع):

اصل گسترش یکی از مفاهیم اساسی وکلیدی در نظریهٔ مجموعه های فازی است. این اصل ابزاری برای گسترش و تعمیم مفاهیم ریاضی غیر فازی است به گونه ای که به صورت کمیت های فازی در آیند. این اصل به ویژه در تعمیم عملگر های جبری بین اعداد و تعریف این عملگر ها برای اعداد فازی مفید است.

در اینجا، یک تشریح ابتکاری از اصل گسترش را ارائه می نماییم.

۱-Extension principle

تابع f با مشخصات زیر را در نظر بگیرید. این تابع عناصر $x_{1}, x_{2}, ..., x_{n}$ از مجموعه مرجع X را به مجموعه مرجع Y نگاشت می نماید.

$$y_{1}=f(x_{1}), y_{2}=f(x_{2}),..., y_{n}=f(x_{n}) \qquad (۱-۲۰)$$

حال مجموعه فازی $\tilde{A}$ که برروی $x_{1}, x_{2}, ..., x_{n}$ تعریف شده است را در نظر بگیرید، مجموعه فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$A=\{(x_{1},\mu_{\tilde{A}}(x_{1})),(x_{2},\mu_{\tilde{A}}(x_{2})),...,(x_{n},\mu_{\tilde{A}}(x_{n}))\} \qquad (۱-۲۱)$$

سؤالی که پیش می آید این است که اگر ورودی تابع f فازی باشند (به عنوان مثال مجموعه $\tilde{A}$) خروجی به چه شکل خواهد بود؟ آیا خروجی نیز فازی است؟ به عبارت دیگر، آیا خروجی ای مانند مجموعه فازی $\tilde{B}$ وجود دارد که بتواند به وسیله ورودی $\tilde{A}$ به تابع f بدست آید؟ اصل گسترش تأیید می کند که خروجی، مجموعه فازی $\tilde{B}$ می باشد وبه صورت زیر نشان داده می شود:

$$\tilde{B}=f(\tilde{A})=\{(f(x_{1}),\mu_{\tilde{A}}(x_{1})),(f(x_{2}),\mu_{\tilde{A}}(x_{2})),...,(f(x_{n}),\mu_{\tilde{A}}(x_{n}))\} \qquad (۱-۲۲)$$

یعنی هر تصویری از x_{i} تحت f (به شکل ریاضی ($y_{i}=f(x_{i})$) بادرجه $\mu_{\tilde{A}}(x_{i})$ فازی می شود. از آنجا که توابع در حالت کلی دارای نگاشت چند به یک می باشند، ممکن است تعداد زیادی x به یک y نگاشت شوند. بنابراین، برای یک $y_{.}$ معیین ممکن است بیش از یک x وجود داشته باشد. فرض کنید که x_{1} و x_{2} در رابطه (۱-۲۰) برروی $y_{.}$ نگاشت شده باشند. از این رو، باید برحسب دو درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x_{1})$ و $\mu_{\tilde{A}}(x_{2})$ تصمیم گیری نماییم و مقداری را برای درجه عضویت $y_{.}$ بدست آوریم. اصل گسترش می گوید که بیشینه مقادیر عضویت این عناصر در مجموعه فازی $\tilde{A}$ به عنوان درجه عضویت $y_{.}$ که به مجموعه $\tilde{B}$ تعلق دارد در نظر گرفته می شود، یعنی:

$$\mu_{\tilde{B}}(y_{.})=\mu_{\tilde{A}}(x_{1})\vee\mu_{\tilde{A}}(x_{2}) \qquad (۱-۲۳)$$

به عبارت دیگر، اگر هیچ عنصر $x\in X$ بر $y_{.}$ نگاشت نشده باشد آنگاه درجه عضویت $y_{.}$ در مجموعه $\tilde{B}$ برابر با صفر می باشد. می توانیم مجموعه $\tilde{B}$ را با استفاده از رابطه (۱-۲۲) محاسبه نماییم، به طوریکه در جه عضویت اعضای آن از نگاشت $f(\tilde{A})$ بدست می آید.

بنابراین برای درک بهتر اصل گسترش، ابتدا ساده ترین صورت آن را تعریف کرده، با ذکر مثال مفهوم آن را روشن می کنیم. سپس تعریف کلی ارائه می شود.

۱-٤-۱ تعریف: فرض کنید Xو Y دو مجموعه و f یک تابع به صورت $f:X \to Y$ و $\tilde{A}$ یک زیر مجموعه فازی از X باشد اصل گسترش بیان می کند که می توانیم قلمرو f رابه زیرمجموعه های فازی X و به صورت زیر گسترش دهیم .

$$\tilde{B}=f\left(\tilde{A}\right)=\left\{\left(y,\mu_{\tilde{B}}(y)\right) \mid y=f(x),\ x\in X\right\}, \qquad (۱-۲٤)$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases} \sup\limits_{x\in f^{-۱}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x) & if\ f^{-۱}(y)\neq\varphi \\ ۰ & if\ f^{-۱}(y)=\varphi \end{cases} \qquad (۱-۲٥)$$

لازم به ذکر است که اگر تابع f اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشد آنگاه رابطه بالا به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases} Sup\ \mu_{\tilde{A}}\left(f^{-۱}(y)\right) & if\ \ y\in R(f) \\ ۰ & otherwise \end{cases} \qquad (۱-۲٦)$$

که در آن $R(f)=\left\{y\in Y \mid \exists x\in X\ ;\ f(x)=y\right\}$ خواهد بود.

۱-٤-۲ مثال: فرض کنید $X=Z$ و $y=f(x)=x^{۲}$ و مجموعه $\tilde{A}$ از X بیانگر «تقریباً ۲» به صورت زیر باشد:

$$\tilde{A}=\left\{\frac{۰/۲}{-۲},\frac{۰/٤}{-۱},\frac{۰/٦}{۰},\frac{۰/۸}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۰/۸}{۳},\frac{۰/٦}{٤},\frac{۰/٤}{٥},\frac{۰/۲}{٦}\right\}$$

در این صورت با توجه به اصل گسترش داریم.

$$\tilde{B}=f\left(\tilde{A}\right)=\left\{\frac{۰/٦}{۰},\frac{۰/۸}{۱},\frac{۱}{٤},\frac{۰/۸}{۹},\frac{۰/٦}{۱٦},\frac{۰/٤}{۲٥},\frac{۰/۲}{۳٦}\right\}$$

در این مثال ، اصل گسترش بیان می کند که چگونه با توجه به تعریف مجموعه فازی « تقریباً ۲» و از طریق تابع $y=f(x)=x^{۲}$ مقدار f را برای « تقریباً ۲ » بیابیم ، یعنی مقدار « مجذور تقریباً ۲ » را به صورت یک مجموعه فازی بیابیم.

قبل از تعریف کلی اصل گسترش به تعریف زیرتوجه کنید.

۱-٤-۳ تعریف حاصلضرب دکارتی: فرض کنید $X_1, \dots, X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ حاصلضرب دکارتی آنها باشد همچنین $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$، n زیر مجموعه فازی بترتیب از $X_1, \dots, X_n$ باشند. در این صورت حاصلضرب دکارتی $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ (بانماد $\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n$)، به صورت یک زیر مجموعه فازی از X و با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}_1 \times \cdots \times \tilde{A}_n}(x_1, \dots, x_n) = \min\left\{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right\} \qquad (۱-۲۷)$$

۱-٤-٤ تعریف اصل گسترش: بادر نظرگرفتن مفروضات تعریف قبلی، فرض کنید f یک نگاشت از X به مجموعه Y باشد ، یعنی $y = f(x_1, \dots, x_n)$. حال ، حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ به عنوان یک زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n\right) = \left\{ \left(y, \mu_{\tilde{B}}(y)\right) \mid y = f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in X \right\} \qquad (۱-۲۸)$$

که در آن داریم:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min\left\{ \mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \right\} & if \quad f^{-1}(y) \neq \varphi \\ ۰ & other\ wise \end{cases} \qquad (۱-۲۹)$$

۱-٤-٥ مثال: فرض کنید $X_1 = X_2 = Z$، $\tilde{A}_1$ و $\tilde{A}_2$ دو زیر مجموعه فازی Z به ترتیب نمایشگر « تقریبا صفر » و « تقریبا یک » به صورت زیر باشند:

$$\tilde{A}_1 = \left\{ \frac{۰/۲}{-۲}, \frac{۰/۵}{-۱}, \frac{۱}{۰}, \frac{۰/۲}{۲} \right\}, \quad \tilde{A}_2 = \left\{ \frac{۰/۲}{-۱}, \frac{۰/۵}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۳}{۳} \right\}$$

همچنین $f : x_1 \times x_2 \to Y$ به صورت $y = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ باشد آنگاه حاصلضرب دکارتی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2$ به صورت زیر بوده:

$$\tilde{A}_1 \times \tilde{A}_2 = \left\{ \frac{۰/۲}{(-۲,-۱)}, \frac{۰/۲}{(-۲,۰)}, \dots, \frac{۱}{(۰,۱)}, \frac{۰/۵}{(۰,۲)}, \dots, \frac{۰/۲}{(۲,۳)} \right\}$$

و بنابراین، طبق اصل گسترش :

$$\tilde{B} = f\left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2\right) = \left\{ \frac{۰/۵}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۵}{٤}, \frac{۰/۵}{۵}, \frac{۰/۲}{۸}, \frac{۰/۲}{۹}, \frac{۰/۲}{۱۰}, \frac{۰/۲}{۱۳} \right\}$$

توضیح این که، در اینجا یک تابع دو متغیرهٔ حقیقی داریم که به هر دو عدد، مجموع مجذورات آنها را نسبت می دهد.

یکی ازکاربردهای اصل گسترش، تعمیم عملگرهای جبری معمولی مانند جمع وضرب برای اعدادی است که به اعداد فازی موسوم اند ویک تعمیم طبیعی برای اعداد معمولی می باشند.

۱-۵ اعداد فازی

اعداد فازی، مجموعه های فازی هستند که وقتی نمایش ضمنی عدم قطعیت همراه داده های عددی مورد نیاز باشد آز آنها استفاده می شود. به بیان دیگر، اعدادفازی، مجموعه های فازی هستند که معانی عباراتی همچون تقریباً ۳ یا نزدیک به ۵ را بیان می کنند. درواقع، اعداد فازی واژه هایی همچون تقریباً، نزدیک به و نه کاملاً را در کنار مقادیر عددی لحاظ می کنند. عملگرهای مجموعه های فازی از قبیل اجتماع و اشتراک ونیز مفاهیمی نظیر برش α ، اصل تجزیه و اصل گسترش در اعداد فازی کاربرد دارند. بعلاوه، مجموعه ای از عملگرها که به مجموعه عملگرهای ریاضیات بسیار شبیه هستند مانند جمع، تفریق، ضرب وتقسیم برای اعداد فازی نیز قابل تعریف می باشند.

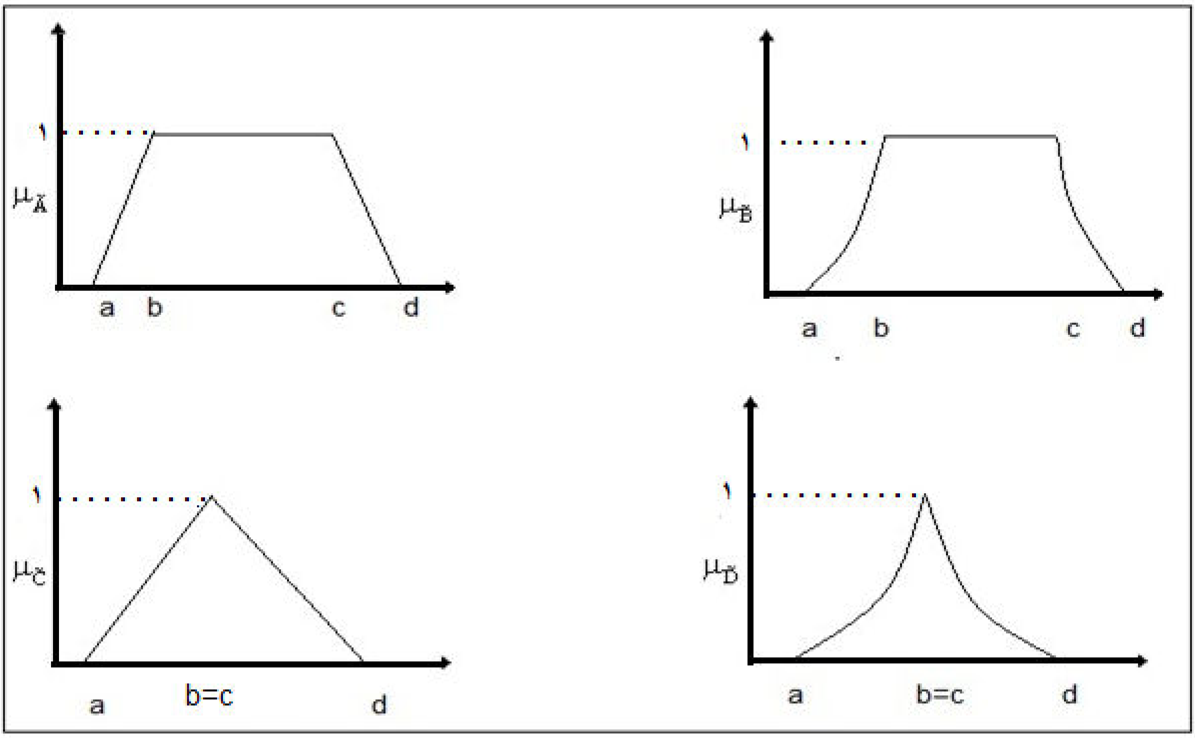
هر عدد فازی مانند $\tilde{A}$ از طریق تابع عضویت آن به صورت زیر بیان می گردد:

$$\mu_{\tilde{A}} : R \rightarrow [۰.۱] \qquad (۱-۳۰)$$

همه توابع عضویت به شکل بالا مبین یک عدد فازی نیستند. برای اینکه یک تابع عضویت متعلق به یک عدد فازی باشد بایستی آن تابع عضویت مفهوم مجموعه ای از اعداد که دراطراف یک عدد حقیقی ویا اطراف یک بازه از اعداد حقیقی قرار گرفته را بیان وتفسیر نماید. توابع عضویتی که دارای مشخصه بالا باشد را می توان به صورت زیر فرموله نمود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} f(x) & a \le x \le b \\ ۱ & b \le x \le c \\ g(x) & c \le x \le d \\ ۰ & x < a, x > d \end{cases} \qquad (۱-۳۱)$$

در این فرمول، $a \le b \le c \le d$ ، f یک تابع پیوسته که از نقطه a تا b افزایشی بوده و g یک تابع پیوسته کاهشی از c تا نقطه d می باشد. شکل زیر چهار نوع تابع عضویت که با فرمول بالا منطبق بوده را نشان می دهد.



شکل (۱-۱) نمونه هایی از اعداد فازی

اگر چه در مجموعه های فازی $\tilde{C}$ و $\tilde{D}$ مربوط به شکل فوق که در آنها $b=c$ بوده با ضوابط بیان شده برای اعداد فازی منطبق تراند، لیکن مجموعه های فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ که با بازه های فازی نشان داده شده نیز در عمل به کار برده می شوند. بنابراین بین اعداد فازی و بازه های فازی نبایستی تفاوت قائل شد وهردو تحت نام اعداد فازی قرار دارند. هرچند اشکال گوناگونی برای اعداد فازی وجود دارد اما در عمل بیشتر از اعداد فازی ذوزنقه ای و مثلثی استفاده می شود. همچنین یک عدد حقیقی خاص شکل ویژه ای از یک عدد فازی ذوزنقه ای است که در آن $a=b=c=d$ می باشد. بایستی توجه نمود که هر عدد فازی که از طریق فرمول (۱-۳۱) تبیین گردد بایستی دارای چهار ویژگی زیر باشد:

الف) نرمال باشد.

ب) برشهای α آن بازه های بسته اعداد حقیقی باشند.

ج) دارای پشتیبان در یک بازه (a,d) از اعداد حقیقی هستند.

د) محدب اند.

در ادامه چند تعریف از اعداد فازی ارائه می دهیم.

۱-۵-۱ تعریف اعداد فازی (زیمرمن[۱]): یک عدد فازی $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی محدب است، که روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ تعریف می شود که اولاً تنها یک $x_{\cdot} \in \mathbb{R}$ وجودداشته باشد که $\mu_{\tilde{A}}(x_{\cdot})=1$ و به مقدار $x_{\cdot}$ مقدارمیانه ای، $\tilde{A}$ گفته می شود (تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تک نمایی باشد) و ثانیاً تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به صورت قطعه ای پیوسته باشد[۸].

این تعریف توسط سوگنو به صورت زیر تصحیح شد:

۱-۵-۲ تعریف اعداد فازی (سوگنو): مجموعه فازی $\tilde{A}$ را عدد فازی گویند، هرگاه:

الف) تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ محدب و نرمال باشد.

ب) برش α، $\tilde{A}$ یعنی $\left[\tilde{A}\right]^{\alpha}$ ، بازه بسته باشد[۸].

در ادامه یک تعریف مشهور از عدد فازی ارائه می دهیم:

۱-۵-۳ تعریف اعداد فازی: عدد فازی، یک تابع $\tilde{u}: R \to [0,1]$ با خواص زیر است:

الف) $\tilde{u}$ نرمال است،

ب) $\tilde{u}$ محدب است،

ج) $\tilde{u}$ نیم پیوسته بالا است (یعنی برای هر $x_{\cdot} \in \mathbb{R}$ و برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی $V(x_{\cdot})$ وجود دارد بطوری که برای هر x متعلق به این همسایگی داشته باشیم: $u(x) \le u(x_{\cdot}) + \varepsilon$)،

د) مجموعه $\overline{\operatorname{supp}(\tilde{u})}$ در $\mathbb{R}$ فشرده است.

مطابق با آنچه بیان شد، اعداد فازی مجموعه های فازی هستند که برای توصیف مفاهیمی نظیر در حدود، تقریباً و نزدیک به استفاده می شوند. بنابراین، مجموعه های مختلفی برای توصیف مفهوم در حدود یک عدد حقیقی بکار برده شوند. چونکه هر مجموعه فازی با تابع عضویت مشخص می شود بنابراین یک روش برای نمایش اعداد فازی استفاده از توابع عضویت می باشد اما روش دیگر استفاده از برش α یا r (یعنی بازه ای) می باشد یعنی هر عدد فازی همانند هر مجموعه فازی ممکن است به وسیله برشهای r مشخص شوند. بنابراین $[u]^r$، مجموعه r - برش از عدد فازی $\tilde{u}$ نامیده می شود. ما برای هر $r \in [0,1]$ نماد $[\tilde{u}]^r = \left[\underline{u}^r, \bar{u}^r\right]$ را به کار می بریم که یک بازه بسته می باشد.

2- Zimmerman

در قضیه زیر گوتسشل و واکسمن[۱] در [۳۸] نمایش دیگری از عدد فازی که به نمایش پارامتری عدد فازی معروف است، به صورت یک زوج از توابعی که در بعضی از خواص صدق می کنند ارائه دادند:

۱-۵-٤ قضیه: هر عدد فازی به طور کامل بوسیله زوج $\tilde{u}=(\underline{u},\overline{u})$ مشخص می شود که توابع $\underline{u},\overline{u}:\mathbb{R}\rightarrow[0,1]$ تعریف کننده نقاط انتهایی از مجموعه های r ـ برش هستند و در خواص زیر صدق می کنند:

الف) $\underline{u}(r)=\underline{u}^r\in\mathbb{R}$ یک تابع نانزولی کراندار و از چپ پیوسته روی بازه $[0,1]$ است.

ب) $\overline{u}(r)=\overline{u}^r\in\mathbb{R}$ یک تابع ناصعودی کراندار و از چپ پیوسته روی بازه $[0,1]$ است.

ج) برای هر $0\le r\le 1$, $\underline{u}^r\le\overline{u}^r$.

بنابراین هر عدد فازی، مجموعه ای از همه برشهای r با مقادیر متفاوت r از صفر تا یک می باشد. ما مجموعه همه این اعداد فازی را با R_F مشخص می کنیم و همچنین اگر برای هر $r\in[0,1]$, $\underline{k}^r=\overline{k}^r=k$ آنگاه k یک عدد کریسپ می باشد.

وجود دو روش مختلف برای نمایش اعدا فازی (یعنی اسفاده از توابع عضویت یا بازه ای (r - برش)) به ما امکان تعریف عملیات حساب بواسطه اصل گسترش (مثلاً بواسطه فازی کردن عملیات حسابی روی اعداد قطعی) یا بواسطه عملیات ریاضیات بازه ای را می دهد که روش اخیر عملی تر وساده تر است به عنوان مثال برای هر دو عدد فازی دلخواه $\tilde{u}=\left[\underline{u}^r,\overline{u}^r\right]$ و $\tilde{v}=\left[\underline{v}^r,\overline{v}^r\right]$، جمع $\tilde{u}+\tilde{v}$ وضرب اسکالر $k\tilde{u}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم ($k\in\mathbb{R}$ و $r\in[0,1]$):

$$[\tilde{u}+\tilde{v}]^r=[\tilde{u}]^r+[\tilde{v}]^r=\left[\underline{u}^r+\underline{v}^r,\overline{u}^r+\overline{v}^r\right]$$

$$k\tilde{u}=\begin{cases}(k\underline{u},k\overline{u}) & ,\ k\ge 0\\ (k\overline{u},k\underline{u}) & ,\ k<0\end{cases} \qquad (۳۲-۱)$$

قرینه عدد فازی $\tilde{u}$ را به صورت $-\tilde{u}=(-1)\tilde{u}$ تعریف می کنیم. همچنین حاصلضرب $\tilde{u}.\tilde{v}$ از اعداد فازی $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ برمبنای اصل گسترش زاده به صورت زیر تعریف می شود:

$$[\tilde{u}.\tilde{v}]^r=\left[\min\left\{\underline{u}^r\underline{v}^r,\underline{u}^r\overline{v}^r,\overline{u}^r\underline{v}^r,\overline{u}^r\overline{v}^r\right\},\max\left\{\underline{u}^r\underline{v}^r,\underline{u}^r\overline{v}^r,\overline{u}^r\underline{v}^r,\overline{u}^r\overline{v}^r\right\}\right] \qquad (۳۳-۱)$$

۱-Goetschel and Vaxman

۱-۵-۵ مثال: فرم پارامتری عدد فازی مثلثی تقریباً ٤ با پهنای ۳ به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} \underline{u}(r) = ۴-(۱-r)۳ = ۳r+۱ \\ \overline{u}(r) = ۴+(۱-r)۳ = ۷-۳r \end{cases}$$

۱-۵-٦ تعریف اعمال حسابی روی اعداد فازی با استفاده از اصل گسترش: فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ اعدادفازی با توابع عضویت پیوسته باشند و $*: R\times R \to R$ عمل دو تایی بر اعدادحقیقی باشد اگر تعمیم * را برای اعداد فازی با $\odot$ نشان دهیم، با استفاده از اصل گسترش حاصل $\tilde{A}\odot\tilde{B}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود.

$$\mu_{\tilde{A}\odot\tilde{B}}(z) = \underset{z=x*y}{Sup}\left[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\right] \qquad (۱-۳٤)$$

بنابراین در حالت خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف فوق به صورتهای زیر است

جمع: $$\mu_{\tilde{A}\oplus\tilde{B}}(z) = \underset{z=x+y}{Sup}\left[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

تفریق: $$\mu_{\tilde{A}\Theta\tilde{B}}(z) = \underset{z=x-y}{Sup}\left[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

ضرب: $$\mu_{\tilde{A}\otimes\tilde{B}}(z) = \underset{z=x\times y}{Sup}\left[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

تقسیم: $$\mu_{\tilde{A}\oslash\tilde{B}}(z) = \underset{z=x\div y}{Sup}\left[\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\right]$$

چنانچه برش r از مجموعه فازی یک بازه بسته را به دست دهد آنگاه می توانیم حساب قبل در مورد اعدادفازی را با اعمال روی بازه ها جایگزین کنیم.

$$[a,b]*[c,d] = \{z \mid z = x*y \;,\; x\in[a,b] \;,\; y\in[c,d]\} \qquad (۱-۳۵)$$

هنگامی که + یا - را به جای عمل * جایگزین کنیم، به دست می آوریم:

$$[a,b]+[c,d] = [a+c, b+d]$$

$$[a,b]-[c,d] = [a-d, b-c] \qquad (۱-۳٦)$$

هر چند ضرب و تقسیم را مثل جمع و تفریق نمی توان در شکل کلی نوشت، اما اگر فرض کنیم که $a,b,c,d > ۰$ آنگاه می توانیم بنویسیم:

$$[a,b]\times[c,d]=[a\times c, b\times d]$$

$$[a,b]\div[c,d]=[a\div d, b\div c] \qquad (۳۷-۱)$$

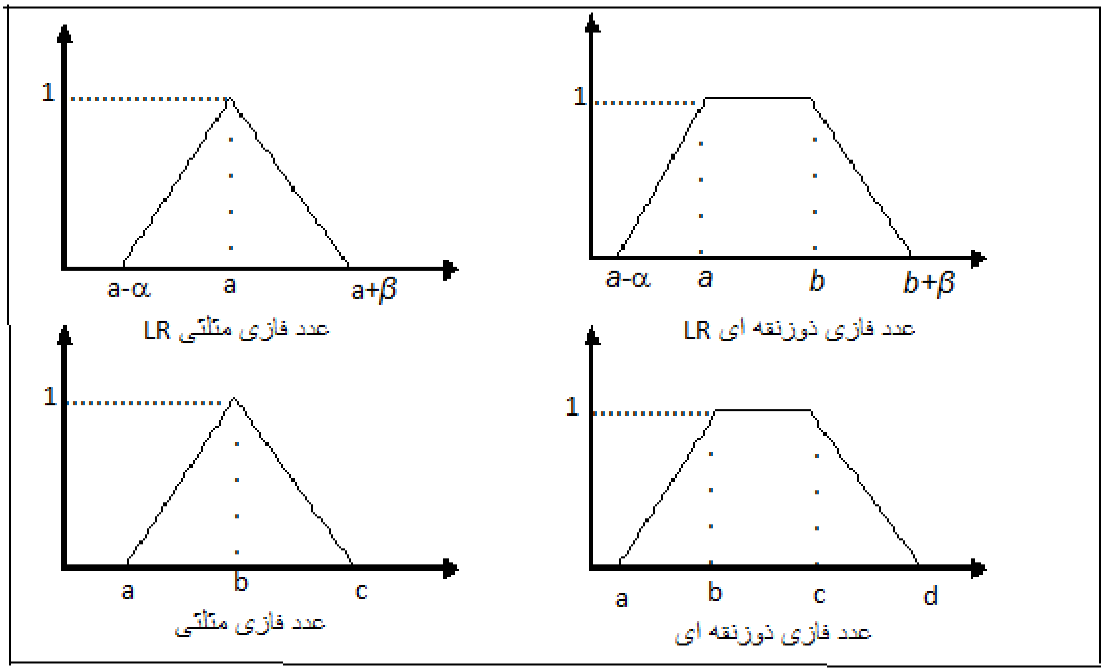
دقت کنید که در اعداد فازی عمل تفریق، عکس عمل جمع نیست، و همچنین عمل تقسیم، عکس ضرب نمی باشد. برای مثال، اگر از عددی خود آن عدد را کسر کنیم، حاصل صفر نیست بلکه عدد فازی «تقریبا صفر»است.

۱-٦ اعداد فازی خاص

کاربرد اعداد فازی واستفاده از اصل گسترش برای انجام عملیات برروی اعداد فازی مستلزم محاسبات پیچیده و طولانی است و این برای اهداف عملی مناسب نیست، چون هنگام استفاده از نظریه ی مجموعه های فازی، مانند هر نظریه ی دیگر، در مواجهه با مسایل عملی و کاربردی، کارآیی محاسباتی بسیار اهمیت دارد. بنابراین، اعداد فازی خاص برای کاهش حجم محاسباتی و ساده نمودن عملیات روی آنها پیشنهاد شده اند.

اعداد فازی مثلثی[۱] ، ذوزنقه ای[۲] ، مثلثی LR [۳]و ذوزنقه ای LR [٤]، از جمله اعداد فازی خاص می باشند که در مدلهای مختلف تصمیم گیری کاربردهای زیادی دارند. همانطور که می توانیم عدد فازی تقریباً a را به شکل مثلثی با مقدار یک در a نمایش دهیم، می توان با یک عدد فازی ذوزنقه ای، عدد در بازه بسته $[a,b]$ را نمایش داد. در ادامه به معرفی هریک ازاین اعداد می پردازیم.

1-Triangular fuzzy numbers
۲-Trapezoidal fuzzy numbers
۳- LR Triangular fuzzy numbers
۴- LR Trapezoidal fuzzy numbers



شکل (۱-۲) اعداد فازی خاص

۱-۶-۱ تعریف اعداد فازی مثلثی LR[1]: اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی به صورت زیر باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}), & x\le a\,,\ \alpha>0, \\ R(\frac{x-a}{\beta}), & x\ge a\,,\ \beta>0. \end{cases} \qquad (۱-۳۸)$$

که درآن L و R توابعی غیر افزایشی از $\mathbb{R}^+$ به $[0,1]$ و $L(0)=R(0)=1$ آنگاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی مثلثی LR نامیده و با نماد $\tilde{A}=(a,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان می دهند. a را میانگین یا میانه ، α و β را بترتیب پهنای چپ و راست $\tilde{A}$ می نامند. $\tilde{A}=(a,\alpha,\beta)_{LR}$ مثبت است اگر وتنها اگر $a-\alpha>0$ (به $L(1)=0$ توجه کنید). L و R توابع مرجع نامیده می شوند. از توابع مختلفی می توان برای $L(x)$ وبه طور مشابه برای $R(x)$، استفاده کرد. رایجترین آنها عبارتند از:

$$\begin{cases} L(x)=max(0,1-|x|^p) \quad (p>0), \\ L(x)=exp(-|x|^p) \quad (p>0), \\ L(x)=\frac{1}{1+|x|^p} \quad (p>0). \end{cases} \qquad (۱-۳۹)$$

1-Left and right fuzzy numbers

بدیهی است که در هر زمینه، باید توابع L و R مناسبی اختیار کرد. همچنین α و β میزان فازیت ویا کریسپ بودن عدد فازی $\tilde{A}=(a,\alpha,\beta)$ را اندازه می گیرند، هر قدر این دو مقدار بزرگتر باشند، $\tilde{A}$ بیشتر فازی می گردد. بنابراین عدد معمولی یا کریسپ ۲ را می توان به صورت $(۲,۰,۰)\equiv ۲$ نشان داد، که در آن $\alpha=\beta=۰$. همچنین $\tilde{۰}=(۰,۰,۰)$ را عدد فازی LR صفر می نامند. اگر $L(x)$ و $R(x)$ توابع خطی باشند آنگاه عدد فازی $\tilde{A}$، عدد فازی LR مثلثی شکل نامیده و به صورت $\tilde{A}=(a,\alpha,\beta)$ نشان می دهند.

