

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه آزاد اسلامی
واحد علوم و تحقیقات

رساله دکتری تخصصی رشته ریاضی کاربردی – آنالیز عددی (Ph.D)

موضوع:

فاصله فازی و کاربرد آن در رتبه بندی اعداد فازی

استادان راهنما :

دکتر توفیق الهویرنلو

دکتر سعید عباسبندی

استاد مشاور:

دکتر محمد علی فریرزی عراقی

نگارنده:

سید رحیم صانعی فرد

سال تحصیلی ۹۱-۹۰

یتقدیرم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

که دعای آمان و قوت قلب و بدرقه راهم اوست

و

سنگ صبر و رم الهام و دستم عزیزم صدم

که وجودشان اگر من بخش بر خلات زندگی ام اوست

رہاسگزار می

پیشکش خواہد مینشان کہ تو ذوق تلاش در راه کرب عام و دانش را بر من عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آنچه را کہ آموختم در راه پیشرفت
میدن خویش به کار گیرم.

بر خود وظیفه می دانم از این طریق و بعد از گذشتن تو ذوق الهی و پند و پرور و در کمال ترسید و عبادت و بندگی تمام زحماتی کہ در طی تدوین پایان نامه برای این جانب
کشیده اند از صمیم قلب نهایت سپاسگزار می باشم و این پایان نامه حاصل راهنمایی های مرتب و فراوان
است و قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده شان این مجہد و خدمت تمام نمی رسید.

از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر علیرضا غفرانی عارفی صلی و زینبہ عنوان ارتداد مشاور و تهیه این پایان نامه مرایاری نر وده اند. تشکر
می نمایم.

از پدر گرانقدرم، مادر مهربانم و برادر و خواهر عزیزم کہ در نشانی کمال و علم و حق من بوده اند و راه تحصیل را برای من ہر وار نر وده اند
سپاسگزارم.

رہیم صانع فرد

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۵	فهرست مطالب
ز	فهرست جدول ها
ح	فهرست شکل ها
۱.....	چکیده
۲.....	اهداف تحقیق
	فصل اول : نظریه مجموعه فازی
۴.....	۱-۱. مجموعه های فازی
۵.....	۲-۱. انواع مجموعه های فازی با توجه به شکل تابع عضویت
۷.....	۳-۱. α - برشها و تحدب
۸.....	۴-۱. اعداد فازی
۱۱.....	۵-۱. حساب فازی
۱۲.....	۶-۱. متر فازی
۱۲.....	۷-۱. اصل گسترش
۱۳.....	۸-۱. تابع فازی
	فصل دوم : بررسی برخی از روش های رتبه بندی
۱۶.....	۱-۲. مقدمه
۱۷.....	۲-۲. خواص مطلوب برای روشهای رتبه بندی
۲۰.....	۳-۲. دسته اول روشهای رتبه بندی

۲-۴. دسته دوم روشهای رتبه بندی ۲۳

۲-۵. فرمول بندی ترتیب رتبه بندی برای روشهای دسته سوم ۲۴

۲-۶. فرآیند ترتیب براساس رابطه فازی غیردوری ۲۶

فصل سوم : نظریه تقریب برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس مقدار بازه ای وزن دار

۳-۱. تعاریف و مفاهیم اولیه ۳۲

۳-۲. تقریب مقدار بازه ای وزن دار ۳۳

۳-۳. مقایسه اعداد فازی بر اساس بازه وزن دار ۳۵

۳-۴. مثال های عددی ۳۸

فصل چهارم : روشی دیگر برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس یک متر وزن دار جدید

۴-۱. تعاریف و مفاهیم اولیه ۴۲

۴-۲. یک روش جدید برای رتبه بندی اعداد فازی با استفاده از متر وزن دار ۴۳

۴-۳. مثال های عددی ۴۴

فصل پنجم : روش فازی زدایی برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس مرکز ثقل

۵-۱. تعاریف و مفاهیم اولیه ۴۸

۵-۲. یک روش رتبه بندی جدید برای اعداد فازی ۵۰

۵-۳. مثال های عددی ۵۳

۵-۴. نتیجه گیری ۶۰

واژه نامه ۶۱

مراجع فارسی ۶۴

مراجع انگلیسی ۶۵

فهرست جدول ها

۳۰.....	۶-۲. جدول ۲-۶-۹.....
۳۸.....	۴-۳. جدول مثال ۳-۴-۱.....
۳۹.....	۴-۳. جدول مثال ۳-۴-۲.....
۴۵.....	۳-۴. جدول مثال ۴-۳-۱.....
۴۵.....	۳-۴. جدول مثال ۴-۳-۲.....
۵۰.....	۲-۵. جدول مثال ۵-۲-۱.....
۵۴.....	۳-۵. جدول مثال ۵-۳-۲.....
۵۵.....	۳-۵. جدول مثال ۵-۳-۳.....
۵۷.....	۳-۵. جدول مثال ۵-۳-۴.....

فهرست شکل ها

شکل ۱-۴-۱. عدد فازي L-R	۱۰
شکل ۲-۴-۱. عدد فازي مثلثي	۱۱
شکل ۳-۴-۱. عدد فازي دوزنقه اي	۱۱
شکل ۱-۳-۴	۴۳
شکل ۲-۳-۴	۴۴
شکل ۳-۳-۴	۴۵
شکل ۱-۲-۵	۵۰
شکل ۳-۲-۵	۵۱
شکل ۱-۳-۵	۵۳
شکل ۲-۳-۵	۵۴
شکل ۳-۳-۵	۵۶
شکل ۴-۳-۵	۵۸

