

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پیش بینی و محاسبه جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی

نگارش:

الیاس شیوانیان

استاد راهنما:

دکتر سعید عباس بندی

اساتید مشاور:

دکتر مهدی دهقان و دکتر داوود رستمی

رساله برای دریافت درجه دکتری در رشته

ریاضی کاربردی – آنالیز عددی

مرداد ۱۳۹۰



چکیده

در این رساله سعی می شود تا یک روش کاملاً محاسباتی - تحلیلی جهت پیش بینی چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شود بطوریکه بتوان آن را به آسانی روی معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی بکار بست. هدف ما ارائه یک روشی است که نه تنها بتواند چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی را پیش بینی نماید بلکه بتواند با کارایی قابل توجهی همه شاخه های جوابها (در صورتی که مساله مورد نظر دارای جوابهای چندگانه باشد) را بطور همزمان بصورت تقریبی - تحلیلی بدست آورد. در فصل اول به بیان مقدمه ای بر روش آنالیز هموتوپی می پردازیم زیرا روشی که ارائه خواهد شده بر اساس این روش ساخته شده است. در فصل دوم به معرفی روش آنالیز هموتوپی پیشگو، سپس بصورت کامل به آنالیز ریاضی آن پرداخته می شود و در فصل سوم چندین مدل کاربردی که اعتبار روش را تأیید می کند، بررسی می شود. در فصل چهارم به مسائل مقدار مرزی غیر خطی که دارای شرط مرزی در بی نهایت می باشند، بصورت مختصر پرداخته می شود و روشی مبتنی بر شبه طیفی - هم محلی برای یک نوع مدل خاص به کار برده می شود.

واژه های کلیدی:

روش آنالیز هموتوپی، روش آنالیز هموتوپی پیشگو، پارامتر تجویز شده، پارامتر کنترل کننده همگرایی، شرط تحمیل شونده، جوابهای چندگانه، چندگانگی جوابها، مسائل مقدار مرزی غیر خطی، معادلات دیفرانسیل غیر خطی، شرایط مرزی متناهی، شرایط مرزی در بی نهایت، روش شبه طیفی - هم محلی.

در زیر مقالات استخراجی از پایان نامه آمده است.

- [1] S. Abbasbandy, M. Pakdemirli, E. Shivanian, Optimum Path of a Flying Object with Exponentially Decaying Density Medium, Z. Naturforsch. 2009; 64a: 431 – 438.
 - [2] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Solution of Singular Linear Vibrational BVPs by the Homotopy Analysis Method, Journal of Numerical Mathematics and Stochastics, 2009; 1 (1): 77-84.
 - [3] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, Numer Algor 2011; 56: 27–43.
 - [4] H. Vosughi, E. Shivanian, S. Abbasbandy, A new analytical technique to solve Volterra's integral equations, Mathematical methods in the applied sciences, 2011; 10(34): 1243-1253.
 - [5] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Series Solution of the System of Integro-Differential Equations, Z. Naturforsch, 2009; 64a: 811 – 818.
 - [6] S. Abbasbandy, E. Magyari, E. Shivanian, The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2009;14: 3530–3536.
 - [7] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Prediction of multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems: Novel application of homotopy analysis method, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2010; 15: 3830–3846.
 - [8] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Exact analytical solution of a nonlinear equation arising in heat transfer, Physics Letters A, 2010; 374: 567–574.
 - [9] S. Abbasbandy, E. Shivanian, K. Vajravelu, Mathematical properties of h-curve in the frame work of the homotopy analysis method, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2011; 16: 4268–4275.
 - [10] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Predictor homotopy analysis method and its application to some nonlinear problems, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2011; 16: 2456–2468.
 - [11] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Multiple solutions of mixed convection in a porous medium on semi-infinite interval using pseudo-spectral collocation method, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 2011; 16: 2745–2752.
- همچنین دو مقاله ارسال شده زیر به مجلات معتبر تحت داوری می باشند که می توانند به ترتیب در فصل سوم و چهارم درج شوند.
- [12] E. Shivanian, H. Vosughi, S. Abbasbandy, Unique and multiple PHAM series solutions of a class of nonlinear reactive transport model.
 - [13] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Prediction and calculation of multiple solutions; mixed convection in a porous medium.

فهرست مطالب

شماره صفحه	فهرست عناوین پایان نامه
۱۶.....	فصل ۱ (مقدمه ای بر روش آنالیز هموتویی).....
۱۷.....	1.1 معادله دگردیسی مرتبه صفر.....
۲۰.....	2.1 معادله دگردیسی مراتب بالا.....
۲۱.....	3.1 آنالیز همگرایی روش و کران خطا.....
۲۶.....	4.1 معادله دیفرانسیل معمولی: مسیر بهینه یک شیء شناور.....
۲۸.....	1.4.1 نتایج و بحث در حالت غیر خطی ضعیف.....
۳۱.....	2.4.1 نتایج و بحث در حالت غیر خطی قوی.....
۳۴.....	5.1 معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی: معادله ارتعاش خطی منفرد.....
۳۸.....	6.1 معادلات انتگرال فردهلم.....
۴۶.....	7.1 معادلات انتگرال ولترا.....
۵۵.....	8.1 معادلات انتگرال - دیفرانسیل.....
۶۰.....	فصل 2 (جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معمولی: آنالیز هموتویی پیشگو).....
۶۲.....	1.2 شرح روش آنالیز هموتویی پیشگو.....

2.2 آنالیز همگرایی روش	۶۷
فصل 3 (جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معمولی: کاربردها)	۸۵
1.3 مدل انتقال گرما	۸۶
1.1.3 جواب دقیق مدل	۸۶
2.1.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوبی پیشگو	۹۶
2.3 معادله براتو (قویاً غیر خطی)	۱۰۲
1.2.3 جواب دقیق مساله	۱۰۲
2.2.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوبی پیشگو	۱۰۵
3.3 جریان تبادل حرارت مخلوط در یک کانال عمودی	۱۱۰
1.3.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوبی پیشگو	۱۱۱
2.3.3 نتایج بیشتر	۱۱۸
4.3 مدل واکنش - نفوذ	۱۲۰
1.4.3 جواب دقیق مدل	۱۲۱
2.4.3 جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوبی پیشگو	۱۲۲
فصل 4 (جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معمولی با شرایط مرزی در بی نهایت)	۱۲۹
1.4 مقدمه ای بر روش شبه طیفی - هم محلی	۱۳۰

۲.۴ مدل جریان تبادل حرارت.....۱۳۶

۳.۴ فرایند بدست آوردن جوابهای چندگانه.....۱۳۷

فصل ۵ (نتیجه گیری و پیشنهادات).....۱۴۷

کتاب نامه.....۱۵۰

فهرست جدول ها

جدول ۱-۱: مقایسه جواب دقیق از جواب تقریبی در حالت قوی غیر خطی مساله (1.40)..... ۳۳

جدول ۱-۳: جوابهای دقیق مساله مقدار مرزی (3.2) - (3.1) برای بعضی مقادیر n در بازه $(-2, -1)$ ۹۱

جدول ۲-۳: جوابهای دقیق مساله مقدار مرزی (3.2) - (3.1) برای بعضی مقادیر n در بازه $[-4, -2]$ ۹۳

جدول ۳-۳: محاسبه تقریبی $U_{25}(0)$ و $U_{25}''(0)$ برای مقادیر مختلف $\bar{\epsilon}$ ۱۲۰

جدول ۱-۴: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ با $b = -0.6$ با $N = 30$ برای مقادیر مختلف η ۱۴۵

جدول ۲-۴: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ با $b = -1$ با $N = 30$ برای مقادیر مختلف η ۱۴۶

جدول ۳-۴: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ با $b = -1.4$ با $N = 30$ برای مقادیر مختلف η ۱۴۶

فهرست شکل ها

شکل ۱-۱: رسم $\hbar - curve$ برای $u'(0)$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$ ۲۹

شکل ۲-۱: رسم $\hbar - curve$ برای $u''(0)$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$ ۲۹

شکل ۳-۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$ ۳۰

شکل ۴-۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ و $\varepsilon = 10$ ۳۰

شکل ۵-۱: تابع خطای تقریبی (1.51) نسبت به هر دوی ε و $\hbar$ با $\beta = 0.1$ ۳۱

شکل ۶-۱: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 40$ با $\beta = 1$ و $\varepsilon = 0.1$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی از

مرتبه $M = 40$ خط تیره ($\hbar = -0.4$) خط چین ($\hbar = -0.8$) نقطه چین ($\hbar = -1$) ۳۲

شکل ۷-۱: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 5$ و $\varepsilon = 0.1$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی از

مرتبه $M = 50$ خط تیره ($\hbar = -0.25$) خط چین ($\hbar = -0.30$) نقطه چین ($\hbar = -0.35$) ۳۲

شکل ۸-۱: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 15$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی

از مرتبه $M = 50$ خط تیره ($\hbar = -0.35$) خط چین ($\hbar = -0.40$) نقطه چین ($\hbar = -0.50$) ۳۳

شکل ۹-۱: (الف) رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 20$. (ب) تابع خطای جواب تقریبی

از مرتبه $M = 50$ خط تیره ($\hbar = -0.32$) خط چین ($\hbar = -0.40$) نقطه چین ($\hbar = -0.50$) ۳۳

شکل ۱۰-۱: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 30$ با $c = 5$ خط تیره ($U''_{30,t}(1,0)$) خط چین

($U'''_{30,t}(1,0)$) ۳۶

شکل ۱۱-۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ با $c = 5$ و $\hbar = -1$ و خطای باقیمانده آن ۳۷

شکل ۱۲-۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ نسبت به زمان برای c های مختلف با $r = 15$ ۳۷

شکل ۱۳-۱: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$ خط تیره ($U'_{15}(0, \hbar)$) خط چین ($U'''_{15}(0, \hbar)$) ۴۴

شکل ۱-۱۴: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 15$ خط تیره ($\hbar = -0.60$) خط چین ($\hbar = -0.65$) نقطه چین ($\hbar = -0.50$)..... ۴۴

شکل ۱-۱۵: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 30$ یعنی $U'_{30}(0, \hbar)$ ۴۵

شکل ۱-۱۶: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ خط تیره ($\hbar = -0.15$) خط چین ($\hbar = -0.20$) نقطه چین ($\hbar = -0.10$)..... ۴۶

شکل ۱-۱۷: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$ خط چین ($U_{15}(1, \hbar)$) خط تیره ($U'_{15}(1, \hbar)$) خط نقطه-چین ($U''_{15}(1, \hbar)$)..... ۵۲

شکل ۱-۱۸: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ خط تیره ($\hbar = -0.60$) خط چین ($\hbar = -0.80$) نقطه چین ($\hbar = -0.40$)..... ۵۳

شکل ۱-۱۹: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ خط چین ($U_{10}(\frac{\pi}{4}, \hbar)$) خط تیره ($U'_{10}(0, \hbar)$) خط نقطه-چین ($U''_{10}(\frac{\pi}{6}, \hbar)$)..... ۵۴

شکل ۱-۲۰: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ خط تیره ($\hbar = -0.9$) خط چین ($\hbar = -1$) نقطه چین ($\hbar = -0.5$)..... ۵۵

شکل ۱-۲۱: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$ خط چین ($V'''_{15}(0, \hbar)$) خط تیره ($U''_{15}(0, \hbar)$)..... ۵۸

شکل ۱-۲۲: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ برای $U_M(x)$ خط تیره ($\hbar = 0.9$) خط چین ($\hbar = 1$) نقطه چین ($\hbar = 0.8$)..... ۵۹

شکل ۱-۲۳: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ برای $V_M(x)$ خط تیره ($\hbar = 0.83$) خط چین ($\hbar = 1$) نقطه چین ($\hbar = 0.7$)..... ۵۹

شکل ۲-۱: نمودار $G_{10}(\gamma, g_1(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۷۱

شکل ۲-۲: نمودار $G_{10}(\gamma, g_2(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۷۲

- شکل ۳-۲: نمودار $G_{25}(\gamma, g_1(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۷۳
- شکل ۴-۲: نمودار $G_{20}(\gamma, g_2(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۷۳
- شکل ۵-۲: نمودار $G_{20}(\gamma, g(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۷۷
- شکل ۶-۲: نمودار $G_{10}(\gamma, g(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ ۷۸
- شکل ۱-۳: رسم تابع θ_0 بر حسب N بصورت ضمنی برای مقادیر مختلف n بر طبق (3.11) ۹۰
- شکل ۲-۳: جوابهای دوگانه مساله مقدار مرزی (3.2) - (3.1) برای n و N مشخص ۹۲
- شکل ۳-۳: رسم تابع θ_0 بر حسب N بصورت ضمنی برای مقادیر مختلف n بر طبق (3.11) ۹۵
- شکل ۴-۳: جوابهای دوگانه مساله مقدار مرزی (3.2) - (3.1) برای n و N مشخص ۹۵
- شکل ۵-۳: رسم تابع δ بر حسب ψ بصورت ضمنی بر طبق (3.17) ۹۷
- شکل ۶-۳: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.28) ۹۹
- شکل ۷-۳: مقایسه جواب تقریبی شاخه پایینی با دقیق، $\theta_3(x)$ (قهوه ای) $\theta_5(x)$ (آبی) $\theta_{10}(x)$ (قرمز) ۱۰۰
- شکل ۸-۳: مقایسه جواب تقریبی شاخه بالایی با دقیق، $\theta_3(x)$ (قهوه ای) $\theta_5(x)$ (آبی) $\theta_{10}(x)$ (قرمز) ۱۰۱
- شکل ۹-۳: مقایسه جواب دوگانه تقریبی از مرتبه $M = 35$ با جواب دوگانه دقیق ۱۰۱
- شکل ۱۰-۳: رسم تابع α بر حسب λ بصورت ضمنی بر طبق (3.34) ۱۰۳
- شکل ۱۱-۳: رسم تابع $u'(0)$ بر حسب α بر طبق (3.35) ۱۰۴
- شکل ۱۲-۳: رسم تابع γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.49) ۱۰۸
- شکل ۱۳-۳: مقایسه جواب تقریبی شاخه پایینی با دقیق، $\theta_5(x)$ (قهوه ای) $\theta_8(x)$ (آبی) $\theta_{10}(x)$ (قرمز) ۱۰۹
- شکل ۱۴-۳: مقایسه جواب تقریبی شاخه بالایی با دقیق، $\theta_{17}(x)$ (قهوه ای) $\theta_{20}(x)$ (آبی) $\theta_{22}(x)$ (قرمز) ۱۰۹

شکل ۳-۱۵: مقایسه جواب دوگانه تقریبی از مرتبه $M = 20$ برای شاخه پایینی و از $M = 30$ برای شاخه بالایی با جواب دوگانه دقیق..... ۱۱۰

شکل ۳-۱۶: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $E = 20$ ۱۱۴

شکل ۳-۱۷: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $E = 20$ (بزرگنمایی شکل ۳-۱۶)..... ۱۱۴

شکل ۳-۱۸: رسم باقیمانده معادله (3.66) برای مقادیر مختلف $\hbar$ با $E = 20$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 20$ ، خط چین

($\hbar = -0.8$) خط تیره ($\hbar = -1$) خط نقطه-چین ($\hbar = -1.2$)..... ۱۱۵

شکل ۳-۱۹: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $E = -20$ ۱۱۵

شکل ۳-۲۰: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66) برای $E = -20$ (بزرگنمایی شکل ۳-۱۹)..... ۱۱۶

شکل ۳-۲۱: رسم باقیمانده معادله (3.66) برای مقادیر مختلف $\hbar$ با $E = -20$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 20$ ، خط چین

($\hbar = -0.8$) خط تیره ($\hbar = -1$) خط نقطه-چین ($\hbar = -1.2$)..... ۱۱۶

شکل ۳-۲۲: رسم جوابهای تقریبی دوگانه برای $E = 20$ ۱۱۷

شکل ۳-۲۳: رسم جوابهای تقریبی دوگانه برای $E = -20$ ۱۱۸

شکل ۳-۲۴: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66)، خط تیره ($E = 50$) نقطه چین ($E = 100$) خط

چین ($E = 150$) خط نقطه-چین ($E = 200$)..... ۱۱۹

شکل ۳-۲۵: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.66)، خط تیره ($E = -50$) نقطه چین ($E = -100$) خط

چین ($E = -150$) خط نقطه-چین ($E = -200$)..... ۱۱۹

شکل ۳-۲۶: رسم تابع γ بر حسب φ بصورت ضمنی بر طبق (3.71)..... ۱۲۲

شکل ۳-۲۷: رسم تابع γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.81) برای $M = 60$ و $\varphi = 0.7$ ۱۲۵

شکل ۳-۲۸: رسم تابع γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (3.81) برای $M = 60$ و $\varphi = 0.6$ ۱۲۵

- شکل ۳-۲۹: مقایسه جوابهای تقریبی شاخه پایینی $U_1(x)$ ، $U_3(x)$ و $U_5(x)$ با دقیق..... ۱۲۶
- شکل ۳-۳۰: مقایسه جوابهای تقریبی شاخه بالایی $U_1(x)$ ، $U_3(x)$ و $U_5(x)$ با دقیق..... ۱۲۷
- شکل ۳-۳۱: مقایسه جواب دوگانه تقریبی (نقاط گرد تیره) از مرتبه $M = 30$ با جواب دوگانه دقیق (خط تیره) متناظر با نقاط (A,B) در شکل ۳-۲۶..... ۱۲۷
- شکل ۳-۳۲: مقایسه جواب دوگانه تقریبی (نقاط گرد تیره) از مرتبه $M = 30$ با جواب دوگانه دقیق (خط تیره) متناظر با نقاط (C,D) در شکل ۳-۲۶..... ۱۲۸
- شکل ۴-۱: رسم $f'(0)$ بر حسب b بر طبق (2.17)..... ۱۳۷
- شکل ۴-۲: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ بر طبق (4.37) - (4.38)..... ۱۴۲
- شکل ۴-۳: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -0.6$ با $N = 30$ ۱۴۲
- شکل ۴-۴: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ با $N = 30$ ۱۴۳
- شکل ۴-۵: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1.4$ با $N = 30$ ۱۴۳
- شکل ۴-۶: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -0.6$ با $N = 30$ ۱۴۴
- شکل ۴-۷: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ با $N = 30$ ۱۴۴
- شکل ۴-۸: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1.4$ با $N = 30$ ۱۴۵

فصل اوّل

مقدمه ای بر روش آنالیز هموتوپی

روش آنالیز هموتوپی^۱ در ابتدا توسط Liao [1-2] مطرح شد و از آن پس توسط محققین بسیاری در دهه اخیر برای یافتن جوابهای مسائل غیر خطی بکار گرفته شد که می توان از جمله به جریانهای چسبناک سیال های غیر نیوتنی [3-13]، معادلات نوع KDV^۲ [14-16]، معادلات غیر خطی انتقال گرما [17-18]، مسائل مالی [19-20]، مسائل ریمان^۳ وابسته به معادلات آبهای سطحی [21]، حرکت پرتابه^۴ [22]، جریان جت-گلورت^۵ [23]، موجهای آبی غیر خطی [24]، جریانهای زیرزمینی [25]، معادلات برگر-هاکسلی^۶ [26]، معادلات وابسته به زمان امدن-فولر^۷ [27]، معادلات دیفرانسیل تفاضلی [28]، معادلات لاپلاس با شرایط مرزی نیومن^۸ و دیریکله^۹ [29]، شبکه های هیدرولیک حرارتی^{۱۰} [30] و غیره اشاره کرد. اینک بصورت خلاصه به شرح سیستماتیک روش آنالیز هموتوپی برای مسئله کلی غیرخطی می پردازیم.

۱-۱ معادله دگرذیسی مرتبه صفر^{۱۱}

در حالت کلی بسیاری از مسائل غیر خطی را می توان بصورت مجموعه ای از معادلات مقدار مرزی یا مقدار آغازی شرح داد. ما در اینجا برای اختصار تنها یک معادله غیر خطی کلی را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$\mathcal{N}[u(r, t)] = 0, \quad (1.1)$$

که در آن $\mathcal{N}$ اپراتور غیر خطی، $u(r, t)$ تابع مجهول و متغیرهای r و t به ترتیب متغیرهای مستقل مکانی و زمانی می باشند.

¹ Homotopy analysis method (HAM)

² Korteweg-de Vries

³ Riemann

⁴ projectile motion

⁵ Glauert-jet flow

⁶ Burgers-Huxley

⁷ Emden-Fowler

⁸ Neumann

⁹ Dirichlet

¹⁰ Thermal-hydraulic

¹¹ Zero-order deformation equation

فرض کنید $u_0(r, t)$ تابع حدس آغازی برای تابع جواب دقیق $u(r, t)$ ، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r, t) \neq 0$ یک تابع کمکی و $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی کمکی با ویژگی

$$\mathcal{L}[f(r, t)] = 0 \quad (1.2)$$

هنگامی که $f(r, t) = 0$ می باشد. فرض کنیم $q \in [0, 1]$ پارامتر نشانده باشد، هموتویی زیر را می سازیم

$$\mathcal{H}(\Phi(r, t; q); u_0(r, t), H(r, t), \hbar, q) = (1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(r, t; q) - u_0(r, t)]\} - q\hbar H(r, t)\mathcal{N}[\Phi(r, t; q)] \quad (1.3)$$

هموتویی بالا شامل پارامتر کنترل کننده همگرایی^{۱۲} $\hbar$ و تابع کمکی $H(r, t)$ می باشد که نقش مهمی در چارچوب روش آنالیز هموتویی بازی می کند. در اینجا قابل تاکید است که در روش آنالیز هموتویی اختیار عمل فراوانی جهت انتخاب $u_0(r, t)$ تابع حدس آغازی، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r, t) \neq 0$ تابع کمکی و $\mathcal{L}$ عملگر خطی وجود دارد.

فرض کنیم $q \in [0, 1]$ پارامتر نشانده باشد، با مساوی صفر قرار دادن هموتویی بالا یعنی

$$\mathcal{H}(\Phi(r, t; q); u_0(r, t), H(r, t), \hbar, q) = 0 \quad (1.4)$$

معادله دگرذیسی مرتبه صفر زیر حاصل می شود

$$(1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(r, t; q) - u_0(r, t)]\} = q\hbar H(r, t)\mathcal{N}[\Phi(r, t; q)] \quad (1.5)$$

که در آن جواب معادله بالا نه تنها به انتخاب $u_0(r, t)$ تابع حدس آغازی، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r, t) \neq 0$ تابع کمکی و $\mathcal{L}$ عملگر خطی بستگی دارد بلکه به پارامتر نشانده $q \in [0, 1]$ نیز بستگی دارد. وقتی $q = 0$ معادله دگرذیسی بالا بصورت زیر در می آید

¹² Convergence-controller parameter

$$\mathcal{L}[\Phi(r, t; q) - u_0(r, t)] = 0 \quad (1.6)$$

که با توجه به ویژگی (۱,۲) بدست می آوریم

$$\Phi(r, t; 0) = u_0(r, t) \quad (1.7)$$

و هنگامی که $q = 1$ با توجه به اینکه $\hbar \neq 0$ و $H(r, t) \neq 0$ معادله دگرذیسی مرتبه صفر با معادله زیر هم ارز می شود.

$$\mathcal{N}[\Phi(r, t; 1)] = 0 \quad (1.8)$$

که همان معادله (۱,۱) می باشد بطوریکه

$$\Phi(r, t; 1) = u(r, t) \quad (1.9)$$

بنابراین مطابق با (۱,۷) و (۱,۹) همزمان با افزایش پارامتر نشانده q از صفر تا یک تابع $\Phi(r, t; q)$ از تابع حدس آغازی $u_0(r, t)$ تا تابع جواب معادله اصلی (۱,۱)، $u(r, t)$ را می پیماید که به همین دلیل معادله (۱,۵) معادله دگرذیسی مرتبه صفر گفته می شود.

با استفاده از قضیه سری تیلور بسط سری توانی تابع $\Phi(r, t; q)$ را نسبت به q می نویسیم

$$\Phi(r, t; q) = \Phi(r, t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(r, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} q^m \quad (1.10)$$

مشتقات دگرذیسی مرتبه m ام را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$u_m(r, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \Phi(r, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (1.11)$$

بنابراین با توجه به (۱,۸) بسط سری تیلور تابع $\Phi(r, t; q)$ نسبت به q بصورت زیر تبدیل می شود

$$\Phi(r, t, q) = u_0(r, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r, t) q^m \quad (1.12)$$

بار دیگر تاکید می کنیم که در روش آنالیز هموتوپی اختیار عمل فراوانی جهت انتخاب $u_0(r, t)$ تابع حدس آغازی، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r, t) \neq 0$ تابع کمکی و $\mathcal{L}$ عملگر خطی وجود دارد. در این روش همه این ابزارها طوری انتخاب می شوند که سری (۱،۱۲) در $q = 1$ همگرا شود. در بخش های بعدی ثابت خواهد شد که در صورت همگرایی به جواب (۱،۱) همگرا خواهد شد. اینک به محاسبه جملات این سری با یک روش بسیار مناسب می پردازیم.

۱ ۴ معادله دگردیسی مراتب بالا^{۱۳}

بردار زیر را تعریف و در نظر می گیریم

$$\vec{u}_n = \{u_0(r, t), u_1(r, t), u_2(r, t), \dots, u_n(r, t)\} \quad (1.13)$$

مطابق با تعریف (۱،۱۱)، $u_m(r, t)$ را می توان از روی معادله دگردیسی مرتبه صفر همانطوریکه در ادامه می آید بدست آورد. از طرفین معادله دگردیسی مرتبه صفر مشتق مرتبه m ام می گیریم و سپس به $m!$ تقسیم کرده و آنگاه در $q = 0$ حساب می کنیم. آنگاه معادله دگردیسی مرتبه بالا را بصورت زیر خواهیم داشت

$$\mathcal{L}[u_m(r, t) - \chi_m u_{m-1}(r, t)] = \hbar H(r, t) R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) \quad (1.14)$$

که در آن χ_m به صورت زیر تعریف می شود

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

و همچنین

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(r, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (1.16)$$

¹³ High-order deformation equation

حال با جایگذاری (۱,۱۲) در رابطه بالا بدست می آوریم

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \mathcal{N}[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(r, t) q^n] \right\} \Big|_{q=0} \quad (1.17)$$

توجه می نماییم که $R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t)$ در معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۱۴) از رابطه (۱,۱۷) به سادگی محاسبه می شود و تنها بر حسب $\vec{u}_{m-1}$ بدست می آید. با توجه به اینکه $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی بوده، بنابراین معادله دگرذیسی مرتبه بالا یک معادله دیفراسیل خطی بوده که بصورت بازگشتی یک پس از دیگری $u_m(r, t)$ را بدست می دهد و نهایتاً تقریب مرتبه m ام از $u(r, t)$ بصورت زیر بدست می آید

$$u(r, t) \approx U_m(r, t) = \sum_{k=0}^m u_k(r, t) \quad (1.18)$$

۱ ۴ آنالیز همگرایی روش و کران خطا

در این قسمت به تحلیل همگرایی روش آنالیز هموتویی می پردازیم و قضایای مربوطه را بیان و اثبات خواهیم کرد [31].

قضیه ۱-۱:

فرض کنید سری (۱,۱۲) وقتی $q = 1$ همگرا باشد به عبارت دیگر سری زیر همگرا باشد

$$u_0(r, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r, t) \quad (1.19)$$

که در آن $u_0(r, t)$ تابع حدس آغازی برای جواب (۱,۱) و $u_m(r, t)$ ها برای $n \geq 1$ از معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۱۴) بدست می آید. آنگاه سری (۱,۱۹) جواب معادله اصلی (۱,۱) خواهد بود.

اثبات:

فرض کنیم سری (۱,۱۹) به تابع $s(r, t)$ همگرا باشد یعنی

$$s(r, t) = u_0(r, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r, t) \quad (1.20)$$

در این صورت با استفاده معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۱۴) و تعریف (۱,۱۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \hbar H(r, t) \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = \\ \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L}[u_m(r, t) - \chi_m u_{m-1}(r, t)] = \\ \mathcal{L}\{\sum_{m=1}^{+\infty} [u_m(r, t) - \chi_m u_{m-1}(r, t)]\} = \mathcal{L}\{u_1(r, t)\} + \mathcal{L}\{u_2(r, t) - u_1(r, t)\} + \\ \mathcal{L}\{u_3(r, t) - u_2(r, t)\} + \cdots + \mathcal{L}\{u_n(r, t) - u_{n-1}(r, t)\} + \cdots = \\ \mathcal{L}\{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, t)\} = \mathcal{L}\{0\} = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

با توجه به اینکه $\hbar \neq 0$ و $H(r, t) \neq 0$ آنگاه

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) = 0 \quad (1.22)$$

در نتیجه

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \mathcal{N}[\Phi(r, t; q)]}{\partial q^m} \right|_{q=0} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(r, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} = 0 \quad (1.23)$$

حال تابع باقیمانده معادله اصلی (۱,۱) را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathcal{R}(r, t; q) = \mathcal{N}[\Phi(r, t; q)] \quad (1.24)$$

اینک برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که $\mathcal{R}(r, t; 1) = 0$ زیرا در اینصورت خواهیم داشت

$$\mathcal{N}[\Phi(r, t; 1)] = 0 \quad (1.25)$$

و از طرف دیگر می دانیم $\Phi(r, t; 1) = s(r, t)$ حال بسط تیلور تابع $\mathcal{R}(r, t; q)$ را نسبت به q می

نویسیم

$$\mathcal{R}(r, t; q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \mathcal{R}(r, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m \quad (1.26)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۱,۲۳) داریم

$$\mathcal{R}(r, t; 1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \mathcal{R}(r, t; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \mathcal{N}[\Phi(r, t; q)]}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = 0 \quad (1.27)$$

و اثبات کامل می شود.

قضیه ۱-۲:

فرض کنید جمله های سری جواب (۱,۱۸) بدست آمده از معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۱۴) $\varphi_0(t)$,

$\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ و ... باشند. در این صورت اگر $0 < \gamma < 1$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\exists k_0 \in N, \forall k \geq k_0: \|\varphi_{k+1}(t)\| \leq \gamma \|\varphi_k(t)\| \quad (1.28)$$

آنگاه سری جواب $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)$ همگراست.

اثبات:

دنباله $\{S_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} S_0(t) = \varphi_0(t) \\ S_1(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) \\ S_2(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) \\ \vdots \\ S_n(t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t) + \dots + \varphi_n(t) \end{cases} \quad (1.29)$$

حال ثابت می کنیم که $\{S_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ می باشد. در نظر می گیریم که

$$\begin{aligned} \|S_{n+1} - S_n\| &= \|\varphi_{n+1}(t)\| \leq \gamma \|\varphi_n(t)\| \leq \gamma^2 \|\varphi_{n-1}(t)\| \leq \dots \leq \\ &\gamma^{n-k_0+1} \|\varphi_{k_0}(t)\| \end{aligned} \quad (1.30)$$

و برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ و $n \geq m > k_0$ داریم

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &\leq \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \dots + \|(S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \gamma^{n-k_0} \|\varphi_{k_0}(t)\| + \gamma^{n-k_0-1} \|\varphi_{k_0}(t)\| + \dots + \gamma^{m-k_0+1} \|\varphi_{k_0}(t)\| \\ &= \frac{1-\gamma^{n-m}}{1-\gamma} \gamma^{m-k_0+1} \|\varphi_{k_0}(t)\| \end{aligned} \quad (1.31)$$

بنابراین چون $0 < \gamma < 1$ بدست می آوریم

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0 \quad (1.32)$$

بنابراین $\{S_n(t)\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ بوده و سری $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)$ همگرا می باشد و اثبات کامل می شود.

قضیه ۱-۳:

فرض کنید سری $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)$ در قضیه ۱-۲ به جواب مساله (۱,۱) همگرا باشد و بر طبق (۱,۱۸) $\Phi_M(t) = \sum_{k=0}^M \varphi_k(t)$ جواب تقریبی مساله (۱,۱) باشد آنگاه

$$\|u(t) - \Phi_M(t)\| \leq \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|\varphi_{k_0}(t)\| \quad (1.33)$$

اثبات:

از قضیه ۱-۲ نامساوی زیر را داریم

$$\|S_n - S_M\| \leq \frac{1-\gamma^{n-M}}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|\varphi_{k_0}(t)\| \quad (1.34)$$

حال n را به سمت $+\infty$ میل می دهیم آنگاه $S_n \rightarrow u(t)$ و $\gamma^{n-M} \rightarrow 0$ بنابراین

$$\|u(t) - \Phi_M(t)\| \leq \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|\varphi_{k_0}(t)\| \quad (1.35)$$

و اثبات کامل است.

به عبارت دیگر برطبق قضیه اگر ما برای هر $i \geq k_0$ تعریف کنیم

$$\beta_{i+1} = \begin{cases} \frac{\|\varphi_{i+1}(t)\|}{\|\varphi_i(t)\|} & \|\varphi_i(t)\| \neq 0 \\ 0 & \|\varphi_i(t)\| = 0 \end{cases} \quad (1.36)$$

حال اگر $\forall i \geq k_0$ داشته باشیم $0 \leq \beta_i < 1$ آنگاه سری $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k(t)$ به جواب $u(t)$ همگرا خواهد بود و کران خطا عبارت خواهد بود از

$$\|u(t) - \sum_{k=0}^M \varphi_k(t)\| \leq \frac{1}{1-\beta} \beta^{M-k_0+1} \|\varphi_{k_0}(t)\| \quad (1.37)$$

در حالت کلی در روش آنالیز هموتویی پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ طوری بدست می آید که شرط بالا رخ می دهد معمولاً این پارامتر یا با استفاده از روش رسم نمودار $\hbar - curve$ بدست می آید که به طور کامل در فصل بعد بحث خواهد شد و یا از مینیمم کردن خطای باقیمانده که بصورت زیر بدست می آید می توان مقدار بهینه پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ را محاسبه کرد [32].

$$Res(\hbar) = \int_T \{\mathcal{N}[u(t)]\}^2 dt \quad (1.38)$$

که از رسم $Res(\hbar)$ یا از معادله جبری زیر می توان آن را محاسبه کرد.

$$\frac{dRes(\hbar)}{d\hbar} = 0 \quad (1.39)$$

بدست آوردن $Res(\hbar)$ از رابطه بالا بسیار زمان بر است مگر اینکه مرتبه تقریب کمتر باشد. بنابراین همواره روش رسم نمودار $\hbar - curve$ ارجح است.

اینک با جزئیات و مثال به شرح روش در حالت معادله دیفرانسیل معمولی و مشتقات جزئی و معادلات انتگرال ولترا^{۱۴} و فردهلم^{۱۵} و معادلات انتگرال- دیفرانسیل می پردازیم. دقت می کنیم که در کلیه موارد معادلات مورد بحث جواب یکتایی دارند.

۱ ۴ معادله دیفرانسیل معمولی: مسیر بهینه یک شیء شناور^{۱۶}

برای حرکت اشیاء در سیال ها، نیروهای اصطکاک از منابع اصلی کاهش انرژی هستند. مینیمم کردن کاهش انرژی به پایین آوردن مصرف انرژی می انجامد. چندین روش برای کاهش نیروی اصطکاک وجود دارد که یکی از آنها یافتن مسیر بهینه برای حرکت شیء است. نیروی اصطکاک به چگالی سیال، به ضریب اصطکاک، سطح مقطع عرضی و به سرعت بستگی دارد. با این حال این پارامترها در طول حرکت تغییر می کنند یک حالت خاص وقتی است که در آن چگالی سیال در طول حرکت بصورت نمائی (تابع نمائی) محو می شود و بقیه پارامترها ثابت فرض می شوند. معادله بدون بعد مسیر بهینه در این حالت بصورت زیر می باشد [33]

$$u'' + \varepsilon(1 + \beta^2 u'^2) = 0, \quad u(0) = 0, u(1) = 1 \quad (1.40)$$

که در آن ε و β بترتیب مربوط به پارامتر تغییر چگالی و نسبت ارتفاع/فاصله می باشند.

با در نظر گرفتن معادله (۱,۴۰) عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ ، اپراتور غیر خطی $\mathcal{N}$ و $u_0(x)$ تابع حدس آغازی به صورت زیر تعریف می شوند.

¹⁴ Volterra

¹⁵ Fredholm

¹⁶ Optimum path of flying object

$$\mathcal{L}[\Phi(x; q)] = \frac{\partial^2 \Phi(x; q)}{\partial x^2} \quad (1.41)$$

$$\mathcal{N}[\Phi(x; q)] = \frac{\partial^2 \Phi(x; q)}{\partial x^2} + \varepsilon \left(1 + \beta^2 \left(\frac{\partial \Phi(x; q)}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (1.42)$$

$$u_0(x) = x \quad (1.43)$$

آنگاه با فرض $H(x) = 1$ معادله دگرذیسی مرتبه بالا را بصورت زیر خواهیم داشت

$$\mathcal{L}[u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}, x) \quad (1.44)$$

که در آن χ_m به صورت زیر تعریف می شود

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases} \quad (1.45)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} R_m(\vec{u}_{m-1}, x) &= \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \mathcal{N}[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) q^n] \right\} \Big|_{q=0} \\ &= u''_{m-1} + \varepsilon(1 - \chi_m) + \varepsilon \beta^2 \sum_{j=0}^{m-1} u'_j u'_{m-1-j} \end{aligned} \quad (1.46)$$

و شرایط مرزی برای (۱,۴۴) عبارتند از

$$u_m(0) = 0, \quad u_m(1) = 0 \quad (1.47)$$

و نهایتاً تقریب مرتبه M ام از جواب $u(x)$ بصورت زیر بدست می آید

$$u(x) \approx U_m(x) = \sum_{k=0}^M u_k(x) \quad (1.48)$$

چند تقریب اولیه عبارتست از

$$U_0(x) = x$$

$$U_1(x) = x + \frac{1}{2}\hbar\varepsilon(1 + \beta^2)x^2 - \frac{1}{2}\hbar\varepsilon(1 + \beta^2)x$$

$$U_2(x) = x + \frac{1}{2}\hbar\varepsilon(1 + \beta^2)x^2 - \frac{1}{2}\hbar\varepsilon(1 + \beta^2)x + \frac{1}{3}\hbar^2\varepsilon^2\beta^2(1 + \beta^2)x^3$$

$$+ \frac{1}{2}(\hbar\varepsilon + \hbar\varepsilon\beta^2 + \hbar^2\varepsilon + \hbar^2\varepsilon\beta^2 - \hbar^2\varepsilon^2\beta^2 - \hbar^2\varepsilon^2\beta^4)x^2$$

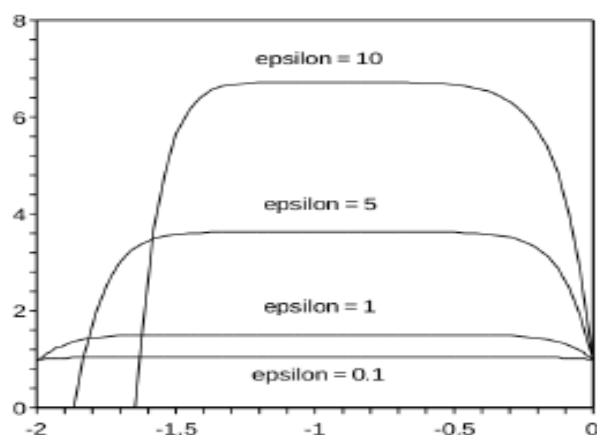
$$+ \left(\frac{1}{6}\hbar^2\varepsilon^2\beta^2 + \frac{1}{6}\hbar^2\varepsilon^2\beta^4 - \frac{1}{2}\hbar\varepsilon - \frac{1}{2}\hbar\varepsilon\beta^2 - \frac{1}{2}\hbar^2\varepsilon - \frac{1}{2}\hbar^2\varepsilon\beta^2\right)x \quad (1.49)$$

1-4-1 نتایج و بحث در حالت غیر خطی ضعیف

جواب دقیق مساله (۱,۴۰) را همچنین می توان با استفاده از کاهش مرتبه بصورت زیر بدست آورد

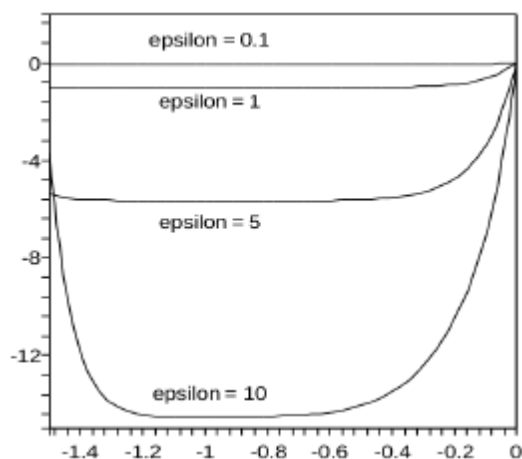
$$u_{exact}(x) = \frac{1}{\varepsilon\beta^2} \text{Ln}[\cos(\varepsilon\beta x) + \frac{e^{\varepsilon\beta^2} - \cos(\varepsilon\beta)}{\sin(\varepsilon\beta)} \sin(\varepsilon\beta x)] \quad (1.50)$$

وقتی $\varepsilon\beta \geq \pi$ آنگاه آرگومان $\text{Ln}[\cdot]$ به ازای بعضی نقاط منفی می شود بنابراین نمی توان انتظار وجود جواب داشت. جواب تقریبی (۱,۴۸) شامل پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ نیز می باشد. همانطوریکه قبلاً گفته شد برای بدست آوردن مقدار مناسب $\hbar$ از روش رسم $\hbar - \text{curve}$ استفاده می کنیم. این کار برای کمیت های $u'(0)$ و $u''(0)$ برای مقادیر مختلف ε و β در شکل ۱-۱ و ۲-۱ رسم شده است.