۱-٦-۲ مثال : فرض کنید $L(x)=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$ و $R(x)=\frac{۱}{۱+۲|x|}$ و $a=۵$, $\alpha=۲$, $\beta=۳$ آنگاه

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L\left(\frac{۵-x}{۲}\right)=\frac{۱}{۱+(\frac{۵-x}{۲})^{۲}} & , \quad x\le ۵ \\ R\left(\frac{x-۵}{۲}\right)=\frac{۱}{۱+\left|\frac{۲(x-۵)}{۳}\right|} & , \quad x>۵ \end{cases}$$

$\tilde{A}$ به عدد فازی " تقریباً ۵ " تعبیر می شود.

۱-٦-۳ تعریف بازه های فازی یا اعداد فازی ذوزنقه ای LR:

هرگاه در تعریف عدد فازی بجای شرط تک نمایی بودن، تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ برای هر $x\in[a,b]$ (برای اعداد حقیقی b,a) در شرط $\mu_{\tilde{A}}(x)=۱$ صدق کند، آنگاه $\tilde{A}$ رایک بازه فازی یا عدد فازی ذوزنقه ای می گویند. در این عدد، بازه $[a,b]$ را هسته ی $\tilde{A}$ می نامند.

بنابراین مشابه اعدا فازی مثلثی LR، بازه فازی LR عبارت است ازیک بازه فازی که تابع عضویت آن به صورت زیر باشد.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L(\frac{a-x}{\alpha}) & ,x\in[a-\alpha,a] \\ ۱ & ,x\in[a,b] \\ R(\frac{x-b}{\beta}) & ,x\in[b,b+\beta] \\ ۰ & ,otherwise \end{cases} \qquad (۱-٤۰)$$

که در آن L و R توابعی هستند که در تعریف عدد فازی LR صدق می کنند. دراین حالت بازه فازی $\tilde{A}$ (عدد فازی شبه ذوزنقه ای LR) را با نماد $\tilde{A}=(a,b,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان می دهیم که در آن بازه $[a,b]$ را هسته، α و βرا بترتیب پهنای چپ و راست $\tilde{A}$ می گویند. اگر $L(x)$ و $R(x)$ توابع خطی باشند (یا

$(L(x)=R(x)=۱-x)$ آنگاه عدد فازی $\tilde{A}$، عدد فازی ذوزنقه ای LR نامیده و بصورت $\tilde{A}=(a,b,\alpha,\beta)$ نشان می دهند و واضح است که اگر $a=b$ باشد آنگاه $\tilde{A}=(a,\alpha,\beta)$ را عدد فازی مثلثی LR می نامند.

۱-٦-٤ اعمال حسابی بر روی اعداد فازی LR:

عملگرهای جبری برای اعداد فازی مثلثی LR و اعداد فازی ذوزنقه ای LR به طور مختصردر جدول صفحه بعد نوشته شده است.

اعمال جبری	اعداد فازی مثلثی LR $\tilde{A}=(a,\alpha,\beta)$ و $\tilde{B}=(b,\gamma,\delta)$	اعداد فازی ذوزنقه ای LR $\tilde{A}=(a,b,\alpha,\beta)$ و $\tilde{B}=(c,d,\gamma,\delta)$
$\tilde{A}=\tilde{B} \Leftrightarrow$	$a=b,\ \alpha=\gamma,\ \beta=\delta$	$a=c,\ b=d,\ \alpha=\gamma,\ \beta=\delta$
$\lambda\otimes\tilde{A}=$	$\begin{cases}(\lambda a,\lambda\alpha,\lambda\beta), & \lambda\geq ۰\\(\lambda a,-\lambda\beta,-\lambda\alpha), & \lambda<۰\end{cases}$	$\begin{cases}(\lambda a,\lambda b,\lambda\alpha,\lambda\beta), & \lambda\geq ۰\\(\lambda b,\lambda a,-\lambda\beta,-\lambda\alpha), & \lambda<۰\end{cases}$
$-\tilde{A}=$	$(-a,\beta,\alpha)_{RL}$	$(-b,-a,\beta,\alpha)_{RL}$
$\tilde{A}\oplus\tilde{B}=$	$(a+b,\alpha+\gamma,\beta+\delta)$	$(a+c,b+d,\alpha+\gamma,\beta+\delta)$
$\tilde{A}\Theta\tilde{B}=$	$(a-b,\alpha+\delta,\beta+\gamma)$	$(a-d,b-c,\alpha+\delta,\beta+\gamma)$
$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=$	$\begin{cases}(ab,a\gamma+b\alpha,a\delta+b\beta) & A>۰,B>۰\\(ab,a\gamma-b\beta,a\delta-b\alpha) & A>۰,B<۰\\(ab,b\alpha-a\delta,b\beta-a\gamma) & A<۰,B>۰\\(ab,-b\beta-a\delta,-b\alpha-a\gamma) & A<۰,B<۰\end{cases}$	$\begin{cases}(ac,bd,a\gamma+c\alpha,b\delta+d\beta) & A>۰,B>۰\\(bc,ad,b\gamma-c\beta,a\delta-d\alpha) & A>۰,B<۰\\(ad,bc,-a\delta+d\alpha,-b\gamma+c\beta) & A<۰,B>۰\\(bd,ac,-b\delta-d\beta,-a\gamma-c\alpha) & A<۰,B<۰\end{cases}$

جدول (۱ -۱) عملیات جبری روی اعداد فازی LR

۱-٦-٥ مثال: فرض کنید $L(x)=R(x)=۱-x$ (یعنی اعداد فازی مثلثی باشند) و $\tilde{A}=(۵,۳,۳)$ و $\tilde{B}=(۳,۲,۲)$ در این صورت:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}L\left(\frac{۵-x}{۳}\right)=\frac{x-۲}{۳} & , \quad x\leq ۵\\ R\left(\frac{x-۵}{۳}\right)=\frac{۸-x}{۳} & , \quad x>۵\end{cases} \quad , \quad \mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}L\left(\frac{۳-x}{۲}\right)=\frac{x-۱}{۲} & , \quad x\leq ۳\\ R\left(\frac{x-۳}{۲}\right)=\frac{۵-x}{۲} & , \quad x>۳\end{cases}$$

بنابراین $A \oplus B = (۸,۵,۵)$ و $A \Theta B = (۲,۵,۵)$ و تابع عضویت آنها به صورت زیر است:

$$\mu_{(\tilde{A}\oplus\tilde{B})}(x)=\begin{cases} L\left(\frac{۸-x}{۵}\right)=\frac{x-۳}{۵} & , \quad x\le ۸ \\ R\left(\frac{x-۸}{۵}\right)=\frac{۱۳-x}{۵} & , \quad x>۸ \end{cases} ,\mu_{(\tilde{A}\Theta\tilde{B})}(x)=\begin{cases} L\left(\frac{۲-x}{۵}\right)=\frac{x+۳}{۵} & , \quad x\le ۲ \\ R\left(\frac{x-۲}{۵}\right)=\frac{۷-x}{۵} & , \quad x>۲ \end{cases}$$

چونکه دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ هر دو مثبت هستند بنابراین $\tilde{A}\otimes\tilde{B} = (۱۵ \,,\, ۱۹ \,,\, ۱۹)$ وداریم:

$$\mu_{(\tilde{A}\otimes\tilde{B})}(x)=\begin{cases} L\left(\frac{۱۵-x}{۱۹}\right)=\frac{x+۴}{۱۹} & , \quad x\le ۱۵ \\ R\left(\frac{x-۱۵}{۱۹}\right)=\frac{۳۴-x}{۱۹} & , \quad x>۱۵ \end{cases}$$

۱-٦-٦ تعریف عدد فازی مثلثی: یک عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{A}=(a,b,c)$ نشان داده شده و توسط تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} \frac{x-b}{b-a} & ;a\le x\le b \\ \frac{x-c}{b-c} & ;b\le x\le c \\ ۰ & ;otherwise \end{cases} \qquad (۱-٤۱)$$

دراین رابطه a و c به ترتیب کران پائین وبالای عدد فازی $\tilde{A}$ می باشد. واضح است که عدد فازی مثلثی، نوع خاصی از عدد فازی مثلثی LR است که کرانهای آن خطی است و همچنین $\tilde{A}=(a,b,c)=(b,\alpha,\beta)$ که b هسته یا مرکز، $\alpha=b-a>۰$ و $\beta=c-b>۰$ به ترتیب پهنای چپ و راست عدد فازی $\tilde{A}$ نامیده می شوند. همچنین به آسانی می توان نشان داد که:

$$\left[\tilde{A}\right]^r=\left[br+a(۱-r),br+c(۱-r)\right]=\left[b-(۱-r)\alpha,b+(۱-r)\beta\right] \quad \forall r\in[۰,۱] \qquad (۱-٤۲)$$

و تکیه گاه آن به صورت $(a,c)=(b-\alpha,b+\beta)$ خواهد بود.

۱-۶-۷ تعریف عدد فازی ذوزنقه ای: عدد فازی ذوزنقه ای به صورت $\tilde{A}=(a,b,c,d)$ و با تابع عضویت زیر مشخص می شود.

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\frac{x-a}{b-a} & ;a\le x\le b\\ ۱ & ;b\le x\le c\\ \frac{x-d}{c-d} & ;c\le x\le d\\ ۰ & ;otherwise\end{cases} \qquad (۱-۴۳)$$

دراین رابطه a و d به ترتیب کران پائین وبالای عدد فازی $\tilde{A}$ و $[a,b]$ بازه میانی می باشد. واضح است که همانندعدد فازی مثلثی، این عدد نیز نوع خاصی از عدد فازی ذوزنقه ای LR هست که کرانهای آن خطی است وهمچنین $\tilde{A}=(a,b,c,d)=(b,c,\alpha,\beta)$ که $\alpha=b-a>۰$ و $\beta=d-c>۰$ به ترتیب پهنای چپ و راست عدد فازی $\tilde{A}$ نامیده می شود. همچنین به آسانی می توان نشان داد که برای تمامی اعداد حقیقی r متعلق به $[۰,۱]$:

$$\left[\tilde{A}\right]^{r}=[br+a(۱-r),cr+d(۱-r)]=[b-(۱-r)\alpha,c+(۱-r)\beta] \qquad (۱-۴۴)$$

و تکیه گاه آن به صورت $(a,d)=(b-\alpha,c+\beta)$ خواهد بود.

بنابراین تاکنون چهار شکل خاص از اعداد فازی را معرفی نمودیم. هریک از این اعداد فازی فرمولهای عملیات جبری خاصی نیز دارد که باتوجه به نیاز رساله، جدول (۱-۱) این فرمولها را برای اعداد فازی LR خلاصه نمود وبرای اعداد فازی خاص دیگر یعنی مثلثی وذوزنقه ای می توان به منبع [۴] مراجعه نمود.

۱-۶-۸ مثال [۶]: فرض کنید $\tilde{A}=(-۱,۱,۳)$ و $\tilde{B}=(۱,۳,۵)$ دوعدد فازی مثلثی با توابع عضویت زیر باشند:

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\frac{x-۱}{۲} & ;۱\le x\le ۳\\ \frac{۵-x}{۲} & ;۳\le x\le ۵\\ ۰ & ;otherwise\end{cases} \quad \text{و} \quad \mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\frac{x+۱}{۲} & ;-۱\le x\le ۱\\ \frac{۳-x}{۳} & ;۱\le x\le ۳\\ ۰ & ;otherwise\end{cases}$$

آنگاه $\tilde{A}+\tilde{B}=(۰,۴,۸)$ و $\tilde{A}-\tilde{B}=(-۶,-۲,۲)$ با توابع عضویت زیر خواهند بود:

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+6}{4} & ;-6\le x\le -2\\ \dfrac{2-x}{4} & ;-2\le x\le 2\\ 0 & ;otherwise\end{cases} \quad \text{و} \quad \mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{4} & ;0\le x\le 4\\ \dfrac{8-x}{4} & ;4\le x\le 8\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

همچنین $\tilde{A}.\tilde{B}=(-5,3,15)$ و $\tilde{A}/\tilde{B}=(-1,1/3,3)$ با توابع عضویت زیر می باشند:

$$\mu_{\tilde{A}/\tilde{B}}(x)=\begin{cases}(x+1)/(2-2x) & ;-1\le x\le 0\\ (5x+1)/(2x+2) & ;0\le x\le 1/3\\ (3-x)/(2x+2) & ;1/3\le x\le 3\\ 0 & ;otherwise\end{cases} \quad \text{و} \quad \mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\left[3-(4-x)^{1/2}\right]/2 & ;-5\le x\le 0\\ (1+x)^{1/2}/2 & ;0\le x\le 3\\ \left[4-(1+x)^{1/2}\right]/x & ;3\le x\le 15\\ 0 & ;otherwise\end{cases}$$

همانطور که مشاهده می شود حاصلضرب و خارج قسمت دوعدد فازی مثلثی با طرفین خطی یک عدد فازی مثلثی با طرفین خطی نخواهد بود. بنابراین ضرب وتقسیم اعداد فازی شکل عمل را حفظ نمی کند یعنی حاصلضرب و خارج قسمت دو عدد فازی مثلثی (ذوزنقه ای) یک عدد فازی مثلثی (ذوزنقه ای) نیست. بن و بده[1] در [۲۷,۲۶] یک ضرب جدید به نام ضرب برداری[2] یا خارجی معرفی نمودند که شکل عمل را حفظ می کرد یعنی حاصلضرب و خارج قسمت دو عدد فازی مثلثی (ذوزنقه ای) یک عدد فازی مثلثی (ذوزنقه ای) است. در بخش بعدی این ضرب را تعرف می کنیم.

۱-۷ ضرب برداری (خارجی) اعداد فازی:

در این بخش عمل جدیدی بنام ضرب برداری روی مجموعه اعداد فازی مثبت یا منفی به نام $R_F^*=\{\tilde{u}\in R_F : \tilde{u}$ مثبت یا منفی باشد $\}$ معرفی می کنیم. قبل از تعریف به مقدمات زیر نیاز داریم:

۱-۷-۱ تعریف: عدد فازی $\tilde{u}\in R_F$ مثبت (منفی) گفته می شود هرگاه $\underline{u}^1\ge 0$ $(\overline{u}^1\le 0)$ باشد همچنین این عدد اکیداً مثبت (منفی) است هرگاه $\underline{u}^1>0$ $(\overline{u}^1<0)$ باشد. اعداد فازی $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ هم علامت هستند هرگاه هردو مثبت یا هردو منفی باشند. واضح است که اگر $\tilde{u}$ مثبت (منفی) باشد آنگاه $-\tilde{u}$ منفی (مثبت) خواهد بود.

1-Ban and Bede
۲-cross product

فرض کنید $\tilde{u},\tilde{v}\in R_F$، اگر برای هر $r\in[0,1]$، $\underline{u}^r\le\underline{v}^r$ و $\overline{u}^r\le\overline{v}^r$ باشند آنگاه $u\prec v$ خواهد بود. همچنین $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ به نسبت عدد صفر هم علامت گفته می شوند هرگاه $u\succ 0$ و $v\succ 0$ یا $u\prec 0$ و $v\prec 0$ باشند [۲۷,۲۶].

۱-۷-۲ قضیه: اگر $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ اعداد فازی مثبت باشند آنگاه $\tilde{w}=\tilde{u}\otimes\tilde{v}$ عدد فاز ی مثبتی است که برای هر $r\in[0,1]$، $[\tilde{w}]^r=[\underline{w}^r,\overline{w}^r]$ خواهد بود و:

$$\begin{cases}\underline{w}^r=\underline{u}^r\underline{v}^1+\underline{u}^1\underline{v}^r-\underline{u}^1\underline{v}^1\\ \overline{w}^r=\overline{u}^r\overline{v}^1+\overline{u}^1\overline{v}^r-\overline{u}^1\overline{v}^1\end{cases} \qquad (۱-٤٥)$$

اثبات: به منبع [۲۶]مراجعه شود.

۱-۷-۳ نتیجه [۲۶]: فرض کنید $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ دوعدد فازی باشند:

الف) اگر $\tilde{u}$ مثبت و $\tilde{v}$ منفی باشد آنگاه $\tilde{u}\otimes\tilde{v}=-(\tilde{u}\otimes(-\tilde{v}))$ یک عدد فازی منفی خواهد بود.

ب) اگر $\tilde{u}$ منفی و $\tilde{v}$ مثبت باشد آنگاه $\tilde{u}\otimes\tilde{v}=-((-\tilde{u})\otimes\tilde{v})$ یک عدد فازی منفی است.

ج) اگر $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ هر دو منفی باشند آنگاه $\tilde{u}\otimes\tilde{v}=(-\tilde{u})\otimes(-\tilde{v})$ عدد فازی مثبتی می باشد.

حال بن و بده ضرب برداری را به صورت زیر تعریف نمودند:

۱-۷-٤ تعریف (ضرب برداری): عمل دوتایی $\otimes$، معرفی شده روی R_F^*، در قضیه ۲-۷-۲ و نتیجه ۲-۷-۳ ضرب برداری دوعدد فازی نامیده می شود.

۱-۷-۵ تبصره ها:

۱- ضرب برداری برای هر عدد فازی در $R_F^{\wedge}=\{\tilde{u}\in R_F^*;$ نرمال باشد $\tilde{u}\}$، نیز تعریف می شود بنابراین می توان از این عمل جدید برای ضرب اعداد فازی مثلثی استفاده نمود.

۲- فرمولهای زیر به آسانی برای هر $r\in[0,1]$ اثبات می شوند:

$$\underline{w}^r=\begin{cases}\overline{u}^r\underline{v}^1+\overline{u}^1\underline{v}^r-\overline{u}^1\underline{v}^1, & \underline{u}^1\ge 0,\overline{v}^1\le 0,\\ \underline{u}^r\overline{v}^1+\underline{u}^1\overline{v}^r-\underline{u}^1\overline{v}^1, & \underline{u}^1\le 0,\overline{v}^1\ge 0,\\ \overline{u}^r\overline{v}^1+\overline{u}^1\overline{v}^r-\overline{u}^1\overline{v}^1, & \underline{u}^1\le 0,\overline{v}^1\le 0.\end{cases} \qquad (۱-٤٦)$$

و

$$\overline{w}^r = \begin{cases} \underline{u}^r\overline{v}^1 + \underline{u}^1\overline{v}^r - \underline{u}^1\overline{v}^1, & \underline{u}^1 \geq 0, \overline{v}^1 \leq 0, \\ \overline{u}^r\underline{v}^1 + \overline{u}^1\underline{v}^r - \overline{u}^1\underline{v}^1, & \underline{u}^1 \leq 0, \overline{v}^1 \geq 0, \\ \underline{u}^r\underline{v}^1 + \underline{u}^1\underline{v}^r - \underline{u}^1\underline{v}^1, & \underline{u}^1 \leq 0, \overline{v}^1 \leq 0. \end{cases} \qquad (۱-۴۷)$$

۳- ضرب برداری توسعه یافته ضرب اسکالر اعداد فازی است. در حقیقت اگر یکی از عملوندها عدد حقیقی k باشد (که برای هر $r \in [0,1]$ ، $\underline{k}^r = \overline{k}^r = k$)آنگاه فرمولهای بالا براحتی نتیجه می شوند.

خواص زیر، بعضی از خواص جبری ضرب برداری می باشند:

۱-۷-۶ قضیه: اگر $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w} \in R_F^*$ باشند آنگاه:

الف) $(-\tilde{u}) \otimes \tilde{v} = u \otimes (-\tilde{v}) = -(\tilde{u} \otimes \tilde{v})$

ب) $\tilde{u} \otimes \tilde{v} = \tilde{v} \otimes \tilde{u}$

ج) $(\tilde{u} \otimes \tilde{v}) \otimes \tilde{w} = \tilde{u} \otimes (\tilde{v} \otimes \tilde{w})$

د) اگر $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ هم علامت باشند آنگاه $(\tilde{u} \oplus \tilde{v}) \otimes \tilde{w} = (\tilde{u} \otimes \tilde{w}) \oplus (\tilde{v} \otimes \tilde{w})$

ر) برای هر عدد طبیعی n، $(\tilde{u} \otimes \tilde{v})^{\otimes n} = (\tilde{u})^{\otimes n} \otimes (\tilde{v})^{\otimes n}$ خواهد بود که برای هر $\tilde{u} \in R_F^*$، $(\tilde{u})^{\otimes n} = \overbrace{\tilde{u} \otimes \cdots \otimes \tilde{u}}^{n}$ خواهد بود [۲۶].

فصل دوم

دستگاه معادلات خطی

۲-۱ مقدمه

امروزه با پیشرفت روز افزون علوم و الگو آفرینیهای کامپیوتر، بسیاری از مسائل کاربردی و تحقیقات عملی در ابعادی وسیع، ذهن بشر رابه خود مشغول نموده است. حجم عظیمی ازاین مسائل توسط متخصصان واهل فن مدل بندی شده ودر غالب الگوریتمها ارائه شده اند. یکی از ابزارهای کارآمد که دراکثر این مسائل نقش به سزایی را ایفا می کند، حل دستگاههای معادلات، اعم از خطی و غیر خطی، دستگاههای معادلات با مشتقات جزئی و ... می باشد.

در این فصل ابتدا در بخش دوم دستگاه معادلات خطی را در حالت دستگاه معادلات خطی غیر مربعی (دستگاه معادلات خطی مربعی) معرفی کرده و سپس با استفاده از ماتریس شبه وارون (وارون) آنها را حل می کنیم. در بخش آخر نیز روشهای عددی همچون روش تکراری ژاکوبی و روش تجزیه آدومین را برای حل دستگاههای معادلات خطی مربعی ارائه می دهیم.

۲-۲ دستگاه معادلات خطی

یک دستگاه معادلات خطی با m معادله خطی و n مجهول به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} a_{۱۱}x_{۱}+a_{۱۲}x_{۲}+\cdots+a_{۱n}x_{n}=b_{۱}, \\ a_{۲۱}x_{۱}+a_{۲۲}x_{۲}+\cdots+a_{۲n}x_{n}=b_{۲}, \\ \quad\vdots \qquad\qquad \ddots \\ a_{m۱}x_{۱}+a_{m۲}x_{۲}+\cdots+a_{mn}x_{n}=b_{m}. \end{cases} \tag{۱-۲}$$

این دستگاه معرف یک دستگاه معادلات خطی $m\times n$ است، که درآن برای $i=۱,\dots,m$ و $j=۱,\dots,n$ ، a_{ij} ها و b_i ها مقادیر ثابت معین (که در این بخش اعداد حقیقی) و x_jها مجهولاتی هستند که باید تعیین گردند. حال منظور از جواب دستگاه فوق مجموعه اعداد حقیقی $x_{۱},x_{۲},\dots,x_{n}$ می باشند که به طور کلی همزمان در m معادله بالا صدق کنند.

ماتریسها برای نمایش دستگاههای معادلات وسایل مفیدی هستند پس می توانند برای توصیف آنها به کار روند. لذا دستگاه (۲-۱) به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ \vdots \\ x_{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{۱} \\ b_{۲} \\ \vdots \\ b_{m} \end{bmatrix} \tag{۲-2}$$

پس اگر این ماتریسها را به ترتیب از چپ به راست با A ، x و b نشان دهیم آنگاه می توان دستگاه (۲-۱) را به صورت معادله ماتریسی $Ax=b$ نمایش داد. در این نمایش ماتریس A را ماتریس ضرایب که می تواند مربعی $(m=n)$ و غیر مربعی یا مستطیلی $(m\neq n)$ باشد و بردارهای x و b را به ترتیب بردار مجهولات و بردار مقادیر ثابت سمت راست می نامند. دستگاه (۲-۱) را می توان با صرفنظر کردن از مجهولات و فقط با در نظر گرفتن ضرایب به صورت زیر نمایش داد.

$$\left[A\,|b\right]=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \dots & a_{۱n} & b_{۱} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \dots & a_{۲n} & b_{۲} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \dots & a_{mn} & b_{m} \end{array}\right] \tag{۳-۲}$$

این ماتریس را ماتریس افزوده[1] دستگاه می نامند، که هر سطر آن بیان کننده یکی از معادلات خطی می باشد.

1-Augmented Matrix

درارابطه با دستگاه معادلات خطی (۲-۱) پرسشی که مطرح می گردد آن است که آیا جوابی برای این مجموعه معادلات وجود دارد یا نه ودر صورت وجود جواب منحصر بفرد است یا خیر. در کل برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ اگر ماتریس ضرایب A مربعی ونامنفرد باشد روشهای زیادی مانند استفاده از ماتریس مربعی، دستور کرامر، روشهای عددی و... وجود دارند با این حال، در موقعیتهای عملی نیاز به حل دستگاهی هستیم که ماتریس A غیرمربعی (مستطیلی) ویا منفرد باشد دراین حات ممکن است دستگاه جواب نداشته باشد ویا دارای بی شمار جواب باشد بنابراین در فرایند حل این دستگاه امکان رخ داد حالتهای زیر وجود دارد:

الف) حالتی که دستگاه بدون جواب یا ناسازگار[۱] است.
ب) حالتی که دستگاه سازگار[۲] است وجواب دارد که در اینصورت امکان دارد فقط یک جواب منحصر بفرد یا اینکه بی شمار جواب داشته باشد.

باتوجه به مطالب بالا می توان در یک دستگاه معادلات خطی $m \times n$ که m تعداد معادلات و n تعداد مجهولات باشد حالتهای زیر را در نظر گرفت:

۱- حالت $m = n$ (دستگاه مربعی): دراین حالت دستگاه را همواره معین[۳] می گویند ومی توان نوشت:

الف) اگر ماتریس ضرایب A نامنفرد باشد آنگاه دستگاه معادلات سازگار ویک جواب منحصر بفرد دارد.

ب) اگر ماتریس ضرایب A منفرد و دستگاه سازگارباشد آنگاه دستگاه معادلات بی شمار (نامتنهایی) جواب داشته وبرای بدست آوردن یک جواب معین می توان از روش جواب کمترین نرم[٤] (جواب مینیمال) استفاده نمود.

ج) اگر ماتریس ضرایب A منفرد و دستگاه ناسازگارباشد آنگاه دستگاه معادلات اصلاً جواب نداشته وبرای بدست آوردن یک جواب تقریبی از روش جواب حداقل مربعات[٥] استفاده می شود.

۲- حالت $m < n$ (دستگاه غیر مربعی یا مستطیلی): دراین حالت دستگاه را فرو معین[۱] گویند. این گونه دستگاهها می تواند بی شمار جواب داشته باشد که برای بدست آوردن یک جواب معین می توان از روش جواب مینیمال استفاده نمود.

۱- Inconsistent
۲- Consistent
۳- Everdetermined
4- Minimum Norm Solution
5- Least Square Solution

۳- حالت $m > n$ (دستگاه غیر مربعی یا مستطیلی): دراین حالت دستگاه را فرا معین[۲] گویند. چنین دستگاههایی در صورت سازگار بودن می توانند یک جواب منحصر بفرد داشته باشند و در صورت ناسازگار بودن اصلاً جوابی نداشته وبرای بدست آوردن یک جواب تقریبی از روش حداقل مربعات استفاده می شود.

۲-۲-۱ نکته: دراین پایان نامه، به اختصار باتوجه به ماتریس A چهارحالت زیر از دستگاه معادلات خطی $m \times n$ ، $Ax = b$ را در نظر می گیریم:

الف) دستگاه مربعی با ماتریس ضرایب رتبه کامل ($m = n$ و $n = rank(A)$)،

ب) دستگاه فرومعین با ماتریس ضرایب رتبه کامل سطری ($m < n$ و $m = rank(A)$)،

ج) دستگاه فرامعین با ماتریس ضرایب رتبه کامل ستونی ($m > n$ و $n = rank(A)$)،

د) دستگاه در حالت کلی ($rank(A) = k \le \min(m,n)$).

در ادامه برخی از مفاهیم مورد نیاز را تعریف می کنیم.

۲-۲-۲ تعریف (رتبه سطری وستونی): فرض کنید A یک ماتریس $m \times n$ باشد در اینصورت به ماکسیمم تعداد سطرهای (ستونهای) مستقل خطی آن ماتریس، رتبه سطری (ستونی) آن ماتریس گویند.

۲-۲-۳ قضیه: رتبه سطری و رتبه ستونی یک ماتریس مانند A باهم برابرهستند [۲].

۲-۲-٤ تعریف (رتبه ماتریس): رتبه ماتریس A ، که با $rank(A)$ نشان داده می شود عبارت از مقدار مشترک رتبه سطری ورتبه ستونی آن ماتریس می باشد.

۲-۲-۵ نتیجه: رتبه یک ماتریس برابر با ماکسیمم تعداد سطرها یا ستونهای مستقل خطی آن ماتریس خواهد بود.

۲-۲-٦ قضیه: دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ سازگار است اگر وتنها اگر رتبه ماتریس افزوده $[A|b]$ و ماتریس A با هم برابر باشند. در غیر اینصورت یعنی اگررتبه ماتریس افزوده $[A|b]$ بیشتر از رتبه ماتریس A باشد آنرا ناسازگار می گویند دراین حالت بردار b را نمی توان به صورت هیچ ترکیب خطی از ستونهای A نوشت، بنابراین دستگاه دارای جواب نیست [۲].

1- Underdetermined
2- Overdetermined

۲-۲-۷ نتیجه: اگر A یک ماتریس $m \times n$ از رتبه m باشد آنگاه دستگاه $Ax = b$ سازگار است.

۲-۲-۸ تعریف: اگر دترمینان ماتریس مربعی A برابر صفر باشد آنرا منفرد ودر غیر اینصورت آن را نامنفرد می گویند.

۲-۲-۹ تعریف (جواب کمترین نرم یا مینیمال): دستگاه معادلات خطی فرو معین $m \times n$، $Ax = b$ را درنظر بگیرید. برای حل چنین دستگاهی اغلب لازم است xای را بیابیم که $\|x\|_2$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد که این جواب را جواب با کمترین نرم اقلیدسی یا جواب مینیمال این دستگاه می گویند. بنابرین جواب مینیمال دستگاه فرومعین معادل با حل مسأله $\text{minimize}\{\|x\|_2 : Ax = b\}$ می باشد.

۲-۲-۱۰ تعریف (جواب حداقل مربعات[۴۰]): فرض کنید که بردار $\varepsilon = \varepsilon(x) = Ax - b$ بردار ماندهٔ دستگاه معادلات خطی ناسازگار $m \times n$ ، $Ax = b$ باشد. چونکه این دستگاه دارای جواب نیست پس هدف کلی مسأله حداقل مربعات یافتن بردار xای است که مقدار عبارت زیر را مینیمم کند:

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \varepsilon = (Ax - b)^T (Ax - b) \qquad (۲-٤)$$

دراین صورت به هربرداری که کمترین مقدار این عبارت را فراهم کند، جواب حداقل مربعات دستگاه گویند.