چکیده

مرتب کردن اعداد فازی و مقایسه آنها یک فرآیند بسیار مهم در زمینه تصمیم گیری است. چون مسأله انتخاب همواره در زمینه های گوناگونی از قبیل کنترل فازی، استدلال تقریبی، بهینه سازی، برنامه ریزی ریاضی فازی و غیره ظاهر می شود، بنابراین گاهی لازم است موقعیتهای مختلفی را در یک محیط مبهم و نادقیق که به نوعی با عدم قطعیت مواجهیم، به وسیله اعداد فازی ارزیابی کنیم. در این حالت تصمیم گیرنده آن موقعیت ها را با اعداد فازی بیان کرده، آنگاه پس از مرتب کردن آنها تصمیم نهایی را اتخاذ می نماید. به بیان روشن تر، مقایسه بین اعداد فازی، مقایسه بین موقعیت های مربوطه است. در این راستا روشهای متفاوتی برای مرتب کردن اعداد فازی ارائه شده است که البته با توجه به کاربرد آنها در عمل دارای معایب و محاسنی هستند. تعدادی از این روشها از حساسیت کافی در مقایسه بر خوردار نیستند و یا ممکن است نتایج متفاوتی در بعضی از داده های آزمایشی رخ دهد. اما دیده می شود که در بعضی از روشها حذف یا اضافه کردن تعدادی اعداد فازی باعث تغییر اعضای مجموعه می شود.

کلمات کلیدی : متریک، فازی زدایی، عدد فازی، تقریب.

اهداف مشخص تحقیق:

۱. فازی زدایی Defuzzification،
ارائه یک روش فازی زدایی که اطلاعات عمومی عدد فازی از بین نرود.
۲. نظریه تقریب Approximation Theory،
ارائه یک تقریب برای عدد فازی با حداقل خطا و اینکه تقریب ارائه شده عدد قطعی یا بازه باشد.
۳. استفاده و رتبه بندی اعداد فازی با استفاده از بازه ها که قبلا انجام نشده است.
۴. استفاده از یک روش فازی زدایی بر اساس مرکز ثقل اعداد فازی به طوریکه تمام ابهامات روشهای موجود را برطرف کند.

فصل اول

نظریه مجموعه فازی

مقدمه

در اکثر مواقع ما با مجموعه ای از اشیاء مواجه می شویم که دقیقاً "معیار عضویت برای آن ها تعریف نشده است. به عنوان مثال، مجموعه حیوانات به وضوح شامل چارپایان و پرندگان و غیره به عنوان عضوهایش می شود و اشیایی از قبیل سنگها و سیالات و گیاهان و غیره را شامل نمی شود. اما جاندارانی از قبیل ستاره دریایی و باکتری و ... موقعیتهای مبهمی نسبت به رده حیوانات دارند. نوع مشابهی از ابهام در مورد یک عدد مانند ۱۰ در رابطه با مجموعه ای از همه عددهایی که بسیار بزرگتر از عدد ۱ هستند قابل تعمیم است. به وضوح کلاسی از همه عددهای حقیقی که بسیار بزرگتر از یک هستند یا کلاسی از مردان بلند قد، نمی توانند با استفاده از مجموعه ای معمولی تشکیل شوند. زیرا چنین کلاس هایی تعریف نادقیق دارند. برای بیان چنین کلاس هایی مجموعه هایی به نام مجموعه فازی تعریف می شود که به هر عنصر درجه عضویتی نسبت می دهد.

۱-۱ مجموعه های فازی

تعریف ۱-۱-۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. برد تابع مشخصه هرزیر مجموعه کلاسیک A از X ، مجموعه $\{0,1\}$ است، یعنی

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

حال اگر برد تابع مشخصه را از مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ به بازه $[0,1]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X ، عددی از بازه $[0,1]$ نسبت می دهد. این تابع را تابع عضویت A می نامیم. با توجه به تعریف ۱-۱-۱، اکنون دیگر A یک مجموعه کلاسیک نیست بلکه مجموعه ای است که آن را یک مجموعه فازی می نامیم. بنابراین یک مجموعه فازی A مجموعه ای است که درجه عضویت اعضا آن می تواند در بازه $[0,1]$ اختیار شود.

اگر تابع عضویت A را با $A(x)$ نشان دهیم، مشخص می شود که $A(x)$ تابعی است که به هر عضو از X یک عدد از بازه $[0,1]$ به عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه فازی A نسبت می دهد. نزدیکی مقدار $A(x)$ به عدد یک نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A است و برعکس.

تعریف ۱-۱-۲ مجموعه همه مجموعه های فازی، روی مجموعه مرجع X را مجموعه توانی فازی X گوئیم و با $F(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱-۱-۳ فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیر مجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $A(x) > 0$ ، تکیه گاه A نامیده می شود و با $supp A$ نشان داده می شود.

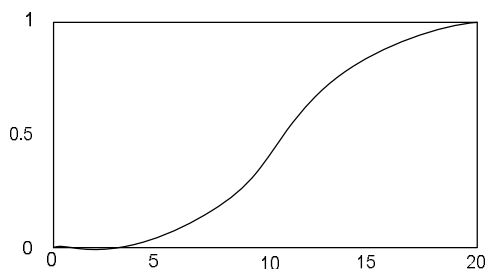
تعریف ۱-۱-۴- مقدار $M = \sup_{x \in X} A(x)$ ارتفاع مجموعه A نامیده می شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی A برابر یک باشد، آن گاه A نرمال است، درغیراین صورت A را زیرنرمال می نامند.

۱-۲- انواع مجموعه های فازی با توجه به شکل تابع عضویت [۱]

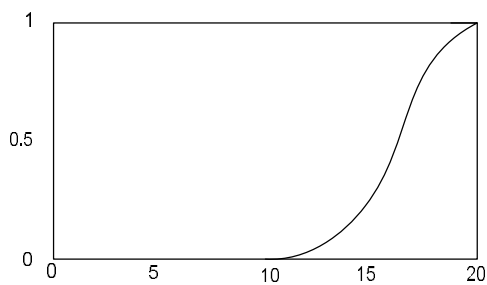
مجموعه فازی را می توان در یک نمودار دو بعدی که محور طول های آن مجموعه مرجع X و محور عرض های آن تابع عضویت $A(x)$ را مشخص می نماید نمایش دهیم.

