

وزارت علوم تحقیقات و فن آوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی



IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

روشهای بدون شبکه برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی و بیضوی با شرایط مرزی

توسط

احمد شیرزادی

رسالة ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجه دکتری ریاضی کاربردی

زیر نظر

دکتر سعید عباس بندی

اساتید مشاور:

دکتر مهدی دهقان

دکتر داوود رستمی

آبان ۹۰

قدردانی

روشهای بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی و

بیضوی با شرایط مرزی

چکیده

در سالهای اخیر روشهای بدون شبکه برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی محبوبیت زیادی پیدا کرده است. هدف این رساله ارائه روشهای عددی بدون شبکه بر اساس روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین (MLPG) برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. در فصل اول مقدمه ای مختصر بر روشهای بدون شبکه ارائه خواهیم داد و آنها را به سه دسته کلی دسته بندی می کنیم. از آنجا که روشهای ارائه شده در این رساله بر روش MLPG استوار است، در فصل دوم این روش به تفصیل بررسی خواهد شد. در فصل سوم، با توجه به اهمیت بسیار زیاد سیستم های معادلات دیفرانسیل غیر خطی با مشتقات جزئی، یک روش بدون شبکه برای حل عددی آنها ارائه می شود و برای فائق آمدن بر مشکل غیر خطی بودن، یک روش پیشگو-اصلاحگر در هر گام زمانی پیشنهاد خواهد شد. در فصول چهارم و پنجم، جوابهای عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دو بعدی و سهموی با شرایط مرزی غیر کلاسیک بررسی خواهد شد. فصل ششم به حل عددی معادلات دیفرانسیل دوبعدی کسری-زمان مکش-پخش-عکس العمل اختصاص یافته است. در نهایت یک نتیجه گیری کلی ارائه و پیشنهاداتی برای خوانندگان علاقه مند جهت کارهای آتی بیان خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، روشهای بدون شبکه، شرایط مرزی غیر استاندارد، کمترین مربعات متحرک، فرم ضعیف محلی، تفاضلات تقسیم شده، دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، پروسه انتگرال گیری عددی، شرایط مرزی، شرایط مرزی نیومن، معادله گرما، روشهای هم محلی، معادلات دیفرانسیل کسری، روشهای تطبیقی انتخاب نقاط، تاثیر حافظه

این رساله را تقدیم می کنم به همه عزیزانی که در راه تعلیم و تربیت
فرزندان این مرز و بوم خالصانه کوشیده اند و می کوشند، به ویژه
معلمان حقیر از آغاز دوره ابتدائی تا پایان دوره دکتری.

مقدمه

به دست آوردن جوابهای تحلیلی برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، خصوصاً معادلاتی که از مسائل کاربردی حاصل می شوند بسیار مشکل و اکثر مواقع ناممکن است. از این رو دانشمندان و مهندسان به دنبال ارائه روشهای کارای عددی برای به دست آوردن جوابهای تقریبی این معادلات هستند. از محبوبترین روشهای عددی موجود می توان به روشهای عناصر متناهی اشاره کرد. از معایب این روشها می توان به هزینه بالای شبکه بندی اشاره کرد. به علاوه در صورت نیاز به یک شبکه بندی ظریفتر، از محاسبات قبلی نمی توان استفاده کرد و همه مراحل اجرای روش باید دوباره اجرا شوند. برای غلبه بر این مشکلات، روشهای بدون شبکه معرفی گردیدند. روشهای بدون شبکه، از یک مجموعه نقاطی که در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده اند، برای نمایش دامنه و مرزهای آن (و نه برای گسسته سازی) استفاده می کنند. روشهای بدون شبکه ممکن است از فرم قوی یا فرم ضعیف مساله استفاده کنند. اگرچه استفاده از فرم قوی مساله ساده تر و هزینه کمتری دارد، اما روشهایی که از فرم ضعیف مساله استفاده می کنند پایداری و دقت بالاتری دارند. حال این سوال مطرح می شود که آیا می توان روشی ارائه داد که مزایای هر دو روش را داشته باشد؟ چنین روشی هم باید از فرم ضعیف مساله جهت تضمین پایداری استفاده کند و هم اینکه انتگرالگیری روی دامنه نداشته باشد تا هزینه اجرای روش کم شود. در این راستا اتلوری و همکاران در سال ۱۹۹۹ روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین (MLPG) را ارائه نمودند. این روش یک گروه جدیدی از روشهای بدون شبکه است که در آن معادلات به فرم ضعیف به طور محلی در زیر دامنه هایی که توسط یک نود احاطه شده اند برقرارند و زیر دامنه های محلی جهت آسان تر کردن انتگرال گیری ساخته می

شوند. برای حفظ مشخصه محلی بودن تقریب، این روش از کمترین مربعات متحرک جهت تقریب جواب استفاده می کند. به طور خلاصه، روش از معادلات ضعیف محلی و تقریب کمترین مربعات متحرک جهت تبدیل مساله به سیستم معادلات خطی یا غیر خطی استفاده می کند. این روش به طور بسیار موفقی برای جواب دامنه وسیعی از مسائل مهندسی و علوم به کار برده شده است. همانند دیگر روشهای عددی، این روش نیز معایبی دارد که از جمله آنها می توان به چگونگی تحمیل شرایط مرزی اشاره کرد. در این رساله، با ارائه روشهای ترکیبی این مشکل مرتفع شده است. همچنین روشهایی برای تحمیل شرایط مرزی غیر کلاسیک انتگرالی ارائه می شود. اکثر پدیده های طبیعی رفتار غیر خطی دارند و بنا بر این در مدل سازی مسائل کاربردی به مسائل غیر خطی می رسیم. برای حل عددی مسائل غیر خطی، در این رساله ترکیبی از روشهای پیشگو-اصلاحگر و MLPG معرفی می گردد. ساختار این رساله به شرح زیر است: در فصل اول مقدمه ای بر روشهای بدون شبکه ارائه می شود و بعضی روشهای موجود و پرکاربرد به طور خلاصه بررسی خواهد شد. در فصل دوم، مقدمه ای کوتاه بر روش MLPG بیان و چگونگی تبدیل مساله پواسون و یک مساله وابسته به زمان را به معادلات ضعیف محلی شرح خواهیم داد. همچنین روند گسسته سازی معادلات ضعیف محلی را با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک شرح می دهیم. در فصل سوم، یک روش بدون شبکه، بر اساس فرم ضعیف مساله، معادلات انتگرال محلی، روش تفاضلات متناهی و روشهای پیشگو-اصلاحگر، برای حل عددی جفت معادلات غیر خطی پخش ارائه خواهد شد. در فصل چهارم، یک روش بدون شبکه بر اساس روش MLPG و روش هم محلی برای بررسی جوابهای عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دو بعدی و سهموی با شرایط مرزی غیر کلاسیک ارائه می گردد. در فصل پنجم، معادلات دیفرانسیل سهموی دو بعدی با شرایط غیر کلاسیک و نیومن مورد بررسی قرار می گیرد و برای تحمیل شرایط مرزی نیومن دو الگوریتم جدید ارائه می شود. در فصل ششم، یک روش عددی بر اساس روش MLPG به همراه روشهای تفاضلات متناهی مناسب برای به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل دوبعدی کسری مکش-پخش-عکس العمل ارائه می گردد. از آنجا که برای مسائل کسری-زمان، مخصوصا برای مرتبه های کسری کوچک و نزدیک صفر، جواب یک تغییر

سریع در نزدیکی لحظه آغازین دارد، روش گامهای زمانی متغیر را ارائه می کنیم که برای این مسائل بسیار مفید است. این رساله حاصل سه مقاله چاپ شده زیر است:

S. Abbasbandy, V. Sladek, A. Shirzadi, J. Sladek, Numerical simulations for coupled pair of diffusion equations by MLPG method, CMES, Computer Modeling in Engineering and Science. 80 (13) (2011) 1623–1639.

S. Abbasbandy and A. Shirzadi, MLPG method for two-dimensional diffusion equation with Neumann's and non-classical boundary conditions, Applied Numerical Mathematics, 61 (2011) pp. 170–180.

S. Abbasbandy and A. Shirzadi, A meshless method for two-dimensional diffusion equation with an integral condition, Engineering Analysis with Boundary Elements 34 (2010) pp. 1031–1037.

فهرست مطالب

۱	مقدمه ای بر روشهای بدون شبکه	۱
۲	۱.۱ مقدمه	۲
۴	۲.۱ تقریب جواب	۴
۴	۱.۲.۱ روش ذرات هیدرودینامیکی هموار	۴
۵	۲.۲.۱ روش بازتولید اجزای هسته	۵
۶	۳.۲.۱ کمترین مربعات متحرک	۶
۸	۴.۲.۱ روشهای افرازیکه	۸
۹	۵.۲.۱ توابع پایه ای شعاعی	۹
۱۰	۳.۱ آزمون	۱۰
۱۱	۱.۳.۱ آزمون به فرم قوی (روش هم محلی)	۱۱
۱۱	۲.۳.۱ آزمون به فرم ضعیف سراسری	۱۱
۱۱	۳.۳.۱ آزمون به فرم ضعیف محلی	۱۱
۱۳	۲ مقدمه ای بر روش MLPG	۱۳
۱۴	۱.۲ مقدمه	۱۴
۱۵	۲.۲ روند اجرای روش	۱۵
۱۵	۱.۲.۲ فرمولسازی ضعیف محلی	۱۵

۱۷	گسسته سازی	۲.۲.۲
۲۰	مساله وابسته به زمان	۳.۲.۲
۲۳	مثالهای عددی	۳.۲
۲۳	مثال برای دامنه مربعی	۱.۳.۲
۲۴	مثال برای دامنه دایره ای	۲.۳.۲
۲۷	مثال برای مساله وابسته به زمان	۳.۳.۲
۲۸	نتیجه گیری	۴.۲
۲۹	شبیه سازی عددی برای جفت معادلات پخش	۳
۳۰	مقدمه	۱.۳
۳۱	جفت معادلات حاکم، شرایط مرزی و آغازین	۲.۳
۳۲	روند بدست آوردن فرمولهای عددی	۳.۳
۳۲	گسسته سازی زمانی	۱.۳.۳
۳۴	فرموله کردن معادلات نیمه گسسته به صورت معادلات ضعیف محلی	۲.۳.۳
۳۶	گسسته سازی فرم های ضعیف محلی و تحمیل شرایط مرزی	۳.۳.۳
۳۸	تکنیکها وساده سازیهای به کار برده شده در تقریب انتگرالهای محلی	۴.۳.۳
۳۹	مثالهای عددی	۴.۳
۵۰	نتیجه گیری	۵.۳
۵۱	حل عددی معادلات پخش دو بعدی با یک شرط انتگرالی	۴
۵۲	مقدمه	۱.۴
۵۳	تقریب تفاضلات متناهی	۲.۴
۵۴	فرم ضعیف محلی	۳.۴
۵۵	گسسته سازی و اجرای روش	۴.۴

۵۸	۵.۴	مثالهای عددی
۶۵	۶.۴	نتیجه گیری
۶۶	۵	حل عددی معادلات پخش غیر کلاسیک دو بعدی با شرایط مرزی نیومن
۶۷	۱.۵	مقدمه
۶۸	۲.۵	روند فرمولسازی عددی
۷۰	۱.۲.۵	الگوریتم الف
۷۳	۲.۲.۵	الگوریتم ب
۷۵	۳.۵	مثالهای عددی
۷۸	۴.۵	نتیجه گیری
۸۱	۶	مدلسازی عددی برای معادلات کسری دو بعدی مکش-پخش-عکس العمل
۸۲	۱.۶	مقدمه
۸۳	۲.۶	تبدیل مساله به فرم ضعیف
۸۶	۳.۶	گسسته سازی مکانی و اجرا
۸۷	۴.۶	اجرای روش
۸۷	۱.۴.۶	تحلیل حساسیت
۸۹	۲.۴.۶	ریلکسیشن زمان
۹۱	۳.۴.۶	معادلات پخش-عکس العمل با منبع
۹۴	۴.۴.۶	شبیه سازی عددی برای مساله پخش-مکش
۹۷	۵.۶	نتیجه گیری
۹۸	۷	نتیجه گیری و پیشنهادات

لیست جداول

۱.۲	نتایج به دست آمده با تعداد گرههای متفاوت برای مثال با دامنه مربعی	۲۳
۲.۲	نتایج به دست آمده با تعداد گرههای متفاوت برای مثال با دامنه دایره ای	۲۶
۳.۲	نتایج عددی با گامهای زمانی متفاوت برای معادله پخش در زمان $t=1$	۲۷
۱.۳	خطا با Δt های متفاوت	۴۲
۲.۳	خطاها در $t=2$, $\Delta t = 0.005$ به ازای تعداد گرههای متفاوت	۴۲
۳.۳	خطا در لحظه های زمانی متفاوت با $N = 441$ تعداد نقاط و $\Delta t = 0.005$	۴۳
۴.۳	خطا در $t = 0.5$ با $N = 441$ تعداد نقاط و تکرارها و گامهای زمانی متفاوت	۴۵
۱.۴	نتایج به دست آمده برای مثال اول فصل چهارم	۶۰
۲.۴	نتایج به دست آمده برای مثال دوم فصل چهارم	۶۳
۱.۵	نتایج به دست آمده برای مثال اول فصل پنجم	۷۷
۲.۵	نتایج به دست آمده برای مثال دوم فصل پنجم	۷۹
۱.۶	خطا در $t = 0.5$ با $\alpha = 0.5$ R و r های متفاوت	۸۸

فصل ۱

مقدمه ای بر روشهای بدون شبکه

۱.۱ مقدمه

ارائه روشهای عددی جدید برای تقریب جوابهای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از نظر مهندسين و رياضيدانان از اهميت بسزائي برخوردار است. روشهای بدون شبکه، به خاطر انعطاف پذیری بالای آنها و دقت بسیار بالای جوابهای عددی حاصله، در سالهای اخیر توجه بسیاری از رياضيدانان و مهندسان را به خود جذب کرده است. شاید بتوان گفت که مهمترین هدف مشترک روشهای بدون شبکه، فائق آمدن بر مشکل شبکه بندی و شبکه بندی مجدد کل دامنه باشد. تاکنون چندین روش بدون شبکه ارائه شده اند که از میان آنها می توان به موارد زیر اشاره کرد: روش ذرات هیدرودینامیکی هموار^۱ (SPH) [۱] روش عناصر پخش شده (DEM)^۲ [۲]، روش افراز یکه (PUM)^۳ [۳]، روش اچ-پی کلود^۴ [۴]، روش گالرکین با عناصر آزاد (EFG)^۵ [۵]، روش بازتولید عناصر هسته (RKPM)^۶ [۶]، روش بدون شبکه هم محلی بر اساس توابع پایه ای شعاعی [۷، ۸]، روش نودهای مرزی (BNM)^۷ [۹]، روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی (LBIE)^۸ [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳]، روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین (MLPG)^۹ [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷]، روش درونیابی شعاعی نقاط^{۱۰} [۱۸]. به علت کثرت این روشها، بیان همه آنها امکان پذیر نیست اما، مرجع [۴۸] یک بازنگری (تا حدی کلی) از این روشها ارائه داده است. تعریف روش بدون شبکه (لیو ۲۰۰۲) [۱۸] به صورت زیر است: روش بدون شبکه برای حل یک مساله روشی است که بدون استفاده از یک شبکه بندی از قبل تعیین شده برای گسسته سازی دامنه، مساله را به یک سیستم معادلات خطی تبدیل نماید. روشهای بدون شبکه، از یک مجموعه نقاطی که در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده برای نمایش دامنه و مرزهای آن (و نه برای گسسته سازی

^۱ Smoothed Particle Hydrodynamic

^۲ Diffuse element method

^۳ Partition of unity method

^۴ Hp-cloud method

^۵ Element free Galerkin method

^۶ Reproducing kernel particle method

^۷ Boundary node method

^۸ Meshless local boundary integral equation method

^۹ Meshless local Petrov-Galerkin method

^{۱۰} Radial point interpolation method

دامنه) استفاده می کند. این مجموعه نقاط پخش شده، نقاط میدانی^{۱۱} نامیده می شوند، و این نقاط یک شبکه نمی سازند، به این معنی که هیچگونه اطلاعات قبلی درباره رابطه بین این گرهها برای درونیابی یا تقریب تابع مجهول و ... نیاز نیست. بسیاری از روشهای بدون شبکه کاربردهای خوبی پیدا کرده اند و نشان داده شده است که پتانسیل بالایی برای تبدیل شدن به یک وسیله عددی قوی دارند. با این وجود، این روشها هنوز در مرحله توسعه قرار دارند و هنوز سوالات و مسائل تکنیکی وجود دارند که باید پاسخ داده شوند تا این روشها تبدیل به یک ابزار مفید و کارا برای حل مسائل پیچیده مهندسی شوند. سه گام بسیار مهم برای اجرای یک روش بدون شبکه به شرح زیر است:

- ۱- تولید نقاط^{۱۲} : در روشهای بدون شبکه، دامنه فیزیکی مساله با نقاط نشان داده می شود. این نقاط می توانند منظم یا نامنظم باشند و در هر صورت باید کل دامنه را پوشش دهند.
 - ۲- تقریب جواب^{۱۳} : برای به دست آوردن جواب عددی ابتدا تابع مجهول باید در هر نقطه دامنه تقریب زده شود. برای این منظور پایه ای برای فضای جواب در نظر گرفته و جواب را به صورت ترکیب خطی از اعضای پایه در نظر می گیریم. این عمل را تقریب جواب می نامیم.
 - ۳- آزمودن^{۱۴} : در روند تقریب، جواب بر حسب جملات توابع پایه بسط داده می شود و بنابراین ضرائب جملات پایه مجهول هستند (این ضرائب مانند روش اتلوری می توانند مقدار تابع باشند). برای محاسبه ضرائب تقریب باید آن را بیازماییم تا در معادلات حاکم صدق کند. این آزمون می تواند به فرم ضعیف یا قوی و محلی یا کلی باشد.
- روشهای متفاوت تقریب جواب و آزمودن منجر به روشهای بدون شبکه متفاوتی شده اند. در اینجا به طور خلاصه تعدادی از روشهای تقریب جواب و آزمودن را بیان می کنیم.

^{۱۱}Field nodes

^{۱۲}Node generation

^{۱۳}Trial approximation

^{۱۴}Testing

۲.۱ تقریب جواب

۱.۲.۱ روش ذرات هیدرودینامیکی هموار

روش ذرات هیدرودینامیکی هموار، قدیمی ترین روش بدون شبکه که توسط گینگولد و منافان^{۱۵} در سال ۱۹۷۷ ارائه شد، یک تقریب هسته^{۱۶} برای تابع تک متغیره $u(x)$ در دامنه Ω به صورت زیر ارائه می دهد:

$$u^h(\mathbf{x}) = \int w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) u(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}$$

که در آن $u^h(\mathbf{x})$ تقریب را نشان می دهد، $w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)$ تابع وزن یا هسته است (در SPH معمولاً تابع هموار کننده نامیده می شود) و h اندازه محمل^{۱۷} می باشد. هسته باید در شرایط زیر صدق کند:

$$1 - w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) > 0 \text{ در یک زیر دامنه از } \Omega_i, \Omega$$

$$2 - w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) = 0 \text{ خارج از زیر دامنه } \Omega_i$$

$$3 - \int_{\Omega} w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h) d\Omega = 1 \text{، خصوصیت نرمال بودن}$$

$$4 - w(s, h) \text{ یک تابع به طور یکنواخت کاهشی است که } s = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

۵ - $\delta(s) \rightarrow w(s, h)$ وقتی که $h \rightarrow 0$ ، که δ تابع دلتای دیراک است. شرط دوم برای روش ضروری است، این شرط تقریب را قادر می سازد که از یک نمایش محلی تولید شود؛ $u^h(\mathbf{x})$ فقط به مقادیری از u در گرههایی بستگی دارد که در زیردامنه ای قرار دارند که $w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)$ صفر نیست. دامنه ای که در آن $w(\mathbf{x} - \mathbf{y}, h)$ ناصفر است محمل تابع وزن یا دامنه تاثیر آن نامیده می شود. شرط سوم به خاطر سازگاری است، اگرچه این شرط، سازگاری فرم گسسته را تضمین نمی کند. فرم گسسته روش با به کار بردن روش انتگرال گیری عددی برای سمت راست به صورت زیر حاصل می

^{۱۵}Gingold and Monaghan

^{۱۶}Kernel approximation

^{۱۷}Support

شود:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) u_I \Delta V_I = \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) u_I$$

که در آن ΔV_I نشان دهنده حجم برای فضای سه بعدی، سطح برای دو بعدی و طول برای یک بعدی و متناظر با نود I می باشد، و $\phi_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Delta V_I$ تابع شکل^{۱۸} تقریب SPH می باشد. یک مشکل در به کار بردن تقریب فوق، ارائه تکنیک کارا برای تخصیص ΔV_I به نود I می باشد.

۲.۲.۱ روش بازتولید اجزای هسته

مشابه مسیری که روش SPH معرفی شد، لیو و همکاران روش RKPM را ارائه دادند و یک تابع اصلاحگر برای هر دو فرم گسسته و پیوسته معرفی کردند. تقریب بازتولید هسته $u(x)$ به صورت زیر است:

$$u^h(\mathbf{x}) = \int C(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}}$$

که در آن $C(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y})$ تابع اصلاحگر نامیده می شود که با تحمیل شرایط بازتولید به دست می آید، یعنی معادلات باز تولید باید دقیقاً چند جمله ایها را تولید کنند و بتوان آن را بر حسب ترکیب خطی توابع پایه ای چندجمله ای نشان داد؛ α پارامتر تاخیر تابع هسته $\Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ می باشد. با اجرای انتگرال گیری عددی، فرم گسسته زیر به دست می آید:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_I C(\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \Phi_\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) u_I \Delta V_I = \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) u_I$$

در نظریه موجک ها، یک تابع با ترکیبی از تاخیر و انتقال یک موجک واحد (که تابع پنجره نامیده میشود) نمایش داده می شود. روش RKPM نیز با بهره گیری از این روش ابداع شده است.

^{۱۸}Shape function

۳.۲.۱ کمترین مربعات متحرک

برای حفظ خوش وضعی روش، علاوه بر استفاده از فرم ضعیف مساله، در این پایان نامه از پایه های بدست آمده از روش کمترین مربعات متحرک (MLS) جهت نمایش جواب استفاده می کنیم. فرض کنید که $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})]$ یک پایه چندجمله ای کامل از درجه (از پیش تعیین شده) m باشد؛ به عنوان مثال، برای مساله دوبعدی با $\mathbf{x} = (x, y)$ ، پایه ها می توانند

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y]$$

یا

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$$

باشد. برای پایه خطی ($m = 3$) و برای پایه مربعی ($m = 6$)، است. تابع برداری $\mathbf{p}^T$ میتواند مجموعه ای از نقاط را به عنوان ورودی بگیرد و یک ماتریس از اندازه $m \times (\# \text{ points})$ برگرداند. بویژه، ماتریس $P = \mathbf{p}^T(\Xi)$ از اندازه $N \times m$ با درایه های $[P_{ij}] = p_j(\xi_i)$ می باشد که $\xi_i \in \Xi$ و $j = 1, \dots, m, i = 1, \dots, N$ همچنین در هر نقطه ξ_i ، یک تابع وزن با محمل فشرده $w_i > 0$ تخصیص داده می شود. در این پایان نامه تابع وزن گاوسی استفاده می شود:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\exp[-(\|\mathbf{x} - \xi_i\|/c)^2] - \exp[-(R/c)^2]}{1 - \exp[-(R/c)^2]}, & 0 \leq \|\mathbf{x} - \xi_i\| < R, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1.1)$$

که $c > 0$ یک ثابت است که شکل تابع وزن w_i را کنترل می کند و $R > 0$ اندازه محمل را مشخص می کند. توجه داشته باشید که برای انعطاف پذیری بیشتر c و R می توانند به نقاط نیز وابسته باشند. برای ساختن پایه های MLS برای بسط تابع u در Ξ به صورت زیر عمل می کنیم. ما به دنبال تقریب

U MLS به صورت زیر هستیم:

$$U(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (2.1)$$

که بردار ضریب (متحرک) $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), \dots, a_m(\mathbf{x})]$ در هر نقطه $\mathbf{x}$ با مینیم کردن یک نرم گسسته وزن دار L_2 تابع باقیمانده در n نقطه بدست می آید:

$$J(\mathbf{a})(\mathbf{x}) = \sum_{\xi_i \in \Xi} w_i(\mathbf{x}) (\mathbf{p}^T(\xi_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - u(\xi_i))^2. \quad (3.1)$$

با حل معادله (3.1) داریم:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = (P^T W(\mathbf{x}) P)^{-1} P^T W(\mathbf{x}) u(\Xi) \quad (4.1)$$

که $u(\Xi)^T = [u(\xi_1), \dots, u(\xi_N)]$ ، و تابع ماتریسی به صورت زیر تعریف می شود:

$$W(\mathbf{x}) = \text{diag}(w_1(\mathbf{x}), \dots, w_N(\mathbf{x}))$$

. از یک دیدگاه دیگر، تقریب (2.1) با استفاده از (4.1) میتواند به صورت

$$U(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) (P^T W(\mathbf{x}) P)^{-1} P^T W(\mathbf{x})}_{\Phi(\mathbf{x})} u(\Xi) = \sum_{i=1}^N u(\xi_i) \phi_i(\mathbf{x}), \quad (5.1)$$

نوشته شود که ϕ_i - امین درایه تابع برداری

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times N}$$

می باشد. به جز در حالتی که u یک چندجمله ای از درجه کوچکتر یا مساوی m باشد، مشاهده می شود که همانند شبه درونیاب ها، در تقریب MLS $U(\xi_i) \approx u(\xi_i)$ ولی $U(\xi_i) \neq u(\xi_i)$ برای $\xi_i \in \Xi$. برای مشتق گرفتن از پایه های MLS ϕ_i مشتقات توابع وزن و همچنین مشتقات چند جمله ایهای از درجه پایین نیاز است.

۴.۲.۱ روشهای افراز یکه

ایده اصلی افراز یکه با افراز دامنه کراندار و باز $\Omega \subseteq R^s$ به M زیر دامنه Ω_j شروع می شود، به طوری که $\Omega \subseteq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$ و زیردامنه ها ممکن است هم پوشانی کمی داشته باشند. متناظر با این زیردامنه ها ما یک افراز یکه می سازیم؛ یعنی یک خانواده از توابع پیوسته، نامنفی و با محمل پیوسته w_j که محمل آن بستار Ω_j می باشد، به طوری که در هر نقطه مانند $\mathbf{x}$ در Ω داریم

$$\sum_{j=1}^M w_j(\mathbf{x}) = 1.$$

حال، برای هر زیردامنه Ω_j یک تقریب محلی مانند u_j می سازیم (به عنوان مثال درونیاب تابع پایه ای شعاعی)، و سپس تقریب کلی را برای کل دامنه Ω با رابطه زیر می سازیم:

$$P_f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^M u_j(\mathbf{x})w_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

توجه کنید که اگر یک تقریب محلی مقدار تابع را در یک نقطه مانند $\mathbf{x}_l$ درونیابی کند؛ یعنی $u_j(\mathbf{x}_l) = f(\mathbf{x}_l)$ ، انگاه تقریب کلی نیز در این نقطه مقدار تابع را درونیابی می کند:

$$P_f(\mathbf{x}_l) = \sum_{j=1}^M u_j(\mathbf{x}_l)w_j(\mathbf{x}_l) = \sum_{j=1}^M f(\mathbf{x}_l)w_j(\mathbf{x}_l) = f(\mathbf{x}_l).$$

بابوسکا و ملنک (۱۹۹۵-۹۶)^{۱۹} و دوارت و ادن (۱۹۹۵-۹۶)^{۲۰} نشان دادند که تقریب کمترین مربعات متحرک یک افراز یکه می سازد.