روشهای متعددی برای به دست آوردن جواب دستگاههای معادلات خطی فرو معین وفرا معین وجود دارد. اما جواب مینیمال و جواب حداقل مربعات آن دسته از دستگاه معادلات خطی فرو معین وفرا معین که دارای رتبه کامل سطری و ستونی (به ترتیب باشند) را می توان با شبه وارون[۱] به دست آورد. محاسبه شبه وارون پیچیده است اما در نرم افزار *MATLAB* با استفاده از تابع *pinv* می توان آن رامحاسبه کرد. بنابراین می توان گفت که یکی از کاربردهای شبه وارون دربدست آوردن جوابهای تقریبی دستگاه معادلات خطی غیر مربعی است.

۲-۲-۱۱ تعریف (شبه وارون[۴۰،۲۹،۹]): شبه وارون هر ماتریس $A = (a_{ij})_{m\times n}$ (رتبه کامل باشد یانه) یک ماتریس A^+ از مرتبه $n \times m$ است که در شرایط زیر بعد صدق کند:

۱- چونکه ماتریسهای مستطیلی وارون و دترمینان ندارند لذا برای آنها، وارونی به نام وارون تعمیم یافته توسط چندین مؤلف تعریف شده است که یکی از آنها را شبه وارون یا وارون مور- پنرُز می نامند.

$$AA^{+}A = A,\ A^{+}AA^{+} = A^{+}, (AA^{+})^{T} = AA^{+},\ (A^{+}A)^{T} = A^{+}A \qquad (۲-۵)$$

ماتریس شبه وارون A^{+} منحصر بفرد و همیشه موجود است (هرگاه ماتریس A ، ماتریس مختلطی باشد $(.)^{*}$ جایگزین $(.)^{T}$ می شود).

۲-۲-۱۲ تعریف [۲۹]: ماتریس $A^{+} = (A^{T}A)^{-1}A^{T}$ شبه وارون ماتریس A نامیده می شود در صورتی که A یک ماتریس $m\times n$ $(m \geq n)$ با رتبه n باشد. همچنین ماتریس $A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1}$ شبه وارون ماتریس A نامیده می شود در صورتی که A یک ماتریس $m\times n$ $(m < n)$ با رتبه m باشد.

دستگاه معالات خطی فرو معین دارای جوابهای بی شماری است که مجموعه کامل از جوابها یا جواب عمومی آن را می توان به صورت زیر بدست آورد.

۲-۲-۱۳ نتیجه [۲۹]: فرض کنید $Ax = b$ یک دستگاه فرو معین باشد آنگاه مجموعه جواب (جواب عمومی) آن برای هر بردار دلخواه $h \in R^{n\times 1}$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$x = A^{T}(AA^{T})^{-1}b + (I - A^{T}(AA^{T})^{-1}A)h = A^{+}b + (I - A^{+}A)h \qquad (۲-۶)$$

۲-۲-۱٤ قضیه: فرض کنید ماتریس A از مرتبه $m\times n$ $(m < n)$ و رتبه کامل سطری باشد آنگاه جواب مینیمال x برای دستگاه $Ax = b$ به صورت $x = A^{T}(AA^{T})^{-1}b = A^{+}b$ خواهد بود.

اثبات: به منبع [۲۹] مراجعه شود.

۲-۲-۱۵ لم [۲۹]: بردار x جواب حداقل مربعات دستگاه $Ax = b$ است اگروتنها اگر x در معادلات نرمال $A^{T}Ax = A^{T}b$ صدق کند.

هرگاه دریک دستگاه معادلات خطی $m\times n$، ماتریس ضرایب رتبه کامل نباشد آنگاه برای بدست آوردن جواب آن، نمی توان از نتایج فوق استفاده نمود. در این حالت ماتریس شبه وارون بوسیله تجزیهٔ مقدار منفرد[1] و به صورت زیر محاسبه می شود.

۲-۲-۱٦ قضیه (تجزیهٔ مقدار منفرد): فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ بارتبه k $(0 < k \leq min(m,n)\ ,\ rank(A) = k)$ باشد آنگاه:

1- singular value decomposition (SVD)

الف) یک ماتریس متعامد $m \times m$، U و یک ماتریس متعامد $n \times n$، V و یک ماتریس شبه قطری $m \times n$، $\Sigma = diag(\sigma_۱, \sigma_۲, \cdots, \sigma_k, ۰, \cdots, ۰)$ با $\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \cdots \geq \sigma_k > ۰$ وجود دارد که می توان ماتریس A را به صورت $A = U \Sigma V^T$ نوشت (به این نوع از تجزیه ماتریس A، تجزیه مقدار منفرد A گویند).

ب) $\sigma_i^۲$ها عبارتند از مقادیر ویژه $A^T A$ (هرگاه $n > m$، با چند صفر اضافه) و بردارهای ویژهٔ نظیر آنها، v_i ها یعنی ستونهای ماتریس V هستند. همچنین $\sigma_i^۲$ها مقادیر ویژه AA^T (هرگاه $m > n$، با چند صفر اضافه) و بردارهای ویژهٔنظیر آنها ستونهای ماتریس U می باشند.

σ_iها مقادیر منفرد A، u_iها بردارهای ویژهٔ چپ A و v_i ها بردارهای ویژهٔ راست A می باشند و برای $۱ \leq i \leq k$ بین u_i و v_i رابطه $A v_i = \sigma_i u_i$ برقرار است.

اثبات: به مرجع [۹] رجوع شود.

۲-۲-۱۷ نکته: یکی از کاربردهای مقادیر منفرد تعیین رتبه ماتریس است. رتبه یک ماتریس برابر با تعداد مقادیر منفرد غیر صفر آن ماتریس می باشد [۹].

۲-۲-۱۸ مثال: ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ را به کمک مقادیر منفردش تجزیه کنید.

باتوجه به ماتریس A، $A^T A = \begin{bmatrix} ۹ & ۹ \\ ۹ & ۹ \end{bmatrix}$ است وبنابراین $\sigma_۱^۲ = ۱۸$ و $\sigma_۲^۲ = ۰$ مقادیر ویژه آن خواهند بود. همچنین $\sigma_۱ = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$ و $\sigma_۲ = ۰$ مقادیر منفرد A خواهند بود.

بردارهای ویژهٔ نرمال شده متناظر $\sigma_۱^۲$و $\sigma_۲^۲$ عبارتند از:

$$v_۱ = \left[\sqrt{۲}/۲ \quad \sqrt{۲}/۲ \right]^T \quad , \quad v_۲ = \left[\sqrt{۲}/۲ \quad -\sqrt{۲}/۲ \right]^T$$

که می توان ماتریس متعامد $V = [v_۱ \quad v_۲]$ را بدست آورد.

به طور مشابه $AA^T = \begin{bmatrix} ۲ & ۸ & ۴ \\ ۴ & ۸ & ۸ \\ ۴ & ۸ & ۸ \end{bmatrix}$ و دارای مقادیر ویژه $\sigma_۱^۲ = ۱۸$ و $\sigma_۲^۲ = ۰$ و $\sigma_۳^۲ = ۰$ است. بردارهای ویژه نرمال شده نظیراین سه مقدار $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ هستند که می توان ماتریس U را به صورت زیرنوشت.

$$U=[u_۱ \quad u_۲ \quad u_۳]=\begin{bmatrix} ۱/۳ & -۲\sqrt{۵}/۵ & ۲\sqrt{۵}/۱۵ \\ ۲/۳ & \sqrt{۵}/۵ & ۴\sqrt{۵}/۱۵ \\ ۲/۳ & ۰ & -\sqrt{۵}/۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین تجزیه مقادیر منفرد ماتریس A به صورت زیر خواهد بود:

$$U\Sigma V^T=\begin{bmatrix} ۱/۳ & -۲\sqrt{۵}/۵ & ۲\sqrt{۵}/۱۵ \\ ۲/۳ & \sqrt{۵}/۵ & ۴\sqrt{۵}/۱۵ \\ ۲/۳ & ۰ & -\sqrt{۵}/۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{۲}/۲ & \sqrt{۲}/۲ \\ \sqrt{۲}/۲ & -\sqrt{۲}/۲ \end{bmatrix}=A$$

۲-۲-۱۹ قضیه: باتوجه به مفروضات قضیه قبل اگر ماتریس A به صورت $A=U\Sigma V^T$ تجزیه شود آنگاه شبه وارون ماتریس A به صورت $A^+=V\Sigma^+U^T$ خواهد بود که در آن $\Sigma^+=diag(۱/\sigma_۱,۱/\sigma_۲,\cdots,\sigma_k,۰,\cdots,۰)$، یک ماتریس شبه قطری از مرتبه $n\times m$ است.

ماتریس شبه معکوس A^+ را به روش دیگری نیز می توان بدست آورد.

اثبات: به منابع [۲۹,۴۰] مراجعه شود.

۲-۲-۲۰ نکته: همیشه دوماتریس $C_{m\times k}$ و $D_{k\times n}$ از رتبه k وجود دارند به طوری که اگر $A=CD$ باشد آنگاه [۲۹,۴۰]:

$$A^+=D^T(DD^T)^{-۱}(C^TC)^{-۱}C^T \qquad (۲-۷)$$

۲-۲-۲۱ نتیجه: برای دستگاه معادلات خطی سازگار (ناسازگار) $A_{m,n}x_n=b_m$ جواب $x=A^+b$، جواب کمترین نرم اقلیدسی (جواب حداقل مربعات از کمترین نرم اقلیدسی) است [۴۰] . همچنین هر شبه وارون A^+ از ماتریس ضرایب A برای هر چهار حالت نکته ۲-۲-۱ به طورخلاصه به صورت زیر نوشته می شود:

$$A^+=\begin{cases} A^{-۱} & ;\quad m=n=rank(A) \\ A^T(AA^T)^{-۱} & ;\quad n>m=rank(A) \\ (A^TA)^{-۱}A^T & ;\quad m>n=rank(A) \\ \sum_{i=۱}^{k}\left(u_i^Tb/\sigma_i\right)v_i & ;rank(A)=k\le\min(m,n) \end{cases} \qquad (۲-۸)$$

۲-۳ حل عددی دستگاه معادلات خطی مربعی

اصولاًحل عددی دستگاه معادلات خطی مربعی به دو روش مستقیم وتکراری انجام می گیرد. در روشهای مستقیم، جواب دستگاه بعد از تعدادی معین از اعمال حساب می شود. همچنین تنها خطای موجود در این روشها خطای ناشی از گرد کردن اعداد در ماشین می باشد. اما در روشهای تکراری دنباله ای از بردارها ساخته می شود که به جواب دستگاه همگرا باشند. مسلماً خطای موجود در این گونه روشها نه تنها ناشی از خطای گرد کردن است بلکه ناشی از خطای برشی نیز می باشد.

در این بخش برای حل دستگاه معادلات خطی مربعی دو روش عددی، یکی به نام روش تکراری ژاکوبی و دیگری روش تجزیه آدومین را معرفی می کنیم. ابتدا روش های تکراری را درحالت کلی مورد بحث قرار می دهیم.

۲-۳-۱ روشهای تکراری

در بسیاری از مسائل کاربردی و بالاخص در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غالباً نیاز به حل دستگاههای خطی می شود که تعداد زیادی از ضرایب آن صفر می باشند. در این گونه موارد روشهای تکراری رابه کار می بریم. یکی از نتایج اصلی این روشها عدم تجمیع خطای گرد کردن است. این گونه خطا فقط ممکن است در آخرین مرحله وجود داشته باشد.

برای حل دستگاه مربعی $n\times n$، $Ax=b$ به روش تکراری ، با یک تقریب اولیه $x^{(0)}$ برای جواب x شروع کرده و سپس دنباله ای از بردارهای $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ تولید می کند که به بردار x همگرا باشد.

در عمل، ماتریس مربعی A به صورت $A=Q-P$ تجزیه می شود که در آن ماتریس Q، یک ماتریس $n\times n$ معکوس پذیربوده و می توان نوشت:

$$AX=b\Rightarrow(Q-P)X=b\Rightarrow QX=PX+b\Rightarrow X=Q^{-1}PX+Q^{-1}b \qquad (۲-۹)$$

وبا تعریف کردن $T=Q^{-1}P$ و $c=Q^{-1}b$ معادله بالا به صورت $X=TX+c$ نوشته می شود.

که اگر فرم تکراری این رابطه را بنویسیم به ازای $k=0,1,2,\dots$ خواهیم داشت:

$$X^{(k+1)}=TX^{(k)}+c \qquad (۲-۱۰)$$

که ماتریس T را ماتریس تکرار و معمولاً بردار $X^{(0)}$ را، بردار آغازین یا اولیه تعریف می کنند.

بنابراین اکثر روشهای تکراری شامل فرایندی است که دستگاه $Ax=b$ را به دستگاهی معادل آن به شکل $X=TX+c$ تبدیل می کند. با انتخاب بردار اولیه $X^{(0)}$، دنباله بردارهای تقریب به جواب با محاسبه $X^{(k+1)}=TX^{(k)}+c$ به ازای $k=0,1,2,\dots$ تولید می شود.

۲-۳-۲ خطای روش های تکراری:

فرض کنید که $E^{(k+1)}=X-X^{(k+1)}$ خطا در مرحله $k+1$ ام باشد بنابراین داریم:

$$\begin{cases} X=TX+c \\ X^{(k+1)}=TX^{(k)}+c \end{cases} \Rightarrow X-X^{(k+1)}=T(X-X^{(k)}) \Rightarrow E^{(k+1)}=TE^{(k)} \qquad (۲-۱۱)$$

بنابراین :

$$E^{(k+1)}=TE^{(k)}=T(TE^{(k-1)})=T^{2}E^{(k-1)} \qquad (۲-۱۲)$$

وبا ادامه این روند بدست می آوریم:

$$E^{(k)}=T^{(k)}E^{(0)} \qquad (۲-۱۳)$$

۲-۳-۳ قضیه: دنباله $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ، که به ازای هر $k=0,1,2,\dots$ با $X^{(k+1)}=TX^{(k)}+c$ تعریف شده است و $c\neq 0$ ، به ازای هر $X^{(0)}\in\mathbb{R}^{n}$ به بردار X همگراست اگر وفقط اگر $\rho(T)<1$ [1] باشد [۱].

حال روش تکراری ژاکوبی را معرفی می کنیم.

۲-۳- ٤ روش تکراری ژاکوبی برای حل دستگاه معادلات خطی:

در این روش برای محاسبه جواب دستگاه $Ax=b$ فرض کنیم:

$$A=D+L+U \qquad (۲-۱٤)$$

که در آن Dماتریس قطری است که شامل درایه های قطری ماتریس A و L ماتریس پائین مثلثی اکید که درایه های آن درایه های زیر قطر اصلی ماتریس A است و U ماتریس بالا مثلثی اکید که درایه های آن درایه های بالای قطر اصلی ماتریس A است. در اینصورت داریم:

۱- $\rho(T)$ شعاع طیفی ماتریس تکرار T می باشد.

$$Ax = b$$
$$\Rightarrow (D + L + U)x = b \Rightarrow Dx = -(L + U)x + b \qquad (۱۵-۲)$$
$$\Rightarrow x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$$

که در ان $c = D^{-1}b$, $T = -D^{-1}(L + U)$ و فرم تکراری آن به صورت زیر می باشد:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c \qquad ; \quad k = 0,1,... \qquad (۱۶-۲)$$

همچنین از روابط بالا می توان مؤلفه های بردار $x^{(k+1)}$ را برای هر $1 \le i \le n$ به صورت زیر نوشت:

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i\right) \qquad (۱۷-۲)$$

در ادامه روش تجزیه آدومین را معرفی می کنیم.

۲-۳-۵ روش تجزیه آدومین برای حل دستگاه معادلات خطی:

روش تجزیه آدومین درسال ۱۹۶۱ برای حل انواع معادلات پیشنهاد شد، اما این روش به اندازه ای کامل نشد که قابل ارائه در مکتوبات ریاضی باشد. جورج آدومین (۱۹۲۰-۱۹۹۶) به تدریج روش را توسعه داد و در اوائل سال ۱۹۸۱ روش را معرفی وآن را به اسم خودش نامگذاری نمود. در این روش جواب معادله به صورت یک سری نامتناهی در نظر گرفته می شود که غالباً به سرعت به جواب معادله همگرا می شود. روش آدومین بین سالهای ۱۹۸۲-۱۹۸۱ برای بسیاری از مسائل به کار گرفته شد. در سال ۱۹۸۲ آدومین روش خود را برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه بالا مورد استفاده قرار داد. وی در سال ۱۹۸۳ برای اولین بار مطالب خود را به صورت کتابی جمع آوری نمود. برتری مهم روش تجزیه آدومین برسایر روشهای عددی در این است که با به کار بردن این روش، جواب مسائل را می توان به صورت یک تابع پیوسته بدست آورد و دیگر نیازی به درونیابی نیست. بحث همگرایی روش در اوایل سال ۱۹۸۹ توسط چرالت[1] مطرح شد. نتایج بیشتر در مورد همگرایی روش وبحث نظری در مورد نظریه تجزیه آدومین در سال ۱۹۹۲ در رساله دکتری لیونل گابت[2] وبا راهنمایی چرالت آمده است. چرالت و ابویی[3] این روش رابرای حل معادله غیر خطی $f(x) = 0$ به کاربردند و همگرایی آن را به جواب دقیق اثبات کردند [۱۰]. بابلیان و همکارانش روش تجزیه آدومین را برای حل دستگاه معادلات خطی به کاربردند و معادل بودن این روش را

1-Cherruault
۲-Lionel Gabet
3- Abbaoui

با روش تکراری ژاکوبی اثبات کردند [۲۵]. در ادامه ساختار کلی روش تجزیه آدومین رابرای حل دستگاه معادلات خطی ارائه می دهیم.

دستگاه معادلات خطی ذکر شده در روش تکراری یعنی $Ax=b$ رادرنظر بگیرید. فرض کنید که دستگاه جواب منحصر به فرد داشته باشد در این صورت معادله iام از این دستگاه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$a_{i1}+\cdots+a_{i,i-1}x_{i-1}+a_{ii}x_i+a_{i,i+1}x_{i+1}+\cdots+a_{in}x_n=b_i \qquad (۲-۱۸)$$

بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض کنید که $a_{ii}\neq 0$ باشد. بااین فرض متغیر x_i را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$x_i=\frac{b_i}{a_{ii}}-\frac{1}{a_{ii}}(a_{i1}+\cdots+a_{i,i-1}x_{i-1}+a_{i,i+1}x_{i+1}+\cdots+a_{in}x_n) \qquad (۲-۱۹)$$

باتوجه به معادله بالا، می توان شکل کانونی معادلات آدومین رابه صورت زیر نوشت:

$$x_i=c_i+g_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \qquad (۲-۲۰)$$

که توابع $g_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ توابعی خطی و c_i اعداد ثابت هستند. با به کاربردن روش تجزیه آدومین، فرض کنید $x_i=\sum_{m=0}^{\infty}x_{im}$ و $g_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}A_{im}$ که A_{im} برای $m=0,1,2,\ldots$ چندجمله ایهای آدومین هستند بنابراین رابطه (۲-۲۰) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\sum_{m=0}^{\infty}x_{im}=c_i+\sum_{m=0}^{\infty}A_{i,m}(x_{10},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n0},\ldots,x_{nm}),\ \ i=1,\ldots,n \qquad (۲-۲۱)$$

باتوجه به رابطه بالا، تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} x_{i0}=c_i \\ x_{i,m+1}=A_{im}(x_{10},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n0},\ldots,x_{nm}),\ \ m=1,2,\ldots,\ \ i=1,\ldots,n \end{cases} \qquad (۲-۲۲)$$

x_i را به وسیله $\phi_{ik}=\sum_{m=0}^{k-1}x_{im}$ تقریب می زنیم. که در آن $\lim_{k\to\infty}\phi_{ik}=x_i$ می باشد. با مشخص کردن چندجمله ایهای آدومین از مرتبه n، داریم:

$$x_{i\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m x_{im} \qquad (۲-۲۳)$$

$$g_{i\lambda}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m A_{im} \qquad (۲-۲۴)$$

λ یک پارامتر است که به راحتی مشخص می شود ([۱۰] رانگاه کنید). ازرابطه بالا بدست می آوریم:

$$A_{i,m} = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m} s_{i\lambda}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\right]_{\lambda=0} \qquad (۲-۲۵)$$

با توجه به رابطه های (۲-۲۳) و (۲-۲۵) می توان نوشت:

$$A_{i,m}(x_{1,0},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n,0},\ldots,x_{nm}) = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}\left[\frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l x_{jl}\right]_{\lambda=0} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_{jm} \qquad (۲-۲۶)$$

بنابر روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۲)، برای حل دستگاه معادلات خطی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_{i0} = c_i \\ x_{i,m+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_{jm} \quad i=1,\ldots,n, \quad m=0,1,2,\ldots \end{cases} \qquad (۲-۲۷)$$

بادر نظر گرفتن تجزیه (۲-۱٤)، شکل ماتریسی روش آدومین به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} x^{(0)} = D^{-1}b \\ x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} \qquad k=0,1,2,\ldots \end{cases} \qquad (۲-۲۸)$$

با معرفی نماد $T_A = -D^{-1}(L+D)$ روش تجزیه آدومین به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\begin{cases} x^{(0)} = D^{-1}b \\ x^{(k+1)} = T_A x^{(k)} \qquad k=0,1,2,\ldots \end{cases} \qquad (۲-۲۹)$$

متذکر می شویم که ماتریس تکرار روش آدومین مشابه ماتریس تکرار روش ژاکوبی است. بردار آغازین روش تجزیه آدومین، بردار $D^{-1}b$، اما در روش تکراری ژاکوبی معمولاً بردار صفر می باشد، بنابراین روش آدومین در این حالت تقریب جدیدی را بدست نمی دهد.

۲-۳-٦ همگرایی روش تجزیه آدومین

برای مطالعه همگرایی روش، باتوجه به فرم ماتریسی $x^{(k+1)} = T_A x^{(k)}$ که $k = 0,1,2,\ldots$ و بردار اولیه $x^{(0)} = D^{-1}b$ و مقایسه آن باروش تکراری ژاکوبی (۲-۱٦)، نتیجه می گیریم که برای حل دستگاه معادلات خطی، روش تجزیه آدومین شبیه روش تکراری ژاکوبی می باشد. از این رو، می توان نتیجه گرفت که روش تجزیه آدومین هم، یک روش تکراری می باشد. بنابراین قضیه های همگرایی (حل دستگاه معادلات خطی) برای روش تجزیه آدومین همانند روش تکراری ژاکوبی می باشد [۲۵].

۲-۳-۷ مثال: دستگاه معادلات خطی زیر را با جواب واقعی $x=(۲,۱,۳)^T$ در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} ۱۰x_۱+x_۲+x_۳=۲۴ \\ -x_۱+۲۰x_۲+x_۳=۲۱ \\ x_۱-۲x_۲+۱۰۰x_۳=۳۰۰ \end{cases}$$

این دستگاه رابادوروش، تکرارژاکوبی وروش تجزیه آدومین حل کرده ونتایج حاصله راباهم مقایسه کنید.

الف) روش تکراری ژاکوبی: ابتدا دستگاه $Ax=b$ را به شکل دستگاه $x=Tx+c$ تبدیل می کنیم. برای این کار، برای $i=۱,۲,۳$ ، معادله i ام را بر حسب x_i حل می کنیم تا دستگاه زیر بدست آید:

$$\begin{cases} x_۱=\frac{۱}{۱۰}(-x_۲-x_۳)+\frac{۲۴}{۱۰} \\ x_۲=\frac{۱}{۲۰}(x_۱-x_۳)+\frac{۲۱}{۲۰} \\ x_۳=\frac{۱}{۱۰۰}(-x_۱+۲x_۲)+\frac{۳۰۰}{۱۰۰} \end{cases}$$

بانوشتن به فرم $x=Tx+c$، خواهیم داشت:

$$T=\begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۲۰} & ۰ & -\frac{۱}{۲۰} \\ -\frac{۱}{۱۰۰} & \frac{۲}{۱۰۰} & ۰ \end{bmatrix}, \qquad c=\begin{bmatrix} \frac{۲۴}{۱۰} \\ \frac{۲۱}{۲۰} \\ \frac{۲۰۰}{۱۰۰} \end{bmatrix}$$

برای یک تقریب اولیه، فرض می کنیم که $x^{(۰)}=(۰,۰,۰)^T$ باشد. جوابهای آن را با شش تکرار در جدول (۲-۱) مشاهده کنید.

ب) روش تجزیه آدومین: باتوجه به رابطه (۲-۲۷):

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{۱,۰}=\frac{۲۴}{۱۰} \\ x_{۱,m+۱}=\frac{۱}{۱۰}(-x_{۲,m}-x_{۳,m}) \end{cases} \\ \begin{cases} x_{۲,۰}=\frac{۲۱}{۲۰} \\ x_{۲,m+۱}=\frac{۱}{۲۰}(x_{۱,m}-x_{۳,m}) \end{cases} \\ \begin{cases} x_{۳,۰}=\frac{۳۰۰}{۱۰۰} \\ x_{۳,m+۱}=\frac{۱}{۱۰۰}(-x_{۱,m}+۲x_{۲,m}), \qquad m=۰,۱,\ldots \end{cases} \end{cases}$$

بانوشتن شکل $x^{(k+۱)}=T_A x^{(k)}$ ، خواهیم داشت:

$$T_A=\begin{bmatrix} ۰ & -\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۲۰} & ۰ & -\frac{۱}{۲۰} \\ -\frac{۱}{۱۰۰} & \frac{۲}{۱۰۰} & ۰ \end{bmatrix}, \qquad x^{(۰)}=D^{-۱}b=\begin{bmatrix} \frac{۲۴}{۱۰} \\ \frac{۲۱}{۲۰} \\ \frac{۲۰۰}{۱۰۰} \end{bmatrix}.$$

که جوابهای آن با پنج تکرار در جدول (۲-۲) آمده است.

x_3	x_2	x_1	تکرار
0/000000	0/0000000	0/000000	0
3/000000	1/0500000	2/400000	1
2/997000	1/0200000	1/995000	2
3/000450	0/9999000	1/998300	3
3/000015	0/9998925	1/999965	4
2/999998	0/9998975	2/000009	5
3/000000	1/0000010	2/000000	6

جدول (۲-۱): *روش تکراری ژاکوبی*

x_3	x_2	x_1	تکرار
3/000000	1/0500000	2/400000	0
2/997000	1/0200000	1/995000	1
3/000450	0/9999000	1/998300	2
3/000015	0/9998925	1/999965	3
2/999998	0/9998975	2/000009	4
3/000000	1/0000010	2/000000	5

جدول (۲-۲): *روش تجزیه آدومین*

توجه داشته باشید که ماتریسهای T_A و T مشابه همدیگر هستند وبا مشاهده جدولهای (۲-۱) و (۲-۲)، متوجه می شویم که این دو جدول به جز در سطر اول یکسان هستند. به عبارت دیگر، اگر مقایر آغازین در روش تکراری ژاکوبی، $D^{-1}b$ انتخاب شود در این صورت هر دو روش (تکراری ژاکوبی وتجزیه آدومین) مشابه هم خواهند بود.

همچنین، واضح است که اگر شعاع طیفی ماتریس تکرار یعنی $\rho(T)$ بزرگتر از یک باشد آنگاه روش تکراری ژاکوبی واگرا است و می توان نتیجه گرفت که روش تجزیه آدومین نیز واگرا خواهد بود.

فصل سوم

دستگاه معادلات خطی تماماً فازی

۳-۱ مقدمه

دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ که در آن ماتریسهای A یا b ، ماتریس فازی باشند دستگاه معادلات خطی فازی می نامند. در دستگاه فازی اگر فقط بردار b، فازی و ماتریس A، یک ماتریس کریسپ باشد دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی یا دستگاه فازی از معادلات خطی (FLS یا $FSLE$) وهرگاه هردوماتریس A و b فازی باشند دستگاه معادلات خطی تماماً فازی ($FFLS$) می نامند. در این فصل روشی را برای بدست آوردن جواب دستگاه $FFLS$ (به کمک تعریف ضرب LR دو عددد فازی، که در فصل اول معرفی کردیم) ارائه می دهیم. برای این منظور ابتدا دستگاه $FFLS$ را تبدیل به دو دستگاه کریسپ می کنیم و با حل این دو دستگاه به روشهای مستقیم و یا تکراری، مقدار میانی وپهنای بردار جواب بدست می آیند. در ادامه فصل برای حل دستگاههای معادلات خطی تماماً فازی روش تکراری ژاکوبی و روش تجزیه آدومین را معرفی می کنیم. لازم به ذکر است که بابلیان وهمکارانش برای اولین بار روش تجزیه آدومین رابرای حل یک دستگاه معادلات خطی پیشنهاد داده اند [۲۵]. الهویرنلو نیز این روش

رابرای حل دستگاه $FSLE$ معرفی نمود [۲۱]. همچنین در [۳۱] دهقان وهمکارانش روش آدومین را برای حل دستگاه $FFLS$ که در آن تمامی اعداد فازی مثبت بودند، معرفی کردند. در این پایان نامه ما این روش را برای حل، هرنوع دستگاه $FFSLS$ پیشنهاد می دهیم.

۳-۲ ماتریس فازی و دستگاه معادلات خطی تماماً فازی

در این بخش ابتداماتریس فازی را که در مرجع [۳۴]معرفی شده است، تعریف می کنیم.

۳-۲-۱ تعریف ماتریس فازی: ماتریس $\tilde{A}=\left(\tilde{a}_{ij}\right)$ را یک ماتریس فازی می گویند هرگاه هر درایه از آن یک عدد فازی باشد.

۳-۲-۲ تعریف ماتریس فازی مثبت (منفی): $\tilde{A}$ را یک ماتریس فازی مثبت (منفی) گوییم اگر هر درایه $\tilde{A}$ مثبت (منفی) باشد و بصورت $\tilde{A}>۰$ $\left(\tilde{A}<۰\right)$ نشان می دهیم.

همچنین بطور مشابه می توانیم ماتریس های فازی نامنفی و ماتریس های فازی نامثبت را تعریف کنیم.

اگر هر درایه ازماتریس فازی $\tilde{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه ای LR باشد در این صورت می توانیم ماتریس فازی $\tilde{A}=\left(\tilde{a}_{ij}\right)$ را که در آن $\tilde{a}_{ij}=\left(a_{ij},b_{ij},m_{ij},n_{ij}\right)$ می باشد، بصورت $\tilde{A}=\left(A,B,M,N\right)$ نمایش دهیم که در آن $A=(a_{ij})$ ، $B=(b_{ij})$ ، $M=\left(m_{ij}\right)$ و $N=(n_{ij})$ چهار ماتریس کریسپ هم مرتبه با $\tilde{A}$ می باشند. واضح است که ماتریسهای A و B ماتریسهای بازه میانی، M و N به ترتیب ماتریس پهنای چپ و ماتریس پهنای راست می باشند.