در اینجا به صورت مثال به معرفی چند مجموعه می پردازیم و پس از شرح و بسط ریاضی، آن ها را تقسیم بندی می نماییم.

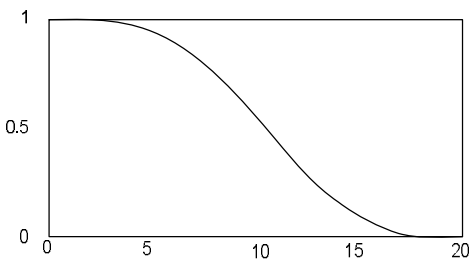
الف) مجموعه نمرات خوب:



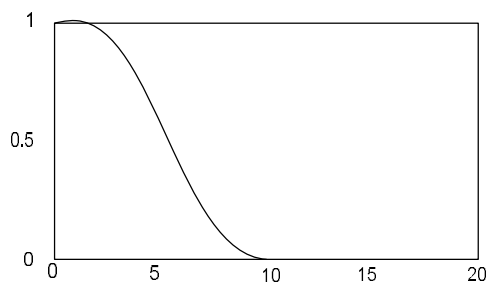
مجموعه نمرات خیلی خوب:



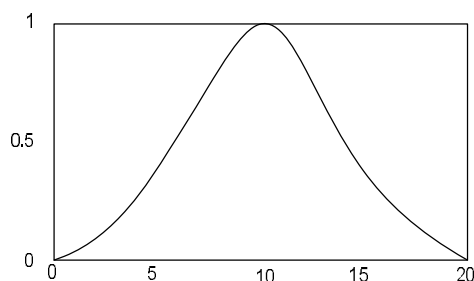
ب) مجموعه نمرات بد:



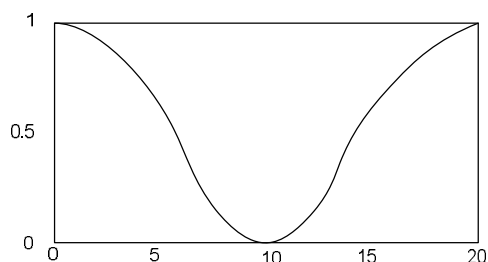
مجموعه نمرات خیلی بد:



ج) مجموعه نمرات متوسط:



مجموعه نمرات غیر متوسط:



همان گونه که در شکل های فوق مشاهده می نمایید شکل های معرفی شده در هر قسمت شباهتی به هم داشته و شبیه به حروف S , Z , Π و یا V می باشند. ما نیز از همین شباهت استفاده کرده و توابع را به چهار بخش زیر تقسیم می نماییم:

تابع S گونه:

اگر به تابع های معرفی شده در قسمت الف که به شکل S بوده توجه نمایید آستانه های a و b و c را می بینید که به ترتیب حد پایین، وسط و بالای تابع می باشند. با توجه به این مقادیر آستانه ای می توانیم هر تابع S گونه را به صورت زیر تعریف نماییم:

$$S_{(x;a,b,c)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq a, \\ \left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{if } a \leq x \leq b, \\ 1 - \left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{if } b \leq x \leq c, \\ 1 & \text{if } x \geq c. \end{cases}$$

تابع Z گونه:

با توجه به شکل های قسمت ب مشاهده می کنید که نمودار تابع عضویت آن ها به صورت Z بوده و آن ها نیز با توجه به مقادیر آستانه ای a و b و c به صورت ریاضی قابل نمایش هستند:

$$Z_{(x;a,b,c)} = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq c, \\ \left(\frac{x-c}{c-a}\right)^2 & \text{if } b \leq x \leq c, \\ 1 - \left(\frac{x-a}{c-a}\right)^2 & \text{if } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{if } x \leq a. \end{cases}$$

تابع Π گونه:

با اندکی دقت می توان در شکل قسمت ج مشاهده نمود که یک تابع Π گونه را می توان با ترکیب تابع S گونه و Z گونه و یا هر یک از آن ها به وجود آورد. یک تعریف ریاضی برای این گونه توابع به صورت زیر می باشد:

$$\Pi_{(x;a,b,c)} = \begin{cases} S_{(x;b-a,b-a/2,b)} & \text{if } x \leq b, \\ 1 - S_{(x;b,(b+c)/2,c)} & \text{if } x \geq b. \end{cases}$$

تابع V گونه:

این تابع نیز که تقریباً "عکس تابع Π گونه می باشد به وسیله توابع S گونه و Z گونه و یا ترکیب آن ها قابل نمایش است. یک مدل ریاضی ممکن برای آن ها به صورت زیر می باشد:

$$V_{(x;a,b,c)} = \begin{cases} Z_{(x;b-a,b-a/2,b)} & \text{if } x \leq b, \\ S_{(x;b,(b+c)/2,c)} & \text{if } x \geq b. \end{cases}$$

۳-۱ - α - برش ها و تحدب [۲]

α - برش ها به مانند پلی، مجموعه های فازی و کلاسیک را به هم متصل می کنند. آن ها در روابط بین مجموعه های فازی و مجموعه های کلاسیک نقش اصلی را ایفا می کنند.

تعریف ۱-۳-۱ [۲] زیر مجموعه کلاسیک عناصری از X که درجه عضویت آن ها در مجموعه فازی A حداقل به بزرگی α ($\alpha > 0$) است، α -برش A ، نامیده می شود و با نماد A_α نمایش داده می شود. به عبارت دیگر،

$$A_\alpha = [A]_\alpha = A[\alpha] = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}.$$

A_α یک مجموعه کلاسیک است. ضمناً مجموعه

$$A'_\alpha = \{x \in X | A(x) > \alpha\}.$$

نیز که شبیه مجموعه فوق است، مجموعه قوی در سطح α نامیده می شود.