۵.۲.۱ توابع پایه ای شعاعی

تعریف تابع $\Phi: R^s \rightarrow R$ یک تابع شعاعی نامیده می شود اگر تابع $\phi: [0, \infty) \rightarrow R$ موجود باشد به طوری که

$$\Phi(\mathbf{x}) = \phi(r),$$

که در آن $r = \|\mathbf{x}\|$ و $\|\cdot\|$ یک نرم در R^s می باشد؛ معمولاً نرم اقلیدسی. برای راحتی، یک تابع پایه ای شعاعی را با $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \phi(r_j)$ نشان می دهیم که در آن $r_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ در فضای دو بعدی داریم: $\mathbf{x} = (x, y)$ و می نویسیم $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j) = \Phi(x, y, x_j, y_j)$. در روش تقریب بدون شبکه پایه ای شعاعی، تقریب تابع مجهول $u(x, y)$ به صورت ترکیب خطی از N تابع شعاعی به صورت زیر نوشته می شود:

$$u^h(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi(x, y, x_j, y_j)$$

که N تعداد نقاط در دامنه است و $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, N$ ضرایب مجهول می باشد. ضرایب مجهول با حل معادلات حاکم با روش هم محلی یا گالرکین (که در فصل بعدی توضیح داده خواهد شد) به دست می آیند. در حالت چند بعدی، مشتقات جزئی تابع تقریب به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\frac{\partial^k u^h(x, y)}{\partial x^a \partial y^b} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{\partial^k \Phi(x, y, x_j, y_j)}{\partial x^a \partial y^b}$$

^{۱۹}Babuska and Melenk

^{۲۰} Duarte and Oden

که $k = a + b$ و $a, b \in \{0, 1, 2\}$ از بین توابع پایه ای شعاعی مطلوب و پرکاربرد، می توان چندربعی ها^{۲۱} و اسپلاین صفحه ای نازک^{۲۲} را نام برد. تابع پایه ای شعاعی چند ربعی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + c_j^2}$$

که c_j یک ثابت است که شکل تابع پایه ای شعاعی را کنترل می کند. تابع پایه ای شعاعی چند ربعی معکوس نیز به صورت زیر است:

$$\phi(r_j) = \frac{1}{\sqrt{r_j^2 + c_j^2}}.$$

تابع اسپلاین صفحه ای نازک به صورت

$$\phi(r_j) = r_j^m \log r_j,$$

تعریف می شود که m مرتبه آن است.

۳.۱ آزمون

در همه روشهایی که در بالا بیان شد، برای جواب مجهول تقریبی به صورت زیر داریم:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \Phi(\mathbf{x}_j)$$

که ضرایب مجهول هستند. ضرایب مجهول باید به طریقی محاسبه شوند که تابع تقریب $u^h(\mathbf{x})$ به صورت ضعیف یا قوی در معادلات حاکم صدق کند. چندین روش آزمون تا به حال ارائه گردیده

^{۲۱} multiquadrics

^{۲۲} thin-plate spline

اند که می توان آنها را در سه گروه دسته بندی کرد:

۱.۳.۱ آزمودن به فرم قوی (روش هم محلی)

این روش به طور گسترده در تقریب توابع پایه ای شعاعی و همچنین روش ذرات هیدرودینامیکی هموار به کار می رود. در این روش، تابع تقریب باید در یک مجموعه از نقاط (نقاط هم محلی) در معادلات حاکم صدق کند. تعداد این نقاط نباید از تعداد ضرایب مجهول کمتر باشد و این نقاط باید مجزا باشند. در نتیجه مساله تبدیل به یک دستگاه معادلات می شود که ضرایب تقریب مجهول هستند. به وضوح این روش یک روش ساده و سریع می باشد، اما مشکل آن ناپایداری است.

۲.۳.۱ آزمودن به فرم ضعیف سراسری

جهت اجرای روش گالرکین نیازمند استفاده از فرم ضعیف یا تغییراتی مساله است. روش گالرکین با عناصر آزاد،^{۲۳} روش افراز یکه، روش بازتولید اجزای هسته از روش گالرکین و برای محاسبه انتگرالهای حاصل از روشهای انتگرال گیری عددی استفاده می کنند. در نتایج به دست آمده از اجرای این روش، چنین بیان کرده اند که این روش در هیچ جا به بن بست نمی رسد^{۲۴} و سرعت همگرایی می تواند از روش عناصر متناهی بیشتر شود. از معایب این روش می توان به هزینه بالای اجرای این روش (انتگرالگیری در کل دامنه) اشاره کرد.

۳.۳.۱ آزمودن به فرم ضعیف محلی

ژو (۱۹۹۹)^{۲۵} و اتلوری و ژو (۲۰۰۰)^{۲۶} دو نوع روش بدون شبکه ارائه نمودند: روش بدون شبکه معادلات انتگرال مرزی محلی^{۲۷} و روش بدون شبکه پتروف-گالرکین محلی.^{۲۸} هر دو روش از

^{۲۳}Element Free Galerkin(EFG)

^{۲۴}do not exhibit any volumetric locking

^{۲۵}Zhu

^{۲۶}Atluri and Zhu

^{۲۷}meshless local boundary integral equation (LBIE)

^{۲۸}meshless local Petrov-Galerkin (MLPG)

تقریب کمترین مربعات محلی استفاده می کنند. اما برای به دست آوردن مجهولات (که در اینجا مقادیر تابع هستند) روش MLPG از معادلات انتگرال محلی و روش LBIE از معادلات انتگرال مرزی محلی استفاده می کنند. معادلات باید روی زیردامنه های با شکل منظم برقرار باشند و انتگرال ها روی این زیردامنه ها و مرز آنها محاسبه می شوند. در فصل بعدی درباره روش MLPG به تفصیل صحبت خواهیم کرد.

فصل ۲

مقدمه ای بر روش MLPG

۱.۲ مقدمه

روش بدون شبکه محلی پتروف گالرکین (MLPG) برای اولین بار در سال ۱۹۹۸ توسط اتلوری و ژو معرفی گردید و به طور وسیع و موفقیت آمیزی در سالهای اخیر استفاده شده است، و همچنین دو کتاب در این زمینه تدوین شده است [۱۴، ۱۵]. اساس این روش، استفاده از معادلات ضعیف محلی (معادلات ضعیفی که روی زیر دامنه ساخته شده اند) برای آزمون و کمترین مربعات متحرک برای تقریب جواب است. انعطاف پذیری بالای این روش در انتخاب تابع آزمون، به چند نوع متفاوت MLPG منجر شده است [۱۴، ۱۵، ۲۰، ۸۶، ۱۰۲]. علی رغم مزایای قابل توجه این روش، همچنان معایبی نیز وجود دارند که مهمترین آن توابع پایه ای کسری است که در نتیجه استفاده از روش کمترین مربعات متحرک حاصل شده اند؛ به این دلیل که در اجرای روش انتگرال گیری عددی باعث هزینه زیاد می شوند. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه، خوانندگان محترم می توانند مرجع [۲۳] را ببینند. همچنین برای بعضی از کاربردهای مهم این روش مراجع [۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶] را ببینید. اساس بسیاری از روشهای بدون شبکه، مانند روش گالرکین با عناصر آزاد، استفاده از فرم ضعیف مساله در کل دامنه می باشد. مهمترین مساله در اینگونه روشها چگونگی محاسبه این انتگرالهاست، چون در اینگونه مسائل باید انتگرال گیری در کل دامنه انجام شود. در روش MLPG فرم ضعیف مساله را روی زیر دامنه هائی می سازیم که در کل دامنه قرار دارند و آن را فرم ضعیف محلی می نامیم. این مهمترین خصوصیت روش MLPG می باشد. این روش در ابتدا توسط اتلوری و همکارانش در سال ۱۹۹۸ ارائه شد و سپس به طور مفصل در دو کتاب توسط ایشان بیان شده است. این روش کلاس نسبتاً تازه ای از روشهای بدون شبکه است که در آن فرم ضعیف مساله به جای اینکه در کل دامنه ارائه شود در زیردامنه هائی از کل دامنه ساخته می شود. در نتیجه، انتگرال گیری در کل دامنه نیست و در زیر دامنه ها محاسبه می شود و این محاسبات را بسیار کم می کند. برای حفظ هر چه بیشتر خصوصیت محلی بودن، علاوه بر اینکه فرم ضعیف مساله روی زیر دامنه ها ساخته می شود، از تقریب کمترین مربعات متحرک برای تقریب تابع مجهول در نقاطی که به طور تصادفی در دامنه پخش شده اند استفاده می کنیم. به طور خلاصه، این روش از فرم ضعیف محلی مساله و تقریب

کمترین مربعات متحرک برای تبدیل PDE به دستگاه معادلات خطی یا غیر خطی نهائی استفاده می کند. این روش به طور موفقیت آمیزی برای جوابهای عددی مسائل وسیعی در علوم و مهندسی به کار برده شده است. در این فصل به طور گام به گام مراحل اجرای این روش را توضیح خواهیم داد. مراحل گسسته سازی مسائل وابسته به زمان با روش MLPG و به کمک روشهای تفاضلات متناهی شرح داده خواهند شد. مثالهایی برای دامنه های مربعی و دایره ای و همچنین برای مساله وابسته به زمان ارائه خواهیم کرد.

۲.۲ روند اجرای روش

در پروسه اجرای روش ، ابتدا باید مساله به صورت فرم ضعیف محلی تبدیل شود و سپس با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک گسسته سازی شود. این مراحل را در دو زیربخش توضیح می دهیم. در زیر بخش دیگری مساله وابسته به زمان را گسسته خواهیم کرد.

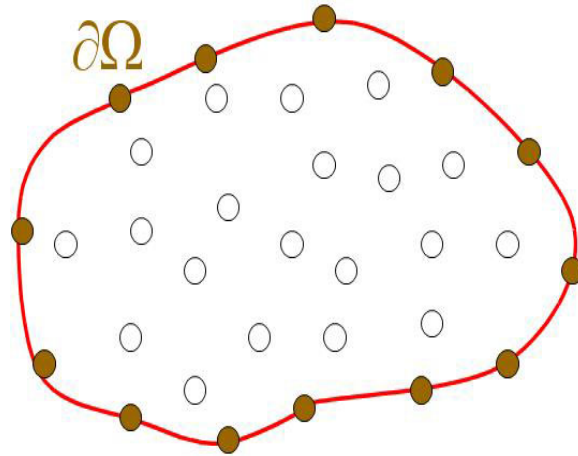
۱.۲.۲ فرمولسازی ضعیف محلی

معادله پواسن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (۱.۲)$$

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

تعدادی نقطه در دامنه کلی و مرز آن به صورت زیر در نظر می گیریم.

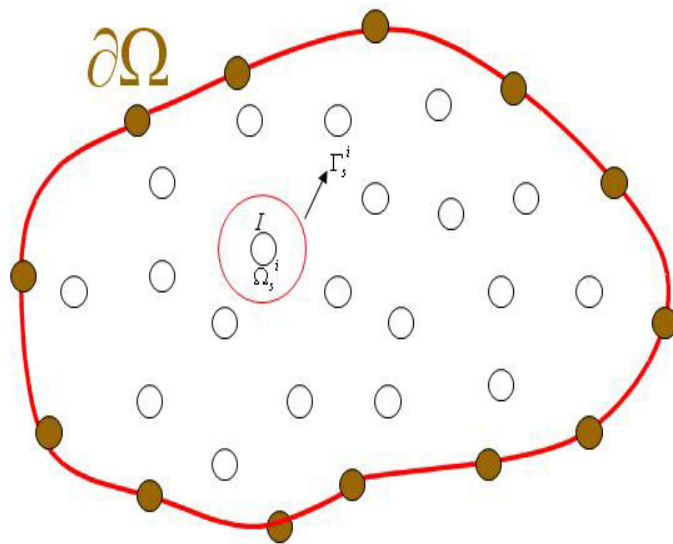


شکل ۱.۲: نمایش نقاط در دامنه و روی مرز

فرم ضعیف کلی معادله (۱.۲) به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla u) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\Omega} v f d\mathbf{x}$$

که در آن v یک تابع آزمون است. همانطور که قبلاً نیز بیان کردیم، در MLPG معادله های ضعیف باید در زیر دامنه هایی که نقاط را احاطه کرده (به صورت شکل زیر) برقرار باشند.



شکل ۲.۲: نمایش زیر دامنه های متناظر گرهما

در یک زیر دامنه Ω_s^i فرم ضعیف به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega_s^i} (\nabla v \cdot \nabla u) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_s^i} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\Omega_s^i} v f d\mathbf{x} \quad (۲.۲)$$

انتخابهای متفاوت تابع آزمون v منجر به انواع متفاوت روش MLPG می شود که اگر تابع پله ای هوی ساید را به عنوان تابع آزمون در نظر بگیریم:

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} ۱, & \mathbf{x} \in \Omega_s, \\ ۰, & \mathbf{x} \notin \Omega_s, \end{cases}$$

فرم ضعیف محلی زیر را خواهیم داشت:

$$\int_{\Gamma_s^i} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds = \int_{\Omega_s^i} f d\mathbf{x} \quad (۳.۲)$$

توجه می کنیم که در معادله ضعیف محلی معادلات انتگرال روی دامنه حذف شده اند.

۲.۲.۲ گسسته سازی

بعد از ساختن فرم ضعیف محلی و ساده سازی آن، این معادلات باید گسسته شوند. در روش MLPG گسسته سازی با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک که در فصل قبل تشریح شد انجام می شود.

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j, \quad (۴.۲)$$

برای گرههایی که در داخل دامنه قرار دارند (نه روی مرز)، با استفاده از معادلات (۳.۲) و (۴.۲) داریم:

$$\sum_{j=1}^n \left(\int_{\Gamma_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \right) \hat{u}_j = \int_{\Omega_s^i} f d\mathbf{x}$$

برای گرههای مرزی، با استفاده از شرایط مرزی و تقریب کمترین مربعات متحرک (۴.۲) داریم:

$$\sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}_i) \hat{u}_j = g(\mathbf{x}_i)$$

در نتیجه گسسته سازی منجر به یک سیستم معادلات خطی به صورت زیر می شود:

$$A\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{b}$$

که A یک ماتریس $N \times N$ ، $\hat{\mathbf{u}}$ و بردارهای $\mathbf{b}$ و $N \times 1$ هستند و

$$a_{i,j} = \begin{cases} \int_{\Gamma_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds, & \mathbf{x}_i \in \text{int}\Omega, \\ \phi_j(\mathbf{x}_i), & \mathbf{x}_i \in \partial\Omega, \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} \int_{\Omega_s^i} f d\mathbf{x}, & \mathbf{x}_i \in \text{int}\Omega, \\ g(\mathbf{x}_i), & \mathbf{x}_i \in \partial\Omega, \end{cases}$$

مراحل اجرای روش معرفی شده را می توان به صورت زیر خلاصه و روتین بیان کرد:

۱. تعدادی متناهی نقطه در دامنه Ω و روی مرز $\partial\Omega$ انتخاب کن، برای تقریب کمترین مربعات متحرک توابع پایه ای و وزن را طوری مشخص کن که تقریب MLS خوش تعریف باشد.
۲. زیردامنه های محلی Ω_s و مرزهای محلی متناظر را $\partial\Omega_s$ برای هر نود مشخص کن.

۳. برای همه گرههایی که در داخل دامنه کلی Ω و روی مرز کلی آن Γ قرار دارند کارهای زیر را انجام بده (حلقه روی نودها):

- نقاط انتگرالگیری گاوسی $\mathbf{x}_Q$ را در زیردامنه Ω_s و روی مرز محلی $\partial\Omega_s$ مشخص کن.
- برای نقاط گاوسی $\mathbf{x}_Q$ در زیر دامنه Ω_s و روی مرز محلی $\partial\Omega_s$ کارهای زیر را انجام بده (حلقه روی نقاط گاوسی در یک زیردامنه محلی):

الف) گرههای $\mathbf{x}_i$ که در دامنه تعریف تقریب کمترین مربعات متحرک در نقطه $\mathbf{x}_Q$ قرار دارند را مشخص کن، یعنی آن دسته از گرهها با $w_i(\mathbf{x}_Q) > 0$ ؛

ب) برای گرههایی که در دامنه تعریف تقریب MLS در نقطه $\mathbf{x}_Q$ قرار دارند، مقادیر $\Phi_i(\mathbf{x}_Q)$ و مشتقات آن را حساب کن.

پ) انتگرالهای عددی را حساب کن.

ت) سهم این گره را در سیستم معادلات خطی کلی محاسبه کن.

ث) if end

- پایان حلقه نقاط گاوسی

۴. پایان حلقه روی گرهها

۵. سیستم معادلات خطی کلی را حل کن

۶. مقادیر تابع مجهول (جواب) را در نقاط مفروض به دست آور.

با توجه به الگوریتم ارائه شده، می بینیم که روش ارائه شده یک روش کاملاً بدون شبکه است، به طوری که عناصر مرزی و دامنه به هیچ وجه برای درونیابی و جه برای انتگرال گیری نیاز نیست. انتگرالهای روی دامنه و مرزی را می توان به راحتی در زیردامنه های با شکل منظم (مثلاً دایره) محاسبه کرد.

۳.۲.۲ مساله وابسته به زمان

برای مسائل وابسته به زمان، باید به طریقی متغیر زمان را گسسته سازی کنیم که مساله تبدیل به مساله بیضوی در لحظه های زمانی متفاوت گردد. چندین روش برای گسسته سازی متغیر زمان وجود دارد که ما در اینجا از روشهای تفاضلات متناهی استفاده می کنیم. معادله سهموی گرما را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

با شرایط آغازین

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

و شرایط مرزی

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

تقریب تفاضلات متناهی متغیر زمان به روش θ به صورت زیر است:

$$\theta \dot{u}^{k+1} + (1 - \theta) \dot{u}^k = \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

با در نظر گرفتن معادله گرما در سطوح زمانی k و $k + 1$ به ترتیب خواهیم داشت:

$$\theta \dot{u}^{k+1} = \theta \Delta u^{k+1} + \theta f^{k+1}$$

$$(1 - \theta) \dot{u}^k = (1 - \theta) \Delta u^k + (1 - \theta) f^k$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \theta \Delta u^{k+1} + (1 - \theta) \Delta u^k + \theta f^{k+1} + (1 - \theta) f^k,$$

برای $\theta = \frac{1}{2}$ (کرانک نیکلسون):

$$u^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} \Delta u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2} \Delta u^k + \frac{\Delta t}{2} (f^{k+1} + f^k)$$

و بنابراین فرم ضعیف محلی برای $\mathbf{x} \in \Omega_s^i$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\int_{\Omega_s^i} \left(u^{k+1} - \frac{\Delta t}{2} \Delta u^{k+1} \right) v d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s^i} \left(u^k + \frac{\Delta t}{2} \Delta u^k + \frac{\Delta t}{2} (f^{k+1} + f^k) \right) v d\mathbf{x}$$

با استفاده از قضیه دیورژانس و استفاده از تابع پله ای هوی ساید به عنوان تابع آزمون معادلات زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s^i} u^{k+1} d\mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Omega_s^i} u^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial u^k}{\partial n} ds + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_s^i} (f^{k+1} + f^k) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

معادلات گسسته شده با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک

$$u^k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j^k,$$

به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_s^i} \phi_j d\mathbf{x} \right) \hat{u}_j^{k+1} - \frac{\Delta t}{\mathfrak{V}} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \right) \hat{u}_j^{k+1} = \\ \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_s^i} \phi_j d\mathbf{x} \right) \hat{u}_j^k + \frac{\Delta t}{\mathfrak{V}} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \right) \hat{u}_j^k + \frac{\Delta t}{\mathfrak{V}} \int_{\Omega_s^i} (f^{k+1} + f^k) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

برای گرههای مرزی با استفاده از شرایط مرزی

$$u(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

و تقریب کمترین مربعات متحرک داریم:

$$\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}_i) \hat{u}_j^{k+1} = g^{k+1}(\mathbf{x}_i)$$

و در نهایت یک رابطه تکراری به صورت زیر حاصل می شود:

$$\left(A - \frac{\Delta t}{\mathfrak{V}} B \right) \hat{\mathbf{u}}^{k+1} = \left(D + \frac{\Delta t}{\mathfrak{V}} B \right) \hat{\mathbf{u}}^k + C$$

که A ، B و D ماتریسهای $N \times N$ هستند، $\hat{\mathbf{u}}$ و C بردارهای $N \times 1$ هستند و اگر $\mathbf{x}_i$ یک گره داخلی باشد آنگاه:

$$A_{i,j} = D_{i,j}, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

جدول ۱.۲: نتایج به دست آمده با تعداد گرههای متفاوت برای مثال با دامنه مربعی

Number on Nodes	Max error	RMS Error
۸۱	$3/3679 \times 10^{-4}$	$1/2201 \times 10^{-4}$
۱۲۱	$1/8831 \times 10^{-4}$	$6/7721 \times 10^{-5}$
۲۸۹	$4/7074 \times 10^{-5}$	$2/5072 \times 10^{-5}$
۴۴۱	$3/1249 \times 10^{-5}$	$9/7057 \times 10^{-6}$
۶۷۶	$2/3096 \times 10^{-5}$	$8/7575 \times 10^{-6}$

۳.۲ مثالهای عددی

۱.۳.۲ مثال برای دامنه مربعی

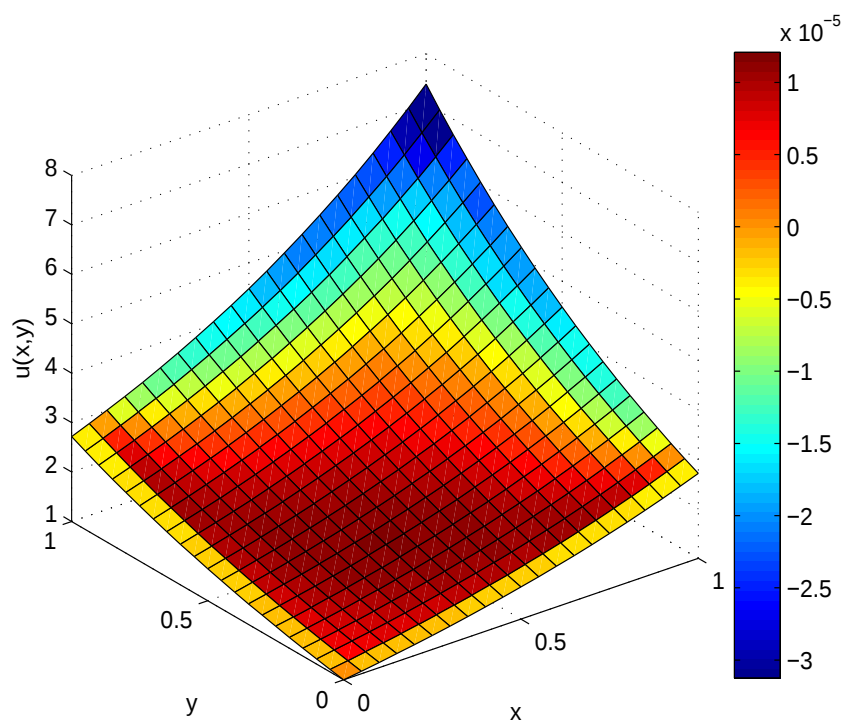
معادله پواسون را در دامنه $[0, 1] \times [0, 1]$ در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{x+y}$$

با شرایط مرزی که از جواب دقیق استخراج شده است:

$$u(x, y) = e^{x+y}$$

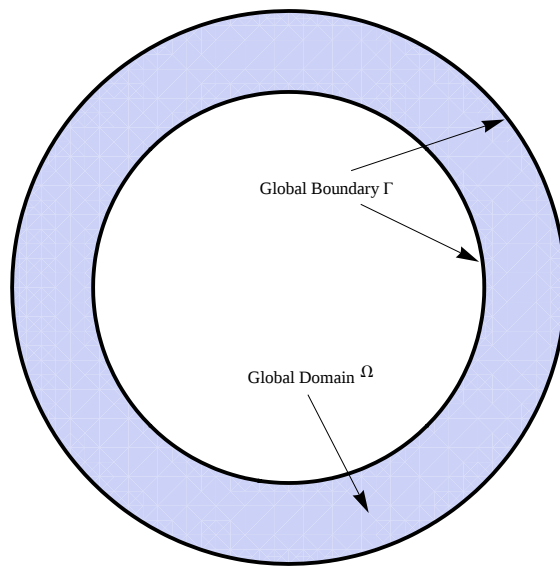
برای تقریب کمترین مربعات متحرک از تابع وزن گاوسی و تابع پایه مربعی استفاده شده است. نتایج به دست آمده با تعداد گرههای متفاوت و زیردامنه دایره ای شکل با شعاع $r = 0/005$ برای هر گره و $c = 0/7h$ در جدول ۱.۲ آورده شده است: همچنین جواب عددی به دست آمده با تعداد $N = 441$ نقطه با نمایش خطی آن در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل ۳.۲: جواب عددی به دست آمده با ۴۴۱ نقطه با نمایش خطای مطلق برای مثال با دامنه مربعی

۲.۳.۲ مثال برای دامنه دایره ای

در این مثال مساله پواسون را در دامنه که ناحیه بین دو دایره با شعاع های $r_0 = 0.8$ و $r_1 = 1$ می باشد و در شکل زیر تشریح شده مورد بررسی قرار می دهیم:



شکل ۴.۲: نمایش دامنه دایره ای

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 + y^2)$$

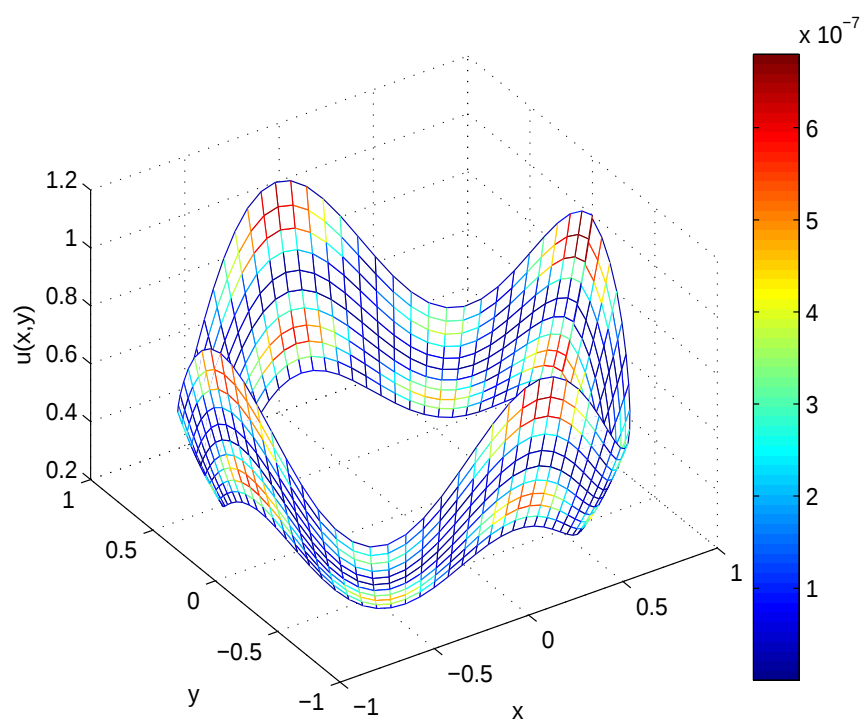
که شرایط مرزی از جواب دقیق

$$u(x, y) = x^4 + y^4$$

استخراج شده اند. مجدداً تابع وزن گاوسی و پایه ای مربعی برای تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده شده است. برای هر نود زیردامنه های دایره ای با شعاع $r = 0.005$ در نظر گرفته شده و $c = 0.7h$ اختیار شده است که h بیشترین فاصله بین گرههاست. نتایج به دست آمده با تعداد گرههای متفاوت در جدول ۲.۲ آورده شده اند. همچنین، جواب عددی به دست آمده با $N = 891$ و نمایش خطای مطلق آن در شکل زیر نمایش داده شده است.