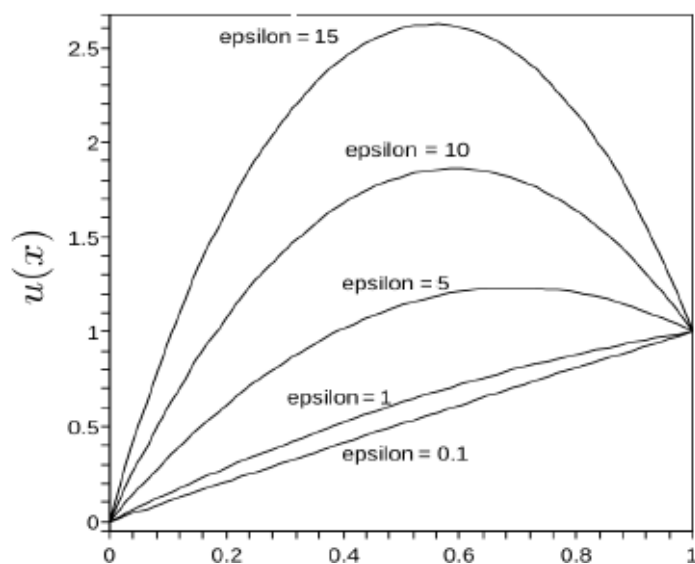


شکل ۱-۱: رسم $\hbar - \text{curve}$ برای $u'(0)$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$

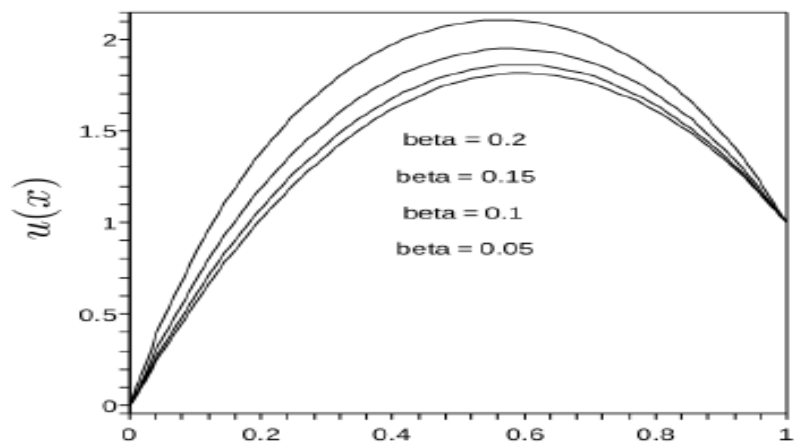
همانطوریکه دیده می شود مقدار مناسب $\hbar = -1$ می باشد و بدینوسیله همگرایی تضمین می شود. همچنین به ازای این $\hbar$ و برای مقادیر مختلف ε و β جواب مساله در شکل های ۳-۱ و ۴-۱ رسم شده است.



شکل ۴-۱: رسم $\hbar$ - curve برای $u''(0)$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$.



شکل ۳-۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 0.1, 1, 5, 10$.

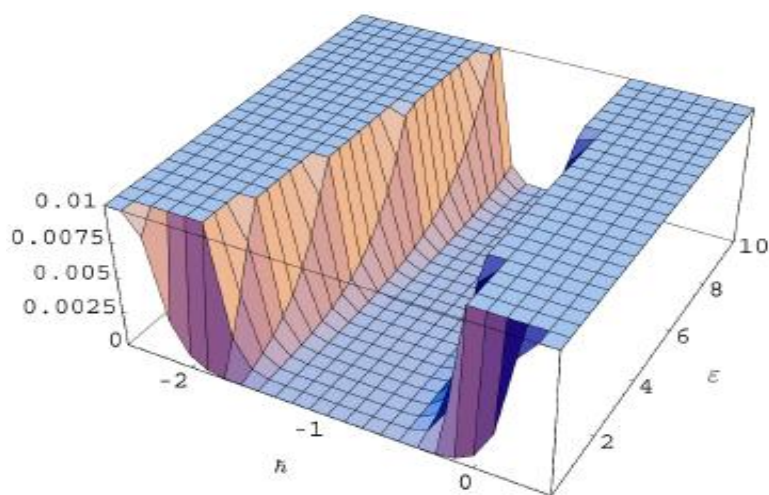


شکل ۴-۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ با $\beta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ و $\varepsilon = 10$.

برای تائید این مطلب که $\hbar = -1$ مقدار مناسبی می باشد ما با توجه به داشتن جواب دقیق، تابع خطای تقریبی زیر را که بوسیله نرم-۲ تعریف شده است را در شکل ۵-۱ نسبت به هر دوی ε و $\hbar$ وقتی $\beta = 0.1$ رسم کرده ایم.

$$\left[\frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} [U_{10}(x_i) - u_{exact}(x_i)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.51)$$

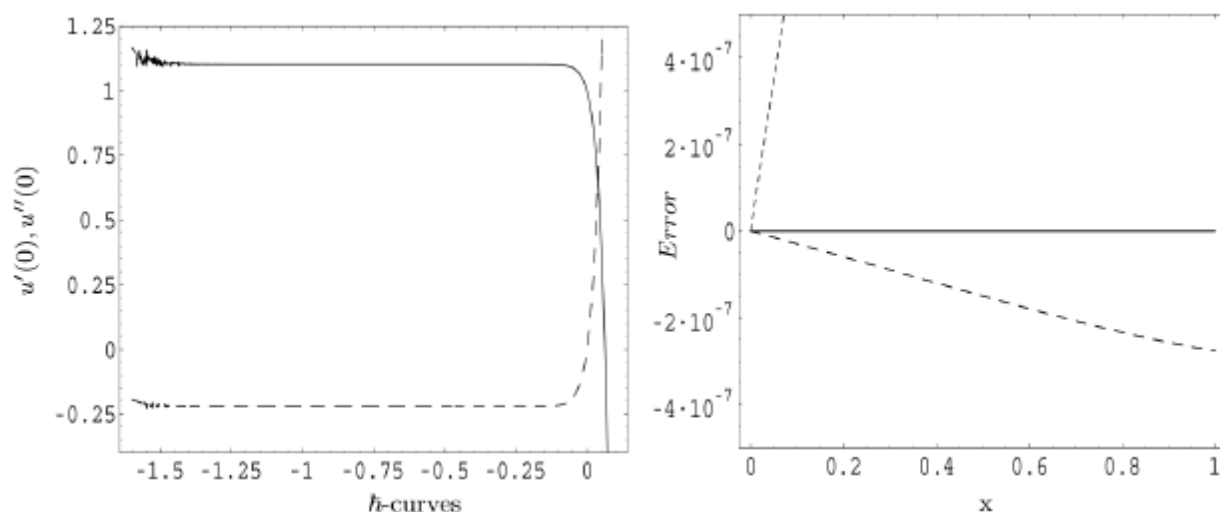
که در آن $x_i = 0.1i$ برای $i = 1, 2, 3, \dots, 10$.



شکل ۵-۱: تابع خطای تقریبی $(1, 51)$ نسبت به هر دوی ε و $\hbar$ با $\beta = 0.1$.

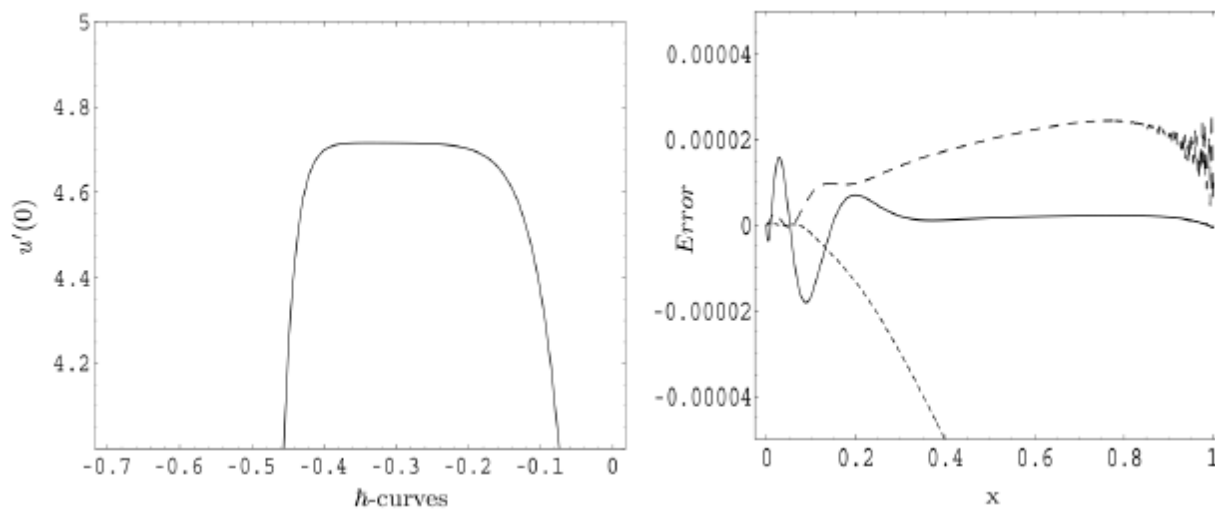
2-4-1 نتایج و بحث در حالت غیر خطی قوی

وقتی مقادیر ε و β بزرگ انتخاب شوند قسمت غیر خطی مساله (۱,۴۰) قویتر می شود. در این قسمت نشان می دهیم که همچنان ما می توانیم جوابهای تقریبی خوبی بدست آوریم. در شکل های ۶-۱، ۷-۱، ۸-۱ و ۹-۱ رسم $h - curve$ برای کمیت های $u'(0)$ و $u''(0)$ برای مقادیر مختلف ε و β انجام شده و همزمان تابع خطای متناظر با آنها یعنی اختلاف جواب دقیق از تقریب برای مقادیر مختلف پارامتر کنترل کننده همگرایی رسم شده است.

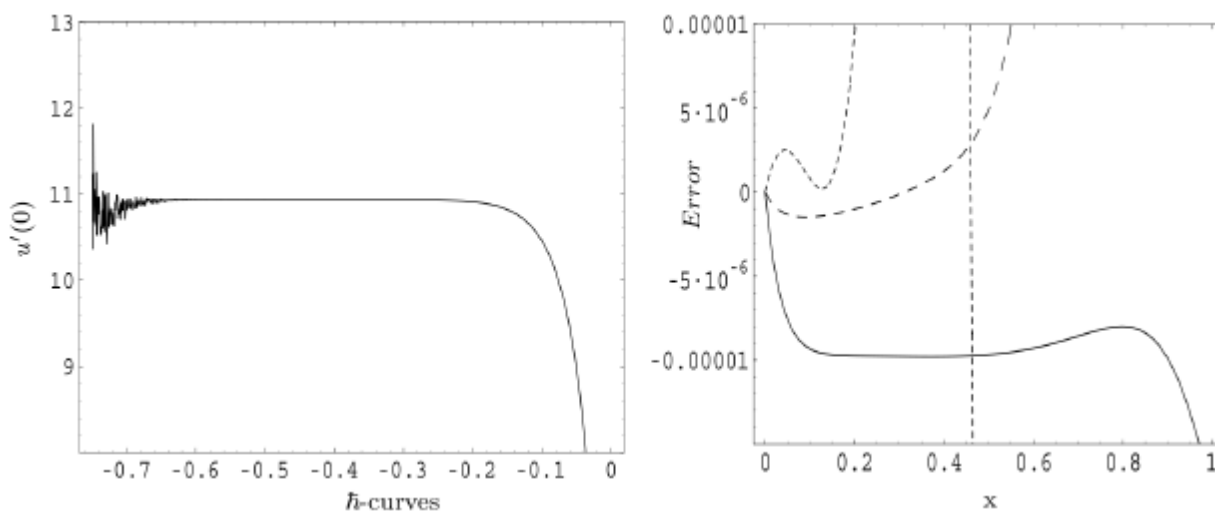


شکل ۶-۱: (الف- سمت چپ) رسم $h - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 40$ با $\beta = 1$ و $\varepsilon = 0.1$. (ب- سمت راست) تابع خطای

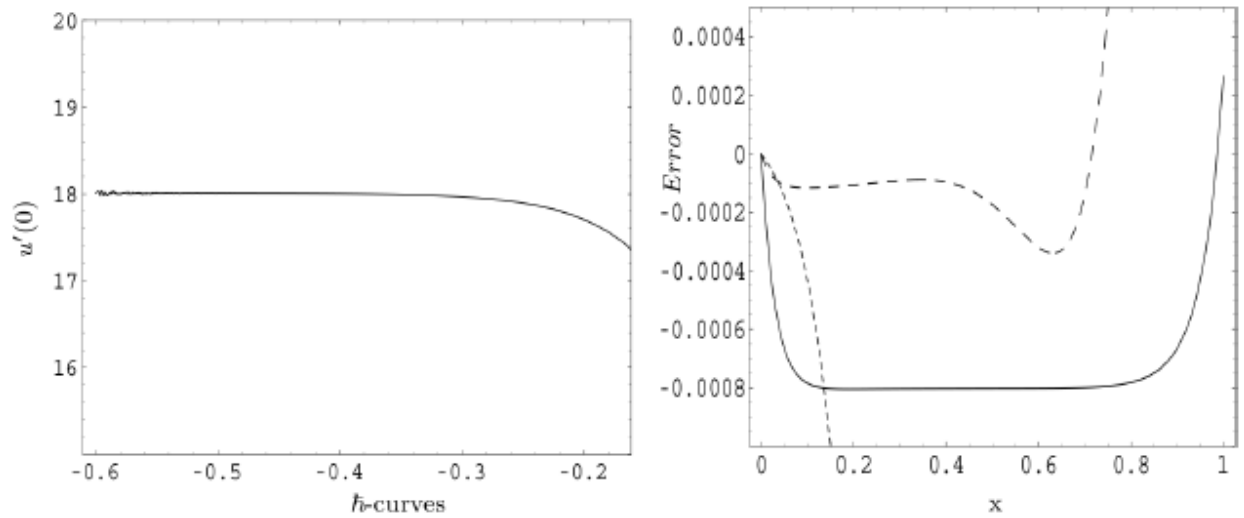
جواب تقریبی از مرتبه $M = 40$ خط تیره ($h = -0.4$) خط چین ($h = -0.8$) نقطه چین ($h = -1$)



شکل ۱-۷: (الف- سمت چپ) رسم h -curve بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 5$ و $\varepsilon = 0.1$. (ب- سمت راست) تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 50$ خط تیره ($h = -0.25$) خط چین ($h = -0.30$) نقطه چین ($h = -0.35$)



شکل ۱-۸: (الف- سمت چپ) رسم h -curve بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 15$. (ب- سمت راست) تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 50$ خط تیره ($h = -0.35$) خط چین ($h = -0.40$) نقطه چین ($h = -0.50$)



شکل ۹-۱: (الف- سمت چپ) رسم h -curve بوسیله تقریب مرتبه $M = 50$ با $\beta = 0.1$ و $\varepsilon = 20$. (ب- سمت راست) تابع خطای

جواب تقریبی از مرتبه $M = 50$ خط تیره ($h = -0.32$) خط چین ($h = -0.40$) نقطه چین ($h = -0.50$)

برای مقایسه دقیقتر جواب تقریبی از جواب دقیق در حالت غیر خطی قوی جدول ۱-۱ تهیه شده است.

جدول ۱-۱: مقایسه جواب دقیق از جواب تقریبی در حالت قوی غیر خطی مساله (۱,۴۰)

x	$\varepsilon = 0.1$ and $\beta = 5$		$\varepsilon = 20$ and $\beta = 0.1$	
	Exact Solution(8D)	$U_{50}(x)$ with $h = -0.25$	Exact Solution(7D)	$U_{50}(x)$ with $h = -0.32$
0.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.10	0.31122781	0.31121078	1.4553165	1.4545321
0.15	0.40667739	0.40667762	1.9856103	1.9848079
0.20	0.48347523	0.48348143	2.4194178	2.4186139
0.25	0.54766363	0.54766720	2.7722346	2.7714313
0.30	0.60274408	0.60274495	3.0547962	3.0539934
0.35	0.65092820	0.65092804	3.2746581	3.2738556
0.40	0.69370250	0.69370220	3.4371293	3.4363270
0.45	0.73211433	0.73211413	3.5458404	3.5450383
0.50	0.76692944	0.76692933	3.6030908	3.6022889
0.55	0.79872464	0.79872458	3.6100515	3.6092498
0.60	0.82794524	0.82794520	3.5668631	3.5660616
0.65	0.85494217	0.85494215	3.4726471	3.4718462
0.70	0.87999692	0.87999690	3.3254334	3.3246342
0.75	0.90333864	0.90333863	3.1219894	3.1211951
0.80	0.92515640	0.92515640	2.8575186	2.8567369
0.85	0.94560797	0.94560798	2.5251648	2.5244154
0.90	0.96482635	0.96482643	2.1152010	2.1145359
0.95	0.98292468	0.98292492	1.6136699	1.6132382
1.00	1.00000000	1.00000000	1.0000000	1.0000000

5-1 معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی: معادله ارتعاش خطی منفرد

مطالعه معادله موج با غشاء مدور خیلی بزرگ با شعاع R وقتی $R \rightarrow +\infty$ در طراحی دکل ها، رسیورها و بلند

گوها نقش مهمی بازی می کند. این مدل بصورت زیر نوشته می شود [34-35]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad r \geq 0, t \geq 0 \quad (1.52)$$

و شرایط آغازی عبارتست از

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = cg(r) \quad (1.53)$$

که در آن $u(r, t)$ جابجایی مکان- زمان و c سرعت موج ارتعاش آزاد می باشد.

با در نظر گرفتن معادله (۱,۵۲) عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\mathcal{L}[\Phi(r, t; q)] = \frac{\partial^2 \Phi(r, t; q)}{\partial t^2} \quad (1.54)$$

که ویژگی زیر را داراست

$$\mathcal{L}[c_1(r) + c_2(r)t] = 0 \quad (1.55)$$

که در آن $c_1(r)$ و $c_2(r)$ توابعی وابسته به شعاع غشاء r می باشند. مطابق با روش آنالیز هموتوپی اپراتور غیر

خطی $\mathcal{N}[\Phi(r, t; q)]$ و $u_0(r, t)$ تابع حدس آغازی به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\mathcal{N}[\Phi(r, t; q)] = \frac{\partial^2 \Phi(r, t; q)}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi(r, t; q)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, t; q)}{\partial r} \right) \quad (1.56)$$

$$u_0(r, t) = f(r) + cg(r)t \quad (1.57)$$

آنگاه با فرض $H(r, t) = 1$ معادله دگرذیسی مرتبه بالا را بصورت زیر خواهیم داشت

$$\mathcal{L}[u_m(r, t) - \chi_m u_{m-1}(r, t)] = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) \quad (1.58)$$

که در آن χ_m به صورت زیر تعریف می شود

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases} \quad (1.59)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, t) &= \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \mathcal{N}[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(r, t) q^n] \right\} \Big|_{q=0} \\ &= u''_{t,m-1}(r, t) - c^2 \left(u''_{r,m-1}(r, t) + \frac{1}{r} u'_{r,m-1}(r, t) \right) \end{aligned} \quad (1.60)$$

و شرایط مرزی برای (۱,۵۸) عبارتند از

$$u_m(r, 0) = 0, u'_{t,m}(r, 0) = 0 \quad (1.61)$$

و نهایتاً تقریب مرتبه M ام از جواب $u(r, t)$ بصورت زیر بدست می آید

$$u(r, t) \approx U_m(r, t) = \sum_{k=0}^M u_k(r, t) \quad (1.63)$$

برای نمونه فرض کنید

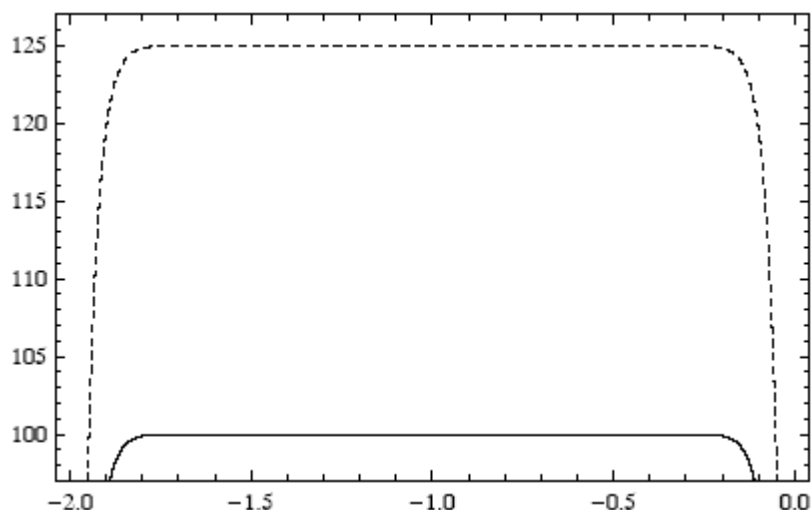
$$f(r) = r^2, g(r) = \frac{1}{r} \quad (1.64)$$

آنگاه چند تقریب اولیه مطابق با (۱,۶۳) بصورت زیر محاسبه می شود

$$U_0(r, t) = r^2 + \frac{c}{r} t$$

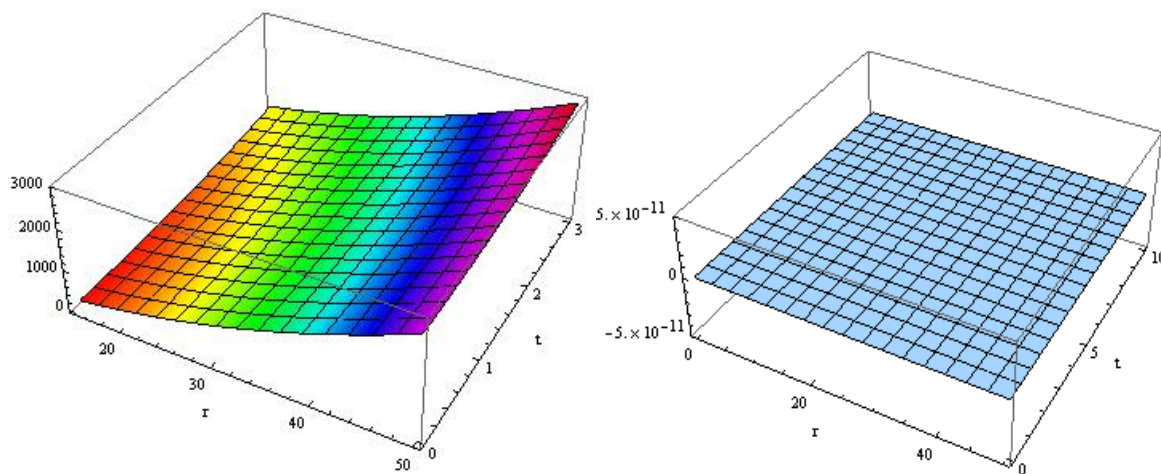
$$U_1(r, t) = r^2 + \frac{c}{r} t + \hbar \left(-\frac{1}{6} \frac{c^3 t^3}{r^3} - 2c^2 t^2 \right)$$

$$U_2(r, t) = r^2 + \frac{c}{r} t - 4\hbar c^2 t^2 - 2c^2 t^2 \hbar^2 - \frac{1}{3} \frac{c^3 \hbar t^3}{r^3} - \frac{1}{6} \frac{c^3 \hbar^2 t^3}{r^3} + \frac{3}{40} \frac{c^5 \hbar^2 t^5}{r^5} \quad (1.65)$$

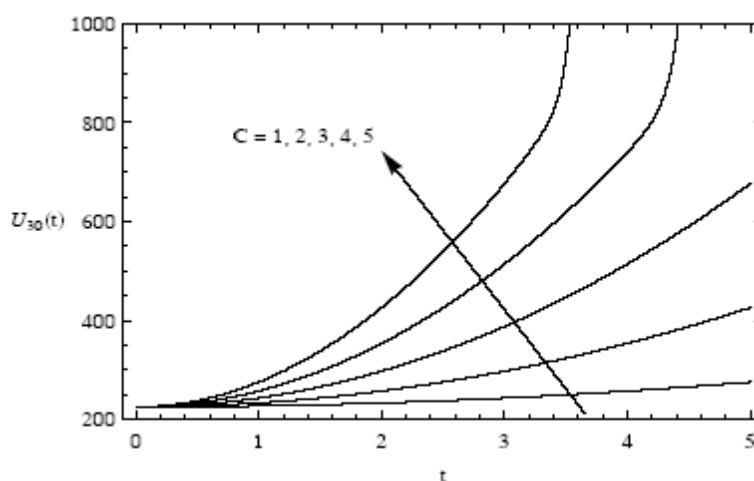


شکل ۱-۱۰: رسم $\hbar$ -curve بوسیله تقریب مرتبه $M = 30$ با $c = 5$ خط تیره $(U''_{30,t}(1,0))$ خط چین $(U'''_{30,t}(1,0))$

برای دست یابی به اثر پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ روی همگرایی سری جواب $(1,63)$ $\hbar$ -curve را برای $U''_{30,t}(1,0)$ و $U'''_{30,t}(1,0)$ در شکل ۱-۱۰ رسم کرده ایم. همانطوریکه دیده می شود $\hbar = -1$ مقدار مناسبی می باشد. در شکل ۱-۱۱ جواب تقریبی $U_{30}(r,t)$ به همراه خطای باقیمانده آن رسم شده است. همانطوریکه در شکل ۱-۱۲ دیده می شود جابجایی با افزایش زمان و سرعت موج خیلی سریع افزایش می یابد در حالیکه شعاع غشاء ثابت است.



شکل ۱-۱۱: جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ با $c = 5$ و $\hbar = -1$ و خطای باقیمانده آن.



شکل ۱-۱۲: جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ نسبت به زمان برای c های مختلف با $r = 15$.

5-1 معادلات انتگرال فردهلم

بسیاری از پدیده های غیر خطی که در بسیاری از زمینه های علمی ظاهر می شوند از قبیل دینامیک سیالات^{۱۷}، فیزیک حالت جامد^{۱۸}، فیزیک پلاسما^{۱۹}، ریاضیات بیولوژی، سینتیک شیمیایی^{۲۰}، جغرافی، الکتریسیته و

¹⁷ Fluid dynamics

مغناطیس، نظریه جنبشی گازها^{۲۱}، پدیده های ارثی در بیولوژی، مکانیک کوانتوم^{۲۲}، اقتصاد و نظریه صف^{۲۳}، می توانند بصورت معادلات انتگرال ظاهر شوند. همانطوریکه نوشته های علمی شاهد هستند معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم بخش مهمی از آنهاست. در این بخش به شرح روش آنالیز هموتوبی روی این نوع معادلات که در حالت کلی بصورت زیر است می پردازیم [36].

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)[L[u(t)] + N[u(t)]] dt \quad (1.66)$$

که در آن $u(x)$ تابع مجهول می باشد که باید معین بشود، $K(x, t)$ هسته معادله انتگرال می باشد، $f(x)$ تابع تحلیلی بوده، $L[u(t)]$ و $N[u(t)]$ به ترتیب عملگرهای خطی و غیر خطی روی $u(t)$ می باشند. فرض کنید $u_0(x)$ تابع حدس آغازی برای جواب دقیق معادله یعنی $u(x)$ باشد و $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی و $p \in [0, 1]$ پارامتر نشانده باشد آنگاه معادله دگرذیسی مرتبه صفر را بصورت زیر می سازیم

$$(1 - p)[\varphi(x; p) - u_0(x)] = p\hbar\mathcal{N}[\varphi(x; p)] \quad (1.67)$$

که در آن $\varphi(x; p)$ تابع مجهول می باشد که باید معین شود و $\mathcal{N}[\varphi(x; p)]$ بصورت زیر داده می شود

$$\mathcal{N}[\varphi(x; p)] = \varphi(x; p) - f(x) - \int_a^b K(x, t)[L[\varphi(t; p)] + N[\varphi(t; p)]] dt \quad (1.68)$$

وقتی $p = 0$ معادله (۱,۶۷) بصورت زیر در می آید

$$\varphi(x; 0) - u_0(x) = 0 \quad (1.69)$$

¹⁸ Solid state physics

¹⁹ Plasma physics

²⁰ Chemical kinetics

²¹ Kinetic theory of gases

²² Quantum mechanics

²³ Queuing theory

که به آسانی $\varphi(x; 0) = u_0(x)$ را نتیجه می دهد و اگر $p = 1$ معادله (۱,۶۷) به معادله زیر منجر می شود

$$\mathcal{N}[\varphi(x; 1)] = 0 \quad (1.70)$$

که اگر $\varphi(x; 1) = u(x)$ آنگاه دقیقاً معادله (۱,۶۶) می باشد.

حال بسط سری تیلور $\varphi(x; p)$ را نسبت به p می نویسیم آنگاه

$$\varphi(x; p) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) p^m \quad (1.71)$$

که در آن

$$u_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \varphi(x; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.72)$$

نکته مهم که اینجا قابل ذکر است این است که پارامتر کنترل کننده همگرایی طوری انتخاب می شود که سری

(۱,۷۱) در $p = 1$ یعنی سری زیر

$$u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) \quad (1.73)$$

همگرا باشد در این صورت همانطور که بعداً اثبات خواهد شد برابر با جواب دقیق (۱,۶۶) خواهد بود.

برای بدست آوردن $u_m(x)$ از معادله دگر دیسی مرتبه بالا استفاده می کنیم که به شرح زیر ساخته می شود.

بردار زیر را تعریف و در نظر می گیریم

$$\vec{u}_n = \{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\}$$

مطابق با تعریف (۱,۷۲) $u_m(x)$ را می توان از روی معادله دگرذیسی مرتبه صفر همانطوریکه در ادامه می آید بدست آورد. از طرفین معادله دگرذیسی مرتبه صفر (۱,۶۷) مشتق مرتبه m ام می گیریم و سپس به $m!$ تقسیم کرده و آنگاه در $p = 0$ حساب می کنیم. آنگاه معادله دگرذیسی مرتبه بالا را بصورت زیر خواهیم داشت

$$u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x) = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}, x) \quad (1.74)$$

که در آن

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (1.75)$$

و $R_m(\vec{u}_{m-1}, x)$ بصورت زیر بدست می آید

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\varphi(x;p)]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) p^n]}{\partial p^{m-1}} \right|_{p=0} \quad (1.76)$$

توجه می نماییم که $R_m(\vec{u}_{m-1}, x)$ در معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۷۴) از رابطه (۱,۷۶) به سادگی محاسبه می شود و تنها بر حسب $\vec{u}_{m-1}$ بدست می آید. با توجه به معادله دگرذیسی مرتبه بالا یک رابطه بازگشتی بوده پس بصورت بازگشتی یک پس از دیگری $u_m(x)$ را بدست می دهد و نهایتاً تقریب مرتبه m ام از $u(x)$ بصورت زیر بدست می آید

$$u(x) \approx U_M(x, \hbar) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x) \quad (1.77)$$

جواب سری بالا همچنان دارای پارامتر مجهول $\hbar$ می باشد که نقش مهمی در سریع تر کردن همگرایی دارد که با استفاده از روش رسم $\hbar - curve$ بدست می آید.

قضیه ۱-۴: (قضیه همگرایی)

فرض کنید سری (۱,۷۳) همگرا باشد که در آن $u_0(x)$ تابع حدس آغازی برای جواب (۱,۶۶) و $u_m(x)$ ها برای $n \geq 1$ از معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۷۴) بدست می آیند. همچنین فرض کنید $N[u(t)]$ در (۱,۶۶) عملگر انقباضی باشد آنگاه سری (۱,۷۳) جواب معادله اصلی (۱,۶۶) خواهد بود.

اثبات:

برای اثبات قضیه تعریف می کنیم

$$\mathcal{H}_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)p^n]}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (1.78)$$

حال با توجه به اینکه عملگر غیرخطی N انقباضی می باشد و $\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(x)$ به $u(x)$ همگرا است آنگاه $\sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{H}_m(x)$ به $N[u(x)]$ همگرا می باشد [37].

فرض کنید سری (۱,۷۳) به تابع $u(x)$ همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) = 0 \text{ for } a \leq x \leq b \quad (1.79)$$

در اینصورت با استفاده از تعریف (۱,۷۵) با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n [u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] &= \\ u_1(x) + [u_2(x) - u_1(x)] + [u_3(x) - u_2(x)] + \dots + [u_n(x) - u_{n-1}(x)] &= \\ u_n(x) \end{aligned} \quad (1.79)$$

خواهیم داشت

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0 \quad (1.80)$$

بنابراین با توجه به (۱,۷۴) بدست می آوریم

$$\hbar \sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] = \sum_{m=1}^{+\infty} [u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = 0 \quad (1.81)$$

چون $\hbar \neq 0$ آنگاه

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] = 0 \quad (1.82)$$

لذا با در نظر گرفتن (۱,۶۸) و (۱,۷۲) و (۱,۷۸) بدست می آوریم

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] &= \\ \sum_{m=1}^{+\infty} \left[u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)f(x) - \right. \\ \left. \int_a^b K(x, t) \left[L[u_{m-1}(t)] + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)p^k]}{\partial p^{m-1}} \right]_{p=0} dt \right] &= \\ \sum_{m=1}^{+\infty} \left[u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[u_{m-1}(t)] + \mathcal{H}_{m-1}(t)] dt \right] &= \\ \sum_{m=1}^{+\infty} [u_{m-1}(x)] - f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m-1}(t)] + \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{H}_{m-1}(t)] dt &= \\ \sum_{m=0}^{+\infty} [u_m(x)] - f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(t)] + \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{H}_m(t)] dt &= \\ u(x) - f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt & \quad (1.83) \end{aligned}$$

در رابطه بالا از این نکته استفاده شده که $\sum_{m=0}^{m=+\infty} u_m(x)$ به $u(x)$ و $\sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathcal{H}_m(x)$ به $N[u(x)]$

همگرا می باشد. اینک با توجه به (۱,۸۲) به رابطه زیر می رسم

$$u(x) - f(x) - \int_a^b K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt = 0 \quad (1.84)$$

بنابراین $u(x)$ جواب دقیق (۱,۶۶) می باشد و اثبات کامل است.

مثال ۱-۱

معادله انتگرال فردهلم خطی زیر را در نظر می گیریم

$$u(x) = \sin x + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt \quad (1.85)$$

جواب دقیق معادله بالا عبارتست از $u(x) = \sin x$. معادله دگرذیسی مرتبه بالا برای معادله فوق بصورت زیر حاصل می شود

$$u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x) = \hbar \left[u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)(\sin x + x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu_{m-1}(t)dt \right]$$

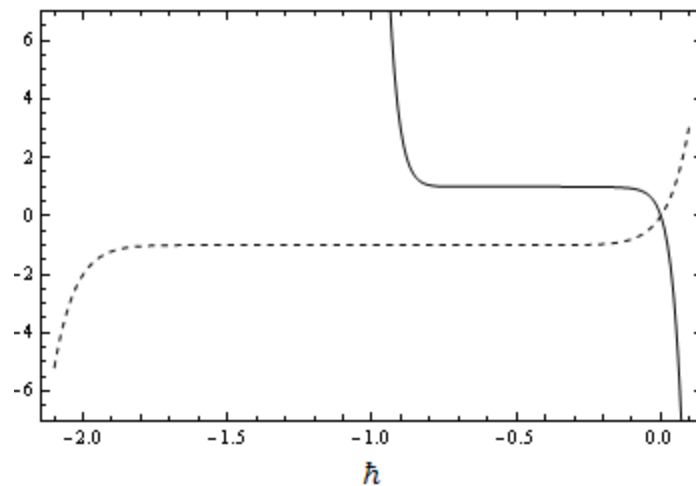
آنگاه با انتخاب $u_0(x) = 0$ به عنوان تقریب آغازی و محاسبه $u_m(x)$ ها بصورت بازگشتی با استفاده از رابطه بالا می توانیم جوابهای تقریبی سری جواب مطابق با (۱,۷۷) به صورت زیر بدست می آید

$$U_1(x, \hbar) = -\hbar(x + \sin x)$$

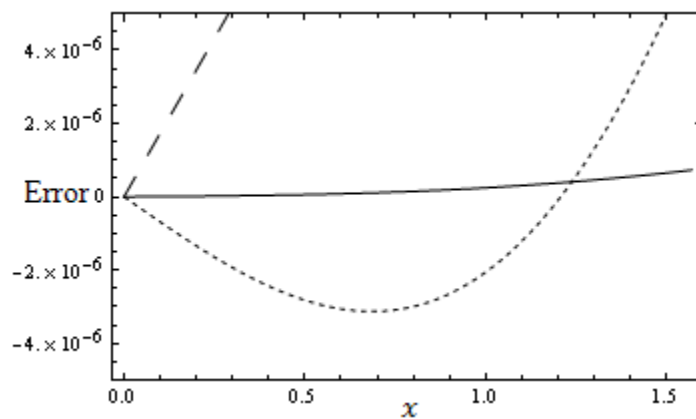
$$U_2(x, \hbar) = -\frac{1}{24}\hbar((48 + \hbar(48 + \pi^3))x + 24(2 + \hbar)\sin x)$$

$$U_3(x, \hbar) = -\frac{1}{576}\hbar(1728 + 72\hbar(48 + \pi^3) + \hbar^2(1728 + 72\pi^3 + \pi^6))x - \hbar(3 + 3\hbar + \hbar^2)\sin x \quad (1.86)$$

برای بدست آوردن بازه موثر برای $\hbar$ جهت همگرایی جواب تقریبی سری، $\hbar - curve$ برای کمیت های $u'(0)$ و $u'''(0)$ در شکل ۱-۱۳ رسم شده است. اشتراک خط های راست تولید شده در منحنی بازه معتبر را برای پارامتر کنترل کننده همگرایی می دهد. همچنین تابع خطا یعنی اختلاف جواب تقریبی از واقعی برای $\hbar$ های مختلف در شکل ۱-۱۴ رسم شده است.



شکل ۱-۱۳: رسم $\hbar$ -curve بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$ ، خط تیره $(U'_{15}(0, \hbar))$ خط چین $(U'''_{15}(0, \hbar))$



شکل ۱-۱۴: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 15$ خط تیره $(\hbar = -0.60)$ خط چین $(\hbar = -0.65)$ نقطه چین $(\hbar = -0.50)$

مثال ۱-۲

معادله انتگرال فردهلم غیرخطی زیر را در نظر می گیریم

$$u(x) = \sin x + \frac{\pi}{4}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xu^2(t)dt \quad (1.87)$$

جواب دقیق معادله بالا عبارتست از $u(x) = \sin x$. معادله دگرذیسی مرتبه بالا برای معادله فوق بصورت زیر حاصل می شود

$$u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x) = \hbar \left[u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m) \left(\sin x + \frac{\pi}{4} x \right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-1-j}(t) \right) dt \right]$$

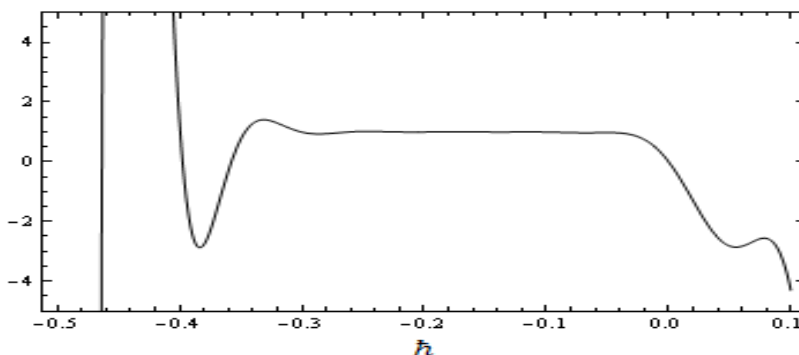
آنگاه با انتخاب $u_0(x) = 0$ به عنوان تقریب آغازی و محاسبه $u_m(x)$ ها بصورت بازگشتی با استفاده از رابطه بالا می توانیم جوابهای تقریبی سری جواب مطابق با (۱,۷۷) به صورت زیر بدست می آید

$$U_1(x, \hbar) = -\frac{1}{4} \hbar (\pi x + 4 \sin x)$$

$$U_2(x, \hbar) = -\frac{1}{4} \hbar (2 + \hbar) (\pi x + 4 \sin x)$$

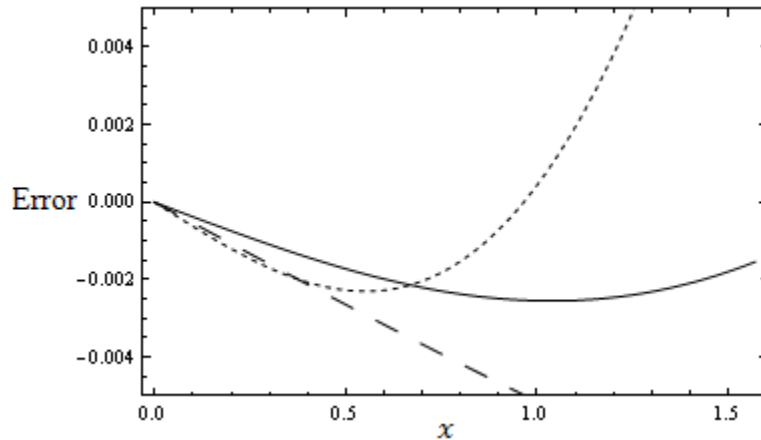
$$U_3(x, \hbar) = \frac{1}{384} \hbar \pi (-288 - 288 \hbar + \hbar^2 (192 + \pi^4)) x - \hbar (3 + 3 \hbar + \hbar^2) \sin x$$

برای بدست آوردن بازه مؤثر برای $\hbar$ جهت همگرایی جواب تقریبی سری، $\hbar - curve$ برای کمیت $u'(0)$ در شکل ۱-۱۵ رسم شده است خط راست تولید شده در منحنی بازه معتبر را برای پارامتر کنترل کننده همگرایی می دهد.



شکل ۱-۱۵: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 30$ یعنی $U'_{30}(0, \hbar)$

همچنین تابع خطا یعنی اختلاف جواب تقریبی از واقعی برای $\hbar$ های مختلف در شکل ۱-۱۶ رسم شده است.