۳-۲-۳ تعریف ماتریس بالا (پائین) مثلثی فازی: یک ماتریس فازی $\tilde{A}=\left(\tilde{a}_{ij}\right)$ را یک ماتریس فازی بالا (پائین) مثلثی گوییم اگر

$$\tilde{a}_{ij}=\tilde{۰}=\left(۰,۰,۰,۰\right) \qquad \forall\, i>j \ \ (\forall i<j) \tag{۳-۱}$$

۳-۲-٤ تعریف ضرب دو ماتریس فازی: فرض کنید $\tilde{A}=\left(\tilde{a}_{ij}\right)$ یک ماتریس فازی از مرتبه $m\times n$ و $\tilde{B}=\left(\tilde{b}_{ij}\right)$ یک ماتریس فازی از مرتبه $n\times p$ باشند آنگاه ماتریس حاصلضرب $\tilde{A}.\tilde{B}$ از مرتبه $m\times p$ بوده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=\tilde{C}=\left(\tilde{c}_{ij}\right),\qquad \tilde{c}_{ij}=\sum_{k=۱,\dots,n}^{\oplus}\tilde{a}_{ik}\otimes\tilde{b}_{kj} \tag{۳-۲}$$

۳-۲-۵ تعریف دستگاه معادلات خطی تماماً فازی: دستگاه معادلات خطی $m\times n$ را بصورت زیردرنظر بگیرید:

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11}\otimes\tilde{x}_1)\oplus(\tilde{a}_{12}\otimes\tilde{x}_2)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{1n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{c}_1 \\ (\tilde{a}_{21}\otimes\tilde{x}_1)\oplus(\tilde{a}_{22}\otimes\tilde{x}_2)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{2n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{c}_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ (\tilde{a}_{m1}\otimes\tilde{x}_1)\oplus(\tilde{a}_{m2}\otimes\tilde{x}_2)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{mn}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{c}_m \end{cases} \tag{۳-۳}$$

دراین دستگاه اگر برای $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$، درایه های $\tilde{a}_{ij}$ ، $\tilde{x}_j$ و $\tilde{c}_i$ اعداد فازی باشند، یک دستگاه معادلات خطی تماماً فازی ($FFLS$) می نامند. همچنین در این دستگاه اگر $m=n$ باشد، آن را دستگاه معادلات خطی مربعی تمام فازی[1] و اگر $m\ne n$ باشد، آن را دستگاه معادلات خطی غیر مربعی تمام فازی[2] یا دستگاه معادلات خطی مستطیلی تمام فازی[3] می گویند. فرم ماتریسی این دستگاه بصورت $\tilde{A}\otimes\tilde{x}=\tilde{c}$ است که برای سادگی می توانیم آن را به صورت $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{c}$ نمایش دهیم که در آن برای $1\le i\le m$ و $1\le j\le n$، ماتریس ضرایب $\tilde{A}=(A,B,M,N)$ یک ماتریس فازی $m\times n$ و برای $1\le j\le n$، بردار $\tilde{x}=(\tilde{x}_j)=(x,y,w,z)$، یک بردار فازی $n\times 1$ و برای $1\le i\le m$، بردار $\tilde{c}=(\tilde{c}_i)=(c,d,g,h)$، بردار فازی $m\times 1$ خواهد بود.

۳-۲-۶ نکته: اگرتمامی اعدادفازی دردستگاه $FFLS$ ، اعدا فازی ذوزنقه ای LR ویا مثلثی LR باشند آنگاه فرم ماتریسی دستگاه $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{c}$ به ترتیب به صورت $(A,B,M,N)\otimes(x,y,w,z)=(c,d,g,h)$ یا $(A,M,N)\otimes(x,w,z)=(c,g,h)$ می باشند. همانطوری که مشاهده می شود اعدادفازی مثلثی LR حالت خاصی از اعداد فازی ذوزنقه ای LR هستند لذا اگر در دستگاه $FFLS$ با اعداد فازی ذوزنقه ای LR، $A=B$، $x=y$ و $c=d$ فرض شوند، آنگاه دستگاه $FFLS$ با اعداد فازی مثلثی LR به دست می آید. *دربخش بعدی روشهایی برای حل دستگاه $FFLS$ ارائه می دهیم.*

۱-Fully fuzzy square linear system ($FFSLS$)
۲-Fully fuzzy nonsquare linear system
۳-Fully fuzzy rectangle linear system ($FFRLS$)

۳-۳ حل دستگاه معادلات خطی تماماً فازی

همانطور که در بخش قبلی اشاره شد دستگاه معادلات خطی تمام فازی (۳-۳)، می تواند به صورت مربعی ($FFSLS$) یا مستطیلی ($FFRLS$) بوده و همچنین اعداد فازی LR به کاررفته در این دستگاهها، ذوزنقه ای یا مثلثی باشند لذا می توان چهار حالت مختلف از دستگاه $FFLS$ (۳-۳) را به صورت زیر در نظر گرفت:

حالت ۱: دستگاه $FFRLS$ با اعداد فازی ذوزنقه ای LR.

حالت ۲: دستگاه $FFRLS$ با اعداد فازی مثلثی LR.

حالت ۳: دستگاه $FFSLS$ با اعداد فازی ذوزنقه ای LR.

حالت ٤: دستگاه $FFSLS$ با اعداد فازی مثلثی LR.

در این بخش بعد از معرفی مقدمات زیر هر یک از دستگاههای $FFLS$ (۳-۳) در حالتهای مختلف را به دو دستگاه معادلات خطی کریسپ تبدیل می کنیم که با حل این دستگاهها می توان تقریبی از جواب دستگاه اصلی را بدست آوریم.

برای هر $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$ فرض کنیم اعداد فازی $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij})$ درایه هایی از ماتریس فازی $\tilde{A}$ باشند. اگر درایه های $\tilde{a}^+_{ij} = (a^+_{ij}, b^+_{ij}, m^+_{ij}, n^+_{ij})$ و $\tilde{a}^-_{ij} = (a^-_{ij}, b^-_{ij}, m^-_{ij}, n^-_{ij})$ (که به ترتیب بازه مقدار میانی نامنفی و منفی درایه $\tilde{a}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij})$ هستند) را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} \tilde{a}^+_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}) \ , \tilde{a}^-_{ij} = (0,0,0,0) & ; a_{ij} \ge 0 \\ \tilde{a}^+_{ij} = (0,0,0,0) \ , \ \tilde{a}^-_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, m_{ij}, n_{ij}) & ; b_{ij} \le 0 \\ \tilde{a}^+_{ij} = (0, b_{ij}, 0, n_{ij}) \ , \tilde{a}^-_{ij} = (a_{ij}, 0, m_{ij}, 0) & ; a_{ij} < 0, b_{ij} > 0 \end{cases} \quad (٤-۳)$$

آنگاه:

$$\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}^+_{ij} \oplus \tilde{a}^-_{ij} \quad (۵-۳)$$

بنابراین با فرض $\tilde{A}^+ = (\tilde{a}^+_{ij}) = (A^+, B^+, M^+, N^+)$ و $\tilde{A}^- = (\tilde{a}^-_{ij}) = (A^-, B^-, M^-, N^-)$، ماتریس فازی $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (A, B, M, N)$ را می توان به صورت $\tilde{A} = \tilde{A}^+ \oplus \tilde{A}^-$ نوشت. واضح است که ماتریسهای کریسپ $A^- = (a^-_{ij})$ و $B^- = (b^-_{ij})$ نامثبت و مابقی ماتریسها یعنی ماتریسهای A^+, B^+, M^+, N^+, M^- و N^- همگی کریسپ و نامنفی هستند پس می توان نوشت:

$$A = A^+ + A^-, B = B^+ + B^-, M = M^+ + M^-, N = N^+ + N^- \quad (٦-۳)$$

به طور مشابه مطالب قبلی را می توان برای بردار فازی $\tilde{x}=(x,y,w,z)=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)^T$ که در آن برای $1\le j\le n$، $\tilde{x}_j=(x_j,y_j,w_j,z_j)$ و جواب دستگاه FFLS (۳-۳) می باشد، نوشت؛ یعنی با روش مشابه بالا و با فرض $\tilde{x}_j^+=(x_j^+,y_j^+,w_j^+,z_j^+)$ و $\tilde{x}_j^-=(x_j^-,y_j^-,w_j^-,z_j^-)$ (که به ترتیب بازه مقدار میانی نامنفی و منفی عنصر $\tilde{x}_j=(x_j,y_j,w_j,z_j)$ هستند)، رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\tilde{x}_j=\tilde{x}_j^+\oplus\tilde{x}_j^- \qquad (۳-۷)$$

بنابراین بردار کریسپ x را می توان به صورت مجموع $x^+ + x^-$ نوشت $(x=x^+ + x^-)$ که در آن برای $1\le j\le n$, $x_j=x_j^+ + x_j^-$ خواهد بود و همچنین $y=y^+ + y^-$, $w=w^+ + w^-$, $z=z^+ + z^-$ نوشته می شوند.

در ادامه به کمک قضیه زیر جواب حالت اول دستگاه FFLS (۳-۳) را بدست می آوریم.

۳-۳-۱ قضیه (حالت ۱): بردار فازی $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,...,\tilde{x}_n)^T$ که در آن برای هر $1\le j\le n$، $\tilde{x}_j=(x_j,y_j,w_j,z_j)$ جواب دستگاه FFRLS (۳-۳) نامیده می شود هرگاه:

$$\begin{cases} A^+x^+ + B^+x^- + A^-y^+ + B^-y^- = c \\ B^-x^+ + A^-x^- + B^+y^+ + A^+y^- = d \\ A^+w^+ + B^+w^- - A^-z^+ - B^-z^- = g - M^+x^+ + N^+x^- - M^-y^+ + N^-y^- \\ -B^-w^+ - A^-w^- + B^+z^+ + A^+z^- = h - N^-x^+ + M^-x^- - N^+y^+ + M^+y^- \end{cases} \qquad (۳-۸)$$

که در این رابطه فرض می کنیم $A=A^+ + A^-$، $B=B^+ + B^-$، $M=M^+ + M^-$، $y=y^+ + y^-$، $w=w^+ + w^-$ ، $N=N^+ + N^-$، $x=x^+ + x^-$ و $z=z^+ + z^-$ می باشند.

اثبات: بادرنظر گرفتن سطر i ام از دستگاه FFRLS (۳-۳)؛ یعنی:

$$(\tilde{a}_{i1}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{in}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{c}_i \qquad (۳-۹)$$

از روابط (۳-۵)و (۳-۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &[(\tilde{a}_{i1}^+\oplus\tilde{a}_{i1}^-)\otimes(\tilde{x}_1^+\oplus\tilde{x}_1^-)]\oplus\cdots\oplus[(\tilde{a}_{in}^+\oplus\tilde{a}_{in}^-)\otimes(\tilde{x}_n^+\oplus\tilde{x}_n^-)] \\ &=[(\tilde{a}_{i1}^+\otimes\tilde{x}_1^+)\oplus(\tilde{a}_{i1}^+\otimes\tilde{x}_1^-)\oplus(\tilde{a}_{i1}^-\otimes\tilde{x}_1^+)\oplus(\tilde{a}_{i1}^-\otimes\tilde{x}_1^-)] \\ &\oplus\cdots\oplus[(\tilde{a}_{in}^+\otimes\tilde{x}_n^+)\oplus(\tilde{a}_{in}^+\otimes\tilde{x}_n^-)\oplus(\tilde{a}_{in}^-\otimes\tilde{x}_n^+)\oplus(\tilde{a}_{in}^-\otimes\tilde{x}_n^-)]=\tilde{c}_i \end{aligned} \qquad (۳-۱۰)$$

و باتوجه به تعریف بازه های مقدار میانی نامنفی و منفی $(\tilde{x}_j^-,\tilde{x}_j^+,\tilde{a}_{ij}^-,\tilde{a}_{ij}^+)$ می توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
&\{[(a^+_{i1},b^+_{i1},m^+_{i1},n^+_{i1})\otimes(x^+_1,y^+_1,w^+_1,z^+_1)]\oplus[(a^+_{i1},b^+_{i1},m^+_{i1},n^+_{i1})\otimes(x^-_1,y^-_1,w^-_1,z^-_1)]\\
&\oplus[(a^-_{i1},b^-_{i1},m^-_{i1},n^-_{i1})\otimes(x^+_1,y^+_1,w^+_1,z^+_1)]\oplus[(a^-_{i1},b^-_{i1},m^-_{i1},n^-_{i1})\otimes(x^-_1,y^-_1,w^-_1,z^-_1)]\}\\
&\oplus\cdots\oplus\{[(a^+_{in},b^+_{in},m^+_{in},n^+_{in})\otimes(x^+_n,y^+_n,w^+_n,z^+_n)]\oplus[(a^+_{in},b^+_{in},m^+_{in},n^+_{in})\otimes(x^-_n,y^-_n,w^-_n,z^-_n)]\\
&\oplus[(a^-_{in},b^-_{in},m^-_{in},n^-_{in})\otimes(x^+_n,y^+_n,w^+_n,z^+_n)]\oplus[(a^-_{in},b^-_{in},m^-_{in},n^-_{in})\otimes(x^-_n,y^-_n,w^-_n,z^-_n)]\}\\
&=(c_i,d_i,g_i,h_i)
\end{aligned}
\qquad (۳-۱۱)
$$

بابه کارگیری حاصلضرب تقریبی اعداد فازی ذوزنقه ای LR از جدول (۱-۱) بدست می آوریم:

$$
\begin{aligned}
&[(a^+_{i1}x^+_1,b^+_{i1}y^+_1,a^+_{i1}w^+_1+m^+_{i1}x^+_1,b^+_{i1}z^+_1+n^+_{i1}y^+_1)\oplus(b^+_{i1}x^-_1,a^+_{i1}y^-_1,b^+_{i1}w^-_1-n^+_{i1}x^-_1,a^+_{i1}z^-_1-m^+_{i1}y^-_1)\\
&\oplus(a^-_{i1}y^+_1,b^-_{i1}x^+_1,-a^-_{i1}z^+_1+m^-_{i1}y^+_1,-b^-_{i1}w^+_1+n^-_{i1}x^+_1)\oplus(b^-_{i1}y^-_1,a^-_{i1}x^-_1,-b^-_{i1}z^-_1-n^-_{i1}y^-_1,-a^-_{i1}w^-_1-\\
&m^-_{i1}x^-_1)]\oplus\cdots\oplus[(a^+_{in}x^+_n,b^+_{in}y^+_n,a^+_{in}w^+_n+m^+_{in}x^+_n,b^+_{in}z^+_n+n^+_{in}y^+_n)\oplus(b^+_{in}x^-_n,a^+_{in}y^-_n,b^+_{in}w^-_n-n^+_{in}x^-_n,\\
&,a^+_{in}z^-_n-m^+_{in}y^-_n)\oplus(a^-_{in}y^+_n,b^-_{in}x^+_n,-a^-_{in}z^+_n+m^-_{in}y^+_n,-b^-_{in}w^+_n+n^-_{in}x^+_n)\oplus(b^-_{in}y^-_n,a^-_{in}x^-_n,-b^-_{in}z^-_n-\\
&-n^-_{in}y^-_n,-a^-_{in}w^-_n-m^-_{in}x^-_n)]=(c_i,d_i,g_i,h_i)
\end{aligned}
\qquad (۳-۱۲)
$$

درنتیجه باتوجه به جمع وتساوی دوعدد فازی ذوزنقه ای LR داریم:

$$
\begin{cases}
a^+_{i1}x^+_1+b^+_{i1}x^-_1+a^-_{i1}y^+_1+b^-_{i1}y^-_1+\cdots+a^+_{in}x^+_n+b^+_{in}x^-_n+a^-_{in}y^+_n+b^-_{in}y^-_n=c_i\\
b^+_{i1}y^+_1+a^+_{i1}y^-_1+b^-_{i1}x^+_1+a^-_{i1}x^-_1+\cdots+b^+_{in}y^+_n+a^+_{in}y^-_n+b^-_{in}x^+_n+a^-_{in}x^-_n=d_i\\
(a^+_{i1}w^+_1+m^+_{i1}x^+_1+b^+_{i1}w^-_1-n^+_{i1}x^-_1-a^-_{i1}z^+_1+m^-_{i1}y^+_1-b^-_{i1}z^-_1-n^-_{i1}y^-_1)\\
+\cdots+(a^+_{in}w^+_n+m^+_{in}x^+_n+b^+_{in}w^-_n-n^+_{in}x^-_n-a^-_{in}z^+_n+m^-_{in}y^+_n-b^-_{in}z^-_n-n^-_{in}y^-_n)=g_i\\
(b^+_{i1}z^+_1+n^+_{i1}y^+_1+a^+_{i1}z^-_1-m^+_{i1}y^-_1-b^-_{i1}w^+_1+n^-_{i1}x^+_1-a^-_{i1}w^-_1-m^-_{i1}x^-_1)\\
+\cdots+(b^+_{in}z^+_n+n^+_{in}y^+_n+a^+_{in}z^-_n-m^+_{in}y^-_n-b^-_{in}w^+_n+n^-_{in}x^+_n-a^-_{in}w^-_n-m^-_{in}x^-_n)=h_i
\end{cases}
\qquad (۳-۱۳)
$$

با بکاربردن نماد مجموع یابی خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}a^+_{ij}x^+_j+\sum_{j=1}^{n}b^+_{ij}x^-_j+\sum_{j=1}^{n}a^-_{ij}y^+_j+\sum_{j=1}^{n}b^-_{ij}y^-_j=c_i\\
\sum_{j=1}^{n}b^+_{ij}y^+_j+\sum_{j=1}^{n}a^+_{ij}y^-_j+\sum_{j=1}^{n}b^-_{ij}x^+_j+\sum_{j=1}^{n}a^-_{ij}x^-_j=d_i\\
\sum_{j=1}^{n}a^+_{ij}w^+_j+\sum_{j=1}^{n}m^+_{ij}x^+_j+\sum_{j=1}^{n}b^+_{ij}w^-_j-\sum_{j=1}^{n}n^+_{ij}x^-_j-\sum_{j=1}^{n}a^-_{ij}z^+_j+\sum_{j=1}^{n}m^-_{ij}y^+_j-\sum_{j=1}^{n}b^-_{ij}z^-_j-\sum_{j=1}^{n}n^-_{ij}y^-_j=g_i\\
\sum_{j=1}^{n}b^+_{ij}z^+_j+\sum_{j=1}^{n}n^+_{ij}y^+_j+\sum_{j=1}^{n}a^+_{ij}z^-_j-\sum_{j=1}^{n}m^+_{ij}y^-_j-\sum_{j=1}^{n}b^-_{ij}w^+_j+\sum_{j=1}^{n}n^-_{ij}x^+_j-\sum_{j=1}^{n}a^-_{ij}w^-_j-\sum_{j=1}^{n}m^-_{ij}x^-_j=h_i
\end{cases}
\qquad (۳-۱۴)
$$

درنتیجه شکل ماتریسی دستگاه اخیر به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} A^{+}x^{+}+B^{+}x^{-}+A^{-}y^{+}+B^{-}y^{-}=c \\ B^{-}x^{+}+A^{-}x^{-}+B^{+}y^{+}+A^{+}y^{-}=d \\ A^{+}w^{+}+B^{+}w^{-}-A^{-}z^{+}-B^{-}z^{-}=g-M^{+}x^{+}+N^{+}x^{-}-M^{-}y^{+}+N^{-}y^{-} \\ -B^{-}w^{+}-A^{-}w^{-}+B^{+}z^{+}+A^{+}z^{-}=h-N^{-}x^{+}+M^{-}x^{-}-N^{+}y^{+}+M^{+}y^{-} \end{cases} \qquad (۱۵-۳)$$

بنابراین به کمک رابطه بالاجوابی برای دستگاه *FFRLS* (۳-۳)، در حالت اول بدست میآید واثبات کامل می شود. □

۳-۳-۲ نتیجه: با به کاربردن نماد ماتریسی دستگاه بدست آمده در قضیه قبلی یعنی رابطه (۳-۱۵) به دستگاه زیر تبدیل می شود:

$$\begin{cases} RX=U \\ SZ=T \end{cases} \qquad (۱۶-۳)$$

در این رابطه ماتریسهای S,R و بردارهای T,U,Z,X به صورت زیر تعریف شده اند:

$$\begin{cases} R=\begin{bmatrix} S_۱ & S_۲ \\ S_۳ & S_۴ \end{bmatrix}, S=\begin{bmatrix} S_۱ & -S_۲ \\ -S_۳ & S_۴ \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \\ Z=\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, T=\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} M_۱ & M_۲ \\ M_۳ & M_۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{cases} \qquad (۱۷-۳)$$

همچنین در این روابط برای $(۱\le i\le ۴)$، S_i، M_i ماتریسهای کریسپ $m\times ۲n$ و بردارهای x,y,w,z، بردارهای کریسپ $۲n\times ۱$ و h,g,d,c، بردارهای کریسپ $m\times ۱$ هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$S_۱=\begin{bmatrix} A^{+} & B^{+} \end{bmatrix}, S_۲=\begin{bmatrix} A^{-} & B^{-} \end{bmatrix}, S_۳=\begin{bmatrix} B^{-} & A^{-} \end{bmatrix}, S_۴=\begin{bmatrix} B^{+} & A^{+} \end{bmatrix},$$

$$M_۱=\begin{bmatrix} -M^{+} & N^{+} \end{bmatrix}, M_۲=\begin{bmatrix} -M^{-} & N^{-} \end{bmatrix}, M_۳=\begin{bmatrix} -N^{-} & M^{-} \end{bmatrix}, M_۴=\begin{bmatrix} -N^{+} & M^{+} \end{bmatrix},$$

$$x=\begin{bmatrix} x^{+} \\ x^{-} \end{bmatrix}, y=\begin{bmatrix} y^{+} \\ y^{-} \end{bmatrix}, w=\begin{bmatrix} w^{+} \\ w^{-} \end{bmatrix}, z=\begin{bmatrix} z^{+} \\ z^{-} \end{bmatrix} \qquad (۱۸-۳)$$

بنابراین با توجه به قضیه و نتیجه بالا دستگاه *FFRLS* (۳-۳) در حالت اول به دودستگاه معادلات خطی کریسپ (۳-۱۶) تبدیل شد که با حل این دستگاهها می توان تقریبی از جواب دستگاه فازی اصلی را بدست آورد. حال جوابی برای دستگاه *FFRLS* (۳-۳) در حالت دوم به دست می آوریم.

۳-۳-۳ قضیه (حالت ۲): بردار فازی $\tilde{x}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\ldots,\tilde{x}_n)^T$ که در آن برای هر $1\le j\le n$، $\tilde{x}_j=(x_j,w_j,z_j)$ جواب دستگاه *FFRLS* (۳-۳) نامیده می شود هرگاه با فرض $A=A^{+}+A^{-}$ و $x=x^{+}+x^{-}$ داشته باشیم:

$$\begin{cases} Ax=c \\ A^{+}w-A^{-}z=g-Mx^{+}+Nx^{-} \\ -A^{-}w+A^{+}z=h-Nx^{+}+Mx^{-} \end{cases} \tag{۱۹-۳}$$

اثبات: همانند قضیه قبلی اثبات می شود یعنی با به کار بردن حاصلضرب تقریبی اعداد فازی مثلثی *LR*، اشاره شده در جدول (۱-۱) برای سطر i ام دستگاه *FFRLS* (۳-۳) خواهیم داشت:

$$(\tilde{a}_{i1}\otimes\tilde{x}_1)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{in}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{c}_i$$

$$\begin{aligned} &[(\tilde{a}_{i1}^{+}\oplus\tilde{a}_{i1}^{-})\otimes(\tilde{x}_1^{+}\oplus\tilde{x}_1^{-})]\oplus\cdots\oplus[(\tilde{a}_{in}^{+}\oplus\tilde{a}_{in}^{-})\otimes(\tilde{x}_n^{+}\oplus\tilde{x}_n^{-})] \\ &=[(\tilde{a}_{i1}^{+}\otimes\tilde{x}_1^{+})\oplus(\tilde{a}_{i1}^{+}\otimes\tilde{x}_1^{-})\oplus(\tilde{a}_{i1}^{-}\otimes\tilde{x}_1^{+})\oplus(\tilde{a}_{i1}^{-}\otimes\tilde{x}_1^{-})] \\ &\oplus\cdots\oplus[(\tilde{a}_{in}^{+}\otimes\tilde{x}_n^{+})\oplus(\tilde{a}_{in}^{+}\otimes\tilde{x}_n^{-})\oplus(\tilde{a}_{in}^{-}\otimes\tilde{x}_n^{+})\oplus(\tilde{a}_{in}^{-}\otimes\tilde{x}_n^{-})]=\tilde{c}_i \end{aligned} \tag{۲۰-۳}$$

باتوجه به تعریف اعداد فازی مثلثی *LR* داریم:

$$\begin{aligned} &\{[(a_{i1}^{+},m_{i1}^{+},n_{i1}^{+})\otimes(x_1^{+},w_1^{+},z_1^{+})]\oplus[(a_{i1}^{+},m_{i1}^{+},n_{i1}^{+})\otimes(x_1^{-},w_1^{-},z_1^{-})] \\ &\oplus[(a_{i1}^{-},m_{i1}^{-},n_{i1}^{-})\otimes(x_1^{+},w_1^{+},z_1^{+})]\oplus[(a_{i1}^{-},m_{i1}^{-},n_{i1}^{-})\otimes(x_1^{-},w_1^{-},z_1^{-})]\} \\ &\oplus\cdots\oplus\{[(a_{in}^{+},m_{in}^{+},n_{in}^{+})\otimes(x_n^{+},w_n^{+},z_n^{+})]\oplus[(a_{in}^{+},m_{in}^{+},n_{in}^{+})\otimes(x_n^{-},w_n^{-},z_n^{-})] \\ &\oplus[(a_{in}^{-},m_{in}^{-},n_{in}^{-})\otimes(x_n^{+},w_n^{+},z_n^{+})]\oplus[(a_{in}^{-},m_{in}^{-},n_{in}^{-})\otimes(x_n^{-},w_n^{-},z_n^{-})]\} \\ &=(c_i,g_i,h_i) \end{aligned} \tag{۲۱-۳}$$

با توجه به حاصلضرب، ازجدول (۱-۱) می توان نوشت:

$$\begin{aligned} &[(a_{i1}^{+}x_1^{+},a_{i1}^{+}w_1^{+}+m_{i1}^{+}x_1^{+},a_{i1}^{+}z_1^{+}+n_{i1}^{+}x_1^{+})\oplus(a_{i1}^{+}x_1^{-},a_{i1}^{+}w_1^{-}-n_{i1}^{+}x_1^{-},a_{i1}^{+}z_1^{-}-m_{i1}^{+}x_1^{-}) \\ &\oplus(a_{i1}^{-}x_1^{+},-a_{i1}^{-}z_1^{+}+m_{i1}^{-}x_1^{+},-a_{i1}^{-}w_1^{+}+n_{i1}^{-}x_1^{+})\oplus(a_{i1}^{-}x_1^{-},-a_{i1}^{-}z_1^{-}-n_{i1}^{-}x_1^{-},-a_{i1}^{-}w_1^{-}-m_{i1}^{-}x_1^{-})] \\ &\oplus\cdots\oplus[(a_{in}^{+}x_n^{+},a_{in}^{+}w_n^{+}+m_{in}^{+}x_n^{+},a_{in}^{+}z_n^{+}+n_{in}^{+}x_n^{+})\oplus(a_{in}^{+}x_n^{-},a_{in}^{+}w_n^{-}-n_{in}^{+}x_n^{-},a_{in}^{+}z_n^{-}-m_{in}^{+}x_n^{-}) \\ &\oplus(a_{in}^{-}x_n^{+},-a_{in}^{-}z_n^{+}+m_{in}^{-}x_n^{+},-a_{in}^{-}w_n^{+}+n_{in}^{-}x_n^{+})\oplus(a_{in}^{-}x_n^{-},-a_{in}^{-}z_n^{-}-n_{in}^{-}x_n^{-},-a_{in}^{-}w_n^{-}-m_{in}^{-}x_n^{-})] \\ &=(c_i,g_i,h_i) \end{aligned} \tag{۲۲-۳}$$

درنتیجه باتوجه به جمع وتساوی دوعدد فازی مثلثی *LR* داریم:

$$
\begin{cases}
a_{i1}^{+}x_1^{+}+a_{i1}^{+}x_1^{-}+a_{i1}^{-}x_1^{+}+a_{i1}^{-}x_1^{-}+\cdots+a_{in}^{+}x_n^{+}+a_{in}^{+}x_n^{-}+a_{in}^{-}x_n^{+}+a_{in}^{-}x_n^{-} \\
=(a_{i1}^{+}+a_{i1}^{-})x_1^{+}+(a_{i1}^{+}+a_{i1}^{-})x_1^{-}+\cdots(a_{in}^{+}+a_{in}^{-})x_n^{+}+(a_{in}^{+}+a_{in}^{-})x_n^{-}=c_i, \\
(a_{i1}^{+}w_1^{+}+m_{i1}^{+}x_1^{+}+a_{i1}^{+}w_1^{-}-n_{i1}^{+}x_1^{-}-a_{i1}^{-}z_1^{+}+m_{i1}^{-}x_1^{+}-a_{i1}^{-}z_1^{-}-n_{i1}^{-}x_1^{-}) \\
+\cdots+(a_{in}^{+}w_n^{+}+m_{in}^{+}x_n^{+}+a_{in}^{+}w_n^{-}-n_{in}^{+}x_n^{-}-a_{in}^{-}z_n^{+}+m_{in}^{-}x_n^{+}-a_{in}^{-}z_n^{-}-n_{in}^{-}x_n^{-})=g_i, \\
(a_{i1}^{+}z_1^{+}+n_{i1}^{+}x_1^{+}+a_{i1}^{+}z_1^{-}-m_{i1}^{+}x_1^{-}-a_{i1}^{-}w_1^{+}+n_{i1}^{-}x_1^{+}-a_{i1}^{-}w_1^{-}-m_{i1}^{-}x_1^{-}) \\
+\cdots+(a_{in}^{+}z_n^{+}+n_{in}^{+}x_n^{+}+a_{in}^{+}z_n^{-}-m_{in}^{+}x_n^{-}-a_{in}^{-}w_n^{+}+n_{in}^{-}x_n^{+}-a_{in}^{-}w_n^{-}-m_{in}^{-}x_n^{-})=h_i
\end{cases}
\tag{۲۳-۳}
$$

حال با بکاربردن نماد مجموع یابی‌داریم:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}w_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}z_j + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j^{+} - \sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_j^{-} = g_i \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}z_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}w_j + \sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_j^{+} - \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j^{-} = h_i
\end{cases}
\tag{۲۴-۳}
$$

ویا اینکه:

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i \\
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}w_j - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}z_j = g_i - \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j^{+} + \sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_j^{-} \\
-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}w_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{+}z_j = h_i - \sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_j^{+} + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_j^{-}
\end{cases}
\tag{۲۵-۳}
$$

درنتیجه شکل ماتریسی به صورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{cases}
Ax = c \\
A^{+}w - A^{-}z = g - Mx^{+} + Nx^{-} \\
-A^{-}w + A^{+}z = h - Nx^{+} + Mx^{-}
\end{cases}
\tag{۲۶-۳}
$$

بنابراین به کمک رابطه بالاجوابی برای دستگاه *FFRLS* (۳-۳)، در حالت دوم بدست می آید. □

۳-۳-٤ نتیجه: با به کاربردن نماد ماتریسی دستگاه بدست آمده در قضیه قبلی یعنی رابطه (۳-۲٦) به دستگاه زیر تبدیل می شود:

$$
\begin{cases}
Ax = c \\
SZ = T
\end{cases}
\tag{۲۷-۳}
$$

که در آن ماتریسهای S, Z و T به صورت زیر تعریف شده اند:

$$S=\begin{bmatrix} A^{+} & -A^{-} \\ -A^{-} & A^{+} \end{bmatrix},\ Z=\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}x^{+}+\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}x^{-} \qquad (۲۸-۳)$$

نتیجه بالا را می توان از نتیجه ۳-۳-۲ و با توجه به نکته ۳-۲-٦ وبه صورت زیر بدست می آید.