جدول ۲.۲: نتایج به دست آمده با تعداد گرههای متفاوت برای مثال با دامنه دایره ای

Number on Nodes	Max error	RMS Error
۱۸۳	$۵,۲۸۲۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۲,۱۴۲۹ \times ۱۰^{-۴}$
۵۴۹	$۱,۶۵۹۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۴,۵۴۹۱ \times ۱۰^{-۶}$
۸۱۰	$۷,۶۰۲۸ \times ۱۰^{-۷}$	$۲,۴۷۸۴ \times ۱۰^{-۷}$
۸۹۱	$۶,۷۹۶۳ \times ۱۰^{-۷}$	$۲,۳۸۳۹ \times ۱۰^{-۷}$



شکل ۵.۲: جواب عددی به دست آمده با ۸۹۱ نقطه برای مثال با دامنه دایره ای با نمایش خطای آن

جدول ۳.۲: نتایج عددی با گامهای زمانی متفاوت برای معادله پخش در زمان $t=1$

Δt	Max error	RMS Error
۰/۱	9.5883×10^{-3}	5.2336×10^{-3}
۰/۰۵	2.4367×10^{-3}	1.3006×10^{-3}
۰/۰۱	2.9267×10^{-4}	1.2590×10^{-4}
۰/۰۰۵	2.7999×10^{-4}	1.4826×10^{-4}
۰/۰۰۱	2.7599×10^{-4}	7.3057×10^{-5}

۳.۳.۲ مثال برای مساله وابسته به زمان

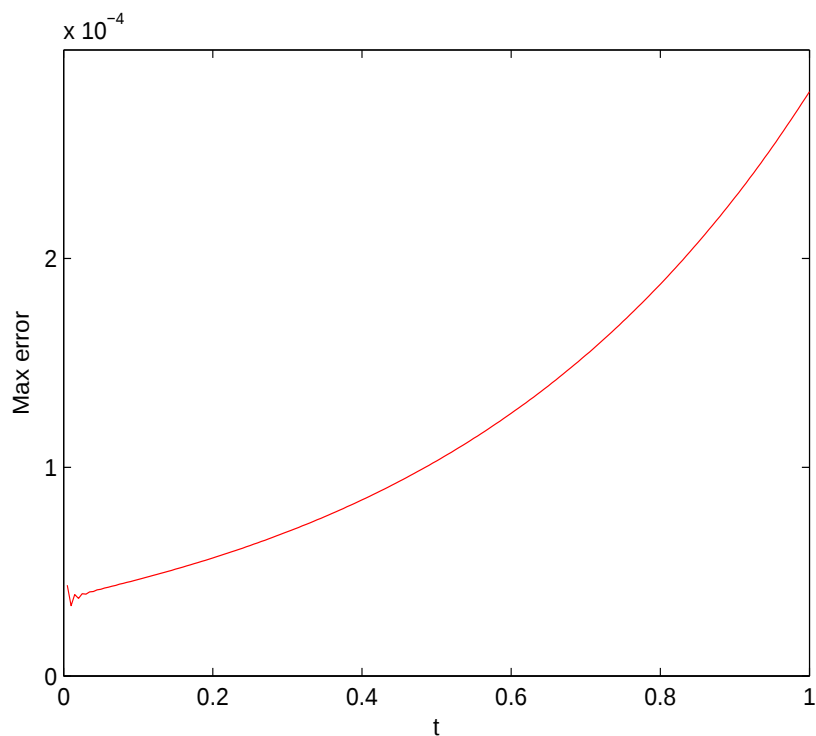
معادله پخش را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

که شرایط آغازین و مرزی از جواب دقیق

$$u(x, y, t) = e^{x+y+2t}$$

استخراج شده اند. پارامترها و توابع وزن و پایه ای مانند مثال قبل تعیین شده اند. نتایج به دست آمده با $N = 441$ نقطه و Δt های متفاوت در لحظه زمانی $t = 1$ در جدول ۳.۲ ارائه شده است. نرم بی نهایت خطای جواب عددی به دست آمده با $\Delta t = 0.005$ و $N = 441$ نقطه در بازه زمانی $[0, 1]$ در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۴.۲: نرم بی نهایت خطای جواب عددی به دست آمده با ۴۴۱ نقطه در بازه $[0, 1]$

۴.۲ نتیجه گیری

در این فصل، مقدمه ای کوتاه بر روش MLPG ارائه شد. چگونگی تبدیل مساله پواسون و یک مساله وابسته به زمان را به معادلات ضعیف محلی شرح داده شد. سپس این معادلات ضعیف محلی را با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک گسسته کردیم. برای نشان دادن دقت روش، چند مثال عددی در انتهای فصل ارائه دادیم. متوجه شدیم که با افزایش تعداد نقاط دقت جوابهای عددی حاصله افزایش می یابد که نشان دهنده همگرایی روش است. همچنین در مساله وابسته به زمان، دیدیم که همانطور که انتظار داشتیم با کوچکتر شدن گام زمانی، دقت جوابهای عددی افزایش پیدا می کند.

فصل ۳

شبیه سازی عددی برای جفت معادلات پخش

۱.۳ مقدمه

دستگاههای معادلات دیفرانسیل در مطالعه بسیاری از پدیده ها در فیزیک، شیمی، بیولوژی و غیره ظاهر می شوند. بسیاری از این پدیده ها در مراجع [۸۶، ۱۰۲، ۱۰۱، ۹۰، ۹۱، ۱۰۳، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۸۰، ۸۹] مطالعه شده اند. مدل بازخور-پخش تورینگ^۱ [۱۰۱] مدلی از نتیجه فرمولسازی در نمونه های بیولوژیکی است که یک جفت معادلات با مشتقات جزئی سهموی است. این مدل، در زمینه های بسیاری در علوم به کار برده شده است؛ به عنوان مثال در دامنه وسیعی در بیولوژی [۸۱، ۸۷، ۸۸]، اکولوژی [۹۶] و شیمی [۷۸، ۹۲]. از دید ریاضی، معادلات حاکم جفت معادلات با مشتقات جزئی غیر خطی و تقریباً پیچیده ای هستند که هم مهندسين و هم رياضيدانان زيادی در زمینه ارائه روشهای عددی کارا برای به دست آوردن جوابهای عددی آن تلاش می کنند. هدف این فصل ارائه یک روش عددی جدید بر اساس روش MLPG برای جوابهای عددی جفت معادلات پخش غیر خطی و دو بعدی می باشد. در دو دهه اخیر، روشهای بدون شبکه در شاخه های مختلفی از علوم و مهندسی محبوب و بسیار پیشرفت داشته است. در روش ارائه شده، فرم ضعیف مساله را در زیر دامنه ها می سازیم. این فرمولسازی ما را قادر به ارائه یک روش بدون شبکه واقعی می کند، زیرا انتگرال گیری روی کل دامنه نداریم و بنا براین شبکه بندی برای انتگرال گیری نیاز نیست [۷۶]. از میان روشهای بدون شبکه، آنهایی که از تقریب کمترین مربعات متحرک و توابع پایه ای شعاعی استفاده می کنند، مانند مراجع [۸۴، ۸۵، ۸۳، ۷۴، ۷۵، ۷۹] از محبوبیت بیشتری برخوردارند. در این فصل، وابستگی به زمان با درونیابی خطی در هر گام زمانی با روش تک گامی تقریب زده شده است [۱۰۰]. سپس معادلات سهموی اولیه تبدیل به معادلات سهموی در لحظه های زمانی گسسته شده است. با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک [۸۲]، معادلات ضعیف محلی ساخته شده گسسته شده و معادلات اصلی تبدیل به سیستم معادلات خطی شده است. تقریب های ویژه ای برای تقریب انتگرالهای روی دامنه به کار برده شده است و از قاعده انتگرال گیری گاوسی برای تقریب انتگرالهای روی مرز که در فرمولسازی ضعیف به دست آمدند، استفاده کرده ایم. در

^۱Turing reaction-diffusion model

نهایت دو مثال عددی برای تشریح روش پیشنهادی ارائه شده است. برای مقایسه با روشهای مشابه ارائه شده برای معادلات پخش، [۹۷، ۹۸، ۹۹] در مثال اول، معادلات حاکم جفت معادلات پخش غیر خطی هستند. در مثال دوم، معادله ارائه شده خطی است، اما مساله طوری در نظر گرفته شده که جواب دقیق به طور بسیار سریع و البته هموار تغییر می کند. سپس تشریح کرده ایم که چگونه استفاده از فاصله های زمانی ریلکس شده می تواند دقت جوابها را بالاتر ببرد.

۲.۳ جفت معادلات حاکم، شرایط مرزی و آغازین

در این فصل، یک روش عددی کارا برای سیستم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر که در ناحیه دو بعدی، Ω ارائه می دهیم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + k_1 u + r_1 f_1(u, v) + g_1(x, y, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + k_2 v + r_2 f_2(u, v) + g_2(x, y, t),\end{aligned}\quad (۱.۳)$$

که k_1, r_1, k_2, r_2 ثابتهای داده شده هستند. f_1 و f_2 توابعی از u و v هستند و g_1 و g_2 منابع از پیش مشخص شده هستند. شرایط آغازین به شکل زیر داده شده اند:

$$\begin{aligned}u(x, y, 0) &= f(x, y), \\ v(x, y, 0) &= g(x, y),\end{aligned}\quad (۲.۳)$$

و شرایط مرزی دیریکله زیر را داریم:

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= q_1(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial\Omega \times t, \quad t > 0, \\ v(x, y, t) &= q_2(x, y, t).\end{aligned}$$

توابع $q_2, q_1, g, f, g_2, g_1, f_2, f_1$ و q_2 توابع دلخواهی هستند و محدودیتی برای ارائه روش عددی ایجاد نمی کنند؛ به این مفهوم که مثلاً می توانند غیر خطی باشند. توجه داشته باشید که این مدل تقریباً کلی است و شامل مدلهایی مانند تورینگ^۲ [۱۰۱] و لوتکا و ولترا^۳ و شکار و شکارچی^۴ [۱۰۲، ۸۶] و بسیاری دیگر می شود.

۳.۳ روند بدست آوردن فرمولهای عددی

۱.۳.۳ گسسته سازی زمانی

تقریب تفاضلات متناهی مشتقات زمان به روش θ به شکل زیر داده شده است:

$$\theta \dot{u}^{k+1} + (1 - \theta) \dot{u}^k = \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (3.3)$$

با در نظر گرفتن معادله (۱.۵) در لحظه های زمانی $k\Delta t$ و $(k+1)\Delta t$ ، به ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} \theta \dot{u}^{k+1} &= \theta \nabla^r u^{k+1} + \theta k_1 u^{k+1} + \theta r_1 f_1(u^{k+1}, v^{k+1}) + \theta g_1(x, y, (k+1)\Delta t), \\ (1 - \theta) \dot{u}^k &= (1 - \theta) \nabla^r u^k + (1 - \theta) k_1 u^k + (1 - \theta) r_1 f_1(u^k, v^k) + (1 - \theta) g_1(x, y, k\Delta t). \end{aligned}$$

بنابراین و از (۳.۳)، داریم:

$$\begin{aligned} \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} &= \nabla^r u^k + \theta \left(\nabla^r u^{k+1} - \nabla^r u^k \right) + k_1 \left[u^k + \theta (u^{k+1} - u^k) \right] \\ &+ r_1 \left[f_1^k + \theta (f_1^{k+1} - f_1^k) \right] + g_1^k + \theta (g_1^{k+1} - g_1^k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

^۲ Turing model

^۳ Lotka-Volterra model

^۴ prey-predator model

با استفاده از تقریب کرانک نیکلسون ($\theta = \frac{1}{2}$) معادله (۴.۳) تبدیل میشود به:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t} = \frac{1}{2}(\nabla^2 + k_1)(u^{k+1} + u^k) + \frac{r_1}{2}(f_1^{k+1} + f_1^k) + \frac{1}{2}(g_1^{k+1} + g_1^k)$$

یا

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\Delta t}{2}(k_1 + \nabla^2)\right]u^{k+1} - \frac{r_1 \Delta t}{2}f_1^{k+1} \\ &= \left[1 + \frac{\Delta t}{2}(k_1 + \nabla^2)\right]u^k + \frac{r_1 \Delta t}{2}f_1^k + \frac{\Delta t}{2}(g_1^{k+1} + g_1^k). \end{aligned} \quad (5.3)$$

به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\Delta t}{2}(k_2 + \nabla^2)\right]v^{k+1} - \frac{r_2 \Delta t}{2}f_2^{k+1} = \\ & \left[1 + \frac{\Delta t}{2}(k_2 + \nabla^2)\right]v^k + \frac{r_2 \Delta t}{2}f_2^k + \frac{\Delta t}{2}(g_2^{k+1} + g_2^k). \end{aligned} \quad (6.3)$$

بنابراین، معادلات با مشتقات جزئی سهموی با معادلات با مشتقات جزئی نیمه گسسته از نوع بیضوی از متغیرهای u^{k+1} و v^{k+1} جایگزین میشوند، با این فرض که u^k و v^k از محاسبات گام زمانی قبلی بدست آمده اند. گام بعدی در محاسبه جواب این معادلات به مشخصه های توابع f_1 و f_2 بستگی دارد. در حالت کلی، این معادلات در هر گام باید به روش تکراری و به ترتیب با جایگزین کردن f_1^{k+1} و f_2^{k+1} با f_1^k و f_2^k در تکرار صفر محاسبه شوند. اگر این توابع به اندازه کافی هموار باشند،

می توان معادلات خطی شده زیر را به جای روش تکراری حل کرد:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{\Delta t}{\gamma} (r_1 f_{1,u}^k + k_1 + \nabla^2) \right] u^{k+1} - \frac{r_1 \Delta t}{\gamma} f_{1,v}^k v^{k+1} = \\ & \left[1 + \frac{\Delta t}{\gamma} (-r_1 f_{1,u}^k + k_1 + \nabla^2) \right] u^k - \frac{r_1 \Delta t}{\gamma} f_{1,v}^k v^k + r_1 \Delta t f_1^k + \frac{\Delta t}{\gamma} (g_1^{k+1} + g_1^k), \\ & \left[1 - \frac{\Delta t}{\gamma} (r_2 f_{2,v}^k + k_2 + \nabla^2) \right] v^{k+1} - \frac{r_2 \Delta t}{\gamma} f_{2,u}^k u^{k+1} = \\ & \left[1 + \frac{\Delta t}{\gamma} (-r_2 f_{2,v}^k + k_2 + \nabla^2) \right] v^k - \frac{r_2 \Delta t}{\gamma} f_{2,u}^k u^k + r_2 \Delta t f_2^k + \frac{\Delta t}{\gamma} (g_2^{k+1} + g_2^k). \end{aligned}$$

۲.۳.۳ فرموله کردن معادلات نیمه گسسته به صورت معادلات ضعیف محلی

ما معادلات ضعیف را روی زیر دامنه های محلی مانند Ω_s می سازیم، که این زیر دامنه ها یک ناحیه کوچک حول یک نقطه در دامنه کلی Ω است. زیر دامنه های محلی میتوانند به هر شکل و اندازه ای باشند. در اینجا آنها را به شکل دایره در نظر گرفته ایم. فرم ضعیف محلی معادلات (۶.۳، ۱.۵) برای $\mathbf{x}^i = (x^i, y^i) \in \Omega_{s^i}$ می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{s^i}} \left[\left[1 - \frac{\Delta t}{\gamma} (k_1 + \nabla^2) \right] u^{k+1} - \frac{r_1 \Delta t}{\gamma} f_1^{k+1} \right] u^* d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega_{s^i}} \left[\left[1 + \frac{\Delta t}{\gamma} (k_1 + \nabla^2) \right] u^k + \frac{r_1 \Delta t}{\gamma} f_1^k + \frac{\Delta t}{\gamma} (g_1^{k+1} + g_1^k) \right] u^* d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (۷.۳)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{s^i}} \left[\left[1 - \frac{\Delta t}{\gamma} (k_2 + \nabla^2) \right] v^{k+1} - \frac{r_2 \Delta t}{\gamma} f_2^{k+1} \right] u^* d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega_{s^i}} \left[\left[1 + \frac{\Delta t}{\gamma} (k_2 + \nabla^2) \right] v^k + \frac{r_2 \Delta t}{\gamma} f_2^k + \frac{\Delta t}{\gamma} (g_2^{k+1} + g_2^k) \right] u^* d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (۸.۳)$$

که u^* تابع آزمون است، u و v توابع تقریب هستند، و به جای کل دامنه Ω زیر دامنه Ω_{s^i} را در نظر گرفته ایم که یک دایره به شعاع r و مرکز $\mathbf{x}^i$ می باشد و کاملاً در ناحیه Ω قرار گرفته است. اگر در

هر زیر دامنه، تابع پله ای هوی ساید

$$u^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_s, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_s, \end{cases}$$

به عنوان تابع آزمون اختیار شود، خواهیم داشت $\nabla u^* = 0$ و از رابطه

$$\int_{\Omega_{s^i}} u^* \nabla^\gamma u d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{s^i}} \nabla u \nabla u^* d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega_{s^i}} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\mathbf{s}$$

داریم:

$$\int_{\Omega_{s^i}} \nabla^\gamma u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial u}{\partial n} d\mathbf{s}$$

و بنابراین معادلات ضعیف محلی (۷.۴) و (۸.۳) به معادلات بسیار ساده تر زیر تبدیل می شوند:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{k_1 \Delta t}{\gamma}\right) \int_{\Omega_{s^i}} u^{k+1} d\mathbf{x} - \frac{\Delta t}{\gamma} \int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} d\mathbf{s} \\ & - \frac{r_1 \Delta t}{\gamma} \int_{\Omega_{s^i}} f_1^{k+1} d\mathbf{x} = \left(1 + \frac{k_1 \Delta t}{\gamma}\right) \int_{\Omega_{s^i}} u^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{\gamma} \int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial u^k}{\partial n} d\mathbf{s} \quad (9.3) \\ & + \frac{r_1 \Delta t}{\gamma} \int_{\Omega_{s^i}} f_1^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{\gamma} \int_{\Omega_{s^i}} \left(g_1^{k+1} + g_1^k\right) d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{k_2 \Delta t}{2}\right) \int_{\Omega_{s^i}} v^{k+1} d\mathbf{x} - \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial v^{k+1}}{\partial n} ds \\
& - \frac{r_2 \Delta t}{2} \int_{\Omega_{s^i}} f_2^{k+1} d\mathbf{x} = \left(1 + \frac{k_2 \Delta t}{2}\right) \int_{\Omega_{s^i}} v^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial v^k}{\partial n} ds \quad (11.3) \\
& + \frac{r_2 \Delta t}{2} \int_{\Omega_{s^i}} f_2^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_{s^i}} (g_2^{k+1} + g_2^k) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

۳.۳.۳ گسسته سازی فرم های ضعیف محلی و تحمیل شرایط مرزی

N نقطه روی مرز و داخل ناحیه در نظر بگیرید که تعداد M از آنها داخل ناحیه و L از آنها روی مرز قرار گرفته اند. با فرض معلوم بودن $\hat{u}_i^k$, $i = 1, 2, \dots, N$ هدف ما محاسبه $\hat{u}_i^{k+1}$, $i = 1, 2, \dots, N$ است. بنابراین ما N مجهول داریم و برای محاسبه این مجهولات حداقل N معادله نیاز داریم. برای نقاطی که روی مرز قرار گرفته اند داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}^i) \hat{u}_j^{k+1} &= q_1(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t), \\
\sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}^i) \hat{v}_j^{k+1} &= q_2(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t).
\end{aligned} \quad (11.3)$$

برای نقاطی که در درون ناحیه قرار گرفته اند، از (۹.۳) و (۱۰.۳) و استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک، معادلات زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{k_1 \Delta t}{\Upsilon}\right) \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_{s^i}} \phi_j d\mathbf{x} \right) \hat{u}_j^{k+1} \\
& - \frac{\Delta t}{\Upsilon} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\mathbf{s} \right) \hat{u}_j^{k+1} - \frac{r_1 \Delta t}{\Upsilon} \int_{\Omega_{s^i}} \tilde{f}_1^{k+1} d\mathbf{x} = \quad (12.3) \\
& \left(1 + \frac{k_1 \Delta t}{\Upsilon}\right) \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_{s^i}} \phi_j d\mathbf{x} \right) \hat{u}_j^k + \frac{\Delta t}{\Upsilon} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\mathbf{s} \right) \hat{u}_j^k \\
& + \frac{r_1 \Delta t}{\Upsilon} \int_{\Omega_{s^i}} \tilde{f}_1^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{\Upsilon} \int_{\Omega_{s^i}} \left(g_1^{k+1} + g_1^k \right) d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{k_2 \Delta t}{\Upsilon}\right) \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_{s^i}} \phi_j d\mathbf{x} \right) \hat{v}_j^{k+1} - \frac{\Delta t}{\Upsilon} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\mathbf{s} \right) \hat{v}_j^{k+1} \quad (13.3) \\
& - \frac{r_2 \Delta t}{\Upsilon} \int_{\Omega_{s^i}} \tilde{f}_2^{k+1} d\mathbf{x} = \left(1 + \frac{k_2 \Delta t}{\Upsilon}\right) \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_{s^i}} \phi_j d\mathbf{x} \right) \hat{v}_j^k + \frac{\Delta t}{\Upsilon} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial\Omega_{s^i}} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\mathbf{s} \right) \hat{v}_j^k \\
& + \frac{r_2 \Delta t}{\Upsilon} \int_{\Omega_{s^i}} \tilde{f}_2^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{\Upsilon} \int_{\Omega_{s^i}} \left(g_2^{k+1} + g_2^k \right) d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_i^k &= f_i(\tilde{u}^k(\mathbf{x}), \tilde{v}^k(\mathbf{x})), \quad i = 1, 2, \\
\tilde{u}^k(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \hat{u}_j^k, \quad \tilde{v}^k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\mathbf{x}) \hat{v}_j^k.
\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که معادلات جبری (۱۱.۳)، (۱۲.۳) و (۱۳.۳) شکل گسسته فرم ضعیف محلی جفت معادلات اصلی (۱.۵) را نمایش می دهد که از تقریب کرانک نیکلسون برای گسسته سازی زمانی و تقریب کمترین مربعات متحرک استاندارد جهت گسسته سازی مکان استفاده کرده است.

۴.۳.۳ تکنیکها و ساده سازیهای به کار برده شده در تقریب انتگرالهای محلی

در همه مثالهای ارائه شده، برای تقریب کمترین مربعات متحرک از پایه های مربعی ($m = ۶$) و تابع وزن گاوسی استفاده شده است. از قاعده انتگرال گیری عددی ۸ نقطه ای گاوس-لژاندر جهت تقریب انتگرالهای محلی مرزی به شرح زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_{s^i}} \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{s} \\ &= \int_0^{2\pi} \phi_j(x^i + r_0 \cos(\theta), y^i + r_0 \sin(\theta)) r_0 d\theta \\ &= \pi r_0 \int_{-\pi}^{\pi} \phi_j(x^i + r_0 \cos(\pi\theta + \pi), y^i + r_0 \sin(\pi\theta + \pi)) d\theta \\ &= \pi r_0 \sum_{p=1}^8 w_p \phi_j(x^i + r_0 \cos(\pi\theta_p + \pi), y^i + r_0 \sin(\pi\theta_p + \pi)), \end{aligned}$$

که w_p و θ_p به ترتیب وزنهای و نقاط انتگرالگیری گاوسی هستند که این نقاط در بازه $[-1, 1]$ قرار دارند. انتگرالهای روی دامنه که در فرموله کردن مساله به روش MLPG ظاهر می شوند، به شکل زیر تقریب زده شده اند:

$$\int_{\Omega_{s^i}} \phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \phi_j(\mathbf{x}^i) \int_{\Omega_{s^i}} 1 d\mathbf{x} = \pi \phi_j(\mathbf{x}^i) r_0^2,$$

$$\int_{\Omega_{s^i}} \tilde{f}_1^k d\mathbf{x} \approx f_1(\tilde{u}^k(\mathbf{x}^i), \tilde{v}^k(\mathbf{x}^i)) \int_{\Omega_{s^i}} 1 d\mathbf{x} = \pi f_1(\tilde{u}^k(\mathbf{x}^i), \tilde{v}^k(\mathbf{x}^i)) r_0^2,$$

به طریق مشابه، برای $\tilde{f}_\Psi^k$ داریم:

$$\int_{\Omega_{s^i}} \tilde{f}_\Psi^k d\mathbf{x} \approx \pi f_\Psi(\tilde{u}^k(\mathbf{x}^i), \tilde{v}^k(\mathbf{x}^i)) r_i^2.$$

۴.۳ مثالهای عددی

در همه مثالهای ذکر شده، انتگرالهای روی مرز و دامنه به همان صورتی که در بخش قبل ذکر شد محاسبه شده اند. یادآوری می کنیم که r_i شعاع زیردامنه های محلی و r_i شعاع محمل تابع وزن متناظر با نقطه i است. تابع وزن گاوسی برای تقریب کمترین مربعات متحرک به کار برده شده و در آن، $c_i \approx 0.6h$ که h مینیمم فاصله بین دو نقطه متوالی می باشد. به خاطر تکنیکهای محاسباتی ذکر شده در بخشهای قبلی، r_i باید به اندازه کافی کوچک باشد. از طرف دیگر، اگر r_i خیلی کوچک هو در نظر گرفته شود، خطای حذف رخ می دهد و بر دقت جواب به دست آمده تاثیر می گذارد. بنابراین، پس از تایید در محاسبات به صورت $0.01 \leq r_i \leq 0.001$ اختیار شده است. برای اینکه ماتریسهای لولای به دست آمده از تقریب کمترین مربعات متحرک معکوس پذیر باشند، محمل تابع وزن، r_i باید به اندازه کافی بزرگ باشد تاگره های کافی در دامنه تعریف هر نقطه قرار گیرد. از طرف دیگر باید به اندازه کافی کوچک باشد تا خاصیت محلی بودن تقریب کمترین مربعات متحرک را حفظ کند. در اینجا به صورت $r_i \approx 3k$ اختیار شده است که k ماکسیمم فاصله بین دو گره متوالی است. خاطر نشان میسازیم که این پارامترها به نوع مساله مورد بررسی و همچنین تکنیکهای به کار برده شده برای ارزیابی و تقریب انتگرالها بستگی دارد. نرم بینهایت خطای u با $\|e_u\|_\infty$ و نرم بینهایت خطای v با $\|e_v\|_\infty$ نمایش داده می شود که

$$\|e_u\|_\infty = \max\{|u_i - \hat{u}_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N\},$$

u_i و $\hat{u}_i$ به ترتیب مقادیر دقیق و تقریبی u در نقطه $\mathbf{x}_i$ است و N تعداد نودهاست. مثال ۱. به عنوان اولین مثال، سیستم معادلات با مشتقات جزئی زیر را در ناحیه $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u - u^2 + uv + g_1(x, y, t), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2v - v^2 + u^2 v + g_2(x, y, t),\end{aligned}$$

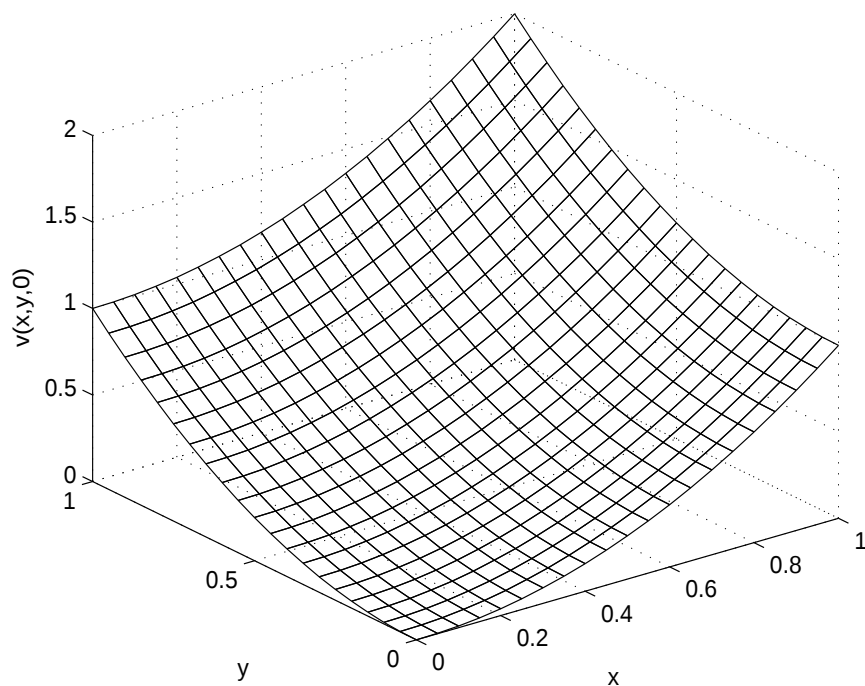
که

$$\begin{aligned}g_1(x, y, t) &= t^2(x-1)^2x^2(y-1)^2y^2 - t^2(x-1)x(y-1)y(-t+x^2+y^2) \\ &\quad - t^2(x-1)x(y-1)y - 2t^2(x-1)x - 2t^2(y-1)y + 2t(x-1)x(y-1)y, \\ g_2(x, y, t) &= t^2(-(x-1)^2)x^2(y-1)^2y^2(-t+x^2+y^2) \\ &\quad + (-t+x^2+y^2)^2 - 2(-t+x^2+y^2) - 5.\end{aligned}$$

شرایط آغازین و مرزی به صورتی انتخاب شده است که جواب دقیق به صورت زیر باشد:

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= t^2(x-1)x(y-1)y, \\ v(x, y, t) &= -t+x^2+y^2,\end{aligned}$$

شکل ۲-fig مقدار آغازین v را نشان می‌دهد و u در ابتدا صفر است. از آنجا که توابع f_1 و f_2 در این مثال غیر خطی هستند، معادلات جبری (۱۲.۳) و (۱۳.۳) در هر گام زمانی به صورت تکراری حل شده اند که در تکرار صفر f_1^{k+1} و f_2^{k+1} به ترتیب با f_1^k و f_2^k جایگزین شده اند. نتایج نمایش داده شده در اینجا تنها با یک تکرار به دست آمده اند.