شکل ۱-۱۶: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 30$ خط تیره ($\hbar = -0.15$) خط چین ($\hbar = -0.20$) نقطه چین ($\hbar = -0.10$)

6-1 معادلات انتگرال ولترا

در این بخش به شرح روش آنالیز هموتوبی روی معادلات انتگرال ولترا نوع دوم که در حالت کلی بصورت زیر است می پردازیم [38].

$$u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt \quad (1.88)$$

که در آن $u(x)$ تابع مجهول می باشد که باید معین بشود، $K(x, t)$ هسته معادله انتگرال می باشد، $f(x)$ تابع تحلیلی بوده، $L[u(t)]$ و $N[u(t)]$ به ترتیب عملگرهای خطی و غیر خطی روی $u(t)$ می باشند. فرض کنید $u_0(x)$ تابع حدس آغازی برای جواب دقیق معادله یعنی $u(x)$ باشد و $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی و $p \in [0, 1]$ پارامتر نشانده باشد آنگاه معادله دگردیسی مرتبه صفر را بصورت زیر می سازیم

$$(1 - p)[\varphi(x; p) - u_0(x)] = p\hbar\mathcal{N}[\varphi(x; p)] \quad (1.89)$$

که در آن $\varphi(x; p)$ تابع مجهول می باشد که باید معین شود و $\mathcal{N}[\varphi(x; p)]$ بصورت زیر داده می شود

$$\mathcal{N}[\varphi(x; p)] = \varphi(x; p) - f(x) - \int_a^x K(x, t)[L[\varphi(t; p)] + N[\varphi(t; p)]] dt \quad (1.90)$$

وقتی $p = 0$ معادله (۱,۸۹) بصورت زیر در می آید

$$\varphi(x; 0) - u_0(x) = 0 \quad (1.91)$$

که به آسانی $\varphi(x; 0) = u_0(x)$ را نتیجه می دهد و اگر $p = 1$ معادله (۱,۸۹) به معادله زیر منجر می شود

$$\mathcal{N}[\varphi(x; 1)] = 0 \quad (1.92)$$

که اگر $\varphi(x; 1) = u(x)$ آنگاه دقیقاً معادله (۱,۸۸) می باشد.

حال بسط سری تیلور $\varphi(x; p)$ را نسبت به p می نویسیم آنگاه

$$\varphi(x; p) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x)p^m \quad (1.93)$$

که در آن

$$u_m(x) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \varphi(x; p)}{\partial p^m} \right|_{p=0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.94)$$

نکته مهم که اینجا قابل ذکر است این است که پارامتر کنترل کننده همگرایی طوری انتخاب می شود که سری

(۱,۹۳) در $p = 1$ یعنی سری زیر

$$u_0(x) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(x) \quad (1.95)$$

همگرا باشد در این صورت همانطور که بعداً اثبات خواهد شد برابر با جواب دقیق (۱,۸۸) خواهد بود.

برای بدست آوردن $u_m(x)$ از معادله دگر دیسی مرتبه بالا استفاده می کنیم که به شرح زیر ساخته می شود.

بردار زیر را تعریف و در نظر می گیریم

$$\vec{u}_n = \{u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)\} \quad (1.96)$$

مطابق با تعریف (۱,۹۴) $u_m(x)$ را می توان از روی معادله دگرذیسی مرتبه صفر همانطوریکه در ادامه می آید بدست آورد. از طرفین معادله دگرذیسی مرتبه صفر (۱,۸۹) مشتق مرتبه m ام می گیریم و سپس به $m!$ تقسیم کرده و آنگاه در $p = 0$ حساب می کنیم. آنگاه معادله دگرذیسی مرتبه بالا را بصورت زیر خواهیم داشت

$$u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x) = \hbar R_m(\vec{u}_{m-1}, x) \quad (1.97)$$

که در آن

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1 \end{cases} \quad (1.98)$$

و $R_m(\vec{u}_{m-1}, x)$ بصورت زیر بدست می آید

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, x) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\varphi(x;p)]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)p^n]}{\partial p^{m-1}} \Big|_{p=0} \quad (1.99)$$

توجه می نماییم که $R_m(\vec{u}_{m-1}, x)$ در معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۹۷) از رابطه (۱,۹۹) به سادگی محاسبه می شود و تنها بر حسب $\vec{u}_{m-1}$ بدست می آید. با توجه به معادله دگرذیسی مرتبه بالا یک رابطه بازگشتی بوده پس بصورت بازگشتی یک پس از دیگری $u_m(x)$ را بدست می دهد و نهایتاً تقریب مرتبه m ام از $u(x)$ بصورت زیر بدست می آید

$$u(x) \approx U_M(x, \hbar) = u_0(x) + \sum_{m=1}^M u_m(x) \quad (1.100)$$

جواب سری بالا همچنان دارای پارامتر مجهول $\hbar$ می باشد که نقش مهمی در سریع تر کردن همگرایی دارد که با استفاده از روش رسم $\hbar - curve$ بدست می آید.

قضیه ۱-۵: (قضیه یکتایی)

فرض کنید M و $\forall a \leq t \leq x \leq T: |K(x, t)| \leq M$ و $L[u(t)]$ عملگر خطی کراندار با کران L باشد و $N[u(t)]$ عملگر غیر خطی که پیوسته لیپ شوتز^{۲۴} می باشد ($\|N[u_1] - N[u_2]\| \leq s\|u_1 - u_2\|$).
 آنگاه مساله (۱,۸۸) جواب یکتا دارد هرگاه $0 < \alpha < 1$ که در آن $\alpha = (L + s)M(T - a)$.

اثبات:

فرض کنید u و u^* دو جواب مختلف برای مساله (۱,۸۸) باشند آنگاه

$$\begin{aligned} \|u - u^*\| &= \left\| \int_a^x K(x, t) [L[u] - L[u^*] + N[u] - N[u^*]] dt \right\| \leq \\ &\int_a^x |K(x, t)| [\|L[u] - L[u^*]\| + \|N[u] - N[u^*]\|] dt \leq \int_a^x M [L\|u - u^*\| + \\ &s\|u - u^*\|] dt = (L + s)M \int_a^x \|u - u^*\| dt = (L + s)M(T - a)\|u - u^*\| \end{aligned}$$

(1.101)

و چون $0 < \alpha < 1$ آنگاه باید داشته باشیم $\|u - u^*\| = 0$ یعنی $u = u^*$ و اثبات تمام است.

قضیه ۱-۶: (قضیه همگرایی)

فرض کنید سری (۱,۹۵) همگرا باشد که در آن $u_0(x)$ تابع حدس آغازی برای جواب (۱,۸۸) و $u_m(x)$ ها برای $n \geq 1$ از معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۱,۹۷) بدست می آیند. همچنین فرض کنید $N[u(t)]$ در شرط $\|N[u_1] - N[u_2]\| \leq s\|u_1 - u_2\|$ با $0 < s < 1$ صدق می کند آنگاه سری (۱,۹۵) جواب معادله اصلی (۱,۸۸) خواهد بود.

اثبات:

²⁴ Lipschitz continuous

برای اثبات قضیه تعریف می کنیم

$$\mathcal{H}_m(x) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m N[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)p^n]}{\partial p^m} \Big|_{p=0} \quad (1.102)$$

حال با توجه به اینکه عملگر غیرخطی N انقباضی می باشد و $\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(x)$ به $u(x)$ همگرا می باشد آنگاه $\sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{H}_m(x)$ به $N[u(x)]$ همگرا می باشد [37].

فرض کنید سری (۱,۹۵) به تابع $u(x)$ همگرا باشد آنگاه

$$\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x) = 0 \text{ for } a \leq x \quad (1.103)$$

در اینصورت با استفاده از تعریف (۱,۹۸) با توجه به اینکه

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n [u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] &= \\ u_1(x) + [u_2(x) - u_1(x)] + [u_3(x) - u_2(x)] + \cdots + [u_n(x) - u_{n-1}(x)] &= \\ u_n(x) \end{aligned} \quad (1.104)$$

خواهیم داشت

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0 \quad (1.105)$$

بنابراین با توجه به (۱,۷۴) بدست می آوریم

$$\hbar \sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] = \sum_{m=1}^{+\infty} [u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = 0 \quad (1.106)$$

چون $\hbar \neq 0$ آنگاه

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] = 0 \quad (1.107)$$

لذا با در نظر گرفتن (۱,۹۰) و (۱,۹۴) و (۱,۹۹) بدست می آوریم

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [R_m(\vec{u}_{m-1}, x)] =$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)f(x) - \right.$$

$$\left. \int_a^x K(x, t) \left[L[u_{m-1}(t)] + \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} N[\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(t)p^k]}{\partial p^{m-1}} \right]_{p=0} \right] dt =$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)f(x) - \int_a^x K(x, t) [L[u_{m-1}(t)] + \mathcal{H}_{m-1}(t)] dt] =$$

$$\sum_{m=1}^{+\infty} [u_{m-1}(x)] - f(x) -$$

$$\int_a^x K(x, t) [L[\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m-1}(t)] + \sum_{m=1}^{+\infty} [\mathcal{H}_{m-1}(t)]] dt =$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} [u_m(x)] - f(x) - \int_a^x K(x, t) [L[\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(t)] + \sum_{m=0}^{+\infty} [\mathcal{H}_m(t)]] dt =$$

$$u(x) - f(x) - \int_a^x K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt \quad (1.108)$$

در رابطه بالا از این نکته استفاده شده که $\sum_{m=0}^{m=+\infty} u_m(x)$ به $u(x)$ و $\sum_{m=0}^{m=+\infty} \mathcal{H}_m(x)$ به $N[u(x)]$

همگرا می باشد. اینک با توجه به (۱,۱۰۷) به رابطه زیر می رسم

$$u(x) - f(x) - \int_a^x K(x, t) [L[u(t)] + N[u(t)]] dt = 0 \quad (1.109)$$

بنابراین $u(x)$ جواب دقیق (۱,۸۸) می باشد و اثبات کامل است.

مثال ۱-۳

معادله انتگرال ولترا خطی از نوع منفرد ضعیف زیر را در نظر می گیریم

$$u(x) = 2\sqrt{x} - \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt, \quad x \in [0, 2] \quad (1.110)$$

جواب دقیق معادله بالا عبارتست از

$$u(x) = 1 - e^{\pi x} \text{Erfc}[\sqrt{\pi x}] \quad (1.111)$$

که در آن $\text{Erfc}[\cdot]$ تابع خطای مکمل می باشد که به صورت زیر تعریف می شود

$$\text{Erfc}[z] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (1.112)$$

معادله دگرذیسی مرتبه بالا برای معادله فوق بصورت زیر حاصل می شود

$$u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x) = \hbar \left[u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m) 2\sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u_{m-1}(t) dt \right]$$

آنگاه با انتخاب $u_0(x) = 0$ به عنوان تقریب آغازی و محاسبه $u_m(x)$ ها بصورت بازگشتی با استفاده از

رابطه بالا می توانیم جوابهای تقریبی سری جواب مطابق با $(1, 100)$ به صورت زیر بدست می آید

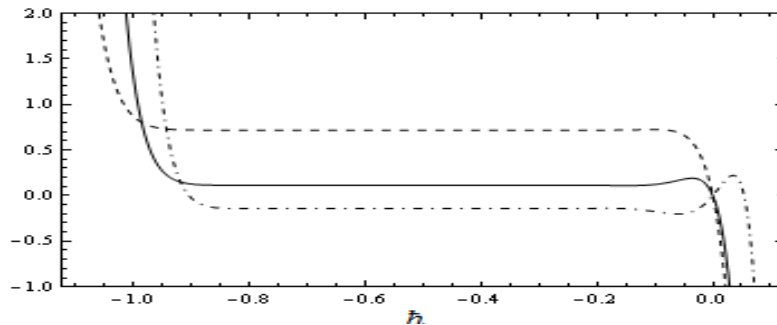
$$U_1(x, \hbar) = -2\hbar\sqrt{x}$$

$$U_2(x, \hbar) = -\hbar(4 + \hbar(2 + \pi\sqrt{x}))\sqrt{x}$$

$$U_3(x, \hbar) = -\frac{1}{3}\hbar\sqrt{x}(18 + 9\hbar(2 + \pi\sqrt{x}) + \hbar^2(6 + 6\pi\sqrt{x} + 4\pi x)) \quad (1.113)$$

برای بدست آوردن بازه موثر برای $\hbar$ جهت همگرایی جواب تقریبی سری، $\hbar - curve$ برای کمیت های

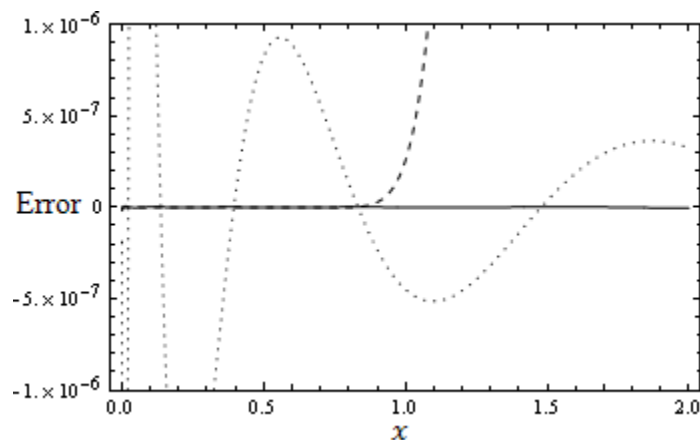
$u(1)$ و $u'(1)$ و $u''(1)$ در شکل ۱۷-۱ رسم شده است



شکل ۱۷-۱: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$. خط چین $(U_{15}(1, \hbar))$ خط تیره $(U'_{15}(1, \hbar))$ خط نقطه-چین

$$(U''_{15}(1, \hbar))$$

اشتراک خط های راست تولید شده در منحنی بازه معتبر را برای پارامتر کنترل کننده همگرایی می دهد. همچنین تابع خطا یعنی اختلاف جواب تقریبی از واقعی برای $\hbar$ های مختلف در شکل ۱۸-۱ رسم شده است.



شکل ۱۸-۱: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ خط تیره ($\hbar = -0.60$) خط چین ($\hbar = -0.80$) نقطه چین ($\hbar = -0.40$)

مثال ۴-۱

معادله انتگرال ولترا غیرخطی زیر را در نظر می گیریم

$$u(x) = \sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x - \int_0^x u^2(t)dt, \quad x \in [0, 1] \quad (1.114)$$

جواب دقیق معادله بالا عبارتست از $u(x) = \sin x$. معادله دگرذیسی مرتبه بالا برای معادله فوق بصورت زیر حاصل می شود

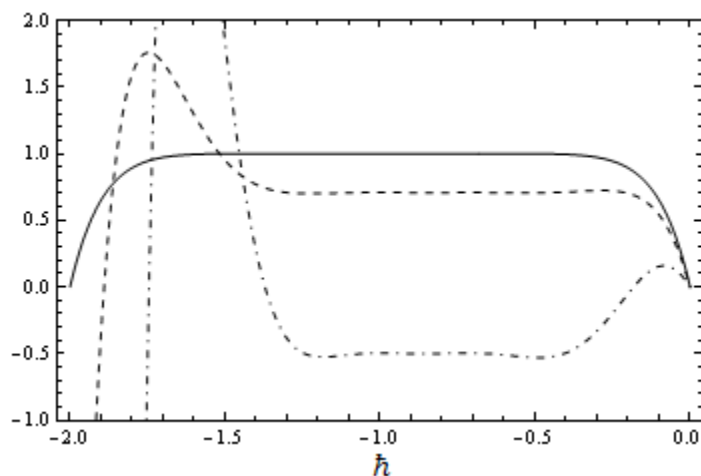
$$u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x) = \hbar \left[u_{m-1}(x) - \left(1 - \chi_m\right) \left(\sin x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x \right) + \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{m-1} u_j(t) u_{m-1-j}(t) \right) dt \right] \quad (1.115)$$

آنگاه با انتخاب $u_0(x) = 0$ به عنوان تقریب آغازی و محاسبه $u_m(x)$ ها بصورت بازگشتی با استفاده از رابطه بالا می توانیم جوابهای تقریبی سری جواب مطابق با $(1, 100)$ به صورت زیر بدست می آید

$$U_1(x, \hbar) = \frac{1}{4} \hbar (-2x - 4 \sin x + \sin 2x)$$

$$U_2(x, \hbar) = \frac{1}{4} \hbar (2 + \hbar) (-2x - 4 \sin x + \sin 2x)$$

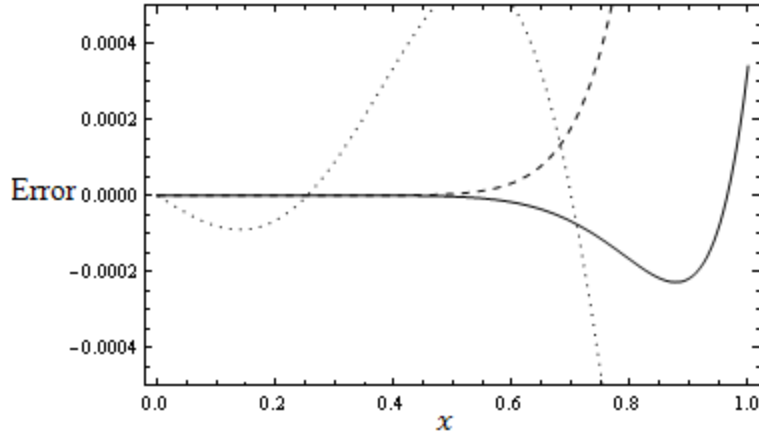
برای بدست آوردن بازه موثر برای $\hbar$ جهت همگرایی جواب تقریبی سری، $\hbar - curve$ برای کمیت $u\left(\frac{\pi}{4}\right)$ و $u'(0)$ و $u''\left(\frac{\pi}{6}\right)$ در شکل ۱۹-۱ رسم شده است. اشتراک خط های راست تولید شده در منحنی بازه معتبر را برای پارامتر کنترل کننده همگرایی می دهد.



شکل ۱۹-۱: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 10$ ، خط چین $U_{10}\left(\frac{\pi}{4}, \hbar\right)$ خط تیره $(U'_{10}(0, \hbar))$ خط نقطه-چین

$$(U''_{10}\left(\frac{\pi}{6}, \hbar\right))$$

همچنین تابع خطا یعنی اختلاف جواب تقریبی از واقعی برای $\hbar$ های مختلف در شکل ۲۰-۱ رسم شده است.



شکل ۱-۲۰: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ خط تیره ($\hbar = -0.9$) خط چین ($\hbar = -1$) نقطه چین ($\hbar = -0.5$).

7-1 معادلات انتگرال - دیفرانسیل

در این قسمت به حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل به روش آنالیز هموتوپی می پردازید [39-40]. با توجه به اینکه در معادلات انتگرال- دیفرانسیل جمله مشتق وجود دارد لذا اجرای روش آنالیز هموتوپی روی معادلات انتگرال- دیفرانسیل سهل و عیناً همانند معادلات دیفرانسیل معمولی یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می باشد. ما با یک مثال به حل کلی یک سیستم غیر خطی متشکل از چندین معادلات انتگرال- دیفرانسیل می پردازیم که فرم کلی آن به شکل زیر است.

$$\begin{aligned}
 u_1^{(m)}(x) = & \\
 & H_1 \left(x, u_2(x), \dots, u_2^{(m)}(x), \dots, u_n(x), \dots, u_n^{(m)}(x) \right) + \\
 & \int_a^b W_1 \left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t) \right) dt + \\
 & \int_0^x K_1 \left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t) \right) dt \\
 u_2^{(m)}(x) = & \\
 & H_2 \left(x, u_1(x), \dots, u_1^{(m)}(x), \dots, u_n(x), \dots, u_n^{(m)}(x) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\int_a^b W_2 \left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t) \right) dt +$$

$$\int_0^x K_2 \left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t) \right) dt$$

...

(1.116)

$$u_n^{(m)}(x) =$$

$$H_n \left(x, u_1(x), \dots, u_1^{(m)}(x), \dots, u_{n-1}(x), \dots, u_{n-1}^{(m)}(x) \right) +$$

$$\int_a^b W_n \left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t) \right) dt +$$

$$\int_0^x K_n \left(x, t, u_1(t), \dots, u_1^{(m)}(t), \dots, u_n(t), \dots, u_n^{(m)}(t) \right) dt$$

که در آن m مرتبه مشتق و H_i, W_i, K_i توابع پیوسته چند متغیره هستند که داده شده اند $u_i(x)$ ها
توابعی مجهول که باید پیدا شوند.

مثال ۵-۱

دستگاه معادلات انتگرال دیفرانسیل غیر خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} u'(x) = v'(x) + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtv(t)dt \\ v''(x) = -u(x) + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt \end{cases} \quad (1.117)$$

که شرایط آغازی برای سیستم بالا عبارتند از

$$u(0) = v(0) = 0, \quad v'(0) = 1 \quad (1.118)$$

جواب دقیق برای معادلات بالا عبارتند از

$$u(x) = v(x) = \sin x \quad (1.119)$$

عملگرهای خطی را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$\mathcal{L}_1[\varphi_i(x;p)] = \frac{\partial \varphi_i(x;p)}{\partial x}, \mathcal{L}_2[\varphi_i(x;p)] = \frac{\partial^2 \varphi_i(x;p)}{\partial x^2}, \quad i = 1, 2 \quad (1.120)$$

که ویژگیهای زیر را دارا می باشند.

$$\mathcal{L}_1[c_0] = 0, \mathcal{L}_2[c_0 + c_1 x] = 0$$

با توجه به دستگاه (۱,۱۱۷) عملگرهای غیر خطی را بصورت زیر تعریف می نماییم

$$\mathcal{N}_1[\varphi_1(x;p), \varphi_2(x;p)] = \frac{\partial \varphi_1(x;p)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_2(x;p)}{\partial x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt \varphi_2(t;p) dt \quad (1.121)$$

$$\mathcal{N}_2[\varphi_1(x;p), \varphi_2(x;p)] = \frac{\partial^2 \varphi_2(x;p)}{\partial x^2} + \varphi_1(x;p) - x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt \varphi_1(t;p) dt \quad (1.122)$$

برای سادگی کار تابع کمکی را $H(x) = -1$ انتخاب می کنیم. همچنین توابع حدس آغازی را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$\varphi_1(x;p) = u_0(x) = 0, \varphi_2(x;p) = v_0(x) = x \quad (1.123)$$

اینک معادلات دگردیسی مرتبه بالا بصورت زیر حاصل می شود

$$\mathcal{L}_1[u_m(x) - \chi_m u_{m-1}(x)] = -\hbar R_m(\vec{u}_{m-1}, x) \quad (1.124)$$

$$\mathcal{L}_2[v_m(x) - \chi_m v_{m-1}(x)] = -\hbar S_m(\vec{u}_{m-1}, x) \quad (1.125)$$

که در آن

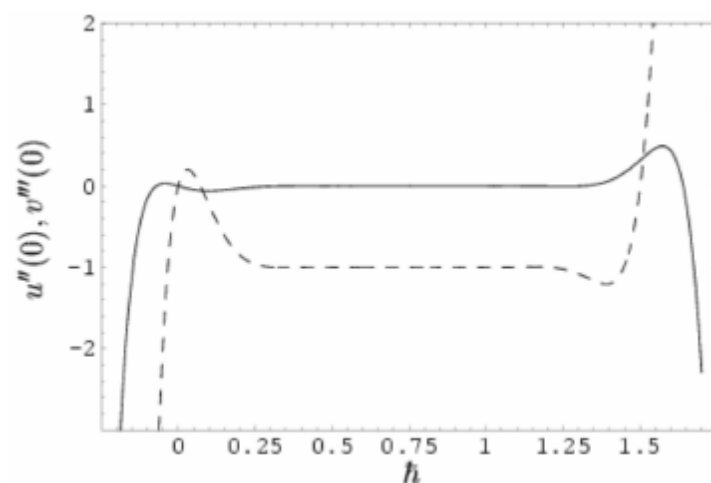
$$R_m(\vec{u}_{m-1}, x) = u'_{m-1}(x) - v'_{m-1}(x) - (1 - \chi_m) \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt v_{m-1}(t) dt \quad (1.127)$$

$$S_m(\vec{u}_{m-1}, x) = v''_{m-1}(x) + u_{m-1}(x) - (1 - \chi_m)x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} xt u_{m-1}(t) dt \quad (1.128)$$

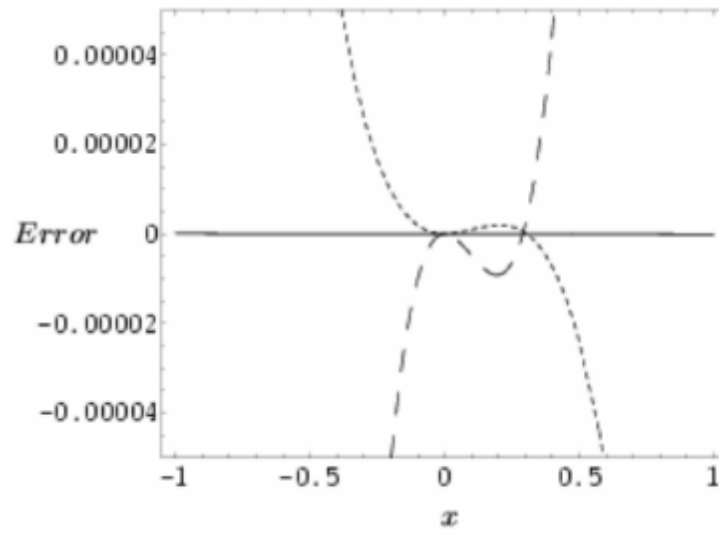
و شرایط آغازی برای دگرذیسی مرتبه بالا بصورت زیر نوشته می شود

$$u_m(0) = v_m(0) = v'_m(0) = 0 \quad (1.126)$$

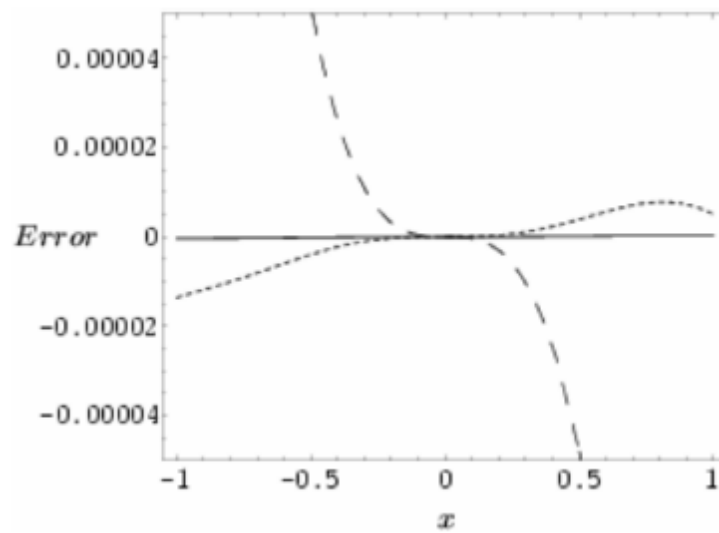
در شکل ۱-۲۱ ما $\hbar - curve$ را برای کمیت های $u''(0)$ و $v'''(0)$ رسم کرده ایم. همچنین برای پی بردن به دقت جواب، توابع خطا یعنی $\sin x - U_M(x)$ و $\sin x - V_M(x)$ را برای مقادیر مختلف پارامتر همگرایی در شکل های ۱-۲۲ و ۱-۲۳ رسم نموده ایم.



شکل ۱-۲۱: رسم $\hbar - curve$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 15$, خط چین $(V'''_{15}(0, \hbar))$ خط تیره $(U''_{15}(0, \hbar))$



شکل ۱-۲۲: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ برای $U_M(x)$ ، خط تیره $(\hbar = 0.9)$ خط چین $(\hbar = 1)$ نقطه چین $(\hbar = 0.8)$.



شکل ۱-۲۳: تابع خطای جواب تقریبی از مرتبه $M = 10$ برای $V_M(x)$ ، خط تیره $(\hbar = 0.83)$ خط چین $(\hbar = 1)$ نقطه چین $(\hbar = 0.7)$.

فصل دوّم

جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی

غیر خطی از نوع معمولی: آنالیز

هموتوپی پیشگو

آیا روشهای تقریبی- تحلیلی یا روشهای عددی قادر به پیش بینی جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی^{۲۵} می باشند؟ به عبارت دیگر چگونه می توان پی به وجود جوابهای معادلات دیفرانسیل غیر خطی برد؟ پاسخ به این سوال تا حدی دشوار می باشد زیرا روشهای تقریبی معمولاً تنها به یک جواب همگرا می باشند و این دقیقاً معنی "همگرایی" می باشد. در این فصل ما یک روشی معرفی می کنیم که بر اساس آن می توان پی به چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی برد. پایه اصلی این روش، روش آنالیز هموتوپي می باشد بر این اساس روش را روش آنالیز هموتوپي پیشگو^{۲۶} (PHAM) [41-43] می نامیم. این روش را می توان به آسانی روی معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی با شرایط مرزی به کار برد. این روش، همانطور که در ادامه خواهیم دید، علاوه بر پیش بینی چندگانگی مسائل مقدار مرزی قادر به محاسبه همزمان تقریبی- تحلیلی آنها می باشد. بر این اساس برای استفاده های کاربردی در علوم و مهندسی این روش امکان این را می دهد که جوابهای ناشناخته ای از معادلات بدست آید که اساساً مورد علاقه می باشند. با توجه به وجود نرم افزار های قوی سیمبلیک امروزه، این روش ما را متقاعد می سازد که آن را روی معادلات غیر خطی بکار ببریم و مهمتر اینکه خود را از گام های ملالت آور وجود و بررسی جواب مبراً می سازد. در روش آنالیز هموتوپي پیشگو همانطور که خواهیم دید دو پارامتر وجود دارد که نقش مهمی در بررسی چندگانگی جوابها دارد، یکی از آنها پارامتر کنترل کننده همگرایی و دیگری پارامتر تجویز شده به مسئله می باشد. همانطور که مشاهده خواهیم کرد با استفاده از این روش می توانیم تنها با یک حدس آغازی و یک عملگر خطی و یک تابع کمکی همه شاخه های جوابهای مساله را بدست آوریم. اعتبار و قابل اتکاء بودن این روش را با بررسی چندین مدل کاربردی نشان خواهیم داد. ما در این فصل ابتدا به توضیح کامل این روش پرداخته و قضایای مربوط به همگرایی آن را خواهیم آورد.

۲ + شرح روش آنالیز هموتوپي پیشگو

²⁵ Nonlinear boundary value problems

²⁶ Predictor homotopy analysis method

برای توضیح روش مساله زیر را در نظر می گیریم

$$\mathcal{N}[u(r)] = 0, \quad r \in \Omega \quad (2.1)$$

و شرایط مرزی را بصورت زیر در نظر بگیرید

$$\mathcal{B}\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (2.2)$$

در مساله مقدار مرزی بالا $\mathcal{N}$ عملگر غیر خطی و $\mathcal{B}$ عملگر روی مرز می باشد و Γ مرز دامنه Ω می باشد. گام خیلی مهم در این روش این است که شرایط مرزی با اضافه کردن یک پارامتر به نام پارامتر تجویز شده δ^{27} به شرایط مقدار آغازی زیر تبدیل می شود.

$$\mathcal{B}'\left(u, \delta, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma, \quad u(\alpha) = \beta \quad (2.3)$$

که در آن $u(\alpha) = \beta$ شرط تحمیل شونده²⁸ گفته می شود و $\mathcal{B}'$ عملگری می باشد که از $\mathcal{B}$ بدست می آید. حال در این مرحله روش آنالیز هموتوپي، شرح داده شده در فصل قبل، را روی مساله زیر بصورتی که می آید اجرا می کنیم

$$\mathcal{N}[u(r)] = 0, \quad r \in \Omega \quad (2.4)$$

$$\mathcal{B}'\left(u, \delta, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (2.5)$$

فرض می کنیم که همهء جوابهای $u = u(r, \delta)$ از مساله $(2,4)-(2,5)$ را می توان بر اساس توابع پایه زیر

$$\{\omega_i(r), i = 0, 1, 2, \dots\} \quad (2.6)$$

در فرم

²⁷ Prescribed parameter

²⁸ Forcing condition

$$u = u(r, \delta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\delta) \omega_n(r) \quad (2.7)$$

نوشت که در آن $a_n(\delta)$ ها ضرایبی هستند که باید معین شوند. قابل ذکر است که در روش آنالیز هموتوپی پیشگو ما همواره توابع پایه (۲,۶) را چند جمله ای می گیریم.

فرض کنید $u_0(r, \delta)$ تابع حدس آغازی برای تابع جواب دقیق $u(r)$ باشد که بصورت خودکار در شرایط آغازی (۲,۵) صدق می کند، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r) \neq 0$ یک تابع کمکی، $\mathcal{N}$ عملگر غیرخطی و $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی کمکی با ویژگی

$$\mathcal{L}[f(r)] = 0 \quad (2.8)$$

هنگامی که $f(r) = 0$ می باشد. فرض کنیم $q \in [0,1]$ پارامتر نشانده باشد، هموتوپی زیر را می سازیم

$$\mathcal{H}(\Phi(r, \delta; q); u_0(r, \delta), H(r), \hbar, q) = (1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(r, \delta; q) - u_0(r, \delta)]\} - q\hbar H(r)\mathcal{N}[\Phi(r, \delta; q)] \quad (2.9)$$

هموتوپی بالا شامل پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ می باشد که نقش مهمی در چارچوب روش آنالیز هموتوپی پیشگو بازی می کند. در اینجا قابل ذکر است که اختیار عمل فراوانی جهت انتخاب $u_0(r, \delta)$ تابع حدس آغازی، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r) \neq 0$ تابع کمکی و $\mathcal{L}$ عملگر خطی وجود دارد.

فرض کنیم $q \in [0,1]$ پارامتر نشانده باشد، با متحد صفر قرار دادن هموتوپی بالا یعنی

$$\mathcal{H}(\Phi(r, \delta; q); u_0(r, \delta), H(r), \hbar, q) = 0 \quad (2.10)$$

معادله دگرذیسی مرتبه صفر با شرایط آغازی زیر حاصل می شود

$$(1 - q)\{\mathcal{L}[\Phi(r, \delta; q) - u_0(r, \delta)]\} = q\hbar H(r)\mathcal{N}[\Phi(r, \delta; q)] \quad (2.11)$$

$$\mathcal{B}'\left(\varphi(r, \delta; q), \delta, \frac{\partial \varphi(r, \delta; q)}{\partial n}\right) = 0, r \in \Gamma \quad (2.12)$$

که در آن جواب معادله بالا نه تنها به انتخاب $u_0(r, \delta)$ تابع حدس آغازی، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r) \neq 0$ تابع کمکی و $\mathcal{L}$ عملگر خطی بستگی دارد بلکه به پارامتر نشانده $q \in [0, 1]$ نیز بستگی دارد. وقتی $q = 0$ معادله دگردیسی مرتبه صفر بالا بصورت زیر در می آید

$$\mathcal{L}[\Phi(r, \delta; q) - u_0(r, \delta)] = 0 \quad (2.13)$$

که با توجه به ویژگی (۲,۸) بدست می آوریم

$$\Phi(r, \delta; 0) = u_0(r, \delta) \quad (2.14)$$

و هنگامی که $q = 1$ با توجه به اینکه $\hbar \neq 0$ و $H(r) \neq 0$ معادله دگردیسی مرتبه صفر با معادله زیر هم ارز می شود.

$$\mathcal{N}[\Phi(r, \delta; 1)] = 0 \quad (2.15)$$

که همان معادله (۲,۴) می باشد بطوریکه

$$\Phi(r, \delta; 1) = u(r) \quad (2.16)$$

بنابراین مطابق با (۲,۱۳) و (۲,۱۵) همزمان با افزایش پارامتر نشانده q از صفر تا یک، تابع $\Phi(r, \delta; q)$ از تابع حدس آغازی $u_0(r, \delta)$ تا تابع جواب معادله اصلی (۲,۴) $u(r)$ را می پیماید که به همین دلیل معادله (۲,۱۱) معادله دگردیسی مرتبه صفر گفته می شود.

حال با استفاده از قضیه سری تیلور بسط سری توانی تابع $\Phi(r, \delta; q)$ را نسبت به q می نویسیم

$$\Phi(r, \delta; q) = \Phi(r, \delta; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(r, \delta; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m \quad (2.17)$$

مشتقات دگرذیسی مرتبه m ام را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$u_m(r, \delta) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \Phi(r, \delta; q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (2.18)$$

بنابراین با توجه به (2.18) بسط سری تیلور تابع $\Phi(r, \delta; q)$ نسبت به q بصورت زیر تبدیل می شود.

$$\Phi(r, \delta, q) = u_0(r, \delta) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(r, \delta) q^m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega_n(r) \quad (2.19)$$

بار دیگر تاکید می کنیم که در این روش اختیار عمل فراوانی جهت انتخاب $u_0(r, \delta)$ تابع حدس آغازی، $\hbar \neq 0$ پارامتر کنترل کننده همگرایی، $H(r) \neq 0$ تابع کمکی و $\mathcal{L}$ عملگر خطی وجود دارد. در این روش همه این ابزارها طوری انتخاب می شوند که سری (۲،۱۹) در $q = 1$ همگرا شود. در بخشهای بعدی ثابت خواهد شد که در صورت همگرایی، به جواب (۲،۴) همگرا خواهد شد. اینک به محاسبه جملات این سری با یک روش بسیار مناسب می پردازیم.

بردار زیر را تعریف و در نظر می گیریم

$$\vec{u}_n = \{u_0(r, \delta), u_1(r, \delta), u_2(r, \delta), \dots, u_n(r, \delta)\} \quad (2.20)$$

مطابق با تعریف (۲،۱۸) $u_m(r, \delta)$ را می توان از روی معادله دگرذیسی مرتبه صفر همانطوریکه در ادامه می آید بدست آورد. از طرفین معادله دگرذیسی مرتبه صفر مشتق مرتبه m ام می گیریم و سپس به $m!$ تقسیم کرده و آنگاه در $q = 0$ حساب می کنیم. آنگاه معادله دگرذیسی مرتبه بالا را بصورت زیر خواهیم داشت.

$$\mathcal{L}[u_m(r, \delta) - \chi_m u_{m-1}(r, \delta)] = \hbar H(r) R_m(\vec{u}_{m-1}, r, \delta) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial p^m} B' \left(\varphi(r, \delta; q), \delta, \frac{\partial \varphi(r, \delta; q)}{\partial n} \right) \Big|_{q=0} = 0, \quad r \in \Gamma \quad (2.22)$$

که در آن χ_m به صورت زیر تعریف می شود

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m > 1 \end{cases}$$

و همچنین

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, r, \delta) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(r, \delta; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \quad (2.23)$$

حال با جایگذاری (۲,۱۹) در رابطه بالا بدست می آوریم.

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, r, \delta) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\varphi(r, \delta; q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{p=0} = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \mathcal{N}[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(r, \delta) q^n] \right\} \Big|_{q=0} \quad (2.24)$$

توجه می نماییم که $R_m(\vec{u}_{m-1}, r, \delta)$ در معادله دگرذیسی مرتبه بالا (۲,۲۱) از رابطه (۲,۲۴) به سادگی محاسبه می شود و تنها بر حسب $\vec{u}_{m-1}$ بدست می آید. با توجه به اینکه $\mathcal{L}$ یک عملگر خطی بوده بنابراین معادله دگرذیسی مرتبه بالا یک معادله دیفراسیل خطی بوده که بصورت بازگشتی یک پس از دیگری $u_m(r, \delta)$ را بدست می دهد و نهایتاً تقریب مرتبه M ام از $u(r)$ بصورت زیر بدست می آید.

$$u(r) \approx U_M(r, \delta, \hbar) = \sum_{m=0}^M u_m(r, \delta) = \sum_{n=0}^{M'} a_n \omega_n(r) \quad (2.25)$$

قابل ذکر می باشد که در آنالیز هموتویی پیشگو عملگر خطی $\mathcal{L}$ ، تابع حدس آغازی $u_0(r, \delta)$ ، تابع کمکی $H(r) \neq 0$ را طوری انتخاب می شوند که سری جواب (۲,۲۵) همگرا باشد. با این حال هنوز دو پارامتر مجهول در سری (۲,۲۵) وجود دارد، یکی پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ و دیگری پارامتر تجویز شده δ که هر دو باید معین شوند. نکته اساسی این است که وجود جواب یکتا یا جوابهای چندگانه برای مساله مقدار مرزی (۲,۲)-(۲,۱) به این حقیقت وابسته است که آیا شرط تحمیل شونده $u(\alpha) = \beta$ در (۲,۳) برای پارامتر تجویز

شده δ جوابهای یکتا یا چندگانه می پذیرد. از این نکته به عنوان قاعده چندگانگی جوابها^{۲۹} یاد می شود و همانطوریکه متعاقباً نشان داده خواهد شد یک معیار برای فهمیدن این مطلب است که مساله مقدار مرزی جوابهای چندگانه دارد یا نه، که بصورت زیر بکار برده می شود.

با در نظر گرفتن تقریب مرتبه M ام سری جواب (۲,۲۵) و شرط تحمیل شونده $u(\alpha) = \beta$ ، معادله زیر حاصل می شود

$$u(\alpha) \approx U_M(\alpha, \delta, \hbar) = \beta \quad (2.26)$$

معادله بالا همچنان دو پارامتر مجهول $\hbar$ و δ را دارد. همانطور که نشان داده خواهد شد سری جواب (۲,۲۵) وقتی $M \rightarrow +\infty$ در $r = \alpha$ همگراست اگر بازه ای برای $\hbar$ وجود داشته باشد که با تغییر $\hbar$ در آن بازه، δ تغییر نکند و این بدین معنی است که در رسم متغیر δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر اساس معادله (۲,۲۶) خط راست افقی دیده می شود. تعداد خطوط راست افقی، همانطوری که نشان داده می شود، که $\delta(\hbar)$ تغییر نمی کند و ثابت است، تعداد جوابها را مشخص می کند.