۳-۳-۵ نتیجه: رابطه (۳-۲۷) از رابطه (۳-١٦) ونکته ۳-۲-٦ و با فرضیات زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} A^{+}=B^{+},\ A^{-}=B^{-},\ x^{+}=y^{+},\ x^{-}=y^{-},\ c=d \\ M=M^{+}+M^{-},\ N=N^{+}+N^{-},\ w=w^{+}+w^{-},\ z=z^{+}+z^{-} \\ R=A,X=x,U=c,S=\begin{bmatrix} A^{+} & -A^{-} \\ -A^{-} & A^{+} \end{bmatrix} \\ Z=\begin{bmatrix} w \\ z \end{bmatrix},T=\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}x^{+}+\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}x^{-} \end{cases} \qquad (۲۹-۳)$$

در این رابطه $A, A^{+}, -A^{-}, M, N$، ماتریسهای کریسپ $m\times n$ و x, w, z, x^{+}, x^{-}، بردارهای کریسپ $n\times ۱$ و c, g, h، بردارهای کریسپ $m\times ۱$ هستند.

تاکنون جوابهای تقریبی، برای حالتهای ۱و۲ ازدستگاه $FFLS$ (۳-۳) را به ترتیب به کمک حل دستگاههای کریسپ در روابط (۳-١٦) و (۳-۲۷) بدست آوردیم و به کمک نتیجه اخیر مشاهده نمودیم که حالت ۲ را می توان با تغییراتی از حالت ۱ بدست آورد. به همین ترتیب دستگاههای کریسپ به دست آمده در حالتهای ۳ و ٤ نیز با تغییراتی از دستگاه (۳-١٦) حالت ۱ به دست می آیند که در این دستگاه، فقط مرتبه ماتریسهای به کار رفته تغییر می کنند. لذا در ادامه جوابهای حالت ۳ و ٤ را به صورت نتایج زیر بیان می کنیم.

۳-۳-٦ نتیجه (حالت ۳): در این حالت دستگاه $FFSLS$ (۳-۳) به دو دستگاه کریسپ (۳-١٦) تبدیل می شوند. در این رابطه ماتریسهای R, S وبردارهای X, Z, U, T در(۳-۱۷) تعریف شده اند. همچنین ماتریسهای $S_{۱}, S_{۲}, S_{۳}, S_{۴}, M_{۱}, M_{۲}, M_{۳}, M_{۴}$، ماتریسهای کریسپ $n\times ۲n$ و x, y, w, z، بردارهای کریسپ $۲n\times ۱$ و c, d, g, h ، بردارهای کریسپ $n\times ۱$ تعریف شده در (۳-۱۸) هستند.

۳-۳-۷ نتیجه (حالت ٤): در این حالت دستگاه $FFSLS$ (۳-۳) به دو دستگاه کریسپ (۳-١٦) تبدیل می شوند. در این رابطه ماتریسهای S, R و بردارهای X, Z, U, T در (۳-۲۹) تعریف شده اند تا اینکه رابطه (۳-۲۷) بدست آید. در این رابطه $A, A^{+}, -A^{-}, M, N$، ماتریسهای کریسپ $n\times n$ و x, w, z, x^{+}, x^{-} و c, g, h، بردارهای کریسپ $n\times ۱$ هستند که با مشخص شدن آنها می توان ماتریس S و بردارهای Z, T (۳-۲۸) را مشخص نمود.

همانطور که مشاهده شد برای حل دستگاه *FFLS* (۳-۳) ابتدا با تشخیص اینکه این دستگاه در کدامیک از چهار حالت قرار می گیرد آن را به دوستگاه معادلات خطی کریسپ تبدیل می کنیم که مرتبه هریک از این دستگاهها برای هر حالت در زیر خلاصه شده است:

$$\begin{cases} case\,1: \begin{cases} R_{2m\times 4n}X_{4n\times 1} = U_{2m\times 1} \\ S_{2m\times 4n}Z_{4n\times 1} = T_{2m\times 1} \end{cases} \\ case\,2: \begin{cases} A_{m\times n}x_{n\times 1} = c_{m\times 1} \\ S_{2m\times 2n}Z_{2n\times 1} = T_{2m\times 1} \end{cases} \\ case\,3: \begin{cases} R_{2n\times 4n}X_{4n\times 1} = U_{2n\times 1} \\ S_{2n\times 4n}Z_{4n\times 1} = T_{2n\times 1} \end{cases} \\ case\,4: \begin{cases} A_{n\times n}x_{n\times 1} = c_{n\times 1} \\ S_{2n\times 2n}Z_{2n\times 1} = T_{2n\times 1} \end{cases} \end{cases} \qquad (۳-۳۰)$$

حال با داشتن این دستگاهها چونکه کریسپ هستند آنها را با روشهای دستگاههای معمولی حل می کنیم. برای یافتن جواب دستگاههای بدست آمده در حالت اول (چونکه غیر مربعی هستند) با استفاده از شبه وارون همانند نتیجه ۲-۲-۲۱ وبه صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{cases} \begin{cases} X = R^{-1}U, \\ Z = S^{-1}T, \end{cases}, & if \;\; m = 2n = rank(R) = rank(S) \\ \begin{cases} X = R^{T}(RR^{T})^{-1}U = R^{+}U, \\ Z = S^{T}(SS^{T})^{-1}T = S^{+}T, \end{cases}, & if \;\; 2n > m = rank(R) = rank(S) \\ \begin{cases} X = (R^{T}R)^{-1}R^{T}U = R^{+}U, \\ Z = (S^{T}S)^{-1}S^{T}T = S^{+}T, \end{cases}, & if \;\; m > 2n = rank(R) = rank(S) \\ \begin{cases} X = \sum_{i=1}^{k}\frac{u_i^T b}{\sigma_i}v_i U = R^{+}U, \\ Z = \sum_{i=1}^{k}\frac{u_i^T b}{\sigma_i}v_i T = S^{+}T, \end{cases}, & if \;\; rank(R) = rank(S) = k \le min(m, 2n) \end{cases} \qquad (۳-۳۱)$$

جواب دستگاههای بدست آمده در حالت دوم هم چونکه غیر مربعی هستند توسط رابطه (۳-۳۱) وبه طور مشابه بالا به دست می آیند. برای بدست آوردن جواب مقدار میانی وپهنای جواب، دستگاههای حالتهای سوم وچهارم چونکه مربعی هستند می توان ازروشهای ماتریس وارون یا دستور کرامر ویا روشهای عددی استفاده کنیم. در بخش بعدی جوابهای دستگاه حالت چهارم را به کمک روش تکراری ژاکوبی وروش تجزیه آدومین به دست می آوریم.

شبه وارون ماتریس S در حالتهای دوم وچهارم به صورت زیر تعریف می شوند.

۳-۳-۸ قضیه: اگرماتریس S^+ موجود باشد آنگاه ساختاری شبیه ماتریس S خواهد داشت یعنی

$$S^+ = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} \tag{۳-۳۲}$$

که در آن

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2}[(A^+ - A^-)^+ + (A^+ + A^-)^+] \\ E = \frac{1}{2}[(A^+ - A^-)^+ - (A^+ + A^-)^+] \end{cases} \tag{۳-۳۳}$$

لازم به ذکر است که اگر ماتریس S مربعی باشد $(.)^{-1}$ جایگزین $(.)^+$ می شود.

اثبات: به منبع [۱۳] رجوع شود.

۳-۳-۹ قضیه: ماتریس S در حالت چهارم نامنفرد است اگر وتنهااگر ماتریسهای $A^+ + A^-$ و $A^+ - A^-$ نامنفرد باشند. ([۳۹] رانگاه کنید).

بردارهای x, y, w, z را می توان از دستگاه معادلات خطی(۳-۳۰) بدست آورد. در این حالت یک روش برای تقریب پهنای چپ و راست در صورت منفی بودن به صورت زیر می باشد.

۳-۳-۱۰ تعریف: فرض کنید $\tilde{x} = (x_j, y_j, w_j, z_j)$ که $1 \le j \le n$ مشخص کننده یک جواب یکتا از دستگاه معادلات (۳-۳۰) باشد در این صورت بردار فازی $\tilde{U} = (p_j, q_j, u_j, v_j)$ برای $1 \le j \le n$ که به صورت زیرتعریف می شود یک جواب فازی از دستگاه معادلات (۳-۳۰) نامیده می شود.

$$\begin{cases} p_j = x_j, 1 \le j \le n \\ q_j = y_j, 1 \le j \le n \\ u_j = |w_j|, 1 \le j \le n \\ v_j = |z_j|, 1 \le j \le n \end{cases} \tag{۳-۳۴}$$

یعنی اگربرای هر $1 \le j \le n$ ، (x_j, y_j, w_j, z_j) اعداد فازی باشند (در این صورت $z_j, w_j \ge 0$ خواهند بود) آنگاه برای هر $1 \le j \le n$، $u_j = w_j, v_j = z_j$ و در غیر این صورت برای هر $1 \le j \le n$، $u_j = |w_j|, v_j = |z_j|$ و $\tilde{U}$ یک جواب فازی نامیده می شود.

۳-۳-۱۱ مثال: دستگاه *FFLS* زیر راحل کنید.

$$\begin{cases}(۱,۱/۵,۰/۱,۰/۲)\otimes\tilde{x}=(۲,۴/۵,۱/۲,۲/۱)\\(-۲,-۱,۰/۷,۰/۳)\otimes\tilde{x}=(-۶,-۲,۲/۳,۱/۶)\end{cases}$$

واضح است که این دستگاه *FFRLS* و با اعداد فازی ذوزنقه ای *LR* است (حالت ۱). برای پیدا کردن جواب این دستگاه بایستی دو دستگاه معادلات خطی کریسپ (۳-۱٦) یعنی $RX=U$ ، $SZ=T$ را حل می کنیم که در آن :

$$R=\begin{bmatrix}۱&۱&۰&۰\\۰&۰&-۲&-۱\\۰&۰&۱/۵&۱\\-۱&-۲&۰&۰\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}۱&۱&۰&۰\\۰&۰&۲&۱\\۰&۰&۱/۵&۱\\۱&۲&۰&۰\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}۲\\-۶\\۴/۵\\-۲\end{bmatrix},\ T=\begin{bmatrix}۰/۴\\۰/۴\\۳\\۰/۴\end{bmatrix}$$

چونکه $\operatorname{rank}(R)=\operatorname{rank}(S)=4$ پس این دستگاه مربعی ورتبه کامل است بنابراین با استفاده از وارون ماتریسهای R ، S ، جواب را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$X=\begin{bmatrix}x^+\\x^-\\y^+\\y^-\end{bmatrix}=R^{-۱}U=\begin{bmatrix}۲\\۰\\۳\\۰\end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix}w^+\\w^-\\z^+\\z^-\end{bmatrix}=S^{-۱}T=\begin{bmatrix}۰/۴\\۰\\-۵/۲\\۱۰/۸\end{bmatrix}$$

و همچنین

$$\begin{cases}x=x^++x^-=۲+۰=۲\\y=y^++y^-=۳+۰=۳\\w=w^++w^-=۰/۴+۰=۰/۴\\z=z^++z^-=-۵/۲+۱۰/۸=۵/۶\end{cases}$$

بنابراین تقریبی از جواب دستگاه به صورت $\tilde{x}=(۲,۳,۰/۴,۵/۶)$ بدست می آید.

۳-۳-۱۲ مثال: فرض کنید $\tilde{A}=(A,B,M,N)$ و $\tilde{b}=(c,d,g,h)$ بترتیب یک ماتریس فازی و یک بردار فازی به صورت زیر باشند:

$$A=\begin{bmatrix}۱&۱/۵&۱\\-۱&۲&۰\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}۲&۲&۱/۵\\۰&۳&۱\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}۰/۱&۰/۳&۰/۲\\۰/۳&۰/۴&۰/۱\end{bmatrix},\ N=\begin{bmatrix}۰/۴&۰/۱&۰/۲\\۰/۲&۰/۳&۰/۱\end{bmatrix}$$

$$c=\begin{bmatrix}-۱\\-۷/۵\end{bmatrix},\ d=\begin{bmatrix}۵/۲۵\\۰/۵\end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix}۱/۶\\۲/۶۵\end{bmatrix},\ h=\begin{bmatrix}۳/۱۵\\۱/۷۵\end{bmatrix}$$

آنگاه دستگاه *FFLS*، $\tilde{A}\otimes\tilde{x}=\tilde{b}$ راحل کنید.

واضح است که این دستگاه *FFRLS* و با اعداد فازی ذوزنقه ای *LR* است (حالت ۱). برای پیدا کردن جواب این دستگاه بایستی دو دستگاه معادلات خطی کریسپ (۳-۱۶) یعنی $RX = U$,$SZ = T$ را حل می کنیم که در آن:

$$R = \begin{bmatrix} ۱ & ۱/۵ & ۱ & ۲ & ۲ & ۱/۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۱/۵ & ۱ & ۱/۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} -۱ \\ -۷/۵ \\ ۵/۲۵ \\ ۰/۵ \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} ۱ & ۱/۵ & ۱ & ۲ & ۲ & ۱/۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۲ & ۲ & ۱/۵ & ۱ & ۱/۵ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} ۲/۰۰۵۵ \\ ۲/۱۳۳۰ \\ ۲/۶۱۵۱ \\ ۲/۰۰۳۷ \end{bmatrix}$$

چونکه $\mathrm{rank}(R) = \mathrm{rank}(S) = 4$ پس این دستگاه فرومعین با رتبه کامل است بنابراین با استفاده از شبه وارون ماتریسهای S, R، (که توسط نرم افزار MATLAB و از تابع *pinv* بدست می آید) جواب را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$X = \begin{bmatrix} x^+ \\ x^- \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix} = R^+U = \begin{bmatrix} ۰/۴۷۵۳ \\ -۰/۸۵۲۹ \\ ۰/۴۷۵۳ \\ ۱/۱۱۵۱ \\ -۱/۳۹۸۲ \\ -۰/۰۷۰۰ \\ ۱/۵۲۹۴ \\ ۰/۲۵۲۸ \\ ۰/۳۹۵۳ \\ ۰/۳۷۳۲ \\ ۰/۲۳۰۷ \\ ۰/۳۷۳۲ \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} w^+ \\ w^- \\ z^+ \\ z^- \end{bmatrix} = S^+T = \begin{bmatrix} ۰/۱۰۸۴ \\ ۰/۲۴۷۵ \\ ۰/۱۰۸۴ \\ ۰/۲۱۰۷ \\ ۰/۳۴۴۲ \\ ۰/۲۰۵۱ \\ ۰/۴۰۰۳ \\ ۰/۳۳۹۵ \\ ۰/۲۶۲۳ \\ ۰/۱۷۸۹ \\ ۰/۲۵۶۱ \\ ۰/۱۷۸۹ \end{bmatrix}$$

وهمچنین

$$x = x^+ + x^- = \begin{bmatrix} x_۱^+ \\ x_۲^+ \\ x_۳^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_۱^- \\ x_۲^- \\ x_۳^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۵۹.۴ \\ -۲/۲۵۱۱ \\ ۰/۴۰۵۳ \end{bmatrix}, \quad y = y^+ + y^- = \begin{bmatrix} y_۱^+ \\ y_۲^+ \\ y_۳^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_۱^- \\ y_۲^- \\ y_۳^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۹۰۲۶ \\ ۰/۴۸۳۵ \\ ۰/۷۶۸۵ \end{bmatrix}$$

$$w = w^{+} + w^{-} = \begin{bmatrix} w_{۱}^{+} \\ w_{۲}^{+} \\ w_{۳}^{+} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{۱}^{-} \\ w_{۲}^{-} \\ w_{۳}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۳۱۹۱ \\ ۰/۵۹۱۷ \\ ۰/۳۱۳۵ \end{bmatrix}, \quad z = z^{+} + z^{-} = \begin{bmatrix} z_{۱}^{+} \\ z_{۲}^{+} \\ z_{۳}^{+} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{۱}^{-} \\ z_{۲}^{-} \\ z_{۳}^{-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۵۷۹۲ \\ ۰/۵۹۵۶ \\ ۰/۴۴۱۲ \end{bmatrix}$$

بنابراین جواب تقریبی این دستگاه به صورت زیرخواهد بود.

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{۱} \\ \tilde{x}_{۲} \\ \tilde{x}_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۱/۵۹۰۴, ۱/۹۰۲۶, ۰/۳۱۹۱, ۰/۵۷۹۲) \\ (-۲/۲۵۱۱, ۰/۴۸۳۵, ۰/۵۹۱۷, ۰/۵۹۵۶) \\ (۰/۴۰۵۳, ۰/۷۶۸۵, ۰/۳۱۳۵, ۰/۴۴۱۲) \end{bmatrix}$$

۳-۳-۱۳ مثال: دستگاه *FFLS* زیر راحل کنید(مثال ۵.۵ از مرجع [۳۰] است).

$$\begin{bmatrix} (۶,۱,۴) & (۵,۲,۲) & (۳,۲,۱) \\ (۱۲,۸,۲۰) & (۱۴,۱۲,۱۵) & (۸,۸,۱۰) \\ (۲۴,۱۰,۳۴) & (۳۲,۳۰,۳۰) & (۲۰,۱۹,۲۴) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{۱} \\ \tilde{x}_{۲} \\ \tilde{x}_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۵۸,۳۰,۶۰) \\ (۱۴۲,۱۳۹,۲۵۷) \\ (۳۱۶,۲۹۷,۵۱۴) \end{bmatrix}$$

واضح است که این دستگاه *FFSLS*و با اعداد فازی مثلثی *LR* است (حالت ٤). برای پیدا کردن جواب این دستگاه بایستی دو دستگاه معادلات خطی کریسپ از حالت ٤ (۳-۳۰) یعنی $Ax = c$, $SZ = T$ را حل کنیم. ابتدا به کمک معادله $Ax = c$ ، جواب x رابدست می آوریم.

$$Ax = c \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & ۵ & ۳ \\ ۱۲ & ۱۴ & ۸ \\ ۲۴ & ۳۲ & ۲۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵۸ \\ ۱۴۲ \\ ۳۱۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \\ x_{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

چونکه تمامی مولفه های بردار x نامنفی هستند، لذا به کمک معادله $T = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} x^{+} + \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} x^{-} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} x^{+}$، بردار T را محاسبه و سپس به کمک معادله $SZ = T$، Z را بدست می آوریم؛ یعنی:

$$T = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} x^{+} = \begin{bmatrix} ۳۰ \\ ۱۳۹ \\ ۲۹۷ \\ ۶۰ \\ ۲۵۷ \\ ۵۱۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۸ & ۱۲ & ۸ \\ ۱۰ & ۳۰ & ۱۹ \\ ۴ & ۲ & ۱ \\ ۲۰ & ۱۵ & ۱۰ \\ ۳۴ & ۳۰ & ۲۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۳ \\ ۵۰ \\ ۳۱ \\ ۷۲ \\ ۱۵۶ \end{bmatrix}$$

و

$$SZ=T \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & ۵ & ۳ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱۲ & ۱۴ & ۸ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۲۴ & ۳۲ & ۲۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۶ & ۵ & ۳ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱۲ & ۱۴ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۲۴ & ۳۲ & ۲۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_۱ \\ w_۲ \\ w_۳ \\ z_۱ \\ z_۲ \\ z_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ \\ ۲۳ \\ ۵۰ \\ ۳۱ \\ ۷۲ \\ ۱۵۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_۱ \\ w_۲ \\ w_۳ \\ z_۱ \\ z_۲ \\ z_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۰۰۰۰ \\ ۰/۵۰۰۰ \\ ۰/۵۰۰۰ \\ ۳/۰۰۰۰ \\ ۲/۰۰۰۰ \\ ۱/۰۰۰۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین $Z^T=[w_۱ \;\; w_۲ \;\; w_۳ \;\; z_۱ \;\; z_۲ \;\; z_۳]=[۱ \;\; ۰/۵ \;\; ۰/۵ \;\; ۳ \;\; ۲ \;\; ۱]$ و در نهایت تقریبی از جواب دستگاه $FFLS$ بالا به صورت زیر نوشته می شود، که مشابه جواب بدست آمده در مرجع [۳۰] می باشد.

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix} (۴,۱,۳) \\ (۵,۰/۵,۲) \\ (۳,۰/۵,۱) \end{bmatrix}$$

۳-۳-۱٤ مثال: دستگاه $FFLS$ زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} (۲,۰/۱,۰/۳) & (۱,۰/۲,۰/۲) & (-۴,۰/۳,۰/۱) & (۳,۰/۴,۰/۴) \\ (-۵,۰/۲,۰/۱) & (۳,۰/۱,۰/۵) & (۴,۰/۵,۰/۳) & (-۳,۰/۳,۰/۲) \\ (۱,۰/۱,۰/۴) & (۵,۰/۴,۰/۳) & (-۴,۰/۲,۰/۲) & (۲,۰/۱,۰/۵) \\ (۶,۰/۵,۰/۱) & (-۱,۰/۳,۰/۳) & (۲,۰/۱,۰/۲) & (۱,۰/۴,۰/۱) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_۱ \\ \tilde{x}_۲ \\ \tilde{x}_۳ \\ \tilde{x}_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-۱۶/۶۵۷,۲۰/۵۵۷۴,۲۰/۰۷۹۸) \\ (-۰/۷۰۳۰,۳۱/۳۶۵۹,۲۵/۱۶۷۳) \\ (-۲۲/۹۶۳۰,۲۶/۳۱۳۵,۲۰/۹۶۴۲) \\ (۲۲/۹۹۳۰,۱۵/۱۰۰۳,۲۳/۸۹۸۵) \end{bmatrix}$$

واضح است که این دستگاه $FFSLS$ و با اعداد فازی مثلثی LR است (حالت ٤). برای پیدا کردن جواب این دستگاه بایستی دو دستگاه معادلات خطی کریسپ یعنی $Ax=c$ ،$SZ=T$ را حل می کنیم. ابتدا به کمک معادله $Ax=c$ ، جواب x رابدست می آوریم.

$$Ax=C \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۴ & ۳ \\ -۵ & ۳ & ۴ & -۳ \\ ۱ & ۵ & -۴ & ۲ \\ ۶ & -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۶/۶۵۷ \\ -۰/۷۰۳۰ \\ -۲۲/۹۶۳۰ \\ ۲۲/۹۹۳۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۴۵۲۰ \\ -۱/۷۵۱۰ \\ ۲/۳۴۰۰ \\ -۴/۱۵۰۰ \end{bmatrix}$$

چونکه مولفه های بردار x ترکیبی هستند (یعنی بعضی از درایه ها مثبت وبرخی دیگر منفی هستند) پس به کمک معادله $T=\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}x^{+}+\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}x^{-}$ ، T رابدست می آوریم؛ یعنی:

$$T=\begin{bmatrix}۲۰/۵۵۷۴\\۳۱/۳۶۵۹\\۲۶/۳۱۳۵\\۱۵/۱۰۰۳\\۲۰/۰۷۹۸\\۲۵/۱۶۷۳\\۲۰/۹۶۴۲\\۲۳/۸۹۸۵\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۰/۱&۰/۲&۰/۳&۰/۴\\۰/۲&۰/۱&۰/۵&۰/۳\\۰/۱&۰/۴&۰/۲&۰/۱\\۰/۵&۰/۳&۰/۱&۰/۴\\۰/۳&۰/۲&۰/۱&۰/۴\\۰/۱&۰/۵&۰/۳&۰/۲\\۰/۴&۰/۳&۰/۲&۰/۵\\۰/۱&۰/۳&۰/۲&۰/۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳/۴۵۲۰\\۰\\۲/۳۴۰۰\\۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰/۳&۰/۲&۰/۱&۰/۴\\۰/۱&۰/۵&۰/۳&۰/۲\\۰/۴&۰/۳&۰/۲&۰/۵\\۰/۱&۰/۳&۰/۲&۰/۱\\۰/۱&۰/۲&۰/۳&۰/۴\\۰/۲&۰/۱&۰/۵&۰/۳\\۰/۱&۰/۴&۰/۲&۰/۱\\۰/۵&۰/۳&۰/۱&۰/۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\-۱/۷۵۱۰\\۰\\-۴/۱۵۰۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷/۵۰۰۰\\۲۷/۸۰۰۰\\۲۲/۹۰۰۰\\۱۲/۲۰۰۰\\۱۶/۸۰۰۰\\۲۲/۷۰۰۰\\۱۸/۰۰۰۰\\۲۰/۹۰۰۰\end{bmatrix}$$

سپس به کمک معادله $SZ=T$ ، Z را پیدا می کنیم؛ یعنی:

$$SZ=T\Rightarrow\begin{bmatrix}۲&۱&۰&۳&۰&۰&۴&۰\\۰&۳&۴&۰&۵&۰&۰&۳\\۱&۵&۰&۲&۰&۰&۴&۰\\۶&۰&۲&۱&۰&۱&۰&۰\\۰&۰&۴&۰&۲&۱&۰&۳\\۵&۰&۰&۳&۰&۳&۴&۰\\۰&۰&۴&۰&۱&۵&۰&۲\\۰&۱&۰&۰&۶&۰&۲&۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_۱\\w_۲\\w_۳\\w_۴\\z_۱\\z_۲\\z_۳\\z_۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۷/۵۰۰۰\\۲۷/۸۰۰۰\\۲۲/۹۰۰۰\\۱۲/۲۰۰۰\\۱۶/۸۰۰۰\\۲۲/۷۰۰۰\\۱۸/۰۰۰۰\\۲۰/۹۰۰۰\end{bmatrix}\Rightarrow Z=\begin{bmatrix}۱/۱۰۰۰\\۲/۰۰۰۰\\۱/۴۰۰۰\\۱/۵۰۰۰\\۲/۱۰۰۰\\۱/۳۰۰۰\\۲/۲۰۰۰\\۱/۹۰۰۰\end{bmatrix}$$

بنابراین $Z=[۱/۱۰۰۰\quad ۲/۰۰۰۰\quad ۱/۴۰۰۰\quad ۱/۵۰۰۰\quad ۲/۱۰۰۰\quad ۱/۳۰۰۰\quad ۲/۲۰۰۰\quad ۱/۹۰۰۰]^T$ و درنهایت جواب تقریبی دستگاه $FFLS$ بالا به صورت زیر نوشته می شود.

$$\tilde{x}=\begin{bmatrix}(۳/۴۵۲۰,۱/۱۰۰۰,۲/۱۰۰۰)\\(-۱/۷۵۱۰,۲/۰۰۰۰,۱/۳۰۰۰)\\(۲/۳۴۰۰,۱/۴۰۰۰,۲/۲۰۰۰)\\(-۴/۱۵۰۰,۱/۵۰۰۰,۱/۹۰۰۰)\end{bmatrix}$$

۳-۳-۱۵ مثال: (مثال ۵.۱ از [۳۹]) فرض کنید $\tilde{A}=(A,M,N)$ و $\tilde{c}=(c,g,h)$ به ترتیب یک ماتریس فازی و یک بردار فازی به صورت زیر باشند آنگاه دستگاه $FFLS$ ، $\tilde{A}\otimes\tilde{x}=\tilde{c}$ راحل کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۳&۲&۵&۸\\-۲&۴&۱&-۳\\۱&۳&۴&۵\\۱&-۱&۶&۲\end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix}۰/۱&۰/۳&۰/۲&۰/۵\\۰/۱&۰/۲&۰/۴&۰/۱\\۰/۲&۰/۳&۰/۵&۰/۱\\۰/۱&۰/۲&۰/۳&۰/۴\end{bmatrix},\quad N=\begin{bmatrix}۰/۲&۰/۳&۰/۱&۰/۲\\۰/۳&۰/۱&۰/۲&۰/۴\\۰/۳&۰/۱&۰/۲&۰/۱\\۰/۲&۰/۳&۰/۱&۰/۴\end{bmatrix}$$

$$c=[۳\quad ۶\quad ۲\quad ۸]^T,\qquad g=[۰/۸\quad ۰/۹\quad ۰/۴\quad ۰/۷]^T,\qquad h=[۰/۹\quad ۰/۷\quad ۰/۸\quad ۰/۴]^T$$

واضح است که این دستگاه *FFSLS* و با اعداد فازی مثلثی *LR* است (حالت ٤). بنابراین ابتدا به کمک معادله $Ax = c$، جواب x را بدست می آوریم.

$$Ax = c \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ & ۸ \\ -۲ & ۴ & ۱ & -۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۱ & -۱ & ۶ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۶ \\ ۲ \\ ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \\ x_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳/۹۵۸۰ \\ ۱/۲۰۱۷ \\ ۱/۶۹۷۵ \\ -۲/۴۷۰۶ \end{bmatrix}$$

سپس به کمک معادله $T = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} x^+ + \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} x^-$ ، T رابدست می آوریم، یعنی:

$$T = \begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۹ \\ ۰/۴ \\ ۰/۷ \\ ۰/۹ \\ ۰/۷ \\ ۰/۸ \\ ۰/۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰/۱ & ۰/۳ & ۰/۲ & ۰/۵ \\ ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۴ & ۰/۱ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۵ & ۰/۱ \\ ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۴ \\ ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۱ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳/۹۵۸۰ \\ ۱/۲۰۱۷ \\ ۱/۶۹۷۵ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۲ \\ ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۴ \\ ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۱ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۱ & ۰/۴ \\ ۰/۱ & ۰/۳ & ۰/۲ & ۰/۵ \\ ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۴ & ۰/۱ \\ ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۵ & ۰/۱ \\ ۰/۱ & ۰/۲ & ۰/۳ & ۰/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ -۲/۴۷۰۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۷۸۹۹ \\ -۱/۴۰۳۴ \\ -۱/۸۴۷۹ \\ -۱/۴۳۳۶ \\ -۱/۶۵۷۲ \\ -۱/۱۹۴۱ \\ -۱/۰۹۴۱ \\ -۱/۹۱۰۱ \end{bmatrix}$$

و به کمک معادله $SZ = T$ ، Z را محاسبه می کنیم؛ یعنی:

$$SZ = T \Rightarrow \begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۵ & ۸ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۳ \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۶ & ۲ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۳ & ۲ & ۵ & ۸ \\ ۲ & ۰ & ۰ & ۳ & ۰ & ۴ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۶ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \\ y_۴ \\ z_۱ \\ z_۲ \\ z_۳ \\ z_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۰/۷۸۹۹ \\ -۱/۴۰۳۴ \\ -۱/۸۴۷۹ \\ -۱/۴۳۳۶ \\ -۱/۶۵۷۲ \\ -۱/۱۹۴۱ \\ -۱/۰۹۴۱ \\ -۱/۹۱۰۱ \end{bmatrix} \Rightarrow Z = \begin{bmatrix} ۱/۱۳۷۵ \\ -۰/۰۹۵۱ \\ -۰/۲۱۹۹ \\ -۰/۳۶۴۰ \\ -۱/۲۶۳۵ \\ -۰/۵۲۳۴ \\ -۰/۲۸۳۵ \\ -۰/۵۷۴۷ \end{bmatrix}$$

بنابراین $Z = [w \;\; z]^T$ که $w = [۱/۱۳۷۵ \;\; -۰/۰۹۵۱ \;\; -۰/۲۱۹۹ \;\; -۰/۳۶۴۰]$ و $z = [-۱/۲۶۳۵ \;\; -۰/۵۲۳۴ \;\; -۰/۲۸۳۵ \;\; ۰/۵۷۴۷]$ می باشند.