شکل ۱.۳: جواب آغازین v

نتایج به دست آمده در لحظه $t = ۲$ با $N = ۱۱۱$ نقطه و Δt های متفاوت در جدول ۱-tab ارائه شده است. نتایج نشان می دهند با کوچکتر شدن طول گام زمان دقت جواب عددی حاصل افزایش می یابد. خطاهای محاسبه شده برای N ها و t های متفاوت به ترتیب در جداول ۲-tab و ۳-tab نمایش داده شده اند. نمودار جوابهای بدست آمده با $N = ۴۴۱$ برای u و v ، به ترتیب در شکلهای ۳ و ۴ نمایش داده شده اند.

جدول ۱.۳: خطا با Δt های متفاوت

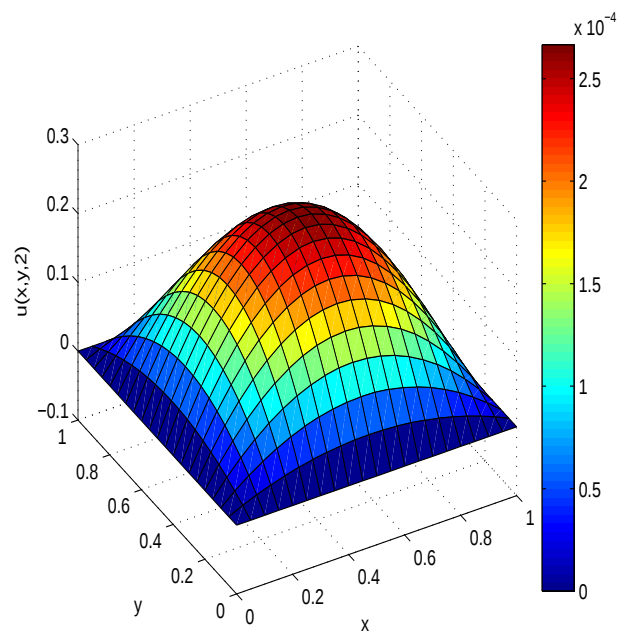
Δt	$\ e_u\ _\infty$	$\ e_v\ _\infty$
۰/۱	$۱/۲۱۲۲۱۴ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۴۱۱۵۵۱ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۵	$۶/۳۵۱۸۹۳ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۷۰۰۵۳۴ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۰۱	$۱/۷۵۶۹۹۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۹/۲۳۳۳۲۸ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۰۰۵	$۱/۱۸۳۹۵۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۵۰۶۹۳۹ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۰۰۱	$۷/۲۵۷۳۶۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۲۵۰۶۱۳ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۰۰۰۵	$۶/۶۸۴۷۲۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۵۲۲۷۸۸ \times ۱۰^{-۵}$

جدول ۲.۳: خطاها در $t = ۰/۰۰۵$ به ازای تعداد گرههای متفاوت

N	$\ e_u\ _\infty$	$\ e_v\ _\infty$
۸۱	$۱/۵۲۷۷۹۷ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۳۵۶۳۰۹ \times ۱۰^{-۴}$
۱۲۱	$۱/۱۸۳۹۵۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۵۰۶۹۳۹ \times ۱۰^{-۴}$
۲۸۹	$۸/۱۱۵۱۲۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۶۵۵۷۱۷ \times ۱۰^{-۴}$
۴۴۱	$۷/۲۵۶۸۱۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۷۱۱۲۳۲ \times ۱۰^{-۴}$

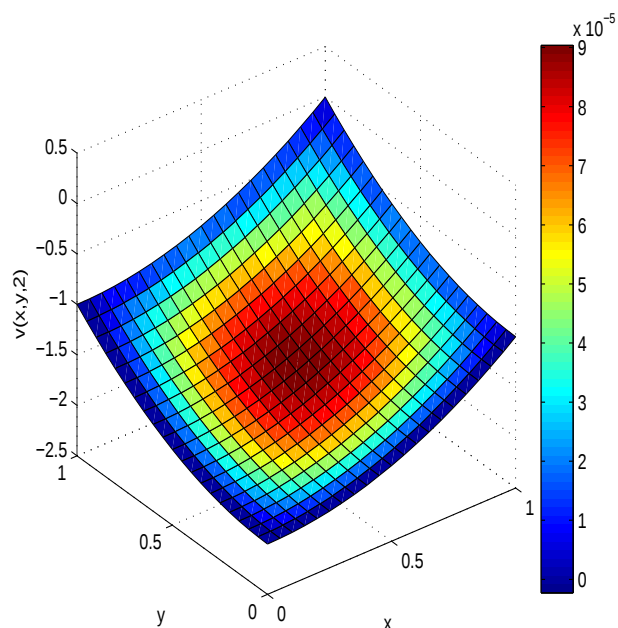
جدول ۳.۳: خطا در لحظه های زمانی متفاوت با $N = 441$ تعداد نقاط و $\Delta t = 0.005$

t	$\ e_u\ _\infty$	$\ e_v\ _\infty$
0.2	6.451428×10^{-5}	3.816598×10^{-4}
0.4	1.315446×10^{-4}	4.009743×10^{-4}
0.6	2.005670×10^{-4}	4.111255×10^{-4}
0.8	2.714080×10^{-4}	4.213505×10^{-4}
1	3.439055×10^{-4}	4.317110×10^{-4}
1.5	5.313506×10^{-4}	4.560768×10^{-4}
2	7.256817×10^{-4}	4.711232×10^{-4}



شکل ۲.۳: جواب عددی به دست آمده برای u در $t=2$ با $N=441$ تعداد نقاط و با خطا

$$\Delta t = 0.001$$



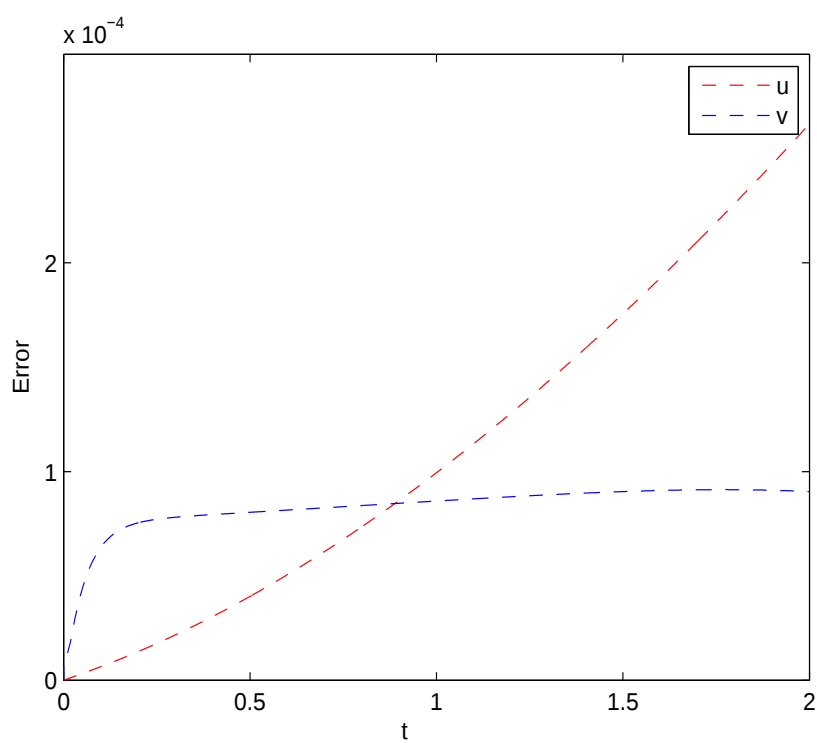
شکل ۳.۳: جواب عددی به دست آمده برای v در $t=2$ با $N=441$ تعداد نقاط و $\Delta t = 0.001$

برای نشان دادن همگرایی روش تکراری ارائه شده، جدول ۴-tab را در نظر بگیرید. در این جدول، متناظر با هر تکرار دو سطر وجود دارد که اولین سطر $\|e_u\|_\infty$ و دومین سطر $\|e_v\|_\infty$ را نشان می دهد. ITR یعنی شماره تکرار. بهبود دقت با افزایش تعداد تکرار زمانی که Δt بزرگتر باشد ملموس تر است، به عنوان مثال برای $\Delta t = 0.1$ و 0.05 (ستونهای اول و دوم).

به دلیل خطای حذف، برای گامهای زمانی کوچکتر، دقت جواب به دست آمده با افزایش تکرارها بهبود نمی یابد. نرم بی نهایت خطای جوابهای عددی به دست آمده برای u و v در برابر متغیر زمان، در شکل ۵ نشان داده شده است. در شکل ۵ ملاحظه می شود که با افزایش زمان خطای u افزایش می یابد. به علاوه رفتار v کاملاً متفاوت است. یک دلیل این پدیده این است که وابستگی u به متغیر زمان t مربعی است، در حالیکه وابستگی v به متغیر زمان خطی است و با فرمول تفاضلات متناهی (۳.۳) بهتر تقریب زده می شود.

جدول ۴.۳: خطا در $t = ۰/۵$ با $N = ۴۴۱$ تعداد نقاط و تکرارها و گامهای زمانی متفاوت

$\Delta t \rightarrow$	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۰۰۵
$ITR = ۰$	$۲/۵۰۷۶۴۶ \times ۱۰^{-۵}$ ۰/۰۰۱۹۹۹	$۱/۰۴۱۰۸۲ \times ۱۰^{-۵}$ ۰/۰۰۱۰۱۹	$۷/۷۹۵۴۲۸ \times ۱۰^{-۶}$ $۲/۰۳۰۷۰۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۸/۰۰۵۰۶۷ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۰۰۶۹۲۱ \times ۱۰^{-۴}$
$ITR = ۱$	$۹/۲۴۱۵۹۷ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۲۰۵۱۳۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۹۱۴۹۵۳ \times ۱۰^{-۶}$ 4.957661×۱۰^{-۵}	$۸/۷۸۷۹۱۴ \times ۱۰^{-۶}$ $۲/۰۰۹۳۰۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۷۸۳۱۴۹ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۲۲۵۴۷۲ \times ۱۰^{-۵}$
$ITR = ۲$	$۸/۷۷۴۱۷۰ \times ۱۰^{-۶}$ $۲/۳۵۴۱۴۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۷۸۰۰۷۵ \times ۱۰^{-۶}$ $۸/۲۳۵۸۶۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۸/۷۸۱۴۹۲ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۱۹۵۴۳۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۷۸۱۵۰۷ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۱۹۵۷۹۸ \times ۱۰^{-۵}$
$ITR = ۳$	$۸/۷۸۰۶۹۶ \times ۱۰^{-۶}$ $۲/۳۷۳۳۰۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۷۸۱۳۴۳ \times ۱۰^{-۶}$ $۸/۳۷۰۲۳۴ \times ۱۰^{-۶}$	$۸/۷۸۱۵۰۳ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۱۹۵۶۰۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۷۸۱۵۰۹ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۱۹۵۸۲۹ \times ۱۰^{-۵}$
$ITR = ۴$	$۸/۷۸۰۵۹۵ \times ۱۰^{-۶}$ $۲/۳۷۲۹۰۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۷۸۱۳۲۷ \times ۱۰^{-۶}$ $۸/۳۶۸۴۳۷۰ \times ۱۰^{-۶}$	$۸/۷۸۱۵۰۳ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۱۹۵۶۰۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۷۸۱۵۰۹ \times ۱۰^{-۶}$ $۱/۱۹۵۸۲۹ \times ۱۰^{-۵}$



شکل ۴.۳: خطا در برابر زمان با ۴۴۱ نقطه و $\Delta t = 0.001$

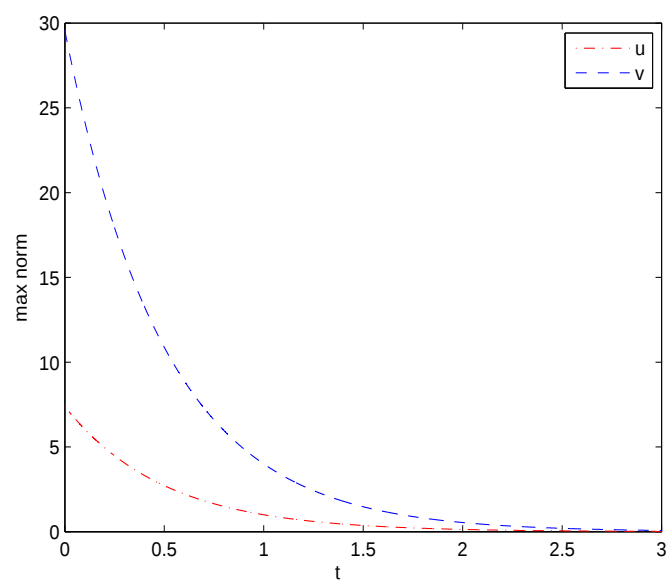
مثال ۲. برای مثال دوم، سیستم معادلات با مشتقات جزئی سهموی و خطی زیر را در ناحیه دو بعدی $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 16u,\end{aligned}$$

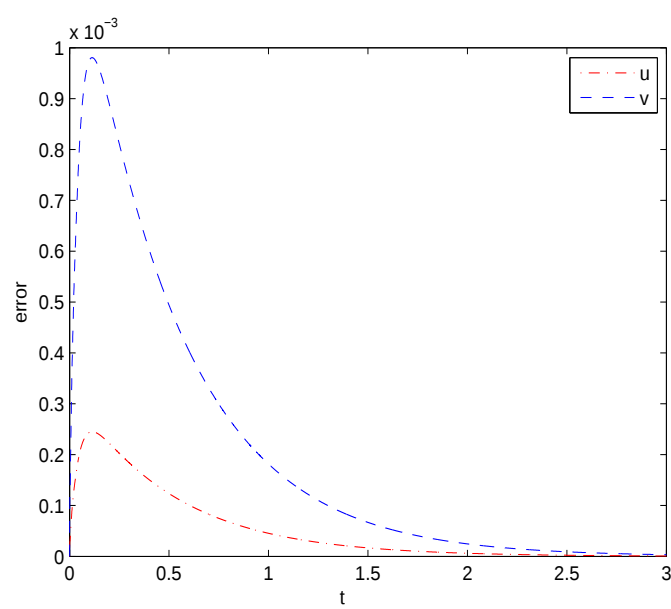
شرایط مرزی و آغازین به طریقی انتخاب شده اند که جواب دقیق عبارت است از:

$$\begin{aligned}u(x, y, t) &= \exp(x + y - 2t), \\ v(x, y, t) &= -4\exp(x + y - 2t).\end{aligned}$$

در این مثال، همه محاسبات با $N=441$ نقطه انجام شده است. نرم ماکسیمم جواب عددی به دست آمده و نرم ماکسیمم خطای آن در شکلها آورده شده است.



شکل ۵.۳: نرم ماکسیمم جواب عددی با ۴۴۱ نقطه و $\Delta t = 0.0005$



شکل ۶.۳: نرم ماکسیمم خطای جوابهای عددی به دست آمده با گام زمانی ثابت $\Delta t = 0.0005$

نرم ماکسیمم u در لحظه زمانی t_k یا $\|u^k\|_\infty$ ، به صورت زیر تعریف شده است:

$$\|u^k\|_\infty = \max\{|u_i^k|, \quad i = 1, 2, \dots, N\},$$

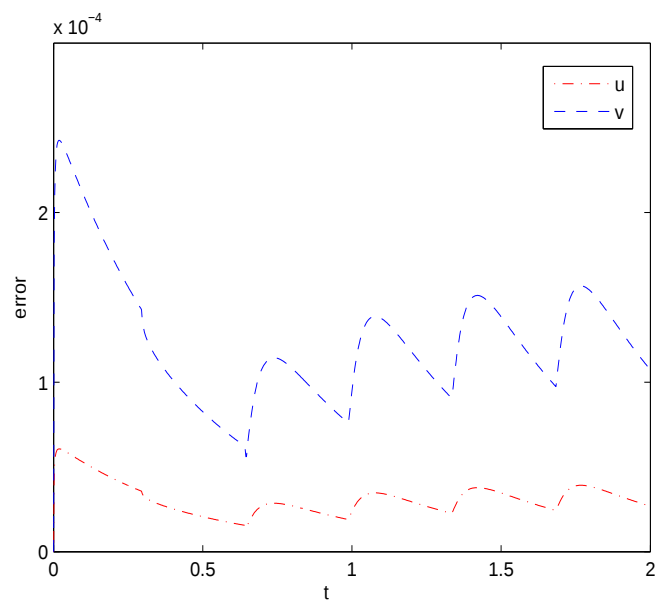
که در آن $u_i^k = u(\mathbf{x}_i, k\Delta t)$ و N تعداد نقاط است. از شکل fig-۷ مشاهده می شود که نزدیک زمان آغازین، $t = 0$ خطاها افزایش می یابند و سپس کاهش می یابند. این پدیده در مورد تابع v آشکارتر است. این موضوع را اینگونه می توان تشریح کرد که تغییرات دما در نزدیکی لحظه آغازین بسیار سریع است و در لحظه های زمانی بعدی تغییرات آرام و هموار است. برای اینگونه مسائل، با استفاده از گامهای زمانی متغیر جوابهای دقیق تری می توان به دست آورد؛ به این صورت که گام زمان را در نزدیکی لحظه آغازین بسیار کوچک اختیار می کنیم و با گذشت زمان و هموارتر شدن جواب آن را بزرگتر می کنیم. انتخاب گام زمانی بسیار کوچک و ثابت نگه داشتن آن وقت گیر بوده و ضروری نیز نمی باشد. بنابراین ما یک اندازه بین جوابهای عددی $U(x, \cdot)$ دو لحظه زمانی متوالی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Delta U_{t_k} = \|u^k(\mathbf{x}) - u^{k-1}(\mathbf{x})\|_\infty, \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, K. \quad (14.3)$$

که پارامتر τ به وسیله کاربر تعریف می شود، اگر $\Delta U_{t_k} < \tau$ گام زمان راحت تر (بزرگتر) می شود:

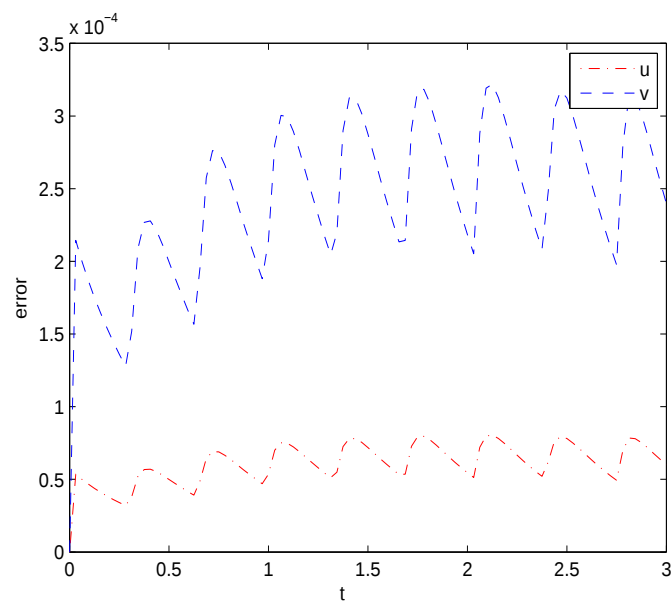
$$\Delta t \leftarrow 2\Delta t$$

این تغییرات در گام زمانی تا زمانی انجام می شود که Δt از یک مقدار از پیش تعیین شده ای، Δt_{max} تجاوز نکند. شکلهای fig-۸ و fig-۹ خطای ماکسیمم به دست آمده را به ازای مقادیر متفاوت Δt و τ نشان می دهند. برای اطلاعات بیشتر و مفید در زمینه انتخاب گام زمانی متغیر، مرجع [۷۷] را ببینید.



شکل ۷.۳: ماکسیمم خطای جوابهای عددی به دست آمده با گام زمانی متغیر و گام آغازین

$$\tau = 0.002 \text{ و } \Delta t = 2^{-15}$$



شکل ۸.۳: ماکسیمم خطای جوابهای عددی به دست آمده با گام زمانی متغیر و گام آغازین

$$\tau = 0.004 \text{ و } \Delta t = 2^{-17}$$

۵.۳ نتیجه گیری

در این فصل، یک روش بدون شبکه، بر اساس فرم ضعیف مساله و معادلات انتگرال محلی، برای حل عددی جفت معادلات غیر خطی پخش ارائه شد. متغیر زمان با استفاده از روش تفاضلات متناهی گسسته شد، برای مسائلی که جواب به صورت سریع تغییر می کند روش گامهای زمانی متغیر را ارائه دادیم و در مورد مسائل غیر خطی یک روش تکراری در هر گام زمانی ارائه کردیم. چندین روش محاسباتی جهت اجرای روش ارائه نمودیم و دقت روش با مثالهای عددی که جواب دقیق به عنوان مرجع در اختیار بود تایید شد.

فصل ۴

حل عددی معادلات پخش دو بعدی با یک
شرط انتگرالی

۱.۴ مقدمه

در مدل‌سازی پدیده‌های متعددی در علوم و مهندسی، یک معادله انتگرال روی کل دامنه یا روی مرز ظاهر می‌شود. چنین مسائل مقدار مرزی به مسائل غیر کلاسیک معروفند. اینگونه مسائل در کاربردهای متفاوتی مانند انتقال گرما [۵۹، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷]، نظریه کنترل [۳۸]، ترموالاستیسیته [۳۹، ۴۰]، علوم درمانی [۶۳] و غیره ظاهر می‌شوند. هدف این فصل، ارائه یک روش بدون شبکه برای حل عددی معادلات پخش دوبعدی و وابسته به زمان زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (1.4)$$

که شرایط آغازین و مرزی به صورت زیر داده شده‌اند:

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad (2.4)$$

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(1, y, t) = g_1(y, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u(x, 0, t) = h_0(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(x, 1, t) = h_1(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

و شرط انتگرال زیر بایستی برقرار باشد:

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) dx dy = m(t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (3.4)$$

که در معادلات فوق، توابع f, g_0, g_1, h_0, h_1 و m معلوم هستند و u و μ مجهولند و باید محاسبه شوند. وجود و یکتائی جواب این مساله غیر کلاسیک در مرجع [۳۳] مطالعه و بررسی شده است. به علت اهمیت اینگونه مسائل در علوم و مهندسی، تکنیکهای محاسباتی متعددی برای محاسبه جوابهای عددی آنها ارائه شده است، [۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶].

مطالب این فصل به شکل زیر ارائه گردیده است: در بخش ۴/۲ روشهای تفاضلات تقسیم شده که به کار برده شده را تشریح میکنیم. در بخش ۴/۳ در رابطه با فرمولسازی مساله به صورت معادلات ضعیف محلی توضیحاتی را ارائه می دهیم. گسسته سازی مساله و اجرای روش عددی پیشنهادی در بخش ۴/۴ تشریح می شوند. برای نشان دادن کارائی و دقت روش ارائه شده، دو مثال عددی در بخش ۴/۵ ارائه شده اند. و در نهایت در بخش ۴/۶ نتیجه ها را به طور خلاصه می آوریم.

۲.۴ تقریب تفاضلات متناهی

در این فصل، از روش تفاضلات متناهی جهت گسسته سازی و حذف متغیر زمان استفاده می کنیم. برای این منظور، از تقریب تفاضلات متناهی زیر برای مشتق نسبت به زمان استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \cong \frac{1}{\Delta t} (u^{k+1}(x, y) - u^k(x, y)). \quad (4.4)$$

همچنین با استفاده از تقریب کرانک نیکلسون، از تقریب زیر نیز بهره می گیریم:

$$\nabla^2 u(x, y, t) = \frac{1}{\tau} (\nabla^2 u^{k+1}(x, y) + \nabla^2 u^k(x, y)), \quad (5.4)$$

که $u^k(x, y) = u(x, y, k\Delta t)$ با در نظر گرفتن این تقریبها، معادله وابسته به زمان (۱.۵) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$u^{k+1}(x, y) - \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \nabla^2 u^{k+1}(x, y) = u^k(x, y) + \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \nabla^2 u^k(x, y). \quad (۶.۴)$$

۳.۴ فرم ضعیف محلی

به جای ارائه فرم ضعیف مساله روی کل دامنه، روش MLPG فرم ضعیف مساله را روی زیردامنه های محلی مانند Ω_s می سازد که یک ناحیه کوچکی است که برای هر گره در نظر گرفته می شود. زیر دامنه های محلی ممکن است هم پوشانی داشته باشند و ممکن است که کل ناحیه را نپوشانند. این زیردامنه ها میتوانند به هر شکل و اندازه ای باشند، در اینجا به فرم دایره گرفته شده اند. فرم ضعیف محلی معادله (۱.۵) برای $\mathbf{x}^i = (x^i, y^i) \in \Omega_s^i$ به شکل زیر است:

$$\int_{\Omega_s^i} \left[u^{k+1} - \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \nabla^2 u^{k+1} \right] v d\mathbf{x} = \int_{\Omega_s^i} \left[u^k + \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \nabla^2 u^k \right] v d\mathbf{x}, \quad (۷.۴)$$

که v تابع آزمون است. با استفاده از قضیه دیورژانس، معادله (۷.۴) معادله زیر را نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s^i} u^{k+1} v d\mathbf{x} + \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \int_{\Omega_s^i} \nabla u^{k+1} \nabla v d\mathbf{x} - \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \int_{\partial\Omega_s^i} v \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Omega_s^i} u^k v d\mathbf{x} - \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \int_{\Omega_s^i} \nabla u^k \nabla v d\mathbf{x} + \frac{\alpha\Delta t}{\gamma} \int_{\partial\Omega_s^i} v \frac{\partial u^k}{\partial n} ds, \end{aligned} \quad (۸.۴)$$

که در آن Ω_s^i یک زیردامنه محلی متناظر با نقطه i است، یعنی یک دایره به مرکز $\mathbf{x}^i$ با شعاع r_0 و $\partial\Omega_s^i$ مرز Ω_s^i است، $n = (n_1, n_2)$ بردار نرمال خارجی مرز $\partial\Omega_s^i$ است، و

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_1 + \frac{\partial u}{\partial y} n_2,$$

مشتق نرمال است، یعنی مشتق جهتی در راستای بردار نرمال. اگر تابع پله ای هوی ساید

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_s, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_s, \end{cases}$$

به عنوان تابع از مون در هر زیردامنه استفاده شود، خواهیم داشت $\nabla v = 0$ و فرم ضعیف محلی (۸.۴) به معادلات انتگرال محلی زیر تبدیل می شود:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s^i} u^{k+1} d\mathbf{x} - \frac{\alpha \Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Omega_s^i} u^k d\mathbf{x} + \frac{\alpha \Delta t}{2} \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial u^k}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (9.4)$$

با به کار بردن تقریب مکانی برای تابع مجهول، معادلات انتگرال محلی (۴.۵) به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می شوند که مجهولات آن مقادیر تابع در نقاط می باشند. در بخش بعدی این موضوع تشریح شده است.