۲-۲ آنالیز همگرایی روش

با توجه به ارتباط مستقیم چندگانگی جوابها در روش آنالیز هموتویی پیشگو با تعداد خطوط راست افقی که در رسم $\delta(\hbar)$ رخ می دهد، ابتدا به اساس این مطلب یعنی جایی که با تغییرات $\hbar$ ، پارامتر کنترل کننده همگرایی، مقدار تابع ثابت می شود و تغییر نمی کند و ارتباط آن با بسط سری تیلور می پردازیم [45].

قضیه ۱-۲

²⁹ Rule of multiplicity of solution

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته در $[a, b]$ و مشتق پذیر در بازه (a, b) باشد و $f(a) = f(b) = 0$ آنگاه حداقل یک نقطه $\xi \in (a, b)$ موجود می باشد بطوریکه $f'(\xi) = 0$.

اثبات

مرجع [44] را ببینید.

قضیه ۲-۲

فرض کنید $g(\hbar)$ تابعی پیوسته بروی $[a, b]$ و همه مشتقات تابع $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ موجود بوده و عدد $\mathcal{M}$ مشترک برای همه مشتقات وجود دارد بطوریکه

$$\forall k: \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)| \leq \mathcal{M} \quad (2.27)$$

همچنین فرض کنید $G_n(x, \alpha)$ چند جمله ای تیلور از درجه n برای $f(x)$ حول $\alpha = g(\hbar)$ باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و $\gamma \in (a, b)$ بازه (c, d) و $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall \hbar \in (c, d), n \geq \mathbf{N}: |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(\hbar))| < \varepsilon \quad (2.28)$$

اثبات:

فرض کنید $\beta \in [a, b]$ و بدون از دست دادن کلیت $\beta > \alpha$ باشد. تعریف می کنیم

$$s(x) = f(\beta) - f(x) - \frac{(\beta-x)}{1!} f'(x) - \frac{(\beta-x)^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{(\beta-x)^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad (2.29)$$

آنگاه $s'(x)$ در بازه (a, b) وجود دارد و

$$s'(x) = -\frac{(\beta-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$$

حال تابع زیر را در نظر می گیریم

$$U(x) = s(x) - \left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)^{n+1} s(\alpha) \quad (2.30)$$

آنگاه

$$U(\alpha) = U(\beta) = 0 \quad (2.31)$$

از مشتق پذیری $s(x)$ و $\left(\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\right)^{n+1}$ نتیجه می شود که $U(x)$ روی هر زیر بازه ای از (a, b) مشتق پذیر است لذا مطابق با قضیه ۱-۲ نتیجه می شود که $\xi_\beta \in (\alpha, \beta)$ وجود دارد بطوریکه

$$U'(\xi_\beta) = 0 \quad (2.32)$$

که نتیجه می دهد

$$-\frac{(\beta-\xi_\beta)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi_\beta) + (n+1) \frac{(\beta-\xi_\beta)^n}{(\beta-\alpha)^{n+1}} s(\alpha) = 0 \quad (2.33)$$

آنگاه چون $\xi_\beta \neq \beta$ داریم

$$s(\alpha) = \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_\beta) \quad (2.34)$$

اینک از رابطه (۲,۲۹) نتیجه می شود که

$$s(\alpha) = f(\beta) - G_n(\beta, \alpha) = \frac{(\beta-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_\beta) \quad (2.35)$$

چون β بصورت دلخواه انتخاب شده بود می توان نوشت

$$\forall x \in [\alpha, b], \alpha \in [a, b]: f(x) - G_n(x, \alpha) = \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_\beta), \xi_\beta \in (\alpha, x) \quad (2.36)$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ و $\gamma \in (a, b)$ ، آنگاه با در نظر گرفتن $\alpha \in (a, \gamma)$ ، روشن است که $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ وجود دارد

$$\forall n \geq \mathbf{N}: \frac{(\gamma - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{\varepsilon}{\mathcal{M}} \quad (2.36)$$

آنگاه از (۲,۲۷) و (۲,۳۶) نتیجه می شود که

$$|f(\gamma) - G_n(\gamma, \alpha)| \leq \frac{(\gamma - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi_\gamma)| < \frac{\varepsilon}{\mathcal{M}} \cdot \mathcal{M} = \varepsilon \quad (2.37)$$

بنابراین ثابت کرده ایم که

$$\forall \gamma \in (a, b), \alpha \in (a, \gamma), \varepsilon > 0, \exists \mathbf{N} \Rightarrow \forall n \geq \mathbf{N}: |f(\gamma) - G_n(\gamma, \alpha)| < \varepsilon \quad (2.38)$$

چون $g(\hbar)$ تابعی پیوسته بروی $[a, b]$ می باشد آنگاه بازه ای مثل (c, d) وجود دارد که

$$g\{(c, d)\} = (a, \gamma) \quad (2.39)$$

که نتیجه آن تبدیل (۲,۳۸) به رابطه زیر است

$$\forall \gamma \in (a, b), \hbar \in (c, d), \varepsilon > 0, \exists \mathbf{N} \Rightarrow \forall n \geq \mathbf{N}: |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(\hbar))| < \varepsilon \quad (2.40)$$

و بدین وسیله اثبات کامل می شود.

نتیجه ۱-۲

فرض کنید $f(x)$ به اندازه کافی در $[a, b]$ هموار باشد. $g(x)$ تابعی پیوسته بروی $[a, b]$ و $G_n(x, \alpha)$

چند جمله ای تیلور از درجه n حول $g(\hbar)$ باشد. آنگاه هنگامی که $n \rightarrow +\infty$ در رسم نمودار تابع

$G_n(\gamma, g(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ خط افقی رخ می دهد.

اثبات:

نتیجه مستقیم قضیه ۲-۲ می باشد.

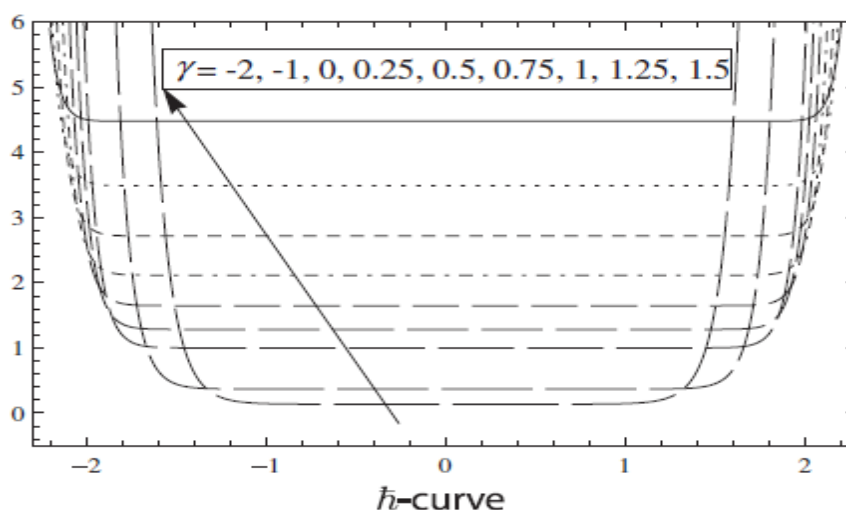
مثال ۱-۲

تابع $f(x) = e^x$ ، $g_1(\hbar) = \hbar^2$ و $g_2(\hbar) = \sinh \hbar$ را در نظر بگیرید تابع $f(x)$ در هر بازه دلخواه $[a, b]$ روی محور حقیقی و همچنین g_1 و g_2 کلیه شرایط قضیه ۲-۲ را دارند. برای مثال چندجمله ای تیلور از درجه ۳ از تابع $f(x)$ حول $g_1(\hbar)$ و $g_2(\hbar)$ را در زیر مشاهده می کنیم.

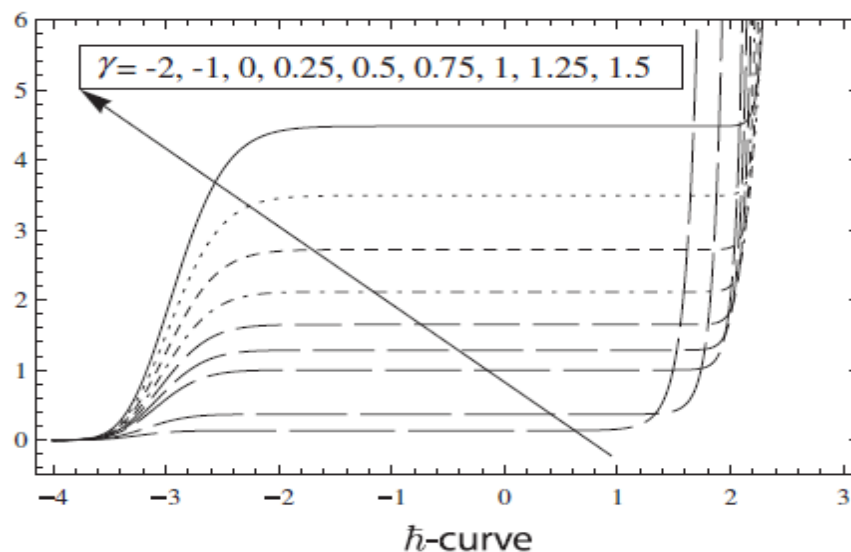
$$G_3(\gamma, g_1(\hbar)) = \frac{1}{6} e^{\hbar^2} (\gamma - \hbar^2)^3 + \frac{1}{2} e^{\hbar^2} (\gamma - \hbar^2)^2 + e^{\hbar^2} (\gamma - \hbar^2) + e^{\hbar^2} \quad (2.41)$$

$$G_3(\gamma, g_2(\hbar)) = \frac{1}{6} e^{\sinh \hbar} (\gamma - \sinh \hbar)^3 + \frac{1}{2} e^{\sinh \hbar} (\gamma - \sinh \hbar)^2 + e^{\sinh \hbar} (\gamma - \sinh \hbar) + e^{\sinh \hbar} \quad (2.42)$$

در شکل های ۱-۲ و ۲-۲ برای $G_{10}(\gamma, g_1(\hbar))$ و $G_{10}(\gamma, g_2(\hbar))$ ما رسم $\hbar$ -curve را انجام داده ایم همانطور که مشاهده می کنیم برای هر کدام از γ ها خطوط راست افقی دیده می شود.



شکل ۱-۲: نمودار $G_{10}(\gamma, g_1(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ



شکل ۲-۲: نمودار $G_{10}(\gamma, g_2(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ

مثال ۲-۲

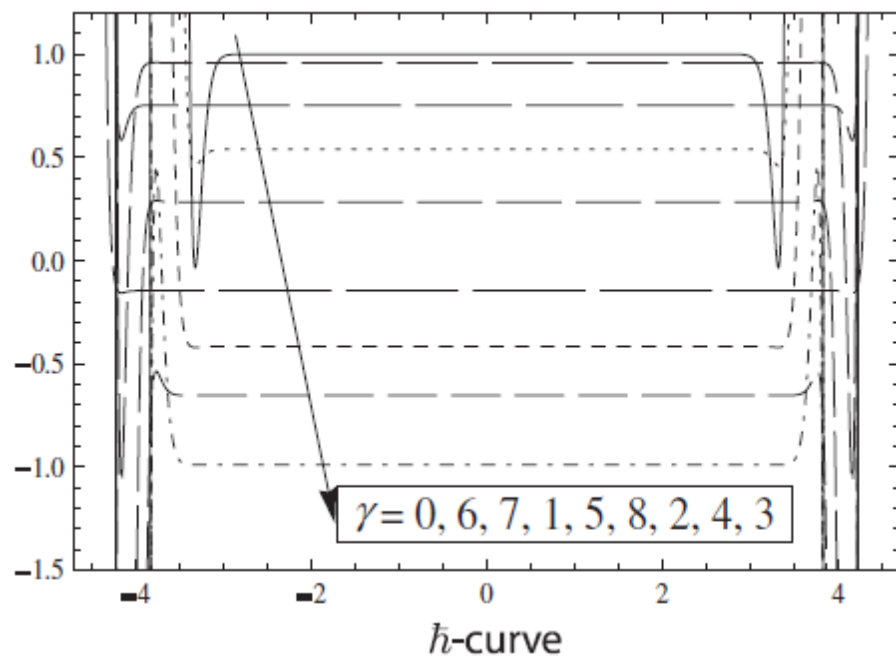
تابع $f(x) = \cos x$, $g_1(\hbar) = \hbar^2$ و $g_2(\hbar) = 1 - \hbar$ را در نظر بگیرید تابع $f(x)$ در هر بازه دلخواه $[a, b]$ روی محور حقیقی و همچنین g_1 و g_2 کلیه شرایط قضیه ۲-۲ را دارند. چندجمله ای تیلور از درجه ۳ از تابع $f(x)$ حول $g_1(\hbar)$ و $g_2(\hbar)$ را در زیر مشاهده می کنیم.

$$G_2(\gamma, g_1(\hbar)) = \cos \hbar^2 - \sin(\hbar^2) (\gamma - \hbar^2) - \frac{1}{2} \cos(\hbar^2) (\gamma - \hbar^2)^2 \quad (2.43)$$

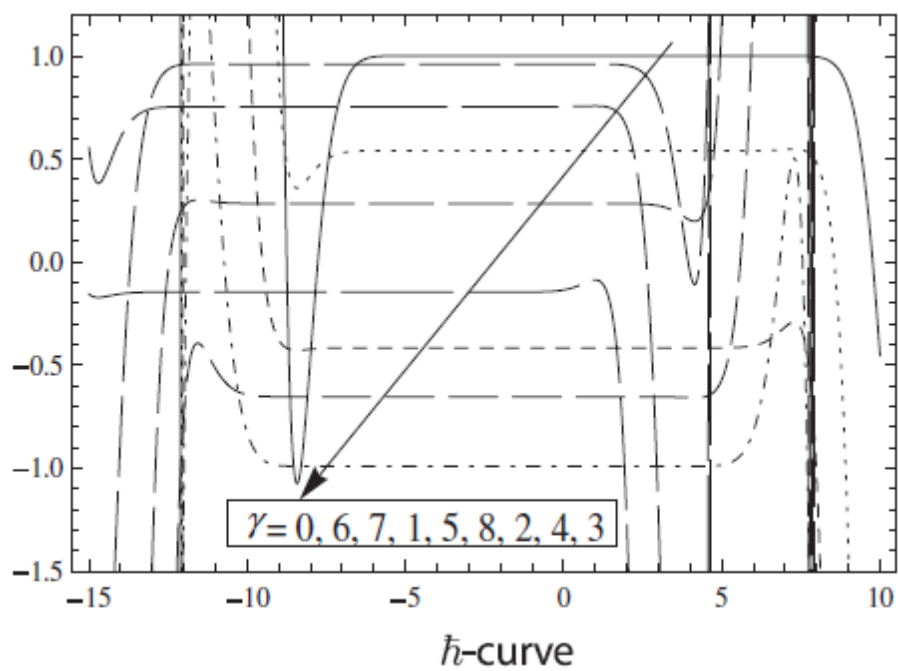
$$G_2(\gamma, g_2(\hbar)) =$$

$$\cos(1 - \hbar) - \sin(1 - \hbar) (\gamma - 1 + \hbar) - \frac{1}{2} \cos(1 - \hbar) (\gamma - 1 + \hbar)^2 \quad (2.44)$$

در شکل های ۲-۳ و ۲-۴ برای $G_{25}(\gamma, g_1(\hbar))$ و $G_{20}(\gamma, g_2(\hbar))$ ما رسم $\hbar - curve$ را انجام داده ایم همانطور که مشاهده می کنیم برای هر کدام از γ ها خطوط راست افقی دیده می شود.



شکل ۳-۲: نمودار $G_{25}(\gamma, g_1(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ



شکل ۴-۲: نمودار $G_{20}(\gamma, g_2(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ

شرط (۲,۲۷) در قضیه ۲-۲ بسیار قوی است، برای مثال چند جمله ای تیلور برای تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ حول صفر دارای شعاع همگرایی یک می باشد و همچنین مشتقات تابع کراندار نیستند اما همانطور که خواهیم دید نتیجه ۱-۲ همچنان برای تابع در همه نقاط بجز $\gamma = -1$ برقرار است. قضیه زیر نشان می دهد که قضیه ۲-۲ همچنان با شرط ضعیف تری می تواند برقرار باشد.

قضیه ۲-۳

فرض کنید $g(\hbar)$ تابعی پیوسته بروی $[a', b']$ باشد و $G_n(x, \alpha) = \sum_{k=0}^n a_k(\alpha)(x - \alpha)^k$ چند جمله ای تیلور از درجه n برای $f(x)$ حول $\alpha = g(\hbar) \in (a', b')$ باشد. علاوه بر این فرض کنید

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha \in [a', b'], x \in [a, b]: |x - \alpha| \leq \left| \frac{a_k(\alpha)}{a_{k+1}(\alpha)} \right| \quad (2.45)$$

آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و $\gamma \in [a, b]$ بازه (c, d) و $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall \hbar \in (c, d), n \geq \mathbf{N}: |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(\hbar))| < \varepsilon \quad (2.46)$$

اثبات:

از رابطه (۲,۴۵) نتیجه می شود که $0 < \theta < 1$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall k \in \mathbb{N}, \alpha \in [a', b'], x \in [a, b]: |a_{k+1}(\alpha)||x - \alpha| \leq \theta |a_k(\alpha)| \quad (2.47)$$

برای اثبات (۲,۴۶) فرض کنید $\gamma \in [a, b]$ ثابت باشد، نشان می دهیم برای $\alpha \in (a', b')$ یک دنباله همگراست. نشان می دهیم که $\{G_n(\gamma, \alpha)\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ می باشد. از رابطه (۲,۴۷) بدست می آوریم

$$\|G_{n+1}(\gamma, \alpha) - G_n(\gamma, \alpha)\| = |a_{n+1}(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^{n+1} \leq \theta |a_n(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^n \leq \theta^2 |a_{n-1}(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^{n-1} \leq \dots \leq \theta^{n-p+1} |a_p(\alpha)| \|\gamma - \alpha\|^p \quad (2.48)$$

اینک برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ با $n \geq m > p$ داریم

$$\begin{aligned} \|G_n(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha)\| &= \|(G_n(\gamma, \alpha) - G_{n-1}(\gamma, \alpha)) + (G_{n-1}(\gamma, \alpha) - \\ &G_{n-2}(\gamma, \alpha) + G_{n-2}(\gamma, \alpha) - G_{n-3}(\gamma, \alpha) + \dots + G_{m+1}(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha) \leq G_n(\gamma, \alpha) - G_{n-1}(\gamma, \alpha) + G_{n-1}(\gamma, \alpha) - \\ &G_{n-2}(\gamma, \alpha) + G_{n-2}(\gamma, \alpha) - G_{n-3}(\gamma, \alpha) + \dots + G_{m+1}(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha) \leq \theta n - p \alpha \gamma - \alpha \\ &p + \theta n - p - 1 \alpha \gamma - \alpha p + \theta n - p - 2 \alpha \gamma - \alpha p + \dots + \theta m - p + 1 \alpha \gamma - \alpha p = 1 - \theta n - m \\ &1 - \theta \theta m - p + 1 \alpha \gamma - \alpha p \end{aligned} \quad (2.49)$$

بنابراین ما می‌رسیم به این نکته که

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} \|G_n(\gamma, \alpha) - G_m(\gamma, \alpha)\| = 0 \quad (2.50)$$

و این نیز نتیجه می‌دهد که $\{G_n(\gamma, \alpha)\}_{n=0}^{+\infty}$ همگراست. از طرف دیگر $G_n(\gamma, \alpha)$ چند جمله‌ای تیلور از درجه n برای $f(x)$ در $x = \gamma$ می‌باشد بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$, $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه

$$\forall n \geq \mathbf{N}: |f(\gamma) - G_n(\gamma, \alpha)| < \varepsilon \quad (2.51)$$

حال با توجه به این حقیقت که α از بازه (a', b') به صورت دلخواه انتخاب شده است و $g(\hbar)$ تابعی پیوسته بروی $[a', b']$ می‌باشد می‌توانیم معادلاً بگوییم که برای هر $\varepsilon > 0$, $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$ و بازه (c, d) وجود دارد بطوریکه

$$\forall \hbar \in (c, d), n \geq \mathbf{N}: |f(\gamma) - G_n(\gamma, g(\hbar))| < \varepsilon \quad (2.52)$$

و بدینوسیله اثبات کامل می‌شود.

مثال ۳-۲

تابع $f(x) = \frac{1}{1+x}$ را با $g(\hbar) = -1 - \frac{1}{\hbar}$ در نظر بگیرید. تابع $g(\hbar)$ می تواند هر تابع تکه ای پیوسته دیگری بروی $\mathbb{R}$ به استثناء بعضی نقاط باشد. فرض کنید در قضیه ۳-۲، $[a, b] = [-6, -2]$ و $[a', b'] = [-8, -7]$ چون برای هر $k \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_k(\alpha)}{a_{k+1}(\alpha)} \right| = |1 + \alpha| \quad (2.53)$$

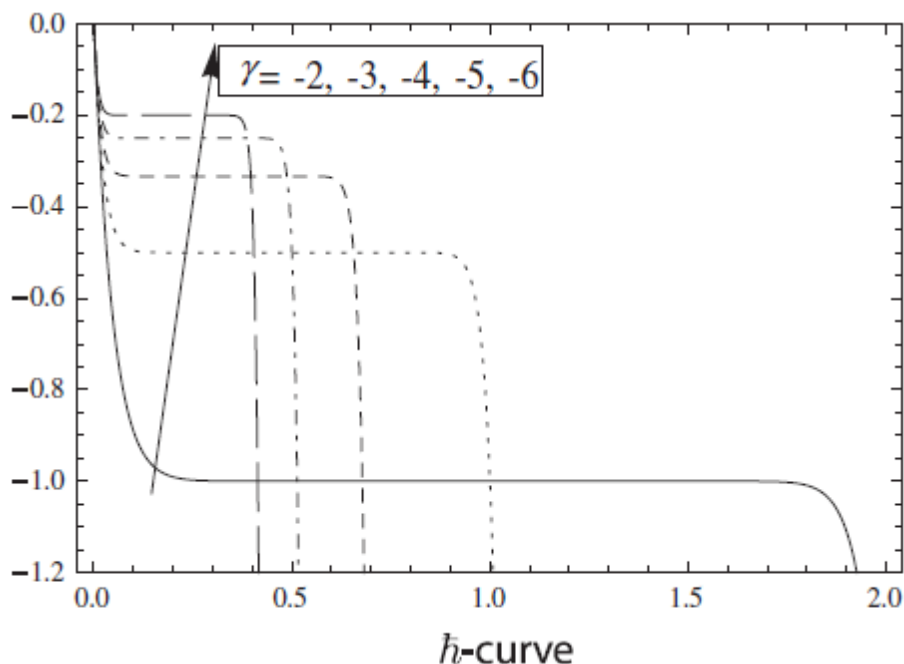
به آسانی نتیجه می شود که

$$\forall \alpha \in [-8, -7], x \in [-6, -2]: |x - \alpha| \leq |1 + \alpha| = \left| \frac{a_k(\alpha)}{a_{k+1}(\alpha)} \right| \quad (2.54)$$

و شرایط قضیه ۳-۲ برقرار است. چند جمله ای تیلور از درجه ۳ برای $f(x)$ حول $g(\hbar)$ در زیر داده شده است

$$\begin{aligned} G_3(\gamma, g(\hbar)) &= -\hbar^4 \left(\frac{1}{\hbar} + \gamma + 1 \right)^3 - \hbar^3 \left(\frac{1}{\hbar} + \gamma + 1 \right)^2 \\ &\quad - \hbar^2 \left(\frac{1}{\hbar} + \gamma + 1 \right) - \hbar \end{aligned} \quad (2.55)$$

در شکل ۵-۲ برای $G_{20}(\gamma, g(\hbar))$ ما رسم $\hbar$ -curve را انجام داده ایم همانطور که مشاهده می کنیم برای هر کدام از γ ها خطوط راست افقی دیده می شود. در حقیقت اگر در بازه $(-\infty, 1)$ فرض کنیم $a' < b' \leq a < b$ و در بازه $(1, +\infty)$ در نظر بگیریم $a < b \leq a' < b'$ آنگاه همه شرایط قضیه ۳-۲ برای $\gamma \neq -1$ برقرار است و همیشه خط راست افقی رخ می دهد.



شکل ۲-۵: نمودار $G_{20}(\gamma, g(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ

مثال ۲-۴

معادله دیفرانسیل زیر را

$$f'(x) + f^2(x) = 1, \quad f(0) = 0 \quad (2.56)$$

با جواب دقیق $f(x) = \tanh x$ در نظر بگیرید. فرض کنید $g(\hbar) = \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{1}{\hbar(\hbar+2)} - 1}$ در نظر بگیرید

و فرض کنید در قضیه ۲-۳، $[a, b] = [a', b'] = [0, 1]$ ، نگاه شرایط قضیه ۲-۳ برقرار خواهد بود. چند

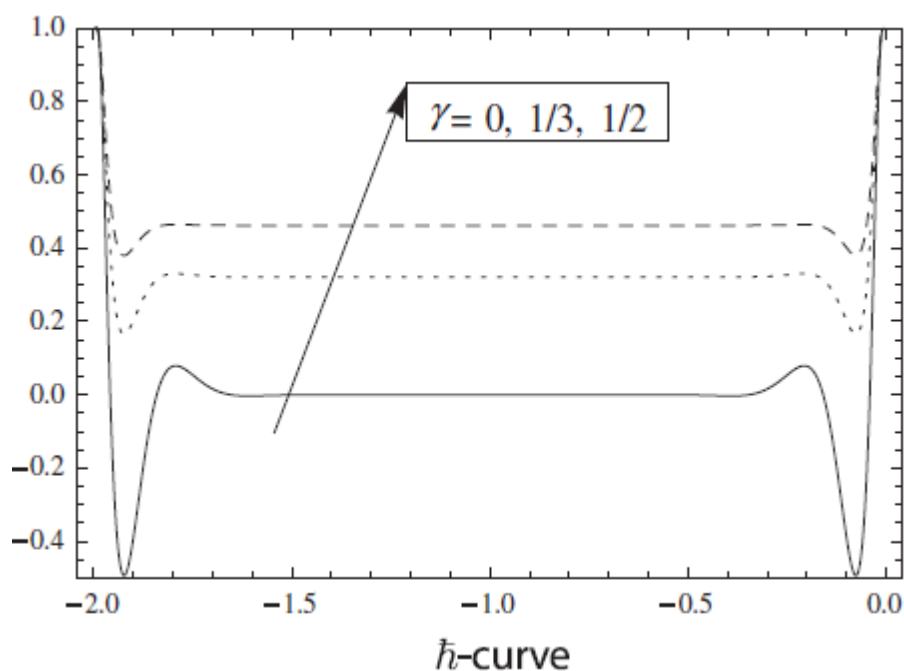
جمله ای تیلور از درجه ۲ برای $f(x)$ حول $g(\hbar)$ در زیر داده شده است

$$G_3(\gamma, g(\hbar)) = \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{1}{\hbar(\hbar+2)} - 1} \right)^2$$

$$\left(\tanh^3 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{1}{\hbar(\hbar+2)} - 1} \right) - \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{1}{\hbar(\hbar+2)} - 1} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\gamma - \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{1}{\hbar(\hbar+2)} - 1} \right) \left(1 - \tanh^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{1}{\hbar(\hbar+2)} - 1} \right) \right) \\
& + \tanh \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{1}{\hbar(\hbar+2)} - 1} \right)
\end{aligned} \tag{2.57}$$

در شکل ۶-۲ برای $G_{10}(\gamma, g(\hbar))$ ما رسم $\hbar$ -curve را انجام داده ایم همانطور که مشاهده می کنیم برای هر کدام از γ ها خطوط راست افقی دیده می شود.



شکل ۶-۲: نمودار $G_{10}(\gamma, g(\hbar))$ بر حسب $\hbar$ برای مقادیر مختلف γ

قضیه ۴-۲:

فرض کنید $0 < \gamma < 1$ وجود داشته باشد بطوریکه جمله های سری جواب (۲,۲۵) بدست آمده از معادله

دگرذیسی مرتبه بالا (۲,۲۱) یعنی $u_0(r, \delta)$, $u_1(r, \delta)$, $u_2(r, \delta)$ و ... در شرایط زیر صدق کنند

$$\exists k_0 \in N, \forall k \geq k_0: \|u_{k+1}(r, \delta)\| \leq \gamma \|u_k(r, \delta)\| \quad (2.58)$$

آنگاه سری جواب $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(r, \delta)$ همگراست.

اثبات:

دنباله $\{S_n\}_{n=0}^{+\infty}$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{cases} S_0 = u_0(r, \delta) \\ S_1 = u_0(r, \delta) + u_1(r, \delta) \\ S_2 = u_0(r, \delta) + u_1(r, \delta) + u_2(r, \delta) \\ \vdots \\ S_n = u_0(r, \delta) + u_1(r, \delta) + \dots + u_n(r, \delta) \end{cases} \quad (2.59)$$

حال ثابت می کنیم که $\{S_n\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ می باشد. در نظر می گیریم که

$$\|S_{n+1} - S_n\| = \|u_{n+1}(r, \delta)\| \leq \gamma \|u_n(r, \delta)\| \leq \gamma^2 \|u_{n-1}(r, \delta)\| \leq \dots \leq \gamma^{n-k_0+1} \|u_{k_0}(r, \delta)\| \quad (2.60)$$

و برای هر $n, m \in N$ و $n \geq m > k_0$ داریم

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &\leq \|(S_n - S_{n-1}) + (S_{n-1} - S_{n-2}) + \dots + (S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \|(S_n - S_{n-1})\| + \|(S_{n-1} - S_{n-2})\| + \dots + \|(S_{m+1} - S_m)\| \\ &\leq \gamma^{n-k_0} \|u_{k_0}(r, \delta)\| + \gamma^{n-k_0-1} \|u_{k_0}(r, \delta)\| + \dots + \gamma^{m-k_0+1} \|u_{k_0}(r, \delta)\| \\ &= \frac{1-\gamma^{n-m}}{1-\gamma} \gamma^{m-k_0+1} \|u_{k_0}(r, \delta)\| \end{aligned} \quad (2.61)$$

بنابراین چون $0 < \gamma < 1$ بدست می آوریم

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0 \quad (2.62)$$

بنابراین $\{S_n\}_{n=0}^{+\infty}$ یک دنباله کوشی در فضای هیلبرت $\mathbb{R}$ بوده و سری $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(r, \delta)$ همگرا می باشد و اثبات کامل می شود.

قضیه ۲-۵:

فرض کنید سری $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(r, \delta)$ در قضیه ۲-۴ به جواب مساله (۲,۴) همگرا باشد و بر طبق (۲,۲۵)
 $U_M(r, \delta, \hbar) = \sum_{m=0}^M u_m(r, \delta)$ جواب تقریبی مساله (۲,۴) باشد آنگاه

$$\|u(r) - U_M(r, \delta, \hbar)\| \leq \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|u_{k_0}(r, \delta)\| \quad (2.63)$$

اثبات:

از قضیه ۲-۱ نامساوی زیر را داریم

$$\|S_n - S_M\| \leq \frac{1-\gamma^{n-M}}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|u_{k_0}(r, \delta)\| \quad (2.64)$$

حال n را به سمت $+\infty$ میل می دهیم آنگاه $S_n \rightarrow u(r)$ و $\gamma^{n-M} \rightarrow 0$ بنابراین

$$\|u(r) - U_M(r, \delta, \hbar)\| \leq \frac{1}{1-\gamma} \gamma^{M-k_0+1} \|u_{k_0}(r, \delta)\| \quad (2.65)$$

و اثبات کامل است.

قضیه ۲-۴ به همراه قضیه ۲-۳ تاکید می کنند که همگرایی در سری جواب (۲,۲۵) نتیجه اش تولید خط راست افقی به اصطلاح $\hbar - curve$ می باشد که بازه معتبر همگرایی را برای پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ را می دهد بطوریکه به ازای آن سری جواب (۲,۲۵) همگرا می شود.

اینک به بحث یکتایی جواب مساله مقدار آغازی $(2,5)-(2,4)$ می پردازیم که نقش مهمی در چندگانگی جواب مساله مقدار مرزی غیر خطی $(2,2)-(2,1)$ دارد.

قضیه ۲-۶:

فرض کنید توابع f و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در مستطیل حاوی نقطه (x_0, y_0) پیوسته باشند آنگاه مساله مقدار اولیه زیر دارای جواب یکتا خواهد بود

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.66)$$

اثبات:

برای اثبات قضیه بالا [46-47] را مشاهده کنید.

قضیه ۲-۷:

فرض کنید توابع f ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial z}$ در یک ناحیه باز R از فضای ۳ بعدی xyz پیوسته باشند علاوه بر این R حاوی نقطه (x_0, y_0, z_0) باشد. آنگاه مساله مقدار اولیه زیر دارای جواب یکتا خواهد بود

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases} \quad (2.67)$$

اثبات:

برای اثبات قضیه بالا [46-47] را مشاهده کنید.

مشابه قضایای ۲-۶ و ۲-۷ برای معادلات دیفرانسیل با شرایط آغازی مراتب بالا نیز برقرار می باشد بنابراین با فرض اینکه مساله مقدار آغازی (۲,۵)-(۲,۴) به فرم (۲,۶۶) و (۲,۶۷) باشد آنگاه به ازای یک پارامتر ثابت تجویز شده δ جواب یکتا خواهد داشت.

قضیه ۲-۸: چندگانگی جوابها

مساله مقدار مرزی (۲,۲)-(۲,۱) و سری جواب تقریبی (۲,۲۵) بدست آمده برای آن از روش آنالیز هموتوپی پیشگو یعنی

$$U_M(r, \delta, \hbar) = \sum_{m=0}^M u_m(r, \delta) \quad (2.68)$$

را در نظر بگیرید. فرض کنید شرایط قضیه (۲,۴) برای جملات سری فوق برقرار باشد و تعداد خطوط افقی راست در صفحه $(\hbar, \delta)$ عدد K باشد آنگاه مساله مقدار مرزی (۲,۲)-(۲,۱) برحسب توابع پایه (۲,۶) به تعداد K جواب مختلف می پذیرد.

اثبات:

فرض کنید در رسم $U_M(\alpha, \delta, \hbar) = \beta$ بصورت ضمنی، δ بر حسب $\hbar$ ، به تعداد K خطوط راست افقی دیده می شود که به ازای آنها δ ها تغییر نمی کنند. فرض کنید این مقادیر ثابت عبارت باشند از

$$\delta_1(\hbar_1), \delta_2(\hbar_2), \dots, \delta_K(\hbar_K) \quad (2.69)$$

با توجه به یکتایی بسط سری تیلور و اینکه شرایط قضیه (۲,۴) برقرار است به ازای زوج مرتب های $(\hbar_j, \delta_j(\hbar_j))$ سریهای همگرای $\sum_{m=0}^{+\infty} u_m(r, \delta_j(\hbar_j))$ را بدست می آوریم. حال فرض کنید

$$s_1(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(r, \delta_1(\hbar_1))$$

$$s_2(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(r, \delta_2(\hbar_2))$$

...

(2.70)

$$s_K(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(r, \delta_K(\hbar_K))$$

اینک نشان می دهیم هر کدام از سری های بالا جواب مساله مقدار مرزی $(2,2)-(2,1)$ می باشد برای اینکار کافی است نشان داده شود که جواب مساله مقدار آغازی $(2,5)-(2,4)$ است زیرا هر کدام از سریهای فوق در شرط $u(\alpha) = \beta$ صدق می کنند. سری زیر را در نظر بگیرید

$$s_j(r) = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(r, \delta_j(\hbar_j)) \quad (2.71)$$

در اینصورت با استفاده معادله دگر دیسی مرتبه بالا $(2,21)$ و تعریف χ_m خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \hbar_j H(r) \sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, \delta_j(\hbar_j)) = \\ & \sum_{m=1}^{+\infty} \mathcal{L} \left[u_m(r, \delta_j(\hbar_j)) - \chi_m u_{m-1}(r, \delta_j(\hbar_j)) \right] = \\ & \mathcal{L} \left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} \left[u_m(r, \delta_j(\hbar_j)) - \chi_m u_{m-1}(r, \delta_j(\hbar_j)) \right] \right\} = \mathcal{L} \{ u_1(r, \delta_j(\hbar_j)) \} + \\ & \mathcal{L} \{ u_2(r, \delta_j(\hbar_j)) - u_1(r, \delta_j(\hbar_j)) \} + \\ & \mathcal{L} \{ u_3(r, \delta_j(\hbar_j)) - u_2(r, \delta_j(\hbar_j)) \} + \dots \mathcal{L} \{ u_n(r, \delta_j(\hbar_j)) - u_{n-1}(r, \delta_j(\hbar_j)) \} + \\ & \dots = \mathcal{L} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(r, \delta_j(\hbar_j)) \right\} = \mathcal{L}\{0\} = 0 \end{aligned} \quad (2.72)$$

با توجه به اینکه $\hbar_j \neq 0$ و $H(r) \neq 0$ آنگاه

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\vec{u}_{m-1}, r, \delta_j(\hbar_j)) = 0 \quad (2.73)$$

فلذا

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \mathcal{N}[\Phi(r, \delta_j(\hbar_j); q)]}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} \mathcal{N}[\Phi(r, \delta_j(\hbar_j); q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} = 0 \quad (2.74)$$

حال تابع باقیمانده معادله اصلی (۲,۴) را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathcal{R}(r, \delta_j(\hbar_j); q) = \mathcal{N}[\Phi(r, \delta_j(\hbar_j); q)] \quad (2.75)$$

اینک برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که $\mathcal{R}(r, \delta_j(\hbar_j); 1) = 0$ زیرا در اینصورت خواهیم داشت

$$\mathcal{N}[\Phi(r, \delta_j(\hbar_j); 1)] = 0 \quad (۲,۷۶)$$

و از طرف دیگر می دانیم $\Phi(r, \delta_j(\hbar_j); 1) = s_j(r)$. حال بسط تیلور تابع $\mathcal{R}(r, \delta_j(\hbar_j); q)$ را نسبت به q می نویسیم

$$\mathcal{R}(r, \delta_j(\hbar_j); q) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \mathcal{R}(r, \delta_j(\hbar_j); q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} q^m \quad (2.77)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۲,۷۷) داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(r, \delta_j(\hbar_j); 1) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \mathcal{R}(r, \delta_j(\hbar_j); q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \mathcal{N}[\Phi(r, \delta_j(\hbar_j); q)]}{\partial q^m} \Big|_{q=0} = 0 \end{aligned} \quad (2.78)$$

و اثبات کامل می شود.

فصل سوّم

جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی

غیر خطی از نوع معمولی: کاربردها

۳-۱ مدل انتقال گرما

مساله یک بعدی هدایت گرما در حالت پایا بر حسب متغیرهای بی بعد بصورت زیر می باشد [48]

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - N^2\theta^{n+1} = 0 \quad (3.1)$$

و شرایط مرزی عبارتند از

$$\frac{d\theta}{dx}(0) = 0, \quad \theta(1) = 1 \quad (3.2)$$

مقادیر n در معادله (۳,۱) می تواند از -4 تا 5 تغییر کند [49]. در مرجع [50-51] جواب تحلیلی تقریبی از مساله بالا به روش اختلالی و تکرار تغییراتی برای مقادیر کوچک N ، ضریب رسانش گرمایی، داده شده است. همچنین در [49] جوابهای تحلیلی تقریبی با استفاده از روش هموتوپی اختلالی و برگرداندن آن به مساله مقدار اولیه برای توان های مثبت θ داده شده است. در مرجع [52] برای بعضی حالت های خاص معادله، سری جواب با همگرایی تضمین شده بوسیله پارامتر کنترل کننده همگرایی داده شده است. ما ابتدا به بررسی دقیق مساله (۳,۱)-(۳,۲) می پردازیم و نشان می دهیم که وقتی $-4 \leq n < -1$ متناظر با بعضی مقادیر N مساله دارای جوابهای چندگانه می باشد [48].

۳-۱-۱ جواب دقیق مدل

معادله (۳,۱) را با شرایط مرزی (۳,۲) در نظر بگیرید [48]. بوسیله تعویض متغیر $y = \frac{d\theta}{dx}$ داریم

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = y \frac{dy}{d\theta} \quad (3.3)$$

حال با استفاده از رابطه فوق معادله (۳,۱) به معادله زیر تبدیل می کند

$$y \frac{dy}{d\theta} - N^2 \theta^{n+1} = 0 \quad (3.4)$$

که یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول می باشد. با انتگرال گیری از طرفین و سپس جایگذاری $y = \frac{d\theta}{dx}$ به رابطه

زیر می رسیم

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 - N^2 \frac{\theta^{n+2}}{n+2} = C \quad (3.5)$$

که در آن C ثابت انتگرال گیری می باشد. با اعمال اولین شرط مرزی (۳,۲) بدست می آوریم

$$C = -N^2 \frac{\theta_0^{n+2}}{n+2} \quad (3.6)$$

که در آن $\theta_0 = \theta(0)$ پارامتر مجهول در $x = 0$ می باشد که با استفاده از دومین شرط مرزی (۳,۲) بدست

خواهد آمد. اینک معادله (۳,۵) را بصورت زیر بازنویسی می کنیم

$$dx = \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2N^2}{n+2}(\theta^{n+2} - \theta_0^{n+2})}} \quad (3.7)$$

با استفاده از $\theta_0 = \theta(0)$ و انتگرالگیری از معادله بالا، جواب نهایی معادله (۳,۱) بصورت زیر داده می شود

$$x = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tau}{\sqrt{\frac{2N^2}{n+2}(\tau^{n+2} - \theta_0^{n+2})}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(- \frac{\theta_0 \left(n\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{4+2n}\right) + 2\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(-\frac{1}{2+n}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{4+2n}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2+n}, \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{2+n}\right) \right)}{n\sqrt{\frac{\theta_0^{2+n} N^2}{2+n}} \Gamma\left(-\frac{1}{2+n}\right)} \right) \quad (3.8)$$

که در آن $\Gamma(z)$ و $F(a, b, c, z)$ توابع متعالی گاما^{۳۰} و هیپر جومتریک^{۳۱} می باشند و بصورت زیر تعریف می شوند

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} F(a, b, c, z) &= \text{Hypergeometric2F1}(a, b, c, z) \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

همانطوریکه قبلا نیز گفته شد هنوز در جواب (۳,۸) پارامتر مجهول θ_0 وجود دارد که با استفاده از دومین شرط مرزی (۳,۲) یعنی $\theta(1) = 1$ بدست می آید

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(- \frac{\theta_0 \left(n\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{4+2n}\right) + 2(\theta_0)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(-\frac{1}{2+n}\right) F\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{4+2n}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2+n}, (\theta_0)^{2+n}\right) \right)}{n \sqrt{\frac{\theta_0^{2+n} N^2}{2+n}} \Gamma\left(-\frac{1}{2+n}\right)} \right) = 1 \quad (3.11)$$

به روشنی (۳,۸) به همراه (۳,۱۱) جواب مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) را می دهد به این ترتیب که ابتدا به ازای هر n و N ما θ_0 را از (۳,۱۱) بدست می آوریم و آنگاه با جایگذاری در (۳,۸) جواب دقیق مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) در فرم ضمنی داده می شود. حال دو حالت $-2 < n < -1$ و $-4 \leq n \leq -2$ را جداگانه بررسی می کنیم. همانطوریکه خواهیم دید در این دو حالت مساله جوابهای چندگانه می پذیرد.