تعریف ۱-۳-۲ [۲] مجموعه کلاسیک A از X را محدب گوییم اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم،

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A.$$

تعریف ۱-۳-۳ [۲] مجموعه فازی A را محدب گوییم اگر هر α -برش A به ازای $0 \leq \alpha \leq 1$ محدب باشد.

تعریف ۱-۳-۴ [۲] مجموعه فازی A روی X محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x_1, x_2 \in X$ و هر $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم،

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min[A(x_1), A(x_2)] .$$

تبصره ۱-۳-۵ [۲] فرض کنید u یک مجموعه فازی در X باشد، آن گاه

(الف) برای همه $0 \leq \alpha \leq \beta$ ، $[u]_\beta \subseteq [u]_\alpha \subseteq [u]$.

(ب) اگر $\alpha_n \nearrow \alpha$ پس $[u]_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]_{\alpha_n}$.

(ج) (قضیه نمایش رالسکو) [۲] فرض کنید $M \subseteq X$ و هم چنین فرض کنید $\{B_\alpha | \alpha \in [0, 1]\}$ خانواده ای از زیر مجموعه M باشد که در (الف) و (ب) صدق می کند و $B_\alpha = M$ باشد. آن گاه یک مجموعه فازی u در X وجود دارد به طوری که برای همه $\alpha \in [0, 1]$ ، $[u]_\alpha = B_\alpha$ در ضمن

$$u(x) = \begin{cases} \sup\{\alpha | x \in B_\alpha\}, & \text{اگر } x \in M, \\ 0, & \text{اگر } x \notin M. \end{cases}$$

۱-۴ اعداد فازی

تعریف ۱-۴-۱ [۳] مجموعه فازی u روی R عدد فازی گوییم هرگاه

(الف) u نرمال باشد،

ب) u مجموعه فازی محدب باشد،

ج) u از بالا نیمه پیوسته باشد، (تابع حقیقی u رادر نقطه x نیمه پیوسته بالا می نامند، هرگاه $u(x) \neq +\infty$ و $\overline{\lim_{t \rightarrow x} u(t)} \geq u(x)$ باشد.)

د) $u_\alpha = \{x \in R | u(x) > \alpha\}$ در R فشرده باشد.

با توجه به تعریف، هر α - برش از یک عدد فازی u بازه ای بسته و کراندار است و با $[u]_\alpha = [\underline{u}, \bar{u}]$ نشان می دهیم. مجموعه همه اعداد فازی روی R را با E نشان می دهیم. [۱]

تعریف ۱-۲-۳ [۳] یک عدد فازی u ، یک زیر مجموعه فازی از اعداد حقیقی است، $u : R \rightarrow I = [0, 1]$ که از موارد زیر پیروی می کند:

(۱) u ، نیمه پیوسته بالا است،

(۲) $u(x) = 0$ بیرون از یک بازه ای مانند $[c, d]$ ،

(۳) عدد حقیقی b و a وجود دارند چنانچه $c \leq a \leq b \leq d$ و

(۱-۳) $u(x)$ صعودی یکنواخت در $[c, a]$ ،

(۲-۳) $u(x)$ نزولی یکنواخت در $[b, d]$ ،

(۳-۳) $u(x) = 1$ در $a \leq x \leq b$.

تعریف ۱-۳-۴ [۳] یک عدد فازی u به شکل پارامتری، یک زوج مرتب $(\underline{u}, \bar{u})$ از تابع $\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)$ $0 \leq \alpha \leq 1$ است، که شرایط و الزامات زیر را برآورده می کند:

۱- $\underline{u}(\alpha)$ یک تابع کراندار، صعودی یکنوا، پیوسته از طرف چپ است،

۲- $\bar{u}(\alpha)$ یک تابع کراندار، نزولی یکنوا، پیوسته از طرف چپ است،

۳- $\underline{u}(\alpha) \leq \bar{u}(\alpha)$ ، $0 \leq \alpha \leq 1$.

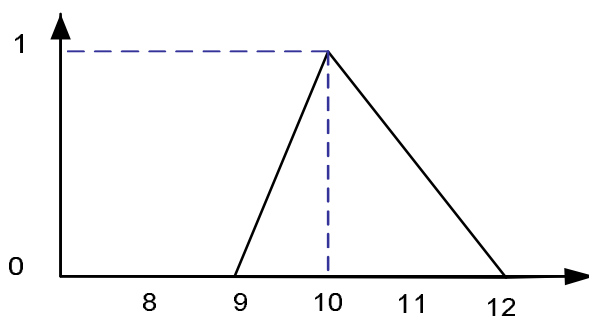
تعریف ۱-۴-۴ [۳] دو عدد فازی u و v را مساوی گوئیم، اگر برای هر $s \in R$ ، $u(s) = v(s)$ به عبارت دیگر

$$u = v \iff [u]_\alpha = [v]_\alpha \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

تعریف ۱-۴-۵ [۳] یک عدد فازی u یک عدد فازی $L-R$ نامیده می شود هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a, \\ l_u(x) & a < x \leq b, \\ 1 & b < x \leq c, \\ r_u(x) & c < x \leq d, \\ 0 & d < x. \end{cases}$$

که $l_u(x)$ و $r_u(x)$ به ترتیب توابع نا نزولی و نا صعودی هستند.



شکل ۱-۴-۱، عدد فازی L-R

شکل فوق مثالی از یک عدد فازی L-R را نشان می دهد.