۴.۴ گسسته سازی و اجرای روش

N نقطه در نظر بگیرید که داخل ناحیه و روی مرز قرار گرفته اند، به طوری که فاصله بین دو نود متوالی ثابت و برابر با h است. با فرض اینکه $\mu(k\Delta t)$ و $u(\mathbf{x}^i, k\Delta t)$ برای $i = 1, 2, \dots, N$

معلوم هستند، هدف ما محاسبه $\mu((k+1)\Delta t)$ و $u(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t)$ برای $i = 1, 2, \dots, N$ می باشد. بنابراین، تعداد مجهولات برابر $N+1$ و حداقل همین تعداد معادله برای پیدا کردن مجهولات نیاز داریم. به روشی که در ادامه توضیح داده می شود، متناظر هر نقطه یک معادله بدست می آوریم و یک معادله نیز از گسسته سازی شرط انتگرال بدست می آید که در مجموع $N+1$ معادله مورد نیاز به دست می آید. شیوه به دست آوردن معادلات: برای نودهایی که در داخل ناحیه قرار گرفته اند، یعنی یک نقطه درونی دامنه هستند، از (۴.۵) و با استفاده از تقریب کمترین مربعات متحرک معادلات خطی زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_s^i} \phi_j d\mathbf{x} \right) u_j^{k+1} - \frac{\alpha \Delta t}{2} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial \Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \right) u_j^{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_s^i} \phi_j d\mathbf{x} \right) u_j^k + \frac{\alpha \Delta t}{2} \sum_{j=1}^N \left(\int_{\partial \Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \right) u_j^k. \end{aligned} \quad (10.4)$$

برای گرههایی که روی مرز هستند، چند حالت در نظر می گیریم:

(b۱) برای گرههایی که روی مرز $0 \leq y \leq 1$ و $x = 0$ قرار دارند، با استفاده از (۴۴) داریم:

$$u^{k+1}(\mathbf{x}^i) = g_0(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t).$$

(b۲) برای گرههایی که روی مرز $0 \leq y \leq 1$ و $x = 1$ قرار دارند، با استفاده از (۴۴) داریم:

$$u^{k+1}(\mathbf{x}^i) = g_1(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t).$$

(b۳) برای گرههایی که روی مرز $0 \leq x \leq 1$ و $y = 1$ قرار دارند، با استفاده از (۴۴) داریم:

$$u^{k+1}(\mathbf{x}^i) = h_1(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t).$$

(b۴) برای گرههایی که روی مرز $0 \leq x \leq 1$ و $y = 0$ قرار دارند، با استفاده از (۴۴) داریم:

$$u^{k+1}(\mathbf{x}^i) - h_0(\mathbf{x}^i)\mu^{k+1} = 0.$$

در اینجا، روش انتگرال گیری عددی که برای شکستن شرط انتگرال استفاده کرده ایم، قاعده سیمپسون است که دارای خطای برشی از مرتبه چهار است. در اینجا قابل ذکر است که در صورت نامنظم بودن نقاط می توان از روشهای انتگرال گیری مونتی- کارلو نیز استفاده کرد. بنابراین انتگرال دوگانه (۳.۵) به صورت زیر تقریب زده می شود:

$$\int_0^1 \int_0^1 u^{k+1}(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^N d_j u_j^{k+1} = m((k+1)\Delta t), \quad (11.4)$$

که d_j ها ضرایب قاعده انتگرالگیری مرکب سیمپسون هستند. با در نظر گرفتن آنچه تا به اینجا گفته شد، سیستم معادلات خطی زیر را داریم:

$$\left[A - \frac{\alpha \Delta t}{2} B \right] \begin{pmatrix} U^{k+1} \\ \mu^{k+1} \end{pmatrix} = \left[C + \frac{\alpha \Delta t}{2} B \right] \begin{pmatrix} U^k \\ \mu^k \end{pmatrix} + F, \quad (12.4)$$

که $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ و $C = (c_{i,j})$ ماتریسهای مربعی $(N+1) \times (N+1)$ هستند، $U^k = (u_i^k)$ که $u_i^k = u(\mathbf{x}^i, k\Delta t)$ و $F = (f_i)$ یک بردار $N+1$ تایی است. درایه های این ماتریس ها به صورت زیر هستند: (۱) اگر $\mathbf{x}^i$ یک نقطه درونی Ω باشد، آنگاه:

$$a_{i,j} = c_{i,j} = \int_{\Omega_s^i} \phi_j d\mathbf{x}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (13.4)$$

$$b_{i,j} = \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} d\mathbf{s} \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

(۲) اگر $\mathbf{x}^i$ متعلق به مرز $\mathbf{b}_1$ که در بالا ذکر شد باشد، آنگاه:

$$a_{i,i} = 1, \quad f_i = g_0(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t). \quad (14.4)$$

(۳) اگر $\mathbf{x}^i$ متعلق به مرز $\mathbf{b}_2$ که در بالا ذکر شد باشد، آنگاه:

$$a_{i,i} = 1, \quad f_i = g_1(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t). \quad (15.4)$$

(۴) اگر $\mathbf{x}^i$ متعلق به مرز $\mathbf{b}_3$ که در بالا ذکر شد باشد، آنگاه:

$$a_{i,i} = 1, \quad f_i = h_1(\mathbf{x}^i, (k+1)\Delta t). \quad (16.4)$$

(۵) اگر $\mathbf{x}^i$ متعلق به مرز $\mathbf{b}_4$ که در بالا ذکر شد باشد، آنگاه:

$$a_{i,i} = 1, \quad a_{i,N+1} = -h_0(\mathbf{x}^i). \quad (17.4)$$

(۶) $a_{N+1,j} = d_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, که d_j ها ضرایب قاعده انتگرال گیری مرکب سیمسون

هستند و $f_{N+1} = m((k+1)\Delta t)$.

و در نهایت، همه درایه هایی که در بالا ذکر نشد، برابر صفر است.

۵.۴ مثالهای عددی

جهت بررسی دقت و کارایی روشی که در این فصل ارائه شد، در این قسمت دو مثال عددی ارائه می کنیم. در هر دو مثال، از قاعده انتگرالگیری دو نقطه ای گاوسی برای محاسبه انتگرالهای روی دامنه و هشت نقطه ای گاوسی برای انتگرالگیری روی مرز استفاده می کنیم. خطای نسبی که در اینجا

ارائه شده از فرمول زیر محاسبه شده است [۴۷]،

$$e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - \hat{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^N u_i^2}}.$$

برای نمایش رفتار جواب و دقت روش، جوابهای دقیق و جوابهای عددی به دست آمده در دو لحظه زمانی در شکلهای ۱ و ۲ برای مثال اول و ۳ و ۴ برای مثال دوم این فصل نشان داده شده اند. این مثالها در مراجع [۴۴، ۴۵، ۶۴] نیز بررسی شده اند. مثال ۱. به عنوان مثال اول، معادلات (۱.۵)-(۳.۵) را با $\alpha = 1$ و شرایط زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = \exp(x + y),$$

$$g_0(y, t) = \exp(y + 2t),$$

$$g_1(y, t) = \exp(1 + y + 2t),$$

$$h_1(x, t) = \exp(1 + x + 2t),$$

$$h_0(x) = \exp(x),$$

$$m(t) = \exp(2t) (\exp(2) - 2\exp(1) + 1),$$

که جواب دقیق این مساله به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = \exp(x + y + 2t)$$

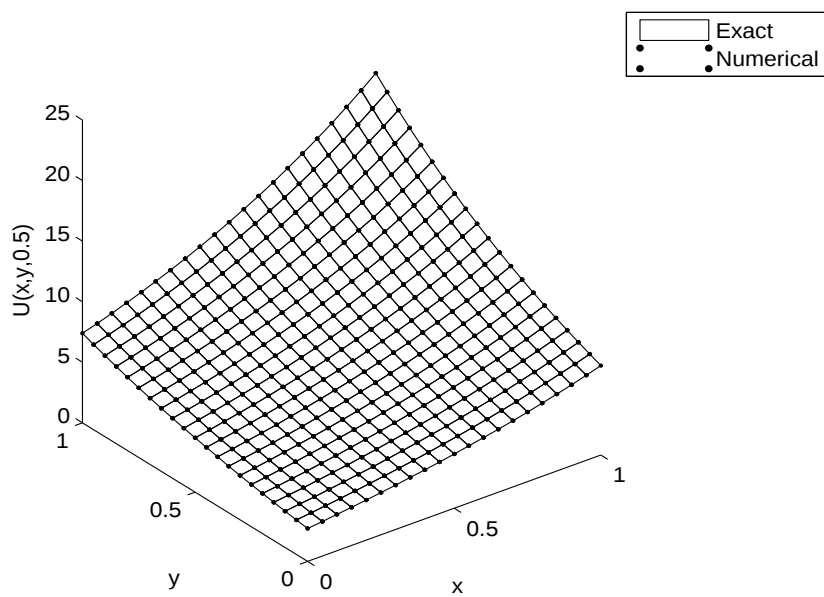
$$\mu(t) = \exp(2t),$$

محاسبات این مثال با $h = 0.5$ و $r_0 = 4r_*$ اجرا شده است که در آن h کمترین فاصله بین دو نود متوالی است و r_* شعاع زیر دامنه های محلی است. در کمترین مربعات متحرک، پایه های مربعی استفاده شده است. نتایج نسبت به پارامتر c_i تقریباً حساس است و نتایج این مثال با $c_i = 0.04$ به

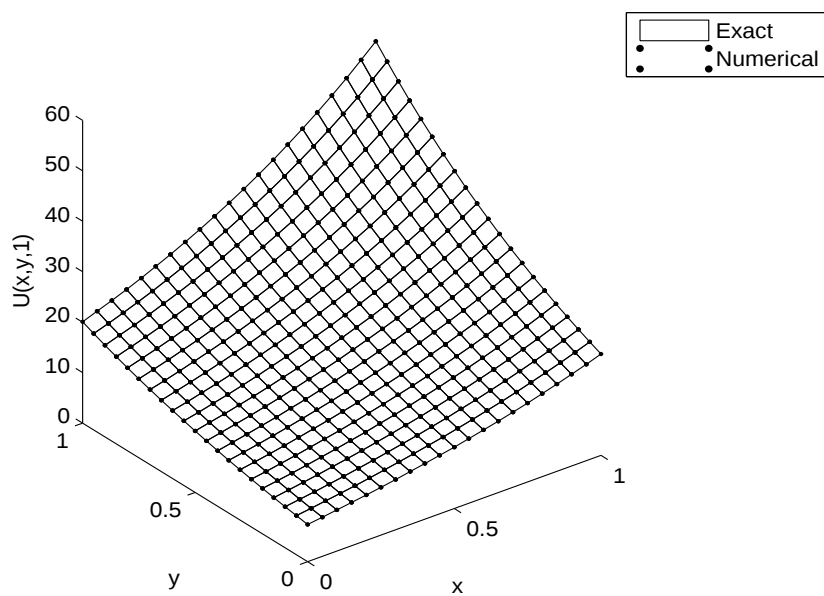
جدول ۱۰۴: نتایج به دست آمده برای مثال اول فصل چهارم

t	Exact μ	Approximate μ	Absolute-error μ	Relative-error u
۰/۱	۱/۲۲۱۴	۱/۲۲۱۷	$۲/۵۰۴۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۸۹۸۳ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۲	۱/۴۹۱۸	۱/۴۹۲۰	$۱/۹۰۱۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۵۹۷۶ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۳	۱/۸۲۲۱	۱/۸۲۲۴	$۲/۸۷۷۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۰۴۳۹ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۴	۲/۲۲۵۵	۲/۲۲۵۹	$۳/۲۵۱۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۴۸۷ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۵	۲/۷۱۸۲	۲/۷۱۸۶	$۴/۰۷۶۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۹۱۲۹ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۶	۳/۳۲۰۱	۳/۳۲۰۶	$۴/۹۶۹۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۸۴۲ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۷	۴/۰۵۵۲	۴/۰۵۵۸	$۶/۰۱۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۸۵۰ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۸	۴/۹۵۳۰	۴/۹۵۳۷	$۷/۴۴۹۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۹۱۲ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۹	۶/۰۴۹۶	۶/۰۵۰۵	$۸/۹۵۹۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۷۸۴ \times ۱۰^{-۵}$
۱/۰	۷/۳۸۹۰	۷/۳۹۰۱	$۹/۱۱۱۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۸۹۱۸ \times ۱۰^{-۵}$

دست آمده اند. نتایج به دست آمده برای u و μ در چندین لحظه زمانی با $\Delta t = ۰/۱$ و $N = ۴۴۱$ در جدول شماره ۱ این فصل آورده شده اند.



شکل ۱.۴: جواب تقریبی و دقیق در $t = ۰/۵$ برای مثال ۱.



شکل ۲.۴: جواب تقریبی و دقیق در $t = ۱$ برای مثال ۱

مثال ۲. برای مثال دوم، معادلات (۱.۵)–(۳.۵) را با $\alpha = 1$ و شرایط زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = (1 + y)\exp(x),$$

$$g_0(y, t) = \exp(y + 2t),$$

$$g_1(y, t) = (1 + y)\exp(1 + t),$$

$$h_1(x, t) = 2\exp(x + t),$$

$$h_0(x) = \exp(x),$$

$$m(t) = \frac{3}{2}(\exp(1) - 1)\exp(t),$$

که جواب دقیق مساله به صورت زیر داده شده است:

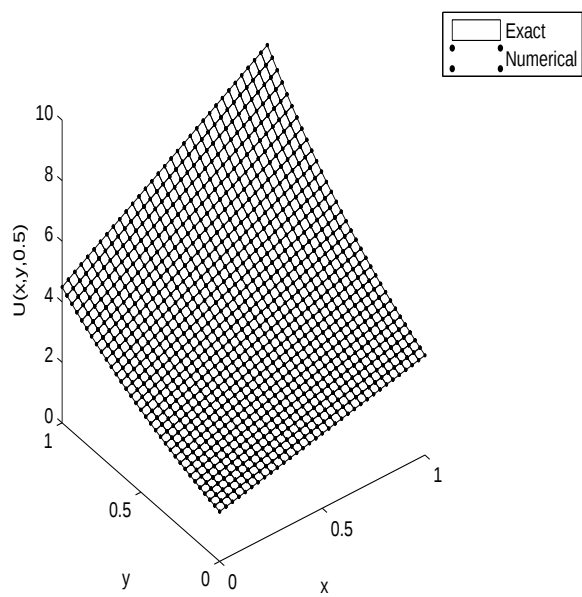
$$u(x, y, t) = (1 + y)\exp(x + t)$$

$$\mu(t) = \exp(t),$$

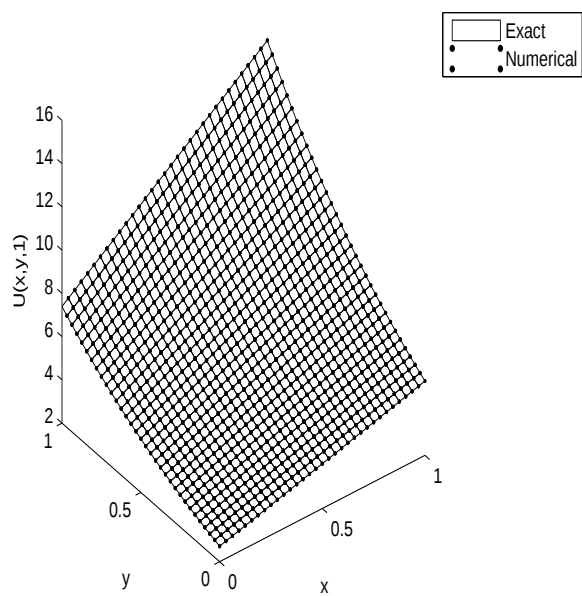
برای این مثال، محاسبات با $h = 0.5$ و $r_0 = 4r_0$ به دست آمده اند که h مینیمم فاصله بین دو نود متوالی است و r_0 شعاع زیر دامنه محلی است. مانند مثال قبلی در کمترین مربعات متحرک از پایه مربعی استفاده شده است. و در این مثال پارامتر c_i با $c_i = 0.025$ ثابت است. نتایج به دست آمده برای این مثال در سطوح زمانی مختلف و با $\Delta t = 0.1$ و $N = 1089$ در جدول شماره ۲ نشان داده شده اند.

جدول ۲.۴: نتایج به دست آمده برای مثال دوم فصل چهارم

t	Exact μ	Approximate μ	Absolute-error μ	Relative-error u
۰/۱	۱/۱۰۵۲	۱/۱۰۵۵	$۳/۷۵۳۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۵۱۲۹ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۲	۱/۲۲۱۴	۱/۲۲۱۵	$۱/۷۳۲۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۹۲۱۹ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۳	۱/۳۴۹۸	۱/۳۵۰۲	$۳/۷۰۸۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۱۶۳۶ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۴	۱/۴۹۱۸	۱/۴۹۲۱	$۲/۶۲۶۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۳۹۰۸ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۵	۱/۶۴۸۷	۱/۶۴۹۱	$۴/۱۸۳۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۹۰۹۲ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۶	۱/۸۲۲۱	۱/۸۲۲۴	$۳/۴۷۲۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۵۰۴۳ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۷	۲/۰۱۳۷	۲/۰۱۴۲	$۴/۸۹۲۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۸۱۵۷ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۸	۲/۲۲۵۵	۲/۲۲۶۰	$۴/۴۲۹۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۵۵۹۷ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۹	۲/۴۵۹۶	۲/۴۶۰۱	$۵/۸۰۸۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۷۶۵۲ \times ۱۰^{-۵}$
۱/۰	۲/۷۱۸۳	۲/۷۱۸۹	$۵/۵۶۱۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۵۹۳۴ \times ۱۰^{-۵}$



شکل ۳.۴: جواب دقیق و تقریبی در $t = 0.5$ برای مثال ۲.



شکل ۴.۴: جواب دقیق و تقریبی در $t = 1$ برای مثال ۲.

۶.۴ نتیجه گیری

در این فصل، یک روش بدون شبکه بر اساس روش MLPG و روش هم محلی برای بررسی جوابهای عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دو بعدی و سهموی با شرایط مرزی غیر کلاسیک ارائه گردید. برای گسسته سازی متغیر زمان از روشهای تفاضلات متناهی استفاده گردید. از تابع پله ای واحد جهت تابع آزمون در معادلات ضعیف محلی استفاده گردید. اساس روش MLPG استفاده از معادلات ضعیف محلی و تقریب کمترین مربعات متحرک است. به علت فقدان خاصیت دلتای کرونکر در تقریب کمترین مربعات متحرک، شرایط مرزی دیریکله دقیقاً تحمیل نمی شوند. با استفاده از روش هم محلی که برای گرهای مرزی به کار برده شد، این شرایط مرزی به طور دقیق تحمیل می شوند. شرط غیر کلاسیک انتگرالی، با استفاده از قاعده سیمسون گسسته شد. روش ارائه شده برای معادله پخش دو بعدی با یک شرط انتگرال، بسیار خوب کار کرد و دقت جوابهای به دست آمده بالا بود.

فصل ۵

حل عددی معادلات پخش غیر کلاسیک دو
بعدي با شرایط مرزی نیومن

۱.۵ مقدمه

در این فصل، یک روش بدون شبکه بر اساس روش MLPG برای حل عددی معادلات دیفرانسیل سهموی دوبعدی با شرایط مرزی غیرکلاسیک و نیومن ارائه می شود. یکی از مشکلات در به کارگیری روش MLPG تحمیل شرایط مرزی است. دو تکنیک جدید برای تحمیل شرایط مرزی نیومن در دامنه های مربعی ارائه شده است. این تکنیک ها از روشهای تفاضلات متناهی و تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده می کنند. به طور خاص معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (۱.۵)$$

با شرط آغازین

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad (۲.۵)$$

و شرایط مرزی

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} &= g_0(y, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{\partial u(1, y, t)}{\partial x} &= g_1(y, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u(x, 1, t) &= h_1(x, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, 0, t) &= h_0(x)\mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

و شرط غیر کلاسیک انتگرال

$$\int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) dx dy = m(t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (۳.۵)$$

که در آن f, g, g_1, h, h_1 و m توابع معلومی هستند و توابع u و μ مجهول هستند. دهقان در مرجع [۶۴] یک روش تفاضل متناهی مرتبه دو برای حل معادله بالا ارائه داده است که در مقایسه با آن، روش ارائه شده در این فصل از دقت بیشتری برخوردار است.

۲.۵ روند فرمولسازی عددی

مشابه روند به کار برده شده در فصل قبل برای حذف متغیر زمان، معادله بالا به معادله زیر تبدیل می شود:

$$u^{k+1}(x, y) - \frac{\Delta t}{\gamma} \nabla^2 u^{k+1}(x, y) = u^k(x, y) + \frac{\Delta t}{\gamma} \nabla^2 u^k(x, y). \quad (۱.۵)$$

برای تحمیل شرایط نیومن، از فرمولهای تفاضلات تقسیم شده زیر استفاده می کنیم که از مرتبه ۳ هستند:

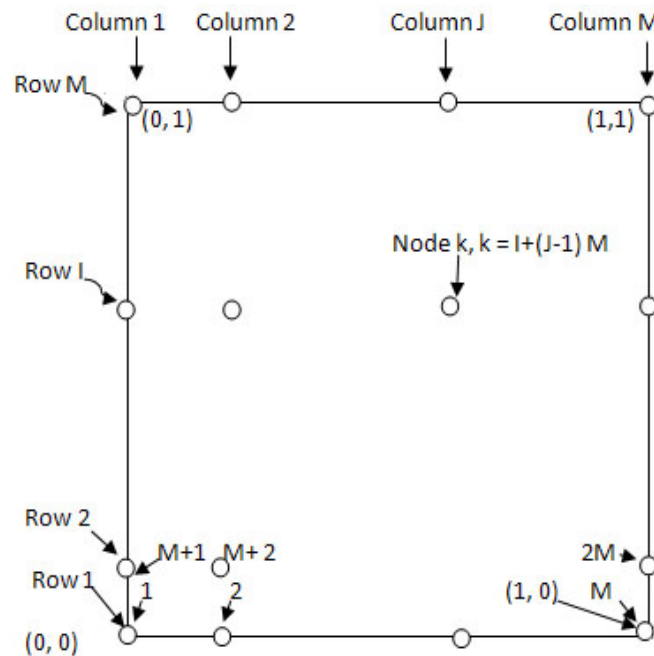
$$\left. \frac{\partial u^k(x, y)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{h} \left(-\frac{11}{6} u^k(0, y) + 3 u^k(h, y) - \frac{3}{2} u^k(2h, y) + \frac{1}{3} u^k(3h, y) \right),$$

$$\left. \frac{\partial u^k(x, y)}{\partial x} \right|_{x=1} = \frac{1}{h} \left(\frac{11}{6} u^k(1, y) - 3 u^k(1-h, y) + \frac{3}{2} u^k(1-2h, y) - \frac{1}{3} u^k(1-3h, y) \right). \quad (۳.۵)$$

فرم ضعیف محلی معادله (۱.۵) برای $\mathbf{x}^i = (x^i, y^i) \in \Omega_s^i$ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_s^i} u^{k+1} d\mathbf{x} - \frac{\Delta t}{\gamma} \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial u^{k+1}}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Omega_s^i} u^k d\mathbf{x} + \frac{\Delta t}{\gamma} \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial u^k}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

که Ω_s^i یک دایره به مرکز $\mathbf{x}^i$ با شعاع r_0 است و $\partial\Omega_s^i$ مرز Ω_s^i می باشد. N نقطه که به طور منظم در دامنه مساله و مرزهای آن پخش شده است را در نظر بگیرید به طوری که فاصله بین دو نود متوالی در هر جهت مساوی و برابر h می باشد. در شکل زیر شیوه نامگذاری نقاط را مشاهده می کنیم:



شکل ۱: تعداد $NM \times M$ = نقطه در بازه $[0, 1] \times [0, 1]$ و نامگذاری آنها.