حالت اول: $-2 < n < -1$

همانطور که قبلا گفته شد جواب مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) توسط (۳,۸) و (۳,۱۱) داده می شود. ما برای ۵ مقدار مختلف از n جوابها را در جدول ۳-۱ لیست کرده ایم و همچنین برای این مقادیر به کمک رابطه

³⁰ Gamma function

³¹ Hypergeometric function

(۳,۱۱) بصورت ضمنی θ_0 را برحسب N در شکل ۳-۱ رسم کرده ایم تا به وجود و چندگانگی جوابها پی ببریم.

با توجه به این شکل نتایج مهم زیر حاصل می شود

۱- همانطور که مشاهده می کنیم شکل در قسمت منفی N با شکل در قسمت مثبت N تقارن دارد به

$$\theta_0(+N) = \theta_0(-N) \text{ عبارت دیگر}$$

۲- متناظر با هر n دو نقطه پایانی $\pm N_t(n)$ (نقاط گرد با رنگ مشکی) و دو نقطه راسی $\pm N_p(n)$

(نقاط گرد با رنگ قرمز) وجود دارند.

۳- دامنه وجود جواب برای هر n عبارت است از

$$\begin{aligned} [-N_p(n), +N_p(n)] &= [-N_p(n), -N_t(n)] \cup (-N_t(n), +N_t(n)) \cup \\ &[+N_t(n), +N_p(n)] \end{aligned}$$

۴- در هر بازه $(-N_p(n), -N_t(n)] \cup [+N_t(n), +N_p(n))$ متناظر با هر n دو مقدار برای θ_0

یافت می شود که به ازای آنها رابطه (۳,۱۱) برقرار است بنابراین مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) جواب

دوگانه دارد.

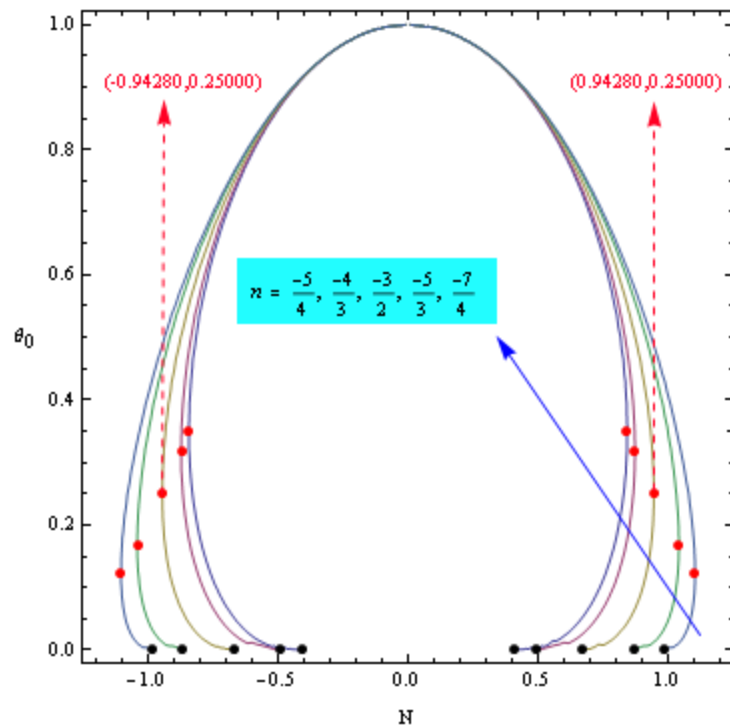
۵- در هر بازه $(-N_t(n), +N_t(n))$ متناظر با هر n یک مقدار برای θ_0 یافت می شود که به ازای

آنها رابطه (۳,۱۱) برقرار است بنابراین مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) جواب یکتا دارد.

۶- متناظر با نقاط راسی $N = \pm N_p(n)$ یک مقدار برای θ_0 یافت می شود که به ازای آنها رابطه

(۳,۱۱) برقرار است بنابراین مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) جواب یکتا دارد.

۷- در بازه $(-\infty, -N_p(n)) \cup (+N_p(n), +\infty)$ مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) جواب ندارد.

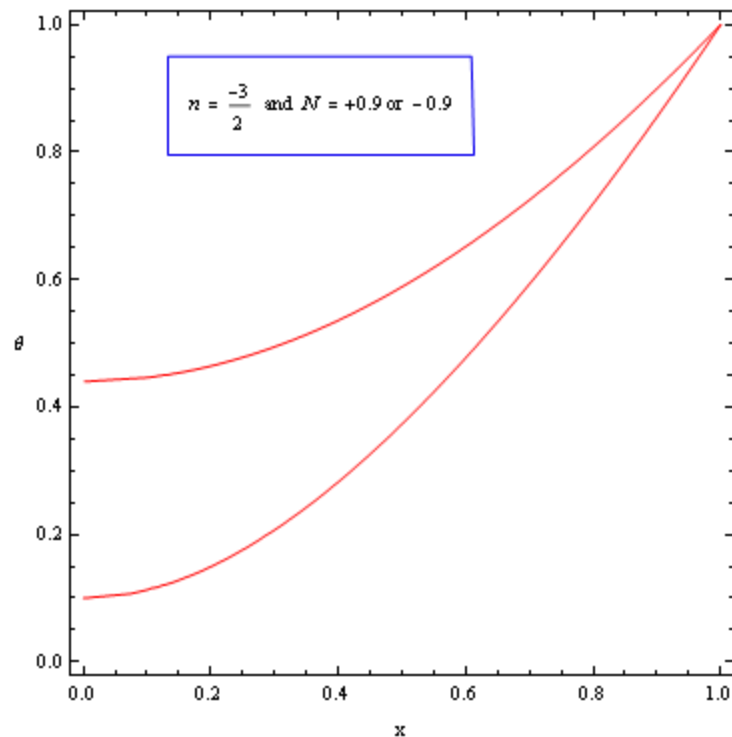


شکل ۳-۱: رسم تابع θ_0 بر حسب N بصورت ضمنی برای مقادیر مختلف n بر طبق (۳،۱۱).

برای $n = -\frac{3}{2}$ مختصات نقاط راسی در شکل ۳-۱ مشخص شده است $(N_p(-\frac{3}{2}) = 0.94280)$ بنابراین برای این مقدار n در $N = \pm 0.9$ دو جواب وجود دارد که هر دو در شکل ۳-۲ رسم شده است. همانطور که مشاهده می کنیم هر دو نیز در شرایط مرزی صدق می کند.

جدول ۳-۱: جوابهای دقیق مساله مقدار مرزی $(۳,۲) - (۳,۱)$ برای بعضی مقادیر n در بازه $(-2, -1)$

$n = -\frac{5}{4}$	$x = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \theta_0 \left(-5\sqrt{\pi} \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{5}{8}} \Gamma \left(-\frac{5}{6} \right) + 8\Gamma \left(-\frac{4}{3} \right) F \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{3}{4}} \right) \right)}{10 \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{5}{8}} \sqrt{\theta_0^{\frac{3}{4}} N^2} \Gamma \left(-\frac{4}{3} \right)}$
$n = -\frac{4}{3}$	$x = \frac{3 \sqrt{1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{2}{3}}} (\theta_0 \theta^2)^{\frac{1}{3}} + \theta_0 \left(-\text{Log}(\theta_0) + 3 \text{Log} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{2}{3}}} \right) + \text{Log}(\theta) \right)}{2\sqrt{3} N^2 \theta_0^{\frac{1}{3}}}$
$n = -\frac{3}{2}$	$x = \frac{2 \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}} \left(1 + 2\sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}} \right) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{1}{4}} \theta}{3 \sqrt{\sqrt{\theta_0} N^2}}$
$n = -\frac{5}{3}$	$x = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1 - \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{1}{3}}} \left(3 + 4 \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{1}{3}} + 8 \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{1}{6}} \theta}{5 \sqrt{\theta_0^{\frac{1}{3}} N^2}}$
$n = -\frac{7}{4}$	$x = \frac{2 \sqrt{2 - 2 \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{1}{4}}} \left(5 + 6 \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{1}{4}} + 8 \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}} + 16 \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{3}{4}} \right) \left(\frac{\theta_0}{\theta} \right)^{\frac{1}{8}} \theta}{35 \sqrt{\theta_0^{\frac{1}{4}} N^2}}$



شکل ۳-۲: جوابهای دوگانه مساله مقدار مرزی $(3,2) - (3,1)$ برای n و N مشخص

حالت دوم: $-4 \leq n \leq -2$

وقتی $n = -2$ رابطه $(3,5)$ بی معنی خواهد بود اما رابطه $(3,4)$ بصورت زیر در می آید

$$ydy - N^2\theta^{-1}d\theta = 0 \quad (3.12)$$

با انتگرالگیری و اسنفاده از اولین شرط مرزی بدست می آوریم

$$\frac{y^2}{2} - N^2 \text{Log}(\theta) = -N^2 \text{Log}(\theta_0) \quad (3.13)$$

حال با استفاده از $\theta(0) = \theta_0$ و $\frac{d\theta}{dx} = y$ جواب مساله بصورت زیر داده می شود

$$x = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\tau}{\sqrt{2N^2(\text{Log}(\tau) - \text{Log}(\theta_0))}} = \frac{|N|\sqrt{\pi}\theta_0 \text{Erf}(\sqrt{\text{Log}(\theta_0) - \text{Log}(\theta)})\sqrt{\text{Log}(\theta) - \text{Log}(\theta_0)}}{\sqrt{2}N^2\sqrt{\text{Log}(\theta_0) - \text{Log}(\theta)}} \quad (3.14)$$

و اعمال دومین شرط مرزی رابطه θ_0 را بر حسب N بصورت زیر می دهد

$$\frac{|N|\sqrt{\pi}\theta_0 \text{Erf}(\sqrt{\text{Log}(\theta_0)})\sqrt{-\text{Log}(\theta_0)}}{\sqrt{2}N^2\sqrt{\text{Log}(\theta_0)}} = 1 \quad (3.15)$$

وقتی $-4 \leq n < -2$ جواب همچنان با رابطه (۳,۸) و (۳,۱۱) داده می شود که برای بعضی n ها جوابها در جدول ۲-۳ داده شده است. همچنین برای این مقادیر n ها پارامتر θ_0 را بر حسب N در شکل ۳-۳ رسم کرده ایم.

جدول ۲-۳: جوابهای دقیق مساله مقدار مرزی (۳,۲) - (۳,۱) برای بعضی مقادیر n در بازه $[-4, -2]$

$n = -\frac{5}{2}$	$x = \frac{(\theta_0)^{\frac{1}{4}} \left(8\sqrt{1 - \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}} \theta + 12\sqrt{\theta_0(\theta - \sqrt{\theta_0\theta})} + 3\theta_0 \left(\text{Log}\left(\frac{1}{\theta_0}\right) + 4\text{Log}\left(1 + \sqrt{1 - \sqrt{\frac{\theta_0}{\theta}}}\right) + \text{Log}(\theta)\right) \right)}{16\sqrt{N^2}}$
$n = -3$	$x = -\frac{\sqrt{\theta_0}\text{Log}(\theta_0)}{2\sqrt{\frac{2N^2}{\theta_0^2}}} + \frac{\theta_0 \left(\theta \sqrt{\frac{(\theta - \theta_0)N^2}{\theta_0\theta}} - \theta_0^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{N^2}{\theta_0^2}} \text{Log}(2) + \frac{\theta_0\sqrt{\theta} \sqrt{\frac{(\theta - \theta_0)N^2}{\theta_0\theta}} \text{Log}(2)}{\sqrt{(\theta - \theta_0)}} + \frac{\theta_0\sqrt{\theta} \sqrt{\frac{(\theta - \theta_0)N^2}{\theta_0\theta}} \text{Log}(\sqrt{\theta} + \sqrt{(\theta - \theta_0)})}{\sqrt{(\theta - \theta_0)}} \right)}{\sqrt{2}N^2}$
$n = -\frac{7}{2}$	$x = \frac{\sqrt{3}\theta_0^{\frac{3}{4}} \left(-\sqrt{\pi}\theta_0\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) + \theta\Gamma\left(-\frac{1}{6}\right)F\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \right)}{2\sqrt{N^2}\Gamma\left(-\frac{1}{6}\right)}$
$n = -4$	$x = \frac{\theta_0}{\sqrt{\frac{N^2}{\theta^2 - \theta_0^2}}}$

با یک بازرسی ساده شکل ۳-۳ نتایج مهم زیر کشف می شود

۱- همانطور که مشاهده می کنیم شکل در قسمت منفی N با شکل در قسمت مثبت N تقارن دارد به

$$\text{عبارت دیگر } \theta_0(+N) = \theta_0(-N).$$

۲- متناظر با هر n دو نقطه راسی $\pm N_p(n)$ (نقاط گرد با رنگ قرمز) وجود دارند.

۳- دامنه وجود جواب برای هر n عبارت است از $[-N_p(n), +N_p(n)]$.

۴- در هر بازه $(-N_p(n), +N_p(n))$ متناظر با هر n دو مقدار برای θ_0 یافت می شود که به ازای آنها

رابطه $(3,11)$ برقرار است بنابراین مساله مقدار مرزی $(3,2)-(3,1)$ جواب دوگانه دارد.

۵- متناظر با نقاط راسی $N = \pm N_p(n)$ یک مقدار برای θ_0 یافت می شود که به ازای آنها رابطه

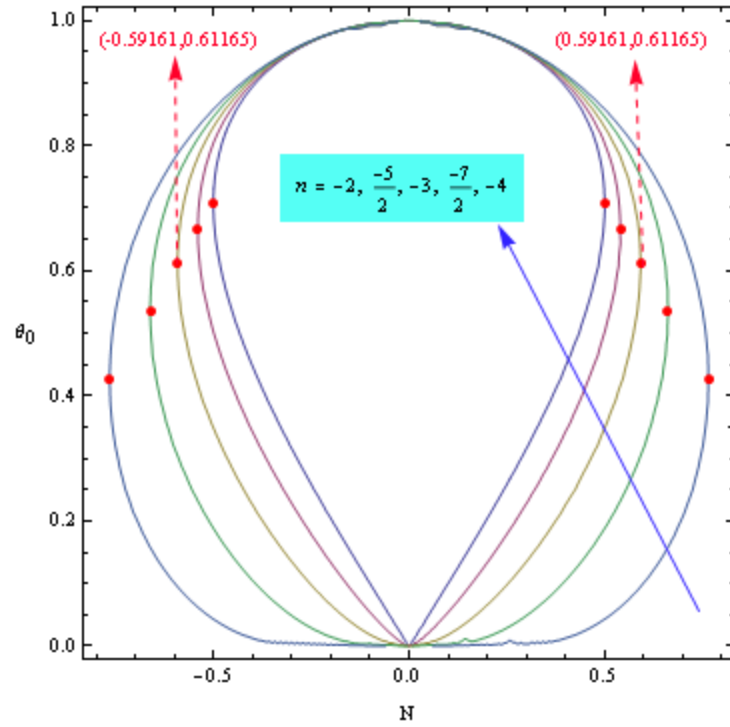
$(3,11)$ برقرار است بنابراین مساله مقدار مرزی $(3,2)-(3,1)$ جواب یکتا دارد.

۶- در بازه $(-\infty, -N_p(n)) \cup (+N_p(n), +\infty)$ مساله مقدار مرزی $(3,2)-(3,1)$ جواب ندارد.

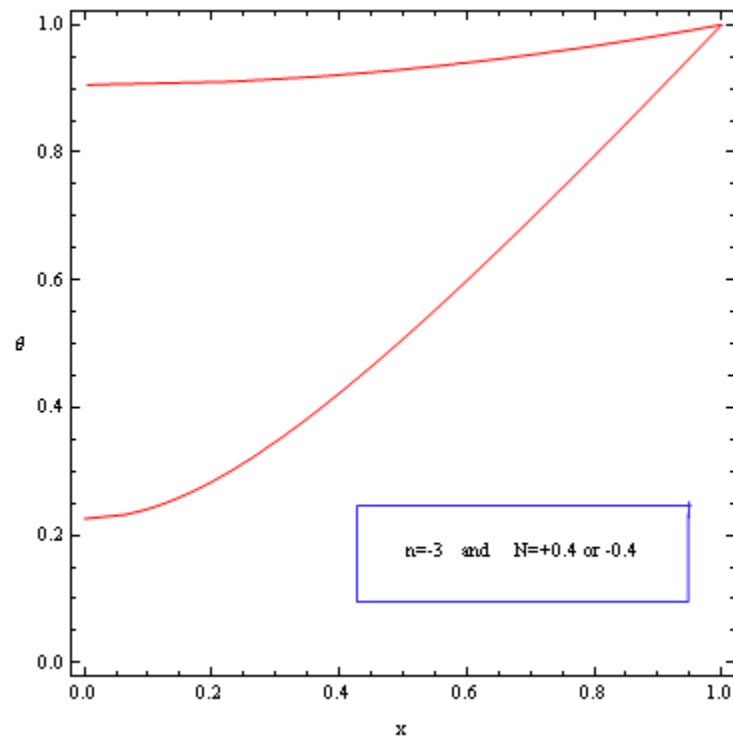
برای $n = -3$ مختصات نقاط راسی در شکل ۳-۳ مشخص شده است $N_p(-3) = 0.59161$ بنابراین

برای این مقدار n در $N = \pm 0.4$ دو جواب وجود دارد که هر دو در شکل ۴-۳ رسم شده است. همانطوریکه

مشاهده می کنیم هر دو نیز در شرایط مرزی صدق می کند.



شکل ۳-۳: رسم تابع θ_0 بر حسب N بصورت ضمنی برای مقادیر مختلف n بر طبق (۳،۱۱).



شکل ۳-۴: جوابهای دوگانه مساله مقدار مرزی (۳،۲) - (۳،۱) برای n و N مشخص

۳-۱-۲ جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتویی پیشگو

ما برای بررسی روش به منظور اینکه چگونه به وجود جوابهای چندگانه پی می بریم و سپس به محاسبه همزمان آنها می پردازیم تنها به یک حالت خاص از مدل بالا با $n = -3$ و $N = 0.5$ مبادرت می ورزیم [42]. در طول این قسمت از متغیر ψ و δ بجای متغیر N و θ_0 استفاده می کنیم ($\psi = 0.5$). با این فرض مساله مقدار مرزی (۳,۲)-(۳,۱) دارای جواب زیر است.

$$x = -\frac{\sqrt{\delta} \text{Log}(\delta)}{2\sqrt{\frac{2\psi^2}{\delta^2}}} + \frac{\delta \left(\frac{-\delta^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\psi^2}{\delta^2}} \text{Log}(2) + \frac{\delta \sqrt{\theta} \sqrt{\frac{(\theta-\delta)\psi^2}{\delta\theta}} \text{Log}(2)}{\sqrt{(\theta-\delta)}}}{\theta \sqrt{\frac{(\theta-\delta)\psi^2}{\delta\theta}} + \frac{\delta \sqrt{\theta} \sqrt{\frac{(\theta-\delta)\psi^2}{\delta\theta}} \text{Log}(\sqrt{\theta} + \sqrt{(\theta-\delta)})}}{\sqrt{(\theta-\delta)}}} \right)}{\sqrt{2}\psi^2} \quad (3.16)$$

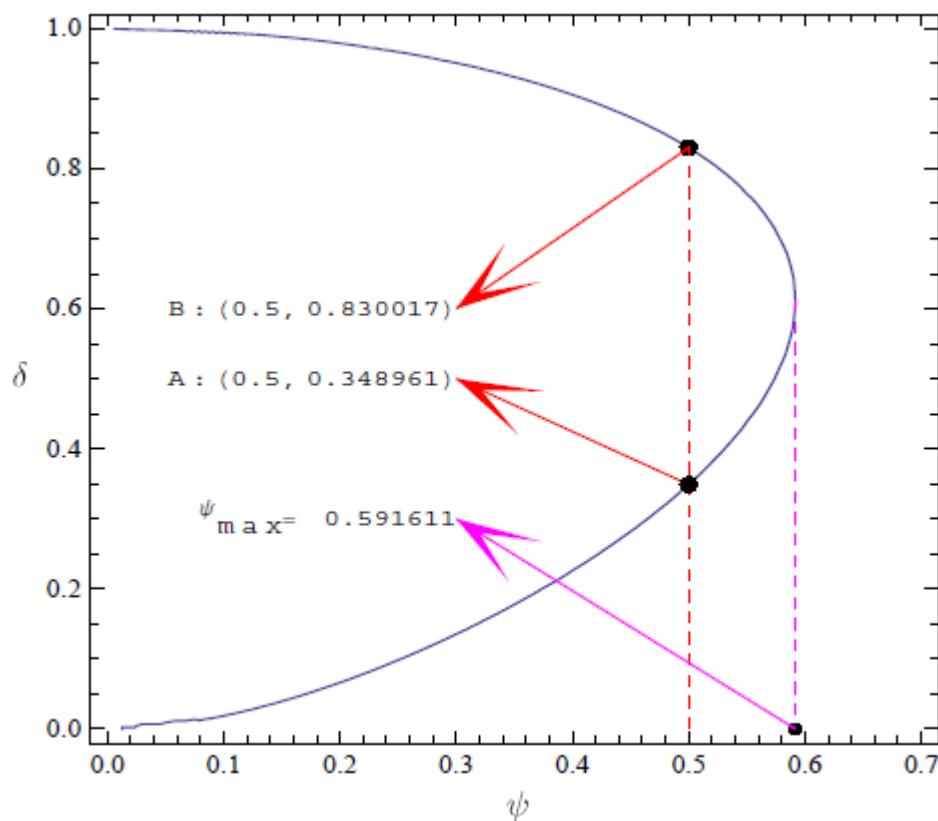
که رابطه بین ψ و δ بصورت زیر خواهد بود

$$-\frac{\sqrt{\delta} \text{Log}(\delta)}{2\sqrt{\frac{2\psi^2}{\delta^2}}} + \frac{\delta \left(\sqrt{\frac{(1-\delta)\psi^2}{\delta}} - \delta^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\psi^2}{\delta^2}} \text{Log}(2) + \frac{\delta \sqrt{\frac{(1-\delta)\psi^2}{\delta}} \text{Log}(2)}{\sqrt{(1-\delta)}} + \frac{\delta \sqrt{\frac{(1-\delta)\psi^2}{\delta}} \text{Log}(1 + \sqrt{(1-\delta)})}{\sqrt{(1-\delta)}} \right)}{\sqrt{2}\psi^2} = 1 \quad (3.17)$$

بر طبق معادله بالا، δ برحسب ψ بصورت ضمنی در شکل ۳-۵ رسم شده است. همانطوریک از شکل پیداست به ازای $\psi = 0.5$ دو مقدار برای δ یافت می شود ($\delta = 0.348961$ و $\delta = 0.830017$)، یعنی معادله زیر دارای جواب دوگانه است

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - 0.25\theta^{-2} = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{d\theta}{dx}(0) = 0, \theta(1) = 1 \quad (3.19)$$



شکل ۳-۵: رسم تابع δ بر حسب ψ بصورت ضمنی بر طبق (۳،۱۷).

برای بکار گیری روش آنالیز هموتوپی در گام اول مساله (۳،۱۸)–(۳،۱۹) به مساله مقدار اولیه زیر تبدیل می شود

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - 0.25\theta^{-2} = 0 \quad (3.20)$$

$$\theta(0) = \delta, \quad \frac{d\theta}{dx}(0) = 0 \quad (3.21)$$

که در آن δ پارامتر تجویز شده می باشد که به وسیله قاعده چندگانگی جوابها پیدا خواهد شد. فرض کنید تابع حدس آغازی برای جواب $\theta_0(x) = x^2 + \delta$ باشد که در شرایط آغازی (۳،۲۱) صدق می کند، تابع کمکی $H(x) = 1$ باشد و عملگر خطی بصورت زیر انتخاب شود

$$\mathcal{L}[\varphi(x, \delta; q)] = \frac{\partial^2 \varphi(x, \delta; q)}{\partial x^2} \quad (3.22)$$

که ویژگی زیر را برای ثابت های c_1 و c_2 دارد

$$\mathcal{L}[c_1 + c_2 x] = 0 \quad (3.23)$$

حال با دو بار انتگرالگیری از معادله دگرذیسی مرتبه بالا بدست می آوریم

$$\theta_m(x, \delta) = \chi_m \theta_{m-1}(x, \delta) + \hbar \int_0^x \int_0^s R_m(\vec{\theta}_{m-1}, \tau, \delta) d\tau ds + c_1 + c_2 x \quad (3.24)$$

که در آن

$$R_m(\vec{\theta}_{m-1}, \tau, \delta) = \sum_{j=0}^{m-1} \theta_{m-1-j}''(x) \sum_{i=0}^j \theta_i(x) \theta_{j-i}(x) - 0.25(1 - \chi_m) \quad (3.25)$$

و ثابت های c_1 و c_2 از معادلات زیر بدست می آید

$$\theta_m(0) = 0, \quad \theta_m'(0) = 0 \quad (3.26)$$

حال با محاسبه بازگشتی $\theta_m(x)$ ها برای $m = 1, 2, 3, \dots$ جواب تقریبی مرتبه M بصورت زیر داده می

شود

$$\theta_M(x, \delta, \hbar) = \sum_{m=0}^M \theta_m(x, \delta) \quad (3.27)$$

بنابراین به کمک شرط تحمیل شونده $\theta(1) = 1$ رابطه زیر حاصل می شود

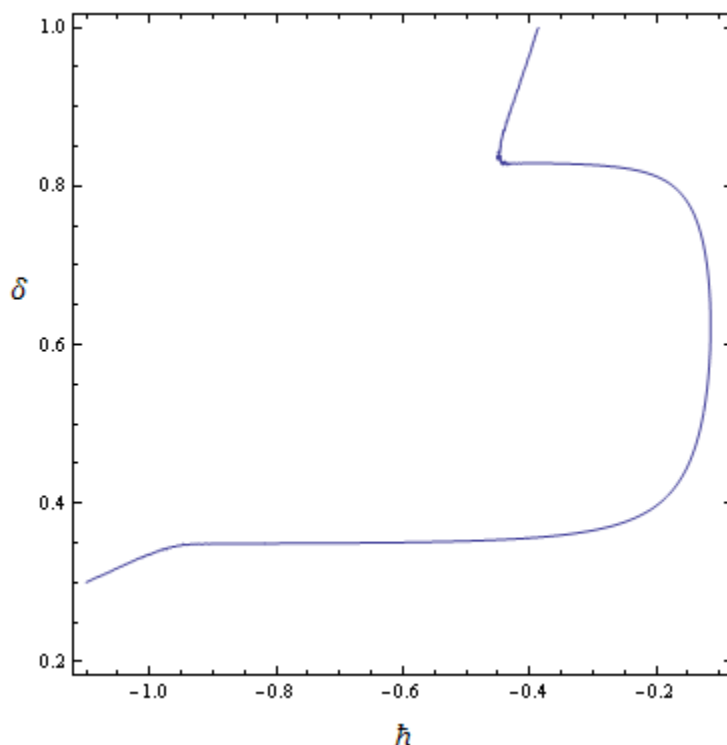
$$\theta(1) \approx \theta_M(1, \delta, \hbar) = 1 \quad (3.28)$$

مطابق با معادله بالا δ به عنوان تابعی از پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ در شکل ۳-۶ برای $M = 35$ رسم

شده است. همانطور که مشاهده می نمائیم دو خط راست افقی در شکل دیده می شود یکی برای

$\delta = 0.3489$ در بازه $[-0.95, -0.3]$ و دیگری $\delta = 0.8300$ در بازه $[-0.45, -0.25]$. بنابراین ما

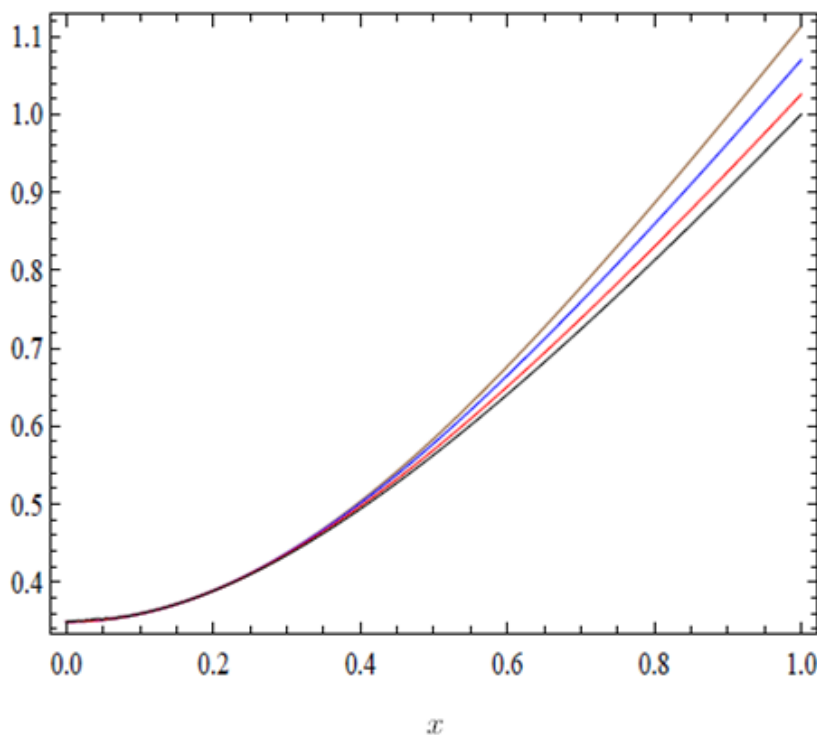
نتیجه می گیریم که PHAM دو جواب برای مساله می دهد که کاملاً با نتایج دقیق در شکل ۳-۵ همخوانی دارد.



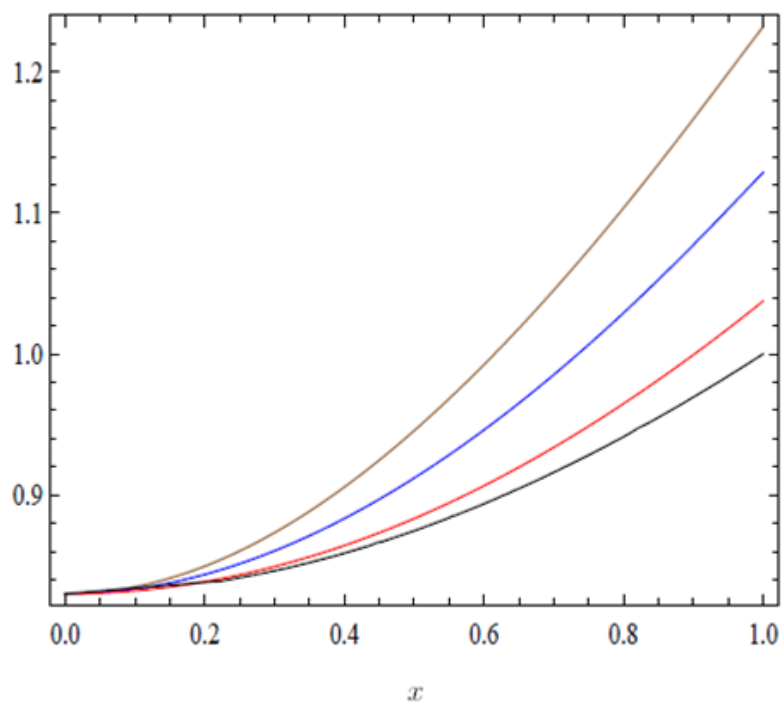
شکل ۳-۶: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۲۸).

اینک به محاسبه تقریبی این جواب دوگانه می پردازیم و آنها را با جوابهای دقیق، همانطوریکه در شکل ۳-۵ با نقاط (A, B) مشخص است، مقایسه می کنیم. تاکید می کنیم که هر دو جواب شاخه پایینی و شاخه بالایی بصورت همزمان تنها با استفاده از سری (۳,۲۷) با قرار دادن زوج مشخص $(\delta, \hbar)$ با هر دقتی بدست می آیند. در شکل ۳-۷ متناظر با $\delta = 0.3489$ و $\hbar = -0.6$ جوابهای تقریبی $\theta_3(x, 0.3489, -0.6)$ ، $\theta_5(x, 0.3489, -0.6)$ و $\theta_{10}(x, 0.3489, -0.6)$ با جواب دقیق شاخه پایینی $\theta(x)$ متناظر با

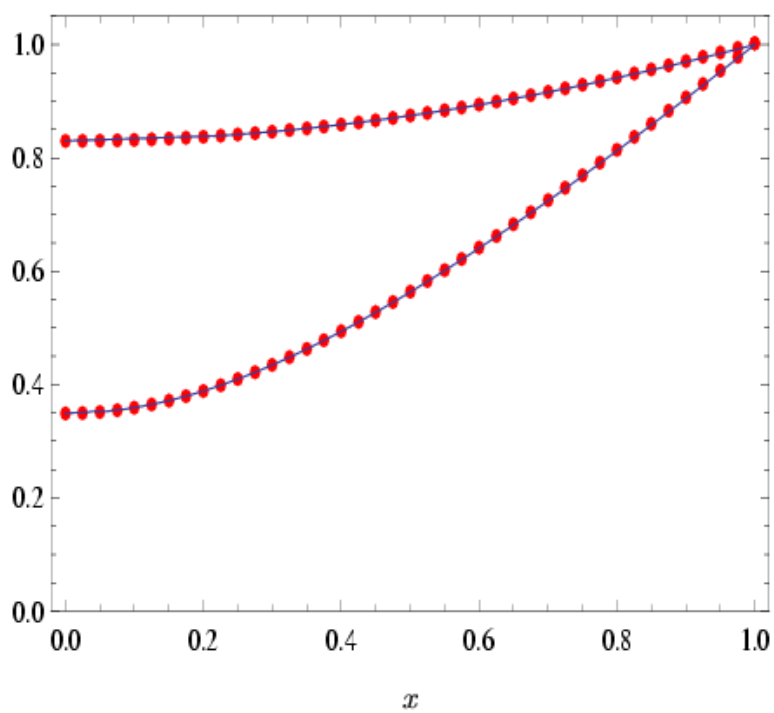
$\delta = 0.348961$ مقایسه شده است (نقطه A در شکل ۵-۳). در یک عمل مشابه، در شکل ۸-۳ متناظر با $\delta = 0.8300$ و $\hbar = -0.4$ جوابهای تقریبی $\theta_3(x, 0.8300, -0.4)$ ، $\theta_5(x, 0.8300, -0.4)$ و $\theta_{10}(x, 0.8300, -0.4)$ با جواب دقیق شاخه بالایی $\theta(x)$ متناظر با $\delta = 0.830017$ مقایسه شده است (نقطه B در شکل ۵-۳). در شکل ۹-۳ نیز جوابهای تقریبی دوگانه با $M = 35$ را با جوابهای دقیق دوگانه مقایسه شده اند همانطور که قابل مشاهده است تا این مرتبه از تقریب جوابها با مقیاس این شکل غیر قابل تمییز هستند.



شکل ۷-۳: مقایسه جواب تقریبی شاخه پایینی با دقیق، $\theta_3(x)$ (قهوه ای)، $\theta_5(x)$ (آبی)، $\theta_{10}(x)$ (قرمز).



شکل ۳-۸: مقایسه جواب تقریبی شاخه بالایی با دقیق، $\Theta_3(x)$ (قهوه ای) $\Theta_5(x)$ (آبی) $\Theta_{10}(x)$ (قرمز).



شکل ۳-۹: مقایسه جواب دوگانه تقریبی از مرتبه $M = 35$ با جواب دوگانه دقیق.

۲-۳ معادله براتو^{۳۲} (قویاً غیر خطی)

مسئله قویاً غیر خطی براتو که تاکنون توسط محققین با استفاده از روش های مختلف مورد بحث قرار گرفته است [53-56] بصورت زیر داده می شود

$$u'' + \lambda e^u = 0, \quad x \in (0,1) \quad (3.29)$$

و شرایط مرزی برای مساله فوق عبارتست از

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (3.30)$$

۱-۲-۳ جواب دقیق مساله

بوسیله کاهش مرتبه جواب دقیق مساله فوق بصورت زیر بدست می آید

$$u(x) = \text{Log} \left[\frac{a^2}{2\lambda \cosh^2 \left[-\frac{a}{2}(x+b) \right]} \right] \quad (3.31)$$

که در آن a و b ثابتهایی هستند که با استفاده از شرایط مرزی (۳,۳۰) بدست می آیند. اعمال شرایط مرزی نتیجه می دهد که $b = -\frac{1}{2}$ و a از رابطه زیر بدست می آید

$$a^2 = 2\lambda \cosh^2 \left[\frac{a}{4} \right] \quad (3.32)$$

با فرض $\alpha = \frac{a}{4}$ جواب مسئله براتو بصورت زیر داده می شود

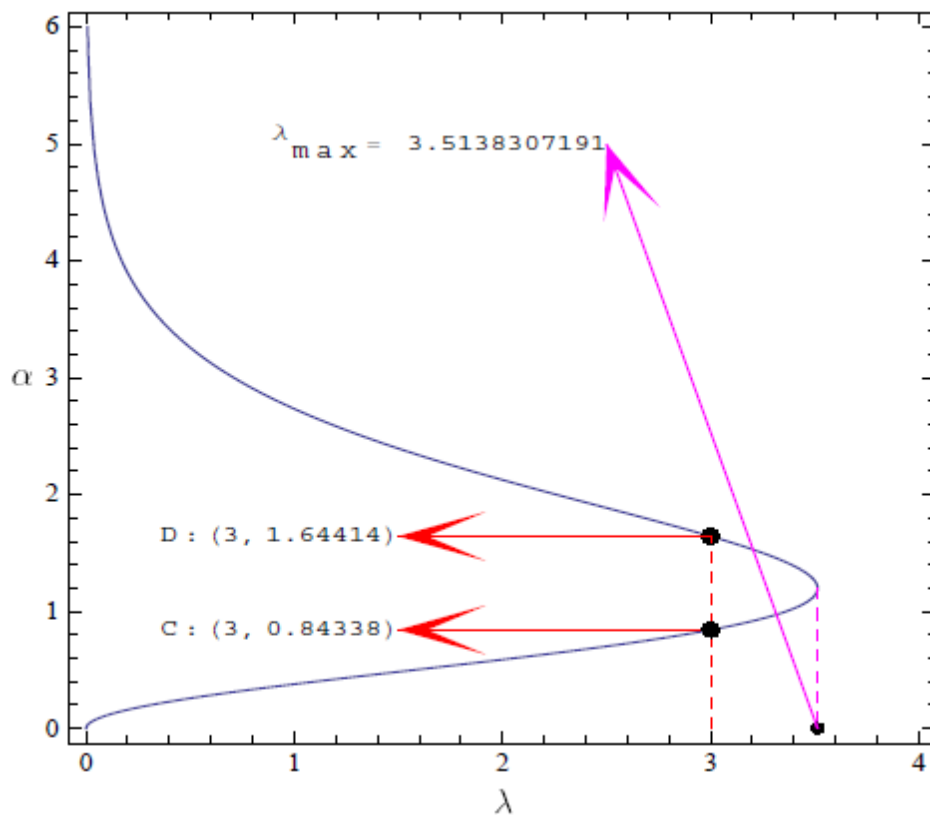
$$u(x) = 2\text{Log} \left[\frac{\cosh \alpha}{\cosh[\alpha(1-2x)]} \right] \quad (3.33)$$

³² Bratu equation

که رابطه بین α و λ در زیر مشخص است

$$\cosh \alpha = \frac{4}{\sqrt{2\lambda}} \alpha \quad (3.34)$$

برای تحقیق در مورد وابستگی α به λ شکل ۳-۱۰ رسم شده است. همانطور که مشاهده می شود مساله مقدار مرزی (۳-۳۰)-(۳,۲۹) برای $\lambda > \lambda_{max}$ جواب ندارد، برای $\lambda = \lambda_{max}$ جواب یکتا دارد و برای $\lambda < \lambda_{max}$ جواب دوگانه دارد. برای مثال همانطور که در شکل نیز مشخص است به ازای $\lambda = 3$ دو مقدار α وجود دارد یکی $\alpha = 0.84338$ و دیگری $\alpha = 1.64414$ (نقاط C و D).