لازم به ذکر است که در [29]، جواب Y و Z اشتباه محاسبه شده است (مرجع [۳۹] راببنید).

چونکه برخی از مؤلفه های جواب Y و Z (یعنی پهناهای چپ وراست) در این مثال منفی هستند لذا برای $۱ \leq j \leq ۴$ با فرض: $p_j = x_j ,u_j = |w_j| ,v_j = |z_j|$، تقریبی از جواب فازی $\tilde{U} = (p_j, u_j, v_j)$ برای $۱ \leq j \leq ۴$، به صورت زیر بدست می آید.

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} (۳/۹۵۸۰, ۱/۱۳۷۵, ۱/۲۶۳۵) \\ (۱/۲۰۱۷, ۰/۰۹۵۱, ۰/۵۲۳۴) \\ (۱/۶۹۷۵, ۰/۲۱۹۹, ۰/۲۸۳۵) \\ (-۲/۴۷۰۶, ۰/۳۶۴۰, ۰/۵۷۴۷) \end{bmatrix}$$

۳-٤ روشهای عددی برای حل دستگاه FFSLS

در این بخش برای حل دستگاههای معادلات خطی مربعی وبا اعداد فازی مثلثی LR (حالت ٤) روش تکراری ژاکوبی و روش تجزیه آدومین را معرفی می کنیم. در بخش قبلی دستگاه $FFSLS$ را در حالت کلی و با نماد ماتریسی $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{c}$ معرفی کردیم. در این بخش چونکه روشهای عددی را فقط برای دستگاههایی با اعداد فازی مثلثی به کار می بریم لذا از نماد مرسوم $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ استفاده می کنیم یعنی دستگاه معادلات خطی $n \times n$ را بصورت زیرتعریف می کنیم.

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{۱۱} \otimes \tilde{x}_۱) \oplus (\tilde{a}_{۱۲} \otimes \tilde{x}_۲) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{۱n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_۱ \\ (\tilde{a}_{۲۱} \otimes \tilde{x}_۱) \oplus (\tilde{a}_{۲۲} \otimes \tilde{x}_۲) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{۲n} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_۲ \\ \vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ (\tilde{a}_{n۱} \otimes \tilde{x}_۱) \oplus (\tilde{a}_{n۲} \otimes \tilde{x}_۲) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{nn} \otimes \tilde{x}_n) = \tilde{b}_n \end{cases} \qquad (۳-۳۵)$$

همانطور که اشاره شد فرم ماتریسی این دستگاه بصورت $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ است که در آن برای $۱ \leq i, j \leq n$ ماتریس ضرایب $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) = (A, M, N)$ یک ماتریس فازی $n \times n$ و برای $۱ \leq i, j \leq n$ بردارهای $\tilde{x} = (\tilde{x}_j) = (x, y, z)$ و $\tilde{b} = (\tilde{b}_i) = (b, g, h)$ بردارهای فازی $n \times ۱$ می باشند.

۳-٤-۱ روش تکراری ژاکوبی برای حل دستگاه FFSLS:

دربخش قبلی دستگاه $FFSLS$ در حالت ٤ را به دو دستگاه کریسپ (۳-۱۹) تبدیل کردیم. درروش ژاکوبی نیز به تبدیل (۳-۱۹) نیازمندیم دراین صورت دستگاه $FFSLS$ (۳-۳۵) یعنی $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ را همانند رابطه (۳-۱۹) وبه صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{cases} Ax = b \\ A^+y - A^-z = g - Mx^+ + Nx^- \\ -A^-y + A^+z = h - Nx^+ + Mx^- \end{cases} \qquad (۳-۳۶)$$

فرض کنید که در این دستگاه؛ یعنی (۳-۳٦)، می توان ماتریسهای A و A^+ رابه صورت زیر تجزیه کرد:

$$\begin{cases} A = D_A + L_A + U_A \\ A^+ = D_{A^+} + L_{A^+} + U_{A^+} \end{cases} \qquad (۳۷-۳)$$

که ماتریسهای D_A و D_{A^+} ماتریسهای قطری، ماتریسهای L_A و L_{A^+} ماتریسهای پایین مثلثی اکید و ماتریسهای U_A و U_{A^+} ماتریسهای بالامثلثی اکید هستند و همچنین بدون از دست دادن کلیت مسأله می توان فرض کرد که برای هر $i = ۱,\dots,n$ ، $D_{ii} = a_{ii} \neq ۰$ و $D_{ii}^+ = a_{ii}^+ \neq ۰$ می باشند. حال دستگاه معادلات (۳-۲۵) را با نمادگذاری جدید و به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{cases} \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j = b_i \\ \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^+ y_j - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^- z_j = g_i - \sum_{j=۱}^{n} m_{ij} x_j^+ + \sum_{j=۱}^{n} n_{ij} x_j^- \\ -\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^- y_j + \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^+ z_j = h_i - \sum_{j=۱}^{n} n_{ij} x_j^+ + \sum_{j=۱}^{n} m_{ij} x_j^- \end{cases} \qquad (۳۸-۳)$$

این دستگاه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} x_i = \frac{۱}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j) \\ y_i = \frac{۱}{a_{ii}^+} [g_i - (\sum_{j=۱, j\neq i}^{n} a_{ij}^+ y_j - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^- z_j + \sum_{j=۱}^{n} m_{ij} x_j^+ - \sum_{j=۱}^{n} n_{ij} x_j^-)] \\ z_i = \frac{۱}{a_{ii}^+} [h_i - (\sum_{j=۱, j\neq i}^{n} a_{ij}^+ z_j - \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^- y_j + \sum_{j=۱}^{n} n_{ij} x_j^+ - \sum_{j=۱}^{n} m_{ij} x_j^-) \end{cases} \qquad (۳۹-۳)$$

که فرایند تکراری روش ژاکوبی را به صورت زیر، پیشنهاد می دهیم:

$$\begin{cases} x_i^{k+۱} = \frac{۱}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^k) \\ y_i^{k+۱} = \frac{۱}{a_{ii}^+} (g_i - \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} a_{ij}^+ y_j^k + \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^- z_j^k - \sum_{j=۱}^{n} m_{ij} x_j^{+k} + \sum_{j=۱}^{n} n_{ij} x_j^{-k}) \\ z_i^{k+۱} = \frac{۱}{a_{ii}^+} (h_i - \sum_{j=۱, j\neq i}^{n} a_{ij}^+ z_j^k + \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^- y_j^k - \sum_{j=۱}^{n} n_{ij} x_j^{+k} + \sum_{j=۱}^{n} m_{ij} x_j^{-k}) \end{cases} \qquad (۴۰-۳)$$

با انتخاب بردار اولیه $\tilde{x}^{(0)}=(x^{(0)},y^{(0)},z^{(0)})$ براحتی می توان جواب بهتری را برآورد کرد؛ به عبارت دیگر روش ژاکوبی به صورت زیر نوشته می شود:

$$(\text{۴۱-۳})\quad \begin{cases} x^{k+1}=-D_A^{-1}(L_A+U_A)x^k+D_A^{-1}b \\ y^{k+1}=-D_{A^+}^{-1}(L_{A^+}+U_{A^+})y^k+D_{A^+}^{-1}A^-z^k-D_{A^+}^{-1}Mx^{+k}+D_{A^+}^{-1}Nx^{-k}+D_{A^+}^{-1}g \\ z^{k+1}=-D_{A^+}^{-1}(L_{A^+}+U_{A^+})z^k+D_{A^+}^{-1}A^-y^k-D_{A^+}^{-1}Nx^{+k}+D_{A^+}^{-1}Mx^{-k}+D_{A^+}^{-1}h \end{cases}$$

که اگر ماتریسهای تکراری ژاکوبی P,T و Q (که ماتریسهای کریسپی هستند) وهمچنین بردارهای تکرار c_1, c_2 و بردارهای X , Y رابه صورت زیر معرفی کنیم:

$$(\text{۴۲-۳})\quad \begin{cases} T=-D_A^{-1}(L_A+U_A) \\ P=\begin{bmatrix} -D_{A^+}^{-1}(L_{A^+}+U_{A^+}) & D_{A^+}^{-1}A^- \\ D_{A^+}^{-1}A^- & -D_{A^+}^{-1}(L_{A^+}+U_{A^+}) \end{bmatrix} \\ Q=\begin{bmatrix} -D_{A^+}^{-1}M & D_{A^+}^{-1}N \\ -D_{A^+}^{-1}N & D_{A^+}^{-1}M \end{bmatrix} \\ c_1=D_A^{-1}b \\ c_2=[D_{A^+}^{-1}g,D_{A^+}^{-1}h]^T \\ Y=[y,z]^T \\ X=[x^+,x^-]^T \end{cases}$$

روش تکراری ژاکوبی برای $k\geq 0$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$(\text{۴۳-۳})\quad \begin{cases} x^{k+1}=Tx^k+c_1 \\ Y^{k+1}=PY^k+QX^k+c_2 \end{cases}$$

۳-۴-۲ روش تجزیه آدومین برای حل دستگاه $FFSLS$:

فرم دستگاه (۳-۳۹) راقبلاً از دستگاه $FFSLS$ (۳-۳۵) یعنی $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ بدست آوردیم حال برای این فرم می توان شکل کانونی معادلات آدومین را به صورت زیر بنویسیم:

$$
\begin{cases}
x_i = c_i + s_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\
y_i = d_i + s_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) + p_i(z_1, z_2, \dots, z_n) + \\
\quad + t_i(x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+) + v_i(x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-) \\
z_i = e_i + s_i(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) + q_i(y_1, y_2, \dots, y_n) + \\
\quad + u_i(x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+) + w_i(x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-)
\end{cases}
\qquad (۳-٤٤)
$$

که در آن توابع $s_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ ، $s_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$، $s_i(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n)$، $p_i(z_1, z_2, \dots, z_n)$، $q_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$، $t_i(x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+)$، $u_i(x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+)$، $v_i(x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-)$ و $w_i(x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-)$ توابعی خطی و c_i ، d_i و e_i اعداد ثابتی می باشند.

با به کاربردن روش تجزیه آدومین، فرض کنید:

$$
\begin{cases}
x_i = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im} \\
y_i = \sum_{m=0}^{\infty} y_{im} \\
z_i = \sum_{m=0}^{\infty} z_{im}
\end{cases}
\qquad (۳-٤٥)
$$

و

$$
\begin{cases}
s_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \\
s_i(y_1, y_2, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A'_{im} \\
s_i(z_1, z_2, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A''_{im} \\
p_i(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{im} \\
q_i(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{im} \\
t_i(x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+) = \sum_{m=0}^{\infty} D_{im} \\
u_i(x_1^+, x_2^+, \dots, x_n^+) = \sum_{m=0}^{\infty} E_{im} \\
v_i(x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-) = \sum_{m=0}^{\infty} F_{im} \\
w_i(x_1^-, x_2^-, \dots, x_n^-) = \sum_{m=0}^{\infty} G_{im}
\end{cases}
\qquad (۳-٤٦)
$$

در این رابطه برای $m = 0, 1, 2, \dots$ ، $A_{im}, A'_{im}, A''_{im}, B_{im}, C_{im}, D_{im}, E_{im}, F_{im}$ و G_{im} چندجمله ایهای آدومین می باشند بنابراین (۳-٤٤) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\infty} x_{im} = c_i + \sum_{m=0}^{\infty} A_{i,m}(x_{10},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n0},\ldots,x_{nm}) \\ \sum_{m=0}^{\infty} y_{im} = d_i + \sum_{m=0}^{\infty} A'_{im}(y_{10},\ldots,y_{1m},\ldots,y_{n0},\ldots,y_{nm}) + \sum_{m=0}^{\infty} B_{im}(z_{10},\ldots,z_{1m},\ldots,z_{n0},\ldots,z_{nm}) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} D_{im}(x_{10}^{+},\ldots,x_{1m}^{+},\ldots,x_{n0}^{+},\ldots,x_{nm}^{+}) + \sum_{m=0}^{\infty} F_{im}(x_{10}^{-},\ldots,x_{1m}^{-},\ldots,x_{n0}^{-},\ldots,x_{nm}^{-}) \\ \sum_{m=0}^{\infty} z_{im} = e_i + \sum_{m=0}^{\infty} A''_{im}(z_{10},\ldots,z_{1m},\ldots,z_{n0},\ldots,z_{nm}) + \sum_{m=0}^{\infty} C_{im}(y_{10},\ldots,y_{1m},\ldots,y_{n0},\ldots,y_{nm}) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} E_{im}(x_{10}^{+},\ldots,x_{1m}^{+},\ldots,x_{n0}^{+},\ldots,x_{nm}^{+}) + \sum_{m=0}^{\infty} G_{im}(x_{10}^{-},\ldots,x_{1m}^{-},\ldots,x_{n0}^{-},\ldots,x_{nm}^{-}) \end{cases} \qquad (۳-۴۷)$$

باتوجه به رابطه بالا، تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} x_{i0} = c_i \\ x_{i,m+1} = A_{im}(x_{10},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n0},\ldots,x_{nm}), \; i = 1,\ldots,n \end{cases} \qquad (۳-۴۸)$$

و

$$\begin{cases} y_{i0} = d_i \\ y_{i,m+1} = A'_{im}(y_{10},\ldots,y_{1m},\ldots,y_{n0},\ldots,y_{nm}) + B_{im}(z_{10},\ldots,z_{1m},\ldots,z_{n0},\ldots,z_{nm}) \\ + D_{im}(x_{10}^{+},\ldots,x_{1m}^{+},\ldots,x_{n0}^{+},\ldots,x_{nm}^{+}) + F_{im}(x_{10}^{-},\ldots,x_{1m}^{-},\ldots,x_{n0}^{-},\ldots,x_{nm}^{-}), \quad i = 1,\ldots,n \end{cases} \qquad (۳-۴۹)$$

و

$$\begin{cases} z_{i0} = e_i \\ z_{i,m+1} = A''_{im}(z_{10},\ldots,z_{1m},\ldots,z_{n0},\ldots,z_{nm}) + C_{im}(y_{10},\ldots,y_{1m},\ldots,y_{n0},\ldots,y_{nm}) \\ + E_{im}(x_{10}^{+},\ldots,x_{1m}^{+},\ldots,x_{n0}^{+},\ldots,x_{nm}^{+}) + G_{im}(x_{10}^{-},\ldots,x_{1m}^{-},\ldots,x_{n0}^{-},\ldots,x_{nm}^{-}), \quad i = 1,\ldots,n \end{cases} \qquad (۳-۵۰)$$

y_i, x_i و z_i را به وسیله $\phi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$، $\phi'_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} y_{im}$ و $\phi''_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} z_{im}$ تقریب می زنیم. که در آن $\lim_{k\to\infty}\phi_{ik} = x_i$، $\lim_{k\to\infty}\phi'_{ik} = y_i$ و $\lim_{k\to\infty}\phi''_{ik} = z_i$. می باشند. با مشخص کردن چندجمله ایهای آدومین از مرتبه n، داریم:

$$x_{i\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m x_{im} \qquad (۳-۵۱)$$

$$s_{i\lambda}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m A_{im} \qquad (۳-۵۲)$$

$$y_{i\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m y_{im} \qquad (۳-۵۳)$$

$$\begin{cases} s_{i\lambda}(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m A'_{im} \\ p_{i\lambda}(z_1,\dots,z_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m B_{im} \\ t_{i\lambda}(x_1^+,\dots,x_n^+)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m D_{im} \\ v_{i\lambda}(x_1^-,\dots,x_n^-)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m F_{im} \end{cases} \qquad (۳-۵۴)$$

$$z_{i\lambda}=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m z_{im} \qquad (۳-۵۵)$$

$$\begin{cases} s_{i\lambda}(z_1,\dots,z_{i-1},z_{i+1},\dots,z_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m A''_{im} \\ q_{i\lambda}(y_1,\dots,y_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m c_{im} \\ u_{i\lambda}(x_1^+,\dots,x_n^+)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m E_{im} \\ w_{i\lambda}(x_1^-,\dots,x_n^-)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m G_{im} \end{cases} \qquad (۳-۵۶)$$

λ یک پارامتر است که به راحتی مشخص می شود ([۱۰] رانگاه کنید) و برای $m\geq 0$، مؤلفه های x_{im}، y_{im} و z_{im}رامی توان از روابط بازگشتی تعیین کرد. از رابطه های (۳-۵۲)، (۳-۵۴) و (۳-۵۶) داریم:

$$\begin{cases} A_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}s_{i\lambda}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)]_{\lambda=0} \\ A'_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}s_{i\lambda}(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n)]_{\lambda=0} \\ A''_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}s_{i\lambda}(z_1,\dots,z_{i-1},z_{i+1},\dots,z_n)]_{\lambda=0} \\ B_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}p_{i\lambda}(z_1,\dots,z_n)]_{\lambda=0} \\ C_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}q_{i\lambda}(y_1,\dots,y_n)]_{\lambda=0} \\ D_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}t_{i\lambda}(x_1^+,\dots,x_n^+)]_{\lambda=0} \\ E_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}u_{i\lambda}(x_1^+,\dots,x_n^+)]_{\lambda=0} \\ F_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}v_{i\lambda}(x_1^-,\dots,x_n^-)]_{\lambda=0} \\ G_{i,m}=\frac{1}{m!}[\frac{d^m}{d\lambda^m}w_{i\lambda}(x_1^-,\dots,x_n^-)]_{\lambda=0} \end{cases} \qquad (۳-۵۷)$$

از رابطه های (۳-۵۱)، (۳-۵۳) ، (۳-۵۵) و (۳-۵۷) خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
A_{i,m}(x_{10},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n0},\ldots,x_{nm}) = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}\left[\frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l x_{jl}\right]_{\lambda=0} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_{jm} \\
A'_{i,m}(y_{10},\ldots,y_{1m},\ldots,y_{n0},\ldots,y_{nm}) = -\frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}^{+}y_{jm} \\
A''_{i,m}(z_{10},\ldots,z_{1m},\ldots,z_{n0},\ldots,z_{nm}) = -\frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}^{+}z_{jm} \\
B_{i,m}(z_{10},\ldots,z_{1m},\ldots,z_{n0},\ldots,z_{nm}) = \frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}z_{jm} \\
C_{i,m}(y_{10},\ldots,y_{1m},\ldots,y_{n0},\ldots,y_{nm}) = \frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}y_{jm} \\
D_{i,m}(x_{10}^{+},\ldots,x_{1m}^{+},\ldots,x_{n0}^{+},\ldots,x_{nm}^{+}) = -\frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{jm}^{+} \\
E_{i,m}(x_{10}^{+},\ldots,x_{1m}^{+},\ldots,x_{n0}^{+},\ldots,x_{nm}^{+}) = -\frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_{jm}^{+} \\
F_{i,m}(x_{10}^{-},\ldots,x_{1m}^{-},\ldots,x_{n0}^{-},\ldots,x_{nm}^{-}) = \frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_{jm}^{-} \\
G_{i,m}(x_{10}^{-},\ldots,x_{1m}^{-},\ldots,x_{n0}^{-},\ldots,x_{nm}^{-}) = \frac{1}{a_{ii}^{+}}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{jm}^{-}
\end{cases}
$$
(۵۸-۳)

بنابراین، برای حل دستگاه $FFLS$ می توان گفت:

$$
\begin{cases}
x_{i0} = c_i \\
x_{i,m+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}x_{jm} \quad i=1,\ldots,n, \quad m=0,1,2,\ldots
\end{cases}
$$
(۵۹-۳)

و

$$
\begin{cases}
y_{i0} = d_i \\
y_{i,m+1} = -\frac{1}{a_{ii}^{+}}\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}^{+}y_{jm} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}z_{jm} + \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{jm}^{+} - \sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_{jm}^{-}\right], \quad i=1,\ldots,n, \quad m=0,1,2,\ldots
\end{cases}
$$
(۶۰-۳)

و

$$
\begin{cases}
z_{i0} = e_i \\
z_{i,m+1} = -\frac{1}{a_{ii}^{+}}\left[\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{ij}^{+}z_{jm} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{-}y_{jm} + \sum_{j=1}^{n} n_{ij}x_{jm}^{+} - \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_{jm}^{-}\right], \quad i=1,\ldots,n, \quad m=0,1,2,\ldots
\end{cases}
$$
(۶۱-۳)

بادر نظر گرفتن تجزیه (۳-۳۷)، شکل ماتریسی روش آدومین به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{cases} x^{(0)} = D_A^{-1} b \\ y^{(0)} = D_{A^+}^{-1} g \\ z^{(0)} = D_{A^+}^{-1} h \\ x^{(k+1)} = -D_A^{-1}(L_A + U_A) x^{(k)} \\ y^{(k+1)} = -D_{A^+}^{-1}(L_{A^+} + U_{A^+}) y^k + D_{A^+}^{-1} A^- z^k - D_{A^+}^{-1} M x^{+k} + D_{A^+}^{-1} N x^{-k} \\ z^{(k+1)} = -D_{A^+}^{-1}(L_{A^+} + U_{A^+}) z^k + D_{A^+}^{-1} A^- y^k - D_{A^+}^{-1} N x^{+k} + D_{A^+}^{-1} M x^{-k} \end{cases} \qquad (۳-۶۲)$$

ازروابط (۳-٤۰) و (۳-٦۲) نتیجه می شود که ماتریسهای تکراری روش تجزیه آدومین مشابه ماتریسهای تکراری روش ژاکوبی می باشد. بردار آغازین روش تجزیه آدومین، بردار $c = \begin{bmatrix} D_A^{-1} b & D_{A^+}^{-1} g & D_{A^+}^{-1} h \end{bmatrix}^T$، اما در روش تکراری ژاکوبی معمولاً بردار صفر می باشد، بنابراین روش آدومین در این حالت تقریب جدیدی رابدست نمی دهد. چونکه بردار آغازین در همگرایی روش تأثیری ندارد، بنابراین نتیجه می شود که روش تجزیه آدومین برای حل دستگاه معادلات خطی تماماً فازی ($FFLS$) مشابه روش تکراری ژاکوبی است. از این رو روش تجزیه آدومین به عنوان روش تکراری عمل می کند. بنابراین قضیه های همگرایی (حل دستگاه $FFLS$) برای روش تجزیه آدومین همانند قضیه های روش تکراری ژاکوبی می باشد ([۳۱,۲۵] رانگاه کنید).

۳-٤-۳ مثال: دستگاه $FFLS$ زیر را به روش تکراری ژاکوبی و روش تجزیه آدومین حل کنید:

$$\begin{bmatrix} (۳,۱,۲) & (۱,۱,۳) \\ (-۲,۲,۱) & (۴,۱,۱) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۱,۹,۶) \\ (-۱۰,۷,۶) \end{bmatrix}$$

چونکه ماتریسهای تکرار روشهای ژاکوبی و آدومین مشابه هم هستند، بنابراین به کمک رابطه (۳-٤۲) ماتریسهای تکرار P,T و Q (که ماتریسهای کریسپی هستند) وهمچنین بردارهای c_1, c_2 و بردارهای x , Y (را بافرض بردار آغازین $\tilde{x}_1^{(0)} = \tilde{x}_2^{(0)} = (۰,۰,۰)$) رابه صورت زیر معرفی می کنیم:

$$x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad c_1=\begin{bmatrix}1/3\\-5/2\end{bmatrix},\quad c_2=\begin{bmatrix}3\\7/4\\2\\3/2\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}0 & -1/3\\1/2 & 0\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}0 & -1/3 & 0 & 0\\0 & 0 & -1/2 & 0\\0 & 0 & 0 & -1/3\\-1/2 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}-1/3 & -1/3 & 2/3 & 1\\-1/2 & -1/4 & 1/4 & 1/4\\-2/3 & -1 & 1/3 & 1/3\\-1/4 & -1/4 & 1/2 & 1/4\end{bmatrix}$$

با توجه به شرط توقف $\varepsilon = 5\times 10^{-6}$ و به کمک نرم افزار MATLAB، مشاهده می شود که روش تکراری ژاکوبی بعداز ۱٦تکرار، در حالی که روش تجزیه آدومین بعداز۱۵تکرار به جواب زیر همگراست:

$$\begin{bmatrix}(x_1,y_1,z_1)\\(x_2,y_2,z_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1/0000,0/5000,0/5000)\\(-2/0000,0/5000,0/5000)\end{bmatrix}$$

جواب واقعی باتوجه به بخش قبل، برای این دستگاه به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix}(x_1,y_1,z_1)\\(x_2,y_2,z_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1/0000,0/4857,0/4143)\\(-2/0000,0/5429,0/7571)\end{bmatrix}$$

قابل ذکر است که بردار آغازین برای روش تجزیه آدومین به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}(x_1,y_1,z_1)\\(x_2,y_2,z_2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(0/3333,3/0000,2/0000)\\(-2/5000,1/7500,1/5000)\end{bmatrix}$$

۳-٤-٤ مثال: دستگاه *FFLS* زیر رادر نظر بگیرید (مثال ٤.۲ از منبع [۳۱] است).

$$\begin{bmatrix}(9,0/2,0/2) & (1,0/4,0/3) & (3,0/3,0/4) & (4,0/2,0/1)\\(2,0/3,0/1) & (7,0/4,0/2) & (2,0/2,0/3) & (1,0/1,0/3)\\(1,0/3,0/2) & (1,0/5,0/2) & (6,0/3,0/1) & (3,0/2,0/3)\\(2,0/4,0/5) & (4,0/5,0/2) & (2,0/6,1/2) & (10,0/3,0/3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(x_1,y_1,z_1)\\(x_2,y_2,z_2)\\(x_3,y_3,z_3)\\(x_4,y_4,z_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(27/500,9/300,19/125)\\(17/750,9/025,8/525)\\(13/250,6/900,12/725)\\(24/500,10/025,18/475)\end{bmatrix}$$

چونکه ماتریسهای تکرار روشهای ژاکوبی و آدومین مشابه هم هستند، بنابراین به کمک رابطه (۳-٤۲) ماتریسهای تکرار P,T و Q (که ماتریسهای کریسپی هستند) وهمچنین بردارهای c_1, c_2 و بردارهای x , Y (را با فرض بردار آغازین $(0,0,0)=\tilde{x}_4^{(0)}=\tilde{x}_3^{(0)}=\tilde{x}_2^{(0)}=\tilde{x}_1^{(0)}$) رابه صورت زیر معرفی می کنیم:

$$x=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad c_1=\begin{bmatrix}\frac{27.5}{9}\\ \frac{17.75}{7}\\ \frac{13.25}{6}\\ 2.45\end{bmatrix},\quad c_2=\begin{bmatrix}\frac{9.3}{9}\\ \frac{9.025}{7}\\ \frac{6.9}{6}\\ \frac{10.025}{10}\\ \frac{19.125}{9}\\ \frac{8.525}{7}\\ \frac{12.725}{6}\\ \frac{18.475}{10}\end{bmatrix}$$

$$T=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{9} & -\frac{3}{9} & -\frac{4}{9}\\ -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{6}\\ -\frac{2}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} & 0\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{9} & -\frac{3}{9} & -\frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{6} & 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{2}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{3}{9} & -\frac{4}{9}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{7} & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & -\frac{3}{6}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{10} & -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} & 0\end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix}-\frac{0.2}{9} & -\frac{0.4}{9} & -\frac{0.3}{9} & -\frac{0.2}{9} & \frac{0.2}{9} & \frac{0.3}{9} & \frac{0.4}{9} & \frac{0.1}{9}\\ -\frac{0.3}{7} & -\frac{0.4}{7} & -\frac{0.2}{7} & -\frac{0.1}{7} & \frac{0.1}{7} & \frac{0.2}{7} & \frac{0.3}{7} & \frac{0.3}{7}\\ -\frac{0.3}{6} & -\frac{0.5}{6} & -\frac{0.3}{6} & -\frac{0.2}{6} & \frac{0.2}{6} & \frac{0.2}{6} & \frac{0.1}{6} & \frac{0.3}{6}\\ -\frac{0.4}{10} & -\frac{0.5}{10} & -\frac{0.6}{10} & -\frac{0.3}{10} & \frac{0.5}{10} & \frac{0.2}{10} & \frac{1.2}{10} & \frac{0.3}{10}\\ -\frac{0.2}{9} & -\frac{0.3}{9} & -\frac{0.4}{9} & -\frac{0.1}{9} & \frac{0.2}{9} & \frac{0.4}{9} & \frac{0.3}{9} & \frac{0.2}{9}\\ -\frac{0.1}{7} & -\frac{0.2}{7} & -\frac{0.3}{7} & -\frac{0.3}{7} & \frac{0.3}{7} & \frac{0.4}{7} & \frac{0.2}{7} & \frac{0.1}{7}\\ -\frac{0.2}{6} & -\frac{0.2}{6} & -\frac{0.1}{6} & -\frac{0.3}{6} & \frac{0.3}{6} & \frac{0.5}{6} & \frac{0.3}{6} & \frac{0.2}{6}\\ -\frac{0.5}{10} & -\frac{0.2}{10} & -\frac{1.2}{10} & -\frac{0.3}{10} & \frac{0.4}{10} & \frac{0.5}{10} & \frac{0.6}{10} & \frac{0.3}{10}\end{bmatrix}$$

با فرض شرط توقف $\varepsilon = 5\times10^{-6}$ و به کمک نرم افزار MATLAB، مشاهده می شود که روش تکراری ژاکوبی بعداز ٦٣تکرار، در حالی که روش تجزیه آدومین بعداز ٦٢ تکرار به جواب زیر همگراست:

$$\begin{bmatrix} (x_۱,y_۱,z_۱) \\ (x_۲,y_۲,z_۲) \\ (x_۳,y_۳,z_۳) \\ (x_۴,y_۴,z_۴) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۲/۰۰۰۰,۰/۵۰۰۰,۱/۱۰۰۰) \\ (۱/۵۰۰۰,۰/۷۵۰۰,۰/۲۵۰۰) \\ (۱/۰۰۰۰,۰/۵۰۰۰,۱/۲۰۰۰) \\ (۱/۲۵۰۰,۰/۲۵۰۰,۱/۰۰۰۰) \end{bmatrix}$$

جواب واقعی (همانند مثال ۳-۳-۱۳) برای این دستگاه به صورت زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} (x_۱,y_۱,z_۱) \\ (x_۲,y_۲,z_۲) \\ (x_۳,y_۳,z_۳) \\ (x_۴,y_۴,z_۴) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۲/۰۰,۰/۵۰,۱/۱۰) \\ (۱/۵۰,۰/۷۵,۰/۲۵) \\ (۱/۰۰,۰/۵۰,۱/۲۰) \\ (۱/۲۵,۰/۲۵,۱/۰۰) \end{bmatrix}$$

قابل ذکر است که بردار آغازین برای روش تجزیه آدومین به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} (x_۱,y_۱,z_۱) \\ (x_۲,y_۲,z_۲) \\ (x_۳,y_۳,z_۳) \\ (x_۴,y_۴,z_۴) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۳/۰۵۵۶,۱/۰۳۳۳,۲/۱۲۵۰) \\ (۲/۵۳۵۷,۱/۲۸۹۳,۱/۲۱۷۹) \\ (۲/۲۰۸۳,۱/۱۵۰۰,۲/۱۲۰۸) \\ (۲/۴۵۰۰,۱/۰۰۲۵,۱/۸۴۷۵) \end{bmatrix}$$

مشاهده می شود که مقادیر بدست آمده توسط روش ژاکوبی در دومین مرحله مشابه اولین مرحله بالاست. همچنین روش تکراری ژاکوبی بعداز ٦٣ تکرار همگراست در حالی که در [٣١] روش تکراری ژاکوبی بعداز ٨٣ تکرار همگراست.