با فرض اینکه $\hat{u}_i^k$ برای $i = 1, 2, \dots, N$ و $\hat{\mu}_k$ معلوم هستند، هدف محاسبه $\hat{u}_i^{k+1}$ برای $i = 1, 2, \dots, N$ و $\hat{\mu}^{(k+1)}$ است. بنابراین $N + 1$ مجهول داریم و برای محاسبه این مجهولات به حداقل $N + 1$ معادله نیاز داریم. همانگونه که در زیر توضیح خواهیم داد، متناظر هر نقطه یک معادله به دست می آوریم. پس تعداد N متناظر نقاط به دست می آیند. یک معادله دیگر نیاز داریم که با گسسته سازی شرط مرزی انتگرالی به دست خواهد آمد. متناظر نقاطی که در داخل دامنه (و نه روی مرز) قرار دارند، با استفاده از معادله ۴.۵ و تقریب کمترین مربعات متحرک، معادله خطی زیر

بدست می آید.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_s^i} \phi_j d\mathbf{x} \hat{u}_j^{k+1} - \frac{\Delta t}{\mathfrak{r}} \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \hat{u}_j^{k+1} \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_s^i} \phi_j d\mathbf{x} \hat{u}_j^k + \frac{\Delta t}{\mathfrak{r}} \sum_{j=1}^N \int_{\partial\Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds \hat{u}_j^k. \end{aligned} \quad (5.5)$$

متناظر نقاطی که روی مرز قرار دارند، دو الگوریتم برای تحمیل شرایط مرزی ارائه می کنیم:

۱.۲.۵ الگوریتم الف

(a۱) برای نقطه $(\circ, y^l) = \mathbf{x}^l$ روی مرز عمودی چپ ($\circ \leq y^l \leq 1$)، با استفاده از معادله (۲.۵) و تقریب کمترین مربعات متحرک داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^{k+1}(\mathbf{x}^l)}{\partial x} \approx \\ & \frac{1}{h} \left(-\frac{11}{\mathfrak{e}} \sum_{i=1}^{n^l} \phi_i(\mathbf{x}^l) \hat{u}_i^{k+1} + \mathfrak{r} \sum_{i=1}^{n^{l+1}} \phi_i(\mathbf{x}^{l+1}) \hat{u}_i^{k+1} - \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \sum_{i=1}^{n^{l+\mathfrak{r}}} \phi_i(\mathbf{x}^{l+\mathfrak{r}}) \hat{u}_i^{k+1} + \right. \\ & \left. \frac{1}{\mathfrak{r}} \sum_{i=1}^{n^{l+\mathfrak{r}}} \phi_i(\mathbf{x}^{l+\mathfrak{r}}) \hat{u}_i^{k+1} \right) + O(h^{\mathfrak{r}}) = g_{\circ}(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \end{aligned}$$

با $(\circ \leq y^l \leq 1)$ برای نقطه $(a\mathfrak{r}, y^l) = \mathbf{x}^l$ روی مرز عمودی سمت راست ($\circ \leq y^l \leq 1$) با استفاده از معادله (۳.۵) و تقریب کمترین مربعات متحرک داریم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u^{k+1}(\mathbf{x}^l)}{\partial x} \approx \\ & \frac{1}{h} \left(\frac{11}{\mathfrak{e}} \sum_{i=1}^{n^l} \phi_i(\mathbf{x}^l) \hat{u}_i^{k+1} - \mathfrak{r} \sum_{i=1}^{n^{l-1}} \phi_i(\mathbf{x}^{l-1}) \hat{u}_i^{k+1} + \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \sum_{i=1}^{n^{l-\mathfrak{r}}} \phi_i(\mathbf{x}^{l-\mathfrak{r}}) \hat{u}_i^{k+1} + \right. \\ & \left. - \frac{1}{\mathfrak{r}} \sum_{i=1}^{n^{l-\mathfrak{r}}} \phi_i(\mathbf{x}^{l-\mathfrak{r}}) \hat{u}_i^{k+1} \right) + O(h^{\mathfrak{r}}) = g_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \end{aligned}$$

با $(\mathbf{a}^3 \mathbf{x}^{l-a} = (1 - ah, y^l))$ برای نقاط $\mathbf{x}^l = (x^l, 1)$ روی مرز افقی بالا $(0 \leq x^l \leq 1)$ استفاده از (؟؟) و تقریب کمترین مربعات متحرک داریم:

$$\sum_{i=1}^{n^l} \phi_i(\mathbf{x}^l) \hat{u}_i^{k+1} = h_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t).$$

$(\mathbf{a}^4)$ برای نقاط $\mathbf{x}^l = (x^l, 0)$ روی مرز افقی پایینی $(0 \leq x^l \leq 1)$ با استفاده از معادله (؟؟) داریم:

$$\sum_{i=1}^{n^l} \phi_i(\mathbf{x}^l) \hat{u}_i^{k+1} - h_0(\mathbf{x}^l) \hat{\mu}^{k+1} = 0.$$

با استفاده از قاعده انتگرال گیری عددی سیمپسون و تقریب کمترین مربعات متحرک، شرط انتگرال (۳.۵) به شکل زیر گسسته می شود:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 u^{k+1}(x, y) dx dy &\approx \sum_{j=1}^N d_j u_j^{k+1} = \sum_{j=1}^N d_j \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}^j) \hat{u}_i^{k+1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N d_j \phi_i(\mathbf{x}^j) \right) \hat{u}_i^{k+1} = m((k+1)\Delta t), \end{aligned}$$

که d_j ها ضرایب قاعده انتگرال گیری سیمپسون می باشند. با در نظر گرفتن آنچه تا به حال گفته شد، معادلات خطی زیر به دست می آیند:

$$\left[A - \frac{\Delta t}{2} B \right] \begin{pmatrix} \hat{U}^{k+1} \\ \hat{\mu}^{k+1} \end{pmatrix} = \left[C + \frac{\Delta t}{2} B \right] \begin{pmatrix} \hat{U}^k \\ \hat{\mu}^k \end{pmatrix} + F, \quad (6.5)$$

که $C = (c_{i,j})$ ، $B = (b_{i,j})$ ، $A = (a_{i,j})$ هستند، $\hat{U}^k = (\hat{u}_i^k)$ که $\hat{u}_i^k \approx u(\mathbf{x}^i, k\Delta t)$ و $F = (f_i)$ یک بردار $(N+1)$ تایی است. با فرض اینکه نقاط به صورت $\mathbf{x}^i$ ، $i = 1, 2, \dots, N$ هستند، درایه های این ماتریسها به صورت زیر است: اگر

$\mathbf{x}^l$ یک نقطه درونی Ω باشد آنگاه:

$$a_{l,j} = c_{l,j} = \int_{\Omega_s^l} \phi_j d\mathbf{x},$$

$$b_{l,j} = \int_{\partial\Omega_s^l} \frac{\partial\phi_j}{\partial n} ds.$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{a}_1$ که در بالا تشریح شد باشد، آنگاه:

$$a_{l,i} = -\frac{1}{\epsilon} \phi_i(\mathbf{x}^l) + \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}^{l+1}) - \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}^{l+2}) + \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}^{l+3}),$$

$$f_l = hg_0(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t).$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{a}_2$ باشد، آنگاه:

$$a_{l,i} = \frac{1}{\epsilon} \phi_i(\mathbf{x}^l) - \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}^{l-1}) + \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}^{l-2}) - \frac{1}{2} \phi_i(\mathbf{x}^{l-3}), \quad (7.5)$$

$$f_l = hg_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \quad (8.5)$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{a}_3$ باشد، آنگاه:

$$a_{l,i} = \phi_i(\mathbf{x}^l), \quad f_l = h_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \quad (9.5)$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{a}_4$ که در بالا تشریح شد باشد، آنگاه:

$$a_{l,i} = \phi_i(\mathbf{x}^l), \quad a_{l,N+1} = -h_0(\mathbf{x}^l), \quad (10.5)$$

و در نهایت، $f_{N+1} = m((k+1) \text{ و } i = 1, 2, \dots, N, \text{ برای } a_{N+1,i} = \left(\sum_{j=1}^n d_j \phi_i(\mathbf{x}^j) \right) \Delta t)$ و همه درایه های دیگر این ماتریسها که ذکر نشده، برابر صفر است.

۲.۲.۵ الگوریتم ب

(b۱) برای نقاط $\mathbf{x}^l = (0, y^l)$ روی مرز عمودی سمت چپ ($0 \leq y^l \leq 1$)، با استفاده از معادله (۲.۵) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{k+1}(\mathbf{x}^l)}{\partial x} &\approx \frac{1}{h} \left(-\frac{11}{6} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^l) + \frac{3}{2} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^{l+1}) - \frac{3}{2} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^{l+2}) + \frac{1}{3} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^{l+3}) \right) \\ &+ O(h^3) = g_0(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \end{aligned}$$

(b۲) برای نقاط $\mathbf{x}^l = (1, y^l)$ روی مرز عمودی سمت راست ($0 \leq y^l \leq 1$)، با استفاده از معادله (۳.۵) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{k+1}(\mathbf{x}^l)}{\partial x} &\approx \frac{1}{h} \left(\frac{11}{6} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^l) - \frac{3}{2} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^{l-1}) + \frac{3}{2} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^{l-2}) - \frac{1}{3} \hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^{l-3}) \right) \\ &+ O(h^3) = g_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \end{aligned}$$

(b۳) برای نقاط $\mathbf{x}^l = (x^l, 1)$ روی مرز افقی بالا ($0 \leq x^l \leq 1$)، با استفاده از معادله (؟؟)، داریم:

$$\hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^l) = h_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t).$$

(b۴) برای نقاط $\mathbf{x}^l = (x^l, 0)$ روی مرز افقی پایین ($0 \leq x^l \leq 1$)، با استفاده از معادله (؟؟)، داریم:

$$\hat{u}^{k+1}(\mathbf{x}^l) - h_0(\mathbf{x}^l) \hat{u}^{k+1} = 0.$$

یادآوری می‌کنیم که در موارد $\mathbf{b}^1 - \mathbf{b}^4$ ، مقدار دقیق تابع در نود i نیست. با استفاده از قاعده انتگرال گیری سیمپسون، شرط انتگرالی (۳.۵) به شکل زیر گسسته می‌شود:

$$\int_0^1 \int_0^1 u^{k+1}(x, y) dx dy \approx \sum_{j=1}^N d_j \hat{u}_j^{k+1} = m((k+1)\Delta t), \quad (11.5)$$

پس، الگوریتم ب منجر به دستگاه معادلات زیر می‌شود:

$$\left[A - \frac{\Delta t}{2} B \right] \begin{pmatrix} \hat{U}^{k+1} \\ \hat{\mu}^{k+1} \end{pmatrix} = \left[C + \frac{\Delta t}{2} B \right] \begin{pmatrix} \hat{U}^k \\ \hat{\mu}^k \end{pmatrix} + F, \quad (12.5)$$

که $A = (a_{i,j})$ ، $B = (b_{i,j})$ و $C = (c_{i,j})$ ماتریسهای مربعی $(N+1) \times (N+1)$ هستند، $\hat{U}^k = (\hat{u}_i^k)$ که $\hat{u}_i^k \approx u(\mathbf{x}^i, k\Delta t)$ و $F = (f_i)$ یک بردار $(N+1)$ تایی است. درایه های این ماتریسها به صورت زیر است: اگر $\mathbf{x}^l$ داخل دامنه Ω باشد (نه روی مرز)، آنگاه:

$$a_{l,j} = c_{l,j} = \int_{\Omega_s^l} \phi_j d\mathbf{x},$$

$$b_{l,j} = \int_{\partial\Omega_s^l} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds.$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{b}^1$ باشد که در بالا تشریح شد، داریم:

$$a_{l,l} = -\frac{11}{6}, \quad a_{l,l+1} = 3, \quad a_{l,l+2} = -\frac{3}{2}, \quad a_{l,l+3} = \frac{1}{3},$$

$$f_l = hg_0(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t).$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{b}^2$ باشد که در بالا تشریح شد، داریم:

$$a_{l,l} = \frac{11}{6}, \quad a_{l,l-1} = -3, \quad a_{l,l-2} = \frac{3}{2}, \quad a_{l,l-3} = -\frac{1}{3}, \quad (13.5)$$

$$f_l = hg_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \quad (14.5)$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{b}^3$ باشد، داریم:

$$a_{l,l} = 1, \quad f_l = h_1(\mathbf{x}^l, (k+1)\Delta t). \quad (15.5)$$

اگر $\mathbf{x}^l$ متعلق به مرز $\mathbf{b}^4$ باشد، داریم:

$$a_{l,l} = 1, \quad a_{l,N+1} = -h_0(\mathbf{x}^l). \quad (16.5)$$

برای $j = 1, 2, \dots, N$ ، $a_{N+1,j} = d_j$ که d_j ضرایب قاعده انتگرالگیری سیمپسون هستند و $f_{N+1} = m((k+1)\Delta t)$ و همه درایه های دیگر که بیان نشده اند، صفر است.

۳.۵ مثالهای عددی

دو مثال عددی در این بخش ارائه می کنیم. جوابهای عددی با استفاده از هر دو الگوریتم الف و ب گزارش شده اند و مقایسه با روشهای پیشین نیز انجام شده است. انتگرالهای محلی روی دامنه با استفاده از قاعده دو نقطه ای گاوس و انتگرالهای مرزی محلی با هشت نقطه گاوسی محاسبه شده اند. برای تقریب کمترین مربعات متحرک از پایه مربعی استفاده شده است. خطای نسبی با فرمول

زیر گزارش می شود:

$$\|u\|_R = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (u_i - \hat{u}_i)^2}{\sum_{i=1}^N u_i^2}}.$$

مثال ۱. برای اولین مثال معادلات (۱.۵) - (۳.۵) را با معلومات زیر در نظر بگیرید:

$$f(x, y) = \exp(x + y),$$

$$g_0(y, t) = \exp(y + 2t),$$

$$g_1(y, t) = \exp(1 + y + 2t),$$

$$h_1(x, t) = \exp(1 + x + 2t),$$

$$h_0(x) = \exp(x),$$

$$m(t) = \exp(2t) (\exp(2) - 2\exp(1) + 1),$$

که جواب دقیق به صورت زیر است:

$$u(x, y, t) = \exp(x + y + 2t), \quad \mu(t) = \exp(2t).$$

مقادیر پارامترها در محاسبات به صورت $r_0 = 0.5h$ ، $r_i = 4r_0$ و $c_i = 0.05$ انتخاب شده اند که h فاصله بین دو نود متوالی است و r_0 شعاع زیر دامنه محلی است. جدول شماره ۱ نتایج به دست آمده برای u و μ در چندین لحظه زمانی را با $\Delta t = 0.1$ و $N = 441$ نشان می دهد. ستونهای مربوط به ADI-(3,3) و Implicit-(5,5) نتایج به دست آمده توسط دکتر دهقان [۶۴] را نشان می دهد و فقط برای مقایسه آورده شده اند. مثال ۲. برای دومین مثال این فصل، معادلات

جدول ۱.۵: نتایج به دست آمده برای مثال اول فصل پنجم

t	$\ \mu\ _\infty$	$\ \mu\ _\infty$	(3,3)-ADI $\mu, \times 10^{-3}$	(5,5)-Implicit $\mu, \times 10^{-3}$	$\ u\ _R$ $\times 10^{-5}$	$\ u\ _R$ $\times 10^{-5}$
t	A	B			A	B
۰/۱	$3,8421 \times 10^{-4}$	$3,3749 \times 10^{-4}$	-۱/۸	۵/۱	۷/۴۶۴۷	۷/۲۴۵۱
۰/۲	$2,6722 \times 10^{-4}$	$2,0447 \times 10^{-4}$	-۲/۱	۵/۲	۶/۲۳۷۴	۶/۰۴۸۲
۰/۳	$4,6597 \times 10^{-4}$	$3,9075 \times 10^{-4}$	-۲/۲	۵/۵	۶/۶۴۲۷	۶/۵۰۶۷
۰/۴	$4,5792 \times 10^{-4}$	$3,6584 \times 10^{-4}$	-۲/۴	۵/۶	۶/۳۸۵۱	۶/۲۲۷۴
۰/۵	$6,5479 \times 10^{-4}$	$5,4217 \times 10^{-4}$	-۲/۵	۵/۷	۶/۵۴۴۷	۶/۳۹۵۱
۰/۶	$7,1481 \times 10^{-4}$	$5,7746 \times 10^{-4}$	-۲/۶	۶/۰	۶/۴۲۹۰	۶/۲۷۷۳
۰/۷	$9,5007 \times 10^{-4}$	$7,8212 \times 10^{-4}$	-۲/۶	۶/۲	۶/۵۰۹۰	۶/۳۵۷۲
۰/۸	$1,0898 \times 10^{-3}$	$8,8485 \times 10^{-4}$	-۲/۳	۵/۹	۶/۴۵۰۲	۶/۲۹۹۳
۰/۹	$1,3963 \times 10^{-3}$	$1,1011 \times 10^{-3}$	-۲/۰	۵/۷	۶/۴۹۲۶	۶/۳۴۰۵
۱/۰	$1,6448 \times 10^{-3}$	$1,3010 \times 10^{-3}$	-۱/۹	۵/۶	۶/۴۶۰۹	۶/۳۰۹۹

(۱.۵)–(۳.۵) را با معلومات زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= (1 + y)\exp(x), \\g_0(y, t) &= \exp(y + 2t), \\g_1(y, t) &= (1 + y)\exp(1 + t), \\h_1(x, t) &= 2\exp(x + t), \\h_0(x) &= \exp(x), \\m(t) &= \frac{3}{2}(\exp(1) - 1)\exp(t),\end{aligned}$$

که جواب دقیق عبارت است از:

$$u(x, y, t) = (1 + y)\exp(x + t), \quad \mu(t) = \exp(t).$$

و محاسبات با $h = 0.5$ ، $r_0 = 4r_1$ و $c_i = 0.025$ اجرا شده است. نتایج به دست آمده برای u و μ در چندین لحظه زمانی با $\Delta t = 0.1$ و تعداد $N = 1089$ نقطه، در جدول شماره ۲ آورده شده است.

۴.۵ نتیجه گیری

یک روش بدون شبکه بر اساس روش MLPG برای مطالعه معادلات دیفرانسیل سهموی دو بعدی با شرایط غیر کلاسیک و نیومن ارائه شد. دو الگوریتم جدید، الگوریتم الف و ب، برای تحمیل شرایط مرزی نیومن ارائه شد. با توجه به جوابهای عددی به دست آمده، دقت روش با استفاده از دو الگوریتم مشابه است. اما الگوریتم ب ساده در حالی که الگوریتم الف سازگارتر است. ما روش تفاضلات متناهی چهار نقطه ای برای تحمیل شرط نیومن ارائه دادیم، اما روشهای دو نقطه ای و سه نقطه ای

جدول ۲.۵: نتایج به دست آمده برای مثال دوم فصل پنجم

t	$\ \mu\ _{\infty}$ A	$\ \mu\ _{\infty}$ B	$\ u\ _R$ A	$\ u\ _R$ B
۰/۱	$۳/۱۸۵۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۲۰۳۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۷/۸۲۰۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۷/۷۹۷۲ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۲	$۱/۵۳۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۵۷۱۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۲۴۵۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۱۷۷۵ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۳	$۳/۱۴۷۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۱۸۰۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۹۱۰۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۸۴۸۴ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۴	$۲/۲۷۱۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۳۱۳۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۴۵۳۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۳۸۶۰ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۵	$۳/۵۷۹۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۶۲۱۲ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۷۷۲۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۷۰۸۹ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۶	$۲/۹۸۱۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۰۳۱۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۵۱۲۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۴۴۶۳ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۷	$۴/۱۹۶۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۲۴۸۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۷۱۳۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۶۴۹۱ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۸	$۳/۷۹۵۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۸۵۵۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۵۴۷۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۴۸۱۹ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۹	$۴/۹۸۷۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۰۵۱۶ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۶۷۹۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۶۱۵۶ \times ۱۰^{-۵}$
۱/۰	$۴/۷۶۲۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۸۳۵۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۵۶۹۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۵۰۳۸ \times ۱۰^{-۵}$

نیز می‌توانند به طریق مشابه به کار برده شوند. شرط انتگرالی با قاعده سیمپسون گسسته شد، اما از روشهای دیگر نیز میتوان استفاده کرد. مثالهای عددی دقت بالای روش ارائه شده را نشان دادند.

فصل ۶

مدلسازی عددی برای معادلات کسری دو
بعدي مکش-پخش-عکس العمل

۱.۶ مقدمه

اخیراً معادلات پخش کسری برای مدل‌سازی مسائل کاربردی مهندسی به طور وسیعی به کار برده شده‌اند. خوانندگان علاقه‌مند می‌توانند برای کاربردهای ویژه مشتقات کسری در مسائل گرما و پخش به مراجع [۱۰۴، ۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷] رجوع کنند. علی‌رغم کاربردهای رو به افزایش معادلات دیفرانسیل کسری، به علت نیاز به حجم زیاد حافظه، اکثر الگوریتم‌های عددی برای مسائل یک بعدی ارائه شده‌اند. در مرجع [۱۰۸] یک روش عددی با استفاده از توابع پایه‌ای شعاعی، با استفاده از گام‌های زمانی و انتخاب پایه‌ها به صورت تطبیقی [۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۱] ارائه شده است. در این فصل، یک روش عددی با استفاده از روش MLPG و تفاضلات متناهی مناسب برای حل عددی معادلات کسری دو بعدی به فرم زیر ارائه می‌کنیم:

$$D_t^\alpha u(\mathbf{x}, t) + \nu u(\mathbf{x}, t) = \Delta u(\mathbf{x}, t) + \omega \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t) \quad (۱.۶)$$

برای $\mathbf{x} \in \Omega$ و $t > 0$ ، مشروط بر شرایط آغازین $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ برای $\mathbf{x} \in \Omega$ و شرایط مرزی $u(\mathbf{x}, t) = h(\mathbf{x}, t)$ برای $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ و $t > 0$. در معادله دیفرانسیل کسری (۱.۶)، $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ یک دامنه کراندار منظم است، ν یک ثابت حقیقی، ω یک بردار در $\mathbb{R}^2$ ، f یک تابع منبع با همواری کافی است و D_t^α مشتق کسری کاپوتو از درجه α نسبت به t را به صورت زیر نمایش می‌دهد:

$$D_t^\alpha u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(\mathbf{x}, s)}{\partial s} ds, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (۲.۶)$$

بر خلاف مشتقات از مرتبه طبیعی، تعریف انتگرال دیفرانسیل برای مشتق که در (۲.۶) ارائه شد، از گذشته جواب تاثیر می‌پذیرد. این رفتار غیر مارکف^۱ به طور بسیار زیادی حافظه مورد نیاز برای طراحی الگوریتم‌های عددی برای حل معادله (۱.۶) را افزایش می‌دهد. این دلیلی است بر این موضوع که چرا اکثر الگوریتم‌ها برای حل معادلات کسری برای معادلات یک بعدی ارائه شده است.

^۱ non-Markov behavior

در اینجا برای غلبه بر این مشکل، از گامهای زمانی ریلکس شده استفاده خواهیم کرد.

۲.۶ تبدیل مساله به فرم ضعیف

فرض کنید که بازه زمانی $[0, T]$ به طور یکنواخت به n تقسیم شده است؛ $k = t_k = k\Delta t$ ، که $0, 1, \dots, K$ ، که $\Delta t = T/n$ گام زمانی است. فرض کنید که $u^k = u^k(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}, t_k)$ جواب دقیق u در لحظه زمانی t_k باشد. آنگاه مشتق کسری نسبت به زمان (۲.۶) را می توان به صورت زیر تقریب زد:

$$D_t^\alpha u(\mathbf{x}, t_{k+1}) \approx \sum_{j=0}^k w_{\alpha,j} (u^{k+1-j} - u^{k-j}), \quad (۳.۶)$$

که وزنهای به صورت زیر داده شده اند:

$$w_{\alpha,j} = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} ((j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}).$$

زیرا:

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha u(t) &:= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\alpha} \frac{du(s)}{ds} ds \\
&\approx \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} \frac{1}{(t_{k+1} - s)^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} \int_{(k-j+1)\Delta t}^{(k-j)\Delta t} \frac{1}{s^\alpha} ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u_{k-j+1} - u_{k-j}}{\Delta t} \int_{j\Delta t}^{(j+1)\Delta t} \frac{1}{s^\alpha} ds \\
&= \frac{(\Delta t)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^k \frac{u_{k-j+1} - u_{k-j}}{\Delta t} ((j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}) \\
&=: \sum_{j=0}^k w_{\alpha,j} (u^{k+1-j} - u^{k-j}).
\end{aligned}$$

با استفاده از (۳.۶) و تقریب کرانک نیکلسون برای مشتقات نسبت به مکان در معادله دیفرانسیل کسری (۱.۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\gamma} \left(\gamma w_{\alpha,0} + \nu - \Delta - \omega \cdot \nabla \right) u^{k+1} \\
&= w_{\alpha,0} u^k - \sum_{j=1}^k w_{\alpha,j} (u^{k+1-j} - u^{k-j}) - \frac{1}{\gamma} \left(\nu - \Delta - \omega \cdot \nabla \right) u^k + \frac{1}{\gamma} (f^{k+1} + f^k).
\end{aligned} \tag{۴.۶}$$

ما فرم ضعیف محلی معادله (۴.۶) را در زیر دامنه های Ω_s می سازیم. در این فصل از زیر دامنه های دایره ای شکل با شعاع r و به مرکز نود $\Omega_s^i \subset \Omega$ استفاده می کنیم. با استفاده از آنچه در فصل ۲ گفتیم و استفاده از تابع پله ای هوی ساید به عنوان تابع آزمون، معادلات ضعیف

محلی به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\nu} \left(\nu w_{\alpha,0} + \nu \right) \int_{\Omega_s^i} u^{k+1} d\xi - \frac{1}{\nu} \int_{\partial\Omega_s^i} \partial_n u^{k+1} ds - \int_{\Omega_s^i} \omega \cdot \nabla u^{k+1} d\xi \quad (5.6) \\
 & = w_{\alpha,0} \int_{\Omega_s^i} u^k d\xi - \frac{\nu}{\nu} \int_{\Omega_s^i} u^k d\xi + \frac{1}{\nu} \int_{\partial\Omega_s^i} \partial_n u^k ds + \int_{\Omega_s^i} \omega \cdot \nabla u^k d\xi \\
 & \quad - \sum_{j=1}^k w_{\alpha,j} \int_{\Omega_s^i} (u^{k+1-j} - u^{k-j}) d\xi + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega_s^i} (f^{k+1} + f^k) d\xi.
 \end{aligned}$$

با توجه به (5.6) برای به دست آوردن مقادیر جواب در سطح زمانی $k+1$ جوابهای قبلی را در همه سطوح زمانی $k, \dots, 1, 0$ نیاز داریم. وقتی $t \gg 0$ ، اندازه حافظه در تقریب مشتقات کسری به طور وسیعی زیاد می شود. برای غلبه بر این مشکل (کمبود حافظه)، ممکن است مقادیر تابع را در نزدیکی $t=0$ حذف کنیم و فقط مقادیر تابع را در بازه $[t-L, t]$ در نظر بگیریم که L طول حافظه نامیده می شود. این ممکن است برای مساله یک بعدی مفید باشد، اما همانطور که در مرجع [108] اثبات شده است، برای کاهش نیاز به حافظه در مساله کسری دو بعدی، مفید نیست. یک دلیل آن نیز این است که جواب مساله در $t=0$ به طور ناگهانی تغییر می کند. ما از گامهای زمانی تطبیقی در اینجا استفاده خواهیم کرد. ایده روش به این صورت است: برای زمان به اندازه کافی بزرگتر از صفر، رفتار جواب بسیار آرامتر از لحظه صفر است (پخش در زمانهای بسیار دورتر از لحظه آغازین بسیار آرامتر است). بنابراین برای زمانهای بزرگتر می توانیم از گامهای زمانی بزرگتری استفاده کنیم. بنابراین یک اندازه به عنوان اندازه ریلکس تعریف می کنیم که اختلاف نسبی جواب را در دو گام متوالی اندازه بگیرد. این اندازه را با پارامتر τ نمایش می دهیم، اگر تفاوت جواب در دو گام متوالی کمتر از τ باشد، آنگاه گام زمانی ریلکس می شود: $2\Delta t \leftarrow \Delta t$ تا یک مقدار از پیش تعیین شده Δt_{max} . بعد از هر عمل ریلکس موفق، حدود نصف حافظه آزاد می شود.

۳.۶ گسسته سازی مکانی و اجرا

برای گسسته سازی مکانی از تقریب کمترین مربعات متحرک استفاده می کنیم:

$$U(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x})(P^T W(\mathbf{x})P)^{-1} P^T W(\mathbf{x})}_{\Phi(\mathbf{x})} u(\Xi) = \sum_{i=1}^N u(\xi_i) \phi_i(\mathbf{x}), \quad (۶.۶)$$

با بسط u^k در فرم ضعیف (۵.۶) بوسیله (۶.۶) خواهیم داشت:

$$u(\mathbf{x}, t_k) = u^k(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=1}^N U_j^k \phi_j(\mathbf{x}),$$

و از فرم ضعیف (۵.۶) در هر زیر دامنه Ω_s^i ($i = 1, \dots, N$) معادلات زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{\nu} \left(\nu w_{\alpha,0} + \nu \right) \int_{\Omega_s^i} \phi_j d\xi - \frac{1}{\nu} \int_{\partial\Omega_s^i} \partial_n \phi_j ds - \int_{\Omega_s^i} \omega \cdot \nabla \phi_j d\xi \right) U_j^{k+1} \quad (۷.۶) \\ &= \sum_{j=1}^N \left(w_{\alpha,0} \int_{\Omega_s^i} \phi_j d\xi - \frac{\nu}{\nu} \int_{\Omega_s^i} \phi_j d\xi + \frac{1}{\nu} \int_{\partial\Omega_s^i} \partial_n \phi_j ds + \int_{\Omega_s^i} \omega \cdot \nabla \phi_j d\xi \right) U_j^k \\ &\quad - \sum_{j=1}^k w_{\alpha,j} \left(\sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_s^i} \phi_j d\xi \right) U_j^{k+1-j} - \sum_{j=1}^N \left(\int_{\Omega_s^i} \phi_j d\xi \right) U_j^{k-j} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\nu} \int_{\Omega_s^i} (f^{k+1} + f^k) d\xi. \end{aligned}$$

برای تقریب انتگرالهای مرزی در (۷.۶) از قاعده هشت نقطه ای گاوس در مرز هر زیر دامنه استفاده می کنیم که نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_s^i} \partial_n \phi_j ds &= \int_0^{2\pi} \partial_n \phi_j(x_i + r \cos(\theta), y_i + r \sin(\theta)) r d\theta \quad (۸.۶) \\ &\approx \pi r \sum_{i=1}^{\wedge} \omega_i \partial_n \phi_j(x_i + r \cos(\pi\theta_i + \pi), y_i + r \sin(\pi\theta_i + \pi)), \end{aligned}$$

که θ_i نقاط گاوسی در $[-1, 1]$ می باشند. برای تقریب انتگرالهای روی دامنه های محلی، با توجه به اینکه شعاع زیر دامنه ها را بسیار کوچک انتخاب می کنیم، تقریب یک نقطه ای زیر را داریم:

$$\int_{\Omega_s^i} \phi_j d\xi \approx \pi \phi_j(\xi_i) r^2, \quad \int_{\Omega_s^i} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} d\xi \approx \pi \frac{\partial \phi_j(\xi_i)}{\partial x} r^2, \quad (9.6)$$

۴.۶ اجرای روش

در مثالهای ارائه شده در این فصل، همه محاسبات با گام آغازین $\Delta t = 2^{-13}$ شروع می شوند و با تولرانسهای متفاوت τ ریلکس می شوند تا $\Delta t_{max} = 2^{-5}$. پارامتر c در تابع وزن گاوسی با $c = 0.6h$ ثابت شده است که h بیشترین فاصله بین مجموعه گرههاست.