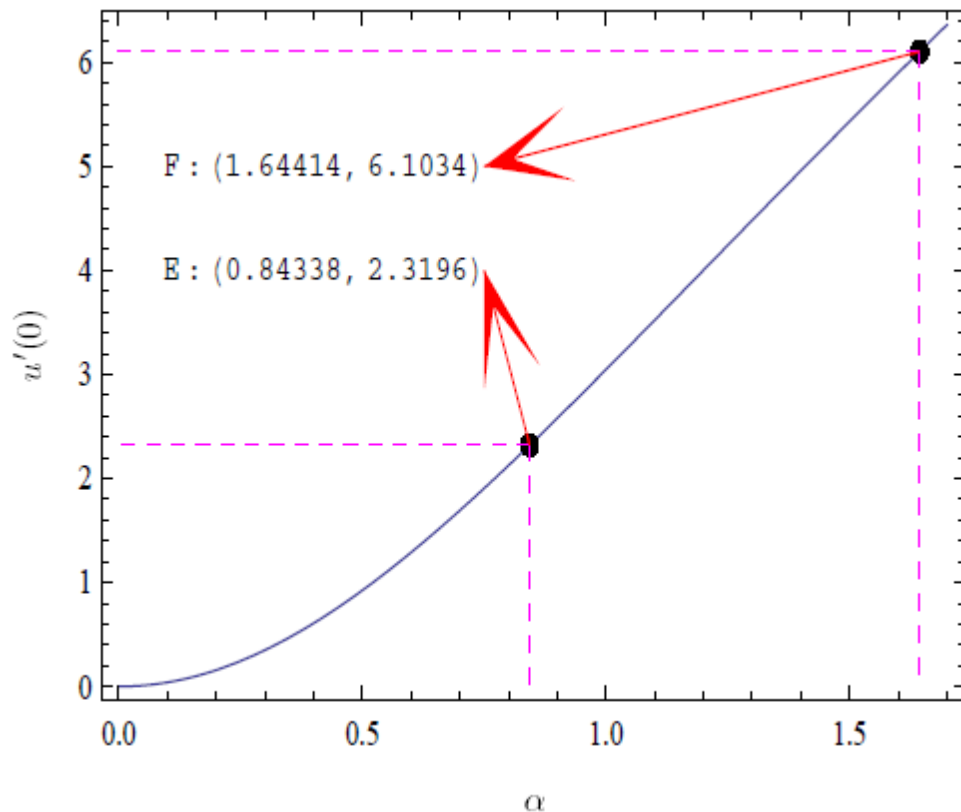


شکل ۳-۱۰: رسم تابع α بر حسب λ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۳۴).

علاوه بر این با مشتق گیری از (۳,۳۳) و محاسبه آن در $x = 0$ بدست می آوریم

$$u'(0) = 4\alpha \tanh \alpha \quad (3.35)$$

در شکل ۱۱-۳ برای هدف مشخصی در بخش بعد، $u'(0)$ به عنوان تابعی از α رسم شده است. همانطوری که دیده می شود متناظر با نقاط C و D در شکل ۱۰-۳ نقاط E و F و $u'(0) = 2.3196$ و $u'(0) = 6.1034$ در شکل ۱۱-۳ مشخص شده است. به عبارت دیگر مساله مقدار مرزی (۳-۳۰)-(۳,۲۹) برای $\lambda = 3$ دارای جواب دوگانه می باشد که برای یکی از جوابها $u'(0) = 2.3196$ و برای دیگری $u'(0) = 6.1034$ برقرار است.



شکل ۱۱-۳: رسم تابع $u'(0)$ بر حسب α بر طبق (۳,۳۵).

۳-۲-۲ جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوپی پیشگو

در این بخش ما روی بدست آوردن جواب های چندگانه مساله براتو در حالت $\lambda = 3$ با استفاده از قاعده چندگانگی جوابها تمرکز می کنیم [42]. با تجویز پارامتر δ مساله مقدار مرزی $(3, 29)-(3, 30)$ به مساله مقدار آغازی زیر تبدیل می شود.

$$u'' + 3e^u = 0, \quad x \in (0,1) \quad (3.36)$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \delta \quad (3.37)$$

بطوریکه شرط تحمیل شونده عبارتست از

$$u(1) = 0 \quad (3.38)$$

برای اینکه از جمله قویاً غیر خطی e^u پرهیز کنیم و برای راحتی کار از تعویض متغیر زیر استفاده می کنیم

$$y(x) = e^{-u(x)} \quad \text{or} \quad u(x) = -\text{Log}[y(x)] \quad (3.39)$$

آنگاه معادله $(3, 36)$ به معادله زیر تبدیل می شود

$$y(x)y''(x) - [y'(x)]^2 - 3y(x) = 0, \quad x \in (0,1) \quad (3.40)$$

با استفاده از $(3, 39)$ داریم $y'(x) = -u'(x)e^{-u(x)}$ آنگاه شرایط مرزی $(3, 37)$ به شرایط زیر مبدل می گردد.

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = \gamma = -\delta \quad (3.41)$$

و شرط تحمیل شونده $(3, 38)$ در این حالت خواهد بود

$$y(1) = 1 \quad (3.42)$$

حال روشمان را روی مساله (۳,۴۰)-(۳,۴۱) بکار می بریم. فرض کنید تابع حدس آغازی برای جواب $y_0(x) = \gamma x + 1$ باشد که در شرایط آغازی (۳,۴۱) صدق می کند، تابع کمکی $H(x) = 1$ باشد و عملگر خطی بصورت زیر انتخاب شود

$$\mathcal{L}[\varphi(x, \gamma; p)] = \frac{\partial^2 \varphi(x, \gamma; p)}{\partial x^2} \quad (3.43)$$

که ویژگی زیر را برای ثابت های انتگرالگیری c_1 و c_2 دارد

$$\mathcal{L}[c_1 + c_2 x] = 0 \quad (3.44)$$

حال با دو بار انتگرالگیری از معادله دگر دیسی مرتبه بالا بدست می آوریم

$$y_m(x, \gamma) = \chi_m y_{m-1}(x, \gamma) + \hbar \int_0^x \int_0^s R_m(\vec{y}_{m-1}, \tau, \gamma) d\tau ds + c_1 + c_2 x \quad (3.45)$$

که در آن

$$\begin{aligned} R_m(\vec{y}_{m-1}, \tau, \gamma) = & \sum_{j=0}^{m-1} y_{m-1-j}''(x) y_j(x) \\ & - \sum_{j=0}^{m-1} y_{m-1-j}'(x) y_j'(x) - 3y_{m-1}(x) \end{aligned} \quad (3.46)$$

و ثابت های c_1 و c_2 از معادلات زیر بدست می آید

$$y_m(0) = 0, \quad y_m'(0) = 0 \quad (3.47)$$

حال با محاسبه بازگشتی $y_m(x)$ ها برای $m = 1, 2, 3, \dots$ جواب تقریبی مرتبه M بصورت زیر داده می شود

$$Y_M(x, \gamma, \hbar) = \sum_{m=0}^M y_m(x, \gamma) \quad (3.48)$$

بنابراین به کمک شرط تحمیل شونده $y(1) = 1$ رابطه زیر حاصل می شود

$$y(1) \approx Y_M(1, \gamma, \hbar) = 1 \quad (3.49)$$

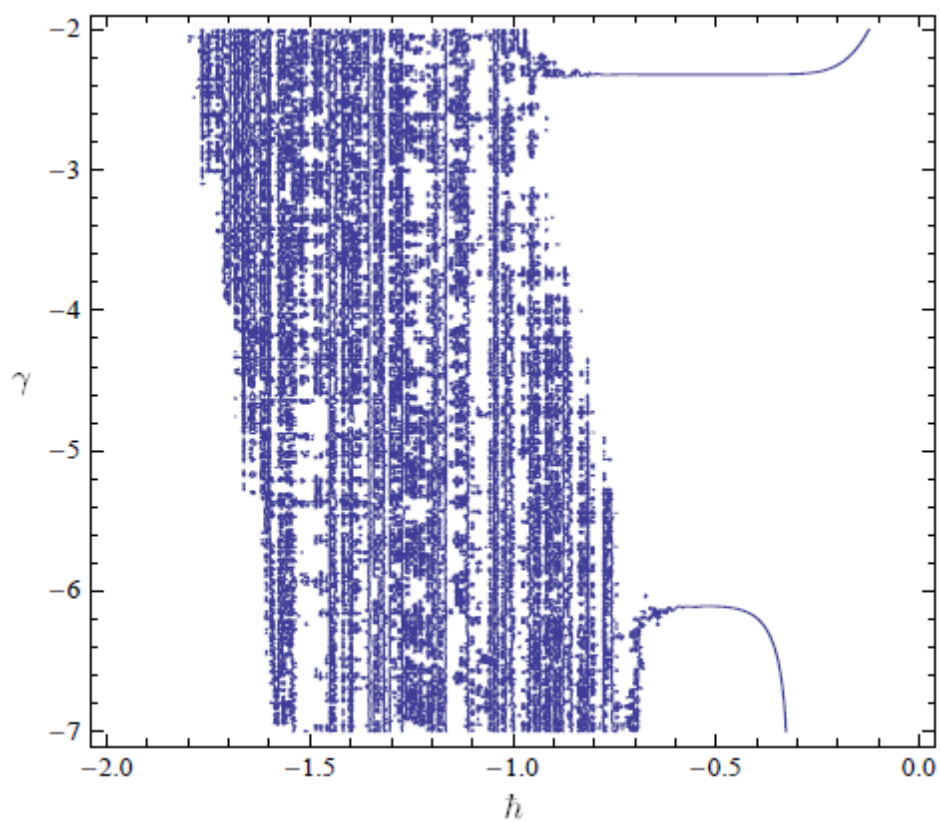
مطابق با معادله بالا γ به عنوان تابعی از پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ در شکل ۳-۱۲ برای $M = 40$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می نمائیم دو خط راست افقی در شکل دیده می شود یکی برای $\gamma = -6.1034$ ($\delta = 6.1034$) در بازه $[-0.6, -0.4]$ و دیگری $\gamma = -2.3196$ ($\delta = 2.3196$) در بازه $[-0.8, -0.3]$. بنابراین ما نتیجه می گیریم که PHAM دو جواب برای مساله می دهد که کاملاً با نتایج دقیق در شکل ۳-۱۰ و ۳-۱۱ همخوانی دارد.

اینک به محاسبه تقریبی این جواب دوگانه می پردازیم و آنها را با جوابهای دقیق، همانطوریکه در شکل ۳-۱۰ با نقاط (C, D) مشخص است، مقایسه می کنیم. با اعمال تعویض متغیر جواب تقریبی مساله اصلی یعنی $(3, 37) - (3, 36)$ از مرتبه M بصورت زیر داده می شود.

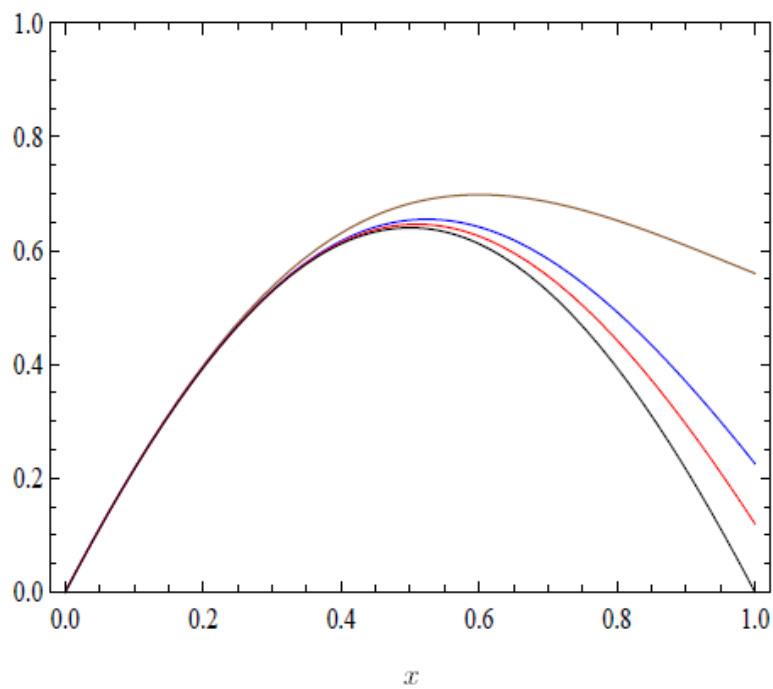
$$U_M(x, \delta, \hbar) = -\text{Log}[Y_M(x, \gamma, \hbar)] \quad (3.50)$$

تاکید می کنیم که هر دو جواب شاخه پایینی و شاخه بالایی بصورت همزمان تنها با استفاده از سری $(3, 50)$ با قرار دادن زوج مشخص $(\delta, \hbar)$ با هر دقتی بدست می آیند. در شکل ۳-۱۳ متناظر با $\delta = 2.3196$ و $\hbar = -0.5$ جوابهای تقریبی $U_5(x, 2.3196, -0.5)$ و $U_8(x, 2.3196, -0.5)$ با جواب دقیق شاخه پایینی $u(x)$ متناظر با $\alpha = 0.84338$ مقایسه شده است (نقطه C در شکل ۳-۱۰). در یک عمل مشابه، در شکل ۳-۱۴ متناظر با $\delta = 6.1034$ و $\hbar = -0.5$ جوابهای تقریبی $U_{17}(x, 6.1034, -0.5)$ و $U_{20}(x, 6.1034, -0.5)$ با جواب دقیق شاخه بالایی $u(x)$ متناظر با $\alpha = 1.64414$ مقایسه شده است (نقطه D در شکل ۳-۱۰). در شکل ۳-۱۵ نیز جوابهای تقریبی دوگانه را با جوابهای دقیق دوگانه مقایسه

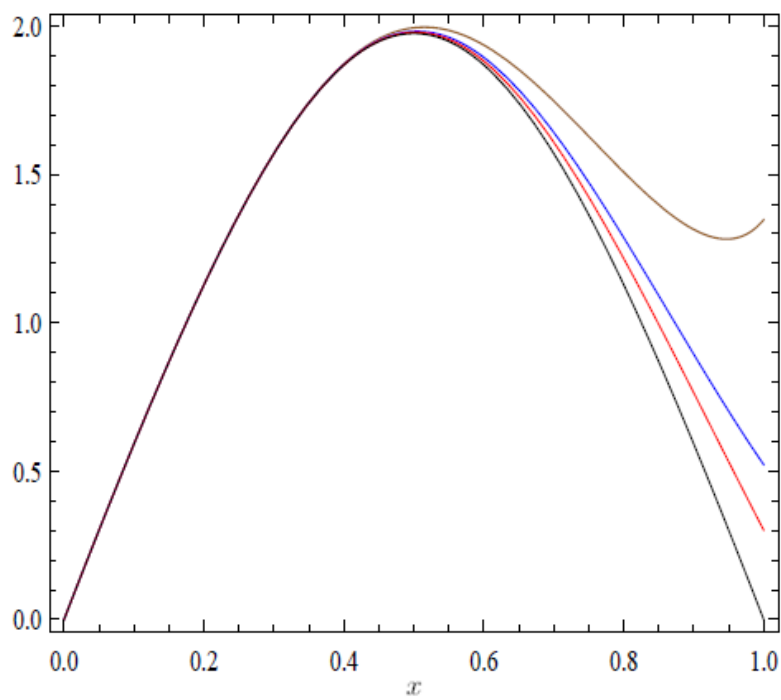
کرده ایم. همانطور که قابل مشاهده است تا این مرتبه از تقریب جوابها با مقیاس این شکل غیر قابل تمییز هستند.



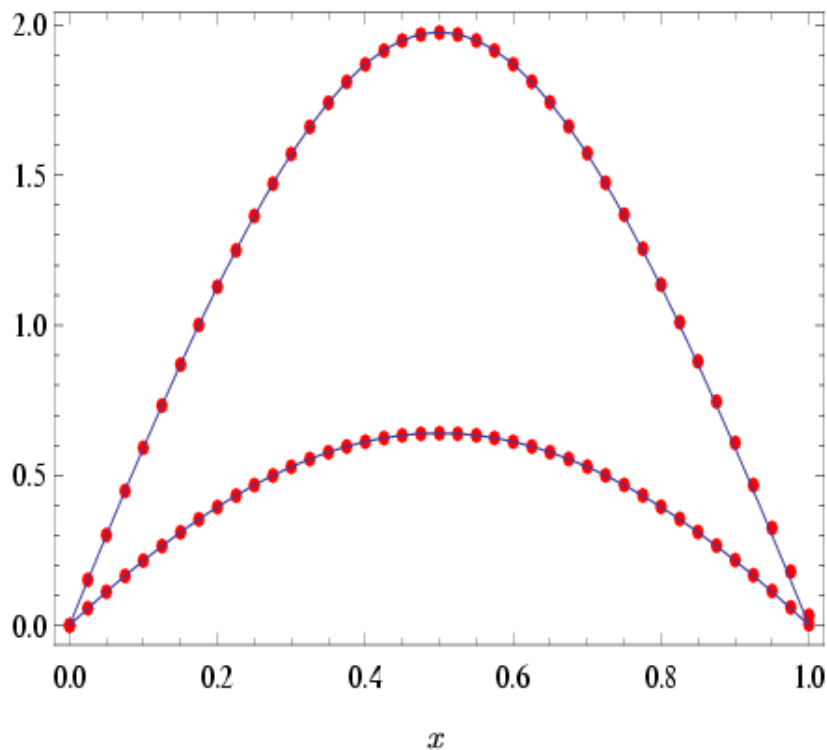
شکل ۳-۱۲: رسم تابع γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۴۹).



شکل ۳-۱۳: مقایسه جواب تقریبی شاخه پایینی با دقیق، $\Theta_5(x)$ (قهوه ای) $\Theta_8(x)$ (آبی) $\Theta_{10}(x)$ (قرمز).



شکل ۳-۱۴: مقایسه جواب تقریبی شاخه بالایی با دقیق، $\Theta_{17}(x)$ (قهوه ای) $\Theta_{20}(x)$ (آبی) $\Theta_{22}(x)$ (قرمز).



شکل ۳-۱۵: مقایسه جواب دو گانه تقریبی از مرتبه $M = 20$ برای شاخه پایینی و از $M = 30$ برای شاخه بالایی با جواب دو گانه دقیق.

۳-۳ جریان تبادل حرارت مخلوط در یک کانال عمودی

هدف از این بخش بکار بردن روش آنالیز هموتوپی پیشگو روی مدل جریان تبادل حرارت مخلوط که بصورت ترکیب جریان آزاد و تحمیل شده در یک کانال عمودی با دیواره های هم دما می باشد که در یک دمای ثابت نگه داشته شده است. این مدل با معادله زیر نوشته می شود [57-58].

$$\frac{d^4 u}{dy^4} = \frac{\varepsilon}{16} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3.51)$$

و شرایط مرزی عبارتند از

$$u'(0) = u'''(0) = u(1) = 0, \quad \int_0^1 u(y) dy = 1 \quad (3.52)$$

وقتی $\mathcal{E} = 0$ آنگاه جواب معادله بصورت زیر داده می شود

$$u(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2) \quad (3.53)$$

۳-۳-۱ جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوپی پیشگو

نشان می دهیم که معادله بالا در بازه $(-\infty, 0) \cup (0, \mathcal{E}_{max})$ دارای جواب دوگانه است که در آن

$$\mathcal{E}_{max} \cong 228.128. \quad \text{با تجویز پارامتر } \delta \text{ معادله } (3, 51) - (3, 52) \text{ را بصورت زیر می نویسیم [43]}$$

$$\frac{d^4 u}{dy^4} = \frac{\mathcal{E}}{16} \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (3.54)$$

$$u'(0) = u'''(0) = u(1) = 0, u''(0) = \delta \quad (3.55)$$

و شرط تحمیل شده عبارتست از

$$\int_0^1 u(y) dy = 1 \quad (3.56)$$

پارامتر تجویز شده δ به وسیله قاعده چندگانگی جوابها پیدا خواهد شد. فرض کنید تابع حدس آغازی برای

جواب

$$u_0(y) = \frac{\delta}{2}(y^2 - 1) \quad (3.57)$$

باشد که در شرایط آغازی $(3, 21)$ صدق می کند، تابع کمکی $H(y) = 1$ باشد و عملگر خطی بصورت زیر

انتخاب شود

$$\mathcal{L}[\varphi(y, \delta; q)] = \frac{\partial^4 \varphi(y, \delta; q)}{\partial y^4} \quad (3.58)$$

که ویژگی زیر را برای ثابت های c_1, c_2, c_3 و c_4 دارد

$$\mathcal{L}[c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3] = 0 \quad (3.59)$$

حال با چهار بار انتگرالگیری از معادله دگرذیسی مرتبه بالا بدست می آوریم

$$\begin{aligned} u_m(y, \delta) &= \chi_m u_{m-1}(y, \delta) \\ &+ \hbar \int_0^y \int_0^{\eta_1} \int_0^{\eta_2} \int_0^{\eta_3} R_m(\vec{u}_{m-1}, \tau, \delta) d\tau d\eta_3 d\eta_2 d\eta_1 \\ &+ c_1 + c_2 y + c_3 y^2 + c_4 y^3 \end{aligned} \quad (3.60)$$

که در آن

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \tau, \delta) = u_{m-1}''''(\tau, \delta) - \frac{\varepsilon}{16} \sum_{j=0}^{m-1} u_j'(\tau, \delta) u_{m-j-1}'(\tau, \delta) \quad (3.61)$$

و ثابت های c_1, c_2, c_3 و c_4 از معادلات زیر بدست می آید

$$u_m(1, \delta) = u_m'(0, \delta) = u_m''(0, \delta) = u_m'''(0, \delta) = 0 \quad (3.62)$$

حال با محاسبه بازگشتی $u_m(y, \delta)$ ها برای $m = 1, 2, 3, \dots$ جواب تقریبی مرتبه M بصورت زیر داده

می شود

$$U_M(y, \delta, \hbar) = \sum_{m=0}^M u_m(y, \delta) \quad (3.63)$$

جواب تقریبی بالا برای مرتبه یک و دو در زیر داده شده است.

$$U_1(y, \delta, \hbar) = -\frac{y^6 \delta^2 \varepsilon \hbar}{5760} + \frac{\delta}{2} (y^2 - 1) + \frac{\delta^2 \varepsilon \hbar}{5760} \quad (3.64)$$

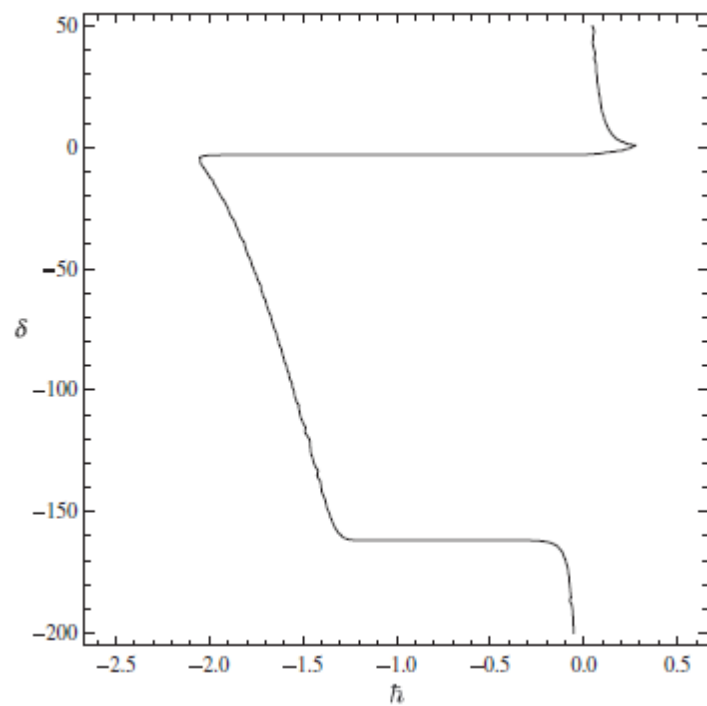
$$U_2(y, \delta, \hbar) = \frac{y^{10} \delta^3 \varepsilon^2 \hbar^2}{38707200} - \frac{y^6 \delta^2 \varepsilon \hbar^2}{5760} - \frac{y^6 \delta^2 \varepsilon \hbar}{2880} + \frac{\delta}{2} (y^2 - 1)$$

$$+\frac{\delta^3 \varepsilon^2 \hbar^2}{38707200} + \frac{\delta^2 \varepsilon \hbar^2}{5760} + \frac{\delta^2 \varepsilon \hbar}{2880} \quad (3.65)$$

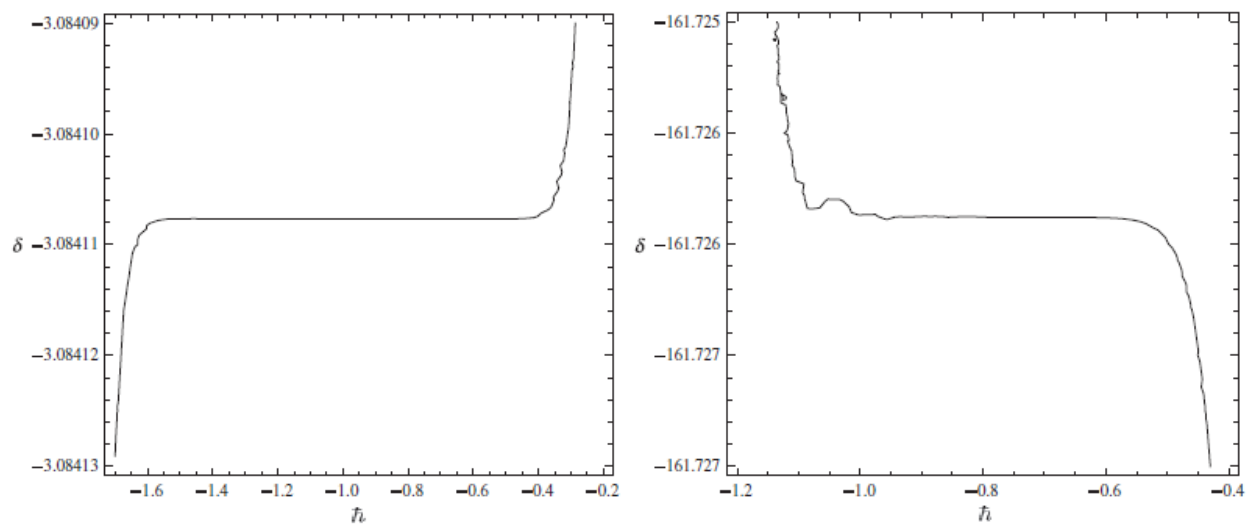
اینک به کمک شرط تحمیل شونده (۳,۵۶) رابطه زیر حاصل می شود

$$\Gamma_M(\delta, \hbar, \varepsilon) = \int_0^1 U_M(y, \delta, \varepsilon, \hbar) dy \approx \int_0^1 u(y, \varepsilon) dy = 1 \quad (3.66)$$

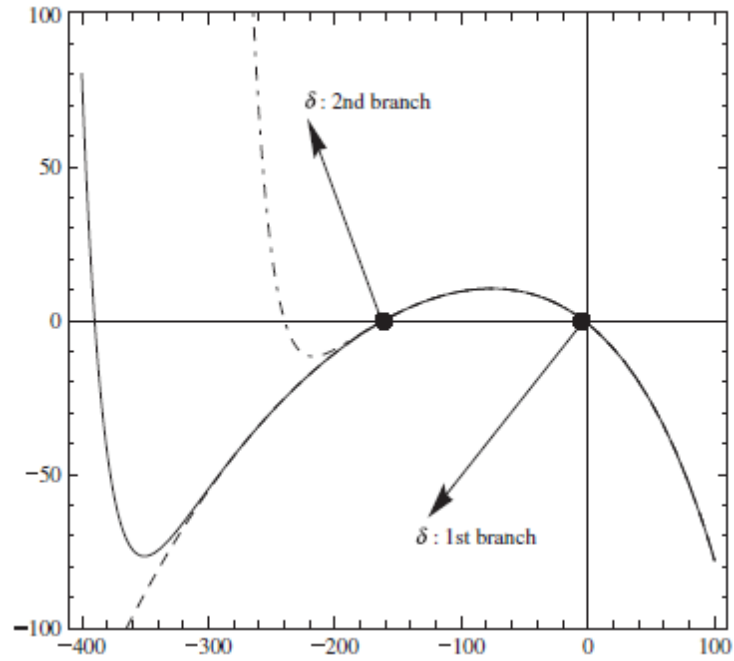
برای بررسی وجود جواب ما دو حالت $\varepsilon = 20$ و $\varepsilon = -20$ را بررسی می کنیم. مطابق با معادله بالا پارامتر تجویز شده δ به عنوان تابعی از پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ در شکل ۳-۱۶ برای $M = 25$ و $\varepsilon = 20$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می نمائیم دو خط راست افقی در شکل دیده می شود یکی برای $\delta = -3.08411$ در بازه $[-1.6, -0.4]$ و دیگری $\delta = -161.726$ در بازه $[-0.95, -0.55]$. بنابراین ما نتیجه می گیریم که PHAM وجود دو جواب برای مساله را تأیید می کند. برای دیدن مقدار دقیقتر از δ ما شکل ۳-۱۶ را در شکل ۳-۱۷ بزرگنمایی کرده ایم. بار دیگر اشاره می کنیم که به ازای $\varepsilon = 20$ برای مساله ما دو جواب بدست می آید یکی با $u''(0) = -3.08411$ و دیگری با $u''(0) = -161.726$. معادلاً تکنیک دیگری که برای آن می توان به وجود چندگانگی جوابها پی برد این است که تعداد نقاط برخورد باقیمانده $\Gamma_M(\delta, \hbar, \varepsilon) - 1$ را با محور افقی پیدا کنیم که با تغییرات $\hbar$ ثابت می ماند. این کار در شکل ۳-۱۸ انجام شده است. همانطور که دیده می شود دو نقطه برخورد به عنوان ریشه ها وجود دارند که با تغییر $\hbar$ پارامتر تجویز شده ثابت می ماند و این دو نقطه متناظر با وجود جواب دوگانه برای مساله است.



شکل ۳-۱۶: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۶۶) برای $\Xi = 20$.

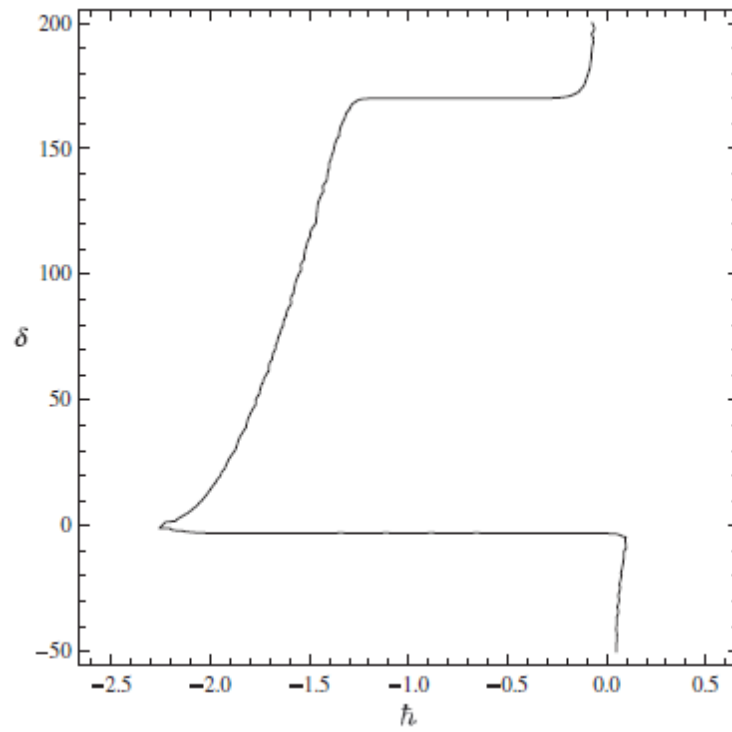


شکل ۳-۱۷: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۶۶) برای $\Xi = 20$ (بزرگنمایی شکل ۳-۱۶)

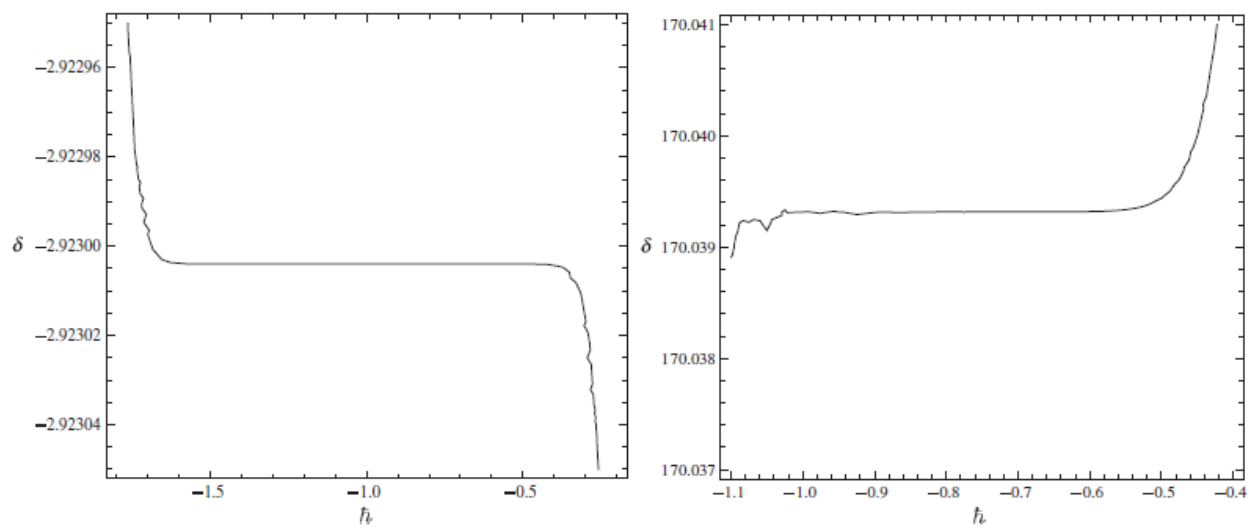


شکل ۳-۱۸: رسم باقیمانده معادله (۳,۶۶) برای مقادیر مختلف $\hbar$ با $\Xi = 20$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 20$, خط چین ($\hbar = -0.8$)

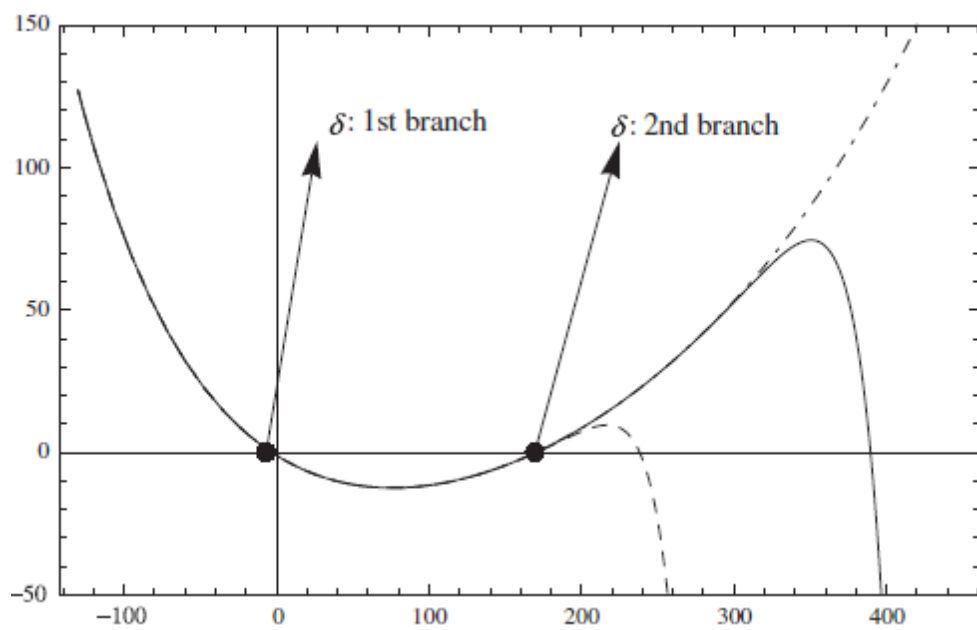
خط تیره ($\hbar = -1$) خط نقطه-چین ($\hbar = -1.2$)



شکل ۳-۱۹: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۶۶) برای $\Xi = -20$.



شکل ۳-۲۰: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۶۶) برای $\Xi = -20$ (بزرگنمایی شکل ۳-۱۹)

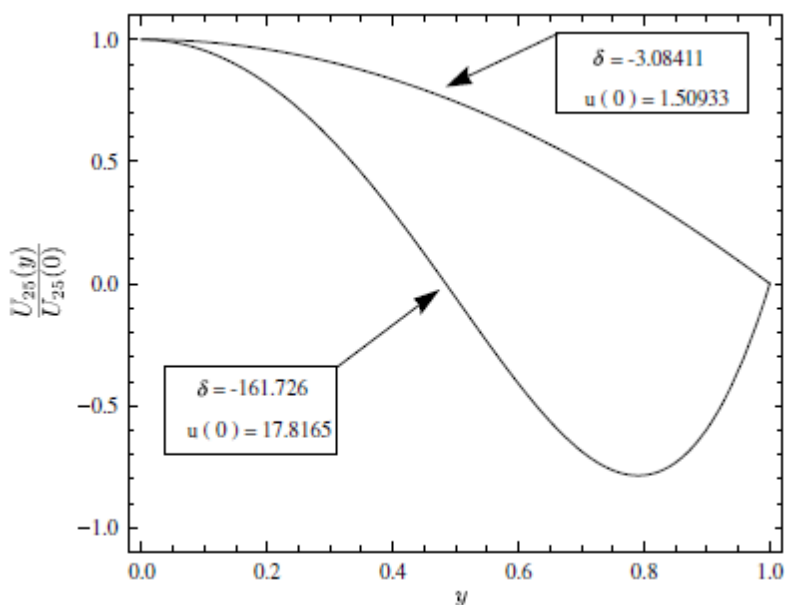


شکل ۳-۲۱: رسم باقیمانده معادله (۳,۶۶) برای مقادیر مختلف $\hbar$ با $\Xi = -20$ بوسیله تقریب مرتبه $M = 20$ ، خط چین ($\hbar = -0.8$)

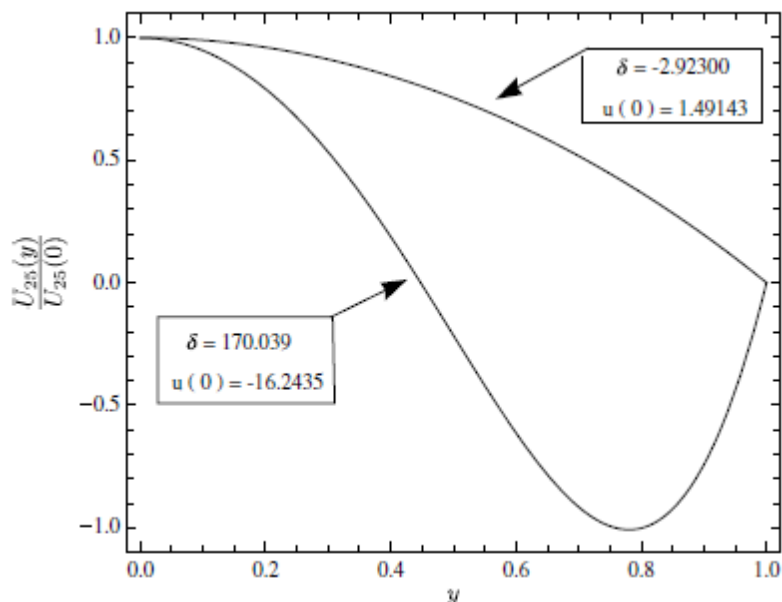
خط تیره ($\hbar = -1$) خط نقطه-چین ($\hbar = -1.2$)

در عمل مشابه ما شکل های ۳-۱۹، ۳-۲۰ و ۳-۲۱ را برای حالت $\Xi = -20$ رسم کرده ایم همانطور که از این شکل ها پیداست برای مساله ما در این حالت نیز دو جواب بدست می آید یکی با $u''(0) = -2.92300$ و دیگری با $u''(0) = 170.039$

اینک به محاسبه تقریبی این جوابهای دوگانه می پردازیم. تاکید می کنیم که هر دو جواب شاخه پایینی و شاخه بالایی بصورت همزمان تنها با استفاده از سری (۳,۶۳) با قرار دادن زوج مشخص $(\delta, \hbar)$ با هر دقتی بدست می آیند. در شکل ۳-۲۲ متناظر با $\delta = -3.08411$ و $\delta = -161.726$ برای مشاهده بهتر از جوابهای تقریبی، $U_{25}(y, -3.08411, -1)$ و $U_{25}(y, -161.726, -0.75)$ به ترتیب بوسیله $U_{25}(0, -3.08411, -1)$ و $U_{25}(0, -161.726, -0.75)$ نرمال شده است. عمل مشابه در شکل ۳-۲۳ برای جوابهای تقریبی دوگانه متناظر با $\delta = -2.92300$ و $\delta = 170.039$ انجام شده است.



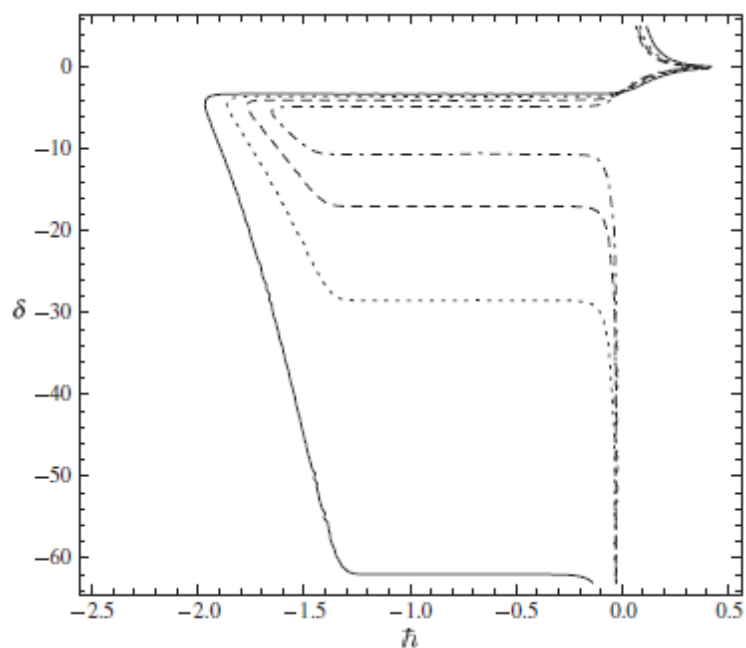
شکل ۳-۲۲: رسم جوابهای تقریبی دوگانه برای $\Xi = 20$.