تعریف ۱-۴-۶-۳ یک عدد فازی u یک عدد فازی مثلثی^۱ نامیده می شود هرگاه تابع عضویت آن به شکل زیر باشد:

$$A(x) = \begin{cases} 0 & x \leq u_c - \alpha, \\ \frac{x - u_c + \sigma}{\sigma} & u_c - \sigma < x \leq u_c, \\ 1 & x = u_c, \\ \frac{u_c + \beta - x}{\beta} & u_c < x \leq u_c + \beta, \\ 0 & u_c + \beta < x. \end{cases}$$

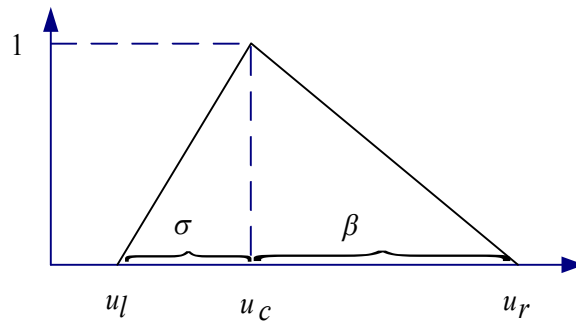
به طوری که σ و β اعداد حقیقی مثبتی هستند که به ترتیب گستردگی های چپ و راست نامیده می شوند. و عدد فازی مثلثی u را به صورت $u = (u_c, \sigma, \beta)$ نمایش می دهیم. فرم پارامتری رابطه فوق عبارتست از:

$$\underline{u}(\alpha) = u_c - \sigma + \sigma\alpha \quad \text{و} \quad \bar{u}(\alpha) = u_c + \beta - \beta\alpha.$$

عدد فازی مثلثی u ، مجموعه فازی در $\mathcal{F}(X)$ هست که با یک سه تایی مرتب $u = (u_l, u_c, u_r) \in R^3$ توصیف می شود، چنانکه

Triangular^۱

$$[u]_{\alpha} = [\underline{u}(\alpha), \bar{u}(\alpha)] = [u_c - (1 - \alpha)(u_c - u_l), u_c + (1 - \alpha)(u_r - u_c)].$$

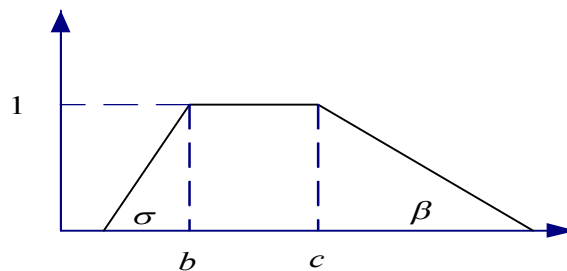


شکل ۱-۴-۲، عدد فازی مثلثی

تعریف ۱-۴-۷-۳ [۳] یک عدد فازی u یک عدد فازی ذوزنقه ای^۲ نامیده می شود هرگاه تابع عضویت فرم زیر را داشته باشد:

$$A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq b - \alpha, \\ \frac{x - b + \sigma}{\sigma}, & b - \sigma < x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ \frac{c + \beta - x}{\beta}, & c < x \leq c + \beta, \\ 0, & c + \beta < x. \end{cases}$$

به طوری که σ و β اعداد حقیقی مثبتی هستند که به ترتیب گستردگی های چپ و راست نامیده می شوند. و عدد فازی ذوزنقه ای u را به صورت $u = (b, c, \sigma, \beta)$ نمایش می دهیم.



شکل ۱-۴-۳، عدد فازی ذوزنقه ای

۵-۱ حساب فازی

لم ۱-۵-۱-۳ [۳] اگر u و v دو عدد فازی باشند، آن گاه برای $\alpha \in (0, 1]$ داریم

$$(u \oplus v)_{\alpha} = [\underline{u} + \underline{v}, \bar{u} + \bar{v}],$$

$$(u \odot v)_{\alpha} = [\min\{\underline{u} \underline{v}, \underline{u} \bar{v}, \bar{u} \underline{v}, \bar{u} \bar{v}\}, \max\{\underline{u} \underline{v}, \underline{u} \bar{v}, \bar{u} \underline{v}, \bar{u} \bar{v}\}],$$

$$(u - v)_\alpha = [\underline{u} - \bar{v}, \bar{u} - \underline{v}],$$

$$(u / v)_\alpha = [\min\{\underline{u} / \underline{v}, \underline{u} / \bar{v}, \bar{u} / \underline{v}, \bar{u} / \bar{v}\}, \max\{\underline{u} \underline{v}, \underline{u} \bar{v}, \bar{u} \underline{v}, \bar{u} \bar{v}\}].$$

تبصره ۱-۵-۲-۳ فرض کنید u عددی فازی باشد، در این صورت برای هر $\alpha \in (0, 1]$

$$\lambda[\underline{u}, \bar{u}] = [\lambda\underline{u}, \lambda\bar{u}] \quad \text{اگر } \lambda > 0$$

$$\lambda[\underline{u}, \bar{u}] = [\lambda\bar{u}, \lambda\underline{u}] \quad \text{اگر } \lambda < 0$$

۱-۶ متر عدد فازی

فرض کنید $D: E \times E \rightarrow R^+ \cup \{0\}$ به صورت زیر تعریف شود

$$D(u, v) = \sup_{\alpha \in [0, 1]} d([u]_\alpha, [v]_\alpha).$$

که در آن d متر هاسدورف است و به صورت زیر تعریف می شود،

$$d([u]_\alpha, [v]_\alpha) = \inf\{\epsilon : [u]_\alpha \subset N([v], \epsilon), [v]_\alpha \subset N([u], \epsilon)\} = \max\{|\underline{u} - \underline{v}|, |\bar{u} - \bar{v}|\}.$$

در اینجا $N([v], \epsilon)$ و $N([u], \epsilon)$ به ترتیب ϵ همسایگی از $[v]_\alpha$ و $[u]_\alpha$ است که در آن

$$[u]_\alpha = [\underline{u}, \bar{u}], [v]_\alpha = [\underline{v}, \bar{v}].$$

با توجه به این تعریف خاصیت های زیر نتیجه می شود

الف) (E, D) یک فضای متریک کامل است.