۱.۴.۶ تحلیل حساسیت

معادله پخش کسری دو بعدی زیر را در دامنه $\Omega = [0, 1]^2$ در نظر بگیرید:

$$D_t^\alpha u(x, y, t) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T),$$

با شرط آغازین $u(x, y, 0) = \cos(\pi x/2) \cos(\pi y/2)$ و شرایط مرزی که از جواب دقیق

$$u(x, y, t) = E_\alpha \left(-\frac{1}{4} \pi^2 t^\alpha \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} y \right). \quad (10.6)$$

جدول ۱.۶: خطا در $t = ۰.۵$ با $\alpha = ۰.۵$ با R و r های متفاوت

r	R			
	$۲h$	$۳h$	$۴h$	$۵h$
$۰.۵h$	$۲/۱۸۸۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۱۱۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۱۱۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۱۱۸۴ \times ۱۰^{-۴}$
$۰.۱h$	$۴/۴۱۶۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۵۲۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۵۲۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۵۲۲ \times ۱۰^{-۵}$
$۰.۰۵h$	$۴/۵۲۶۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۱۲۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۱۲۶ \times ۱۰^{-۵}$
$۰.۰۰۵h$	$۶/۵۹۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۲۱۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۲۰۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۶۱۹۶ \times ۱۰^{-۵}$
$۰.۰۰۰۱h$	$۹/۵۳۰۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۲۸۸۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۷۳۹۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۱۰۲۵ \times ۱۰^{-۴}$

به ست آمده اند. تابع یک پارامتری میتاگ-لفلر^۲ در (۱۰.۶) به صورت زیر تعریف می شود:

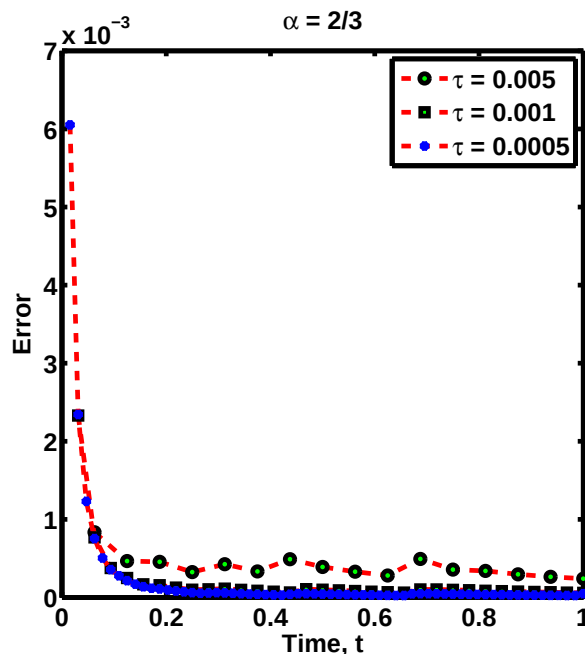
$$E_{\alpha}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (۱۱.۶)$$

تعداد $N = ۱۱ \times ۱۱$ نقطه که به طور منظم در دامنه پخش شده اند را در نظر می گیریم و مایلیم حساسیت روش را نسبت به شعاعهای R که اندازه محمل تابع MLS را کنترل می کند و r که شعاع زیر دامنه Ω_s^i می باشد را بررسی کنیم. خطاها با نرم بی نهایت در جدول (۱.۶) نشان داده شده است: توجه کنید که در ساختن توابع پایه کمترین مربعات متحرک، که در فصل اول توضیح داده شد، R باید به اندازه کافی بزرگ باشد که مطمئن شویم که ماتریس P (که در فصل اول توضیح داده شد) برای همه نقاط گاوسی معکوس پذیر است. با توجه به سطرهای جدول (۱.۶) مشاهده می کنیم که جوابهای عددی به R بستگی دارند، اگر چه دقت به ازای R های متفاوت تغییر زیادی ندارد، اما بهتر است کوچکترین مقدار ممکن را برای R در نظر بگیریم. سپس با حرکت در هر ستون، می بینیم که شعاع زیر دامنه ها نیز در دقت جوابهای حاصله تاثیر دارند. وقتی شعاع زیر دامنه بزرگ انتخاب شود، خطای انتگرال گیری نیز زیاد می شود و در دقت تقریب اثر می گذارد. از طرفی زیر دامنه ها نباید بسیار کوچک نیز انتخاب شوند، زیرا خطای گرد کردن باعث بدتر شدن جواب می شود.

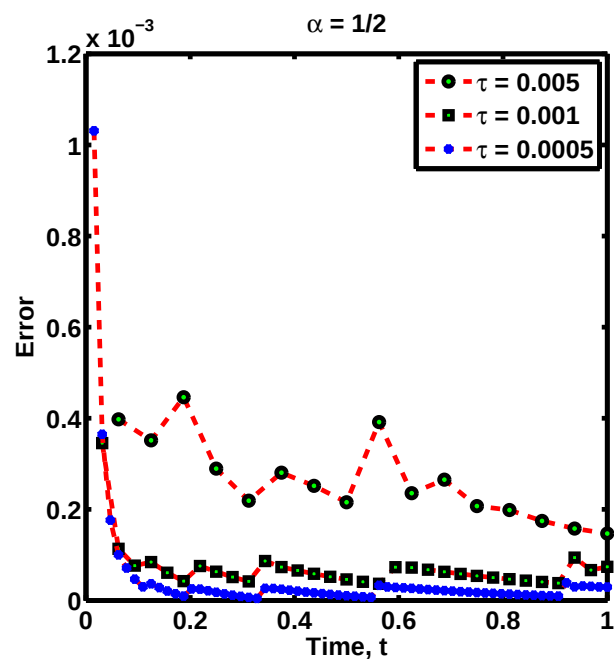
^۲Mittag-Leffler function

۲.۴.۶ ریلکسیشن زمان

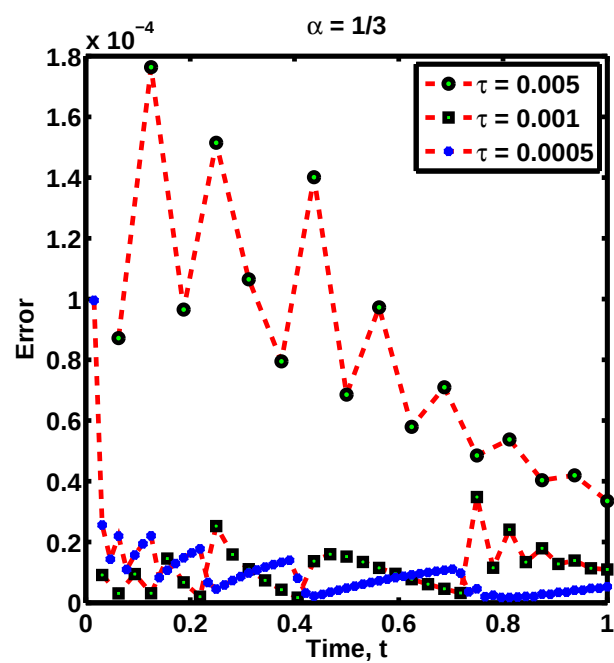
مجدداً معادله دیفرانسیل کسری که در فصل (۱.۴.۶) ارائه شده بود را به خاطر وجود جواب دقیق در نظر می‌گیریم. با توجه به جدول قبلی شعاع‌ها را به صورت $R = 2h$ و $r = 0.1h$ انتخاب می‌کنیم. البته برای این مثال به این صورت انتخاب شده‌اند و در حالت کلی به مساله تحت بررسی بستگی دارد. در اینجا ما تاثیر پارامتر ریلکسیشن زمان τ را بررسی می‌کنیم. برای این منظور سه مقدار متفاوت 0.005 ، 0.001 و 0.0005 را برای آن در نظر می‌گیریم. در چهار شکل زیر، خطاها با پارامتر ریلکسیشن متفاوت برای چهار مرتبه کسری $\alpha = 2/3$ ، $1/2$ ، $1/3$ و $1/\sqrt{5}$ نشان داده شده است. مجدداً یادآوری می‌کنیم که گام زمانی موقی ریلکس می‌شود که تفاوت جوابهای عددی در دو گام متوالی کمتر از τ باشد.



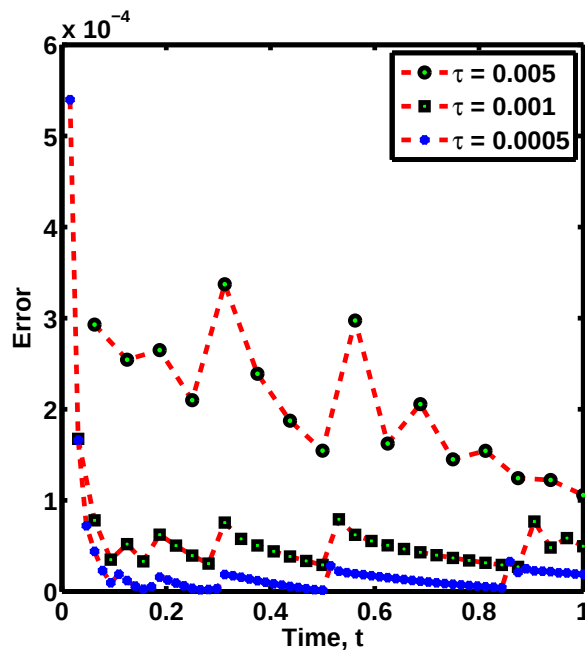
شکل ۱.۶: خطا با $\alpha = 2/3$ و پارامتر ریلکسیشن متفاوت



شکل ۲.۶: خطا با $\alpha = 1/2$ و پارامتر ریلکسیشن متفاوت



شکل ۳.۶: خطا با $\alpha = 1/3$ و پارامتر ریلکسیشن متفاوت



شکل ۴.۶: خطا با $\alpha = 1/\sqrt{5}$ و پارامتر ریلکسیشن متفاوت

در حالت کلی، معادلات دیفرانسیل کسری که ما در اینجا بررسی می کنیم، برای مقادیر بسیار کوچک α بسیار چالشی است؛ مقدار جواب در آغاز بالا می رود و به سرعت می افتد. پس از آن روند پخش آهسته، آغاز می شود. بنابراین گام زمانی که بسیار کوچک نباشد و ثابت باشد، تاریخ جواب^۳ را حفظ نمی کند و برآمدگی آغازین را نشان نخواهد داد.

۳.۴.۶ معادلات پخش-عکس العمل با منبع

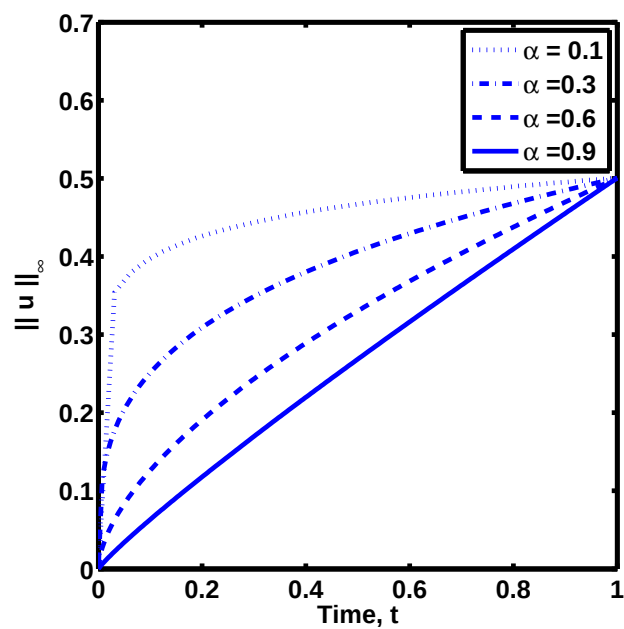
به عنوان مثال دوم این فصل، معادلات دیفرانسیل کسری زیر را در ناحیه $\Omega = [0, 1]^2$ در نظر بگیرید.

$$D_t^\alpha u(x, y, t) + u(x, y, t) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t \in (0, T)$$

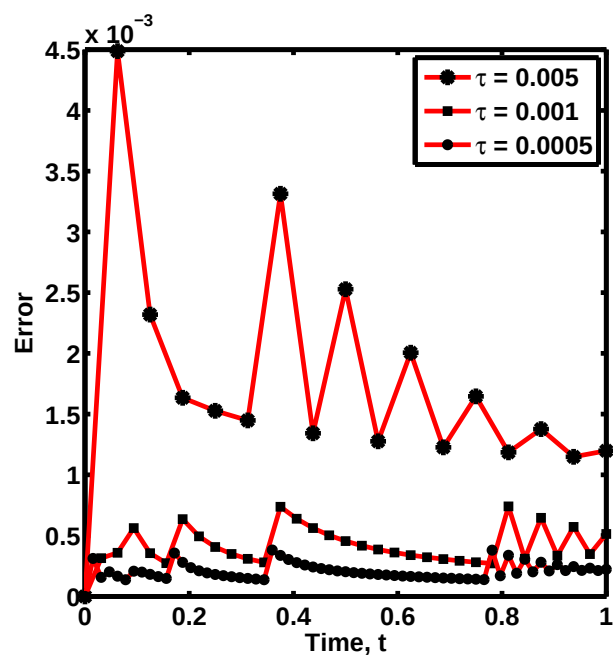
$$f(x, y, t) = (\Gamma(1 + \alpha) + t^\alpha)(y(1 - y) + x(1 - x)) + 4t^\alpha,$$

^۳the solution history

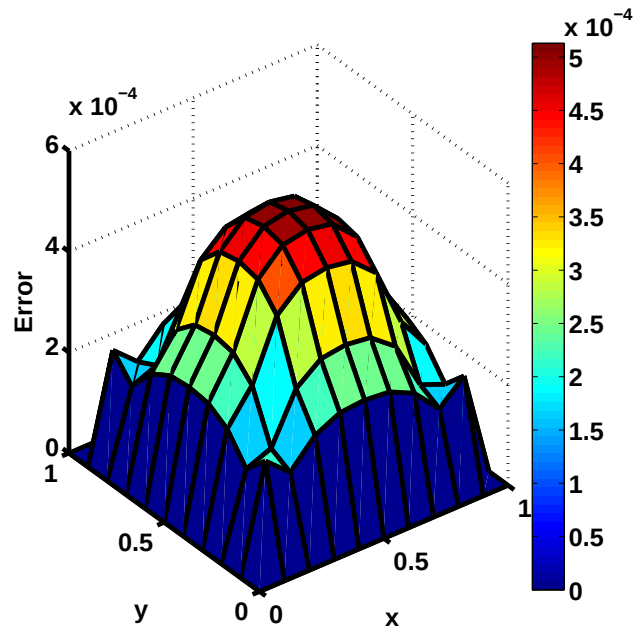
با شرایط آغازین صفر و شرایط مرزی که از جواب دقیق $u(x, y, t) = t^\alpha(x(1-x) + y(1-y))$ به دست آمده اند.



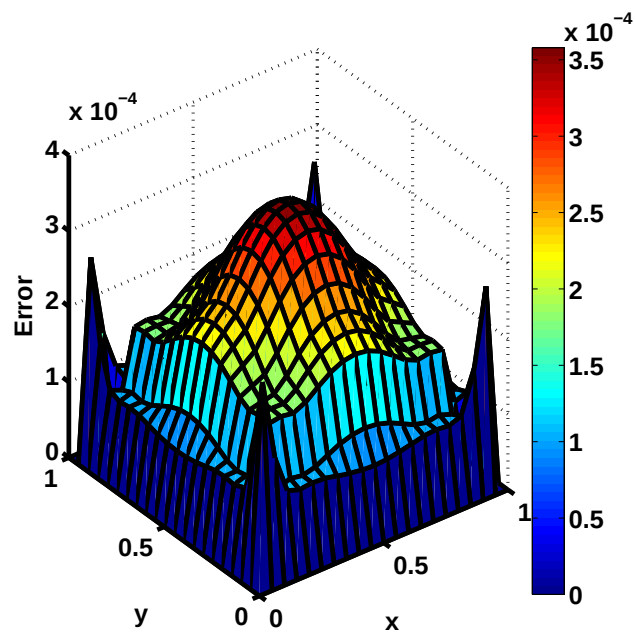
شکل ۵.۶: نرم بینهایت جواب با $\tau = 0.001$ و α های متفاوت



شکل ۶.۶: خطا با $\alpha = 0.1$ و پارامترهای ریلکسیشن متفاوت



شکل ۷.۶: خطا با $N = 11 \times 11$ نقطه با $\alpha = 0.1$ و در $t = 1$



شکل ۸.۶: خطا با $N = 21 \times 21$ نقطه با $\alpha = 0.1$ و در $t = 1$

با استفاده از 11×11 نقطه که به طور منظم در دامنه پخش هستند، نرم ماکسیمم جواب عددی را به ازای $\alpha = 0/1, 0/3, 0/6, 0/9$ در بازه زمانی $[0, 1]$ در شکل (۵.۶) نشان داده ایم. با توجه به این شکل و منحنی متناظر $\alpha = 0/1$ ، مجدداً پرسش آغازین را مشاهده می کنیم. از شکل (۶.۶) می بینیم که به ازای مقادیر $\tau = 0/001$ و $\tau = 0/0005$ دقت جوابها مشابه و خوب است، در حالی که $\tau = 0/005$ مناسب نیست. برای تایید همگرایی و پایداری، از شکل‌های (۷.۶) و (۸.۶) می بینیم که با افزایش نقاط، خطا کاهش یافته است. با مقایسه با مثال قبل، نتایج ارائه شده در این مثال نشان می دهد که روش پیشنهادی ما، با وجود جملات عکس العمل و تابع منبع در معادله نیز نتایج دقیق ارائه می دهد و پایدار می ماند.

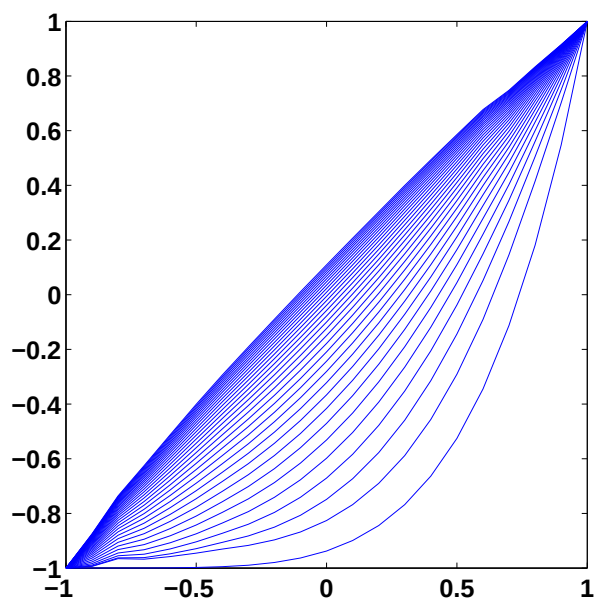
۴.۴.۶ شبیه سازی عددی برای مساله پخش-مکش

مثال پایانی ما یک مساله پخش-مکش کسری است که در مرجع [۱۰۸] نیز بررسی شده است:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha u(x, y, t) &= \Delta u(x, y, t) + \omega \frac{\partial}{\partial x} u(x, y, t), & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, y, 0) &= 2 \left(\frac{x+1}{2} \right)^5 - 1, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y, t) &= x, & -1 \leq y \leq 1, x \in \{-1, 1\}, \\ \partial_\nu u(x, y, t) &= 0, & -1 \leq x \leq 1, y \in \{-1, 1\}, \end{aligned}$$

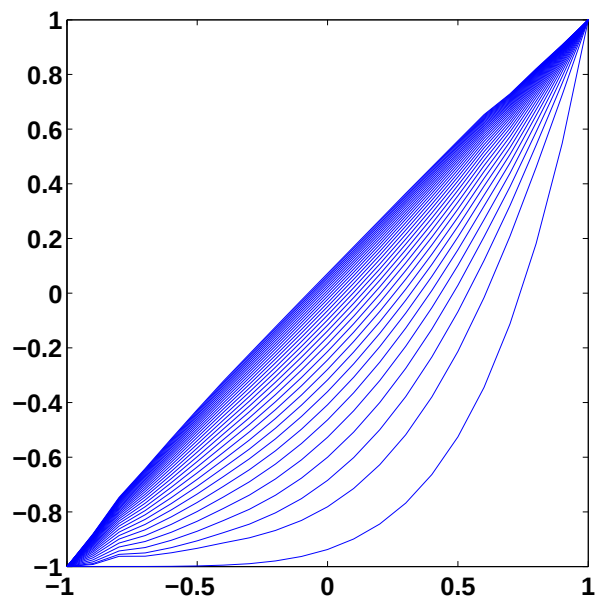
که $\Omega = [-1, 1]^2$ ، و ω ضریب مکش است و این مساله نیز جواب دقیق ندارد. در مرجع [۱۰۸] این مساله با ضریب مکش بسیار کوچک $\omega = 0/005$ بررسی شده و الگوریتم ارائه شده در این مرجع برای ضریب مکش بزرگتر کارا نیست. اما در اینجا ما برای نشان دادن مزیت فرمولسازی ضعیف (۷.۶)، نتایج بدست آمده با $\omega = 0/5$ را در چهار شکل پایانی نشان می دهیم. برای تحمیل شرایط مرزی نیومن از روشی که در [۷۵] ارائه داده بودیم استفاده می کنیم. با مقایسه با مرجع [۱۰۸] می بینیم که نتایج ارائه شده ما بسیار معتبرتر است. به خاطر تقارن مساله، ما جواب عددی را در یک بخش عرضی (موازی با محور x) با فاصله زمانی $1/32$ ثانیه از گوشه پایین سمت راست به سمت

قطر نشان داده ایم. به ازای $\alpha = 0.2$ یک تغییر سریع در رفتار جواب در زمانهای $t = 0$ و $1/32$ مشاهده می کنیم؛ بعد از آن، جواب به آرامی تغییر می کند و می توان با گامهای زمانی بزرگتر نیز مساله را حل کرد.



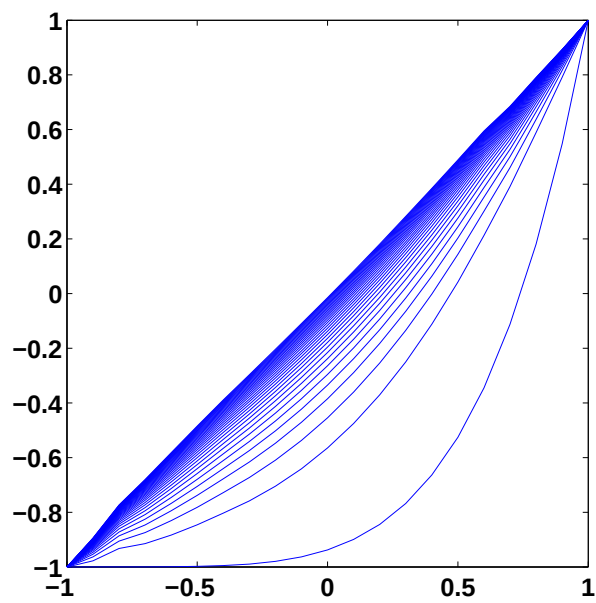
شکل ۹.۶: جوابهای عددی (بخش عرضی) برای مساله پخش-مکش با ضریب مکش $\omega = 0.5$

$$\alpha = 0.9$$



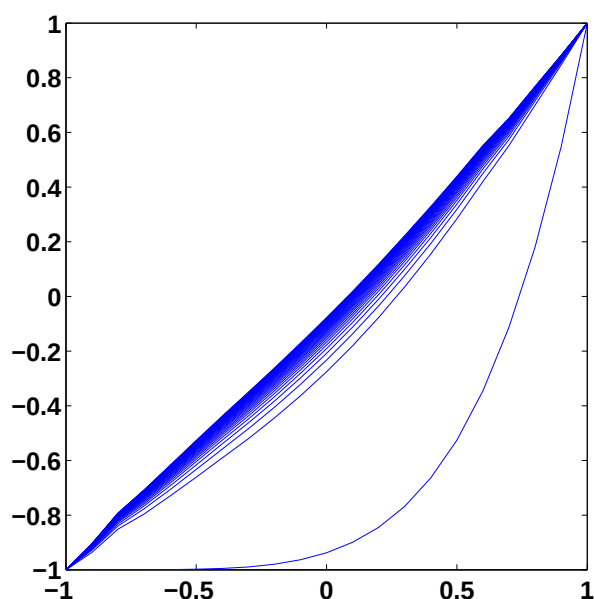
شکل ۹.۶: جوابهای عددی (بخش عرضی) برای مساله پخش-مکش با ضریب مکش $\omega = ۰/۵$

$$\alpha = ۰/۸$$



شکل ۹.۶: جوابهای عددی (بخش عرضی) برای مساله پخش-مکش با ضریب مکش $\omega = ۰/۵$

$$\alpha = 0.5$$



شکل ۹.۶: جوابهای عددی (بخش عرضی) برای مساله پخش-مکش با ضریب مکش $\omega = 0.5$

$$\alpha = 0.2$$

۵.۶ نتیجه گیری

در این فصل، یک روش عددی بر اساس روش MLPG به همراه روشهای تفاضلات متناهی مناسب برای به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل کسری دوبعدی مکش-پخش-عکس العمل ارائه گردید. مشاهده گردید که برای مسائل کسری-زمان، مخصوصاً برای مرتبه های کسری کوچک و نزدیک صفر، جواب یک تغییر سریع در نزدیکی $t = 0$ دارد. روش گامهای زمانی متغیر که ارائه کردیم، برای این مسائل بسیار مفید است. بعد از بعضی تحلیل خطا و حساسیت، روش ارائه شده برای حل مساله پخش-مکش با ضریب مکش بالا، به طور موفق به کار برده شد.