۳-٤-٥ مثال: (مثال ٤.٢ از مرجع [٣١] است): یک شرکت تولیدی، انواع کامپیوترهای A ، B و C را می سازد که زمان لازم برای مونتاژ قطعات و آزمایش سخت افزار و نصب برنامه هریک از کامپیوترها به صورت زیر می باشد.

کامپیوتر A حدود $\widetilde{۱۹}=(۱۹,۱,۱)$ ساعت برای مونتاژ قطعات و حدود $\tilde{۲}=(۲,۰/۱,۰/۱)$ ساعت برای آزمایش سخت افزار و حدود $\tilde{۲}=(۲,۰/۱,۰/۲)$ ساعت برای نصب برنامه زمان نیاز دارد.

کامپیوتر B حدود $\widetilde{۱۲}=(۱۲,۱/۵,۱/۵)$ ساعت برای مونتاژ قطعات و حدود $\tilde{۴}=(۴,۰/۱,۰/۴)$ ساعت برای آزمایش سخت افزار و حدود $\tilde{۲}=(۲,۰/۱,۰/۳)$ ساعت برای نصب برنامه زمان می برد.

کامپیوتر C حدود $\tilde{۶}=(۶,۰/۵,۰/۲)$ ساعت برای مونتاژ قطعات و حدود $\widetilde{۱/۵}=(۱/۵,۰/۲,۰/۲)$ ساعت برای آزمایش سخت افزار و حدود $\widetilde{۴/۵}=(۴/۵,۰/۱,۰/۱)$ ساعت برای نصب برنامه زمان نیاز دارد.

این شرکت دارای کارخانه ای است که در هر ماه حدود $(۱۸۹۷,۴۲۷/۷,۵۳۶/۲) = \widetilde{۱۸۹۷}$ ساعت کاری برای مونتاژ قطعات و حدود $(۴۳۴/۵,۷۶/۲,۱۰۹/۳) = \widetilde{۴۳۴/۵}$ ساعت کار ی برای آزمایش سخت افزار و حدود $(۵۳۵/۵,۸۸/۳,۱۳۱/۹) = \widetilde{۵۳۵/۵}$ ساعت کار ی برای نصب برنامه، کار می کند. حال سؤال اینکه این کارخانه چه تعدادی از هر نوع کامپیوتر را ماهیانه تولید می کند؟

برای پاسخ این سؤ ال نخست معادلات خطی ، که بتواند این وضعیت را توصیف کند کامل می کنیم. فرض کنید که $\tilde{x} = (x_۱, y_۱, z_۱)$ ، $\tilde{y} = (x_۲, y_۲, z_۲)$ و $\tilde{z} = (x_۳, y_۳, z_۳)$ به ترتیب نشان دهنده تعداد کامپیوتر های نوع A ، B و C باشند. با در نظر گرفتن این معادلات با هم دستگاه زیر بدست می آوریم (به ترتیب معادله اول مونتاژ قطعات و معادله دوم آزمایش سخت افزار ومعادله سوم نصب برنامه است).

$$\begin{cases} (\widetilde{۱۹} \otimes \tilde{x}) \oplus (\widetilde{۱۲} \otimes \tilde{y}) \oplus (\tilde{۶} \otimes \tilde{z}) = \widetilde{۱۸۹۷} \\ (\tilde{۲} \otimes \tilde{x}) \oplus (\tilde{۴} \otimes \tilde{y}) \oplus (\widetilde{۱/۵} \otimes \tilde{z}) = \widetilde{۴۳۴/۵} \\ (\tilde{۲} \otimes \tilde{x}) \oplus (\tilde{۲} \otimes \tilde{y}) \oplus (\widetilde{۴/۵} \otimes \tilde{z}) = \widetilde{۵۳۵/۵} \end{cases}$$

چونکه ماتریسهای تکرار روشهای ژاکوبی وآدومین مشابه هم هستند، لذا به کمک رابطه (۳-٤۲) ماتریسهای تکراری P,T و Q (که ماتریسهای کریسپی هستند) وهمچنین بردارهای $c_۱$, $c_۲$ و بردارهای x , Y (با فرض بردار آغازین $\tilde{x}^{(۰)} = \tilde{y}^{(۰)} = \tilde{z}^{(۰)} = [\tilde{۰},\tilde{۰},\tilde{۰}]^T$) رابه صورت زیر معرفی می کنیم:

$$x = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, \quad c_۱ = \begin{bmatrix} ۱۸۹۷/۱۹ \\ ۴۳۴/۵/۴ \\ ۵۳۵/۵/۴/۵ \end{bmatrix}, \quad c_۲ = \begin{bmatrix} ۴۲۷/۷/۱۹ \\ ۷۶/۲/۴ \\ ۸۸/۳/۴/۵ \\ ۵۳۶/۲/۱۹ \\ ۱۰۹/۳/۴ \\ ۱۳۱/۹/۴/۵ \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} ۰ & -۱۲/۱۹ & -۶/۱۹ \\ -۱/۲ & ۰ & -۱/۵/۴ \\ -۲/۴/۵ & -۲/۴/۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} ۰ & -۱۲/۱۹ & -۶/۱۹ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۱/۲ & ۰ & -۱/۵/۴ & ۰ & ۰ & ۰ \\ -۲/۴/۵ & -۲/۴/۵ & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & -۱۲/۱۹ & -۶/۱۹ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۱/۲ & ۰ & -۱/۵/۴ \\ ۰ & ۰ & ۰ & -۲/۴/۵ & -۲/۴/۵ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$Q=\begin{bmatrix} -۱/۱۹ & -۱/۵/۱۹ & -۰/۵/۱۹ & ۱/۱۹ & ۱/۵/۱۹ & ۰/۲/۱۹ \\ -۰/۱/۴ & -۰/۱/۴ & -۰/۲/۴ & ۰/۱/۴ & ۰/۴/۴ & ۰/۲/۴ \\ -۰/۱/۴/۵ & -۰/۱/۴/۵ & -۰/۱/۴/۵ & ۰/۲/۴/۵ & ۰/۳/۴/۵ & ۰/۱/۴/۵ \\ -۱/۱۹ & -۱/۵/۱۹ & -۰/۲/۱۹ & ۱/۱۹ & ۱/۵/۱۹ & ۰/۵/۱۹ \\ -۰/۱/۴ & -۰/۴/۴ & -۰/۲/۴ & ۰/۱/۴ & ۰/۱/۴ & ۰/۲/۴ \\ -۰/۲/۴/۵ & -۰/۳/۴/۵ & -۰/۱/۴/۵ & ۰/۱/۴/۵ & ۰/۱/۴/۵ & ۰/۱/۴/۵ \end{bmatrix}$$

با فرض شرط توقف $\varepsilon = ۵\times ۱۰^{-۶}$ و به کمک نرم افزار **MATLAB**، مشاهده می شود که روش تکراری ژاکوبی بعداز ۱۶۹ تکرار، در حالی که روش تجزیه آدومین بعداز ١٦٨ تکرار به جواب زیر همگراست:

$$\begin{bmatrix} (x_۱, y_۱, z_۱) \\ (x_۲, y_۲, z_۲) \\ (x_۳, y_۳, z_۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۳۷/۰۰۰۰, ۷/۰۰۰۰, ۱۳/۳۰۱۵) \\ (۶۲/۰۰۰۰, ۵/۵۰۰۰, ۴/۵۷۹۳) \\ (۷۵/۰۰۰۰, ۱۰/۲۰۰۰, ۱۳/۹۱۹۵) \end{bmatrix}$$

جواب واقعی (همانند مثال ۳–۳–۱۳) برای این دستگاه به صورت زیر می باشد

$$\begin{bmatrix} (x_۱, y_۱, z_۱) \\ (x_۲, y_۲, z_۲) \\ (x_۳, y_۳, z_۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۳۷, ۷/۰, ۱۳/۳) \\ (۶۲, ۵/۵, ۴/۶) \\ (۷۵, ۱۰/۲, ۱۳/۹) \end{bmatrix}$$

قابل ذکر است که بردار آغازین برای روش تجزیه آدومین به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} (x_۱, y_۱, z_۱) \\ (x_۲, y_۲, z_۲) \\ (x_۳, y_۳, z_۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (۹۹/۸۴۲۱, ۲۲/۵۱۰۵, ۲۸/۲۲۱۰) \\ (۱۰۸/۶۲۵۰, ۱۹/۰۵۰۰, ۲۷/۳۲۵۰) \\ (۱۱۹/۰۰۰۰, ۱۹/۶۲۲۲, ۲۹/۳۱۱۱) \end{bmatrix}$$

بادر نظر گرفتن مثال ٤.١ در [۳۱] مشاهده می کنیم که روش تکراری ژاکوبی بعداز ٢١٤ تکرار همگراست اما روش تکراری ژاکوبی که ارائه کردیم بعداز ١٦٩ تکرار همگراست. جواب بدست آمده از حل دستگاه *FFLS* توسط روش ما نیازمند تعداد تکرارهای کمتری نسبت به روش بکاررفته در [۳۱] دارد.

فصل چهارم

روش جدیدی برای حل دستگاه *FFSLS*

٤-١ مقدمه

همانطور که در فصل اول اشاره شد، حاصلضرب و خارج قسمت دوعدد فازی مثلثی با طرفین خطی یک عدد فازی مثلثی با طرفین خطی نخواهد بود. بنابراین ضرب وتقسیم اعداد فازی شکل عمل را حفظ نمی کند. بن و بده[۱] [۲۷,۲۶] یک ضرب جدید به نام ضرب برداری[۲] یا خارجی معرفی نمودند که شکل عمل را حفظ می کند یعنی حاصلضرب و خارج قسمت دو عدد فازی مثلثی (ذوزنقه ای) یک عدد فازی مثلثی (ذوزنقه ای) است. در این فصل با استفاده از کاربرد ضرب برداری، یک روش ساده وکاربردی برای حل دستگاه *FFSLS* (۳-۳۵) یعنی $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ که در آن تمامی اعداد فازی، مثلثی می باشند، ارائه می دهیم. برای بدست آوردن جواب $r-$ برش دستگاه، الگوریتمی در سه مرحله معرفی می کنیم به طوری که در مرحله اول جواب ۱- برش دستگاه را پیدا می کنیم، سپس در دومین مرحله با استفاده از جواب ۱- برش بدست آمده در مرحله اول وبا توجه به علامت آن، جواب ۰- برش دستگاه را محاسبه می کنیم و در آخر یعنی مرحله سوم جواب نهایی (جواب $r-$ برش دستگاه) را با تر کیب محدب این دو جواب (۰- برش

۱-Ban and Bede
۲-cross product

و ۱- برش) بدست می آوریم. در ادامه فصل جواب فازی دستگاه را معرفی نموده و شرایط لازم وکافی برای یکتایی آن را مورد بحث قرار می دهیم.

۲-٤ حل دستگاه $FFSLS$

در این بخش دستگاه $FFSLS$ (۳-۳۵) یعنی $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ که به صورت زیرمی باشد با استفاده از کاربرد ضرب برداری حل می کنیم.

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11}\otimes\tilde{x}_1)\oplus(\tilde{a}_{12}\otimes\tilde{x}_2)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{1n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_1 \\ (\tilde{a}_{21}\otimes\tilde{x}_1)\oplus(\tilde{a}_{22}\otimes\tilde{x}_2)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{2n}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ (\tilde{a}_{n1}\otimes\tilde{x}_1)\oplus(\tilde{a}_{n2}\otimes\tilde{x}_2)\oplus\cdots\oplus(\tilde{a}_{nn}\otimes\tilde{x}_n)=\tilde{b}_n \end{cases} \tag{۱-٤}$$

دراین دستگاه فرض می کنیم که تمامی اعداد فازی به کاررفته از نوع مثلثی باشند. حال جواب این دستگاه را به صورت زیر معرفی می کنیم:

۱-۲-٤ تعریف: بردار فازی $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ با r-برش نمایش داده شده برای هر $1\le j\le n$ و $0\le r\le 1$ به صورت $[x_j]^r=[\underline{x}_j^r,\overline{x}_j^r]$، یک جواب فازی از دستگاه $FFSLS$ (۱-٤) یعنی $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ است هرگاه:

$$\begin{cases} \underline{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\otimes x_j)}^{\,r}=\sum_{j=1}^{n}\underline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{\,r}=\underline{b}_i^r \\ \overline{\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\otimes x_j)}^{\,r}=\sum_{j=1}^{n}\overline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{\,r}=\overline{b}_i^r \end{cases} \tag{۲-٤}$$

حال برای بدست آوردن جوابی از دستگاه (۲-٤) الگوریتمی در سه مرحله و به صورت زیر معرفی می کنیم:

مرحله ۱: (بدست آوردن جواب ۱- برش)

چونکه تمامی اعداد فازی ، مثلثی هستند لذا واضح است که $\underline{a}_{ij}^1=\overline{a}_{ij}^1=a_{ij}^1$ و $\underline{x}_j^1=\overline{x}_j^1=x_j^1$ می باشند. بنابراین با حل دستگاه کریسپ $n\times n$ زیر جواب ۱- برش را برای هر $1\le i\le n$ بدست می آوریم:

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}^1\otimes x_j^1)=b_i^1 \tag{۳-٤}$$

که نماد ماتریسی این دستگاه به صورت زیر نوشته می شود:

$$A^{1}x^{1}=b^{1} \qquad (٤-٤)$$

پس با حل این دستگاه می توان جواب ۱- برش (در صورت وجود) را پیدا کنیم و وارد مرحله دوم شویم.

مرحله ۲: (بدست آوردن جواب ۰- برش)

در این مرحله با حل دستگاه $2n\times 2n$ زیر جواب ۰- برش را برای هر $1\leq i\leq n$ بدست می آوریم:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\underline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{0}=\underline{b}_i^{0}\\ \sum_{j=1}^{n}\overline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{0}=\overline{b}_i^{0}\end{cases} \qquad (٥-٤)$$

همانطور که می دانیم، $\tilde{A}$ و $\tilde{x}$ ممکن است مثبت یا منفی[1] باشند لذا برای آنها می توان چهار حالت در نظر گرفت. « برای مثال اگر ماتریس فازی $\tilde{A}$ وبردار فازی $\tilde{x}$ هر دو مثبت باشندآنگاه دستگاه (٤-٥) با توجه به رابطه (۱-٤٥) به دستگاه زیر تبدیل می شود »:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\underline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{0}=\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}^{0}\underline{x}_j^{1}+\underline{a}_{ij}^{1}\underline{x}_j^{0}-\underline{a}_{ij}^{1}\underline{x}_j^{1})=\underline{b}_i^{0}\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}^{1}\underline{x}_j^{0}=\underline{b}_i^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}^{1}-\underline{a}_{ij}^{0})\underline{x}_j^{1}\\ \sum_{j=1}^{n}\overline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{0}=\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}^{0}\overline{x}_j^{1}+\overline{a}_{ij}^{1}\overline{x}_j^{0}-\overline{a}_{ij}^{1}\overline{x}_j^{1})=\overline{b}_i^{0}\Rightarrow\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}^{1}\overline{x}_j^{0}=\overline{b}_i^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}^{1}-\overline{a}_{ij}^{0})\overline{x}_j^{1}\end{cases} \qquad (٦-٤)$$

حال اگر ماتریس فازی $\tilde{A}$ وبردار فازی $\tilde{x}$ هر دو دلخواه باشند آنگاه در حالت کلی مرحله دوم به صورت زیر نوشته خواهد شد:

مرحله ۲:

در این مرحله با حل دستگاه $2n\times 2n$ زیر جواب ۰- برش را برای هر $1\leq i\leq n$ بدست می آوریم:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\underline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{0}=\underline{b}_i^{0}\\ \sum_{j=1}^{n}\overline{(a_{ij}\otimes x_j)}^{0}=\overline{b}_i^{0}\end{cases} \qquad (٧-٤)$$

بوسیله روابط (۱-٤٥)، (۱-٤٦) و(۱-٤٧) وبا توجه به مثبت ومنفی بودن $\tilde{A}$ و $\tilde{x}$ ، برای هر $1\leq i\leq n$ این دستگاه به یکی از دستگاههای زیر تبدیل خواهد شد:

[1] - به تعاریف ۳-۲-۲ و ۱-۷-۱ رجوع شود.

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}^{1}\,\underline{x}_{j}^{0}=\underline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}^{1}-\underline{a}_{ij}^{0})\underline{x}_{j}^{1}, \\
\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}^{1}\,\overline{x}_{j}^{0}=\overline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}^{1}-\overline{a}_{ij}^{0})\overline{x}_{j}^{1},
\end{cases} & if\ \tilde{A}\geq 0\ and\ \tilde{x}\geq 0 \\
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}^{1}\,\underline{x}_{j}^{0}=\underline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}^{1}-\overline{a}_{ij}^{0})\underline{x}_{j}^{1}, \\
\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}^{1}\,\overline{x}_{j}^{0}=\overline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}^{1}-\underline{a}_{ij}^{0})\overline{x}_{j}^{1},
\end{cases} & if\ \tilde{A}\geq 0\ and\ \tilde{x}< 0 \\
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}^{1}\,\overline{x}_{j}^{0}=\underline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}^{1}-\underline{a}_{ij}^{0})\overline{x}_{j}^{1}, \\
\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}^{1}\,\underline{x}_{j}^{0}=\overline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}^{1}-\overline{a}_{ij}^{0})\underline{x}_{j}^{1},
\end{cases} & if\ \tilde{A}< 0\ and\ \tilde{x}\geq 0 \\
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n}\overline{a}_{ij}^{1}\,\overline{x}_{j}^{0}=\underline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\overline{a}_{ij}^{1}-\overline{a}_{ij}^{0})\overline{x}_{j}^{1}, \\
\sum_{j=1}^{n}\underline{a}_{ij}^{1}\,\underline{x}_{j}^{0}=\overline{b}_{i}^{0}+\sum_{j=1}^{n}(\underline{a}_{ij}^{1}-\underline{a}_{ij}^{0})\underline{x}_{j}^{1}.
\end{cases} & if\ \tilde{A}< 0\ and\ \tilde{x}< 0
\end{cases}
\qquad (۴-۸)
$$

باتوجه به مثلثی بودن تمامی اعداد فازی به کاررفته ($\underline{a}_{ij}^{1}=\overline{a}_{ij}^{1}=a_{ij}^{1}$ و $\underline{x}_{j}^{1}=\overline{x}_{j}^{1}=x_{j}^{1}$)، در حالت کلی معادله ماتریسی دستگاههای بالا به صورت زیر نوشته می شود:

$$Sx^{0}=b^{0}+(S-M)X^{1} \qquad (۴-۹)$$

بردارهای X^{1} ، x^{0} و b^{0} در این معادله، به صورت زیر می باشند:

$$X^{1}=[x^{1},x^{1}]^{T}=[x_{1}^{1},x_{2}^{1},\cdots,x_{n}^{1},x_{1}^{1},x_{2}^{1},\cdots,x_{n}^{1}]^{T}$$

$$x^{0}=[\underline{x}^{0},\overline{x}^{0}]^{T}=[\underline{x}_{1}^{0},\underline{x}_{2}^{0},\cdots,\underline{x}_{n}^{0},\overline{x}_{1}^{0},\overline{x}_{2}^{0},\cdots,\overline{x}_{n}^{0}]^{T}$$

$$b^{0}=[\underline{b}^{0},\overline{b}^{0}]^{T}=[\underline{b}_{1}^{0},\underline{b}_{2}^{0},\cdots,\underline{b}_{n}^{0},\overline{b}_{1}^{0},\overline{b}_{2}^{0},\cdots,\overline{b}_{n}^{0}]^{T} \qquad (۴-۱۰)$$

همچنین برای هر $1\leq i,j\leq 2n$ ماتریسهای $S=(s_{ij})$ و $M=(m_{ij})$ ، کریسپ واز مرتبه $2n\times 2n$ بوده که دارای ساختار زیر می باشند:

ماتریس $S=(s_{ij})$: درایه های s_{ij} در این ماتریس برای هر $1\leq i,j\leq n$ به صورت زیر مشخص می شوند:

$$
\begin{cases}
a_{ij}\geq 0\Rightarrow s_{ij}=s_{n+i,n+j}=a_{ij}^{1} \\
a_{ij}< 0\Rightarrow s_{n+i,j}=s_{i,n+j}=a_{ij}^{1}
\end{cases}
\qquad (۴-۱۱)
$$

وهر s_{ij} که در رابطه قبلی مشخص نشده باشد دارای مقدار صفر خواهد بود. بنابراین ماتریس S به صورت بلوکی زیر نوشته می شود:

$$S=\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \qquad (۱۲-٤)$$

که در آن ماتریس S_1+S_2 ، ماتریس مقدار میانی است (یعنی $A^1=S_1+S_2$ می باشد).

ماتریس $M=(m_{ij})$: درایه های m_{ij} در این ماتریس با توجه به مثبت یا منفی بودن جواب بدست آمده در مرحله اول، برای هر $1\le i,j\le n$ به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{cases} x_j^1>0\Rightarrow\begin{cases} a_{ij}\ge 0\Rightarrow m_{ij}=\underline{a}_{ij}^0, & m_{n+i,n+j}=\overline{a}_{ij}^0 \\ a_{ij}<0\Rightarrow m_{i,n+j}=\underline{a}_{ij}^0, & m_{n+i,j}=\overline{a}_{ij}^0 \end{cases} \\ x_j^1<0\Rightarrow\begin{cases} a_{ij}\ge 0\Rightarrow m_{ij}=\overline{a}_{ij}^0, & m_{n+i,n+j}=\underline{a}_{ij}^0 \\ a_{ij}<0\Rightarrow m_{i,n+j}=\overline{a}_{ij}^0, & m_{n+i,j}=\underline{a}_{ij}^0 \end{cases} \end{cases} \qquad (۱۳-٤)$$

وهر m_{ij} که در رابطه بالا مشخص نشده باشد دارای مقدار صفر خواهد بود. بنابراین فرم ماتریسی این دستگاه به صورت زیر خواهد بود:

$$M=\begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{bmatrix} \qquad (۱٤-٤)$$

با توجه به نمادهای بالا معادله ماتریس (٤-۹) به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x}^0 \\ \overline{x}^0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \underline{b}^0 \\ \overline{b}^0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} S_1-M_1 & S_2-M_2 \\ S_2-M_3 & S_1-M_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \overline{x}^1 \end{bmatrix} \qquad (۱۵-٤)$$

بنابراین در مرحله اول با حل دستگاه $A^1x^1=b^1$جواب ۱- برش و در مرحله دوم هم با حل دستگاه $Sx^0=b^0+(S-M)X^1$ یا دستگاه (٤-۱۵) جواب ۰- برش را بدست آورده ودر مرحله سوم r- برش، جواب فازی را به صورت زیر بدست می آوریم.

مرحله ۳: (بدست آوردن جواب نهایی)

در این مرحله با ترکیب محدب جوابهای بدست آمده درمرحله اول ودوم (۱- برش و ۰- برش) جواب نهایی دستگاه برای هر $0\le r\le 1$ و $1\le j\le n$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\left[x_j\right]^r=\left[\underline{x}_j^r,\overline{x}_j^r\right]=\left[(1-r)\underline{x}_j^0+rx_j^1,(1-r)\overline{x}_j^0+rx_j^1\right] \qquad (۱٦-٤)$$

۴-۲-۲ نتیجه: اگر ماتریس A از دستگاه $FFSLS$ (۴-۱)، یک ماتریس کریسپ باشد آنگاه در معادله (۴-۹) از مرحله ۲، تساوی $S = M$ برقرار می باشد واین معادله به صورت $Sx^{\circ} = b^{\circ}$ تبدیل می شود.

بنابراین با توجه به نتیجه بالا از روش معرفی شده، می توان جواب هر دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی ($FSLE$) به صورت $A\tilde{x} = \tilde{b}$ را بدست آورد. که در این دستگاه، A یک ماتریس کریسپ و $\tilde{b}$ یک بردار فازی دلخواه می باشد.

در ادامه باتوجه به قضایای ۳-۳-۸ و ۳-۳-۹ می توان نتایج زیر را بدست آورد.

۴-۲-۳ نتیجه: اگرماتریس S^{-1} موجود باشد آنگاه ساختاری شبیه ماتریس S خواهد داشت یعنی

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} D & E \\ E & D \end{bmatrix} \tag{۴-۱۷}$$

که در آن

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2}[(S_1 + S_2)^{-1} + (S_1 - S_2)^{-1}] \\ E = \frac{1}{2}[(S_1 + S_2)^{-1} - (S_1 - S_2)^{-1}] \end{cases} \tag{۴-۱۸}$$

۴-۲-۴ نتیجه: ماتریس S نامنفرد است اگر وتنهااگر ماتریسهای $A = S_1 + S_2$ و $S_1 - S_2$ هردو نامنفرد باشند.

۴-۲-۵ تعریف (جواب فازی): اگر $x^{\circ} = [\underline{x}^{\circ}, \overline{x}^{\circ}]^T = [\underline{x}_1^{\circ}, \underline{x}_2^{\circ}, \cdots, \underline{x}_n^{\circ}, \overline{x}_1^{\circ}, \overline{x}_2^{\circ}, \cdots, \overline{x}_n^{\circ}]^T$ جواب دستگاه (۴-۹) باشد که برای هر $1 \le j \le n$ نامعادله $\underline{x}_j^{\circ} \le \overline{x}_j^{\circ}$ برقرار باشد آنگاه این جواب یعنی؛ $x^{\circ} = [\underline{x}^{\circ}, \overline{x}^{\circ}]^T$، یک جواب فازی از این دستگاه نامیده می شود.

۴-۲-۶ قضیه: فرض کنید که S ماتریسی نامنفرد باشد. دستگاه (۴-۹) جوابی فازی دارد اگر وتنها اگر داشته باشیم:

$$(S_1 - S_2)^{-1}(\overline{y} - \underline{y}) \ge 0 \tag{۴-۱۹}$$

که در این رابطه بردارهای $\underline{y}$ و $\overline{y}$ به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{b}^{\circ} + (S_1 - M_1)x^1 + (S_2 - M_2)x^1 \\ \overline{y} = \overline{b}^{\circ} + (S_2 - M_3)x^1 + (S_1 - M_4)x^1 \end{cases} \tag{۴-۲۰}$$

اثبات: با توجه به دستگاه (۴-۱۵)، واضح است که:

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^{\cdot} \\ \overline{x}^{\cdot} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{y} \\ \overline{y} \end{bmatrix} \qquad (۴-۲۱)$$

از این رو

$$\begin{cases} S_1\underline{x}^{\cdot} + S_2\overline{x}^{\cdot} = \underline{y} \\ S_2\underline{x}^{\cdot} + S_1\overline{x}^{\cdot} = \overline{y} \end{cases} \qquad (۴-۲۱)$$

واز تفاضل طرفین رابطه بالا می توان نوشت:

$$(S_1 - S_2)\underline{x}^{\cdot} - (S_1 - S_2)\overline{x}^{\cdot} = \underline{y} - \overline{y} \Rightarrow (S_1 - S_2)(\underline{x}^{\cdot} - \overline{x}^{\cdot}) = \underline{y} - \overline{y} \qquad (۴-۲۲)$$

باتوجه به نتیجه ۴-۲-۴ ماتریس $(S_1 - S_2)$ نامنفرد است. بنابراین:

$$(\overline{x}^{\cdot} - \underline{x}^{\cdot}) = (S_1 - S_2)^{-1}(\overline{y} - \underline{y}) \qquad (۴-۲۳)$$

اگر دستگاه (۴-۹) جواب فازی داشته باشد آنگاه با توجه به تعرف ۴-۲-۵، $0 \le \overline{x}^{\cdot} - \underline{x}^{\cdot}$ یا $\underline{x}^{\cdot} - \overline{x}^{\cdot} \le 0$ را خواهیم داشت. از این رو نامساوی (۴-۱۹) برقرار است. برعکس اگر نامساوی (۴-۱۹) برقرار باشد با توجه به رابطه (۴-۲۳)، نانساوی $\overline{x}^{\cdot} - \underline{x}^{\cdot} \ge 0$ یا $\underline{x}^{\cdot} - \overline{x}^{\cdot} \le 0$ برقرار است و اثبات کامل می شود.□

۴-۲-۷ نتیجه: اگر دستگاه (۴-۹) جواب فازی داشته باشد آنگاه دستگاه (۴-۲) نیز جواب فازی خواهد داشت. چونکه در اعداد فازی مثلثی برای هر $1 \le j \le n$ نامساوی $\underline{x}_j^1 \le \overline{x}_j^1$ خود به خود برقرار بوده و همچنین ضرب برداری، خاصیت عمل را حفظ می کند.