ب) برای هر $u, v, w \in E$ و $D(u, v) = D(v, u)$ و $D(u \oplus w, v \oplus w) = D(u, v)$.

ج) برای هر $u, v \in E$ و $k \in R$ و $D(k \odot u, k \odot v) = |k|D(u, v)$.

د) برای هر $u, v, w, e \in E$ و $D(u \oplus v, w \oplus e) \leq D(u, w) + D(v, e)$.

و) برای هر $u, v \in E$ و $D(u \oplus v, \tilde{v}) \leq D(u, \tilde{v}) + D(v, \tilde{v})$.

ه) برای هر $u, v \in E$ و $D(u \oplus v, w) \leq D(u, w) + D(v, \tilde{v})$ که $\tilde{v} = \chi_{\{0\}}$.

تبصره ۱-۶-۱ $D(u, \tilde{v}) = D(\tilde{v}, u) = \|u\|_F$

۱-۷-۱ اصل گسترش

اصل گسترش یک رابطه اساسی است که این امکان را به ما می دهد تا دامنه و برد یک تابع را از نقاطی در دامنه و برد به مجموعه های فازی روی آن ها توسعه دهیم. به عبارت دیگر به وسیله اصل گسترش هر تابع کلاسیک، را می توان به یک تابع فازی گسترش داد.

تعریف ۱-۷-۱-۳ فرض کنید $f: X \rightarrow Y$ تابعی از مجموعه کلاسیک X به مجموعه کلاسیک Y باشد. دو

تابع $f: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$ و $f^{-1}: \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ را که به صورت

$$[f(A)](y) = \sup_{x|y=f(x)} A(x) \quad A \in \mathcal{F}(X)$$

به ازای هر

و به ازای هر $B \in \mathcal{F}(Y)$ $[f^{-1}(B)](x) = B(f(x))$.

تعریف می شوند، طبق اصل توسیع زاده فازی شده گوییم. رابطه ای که توابع کلاسیک را فازی می کند، اصل توسیع زاده نامیم.

گزاره ۱-۷-۲-۳ اگر $g: R \times R \rightarrow R$ یک تابع باشد، آن گاه طبق اصل توسیع زاده می توانیم، با استفاده از معادله زیر، g را که یک تابع پیوسته است، به $E \times E \rightarrow E$ گسترش دهیم،

$$g(u, v)(z) = \sup_{z=g(x,y)} \min\{u(x), v(y)\},$$

و همچنین

$$[g(u, v)(z)]_\alpha = g([u]_\alpha, [v]_\alpha).$$

برای هر $x, y \in R$ و $0 \leq \alpha \leq 1$ ، $u, v \in E$

به ویژه بنا به اصل توسیع زاده و با توجه به روابط بالا، جمع و ضرب اسکالر در فضای اعداد فازی $\mathcal{F}(X)$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$[u + v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha,$$

$$[ku]_\alpha = k[u]_\alpha.$$

که در آن $0 \leq \alpha \leq 1$ ، $u, v \in \mathcal{F}(X)$ ، $k \in R$

۱-۸- تابع فازی

تعریف ۱-۸-۱-۳ فرض کنید I یک بازه حقیقی و E مجموعه همه اعداد فازی باشد، یک تابع فازی، تابع $f: I \rightarrow E$ است که به صورت زیر تعریف می شود

$$f(t)[\alpha] = [\underline{f}_\alpha(t), \overline{f}_\alpha(t)] \quad t \in I, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

نشان می دهیم.

تعریف ۱-۸-۲-۳ اگر f یک تابع پیوسته از $R^+ \times R$ به توی R باشد و $x(t)$ یک عدد فازی باشد، آن گاه برای عدد فازی $f(t, x(t))$ که در آن $t \in R^+$ است، طبق اصل توسیع زاده، تعریف زیر را خواهیم داشت،

$$f(t, x(t))(s) = \sup\{x(\tau) | s = f(t, \tau)\},$$

و از آن نتیجه می شود،

$$f(t, x(t))[\alpha] = [\underline{f}_\alpha(t, x(t)), \overline{f}_\alpha(t, x(t))],$$

که در آن،

$$\begin{cases} \underline{f}_\alpha(t, x(t)) = \min\{f(t, u) | u \in [\underline{x}_\alpha(t), \overline{x}_\alpha(t)]\}, \\ \overline{f}_\alpha(t, x(t)) = \max\{f(t, u) | u \in [\underline{x}_\alpha(t), \overline{x}_\alpha(t)]\}. \end{cases}$$

فصل دوم

بررسی برخی از روشهای رتبه بندی اعداد فازی

مقدمه

مرتب کردن اعداد فازی و مقایسه آنها یک فرآیند بسیار مهم در زمینه تصمیم گیری است. چون مسأله انتخاب همواره در زمینه های گوناگونی از قبیل کنترل فازی، استدلال تقریبی، بهینه سازی، برنامه ریزی ریاضی فازی و غیره ظاهر می شود. بنابراین گاهی لازم است موقعیتهای مختلفی را در یک محیط مبهم و نادقیق که به نوعی با عدم قطعیت مواجهیم، به وسیله اعداد فازی ارزیابی کنیم. در این حالت تصمیم گیرنده آن موقعیت ها را با اعداد فازی بیان کرده، آنگاه پس از مرتب کردن آنها تصمیم نهایی را اتخاذ می نماید. به بیان روشن تر، مقایسه بین اعداد فازی، مقایسه بین موقعیت های مربوطه است. در این راستا روشهای متفاوتی برای مرتب کردن اعداد فازی ارائه شده است که البته با توجه به کاربرد آنها در عمل دارای معایب و محاسنی هستند. تعدادی از این روشها از حساسیت کافی در مقایسه بر خوردار نیستند و یا ممکن است نتایج متفاوتی در بعضی از داده های آزمایشی رخ دهد. اما دیده می شود که در بعضی از روشها حذف یا اضافه کردن تعدادی اعداد فازی باعث تغییر اعضای مجموعه می شود. نقص دیگر، بعضی از روشها در عمل نمایان می شود و تعدادی از روشهای مقایسه تنها زمانی قابل استفاده هستند که نوع تابع عضویت مشخص باشد مثلاً بعضی از روشها تنها برای توابع عضویت نرمال، مثلثی یا دوزنقه ای قابل اجرا هستند.