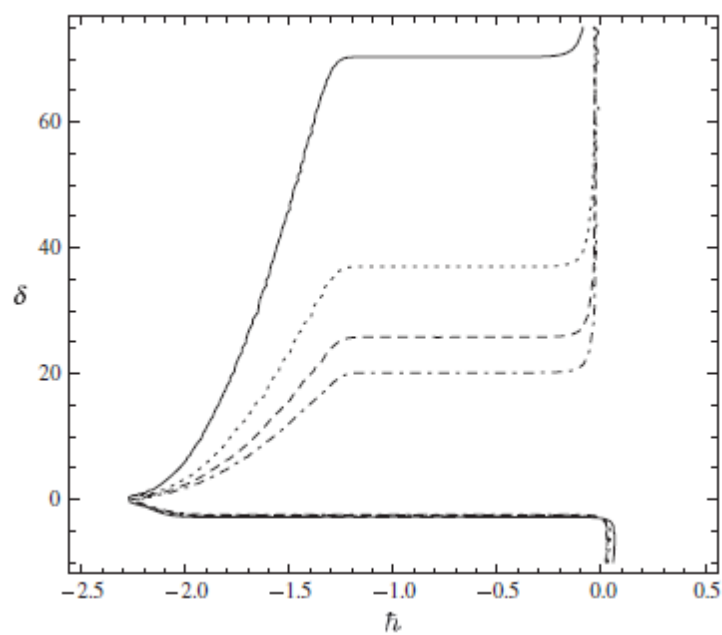
شکل ۳-۲۳: رسم جوابهای تقریبی دوگانه برای $\Xi = -20$.

۳-۳-۲ نتایج بیشتر

در این بخش [43]، در عمل مشابه بخش قبل وجود جوابهای چندگانه را برای بعضی مقادیر دیگر از Ξ انجام می دهیم. در شکل ۳-۲۴ و ۳-۲۵ پارامتر تجویز شده δ بر حسب پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ مطابق با معادله (۳,۶۶) برای مقادیر مختلف Ξ $(-200, -150, -100, -50, 50, 100, 150, 200)$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می کنیم برای همه این مقادیر جوابهای دو تایی برای مساله $(۳,۵۱)-(۳,۵۲)$ وجود دارد. همچنین با استفاده از این روش ما جدولی برای مقادیر بیشتر Ξ که شامل $U_{25}(0)$ و $\delta = U_{25}''(0)$ است تهیه کرده ایم (جدول ۳-۳).



شکل ۳-۲۴: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۶۶)، خط تیره ($E = 50$) نقطه چین ($E = 100$) خط چین ($E = 150$) خط نقطه-چین ($E = 200$).



شکل ۳-۲۵: رسم تابع δ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۶۶)، خط تیره ($E = -50$) نقطه چین ($E = -100$) خط چین ($E = -150$) خط نقطه-چین ($E = -200$).

جدول ۳-۳: محاسبه تقریبی $U_{25}(0)$ و $U_{25}''(0)$ برای مقادیر مختلف Ξ .

Ξ	First branch solution		Second branch solution		Ξ	First branch solution		Second branch solution	
	$\delta = U_{25}''(0)$	$U_{25}(0)$	$\delta = U_{25}''(0)$	$U_{25}(0)$		$\delta = U_{25}''(0)$	$U_{25}(0)$	$\delta = U_{25}''(0)$	$U_{25}(0)$
-300	-2.24467	1.4142	14.4022	-0.265373	-20	-2.923	1.49143	170.039	-16.2435
-280	-2.27829	1.41812	15.2299	-0.350282	20	-3.08411	1.50933	-161.726	17.8165
-260	-2.31343	1.4222	16.1808	-0.447839	40	-3.17666	1.51955	-78.6454	9.28697
-240	-2.35019	1.42646	17.2853	-0.561177	60	-3.2794	1.53086	-50.8771	6.43596
-220	-2.38874	1.43091	18.5851	-0.694569	80	-3.39469	1.54349	-36.9268	5.00354
-200	-2.42923	1.43557	20.1383	-0.853988	100	-3.52581	1.55779	-28.493	4.1374
-180	-2.47184	1.44046	22.0289	-1.04806	120	-3.67753	1.57427	-22.8046	3.55307
-160	-2.51678	1.4456	24.383	-1.28971	140	-3.85724	1.5937	-18.6688	3.12807
-140	-2.56429	1.45102	27.3982	-1.59926	160	-4.07735	1.61737	-15.4805	2.80024
-120	-2.61465	1.45675	31.4042	-2.01054	180	-4.36139	1.64775	-12.8869	2.53331
-100	-2.66818	1.46281	36.994	-2.58444	200	-4.7648	1.69064	-10.6349	2.3012
-80	-2.72528	1.46926	45.3536	-3.4427	220	-5.50778	1.76902	-8.3785	2.06803
-60	-2.78639	1.47614	59.2494	-4.86935	225	-5.90406	1.81059	-7.64578	1.99206
-40	-2.85208	1.4835	86.9805	-7.71641	228	-6.50321	1.8732	-6.85183	1.90953

۳-۴ مدل واکنش - نفوذ^{۳۳}

پیش بینی سرعت واکنش و نفوذ آن در کاتالیزورهای متخلخل هنگامی که سرعت واکنش به شدت آن بصورت غیر خطی وابسته است، یکی از مسائل مهم در مهندسی شیمی می باشد. این سیستم غیر همگن که مواد جامد با منفذهایی که واکنش دهنده ها در آن نفوذ می کنند را شامل می شود در حالت کلی بصورت یک مسئله مقدار مرزی غیر خطی مدل می شود که به اصطلاح مسئله انتقال واکنش گفته می شود که در حالت کلی شامل ضریب پخش و انتقال گرما و فرایند (آهنگ) واکنش می باشد [59-62]. حل و تحلیل کامل چنین سیستمی

³³ Reaction-diffusion model

حتی در حالت‌های ساده و حتی با استفاده از روش‌های عددی پیچیده می باشد. در حالت خیلی خاص بدون ضریب پخش و انتقال گرما (که به اصطلاح معادله واکنش - نفوذ) و با فرض اینکه آهنگ واکنش به شدت آن بصورت تابعی از توان با توان 1- بستگی دارد بصورت زیر مدل می شود [41].

$$u''u - \varphi^2 = 0 \quad (3.67)$$

و شرایط مرزی عبارتست از

$$u'(0) = 0, u(1) = 1 \quad (3.68)$$

که در آن φ ثابت می باشد.

۳-۴-۱ جواب دقیق مدل

همانطوریکه در مرجع [62] نشان داده شده است جواب دقیق مساله (۳,۶۸)-(۳,۶۷) بصورت ضمنی زیر داده می شود

$$x = \frac{\gamma}{i\varphi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erf} \left[i \sqrt{\operatorname{Ln} \left(\frac{u}{\gamma} \right)} \right] \quad (3.69)$$

که در آن $\operatorname{Erf}[\cdot]$ تابع خطاء می باشد که به صورت زیر تعریف می شود

$$\operatorname{Erf}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (3.70)$$

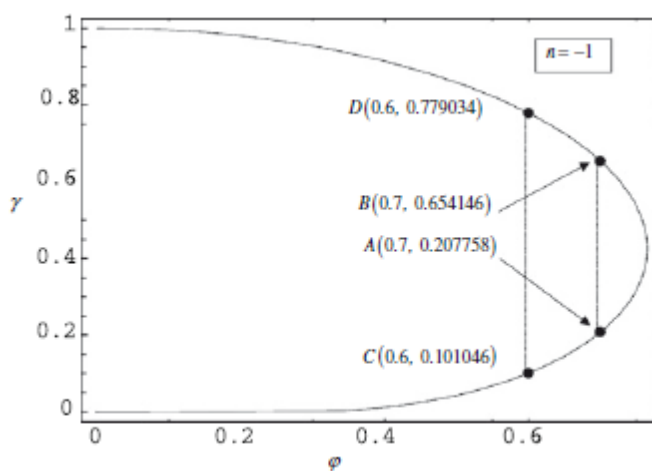
که پارامتر γ بر حسب φ از رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{\gamma}{i\varphi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erf} \left[i \sqrt{\operatorname{Ln} \left(\frac{1}{\gamma} \right)} \right] = 1 \quad (3.71)$$

در شکل ۳-۲۶ پارامتر γ به عنوان تابعی از φ رسم شده است. یک بازرسی ساده از شکل نشان می دهد که دامنه وجود جواب بر حسب φ عبارتست از

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_{max} = 0.765152 \quad (3.72)$$

که به ازای هر φ در این بازه دو جواب برای γ یافت می شود که نشان دهنده وجود جواب های دوتایی برای مساله (۳,۶۸)-(۳,۶۷) می باشد. همچنین متناظر با φ_{max} جواب یکتا با $\gamma_{max} = 0.425695$ بدست می آید. همانطوریکه در شکل ۳-۲۶ مشخص است زوج نقاط (A,B) و (C,D) مثالهایی از جوابهای دوگان به ازای مقادیر مشخصی از φ می باشند.



شکل ۳-۲۶: رسم تابع γ بر حسب φ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۷۱).

۳-۴-۲ جوابهای چندگانه به روش آنالیز هموتوپی پیشگو

برای بکار گیری روش آنالیز هموتویی در گام اول مساله (۳,۶۸)–(۳,۶۷) به مساله مقدار اولیه زیر تبدیل می شود [41]

$$u''u - \varphi^2 = 0 \quad (3.73)$$

$$u(0) = \gamma, \quad u'(0) = 0 \quad (3.74)$$

که در آن γ پارامتر تجویز شده می باشد که به وسیله قاعده چندگانگی جوابها پیدا خواهد شد. فرض کنید تابع حدس آغازی برای جواب $u_0(x) = \gamma$ باشد که در شرایط آغازی (۳,۷۴) صدق می کند، تابع کمکی $H(x) = 1$ باشد و عملگر خطی بصورت زیر انتخاب شود

$$\mathcal{L}[\varphi(x, \gamma; q)] = \frac{\partial^2 \varphi(x, \gamma; q)}{\partial x^2} \quad (3.75)$$

که ویژگی زیر را برای ثابت های c_1 و c_2 دارد

$$\mathcal{L}[c_1 + c_2 x] = 0 \quad (3.76)$$

حال با دو بار انتگرالگیری از معادله دگرذیسی مرتبه بالا بدست می آوریم

$$u_m(x, \gamma) = \chi_m u_{m-1}(x, \gamma) + \hbar \int_0^x \int_0^s R_m(\vec{u}_{m-1}, \tau, \gamma) d\tau ds + c_1 + c_2 x \quad (3.77)$$

که در آن

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \tau, \delta) = \sum_{j=0}^{m-1} u''_{m-1-j}(x) u_j(x) - \varphi^2(1 - \chi_m) \quad (3.78)$$

و ثابت های c_1 و c_2 از معادلات زیر بدست می آید

$$u_m(0) = 0, \quad u'_m(0) = 0 \quad (3.79)$$

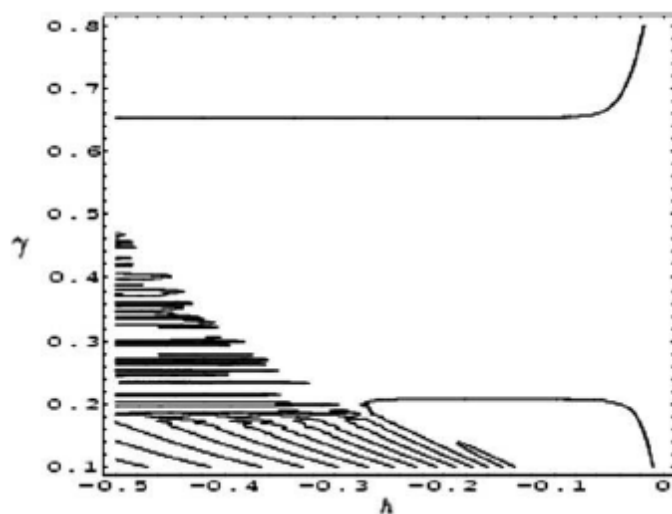
حال با محاسبه بازگشتی $u_m(x)$ ها برای $m = 1, 2, 3, \dots$ جواب تقریبی مرتبه M بصورت زیر داده می شود

$$U_M(x, \gamma, \hbar) = \sum_{m=0}^M u_m(x, \gamma) \quad (3.80)$$

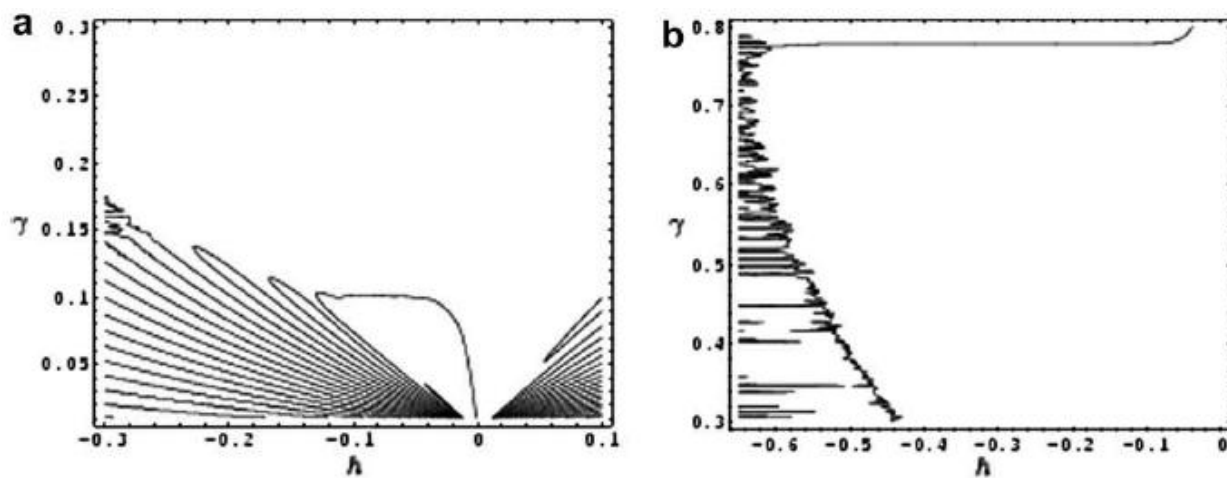
بنابراین به کمک شرط تحمیل شونده $u(1) = 1$ رابطه زیر حاصل می شود

$$u(1) \approx U_M(1, \gamma, \hbar) = 1 \quad (3.81)$$

مطابق با معادله بالا γ به عنوان تابعی از پارامتر کنترل کننده همگرایی $\hbar$ در شکل ۳-۲۷ برای $M = 60$ و $\varphi = 0.7$ رسم شده است. همانطور که مشاهده می نمائیم دو خط راست افقی در شکل دیده می شود یکی برای $\gamma = 0.207$ در بازه $[-0.25, -0.08]$ و دیگری $\gamma = 0.654$ در بازه $[-0.5, -0.1]$. بنابراین ما نتیجه می گیریم که PHAM دو جواب برای مساله می دهد که کاملاً با نتایج دقیق در شکل ۳-۲۶ همخوانی دارد (A,B). مشابهاً این کار را برای $M = 60$ و $\varphi = 0.6$ در شکل ۳-۲۸ انجام داده ایم. همانطور که مشاهده می نمائیم دو خط راست افقی در شکل دیده می شود یکی برای $\gamma = 0.101$ در بازه $[-0.1, -0.03]$ و دیگری $\gamma = 0.779$ در بازه $[-0.6, -0.1]$. بنابراین بار دیگر ما نتیجه می گیریم که PHAM دو جواب برای مساله می دهد که کاملاً با نتایج دقیق در شکل ۳-۲۶ همخوانی دارد (نقاط (C,D)).



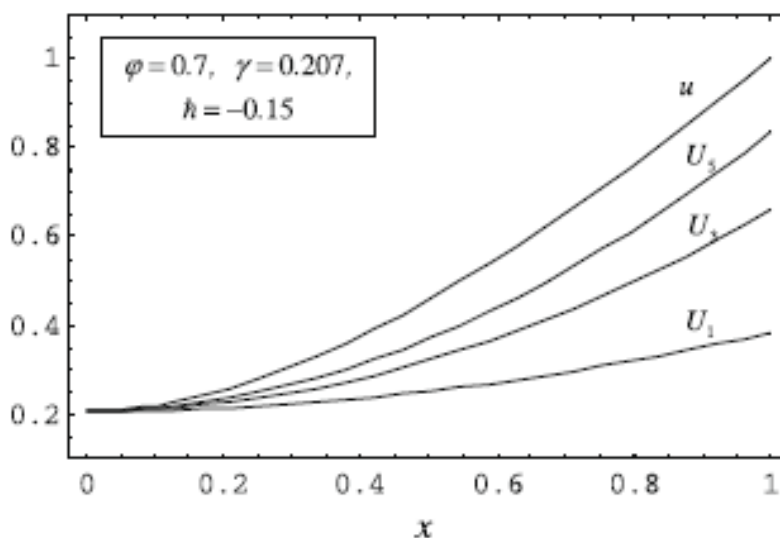
شکل ۳-۲۷: رسم تابع γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۸۱) برای $M = 60$ و $\varphi = 0.7$.



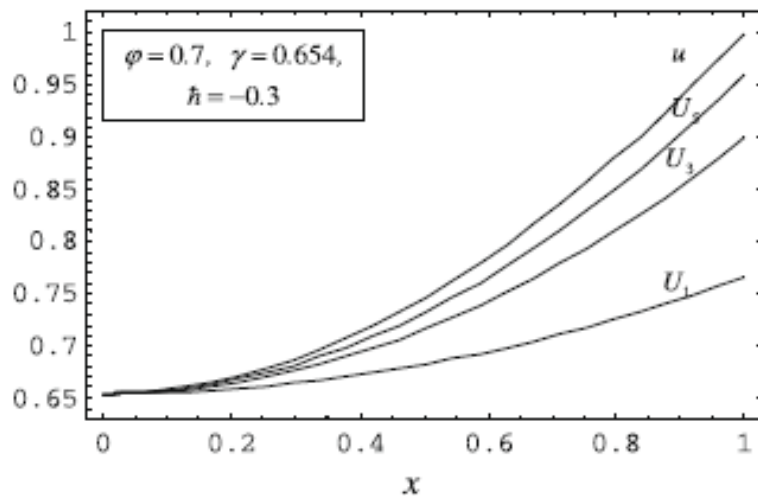
شکل ۳-۲۸: رسم تابع γ بر حسب $\hbar$ بصورت ضمنی بر طبق (۳,۸۱) برای $M = 60$ و $\varphi = 0.6$.

اینک به محاسبه تقریبی این جوابهای دوگانه می پردازیم و آنها را با جوابهای دقیق، همانطوریکه در شکل ۳-۲۶ با نقاط (A,B) و (C,D) مشخص است، مقایسه می کنیم. تاکید می کنیم که هر دو جواب شاخه پایینی و شاخه

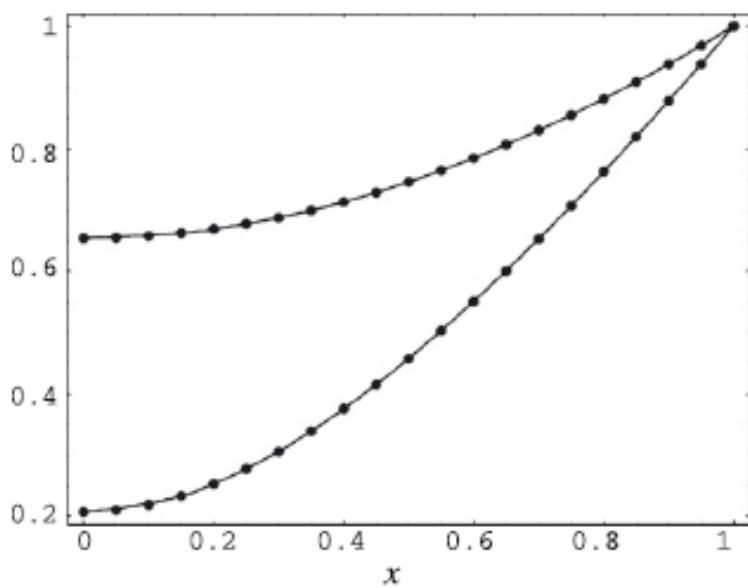
بالایی بصورت همزمان تنها با استفاده از سری $(3, 80)$ با قرار دادن زوج مشخص $(\gamma, \hbar)$ با هر دقتی بدست می آیند. در شکل ۲۹-۳ متناظر با $\gamma = 0.207$ و $\hbar = -0.15$ جوابهای تقریبی $U_1(x, 0.207, -0.15)$ ، $U_3(x, 0.207, -0.15)$ و $U_5(x, 0.207, -0.15)$ با جواب دقیق شاخه پایینی $u(x)$ متناظر با $\gamma = 0.207758$ مقایسه شده است (نقطه A در شکل ۲۶-۳). در یک عمل مشابه، در شکل ۳۰-۳ متناظر با $\gamma = 0.654$ و $\hbar = -0.3$ جوابهای تقریبی $U_1(x, 0.654, -0.3)$ ، $U_3(x, 0.654, -0.3)$ و $U_5(x, 0.654, -0.3)$ با جواب دقیق شاخه بالایی $u(x)$ متناظر با $\gamma = 0.654146$ مقایسه شده است (نقطه B در شکل ۲۶-۳). در شکل ۳۱-۳ نیز جوابهای تقریبی دوگانه $U_{30}(x, 0.207, -0.15)$ و $U_{30}(x, 0.654, -0.3)$ با جوابهای دقیق دوگانه مقایسه شده اند (نقاط (A,B) در شکل ۲۶-۳) همانطور که قابل مشاهده است تا این مرتبه از تقریب جوابها با مقیاس این شکل غیر قابل تمییز هستند. همچنین در یک عمل مشابه در شکل ۳۲-۳ جوابهای تقریبی دوگانه $U_{30}(x, 0.101, -0.08)$ و $U_{30}(x, 0.779, -0.35)$ با جوابهای دقیق دوگانه مقایسه شده اند (نقاط (C,D) در شکل ۲۶-۳).



شکل ۲۹-۳: مقایسه جوابهای تقریبی شاخه پایینی $U_1(x)$ ، $U_3(x)$ و $U_5(x)$ با دقیق.

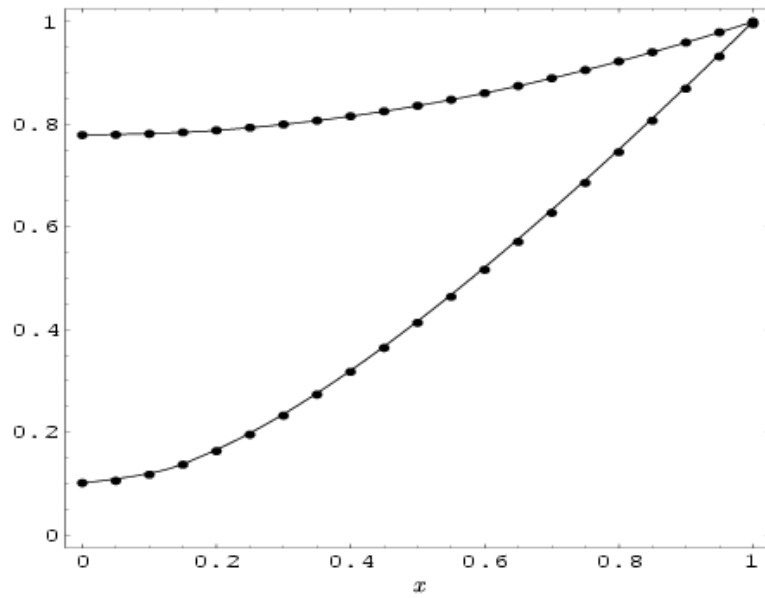


شکل ۳-۳۰: مقایسه جوابهای تقریبی شاخه بالایی $U_1(x)$ ، $U_3(x)$ و $U_5(x)$ با دقیق



شکل ۳-۳۱: مقایسه جواب دوگانه تقریبی (نقاط گرد تیره) از مرتبه $M = 30$ با جواب دوگانه دقیق (خط تیره) متناظر با نقاط (A,B) در

شکل ۳-۲۶.



شکل ۳-۳۲: مقایسه جواب دوگانه تقریبی (نقاط گرد تیره) از مرتبه $M = 30$ با جواب دوگانه دقیق (خط تیره) متناظر با نقاط (C,D) در

شکل ۳-۲۶

فصل چهارم

جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی

غیر خطی از نوع معمولی با شرایط

مرزی در بی نهایت

در این فصل قصد داریم با بررسی یک مساله مقدار مرزی غیر خطی ناشی از جریان تبادل حرارت مخلوط در ماده متخلخل که دارای شرایط مرزی در بی نهایت می باشد به چگونگی پی بردن به جواب های چندگانه و تقریب آنها بپردازیم. برای این منظور از روش شبه طیفی - هم محلی با پایه های چبیشف بهره خواهیم برد. با این حال همانطور که خواهیم دید بر خلاف روش فصل قبل برای مسائل مقدار مرزی با شرایط متناهی، توسیع این روش برای سایر معادلات غیر خطی با شرایط بی نهایت ممکن است بسی پیچیده باشد. اساسی ترین گام ها در این روش استفاده از یک تابع یکنوا جهت انتقال بازه نیمه متناهی به یک بازه متناهی و همچنین استفاده از حدس های آغازی مناسب جهت بکار گیری از روش نیوتن برای حل دستگاههای غیر خطی می باشد.

۴-۱ مقدمه ای بر روش شبه طیفی - هم محلی

معادلات برخاسته از مسائل فیزیکی گاهی چنان پیچیده هستند که نمی توان یک جواب تحلیلی برای آنها به دست آورد. بدین منظور برای حل چنین معادلاتی لازم است توسط روشهای خاصی تقریب مناسبی از جوابها را محاسبه نمود. روشهای مختلفی از جمله عناصر متناهی، تفاضلات متناهی و روشهای طیفی از جمله روشهای هستند که برای این منظور در نظر گرفته شده اند. می توان گفت ساده ترین و قدیمی ترین آنها روش تفاضلات متناهی است که در آن با استفاده از بسط تیلور تقریب هایی برای تابع و مشتقات آن در نظر گرفته و در نهایت جواب در نقاط خاصی از دامنه به دست می آید. در مقابل در روش عناصر متناهی ابتدا دامنه جواب به تعداد متناهی زیر دامنه تقسیم شده و در هر قسمت از زیر دامنه متناهی جواب بصورت یک بسط متناهی در نظر گرفته می شود. نتایج بدست آمده نشان می دهد که برای مسائلی با جوابهای به قدر کافی هموار، روش های طیفی بسیار سریعتر از روشهای عناصر متناهی و تفاضل متناهی و با دقت بالاتری به جواب واقعی همگرا می شوند [63-64].

شاید بتوان گفت روشهای طیفی یک توسعه بسیار خوب از روش های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل تحت عنوان روش های باقیمانده وزن دار^{۳۴} (MWR) می باشند [64]. در این روش دو دسته از توابع تحت عنوان توابع کوششی^{۳۵} (توابع بسط یا تقریب) و توابع آزمون^{۳۶} دارای نقش اساسی می باشند. در روشهای طیفی جواب تقریبی معادله به صورت یک سری قطع شده بر حسب توابع کوششی در نظر گرفته می شود و توابع آزمون برای اینکه جواب تقریبی به حد کافی به جواب واقعی نزدیک باشد مورد استفاده قرار می گیرند. برای رسیدن به این هدف باقیمانده حاصل از قرار دادن جواب تقریبی در معادله دیفرانسیل را باید با استفاده از خواص تعامد توابع آزمون و کوششی به حداقل رساند. وجه تمایز روشهای طیفی در انتخاب توابع کوششی می باشد که بی نهایت بار مشتق پذیر هستند. اکثراً چند جمله ایها و بخصوص چند جمله ایهای چبیشف و لژاندر به عنوان توابع کوششی به کار گرفته می شوند. شرح کاملی از این روشها در مراجع [63-68] آمده است.

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u(x)] = f(x), & x \in \Omega \\ \mathcal{B}[u(x)] = g & x \in \partial\Omega, \quad g \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.1)$$

که در آن $\mathcal{L}$ عملگر دیفرانسیل و $\mathcal{B}$ عملگری است که شرایط مرزی معادله را در بر دارد و بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم $\Omega = (-1,1)$ باشد.

$P_N^{\mathcal{B}}([-1,1])$ را فضای همه چند جمله یهای از درجه کمتر یا مساوی N و زیر فضای $P_N^{\mathcal{B}}([-1,1])$ از فضای $P_N([-1,1])$ که شرایط مرزی اعمال شده است، در نظر می گیریم. در روش طیفی جواب دقیق $u(x)$ مساله $(4,1)$ با $u_N(x)$ که بصورت مجموع متناهی زیر است، تقریب زده می شود.

³⁴ Method of weighted Residuals

³⁵ Trial function

³⁶ Test function

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{i=0}^N \hat{u}_i \varphi_i(x) \quad (4.2)$$

توابع کوششی $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^N$ را اکثراً پایه ای متعامد مانند چند جمله ایهای چبیشف و یا چند جمله ایهای لژاندر از فضای چند جمله ایهای $P_N([-1,1])$ در نظر می گیریم و ضرایب $\hat{u}_i$ ها باید تعیین گردند. با جایگذاری $u_N(x)$ در رابطه (۴,۱) باقیمانده زیر حاصل می گردد.

$$\mathcal{R}_N(x) = \mathcal{L}[u_N(x)] - f(x) \quad (4.3)$$

ایده روش در این است که تابع باقیمانده باید در شرایط زیر صدق کند

$$(\mathcal{R}_N, \psi_j)_\omega = \int_{-1}^1 \omega(x) \mathcal{R}_N(x) \psi_j(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq N \quad (4.4)$$

که در آن $\omega(x)$ تابع وزن و $\psi_j(x)$ توابع تست هستند. واضح است که رابطه (۴,۴) دارای $N + 1$ معادله و $N + 1$ مجهول می باشند. نحوه انتخاب توابع تست منجر به تقسیم شدن روش طیفی به روشهایی از جمله گالرکین، تاو و هم محلی می شود. در روش هم محلی (یا روش شبه طیفی [64-69]) $N + 1$ نقطه گره ای از Ω انتخاب می شود و توابع آزمون توابع انتقال یافته دیراک $\delta(x - x_j)$ و $\omega(x) = 1$ هستند. ما نقاط گره ای را همانطور که متعاقباً خواهد آمد نقاط چبیشف گاوس-لوباتو و توابع کوششی را توابع چبیشف نوع اول $T_k(x)$ می گیریم و روش را روش شبه طیفی - هم محلی گوئیم. با انتخاب این نقاط گره ای رابطه (۴,۴) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[u_N(x_k)] = f(x_k), & 1 \leq k \leq N - 1 \\ \mathcal{B}u_N(x_k) = g(x_k) & k = 0, N \end{cases} \quad (4.5)$$

از این رو در روش شبه طیفی - هم محلی دو گام اساسی در محاسبه جواب تقریبی $u_N(x)$ برای جواب دقیق $u(x)$ وجود دارد.

۱. یک نمایش متناهی مناسب برای جواب بر اساس مقایر تابع در نقاط گره ای در نظر گرفته می شود که

این جواب ممکن است یا بصورت تابع درونیاب $u(x)$ در نقاط x_j ، $0 \leq j \leq N$ و یا بصورت نمایش

سری متناهی زیر باشد

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(x) \quad (4.6)$$

۲. به دست آوردن معادلاتی برای محاسبه $u_N(x_j)$ یا ضرایب a_i با استفاده از معادله اصلی.

فرض کنید $N + 1$ نقطه مجزای

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_N \quad (4.7)$$

داده شده باشند. همچنین $L_j(x)$ ، $0 \leq j \leq N$ نیز چندجمله ایهای لاگرانژ وابسته به این نقاط به فرم زیر

می باشند

$$L_j(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^N (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq j}^N (x_j - x_i)} \quad (4.8)$$

ماتریس مشتق وابسته به نقاط $\{x_j\}_{j=0}^N$ ماتریسی $(N + 1) \times (N + 1)$ می باشد که درایه های آن از

رابطه زیر بدست می آید.

$$D_{kj} = L'_j(x_k) \quad (4.9)$$

در واقع ستون j ام ماتریس مشتق از محاسبه مشتق چندجمله ای لاگرانژ $L_j(x)$ در نقاط $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$

بدست می آید.

همانطور که قبلاً نیز بیان شد. ما برای گسسته کردن بازه $[-1, 1]$ از نقاط چبیشف-گوس-لوباتو^{۳۷} بصورت زیر

استفاده می کنیم

³⁷ Chebyshev-Gauss-Lobatto

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.10)$$

قضیه ۴-۱

اگر $\{x_i\}_{i=0}^N$ نقاط چبیشف-گاوس-لوباتو باشند آنگاه درایه های ماتریس مشتق چبیشف از روابط زیر بدست می آیند

$$D_{kj} = \frac{c_k}{2c_j} \frac{(-1)^{j+k}}{\sin\left[(k+j)\frac{\pi}{2N}\right] \cdot \sin\left[(k-j)\frac{\pi}{2N}\right]} \quad k \neq j$$

$$D_{kk} = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right) \cdot \left(1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right) \quad k \neq 0, N \quad (4.11)$$

$$D_{00} = -D_{NN} = \frac{2N^2+1}{6}$$

که در آن c_i ها بصورت زیر تعریف می شوند

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0, N \\ 1 & 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (4.12)$$

اثبات:

مرجع [70] را ببینید.

برای مثال ماتریس مشتق چبیشف برای $N = 1, 2, 3$ در زیر بدست آمده است

$$N = 1, \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = 2, \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$N = 3, \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{19}{6} & -4 & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & 4 & -\frac{19}{6} \end{bmatrix}$$

برای ماتریسهای مشتق مرتبه بالا نیز قضیه زیر برقرار است

قضیه ۴-۲:

اگر D ماتریس مشتق چبیشف باشد و $D^{(m)}$, $m > 1$ ماتریس مشتق مرتبه m چبیشف باشد آنگاه

$$D^{(m)} = \underbrace{D \cdot D \cdot \dots \cdot D}_m = D^m$$

اثبات:

مرجع [70] را ببینید.

چند جمله ایهای چبیشف از آن دسته چند جمله ایهای متعامد بسیار مهم در بازه $[-1, 1]$ روی محور اعداد حقیقی می باشند [71]. این چندجمله ایها بخاطر داشتن ویژگیهای بسیار خوب در تقریب توابع، اغلب در بسیاری از زمینه های فیزیک، ریاضی و مهندسی ظاهر می شوند. روش های شبه طیفی بر پایه چند جمله ایهای چبیشف [72] برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مورد استفاده زیادی قرار گرفته است [73-79].

قضیه ۴-۳:

در حالتی که $\{T_k\}_{k=0}^N$ چندجمله ایهای چبیشف و $x_0, x_1, x_2, \dots, x_N$ نقاط چبیشف-گوس-لوباتو باشند. نمایش تابع $q(x)$ بر حسب $\{T_k\}_{k=0}^N$ بصورت زیر می باشد:

$$q(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) \quad (4.13)$$

که در رابطه بالا a_k ، $k = 0, 1, 2, \dots, N$ از رابطه زیر بدست می آیند.

$$a_k = \frac{2}{Nc_k} \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} q(x_j) \cos\left(\frac{\pi jk}{N}\right) \quad (4.14)$$

که C_k ها از رابطه (۴،۱۲) بدست می آیند.

اثبات:

مرجع [71] را ببینید.

۴-۲ مدل جریان تبادل حرارت

مساله مقدار مرزی غیر خطی ناشی از جریان تبادل حرارت مخلوط در ماده متخلخل که دارای شرایط مرزی در بی نهایت می باشد، بعد از عملیات ساده سازی بصورت زیر در می آید [80-81]

$$2f'''(\eta) + f'(\eta) - (f'(\eta))^2 = 0 \quad (4.15)$$

و نیز شرایط مرزی برای معادله بالا عبارتند از

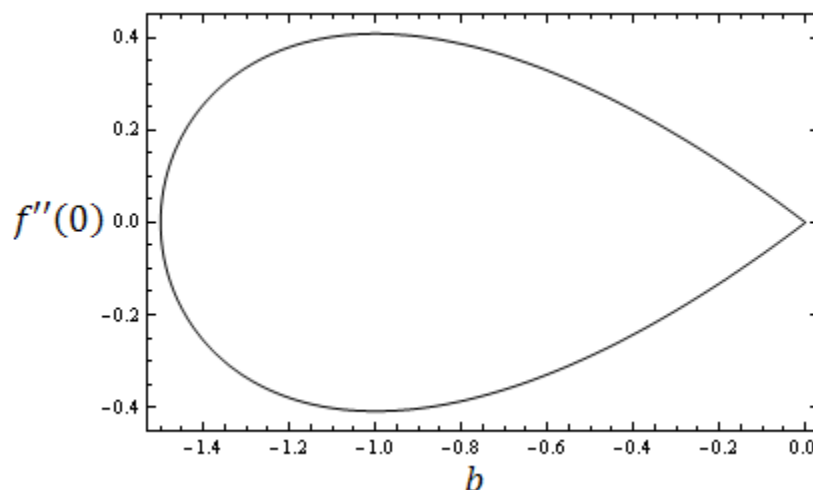
$$f(0) = 0, f'(0) = 1 + b, f'(+\infty) = 1 \quad (4.16)$$

همانطوریکه در مرجع [80] نشان داده شده است جواب دقیق برای تابع $f'(\eta)$ برای هر $b \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$

دوتایی می باشد که توسط رابطه زیر داده می شود

$$f'(\eta) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \tanh^2 \left[\frac{\eta}{2\sqrt{2}} \pm \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3+2b}}{\sqrt{3} - \sqrt{3+2b}} \right) \right] \quad (4.17)$$

در شکل ۴-۱ رابطه بین $f''(0)$ و پارامتر ثابت b داده شده است که مطلب بالا را تأیید می کند.



شکل ۴-۱: رسم $f''(0)$ بر حسب b بر طبق (۲،۱۷).

۴-۳ فرایند بدست آوردن جوابهای چندگانه

در این قسمت سعی می کنیم به تقریب بسیار خوبی از جوابهای (۴،۱۷) برای $f'(\eta)$ برسیم. برای رسیدن به این هدف روشی را دنبال می کنیم که بر اساس روش شبه طیفی- هم محلی با پایه های چبیشف با نقاط چبیشف-گوس-لوباتو می باشد [82]. در آغاز فرض می کنیم $u = f'$ و معادلات (۴،۱۶)-(۴،۱۵) بصورت زیر در می آید.

$$2u'' + u - u^2 = 0 \quad (4.18)$$

$$u(0) = 1 + b, \quad u(+\infty) = 1 \quad (4.19)$$

بوسیله تعویض متغیر

$$\mu = \frac{\eta-1}{\eta+1} \quad (4.20)$$

بدست می آوریم

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{1}{2}(1-\mu)^2 \frac{du}{d\mu} \quad (4.21)$$

$$\frac{d^2u}{d\eta^2} = \frac{1}{4}(1-\mu)^4 \frac{d^2u}{d\mu^2} - \frac{1}{2}(1-\mu)^3 \frac{du}{d\mu} \quad (4.22)$$

آنگاه معادلات (۴،۱۸)-(۴،۱۹) به معادلات زیر تبدیل می شوند که شرایط مرزی در دامنه جواب متناهی $[-1,1]$ می باشد.

$$\frac{1}{2}(1-\mu)^4 u'' - (1-\mu)^3 u' + u - u^2 = 0 \quad (4.23)$$

$$u(-1) = 1 + b, \quad u(1) = 1 \quad (4.24)$$

تاکید می کنیم که با تعویض متغیر (۲،۲۰) وقتی η از صفر تا بی نهایت را بصورت پیوسته طی می کند، متغیر μ نیز ۱- تا ۱ را بصورت پیوسته می پیماید. حال روش شبه طیفی- هم محلی را روی مساله (۴،۲۳)-(۴،۲۴) بکار می گیریم. نقاط چبیشف-گوس-لوباتو را برای گسسته کردن بازه $[-1,1]$ بصورت زیر در نظر می گیریم

$$\mu_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

تابع مجهول $u(\mu)$ را بصورت سری متناهی از توابع چبیشف همانند زیر در نظر می گیریم.

$$u(\mu) = \sum_{k=0}^N \hat{u}_k T_k(\mu) \quad (4.26)$$

که در آن $\hat{u}_k$ از رابطه زیر بدست می آید

$$\hat{u}_k = \frac{2}{Nc_k} \sum_{i=0}^N \frac{1}{c_i} u(\mu_i) \cos\left(\frac{\pi i k}{N}\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.27)$$

با مقادیر زیر برای c_k

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0, N \\ 1 & 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (4.28)$$

بر طبق روش شبه طیفی - هم محلی مشتقات تابع $u(\mu)$ در نقاط هم محلی بصورت زیر داده می شود

$$\frac{du}{d\mu}(\mu_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij} u(\mu_j) \quad (4.29)$$

$$\frac{d^2 u}{d\mu^2}(\mu_i) = \sum_{j=0}^N D_{ij}^2 u(\mu_j) \quad (4.30)$$

که در آن درایه های ماتریس D از رابطه (۴,۱۱) داده می شود.

با جایگذاری (۴,۲۹) و (۴,۳۰) در (۴,۲۴)-(۴,۲۳) دستگاه غیر خطی زیر حاصل می گردد

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1 - \mu_i)^4 \sum_{j=0}^N D_{ij}^2 u(\mu_j) - \\ & (1 - \mu_i)^3 \sum_{j=0}^N D_{ij} u(\mu_j) + u(\mu_i) - (u(\mu_i))^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$u(\mu_0) = 1, \quad u(\mu_N) = 1 + b \quad (4.32)$$

دستگاه بالا در حقیقت یک دستگاه غیر خطی با $N-1$ معادله و $N-1$

مجهول $u(\mu_1), u(\mu_2), \dots, u(\mu_{N-1})$ می باشد که در حالت کلی با استفاده از روشهای عددی چون نیوتن

حل می شود.