۴-۲-۸ نتیجه: در دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی $(FSLE)$ ، $\underline{y} = \underline{b}^{\cdot}, \overline{y} = \overline{b}^{\cdot}$ خواهد بود.

با توجه به نتایج ۴-۲-۳ و۴-۲-۴ نتیجه زیر بدست می آید:

۴-۲-۹ نتیجه: دستگاه $FFSLS$ (۴-۱) جواب فازی یکتا دارد اگر وتنها اگر شرایط زیر برقرار باشند:

الف) ماتریسهای $S_1 + S_2$ و $S_1 - S_2$ هردو نامنفرد باشند.

ب) نامساوی $(S_1 - S_2)^{-1}(\overline{y} - \underline{y}) \ge 0$ برقرار باشد.

٤-۲-۱۰ مثال: دستگاه *FFLS* زیر راحل کنید(مثال ۳.۲ از مرجع [۳۰]).

$$\begin{cases}[۴+r,۶-r]\otimes x_۱ \oplus [۵+r,۸-۲r]\otimes x_۲ = [۴۰+۱۰r,۶۷-۱۷r]\\ [۶+r\,,۷]\ \otimes x_۱ \oplus [۴\,,۵-r]\otimes x_۲ = [۴۳+۵r,\,۵۵-۷r]\end{cases}$$

این دستگاه دارای جواب فازی است چونکه در شرط $(S_۱-S_۲)^{-۱}(\overline{y}-\underline{y}) = [۰.۰۹۰۹,۰.۵۹۰۹]^T \geq ۰$ صدق می کند. در ادامه جواب فازی را با استفاده از الگوریتم معرفی شده به دست می آوریم.

مرحله ۱: برای به دست آوردن جواب ۱- برش دستگاه دراین مرحله، دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$A^۱x^۱=b^۱ \Rightarrow \begin{bmatrix}۵ & ۶\\ ۷ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_۱^۱\\ x_۲^۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵۰\\ ۴۸\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_۱^۱=۴\\ x_۲^۱=۵\end{cases}$$

مرحله ۲: چونکه $x_۱$ و $x_۲$ هر دومثبت هستند وهمچنین برای هر $۱\leq i,j\leq ۲$ ، $a_{ij}>۰$ است لذا جواب ۰- برش دستگاه در مرحله ۲ توسط دستگاه (٤-۱۵) وبه صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{bmatrix}۵ & ۶ & ۰ & ۰\\ ۷ & ۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵ & ۶\\ ۰ & ۰ & ۷ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_۱^۰\\ \underline{x}_۲^۰\\ \overline{x}_۱^۰\\ \overline{x}_۲^۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۰\\ ۴۳\\ ۶۷\\ ۵۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۵-۴ & ۶-۵ & ۰ & ۰\\ ۷-۶ & ۴-۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵-۶ & ۶-۸\\ ۰ & ۰ & ۷-۷ & ۴-۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۴\\ ۵\\ ۴\\ ۵\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۵ & ۶ & ۰ & ۰\\ ۷ & ۴ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵ & ۶\\ ۰ & ۰ & ۷ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_۱^۰\\ \underline{x}_۲^۰\\ \overline{x}_۱^۰\\ \overline{x}_۲^۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۹\\ ۴۷\\ ۵۳\\ ۵۰\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x}_۱^۰=۳/۹۰۹۱\\ \underline{x}_۲^۰=۴/۹۰۹۱\\ \overline{x}_۱^۰=۴/۰۰۰۰\\ \overline{x}_۲^۰=۵/۵۰۰۰\end{cases}$$

مرحله ۳: با محاسبه تر کیب محدب جوابهای ۰- برش و ۱- برش توسط رابطه (٤-١٦) جواب دستگاه به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases}[x_۱]^r=[\underline{x}_۱^r,\overline{x}_۱^r]=[(۱-r)۳/۹۰۹۱+r(۴),(۱-r)۴/۰۰۰۰+r(۴)]=[۳/۹۰۹۱+۰/۰۹۰۹r,۴]\\ [x_۲]^r=[\underline{x}_۲^r,\overline{x}_۲^r]=[(۱-r)۴/۹۰۹۱+r(۵),(۱-r)۵/۵۰۰۰+r(۵)]=[۴/۹۰۹۱+۰/۰۹۰۹r,۵/۵-۰/۵r]\end{cases}$$

مشاهده می شود که جواب بدست آمده جواب فازی است و همچنین مشابه جواب بدست آمده در منبع [۳۰] می باشد.

۴-۲-۱۱ مثال: فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{b}$ به ترتیب یک ماتریس فازی و یک بردار فازی به صورت زیر باشند:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}[-3+2r,2-3r] & [1+r,4-2r]\\ [-4+r,-2-r] & [1+2r,6-3r]\end{pmatrix},\quad \tilde{b}=\begin{bmatrix}[-3+r,-1-r]\\ [1+3r,5-r]\end{bmatrix}$$

در این صورت دستگاه $FFLS$ ، $\tilde{A}\otimes\tilde{x}=\tilde{b}$ راحل کنید.

چونکه شرط $(S_1-S_2)^{-1}(\overline{y}-\underline{y})=[16/6668,-24/0001]^T$ نامنفی نیست بنابراین این دستگاه دارای جواب فازی نیست. برای اثبات ادعایمان الگوریتم را به صورت زیر می نویسیم.

مرحله ۱: برای به دست آوردن جواب ۱- برش دستگاه دراین مرحله، دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$A^1x^1=b^1\Rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^1\\ x_2^1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1^1=-4/6667\\ x_2^1=-3/3333\end{cases}$$

مرحله ۲: چونکه x_1 و x_2 هر دومنفی وبا توجه به علامت درایه های ماتریس A ، جواب ۰- برش دستگاه به وسیله دستگاه (۴-۱۵) وبه صورت زیر محاسبه می شود:

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ -3 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_1^0\\ \underline{x}_2^0\\ \overline{x}_1^0\\ \overline{x}_2^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ -1\\ 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -2 & -3 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4/6667\\ -3/3333\\ -4/6667\\ -3/3333\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 2\\ -3 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{x}_1^0\\ \underline{x}_2^0\\ \overline{x}_1^0\\ \overline{x}_2^0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17/6667\\ 15/6666\\ -13/6667\\ -6/3333\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x}_1^0=-9/4444\\ \underline{x}_2^0=12/4444\\ \overline{x}_1^0=7/2222\\ \overline{x}_2^0=-11/5556\end{cases}$$

مرحله ۳: با محاسبه تر کیب محدب جوابهای ۰- برش و ۱- برش توسط رابطه (۴-۱۶) جواب دستگاه به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases}[x_1]^r=[\underline{x}_1^r,\overline{x}_1^r]=[(1-r)(-9/4444)+r(-4/6667),(1-r)7/2222+r(-4/6667)]\\ \qquad=[-9/4444+4/7777r,7/2222-11/8889r]\\ [x_2]^r=[\underline{x}_2^r,\overline{x}_2^r]=[(1-r)12/4444+r(-3/3333),(1-r)-11/5556+r(-3/3333)]\\ \qquad=[12/4444-15/7777r,-11/5556+8/2223r]\end{cases}$$

مشاهده می شود که جواب بدست آمده، جواب فازی نیست.

۴-۲-۱۲ مثال: دستگاه $FFLS$ ، $\tilde{A} \otimes \tilde{x} = \tilde{b}$ راحل کنیدکه در آن $\tilde{A}$ و $\tilde{b}$ به صورت زیر تعریف شده اند. (مثال ٤.١ از مرجع [۳۱] یا مثال ۳-٤-۵ در فصل سوم).

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} [18+r, 20-r] & [10/5+1/5r, 13/5-1/5r] & [5/5+0/5r, 6/2-0/2r] \\ [1/9+0/1r, 2/1-0/1r] & [3/9+0/1r, 4/4-0/4r] & [1/3+0/2r, 1/7-0/2r] \\ [1/9+0/1r, 2/1-0/1r] & [1/9+0/1r, 2/3-0/3r] & [4/4+0/1r, 4/6-0/1r] \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} [1469/3+427/7r, 2433/2-536/2r] \\ [358/3+76/2r, 543/8-109/3r] \\ [447/2+88/3r, 667/4-131/9r] \end{bmatrix}$$

همانند مثال ٤-۲-۱۰ مشاهده می شود که این دستگاه دارای جواب فازی است، چونکه در شرط (٤-۱۷) $(S_1 - S_2)^{-1}(\bar{y} - \underline{y}) \ge 0$ صدق می کند؛ یعنی:

$$(S_1 - S_2)^{-1}(\bar{y} - \underline{y}) = [0/0203, 0/0101, 0/0241]^T \ge 0$$

برای اثبات ادعایمان وبه دست آوردن جواب بوسیله الگوریتم معرفی شده خواهیم داشت:

مرحله ۱: برای به دست آوردن جواب ۱- برش دستگاه دراین مرحله، دستگاه زیر را حل می کنیم:

$$A^1 x^1 = b^1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 19 & 12 & 6 \\ 2 & 4 & 1.5 \\ 2 & 2 & 4.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1897 \\ 434.5 \\ 535.5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1^1 = 37 \\ x_2^1 = 62 \\ x_3^1 = 75 \end{cases}$$

مرحله ۲: چونکه x_1، x_2 و x_3 هر سه مثبت و با توجه به علامت مثبت درایه های ماتریس A، با حل دستگاه زیر جواب ۰- برش دستگاه به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} 19 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1/5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1^0 \\ \underline{x}_2^0 \\ \underline{x}_3^0 \\ \bar{x}_1^0 \\ \bar{x}_2^0 \\ \bar{x}_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1469/3 \\ 358/3 \\ 447/2 \\ 2433/2 \\ 543/8 \\ 667/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 0/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0/1 & 0/1 & 0/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0/1 & 0/1 & 0/1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/5 & -0/2 \\ 0 & 0 & 0 & -0/1 & -0/4 & -0/2 \\ 0 & 0 & 0 & -0/2 & -0/3 & -0/1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 37 \\ 62 \\ 75 \\ 37 \\ 62 \\ 75 \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{cases} \underline{x}_{۱}^{\cdot} = ۳۰ \\ \underline{x}_{۲}^{\cdot} = ۵۶/۵ \\ \underline{x}_{۳}^{\cdot} = ۶۴/۸ \\ \overline{x}_{۱}^{\cdot} = ۵۰/۳۰۱۶ \\ \overline{x}_{۲}^{\cdot} = ۶۶/۵۷۹۴ \\ \overline{x}_{۳}^{\cdot} = ۸۸/۹۱۹۶ \end{cases}$$

مرحله ۳: با محاسبه تر کیب محدب جوابهای ۰- برش و ۱- برش توسط رابطه (٤-١٦) جواب دستگاه به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} [x_{۱}]^r = [\underline{x}_{۱}^r, \overline{x}_{۱}^r] = [(۱-r)۳۰ + r(۳۷), (۱-r)۵۰/۳۰۱۶ + r(۳۷)] = [۳۰ + ۷r, ۵۰/۳۰۱۶ - ۱۳/۳۰۱۶r] \\ [x_{۲}]^r = [\underline{x}_{۲}^r, \overline{x}_{۲}^r] = [(۱-r)۵۶/۵ + r(۶۲), (۱-r)۶۶/۵۷۹۴ + r(۶۲)] = [۵۶/۵ + ۵/۵r, ۶۶/۵۷۹۴ - ۴/۵۷۹۴r] \\ [x_{۳}]^r = [\underline{x}_{۳}^r, \overline{x}_{۳}^r] = [(۱-r)۶۴/۸ + r(۷۵), (۱-r)۸۸/۹۱۹۶ + r(۷۵)] = [۶۴/۸ + ۱۰/۲r, ۸۸/۹۱۹۶ - ۱۳/۹۱۹۶r] \end{cases}$$

مشاهده می شود که جواب بدست آمده جواب فازی است.

اگر روش تکرار ژاکوبی را برای دستگاههای کریسپ مرحله های ۱و۲ این مثال و با فرض شرط توقف $\varepsilon = ۵\times۱۰^{-۶}$ و به کمک نرم افزار MATLAB، به کارببریم، مشاهده می شود که روش تکراری ژاکوبی بعداز ١٦٩ تکرار به جواب همگرا خواهد بود بادر نظر گرفتن مثال ٤.١ در [۳۱] مشاهده می کنیم که روش تکراری ژاکوبی در آنجا، بعداز ٢١٤ تکرار همگراست لذا جواب بدست آمده از حل دستگاه *FFSLS* توسط روش ما تعداد تکرارهای کمتری رانسبت به روش بکاررفته در [۳۱] نیاز دارد.

نتیجه گیری:

در این رساله و در فصلهای سوم وچهارم، روشهایی برای بدست آوردن جواب دستگاه معادلات خطی تماماً فازی به فرم ماتریسی $\tilde{A}\tilde{x}=\tilde{b}$ (که در آن ماتریس $\tilde{A}$، یک ماتریس مربعی یا مستطیلی فازی و $\tilde{x}$ و $\tilde{b}$ دو بردار فازی هستند) پیشنهاد داده ایم. در هر یک از روشهای پیشنهادی دستگاه $FFLS$ به دو دستگاه معادلات خطی غیر فازی یا کریسپ تبدیل خواهند شد.

در دستگاه $FFLS$ فصل سوم، ماتریس ضرایب $\tilde{A}$ مربعی یا مستطیلی (غیر مربعی) با اعداد فازی ذوزنقه ای یا مثلثی LR می باشند. بنابراین در این فصل دستگاه $FFLS$ را در چهار حالت ($FFRLS$ با اعداد فازی ذوزنقه ای LR، $FFRLS$ با اعداد فازی مثلثی LR، $FFSLS$ با اعداد فازی ذوزنقه ای LR، $FFSLS$ با اعداد فازی مثلثی LR) بررسی کردیم. دستگاه $FFLS$ در هر حالتی قرار گیرد به دو دستگاه معادلات خطی کریسپ (۳-۱۶) تبدیل می شود. حال با توجه به ماتریسهای R و S در این دستگاهها (مربعی، فرومعین و یا فرا معین و دارای رتبه تمام سطری بوده یا نه) می توان با استفاده از شبه وارون، جواب آنها را بدست آورد تا اینکه تقریبی از جواب فازی دستگاه اصلی یدست آید. در ادامه همین فصل روشهای عددی همچون تکراری ژاکوبی و تجزیه آدومین را برای حل دستگاه $FFLS$ در حالت چهارم معرفی نموده و نشان دادیم که روش تجزیه آدومین معادل روش تکراری ژاکوبی با یک تکرار کمتر است. همچنین در این بخش با حل مثالهایی مشاهده نمودیم که روش معرفی شده توسط ما نیازمند تعداد تکرارهای کمتری در مقایسه با روش ارائه شده توسط دهقان و همکاران از مرجع [۳۱] می باشد و چونکه در این فصل روش ما در برگیرنده هر نوع دستگاه مربعی یا غیر مربعی و شامل هر نوع عدد فازی نامنفی یا منفی است پس کلی تر از روش معرفی شده توسط دهقان و همکاران (که فقط برای دستگاه $FFSLS$ و اعداد فازی مثلثی LR مثبت است) می باشد.

در فصل چهارم روشی ساده و کاربردی برای حل دستگاه معادلات خطی مربعی تمام فازی ($FFSLS$) با اعداد فازی مثلثی دلخواه (که از ضرب برداری معرفی شده توسط بن وبده که خاصیت عمل را حفظ می کند استفاده شده است) معرفی نمودیم. روش پیشنهادی شامل الگوریتمی در سه مرحله است. در مرحله اول جواب ۱- برش دستگاه را با حل دستگاه کریسپ $A^{1}x^{1}=b^{1}$ محاسبه نموده و با توجه به علامت این جواب و علامت درایه های ماتریس ضرایب $\tilde{A}$، جواب ۰- برش دستگاه را در مرحله دوم و با حل دستگاه کریسپ (۴-۹) بدست آوردیم. در مرحله سوم نیز جواب نهایی دستگاه را از ترکیب محدب جوابهای ۰- برش و ۱- برش بدست آمده در مراحل اول و دوم توسط رابطه (۴-۱۶) محاسبه نمودیم. لازم به ذکر است

که روش پیشنهادی ما برای حل دستگاه معادلات خطی سمت راست فازی ($FSLE$) نیز به کار می رود و با حل مثال ٤.١ از مرجع [٣١] توسط این روش و استفاده از روش تکراری ژاکوبی برای بدست آوردن جوابهای کریسپ در مراحل ١و٢ مشاهده نمودیم که باز هم این روش نیازمند تعداد تکرارهای کمتری است (مثال ٤-٢-١٢ را نگاه کنید). در ادامه همین فصل جواب فازی را تعریف نموده و شرایط لازم وکافی برای یکتایی آن بدست آوردیم. لازم به یاد آوری است که فریدمن و همکاران در [٣۵] این شرایط را به کمک نامساوی $S^{-1} \geq 0$ فقط برای دستگاه $FSLE$، پیشنهاد دادند که ما آن را به شرایط (٤-١٩) برای دستگاه $FFLS$ گسترش دادیم.

با توجه به اینکه روشهای پیشنهادی در فصلهای سوم وچهارم را می توان برای حل دستگاه معادلات خطی مربعی یا غیر مربعی تمام فازی دوآل یا مختلط و روش پیشنهادی در فصل چهارم را برای حل معادله دیفرانسیل فازی (که توانستیم چندین مقاله ارسال و پذیرش نماییم) نیز گسترش داد، لذا این موارد را می توانیم به عنوان فهرستی از تحقیقات بعدی در نظر گرفت.

منابع

[۱] بوردن. ریچارد، فیرز. ج. دوگلاس، ۱۳۸۱، آنالیز عددی، ققنوس.

[۲] باتاچاریا، جین، ناگ پاول، ۱۳۷۶، جبرخطی، دانشگاه بین المللی قزوین.

[۳] طاهری. محمود، ۱۳۷۵، آشنایی با نظریه مجموعه های فازی، جهاد دانشگاهی مشهد.

[۴] غضنفری. مهدی، رضایی. محمود، ۱۳۸۵، مقدمه ای برنظریه مجموعه های فازی، دانشگاه علم وصنعت.

[۵] کازوتاناکا، ۱۳۸۳، مقدمه ای بر منطق فازی، دانشگاه فردوسی مشهد.

[۶] کلر. جی. ج، کلیر. یو. اس، یوآن.ب، ۱۳۸۱، تئوری مجموعه های فازی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

[۷] ماشین چی، ماشاءالله، ۱۳۸۴، مجموعه های مشکک، دانشگاه باهنر کرمان.

[۸] منهاج، محمدباقر، ۱۳۸۶، محاسبات فازی، دانش نگار.

[۹] نیکوکار. مسعود، درویشی. محمد تقی، ۱۳۷۹، وارون ماتریسهای مربعی، فرناز

[10] Abbaoui. K, Cherruault. Y, *Convergence Of Adomian's method applied to differential equations*, Math. comput. Model 28 (1994) 103-110.

[11] Abbasbandy. S, Jafarian. A, Ezzati. R, *Conjugate gradient method for fuzzy symmetric positive definite system of linear equations*, Applied Mathematics and Computation 171 (2005) 1184–1191.

[12] Abbasbandy. S, Ezzati. R, Jafarian. A, *LU decomposition method for solving fuzzy system of linear equations*, Applied Mathematics and Computation 172 (2006) 633–643.

[13] Abbasbandy. S, Otadi. M, Mosleh. M, *Minimal solution of general dual fuzzy linear systems*, Chaos Solitons and Fractals 37 (2008) 1113-1124.

[14] Abbasbandy. S, Jafarian. A, *Steepest descent method for system of fuzzy linear equations*, Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 823-833.

[15] Abbasbandy. S, Allahviranloo. T, Ezzati. R, *A method for solving fuzzy general linear systems*, J. Fuzzy Math 15 (2007) 881-889.

[16] Allahviranloo. T, *Succesive over relaxation iterative method for fuzzy system of linear equations*, Applied Mathematics and Computation 162 (2005) 189-196.

[17] Allahviranloo. T, *Numerical methods for fuzzy system of linear equations*, Applied Mathematics and Computation 155 (2004) 493-502.

[18] Allahviranloo. T, Ahmady. E, Ahmady. N, Shams Alketaby, *Block Jacobi two stage method with Gauss Sidel inner iterations for fuzzy systems of linear equations*, Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 1217-1228.

[19] Allahviranloo. T, Discussion: *A comment on fuzzy linear systems*, Fuzzy Sets and Systems 140 (2003) 559.

[20] Allahviranloo. T, Mikaeilvand. N, Aftabkiani. N, Mastani Shabestari. R, *Signed decomposition of fully fuzzy linear systems*, Applications and Applied Mathematics 3 (2008) 77-88.

[21] Allahviranloo. T, *The Adomian decomposition method for fuzzy system of linear equations*, Applied Mathematics and Computation 163 (2005) 553-563.

[22] Allahviranloo. T, Salahshour. S, Khezerloo. M, *Maximal and minimal symmetric solutions of fully fuzzy linear systems,* Journal of Computational and Applied Mathematics 235 (2011) 4652-4662.

[23] Allahviranloo. T, Salahshour. S, *Bounded and symmetric solutions of fully fuzzy linear systems in dual form*, Procedia Computer Science 3 (2011) 1494–1498.

[24] Asady. B, Abbasbandy. S, Alavi. M, *Fuzzy general linear systems*, Applied Mathematics and Computation 169 (2005) 34-40.

[25] Babolian. E, Biazar. J, Vahidi. A. R, *On the decomposition method for system of linear equations and system of linear Volterra integral equations*, Applied Mathematics and Computation 147 (2004) 19-27.

[26] Ban. A, bede B, *Properties of the cross product of fuzzy numbers*, Journal of Fuzzy Mathematics 14 (2006) 513-531.

[27] Bede. B, Fodor. J, *Product type operations between fuzzy numbers and their applications in geology*, Acta Polytechnica Hungarica 3 (2006) 123-139.

[28] Buckley. J. J, Qu. Y, *Solving systems of linear fuzzy equations*, Fuzzy Sets and Systems 43 (1991) 33-43.

[29] Data. B. N, *Numerical linear Algebra and Applications*, cole publisher company-first edition 1995.

[30] Dehghan. M, Hashemi. B, Ghatee. M, *Computational methods for solving fully fuzzy linear systems*, Applied Mathematics and Computation 179 (2006) 328-343.

[31] Dehghan. M, Hashemi. B, *Solution of the fully fuzzy linear systems using the decomposition procedure*, Applied Mathematics and Computation 182 (2006) 1568-1580.

[32] Dehghan. M, Hashemi. B, Ghatee. M, *Solution of the fully fuzzy linear systems using iterative techniques*, Chaos Solitons and Fractals 34 (2007) 316-336.

[33] Dehghan. M, Hashemi. B, *Iterative solution of fuzzy linear systems*, Applied Mathematics and Computation 175 (2006) 645-674.

[34] Dubois. D, Prade. H, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[35] Friedman. M, Ming. M, Kandel. A, *Fuzzy linear systems*, Fuzzy Sets and Systems 96 (1998) 201-209.

[36] Friedman. M, Ming. M, Kandel. A, Discussion: *Author's reply*, Fuzzy Sets and Systems 140 (2003) 561.

[37] Friedman. M, Ming. M, Kandel. A, *Duality in fuzzy linear systems*, Fuzzy Sets and Systems 109 (2000) 55-58.

[38] Goetschel. R, vaxman. W, *Elementary fuzzy caslculus,* Fuzzy set and Systems, 18 (1986) 31-43.

[39] Liu. H. K, *On the solution of fully fuzzy linear systems*, International Journal of Computational and Mathematical Sciences 4 (2010).

[40] Meyer. C. D, *Matrix Analysis and Applied linear Algebra*, siam 2000.

[41] Muzzioli. S, Reynaerts. H, *Fuzzy linear system of the form* $A_١x + b_١ = A_٢x + b_٢$, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 939-951.

[42] Vroman. A, Deschrijver. G, Kerre. E. E, *Solving systems of linear fuzzy equations by parametric functions-an improved algorithm*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1515-1534.

[43] Wang. K, Zheng. B, *In consistent fuzzy linear systems*, Applied Mathematics and Computation 181 (2006) 937-981.

[44] Zheng. B, Wang. K, *General fuzzy linear systems*, Applied Mathematics and Computation 181 (2006) 1276-1286.

واژه نامه فارسی به انگلیسی

Height	ارتفاع
Union of fuzzy	اجتماع فازی
Intersection of fuzzy	اشتراک فازی
Principle of inclusion and exclusion	اصل شمول و عدم شمول
Extension principle	اصل گسترش
Interval numbers	اعدادبازه ای
Fuzzy numbers	اعداد فازی
LR Fuzzy numbers	اعداد فازی *LR*
Fuzzy interval	بازه فازی
Fuzzy vector	بردار فازی
Initial vector	بردار آغازین
Eigen vector	بردار ویژه
Left spread	پهنای چپ
Right spread	پهنای راست
Membership function	تابع عضویت
Characteristic function	تابع مشخصه
Singular value decomposition (SVD)	تجزیه مقدار منفرد
Heuristic description	تشریح ابتکاری
Support	تکیه گاه (پشتیبان)
Approximate	تقریب
Full rank	تمام رتبه
Column full rank	تمام رتبه ستونی
Row full rank	تمام رتبه سطری
Minimum norm solution	جواب کمترین نرم
Least squares solution	جواب حداقل مربعات
Fuzzy solution	جواب فازی

Cartesian product	....	حاصلضرب دکارتی
Fuzzy arithmetic	....	حساب فازی
Adomian polynomials	....	چندجمله ایهای آدومین
Well-defined	....	خوش تعریف
Membership degree	....	درجه عضویت
Consistent system	....	دستگاه سازگار
Overdetermined system	....	دستگاه فرا معین
Underdetermined system	....	دستگاه فرومعین
System of linear equations	....	دستگاه معادلات خطی
Fuzzy linear system $(FSLE)$	....	دستگاه معادلات خطی فازی
Fully fuzzy linear systems	....	دستگاه معادلات خطی تماماً فازی
Fully fuzzy nonsquare linear system	....	دستگاه معادلات خطی غیر مربعی تمام فازی
Fully fuzzy square linear system $(FFSLS)$	....	دستگاه معادلات خطی مربعی تمام فازی
Fully fuzzy rectangle linear system $(FFRLS)$	....	دستگاه معادلات خطی مستطیلی تمام فازی
Inonsistent system	....	دستگاه ناسازگار
Jacobi iterative method	....	روش تکراری ژاکوبی
Adomian decomposition method	....	روش تجزیه آدومین
Iterative method	....	روش تکراری
Direct method	....	روش مستقیم
Fuzzy subset	....	زیر مجموعه فازی
Pseudo inverse	....	شبه وارون
Spectral radius	....	شعاع طیفی
Parametric form	....	شکل پارامتری
Cross product	....	ضرب برداری
Cardinal number	....	عدداصلی (کاردینالیتی)
Trapezoidal fuzzy number	....	عدد فازی ذوزنقه ای
LR Trapezoidal fuzzy number	....	عدد فازی ذوزنقه ای LR
Symmetric fuzzy number	....	عدد فازی متقارن

Triangular fuzzy number .... عدد فازی مثلثی

LR Triangular fuzzy number .... عدد فازی مثلثی *LR*

Interval Arithmetic Operations .... عملیات حساب بازه ای

Relative cardinality .... کاردینالیتی نسبی

Augmented matrix .... ماتریس افزوده

Upper triangular matrix .... ماتریس بالا مثلثی

Lower triangular matrix .... ماتریس پائین مثلثی اکید

Fuzzy matrix .... ماتریس فازی

Diagonal matrix .... ماتریس قطری

Mean value matrix .... ماتریس مقدار میانی

left spread matrices .... ماتریس پهنای چپ

Right spread matrices .... ماتریس پهنای راست

Inverse .... ماتریس وارون

matrix

Symmetric .... متقارن

Complement of fuzzy .... متمم فازی

Convex .... محدب

α -Level .... مجموعه در سطح α (α- برش)

Strong α-Level set .... مجموعه قوی در سطح α (α- برش قوی)

Level sets .... مجموعه های تراز

Fuzzy sets .... مجموعه های فازی

Crisp sets .... مجموعه های قطعی

Universal set, Universe of discourse .... مجموعه مرجع یا جهانی

Convex sets .... مجموعه های محدب

Characteristic set .... مجموعه مشخصه

Center .... مرکز

Eigen value .... مقدار ویژه

Fuzzy logic .... منطق فازی

Singular .... منفرد

Non-singular	نامنفرد
Crossover point	نقطه گذر(معبر)
Upper semi-continuous	نیم پیوسته بالا
Generalized inverse	وارون تعمیم یافته
Moore-Penrose inverse	وارون مور- پنرُز
Core	هسته
Convergence	همگرایی
Ever determined	همواره معین
Uniqueness	یکتایی

مقالات استخراج شده از تحقیق:

[1] Abbasbandy. S, Allahviranloo. T, Moloudzadeh. S, *A solution of arbitrary fully fuzzy linear systems,* World Applied Sciences Journal 19 (2012) 1731-1745, DOI: 10.5829/idosi.wasj.2012.19.12.111.

[2] Moloudzadeh. S, Allahviranloo. T, Darabi. P, *A new method for solving an arbitrary fully fuzzy linear system*, Soft Computing (2013) In Press, DOI: 10.1007/s00500-013-0986-x.

[3] Moloudzadeh. S, Darabi. P, Khandani. H, *The pseudo inverse matrices to solve general fully fuzzy linear systems*, Journal of soft computing and applications (2013) In Press, DOI:10.5899/2013/jsca-00012.

Numerical solution of fully fuzzy linear system of equations

Abstract

In this thesis first, we give a short introduction to the theory of fuzzy sets and become familiar with some types of fuzzy numbers and operations on them. In the next chapter a review of linear equations and methods for solving them is given.

In the third chapter the fully fuzzy linear system of equations is introduced and then it is divided in four cases it (square or rectangle fully fuzzy linear systems with trapezoidal or triangular LR fuzzy numbers). In each case the fully fuzzy linear system is transformed into two crisp linear systems and by solving these two systems, using the pseudo inverse matrix method the approximate solution of original system is obtained. Then by solving numerical examples the Jacobi iterative and Adomian decomposition (ADM) methods for solving FFSLS are introduced. It is shown that for an FFSLS the ADM method is equivalent to the Jacobi iterative method but with less iterations.

In the fourth chapter, a simple and practical method to solve an arbitrary fully fuzzy square linear system $(FFSLS)$ with triangular fuzzy numbers is proposed. The idea of the this method consists of a three-step algorithm which is constructed by extending $0-cut$ and $1-cut$ solution of original $(FFSLS)$. At the end of this chapter a fuzzy solution of $(FFSLS)$ is defined and a necessary and sufficient conditions for the uniqueness of a fuzzy solution is established.

Saeid Moloudzadeh