به طور کلی سه دیدگاه برای مقایسه اعداد فازی وجود دارد:

۱- با استفاده از تعریف یک تابع مقایسه $F: F(R) \rightarrow R$ که در آن $F(\mathfrak{R})$ مجموعه اعداد فازی است. این دیدگاه توسط محققانی از جمله "Yager" و "Chang" [۱۹] و [۲۱] و ... که روشهای آنها در این فصل به نام دسته اول معرفی شده است، دنبال می شود.

۲- بدست آوردن یک مجموعه مرجع که مقایسه مقادیر فازی با استفاده از آن صورت می گیرد، این دیدگاه هم توسط محققانی از جمله "Chen" و "Kim-Park" [۵] و ... که روشهای آنها در دسته دوم قرار دارد، دنبال شده است.

۳- ساختن یک رابطه فازی جفتی (دوتایی) که مقایسه براساس آن رابطه صورت می گیرد، و این روشها توسط محققانی از جمله "Bass and Kwakernaak" [۲۰] و "Delgado" [۱۷] و که مربوط به دسته سوم می شوند، دنبال شده است.

در این فصل ابتدا هفت خاصیت روشهای رتبه بندی را معرفی می کنیم و سپس سه دسته روشها را با ذکر خواصی که دارند، مطرح می کنیم.

۱-۲ هفت خاصیت مطلوب برای روشهای رتبه بندی

برای اینکه از بهترین روش برای رتبه بندی استفاده شود، باید بدانید چه خواصی دارند و آیا می توان با توجه به شرایط مسأله مورد نظر از آنها استفاده کرد. فرض کنید M یک روش رتبه بندی باشد و S مجموعه مقادیر فازی که روش M در مورد آنها به کار برده می شود و E یک زیر مجموعه متناهی دلخواه از S می باشد. فرض کنید دو شرط زیر برقرار باشد:

(۱) مقادیر فازی در شرایط روش رتبه بندی مورد نظر، صدق کند.

(۲) وقتی یک روش رتبه بندی روی مجموعه مقادیر فازی S به کار می رود، برای هر $(A, B) \in S^2$ فقط یکی از نتایج زیر برقرار است:

$$A > B, A < B, A \sim B$$

۱- خاصیت A_1 (خاصیت انعکاسی): برای یک زیر مجموعه متناهی دلخواه E از S داریم:

به ازای هر $A \in E$ ، با استفاده از روش M روی E ، $A \gtrsim A$ می باشد.

۲- خاصیت A_2 (خاصیت مقارن): برای یک زیر مجموعه متناهی دلخواه E از S داریم:

اگر به ازای هر $(A, B) \in E^2$ با استفاده از روش M روی E داشته باشید: $A \gtrsim B$ و $B \gtrsim A$ ، آنگاه $A \sim B$.

۳- خاصیت A_3 (خاصیت تعدی): برای یک زیر مجموعه متناهی دلخواه E از S داریم:

اگر به ازای هر $(A, B, C) \in E^3$ با استفاده از روش M روی E ، $A \gtrsim B$ و $B \gtrsim C$ ، آنگاه $A \gtrsim C$.

۴- (i) خاصیت A_4 : برای یک زیر مجموعه متناهی دلخواه E از S داریم:

به ازای هر $(A, B) \in E^2$ اگر $\inf \text{Supp}(A) > \sup \text{Supp}(B)$ ، آنگاه $A \gtrsim B$.

(ii) خاصیت A'_4 : برای یک زیر مجموعه متناهی دلخواه E از S داریم:

به ازای هر $(A, B) \in E^2$ اگر $\inf \text{Supp}(A) > \sup \text{Supp}(B)$ ، آنگاه $A > B$.

نکته: A_4 به این معنی است که اگر دو مقدار فازی، تکیه گاه های جدا از هم داشته باشند، آنگاه مقدار فازی با تکیه گاه در سمت راست بهتر از دیگری است.

۵- خاصیت A_5 : فرض کنید E و F دو مجموعه متناهی باشند و A و B در $E \cap F$ قرار داشته باشند، با استفاده از روش M روی E ، $A > B$ است اگر و تنها اگر با استفاده از روش M روی F ، $A > B$ باشد.

۶- (i) خاصیت A_6 : فرض کنید A و B و $A + C$ و $B + C$ اعضای مجموعه S باشند، اگر با استفاده از روش M روی $\{A, B\}$ ، $A \gtrsim B$ باشد، آنگاه با استفاده از روش M روی $\{A + C, B + C\}$ ، $A + C \gtrsim B + C$ است.

(ii) خاصیت A'_1 : وقتی $C \neq \emptyset$ باشد، اگر با استفاده از روش M روی $\{A, B\}$ ، $A \succ B$ باشد آنگاه با استفاده از روش M روی $\{A + C, B + C\}$ ، $A + C \succ B + C$.

۷- خاصیت A_7 : فرض کنید A و B و AC و BC اعضای S باشند و $C \geq 0$ داریم: اگر با استفاده از روش M روی $\{A, B\}$ ، $A \succeq B$ باشد، آنگاه با استفاده از روش M روی $\{AC, BC\}$ ، $AC \succeq BC$.