تاکید این مطلب ضروری می رسد که حل دستگاه غیر خطی حتی با استفاده از روش نیوتن می تواند بسیار پیچیده باشد. مشکل اساسی به انتخاب حدس آغازی می گردد که بوسیله آن تکرارهای روش نیوتن آغاز می گردد به عبارت دیگر مشکل اصلی چندگانگی جوابهای این دستگاه و محل تقریبی آنها می باشد. ما فکر می کنیم که بهترین روش برای انتخاب حدس آغازی (یا حدس های آغازی) حل دستگاه بصورت دقیق برای مقادیر N خیلی کوچک می باشد و سپس با انتخاب حدسهای آغازی مناسب برای حل عددی دستگاه می توان به بدست آوردن جوابها با دقت مناسب پرداخت. برای مثال در $(۴,۳۱)$ فرض کنید $b = -1$ و $N = 3$ آنگاه با داشتن $u(\mu_0) = 1$ و $u(\mu_3) = 0$ مجبور به حل دستگاه زیر هستیم

$$\begin{cases} -[u(\mu_1)]^2 + \frac{7}{8}u(\mu_1) + \frac{5}{24}u(\mu_2) - \frac{1}{48} = 0 \\ -[u(\mu_2)]^2 - \frac{109}{8}u(\mu_2) + \frac{27}{8}u(\mu_1) - \frac{9}{16} = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

دستگاه بالا تنها دوجواب حقیقی مقدار بصورت زیر می پذیرد

$$u(\mu_1) = 0.893108; \quad u(\mu_2) = 0.177629 \quad (4.34)$$

و

$$u(\mu_1) = 0.032956; \quad u(\mu_2) = -0.0332019 \quad (4.35)$$

که در آنها

$$\mu_0 = 1, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = -0.5, \mu_3 = -1 \quad (4.36)$$

حال با بکارگیری $(۴,۲۶)$ و استفاده از تعویض متغیر $(۴,۲۰)$ دو جواب زیر که تقریب هایی ضعیف برای جوابهای دقیق هستند، بدست می آیند.

$$u(\eta) = C(\eta)[(C(\eta) - 2)(0.578456(C(\eta) - 0.5) + 0.377603) + 0.5] \quad (4.37)$$

$$u(\eta) = C(\eta)[(C(\eta) - 2)(0.0964953 - 0.287306(C(\eta) - 0.5)) + 0.5] \quad (4.38)$$

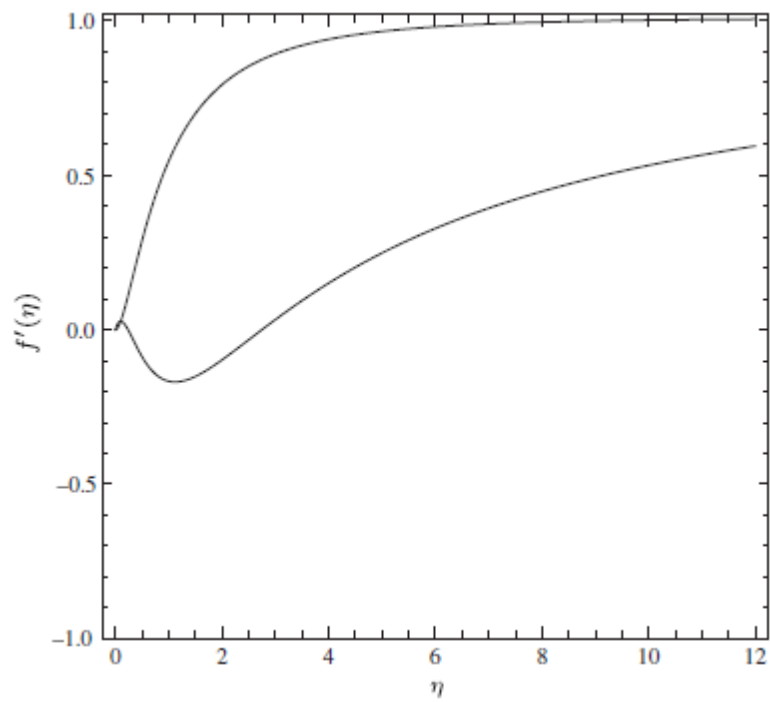
که در آنها

$$C(\eta) = \left(\frac{\eta-1}{\eta+1} + 1\right)$$

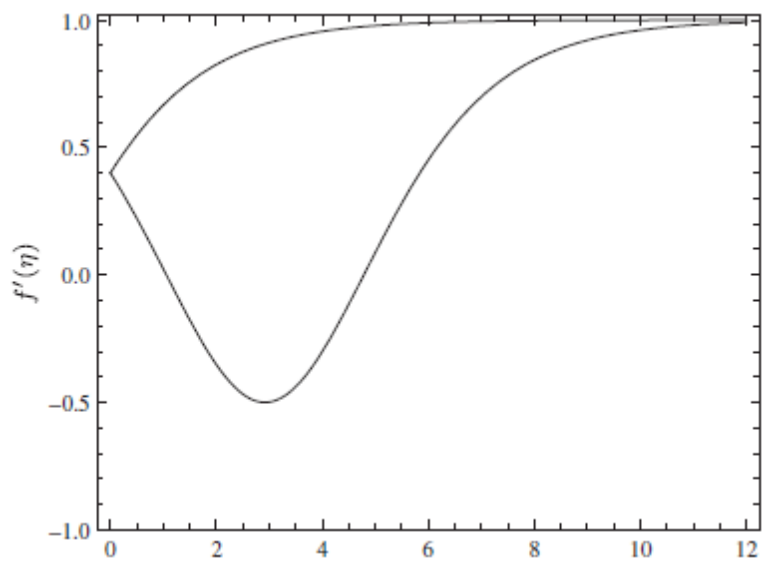
در شکل ۴-۲ ان جوابهای تقریبی رسم شده اند. حال ما با جوابهای تقریبی آشنا هستیم بنابراین می توانیم با انتخاب حدس های آغازی مناسب روش نیوتن را برای حل دستگاه غیر خطی (۴,۳۲)-(۴,۳۱) برای مقادیر بزرگ N بکار ببریم و جوابهای با دقت بالا بدست بیاوریم. این عمل در شکل های ۴-۳، ۴-۴ و ۴-۵ به ترتیب برای مقادیر $b = -0.6$ ، $b = -1$ و $b = -1.4$ انجام شده است و تعداد تکرار ها ماکزیمم ده و تعداد نقاط هم محلی نیز $N = 30$ در نظر گرفته شده است. همچنین برای پی بردن به دقت این جوابها با استفاده از جوابهای دقیق که در (۴,۱۷) بدست آمده، خطای مطلق جوابهای دوگانه تقریبی یعنی

$$|f'_{approx}(\eta) - f'_{exact}(\eta)| \quad (4.39)$$

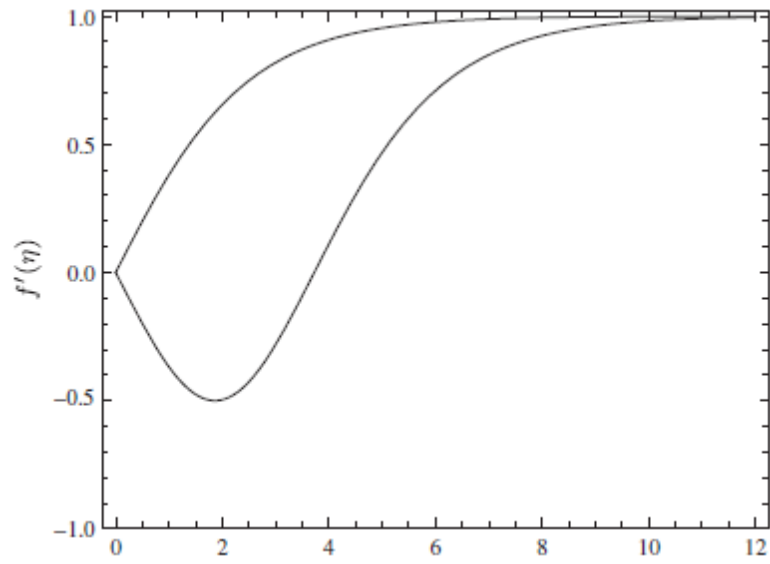
در شکل های ۴-۶، ۴-۷ و ۴-۸ به ترتیب برای مقادیر $b = -0.6$ ، $b = -1$ و $b = -1.4$ رسم شده است. همچنین متناظر با هر کدام از این شکل ها جدول های ۴-۱، ۴-۲ و ۴-۳ مقادیر دقیق خطا را نمایش می دهند.



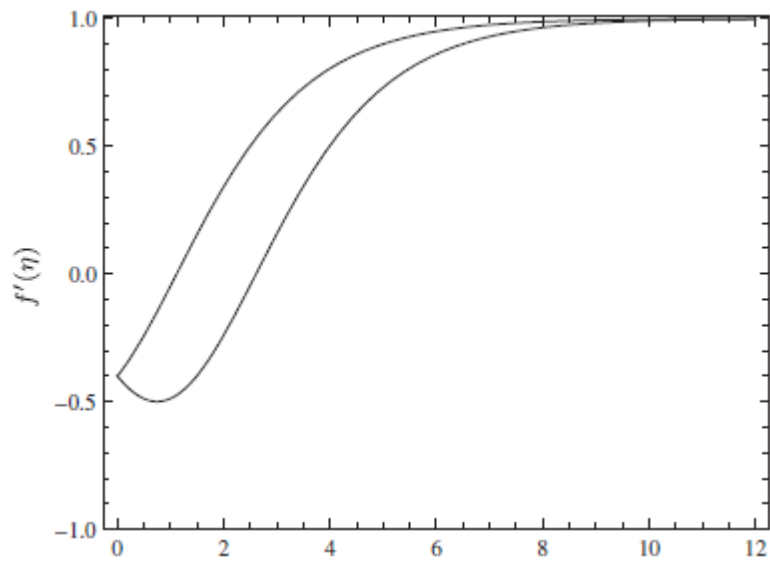
شکل ۴-۲: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ بر طبق $(4,37) - (4,38)$.



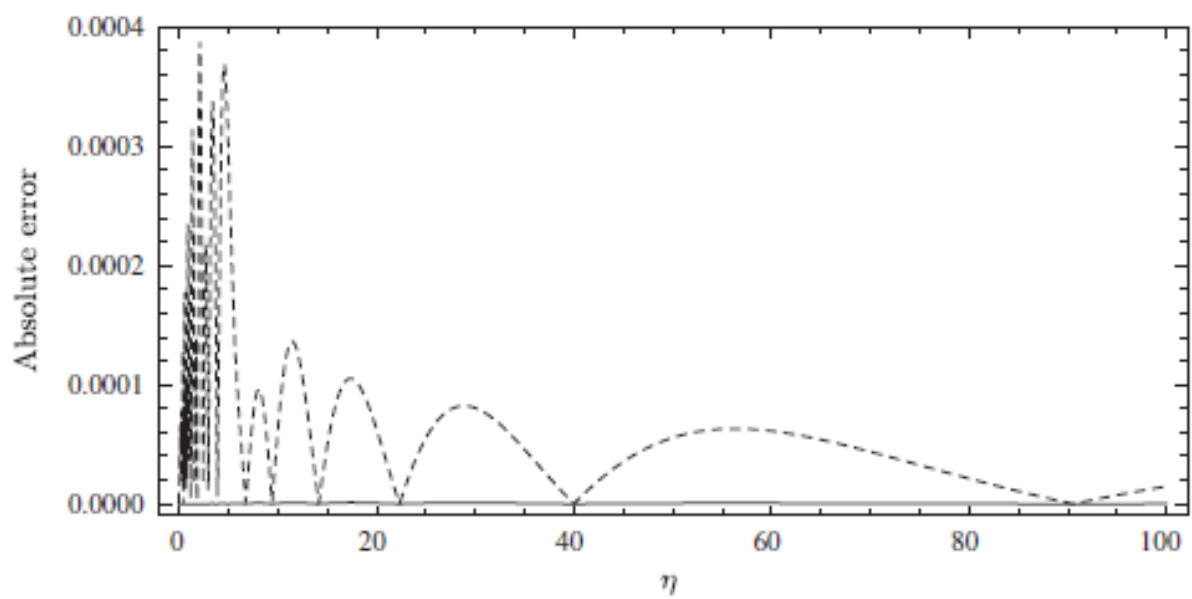
شکل ۴-۳: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -0.6$ با $N = 30$.



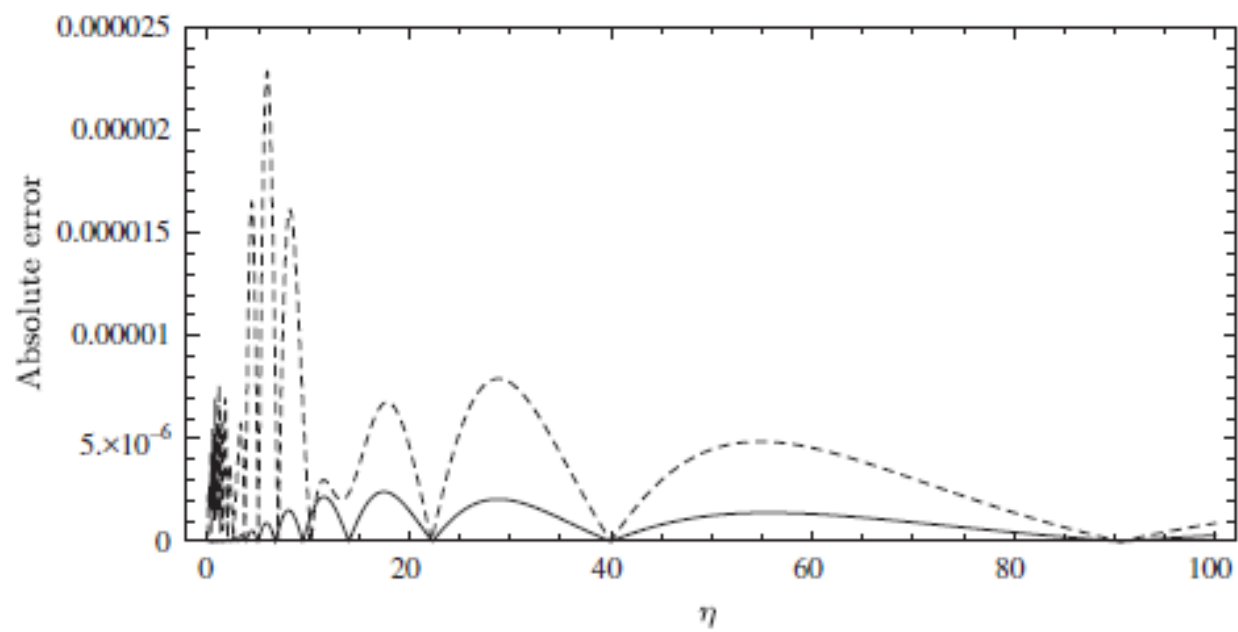
شکل ۴-۴: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ با $N = 30$.



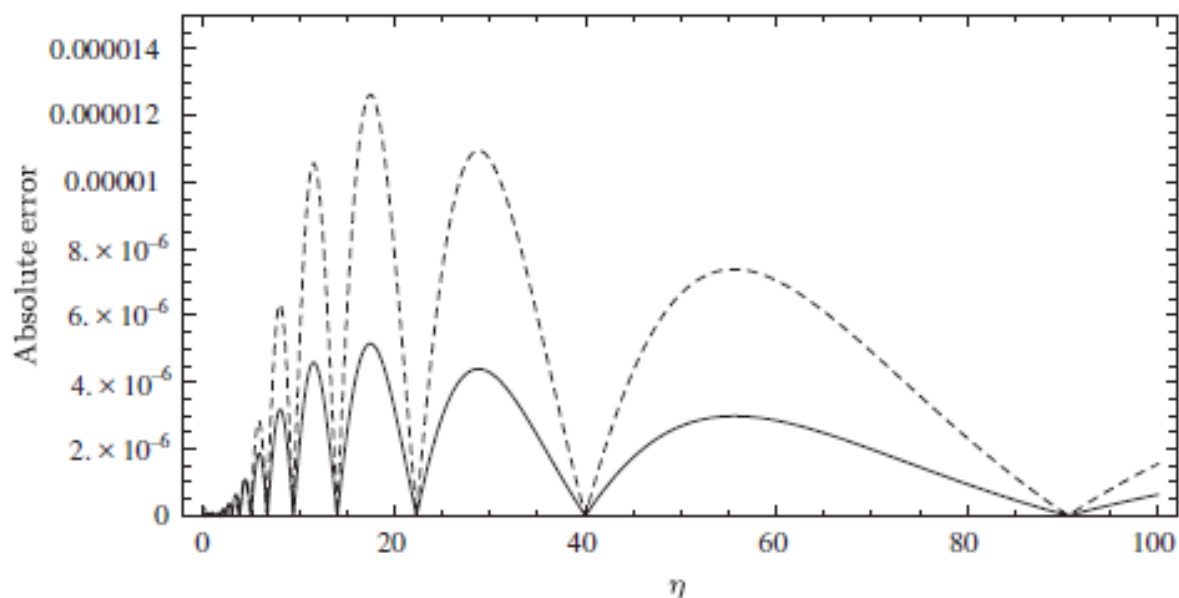
شکل ۴-۵: جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1.4$ با $N = 30$.



شکل ۴-۶: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -0.6$ با $N = 30$.



شکل ۴-۷: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1$ با $N = 30$.



شکل ۴-۸: خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ برای $b = -1.4$ با $N = 30$.

جدول ۴-۱: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ با $b = -0.6$ با $N = 30$ برای مقادیر مختلف η .

η	Error of first branch	Error of second branch	η	Error of first branch	Error of second branch
0	2.48783×10^{-8}	1.14207×10^{-6}	60	6.3993×10^{-7}	6.11914×10^{-5}
0.2	1.22941×10^{-11}	2.31306×10^{-5}	80	2.12081×10^{-7}	2.13056×10^{-5}
0.4	1.21317×10^{-8}	1.00092×10^{-4}	100	1.41905×10^{-7}	1.47388×10^{-5}
0.6	1.69402×10^{-8}	1.76504×10^{-5}	200	2.87797×10^{-7}	3.19593×10^{-5}
0.8	6.37131×10^{-9}	2.86262×10^{-5}	400	3.21207×10^{-8}	3.69356×10^{-6}
1	3.90913×10^{-9}	7.10258×10^{-5}	600	1.15855×10^{-7}	1.34794×10^{-5}
2	3.46488×10^{-8}	2.95901×10^{-5}	800	1.33309×10^{-7}	1.56017×10^{-5}
4	1.33062×10^{-7}	9.70047×10^{-5}	1000	1.32146×10^{-7}	1.55204×10^{-5}
6	4.11641×10^{-7}	8.53636×10^{-5}	2000	9.55797×10^{-8}	1.13056×10^{-5}
8	7.29884×10^{-7}	9.55476×10^{-5}	4000	5.62575×10^{-8}	6.67804×10^{-6}
10	4.50457×10^{-7}	6.05577×10^{-5}	6000	3.95022×10^{-8}	4.69466×10^{-6}
20	7.15494×10^{-7}	6.29627×10^{-5}	8000	3.03923×10^{-8}	3.61413×10^{-6}
40	5.97397×10^{-10}	2.19226×10^{-7}	10,000	2.46857×10^{-8}	2.93657×10^{-6}

جدول ۴-۲: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ با $b = -1$ با $N = 30$. برای مقادیر مختلف η

η	Error of first branch	Error of second branch	η	Error of first branch	Error of second branch
0	5.81443×10^{-10}	7.8804×10^{-7}	60	1.33451×10^{-6}	4.54617×10^{-6}
0.2	6.28075×10^{-10}	1.34397×10^{-7}	80	4.42153×10^{-7}	1.40202×10^{-6}
0.4	2.25942×10^{-8}	2.85907×10^{-6}	100	2.95792×10^{-7}	8.87674×10^{-7}
0.6	3.07356×10^{-8}	5.11548×10^{-6}	200	5.9965×10^{-7}	1.58092×10^{-6}
0.8	1.23594×10^{-8}	2.17614×10^{-6}	400	6.69116×10^{-8}	1.62889×10^{-7}
1	7.76342×10^{-9}	4.75643×10^{-7}	600	2.41322×10^{-7}	5.70642×10^{-7}
2	7.59453×10^{-8}	1.32949×10^{-6}	800	2.77668×10^{-7}	6.46772×10^{-7}
4	2.76404×10^{-7}	1.05565×10^{-5}	1000	2.75239×10^{-7}	6.35239×10^{-7}
6	8.54071×10^{-7}	2.24473×10^{-5}	2000	1.99068×10^{-7}	4.50879×10^{-7}
8	1.51438×10^{-6}	1.58856×10^{-5}	4000	1.17168×10^{-7}	2.62841×10^{-7}
10	9.37897×10^{-7}	1.67834×10^{-6}	6000	8.22706×10^{-8}	1.83961×10^{-7}
20	1.49243×10^{-6}	4.61258×10^{-6}	8000	6.32974×10^{-8}	1.41306×10^{-7}
40	1.22754×10^{-9}	8.6565×10^{-9}	10,000	5.14123×10^{-8}	1.14662×10^{-7}

جدول ۴-۳: محاسبه خطای مطلق جوابهای تقریبی $u(\eta) = f'(\eta)$ با $b = -1.4$ با $N = 30$. برای مقادیر مختلف η

η	Error of first branch	Error of second branch	η	Error of first branch	Error of second branch
0	7.25763×10^{-8}	6.29726×10^{-7}	60	2.8531×10^{-6}	7.05473×10^{-6}
0.2	4.91646×10^{-10}	2.24812×10^{-9}	80	9.44667×10^{-7}	2.32792×10^{-6}
0.4	3.7369×10^{-8}	5.81157×10^{-8}	100	6.31668×10^{-7}	1.55279×10^{-6}
0.6	4.70048×10^{-8}	9.03898×10^{-8}	200	1.2793×10^{-6}	3.12829×10^{-6}
0.8	2.35434×10^{-8}	1.18395×10^{-8}	400	1.42673×10^{-7}	3.47863×10^{-7}
1	1.34314×10^{-8}	2.53955×10^{-8}	600	5.14467×10^{-7}	1.2531×10^{-6}
2	1.71527×10^{-7}	2.10928×10^{-8}	800	5.91895×10^{-7}	1.44095×10^{-6}
4	5.7412×10^{-7}	7.05288×10^{-7}	1000	5.86684×10^{-7}	1.42783×10^{-6}
6	1.7782×10^{-6}	2.59616×10^{-6}	2000	4.24275×10^{-7}	1.03193×10^{-6}
8	3.17955×10^{-6}	3.17955×10^{-6}	4000	2.49705×10^{-7}	6.07146×10^{-7}
10	1.99634×10^{-6}	4.79355×10^{-6}	6000	1.7533×10^{-7}	4.26262×10^{-7}
20	3.19112×10^{-6}	7.84689×10^{-6}	8000	1.34894×10^{-7}	3.27937×10^{-7}
40	2.53479×10^{-9}	5.31119×10^{-9}	10,000	1.09565×10^{-7}	2.66352×10^{-7}

فصل پنجم

نتیجه گیری و پیشنهادات

روشهای تقریبی- تحلیلی یا روشهای عددی صرفاً برای بدست آوردن جواب موجود مورد نظر بصورت تقریبی مورد استفاده قرار می گیرند و قادر به پیش بینی جوابهای چندگانه مسائل مقدار مرزی غیر خطی نمی باشند. از طرف دیگر بررسی وجود و چندگانگی جوابهای معادلات دیفرانسیل غیر خطی اغلب با گام های ملالت آور تحلیلی محض و با دشواری انجام می شود.

بر این اساس ایدهء استفاده از روشهای عددی برای بررسی وجود و چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی در این رساله مطرح شده است. در این رساله ما روش آنالیز هموتوپیی پیشگو (PHAM) را معرفی کرده ایم که بر اساس آن می توان پی به چندگانگی جوابهای مسائل مقدار مرزی غیر خطی از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی برد. پایه اصلی این روش، روش آنالیز هموتوپیی می باشد که در دهه اخیر برای بدست آوردن جواب تقریبی - تحلیلی به صورت سری برای معادلات دیفرانسیل مطرح شده است. در این روش با استفاده از پارامتری می توان همگرایی سری جواب را کنترل و سرعت بخشید، علاوه بر این می توان برای مسائلی که شامل قسمتهای غیر خطی قوی دارند بکار برد و جوابهای تقریبی مناسبی با دقت بالا بدست آورد. روش آنالیز هموتوپیی پیشگو را می توان به آسانی روی معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی با شرایط مرزی به کار برد. این روش، همانطور که در دیده شد، علاوه بر پیش بینی چندگانگی مسائل مقدار مرزی قادر به محاسبه همزمان تقریبی- تحلیلی آنها می باشد. بر این اساس برای استفاده های کاربردی در علوم و مهندسی این روش امکان این را می دهد که جوابهای ناشناخته ای از معادلات بدست آید که اساساً مورد علاقه می باشند. با توجه به وجود نرم افزار های قوی سیمبلیک امروزه، این روش ما را متقاعد می سازد که آن را روی معادلات غیر خطی بکار ببریم و مهمتر اینکه خود را از گام های ملالت آور وجود و بررسی جواب مبراً سازیم. در روش آنالیز هموتوپیی پیشگو همانطور دیده شد دو پارامتر وجود دارد که نقش مهمی در بررسی چندگانگی جوابها دارد، یکی از آنها پارامتر کنترل کننده همگرایی و دیگری پارامتر تجویز شده به مسئله می باشد. این روش مزیت دیگری نیز دارد که تنها با یک حدس

آغازی و یک عملگر خطی و یک تابع کمکی همه شاخه های جوابهای مساله را بدست می دهد. اعتبار و قابل اتکاء بودن این روش با بررسی چندین مدل کاربردی در فصل سوم بررسی شد.

در فصل چهارم به مسائل مقدار مرزی غیر خطی که دارای شرط مرزی در بی نهایت می باشند، بصورت مختصر پرداخته شد و روشی مبتنی بر شبه طیفی - هم محلی برای یک مساله مقدار مرزی غیر خطی ناشی از جریان تبادل حرارت مخلوط در ماده متخلخل که دارای شرایط مرزی در بی نهایت می باشد بکار گرفته شده و جوابهای دوگانه آن بدست آمد.

بررسی قابل اعتبار بودن روش پیشنهادی برای مسائل با شرط بی نهایت، بررسی شده در فصل چهارم، بسی پیچیده بوده و این امکان وجود دارد که برای مسائل مشابه کارایی نداشته باشد. بنابراین جستجو و ساخت روشهای عددی دیگری که بتوان برای این قبیل مسائل بکار برد می تواند دارای اهمیت زیادی باشد. با این حال به نظر می رسد که ترکیب روشهایی مثل تیر اندازی با روش آنالیز هموتویی چاره کار باشد.

کتاب نامہ

- [۱] Liao SJ, The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems. PhD Thesis, Shanghai Jiao Tong University, 1992
- [۲] Liao SJ, Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method, Chapman Hall CRC/Press, Boca Raton, 2003.
- [۳] Hayat T, Javed T, Sajid M. Analytic solution for rotating flow and heat transfer analysis of a third-grade fluid. Acta Mech 2007; 191: 219-29.
- [۴] Hayat T, Khan M, Sajid M, Asghar S. Rotating flow of a third grade fluid in a porous space with hall current. Nonlinear Dyn 2007; 49: 83-91.
- [۵] Hayat T, Sajid M. On analytic solution for thin film flow of a forth grade fluid down a vertical cylinder. Phys Lett A 2007; 361: 316-22.
- [۶] Hayat T, Sajid M. Analytic solution for axisymmetric flow and heat transfer of a second grade fluid past a stretching sheet. Int J Heat Mass Transf 2007; 50: 75-84.
- [۷] Hayat T, Abbas Z, Sajid M, Asghar S. The influence of thermal radiation on MHD flow of a second grade fluid, Int J Heat Mass Transf 2007; 50: 931-41.
- [۸] Hayat T, Sajid M. Homotopy analysis of MHD boundary layer flow of an upper-convected Maxwell fluid. Int J Eng Sci 2007; 45: 393-401.
- [۹] Hayat T, Ahmed N, Sajid M, Asghar S, On the MHD flow of a second grade fluid in a porous channel, Comp Math Appl 2007; 54: 40-14.

- [١٠] Hayat T, Khan M, Ayub M, The effect of the slip condition on flows of an Oldroyd 6 constant fluid, J Comput Appl 2007; 202: 402-13.
- [١١] Sajid M, Siddiqui A, Hayat T, Wire coating analysis using MHD Oldroyd 8-constant fluid, Int J Eng Sci, 2007; 45: 381-92.
- [١٢] Sajid M, Hayat T, Asghar S. Non-similar analytic solution for MHD flow and heat transfer in a third-order fluid over a stretching sheet, Int J Heat Mass Transf 2007; 50: 1723-36.
- [١٣] Sajid M, Hayat T, Asghar S, Non-similar solution for the axisymmetric flow of a third-grade fluid over radially stretching sheet, Acta Mech 2007; 189: 193-205.
- [١٤] Abbasbandy S. Soliton solutions for the 5th-order KdV equation with the homotopy analysis method, Nonlinear Dyn 2008; 51: 83-7.
- [١٥] Abbasbandy S. The application of the homotopy analysis method to solve a generalized Hirota–Satsuma coupled KdV equation. Phys Lett A, 2007; 361: 478-83.
- [١٦] Song L, Zhang HQ, Application of homotopy analysis method to fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation, Phys Lett A 2007; 367: 88-94.
- [١٧] Abbasbandy S, The application of the homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, Phys Lett A, 2006; 360: 109-113.
- [١٨] Abbasbandy S, Homotopy analysis method for heat radiation equations, Int Commun Heat Mass Transf 2007; 34: 380-7.
- [١٩] Zhu SP, An exact and explicit solution for the valuation of American put options. Quantitative Finance, 2006; 6: 229-42.

- [20] Zhu SP, A closed-form analytical solution for the valuation of convertible bonds with constant dividend yield, *Anziam J* 2006; 47: 477-94.
- [21] Wu Y, Cheung KF, Explicit solution to the exact Riemann problems and application in nonlinear shallow water equations, *Int J Numer Meth Fluids* [online].
- [22] Yamashita M, Yabushita K, Tsuboi K, An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method, *J Phys A* 2007; 40: 8403-16.
- [23] Bouremel Y, Explicit series solution for the Glauert-jet problem by means of the homotopy analysis method. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2007; 12(5): 714-24.
- [24] Tao L, Song H, Chakrabarti S, Nonlinear progressive waves in water of finite depth – an analytic approximation. *Clas Eng* 2007; 54: 825-34.
- [25] Song H, Tao L, Homotopy analysis of 1D unsteady, nonlinear groundwater flow through porous media. *J Coastal Res* 2007; 50: 292-5.
- [26] Molabahrami A, Khani F, The homotopy analysis method to solve the Burgers–Huxley equation. *Nonlinear Anal B: Real World Appl* [online].
- [27] Bataineh AS, Noorani MSM, Hashim I, Solutions of time-dependent Emden–Fowler type equations by homotopy analysis method. *Phys Lett A* 2007; 371: 72-82.
- [28] Wang Z, Zou L, Zhang H, Applying homotopy analysis method for solving differential-difference equation. *Phys Lett A* 2007; 369: 77-84.
- [29] Mustafa Inc, On exact solution of Laplace equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions by the homotopy analysis method, *Phys Lett A*, 2007; 365: 412-15.

- [30] Cai WH. Nonlinear Dynamics of thermal-hydraulic networks, PhD thesis, University of Notre Dame; 2006.
- [31] Z. M. Odibat, A study on the convergence of homotopy analysis method, *Appl Math and Com*, 2010; 217: 782–789.
- [32] Zhao Niu, Chun Wang, A one-step optimal homotopy analysis method for nonlinear differential equations, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2010; 15: 2026–2036.
- [33] S. Abbasbandy, M. Pakdemirli, E. Shivanian, Optimum Path of a Flying Object with Exponentially Decaying Density Medium, *Z. Naturforsch.* 2009; 64a: 431 – 438.
- [34] C. Y. Wang, Vibration of an infinite membrane supported by an array of posts, *IMA Journal of Applied Mathematics* 2000; 64: 213-221.
- [35] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Solution of Singular Linear Vibrational BVPs by the Homotopy Analysis Method, *Journal of Numerical Mathematics and Stochastics*, 2009; 1 (1): 77-84.
- [36] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Fredholm's integral equations, *Numer Algor* 2011; 56: 27–43.
- [37] Cherruault Yves, Convergence of Adomian's method. *Kybernetes*, 1989; 18(2): 31–38.
- [38] S. Abbasbandy, E. Shivanian, A new analytical technique to solve Volterra's integral equations, *Mathematical methods in the applied sciences*, 2011; 10(34): 1243-1253.
- [39] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Series Solution of the System of Integro-Differential Equations, *Z. Naturforsch*, 2009; 64a: 811 – 818.
- [40] J. Saberi-Nadjafi, M. Tamamgar, The variational iteration method: A highly promising method for solving the system of integro-differential equations, *Comput Math Appl.* 2008; 56: 346.

- [41] S. Abbasbandy, E. Magyari, E. Shivanian, The homotopy analysis method for multiple solutions of nonlinear boundary value problems, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2009;14: 3530–3536.
- [42] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Prediction of multiplicity of solutions of nonlinear boundary value problems: Novel application of homotopy analysis method, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2010; 15: 3830–3846.
- [43] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Predictor homotopy analysis method and its application to some nonlinear problems, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2011; 16: 2456–2468.
- [44] Thomas GB, Finney RL, *Calculus and Analytic Geometry*, 9th ed. Addison Wesley; 1995.
- [45] S. Abbasbandy, E. Shivanian, K. Vajravelu, Mathematical properties of h-curve in the frame work of the homotopy analysis method *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2011; 16: 4268–4275.
- [46] E. A. Coddington, *An introduction to ordinary differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1961.
- [47] E. L. Ince, *Ordinary differential equations*, Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.
- [48] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Exact analytical solution of a nonlinear equation arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 2010; 374: 567–574.
- [49] M. S. H. Chowdhury, I. Hashim, Analytical solutions to heat transfer equations by homotopy-perturbation method revisited, *Physics Letters A*, 2008; 372: 1240–1243.
- [50] D.D. Ganji, The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 2006; 355: 337–341.

- [51] Hafez Tari, D.D. Ganji, H. Babazadeh, The application of He's variational iteration method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 2007; 363: 213–217.
- [52] S. Abbasbandy, The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 2006; 360: 109–113.
- [53] Shuicai Li, Shi-Jun Liao, An analytic approach to solve multiple solutions of a strongly nonlinear problem, *Applied Mathematics and Computation*, 2005; 169 : 854-865.
- [54] Abdul-Majid Wazwaz, Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2005; 166: 652–663.
- [55] A. Mohsen, L. F. Sedeek S. A. Mohamed, New smoother to enhance multigrid-based methods for Bratu problem, *Applied Mathematics and Computation*, 2008; 204: 325–339.
- [56] Muhammed I. Syam, Abdelrahem Hamdan, An efficient method for solving Bratu equations, *Applied Mathematics and Computation*, 2006; 176: 704–713.
- [57] Barletta A. Laminar convection in a vertical channel with viscous dissipation and buoyancy effects, *Int Commun Heat Mass Transfer*, 1999; 26: 153–64.
- [58] Barletta A, Magyari E, Keller B. Dual mixed convection flows in a vertical channel. *Int J Heat Mass Transfer* 2005; 48: 4835–45.
- [59] A.J. Ellery, M.J. Simpson, An analytical method to solve a general class of nonlinear reactive transport models, *Chemical Engineering Journal* 2011; 169: 313-318.
- [60] Y.P. Sun, S.B. Liu, K. Scott, Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by the decomposition method, *Chemical Engineering Journal* 2004; 102: 1-10.

- [61] S. Abbasbandy, Approximate solution for the nonlinear model of diffusion and reaction in porous catalysts by means of the homotopy analysis method, Chemical Engineering Journal 2008; 136: 144-150.
- [62] E. Magyari, Exact analytical solution of a nonlinear reaction-diffusion model in porous catalysts, Chemical Engineering Journal 2008; 143: 167-171.
- [63] J. P. Boyd, Chebyshev and Fourier Spectral Methods, Lectur Notes in Engineering, 49, Springer - Verlag, Berlin (1980).
- [64] C. Canuto, A. Quarteroni, M. Y. Hussaini, T. A. Zang, Spectral Method in Fluid Mechanics, Springer - Verlag, New Yourk (1988).
- [65] J. S. Hesthavn, S. Gottlieb, D. Gottlieb, Spectral methods for time dependent problems, Cambridge University press (2004).
- [66] D. A. Kopriva, Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations, Springer (2008).
- [67] J. Shen, T. Tang, High order numerical methods and algorithms, <http://www.math.hkbu.edu.hk/ttang/PGteaching> (2006).
- [68] J. Shen, T. Tang, Spectral methods algorithms, analysis and applications, <http://www.math.hkbu.edu.hk/ttang/PGteaching> (2006).
- [69] D. Gottlieb, M.Y. Hussaini, S. A. Orszag, Theory and application of spectral method, In: Spectral Methods for Partial Differential Equations, SIAM, Philadelphia (1984) 1-54.
- [70] Don WS, Solomonoff A. Accuracy and speed in computing the Chebyshev collocation derivative. SIAM J Sci Comput 1995; 16(6): 1253–68.
- [71] Rivlin TJ. Chebyshev Polynomials, New York: John Wiley Sons; 1990.

- [72] Trefethen LN. Spectral methods in MATLAB, Philadelphia, PA: SIAM; 2000.
- [73] Elbarbary EM, El-Kady M. Chebyshev finite difference approximation for the boundary value problems. Appl Math Comput 2003; 139: 513–23.
- [74] Ibrahim MAK, Temsah RS, Spectral methods for some singularly perturbed problems with initial and boundary layers, Int J Comput Math 1988; 25: 33–48.
- [75] Khater AH, Temsah RS. Numerical solutions of some nonlinear evolution equations by Chebyshev spectral collocation methods, Int J Comput Math 2007; 84: 305–16.
- [76] Babolian E, Bromilow M, England R, Saravi M. A modification of pseudo-spectral method for solving linear ODEs with singularity, Appl Math Comput 2007; 188: 1260–6.
- [77] Huang CC. Semiconductor nanodevice simulation by multidomain spectral method with Chebyshev, prolate spheroidal and Laguerre basis functions. Comput Phys Commun 2009; 180: 375–83.
- [78] Lakestani M, Dehghan M. Numerical solution of Riccati equation using the cubic B-spline scaling functions and Chebyshev cardinal functions. Comput Phys Commun 2010; 181: 957–66.
- [79] Parand K, Dehghan M, Rezaei AR, Ghaderi SM. An approximation algorithm for the solution of the nonlinear Lane-Emden type equations arising in astrophysics using Hermite functions collocation method. Comput Phys Commun <doi:10.1016/j.cpc.2010.02.018>.
- [80] Magyari E, Pop I, Keller B. Exact dual solutions occurring in the Darcy mixed convection flow. Int J Heat Mass Transfer 2001; 44: 4563–6.
- [81] Nakayama A, Koyama H. A general similarity transformation for combined free and forced convection flows within a fluid-saturated porous medium, ASME J Heat Transfer 1987; 109: 1041–5.

[82] S. Abbasbandy, E. Shivanian, Multiple solutions of mixed convection in a porous medium on semi-infinite interval using pseudo-spectral collocation method, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 2011; 16: 2745–2752.

[83] Ortega JM, Rheinboldt WG. Iterative solution of nonlinear equations in several variables, New York: Academic Press; 1970.

[84] Kelley CT. Iterative methods for linear and nonlinear equations, Philadelphia, PA: SIAM; 1995.

Abstract:

The purpose of the thesis is to introduce a method to predict the multiplicity of the solutions of the nonlinear boundary value problems so that it could be easily applied on nonlinear ordinary differential equations with boundary conditions. Our goal is to introduce a method not only to anticipate multiplicity of the solutions of the nonlinear differential equations but also to calculate effectively the all branches of the solutions (on the condition that, there exist such solutions for the problem) analytically at the same time. In this manner, for practical use in science and engineering, such method might give new unfamiliar class of solutions which is of fundamental interest. Body structure of the thesis is as follows: In chapter 1, an introduction to the homotopy analysis method (HAM) is described due to this fact that the HAM is basis of our method. In chapter 2, we introduce the predictor homotopy analysis method (PHAM) and fully discuss the convergence analysis and other mathematical properties of the method. We give some applications in chapter 3 which confirm the authority of the method. In chapter 4, we introduce a method based on pseudo-spectral collocation method to obtain multiple solutions and then apply on a model of mixed convection in a porous medium with boundary conditions on semi-infinite interval which admits multiple (dual) solutions.

Key Words:

Homotopy analysis method, predictor homotopy analysis method, prescribed parameter, convergence controller parameter, forcing condition, Multiple solutions, Multiplicity of solutions, nonlinear boundary value problems, nonlinear differential equations, finite boundary conditions, infinite boundary conditions, pseudo-spectral collocation method.



Imam Khomeini International University

Faculty of Science

Department of Mathematic

Thesis Title:

**Prediction and Calculation of Multiple Solutions of
Nonlinear Boundary Value Problems**

By:

Elyas Shivanian

Under Supervision of:

Dr. S. Abbasbandy

Advisors:

Dr. M. Dehghan and Dr. D. Rostamy

**A thesis submitted to the Graduate Studies Office
In partial fulfillment of the requirements for
The degree of Doctor of philosophy in**

Applied Mathematics – Numerical Analysis

August 2011