فصل ۷

نتیجه گیری و پیشنهادات

در فصل اول مقدمه ای بر روشهای بدون شبکه ارائه شد و بعضی روشهای موجود و پرکاربرد به طور خلاصه بررسی شد. در فصل دوم، مقدمه ای کوتاه بر روش MLPG ارائه گردید. در فصل سوم، یک روش بدون شبکه، بر اساس فرم ضعیف مساله و معادلات انتگرال محلی، برای حل عددی جفت معادلات غیر خطی پخش ارائه شد. متغیر زمان با استفاده از روش تفاضلات متناهی گسسته شد، برای مسائلی که جواب به صورت سریع تغییر می کند روش گامهای زمانی متغیر را ارائه دادیم و در مورد مسائل غیر خطی یک روش تکراری در هر گام زمانی ارائه کردیم. فصول چهارم و پنجم با کمک گرفتن از روش هم محلی به ارائه روشهای عددی برای اعمال شرایط مرزی کلاسیک و غیر کلاسیک اختصاص یافت. در فصل ششم، یک روش عددی بر اساس روش MLPG به همراه روشهای تفاضلات متناهی مناسب برای به دست آوردن جواب معادلات دیفرانسیل دوبعدی کسری مکش-پخش-عکس العمل ارائه گردید. در این رساله، از روش کمترین مربعات متحرک برای تقریب جواب استفاده شد. در تحلیلهای همگرایی عددی ارائه شده، همگرایی از مرتبه چند جمله ای مشاهده شد که با توجه به روش تقریب به کار برده شده طبیعی بود. یکی از پیشنهادات ما برای کارهای آتی، استفاده از روشهای دیگر تقریب جواب در MLPG مانند توابع پایه ای شعاعی است که از قدرت تقریب بالاتری برخوردار هستند. با توجه به اینکه این روشها اخیرا معرفی شده اند، در زمینه تحلیل همگرایی و خطای روش تقریب کار انجام نشده است که این به نوبه خود می تواند موضوع جالبی برای تحقیق باشد. در این راستا دسته بندی ارائه شده در فصل اول این رساله می تواند مفید باشد. از کارهای بالقوه آتی انتخاب نقاط به صورت تطبیقی پیشنهاد می شود، البته برای روشهای بدون شبکه که از فرم قوی استفاده می کنند روشهایی ارائه شده است (به عنوان مثال با استفاده از موجک ها)، اما برای روش MLPG تا به این لحظه روشی ارائه نشده است. با توجه به پایداری روش MLPG، به نظر می رسد برای حل عددی مسائل معکوس مفید باشد. همچنین برای مسائل با مرزهای آزاد این روش به نظر کارا می رسد. در فصل ششم این رساله، به بررسی مسائل کسری-زمان پرداختیم. مسائل کسری-زمان-مکان نیز می توانند با این روش بررسی شوند که خوانندگان علاقه مند می توانند در این زمینه نیز کار کنند. در این رساله روش ارائه شده برای برخورد با جمله غیر

خطی روش پیشگو-اصلاحگر بود. بررسی تکنیکهای کارا برای مسائل غیر خطی از اهمیت بالایی برخوردار است و به عنوان یک زمینه تحقیقاتی پیشنهاد می گردد. در این رساله برای گسسته سازی متغیر زمان از روشهای تفاضلات متناهی استفاده شد؛ به دانشجویان علاقه مند توصیه می کنیم که از همان روشی که متغیرهای مکان را گسسته کردند، از همان روش برای گسسته سازی متغیر زمان نیز استفاده کنند. در روش MLPG چگونگی ارزیابی عددی انتگرالهای محلی از اهمیت بالایی برخوردار است و لذا اگر بتوان روشی تحلیلی برای ارزیابی این انتگرالها ارائه کرد، بسیار مفید و با ارزش است.

واژه نامه فارسی به انگلیسی

Particle.....	اجزا
Free.....	آزاد
Testing.....	آزمودن
Spline.....	اسپلاین
Partition.....	افراز
Increase.....	افزایش پیدا کردن
Initial.....	آغازین
Integral.....	انتگرال
Reproducing.....	بازتولید
Interval.....	بازه
Meshless.....	بدون شبکه
Dimension.....	بعد
Elliptic.....	بیضوی
Stability.....	پایداری
Basis.....	پایه

Diffuse.....	پخش (شدن).....
Analysis.....	تحلیل.....
Adaptive.....	تطبیقی.....
Approximation.....	تقریب.....
Partial.....	جزئی.....
Coupled.....	جفت.....
Multiquadric.....	چندربعی.....
Memory.....	حافظه.....
Sensitivity.....	حساسیت.....
Solve.....	حل کردن.....
Error.....	خطا.....
Linear.....	خطی.....
Interior.....	داخلی.....
Domain.....	دامنه.....
Circle.....	دایره.....
Interpolation.....	درونیابی.....
Dirichlet.....	دیریکله.....
Differential.....	دیفرانسیل.....
Process.....	روند.....
Time.....	زمان.....

Bell shape.....	زنگی شکل
Sub-domain.....	زیر دامنه
Global.....	سراسری
Parabolic.....	سهموی
Simulation.....	شبیه سازی
Conditions.....	شرایط
Shape	شکل
Radius.....	شعاع
Radial.....	شعاعی
Plane.....	صفحه
Thin-plate.....	صفحه ای نازک
Weak.....	ضعیف
Strong.....	قوی
Numerical.....	عددی
Reaction.....	عکس العمل
Element.....	عنصر
Nonlinear.....	غیر خطی
Decrease.....	کاهش یافتن
Fractional.....	کسری
Least Squares.....	کمترین مربعات

Step.....	گام.....
Heat.....	گرما.....
Node.....	گره.....
Field nodes.....	گره‌های میدانی.....
Discretization.....	گسسته سازی.....
Matrix.....	ماتریس.....
Moving.....	متحرک.....
Variable.....	متغیر.....
Finite.....	متناهی.....
Local.....	محلی.....
Support.....	محمل.....
Square.....	مربع.....
Boundary.....	مرزی.....
Independent.....	مستقل.....
Absolute.....	مطلق.....
Equation.....	معادله.....
Integral equation.....	معادله انتگرال.....
Governing equation.....	معادله حاکم.....
Space.....	مکان.....
Convection.....	مکش.....

Source.....	منبع.
Relative.....	نسبی.
Point.....	نقطه.
Semi-discrete.....	نیمه گسسته.
Neumann.....	نیومن.
Dependent.....	وابسته.
Weight.....	وزن.
Kernel.....	هسته.
Convergence.....	همگرایی.
Collocation.....	هم محلی.
Smooth	هموار.
Heaviside.....	هوی ساید.
Unity.....	یکه.

واژه نامه انگلیسی به فارسی

Absolute.....	مطلق.
Adaptive.....	تطبیقی.
Analysis.....	تحلیل.
Approximation.....	تقریب.
Basis.....	پایه.
Bell shape.....	زنگی شکل.
Boundary.....	مرزی.
Circle.....	دایره.
Conditions.....	شرایط.
Collocation.....	هم محلی.
Convection.....	مکش.
Convergence.....	همگرایی.
Coupled.....	جفت.
Decrease.....	کاهش یافتن.
Dependent.....	وابسته.
Differential.....	دیفرانسیل.

Diffuse.....	پخش (شدن).....
Dimension.....	بعد.....
Dirichlet.....	دیریکله.....
Discretization.....	گسسته سازی.....
Domain.....	دامنه.....
Element.....	عنصر.....
Elliptic.....	بیضوی.....
Equation.....	معادله.....
Error.....	خطا.....
Field nodes.....	گره های میدانی.....
Finite.....	متناهی.....
Finite Differences.....	تفاضلات متناهی.....
Fractional.....	کسری.....
Free.....	آزاد.....
Generation.....	تولید.....
Global.....	سراسری.....
Governing equation.....	معادله حاکم.....
Heat.....	گرما.....
Heaviside.....	هوی ساید.....
Increase.....	افزایش پیدا کردن.....

Independent.....	مستقل
Initial.....	آغازین
Integral.....	انتگرال
Integral equation.....	معادله انتگرال
Interior.....	داخلی
Interpolation.....	درونیابی
Interval.....	بازه
Iterative.....	تکراری
Kernel.....	هسته
Least Squares.....	کمترین مربعات
Linear.....	خطی
Local.....	محلی
Matrix.....	ماتریس
Memory.....	حافظه
Meshless.....	بدون شبکه
Moving.....	متحرک
Multiquadric.....	چندربعی
Neumann.....	نیومن
Node.....	گره
Nonlinear.....	غیر خطی

Numerical.....	عددی.....
Parabolic.....	سه‌موی.....
Partial.....	جزئی.....
Particle.....	اجزا.....
Partition.....	افراز.....
Plane.....	صفحه.....
Point.....	نقطه.....
Process.....	روند.....
Radial.....	شعاعی.....
Radius.....	شعاع.....
Reaction.....	عکس‌العمل.....
Relative.....	نسبی.....
Reproducing.....	بازتولید.....
Semi-discrete.....	نیمه‌گسسته.....
Sensitivity.....	حساسیت.....
Shape	شکل.....
Simulation.....	شبیه‌سازی.....
Smooth	هموار.....
Solve.....	حل کردن.....
Source.....	منبع.....

Space.....	مکان.....
Spline.....	اسپلاین.....
Square.....	مربع.....
Stability.....	پایداری.....
Step.....	گام.....
Strong.....	قوی.....
Sub-domain.....	زیر دامنه.....
Support.....	محمل.....
Testing.....	آزمودن.....
Time.....	زمان.....
Thin-plate.....	صفحه ای نازک.....
Unity.....	یکه.....
Variable.....	متغیر.....
Weak.....	ضعیف.....
Weight.....	وزن.....

کتاب نامه

- [1] L.B. Lucy, A numerical approach to the testing of fusion process, Astron. J. 88 (1977) 1013-1024.
- [2] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, Comput. Mech. 10 (1992) 307-318.
- [3] J.M. Melenk, I. Babuška, The partition of unity finite element method: basic theory and applications, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 289-314.
- [4] C.A. Duarte, J.T. Oden, An h-p adaptative method using clouds, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 139 (1996) 237-262.
- [5] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, Int. J. Numer. Methods Engrg. 37 (1994) 229-256.
- [6] W.K. Liu, S. Jun, Y.F. Zhang, Reproducing kernel particle methods, Int. J. Numer. Methods Fluids 21 (1995) 1081-1106.
- [7] E.J. Kansa, Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics-II, J. Comput. Math. Appl. 19 (1990) 147-161.

- [8] M. Dehghan, A. Shokri, A meshless method for numerical solution of the one-dimensional wave equation with an integral condition using radial basis functions, *Numer. Algo.* 52 (2009) 461-477.
- [9] Y.X. Mukherjee, S. Mukherjee, The boundary node method for potential problems, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 40 (1997) 797-815.
- [10] T. Zhu, J.D. Zhang, S.N. Atluri, A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics and a meshless discretization approach, *Comput. Mech.* 21 (1998) 223-235.
- [11] J. Sladek, V. Sladek, S.N. Atluri, Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problem of elasticity with nonhomogeneous material properties, *Comput. Mech.* 24 (2000) 456-462.
- [12] M. Dehghan, D. Mirzaei, Numerical solution to the unsteady two-dimensional Schrodinger equation using meshless local boundary integral equation method, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 76 (2008) 501-520.
- [13] D. Mirzaei, M. Dehghan, Implementation of meshless LBIE method to the 2D non-linear SG problem, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 79 (2009) 1662-1682.
- [14] S.N. Atluri, The meshless method (MLPG) for domain and BIE discretizations, Tech Science Press, 2004.
- [15] S.N. Atluri, S. Shen, The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method, Tech Science Press, 2002.
- [16] M. Dehghan, D. Mirzaei, Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the unsteady magnetohydrodynamic (MHD) flow through pipe with arbitrary wall conductivity, *Appl. Numer. Math.* 59 (2009) 1043-1058.

- [17] M. Dehghan, D. Mirzaei, The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for the generalized two-dimensional non-linear Schrodinger equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 32 (2008) 747-756.
- [18] G. R. Liu, *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*, CRC press, 2003.
- [19] V.P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, Meshless methods: A review and computer implementation aspects, *Math. Comput. Simul.* 79 (2008) 763-813.
- [20] S.N. Atluri, T.L. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Comput. Mech.* 22 (1998) 117-127.
- [21] S.N. Atluri, T.L. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach to nonlinear problems in computer modeling and simulation, *Comput. Model.Simul. in Engrg.* 3 (1998) 187-196.
- [22] S.N. Atluri, S. Shen, The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple and less costly alternative to the finite element and boundary element methods, *Comput.Model.in Engin. & Scien.* 3 (2002) 11-51.
- [23] A. Mazzia, M. Ferronato, G. Pini, G. Gambolati, A comparison of numerical integration rules for the meshless local Petrov-Galerkin method, *Numer. Algo.* 45 (2007) 61-74.
- [24] J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhang, Stress analysis in anisotropic functionally graded materials by the MLPG method, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 29 (2005) 597-609.

- [25] J. Sladek, V. Sladek, Y.C. Hon, Inverse heat conduction problems by meshless local Petrov-Galerkin method, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 30 (2006) 650-661.
- [26] V. Vavourakis, D. Polyzos, A MLPG(LBIE) numerical method for solving 2D incompressible and nearly incompressible elastostatic problems, *Commun. Numer. Methods Eng.* 24 (2008) 281-296.
- [27] S. N. Atluri, Tulong Zhu, New concepts in meshless methods, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 47 (2000) 537-556.
- [28] J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhang, J. Krivacek, P.H. Wen, Analysis of orthotropic thick plates by meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 67 (2006) 1830-1850.
- [29] R.C. Batra, D. Spinello, Analysis of adiabatic shear bands in heat-conducting lastothermoviscoplastic materials by the meshless local Bubnov-Galerkin method, *Commun. Numer. Methods Eng.* 25 (2009) 1019-1040.
- [30] M.K. Alves, R. Rossi, A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions enforced by an extended partition of unity finite element weight function, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 57 (2003) 1523-1552.
- [31] J.R. Cannon, J. van der Hoek, Diffusion subject to specification of mass, *J. Math. Anal. Appl.* 115 (1986) 517-529.
- [32] J.R. Cannon, Y. Lin, An inverse problem of finding a parameter in a semi-linear heat equation, *J. Math. Anal. Appl.* 145 (2) (1990) 470-484.
- [33] J.R. Cannon, Y. Lin, A.L. Matheson, The solution of the diffusion equation in two-space variables subject to the specification of mass, *Appl. Anal.* 50 (1993) 1-19.

- [34] A. Friedman, Monotonic decay of solutions of parabolic equation with nonlocal boundary conditions, *Quart. Appl. Math.* XLIX (1986) 468-475.
- [35] B. Kawohl, Remark on a paper by D.A. Day on a maximum principle under nonlocal boundary conditions, *Quart. Appl. Math.* XLIV (1987) 751-752.
- [36] S. Wang, The numerical method for the conduction subject to moving boundary energy specification, *Numer. Heat Transfer* 130 (1990) 35-38.
- [37] S. Wang, Y. Lin, A numerical method for the diffusion equation with nonlocal boundary specifications, *Int. J. Engng. Sci.* 28 (1990) 543-546.
- [38] S. Wang, Y. Lin, A finite difference solution to an inverse problem determining a control function in a parabolic partial differential equations, *Inverse Problems*, 5 (1989) 631-640.
- [39] W.A. Day, Existence of a property of solutions of the heat equation subject to linear thermoelasticity and other theories, *Quart. Appl. Math.* 40 (1982) 319-330.
- [40] W.A. Day, A decreasing property of solutions of a parabolic equation with applications to thermoelasticity and other theories, *Quart. Appl. Math.* XLIV (1983) 468-475.
- [41] V. Capasso, K. Kunisch, A reaction-diffusion system arising in modeling man-environment diseases, *Quart. Appl. Math.* 46 (1988) 431-449.
- [42] J.R. Cannon, S. Prez-Esteve, J. vander Hoek, A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass, *SIAM. J. Num. Anal.* 24 (1987) 499-515.

- [43] G. Fairweather, R.D. Saylor, The reformulation and numerical solution of certain nonclassical initial-boundary value problems, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.* 12 (1991) 127-144.
- [44] M. Dehghan, A New AD1 Technique for Two-Dimensional Parabolic Equation with an Integral Condition, *Comput. Math. Appl.* 43 (2002) 1477-1488.
- [45] M. Dehghan, Fully explicit finite-difference methods for two-dimensional diffusion with an integral condition, *Nonlin. Anal.* 48 (2002) 637-650.
- [46] I. Hashim, Comparing numerical methods for the solutions of two-dimensional diffusion with an integral condition, *Appl. Math. Comput.* 181 (2006) 880-885.
- [47] M. Dehghan, A. Ghesmati, Combination of meshless local weak and strong (MLWS) forms to solve the two dimensional hyperbolic telegraph equation, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 34 (2010) 324-336.
- [48] V.P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, M. Duflot, Meshless methods: A review and computer implementation aspects, *Math. Comput. Simulation* 79 (2008) 763-813.
- [49] Davoud Mirzaei, Mehdi Dehghan, A meshless based method for solution of integral equations, *Appl. Numer. Math.* 60 (2010) 245-262.
- [50] R. C. Batra, M. Porfiri and D. Spinello, Free and Forced Vibrations of a Segmented Bar by a Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Formulation, *Comput. Mech.* 41 (2008) 473-491.
- [51] J. Sladek, V. Sladek, P.H. Wen, Y.C. Hon, Inverse fracture problems in piezoelectric solids by local integral equation method, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33 (2009) 1089-1099.

- [52] V. Vavourakis, D. Polyzos, A MLPG(LBIE) numerical method for solving 2D incompressible and nearly incompressible elastostatic problems, *Commun. Numer. Methods Eng.* 24 (2008) 281-296.
- [53] T. Chen, I.S. Raju, A coupled finite element and meshless local Petrov-Galerkin method for two-dimensional potential problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 192 (2003) 4533-4550.
- [54] M.K. Alves, R. Rossi, A modified element-free Galerkin method with essential boundary conditions enforced by an extended partition of unity finite element weight function, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* 57 (2003) 1523-1552.
- [55] J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhang, M. Schanz, Meshless local Petrov-Galerkin method for continuously nonhomogeneous linear viscoelastic solids, *Comput. Mech.* 37 (2006) 279-289.
- [56] L.F. Qian, R.C. Batra, Three-Dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless local Petrov-Galerkin method, *Comput. Mech.* 35 (2005) 214-226.
- [57] Q.X. Wang, H. Li, K.Y. Lam, Analysis of microelectromechanical systems (mems) devices by the meshless point weighted least-squares method, *Comput. Mech.* 40 (2007) 1-11.
- [58] D. Mirzaei, M. Dehghan, Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approximation to the two dimensional sine-Gordon equation, *J. Comput. Appl. Math.* 233 (2010) 2737-2754.
- [59] J.R. Cannon, J. van der Hoek, Diffusion subject to specification of mass, *J. Math. Anal. Appl.* 115 (1986) 517-529.

- [60] Y. Lin, An inverse problem for a class of quasilinear parabolic equations, SIAM J. Math. Anal. 22 (1991) 146-156.
- [61] Y.S. Choi, K.Y. Chan, A parabolic equation with nonlocal boundary conditions arising from electrochemistry, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 18 (4) (1992) 317-331.
- [62] G. Fairweather, R.D. Saylor, The reformulation and numerical solution of certain nonclassical initial-boundary value problems, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 12 (1991) 127-144.
- [63] V. Capso, K. Kunisch, A reaction-diffusion system arising in modeling man-environment diseases, Quart. Appl. Math. 46 (1988) 431-449.
- [64] M. Dehghan, Second-order schemes for a boundary value problem with Neumann's boundary conditions, J. Comput. Appl. Math. 138 (2002) 173-184.
- [65] J. Sladek, V. Sladek, S.N. Atluri, Meshless local Petrov-Galerkin method for heat conduction problem in an anisotropic medium, Comput. Model. in Engin. & Scien. 6 (2004) 309-318.
- [66] V. Sladek, J. Sladek, M. Tanaka, Ch. Zhang, Transient heat conduction in anisotropic and functionally graded media by local integral equations, Engin. Anal. with Bound. Elem. 29 (2005) 1047-1065.
- [67] J. Sladek, V. Sladek, J. Krivacek, Ch. Zhang, Local BIEM for transient heat conduction analysis in 3-D axisymmetric functionally graded solids, Comput. Mech. 32 (2003) 169-176.
- [68] J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhang, Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method, Comput. Mater. Scien. 28 (2003) 494-504.

- [69] J. Sladek, V. Sladek, Ch. Hellmich, J. Eberhardsteiner, Heat conduction analysis of 3D axisymmetric and anisotropic FGM bodies by meshless local Petrov-Galerkin method, *Comput. Mech.* 39 (2007) 323-333.
- [70] J. Sladek, V. Sladek, C.L. Tan, S.N. Atluri, Analysis of transient heat conduction in 3D anisotropic functionally graded solids by the MLPG, *Comput. Model. in Engin. & Scien.* 32 (2008) 161-174.
- [71] Rongjun Cheng, Yumin Cheng, Error estimates for the finite point method, *Appl. Numer. Math.* 58 (2008) 884-898.
- [72] C. Zuppa, Error estimates for moving least square approximations, *Bul. Braz. Math. Soc. New Series* 34 (2003) 231-249.
- [73] Carlos Zuppa, Good quality point sets and error estimates for moving least square approximations, *Appl. Numer. Math.* 47 (2003) 575-585.
- [74] S. Abbasbandy and A. Shirzadi, A meshless method for two-dimensional diffusion equation with an integral condition, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 34 (2010) 1031-1037.
- [75] S. Abbasbandy and A. Shirzadi, MLPG method for two-dimensional diffusion equation with Neumann's and non-classical boundary conditions, *Appl. Numer. Math.* 61 (2011) 170-180.
- [76] S. N. Atluri, Z. Han, S. Shen, Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approaches for weakly singular traction & displacement boundary integral equations, *CMES: Comput. Model. in Engin. & Scien.*, 4 (2003) 507-517.
- [77] H. Brunner, L. Ling, M. Yamamoto, Numerical simulations of 2D fractional subdiffusion problems, *J. Comput. Phys.* 229 (2010) 6613-6622.

- [78] V. Castets, E. Dulos, J. Boissonade, P. De Kepper, Experimental evidence of a sustained Turing-type equilibrium chemical pattern, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 2953–2956.
- [79] H.-K. Ching, R. C. Batra, Determination of crack tip fields in linear elastostatics by the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, *CMES: Comput. Model. in Engin. & Scien.* 2 (2001) 273–289.
- [80] H. Haken, Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems, *Rev. Mod. Phys.* 47 (1975) 67–121.
- [81] S. Kondo, R. Asai, A reaction-diffusion wave on the skin of the marine angelfish *Pomacanthus*, *Nature* 376 (1995) 765–768.
- [82] P. Lancaster, K. Salkauskas, Surfaces generated by moving least square methods, *Math. Comput.* 37 (1981) 141–158.
- [83] N. A. Libre, A. Emdadi, E. J. Kansa, M. Shekarchi, M. Rahimian, A multiresolution prewavelet-based adaptive refinement scheme for RBF approximations of nearly singular problems, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 33 (2009) 901–914.
- [84] L. Ling, E. J. Kansa, Preconditioning for radial basis functions with domain decomposition methods, *Math. Comput. Model.* 40 (2004) 1413–1427.
- [85] L. Ling, Y. C. Hon, Improved numerical solver for Kansa’s method based on affine space decomposition, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 29 (2005) 1077–1085.
- [86] A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology*, (1956), Dover, New York.

- [87] H. Meinhardt, *The Algorithmic Beauty of Sea Shells*, (2009), 4th ed., Springer-Verlag, Berlin.
- [88] T. Miura, K. Shiota, G. Morriss-Kay, P. Maini, Mixed mode pattern in Doublefoot mutant mouse limb-Turing reaction-diffusion model on a growing domain limb development, *J. Theor. Biol.* 240 (2006) 562–573.
- [89] P. K. Moore, J. E. Flaherty, Adaptive local overlapping grid methods for parabolic systems in two space dimensions, *J. Comput. Phys.* 98 (1992) 54–63.
- [90] I. Prigogine, G. J. Nicolis, On symmetry-breaking instabilities in dissipative systems, *J. Chem. Phys.* 46 (1967) 3542–3550.
- [91] I. Prigogine, R. Lefever, Symmetry breaking instabilities in dissipative systems II, *J. Chem. Phys.* 48 (1968) 1695–1700.
- [92] Q. Ouyang, H. Swinney, Transition from a uniform state to hexagonal and striped Turing patterns, *Nature*. 352 (1991) 610–612.
- [93] F. Schlögl, On stability of steady states, *Z. Physik.* 243 (1971) 303–310.
- [94] F. Schlögl, On thermodynamics near a steady state, *Z. Physik.* 248 (1971) 446–458.
- [95] F. Schlögl, Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions, *Z. Physik.* 253 (1972) 147–161.
- [96] L. Segal, J. Jackson, Dissipative structure: an explanation and an ecological example, *J. Theor. Biol.* 37 (1972) 545–559.
- [97] J. Sladek, V. Sladek, S. N. Atluri, Meshless local Petrov-Galerkin method for heat conduction problem in an anisotropic medium, *CMES: Comput. Model. in Engin. & Scien.*, 6 (2004) 309–318.

- [98] V. Sladek, J. Sladek, M. Tanaka, C.-H. Zhang, Transient heat conduction in anisotropic and functionally graded media by local integral equations, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 29 (2005) 1047–1065.
- [99] J. Sladek, V. Sladek, C. L. Tan, S. N. Atluri, Analysis of transient heat conduction in 3D anisotropic functionally graded solids by the MLPG method, *CMES: Comput. Model. in Engin. & Scien.* 32 (2008) 161–174.
- [100] G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, (1978), Clarendon Press, Oxford.
- [101] A. M. Turing, The chemical basis of morphogenesis, *Phil. Trans. Roy. Soc. B* 237 (1952) 37–72.
- [102] V. Volterra, *Lessons sur la theorie mathematique de la lutte pur la vie*, (1931) Gauthier-Villars, Paris.
- [103] A. M. Zhabotinskiy, Periodic processes of the oxydation of malonic acid in solution, *Biofizika.* 9 (1964) 306–311.
- [104] R. Gorenflo, F. Mainardi, D. Moretti, P. Paradisi, Time fractional diffusion: a discrete random walk approach, *Nonlin. Dynam.* 29 (2002) 129–143.
- [105] R. Gorenflo, F. Mainardi, A. Vivoli, Continuous-time random walk and parametric subordination in fractional diffusion, *Chaos Solitons Fractals* 34 (2007) 87–103.
- [106] R. Metzler, J. Klafter, Boundary value problems for fractional diffusion equations, *Phys. A* 278 (2000) 107–125.
- [107] R. Metzler, J. Klafter, The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep.* 339 (2000) 77.

- [108] H. Brunner, L. Ling, M. Yamamoto, Numerical simulations of 2D fractional subdiffusion problems, *J. Comput. Phys.* 229 (2010) 6613–6622.
- [109] L. Ling, R. Opfer, R. Schaback, Results on meshless collocation techniques, *Eng. Anal. Bound. Elem.* 30 (2006) 247–253.
- [110] L. Ling, R. Schaback, Stable and convergent unsymmetric meshless collocation methods, *SIAM J. Numer. Anal.* 46 (2008) 1097–1115.
- [111] L. Ling, R. Schaback, An improved subspace selection algorithm for meshless collocation methods, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 80 (2009) 1623–1639.

Meshless methods for solving elliptic and parabolic partial differential equations with boundary conditions

Abstract

Meshless methods for numerically solving partial differential equations (PDE) have become very popular in recent years. The aim of this thesis is to present meshless numerical methods based on meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for numerically solving PDEs. In first chapter, we will present a brief introduction on meshless methods and classify them into three groups. Since the presented methods in this thesis are based on MLPG method, in the second chapter this method will be described. In Chapter 3, regarding the importance of nonlinear PDEs, a meshless method for their numerical solutions will be proposed and to overcome the nonlinearity problem, a predictor-corrector scheme in each time step will be proposed. In Chapters 4 and 5, numerical solutions of two dimensional parabolic PDEs with non-classical boundary conditions will be investigated. Chapter 6 is devoted to numerically solving two-dimensional fractional-time convection-diffusion-reaction equations. Finally our conclusions and directions for future research will be given.

Keywords: *Partial Differential Equations, Meshless methods, Non-standard boundary condition, Moving least squares, Local weak form, Finite differences, System of partial differential equations, Numerical integration procedures, Boundary conditions, Neumann's*

boundary conditions, Heat equation, Collocation Methods, Fractional differential equations, geometric time grids, memory effect.



Imam Khomeini International University
Faculty of Science
Department of Mathematic

Meshless methods for solving elliptic and parabolic partial differential equations with boundary conditions

**A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree
of Doctor of Philosophy in Applied Mathematics**

By: Ahmad Shirzadi

Supervisor:

Dr. Saeid Abbasbandy

Advisors:

Dr. Mehdi Dehghan

Dr. Davoud Rostamy

October 2011