قضیه ۱-۱-۲: A'_ϵ از A_ϵ قویتر است. به عبارتی اگر روشی در A'_ϵ صدق کند، در A_ϵ نیز صدق می کند. اثبات: به [۴] مراجعه نمایید.

قضیه ۲-۱-۲: فرض کنید که M_1 و M_2 دو روش رتبه بندی برای مقادیر فازی باشند و $A_* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A_5, A_6, A'_5, A'_6, A_7, A'_7, A_8, A'_8, A_9, A'_9, A_{10}, A'_{10}\}$ اگر M_1 و M_2 روی هر زیر مجموعه متناهی S برای مقادیر فازی رتبه یکسانی بدست آورند، آنگاه M_1 و M_2 در A_* یا به طور همزمان صدق می کنند یا نمی کنند. اثبات: به [۴] مراجعه شود.

قضیه ۳-۱-۲: فرض کنید که M_1 و M_2 دو روش رتبه بندی برای مقادیر فازی باشند و $A_* = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A_5, A_6, A'_5, A'_6, A_7, A'_7, A_8, A'_8, A_9, A'_9, A_{10}, A'_{10}\}$ اگر M_1 و M_2 روی هر زیر مجموعه متناهی S برای مقادیر فازی رتبه یکسانی نمایند. اثبات: به [۴] مراجعه شود.

نکته ۱-۱-۲: همه روشهای سه دسته مورد بررسی در سه خاصیت اول A_1, A_2, A_3 صدق می کنند.

۲-۲ دسته اول روشهای رتبه بندی

۱-۲-۲ روش Adamo (۱۹۸۰)

در این روش اعداد فازی با استفاده از α -برشها مرتب می شوند، که $\tilde{A}_{i\alpha}$ به شکل زیر می باشد:

$$a_{i\alpha}^- = \inf \tilde{A}_{i\alpha}, \quad a_{i\alpha}^+ = \sup \tilde{A}_{i\alpha} \quad \text{و} \quad \tilde{A}_{i\alpha} = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

بنابراین برای عدد فازی مفروض $\tilde{A}_i$ و $\alpha \in [0, 1]$ ، شاخص Adamo به صورت زیر تعریف می شود:

$$AD^\alpha(\tilde{A}_i) = \sup \tilde{A}_{i\alpha} = a_{i\alpha}^+.$$

۲-۲-۲ روش Yager [۱۹]

Yager چهار روش برای مقایسه اعداد فازی ارائه کرد، که مستقل از نرمال بودن تابع عضویت است. در این روشها برای مرتب کردن هر گردایه دلخواه از اعداد یک تابع مقایسه معرفی می شود.

$$Y_1(\tilde{A}_i) = \frac{\int_0^1 g(x) \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}.$$

روش اول:

که در آن $g(x)$ درجه اهمیت مقدار x و تابعی انتگرال پذیر است. (که این روش شبیه مرکز ثقل است) اگر $g(x) = x$ ، آنگاه:

$$Y_1(\tilde{A}_i) = \frac{\int_0^1 x \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}{\int_0^1 \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}.$$

روش دوم:

حال اگر $M(\tilde{A}_{i\alpha})$ مقدار میانگین اعضای α -برش $\tilde{A}_i$ باشد، آنگاه دومین تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$Y_2(\tilde{A}_i) = \int_0^{hgt(\tilde{A}_i)} M(\tilde{A}_{i\alpha}) d\alpha.$$

روش سوم:

$$Y_3(\tilde{A}_i) = \int_0^1 |x - \mu_{\tilde{A}}(x)| dx.$$

روش چهارم:

$$Y_4(\tilde{A}_i) = \sup_{x \in [0,1]} \min(x, \mu_{\tilde{A}_i}(x)).$$

۲-۲-۳ روش Change [۲۱]

فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازی با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ باشد، آنگاه تابع مقایسه به صورت زیر معرفی می شود:

$$C(\tilde{A}_i) = \int_{S_i} x \mu_{\tilde{A}}(x) dx, \quad S_i = \text{Supp } \tilde{A}_i.$$

رابطه بالا برای عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, b, c)$ با $h = hgt(\tilde{A})$ به صورت زیر در خواهد آمد:

$$C(\tilde{A}) = \frac{(b-a)(a+b+c)}{6} \cdot h,$$

و برای عدد ذوزنقه ای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ با $h = hgt(\tilde{A})$ داریم:

$$C(\tilde{A}) = \frac{h}{6} [c^2 - b^2 - a(b+a) + d(c+d)] = \frac{h}{6} (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 - ab + cd)$$

۲-۲-۴ روش Campos and Munos [۱۵]

روشی که Campos و Munos ارائه کردند به صورت زیر می باشد:

$$CM(\tilde{A}_i) = \int_Y f_{\tilde{A}_i}(\alpha) dp(\alpha).$$

که Y زیر مجموعه ای از بازه واحد می باشد و P یک اندازه احتمالی روی Y و $f_{\tilde{A}_i}: Y \rightarrow \mathcal{R}$ که وضعیت α -برش $\tilde{A}_i$ را برای هر $\alpha \in Y$ نشان می دهد. Campos و Munos آن را به صورت زیر پیشنهاد کردند:

$$f_{\tilde{A}_i}(\alpha) = \lambda a_{i\alpha}^+ + (1 - \lambda) a_{i\alpha}^-, \quad \lambda \in [0, 1],$$

λ یک شاخص خوش بینانه - بدبینانه است. برای راحتی دو حالت زیر را در نظر بگیرید:
حالت اول: فرض کنید $P((a, b]) = b - a$ که $0 \leq a \leq b \leq 1$ و $\lambda \in [0, 1]$ باشد، آنگاه:

$$CM_1^\lambda(\tilde{A}_i) = \int_0^1 (\lambda a_{i\alpha}^+ + (1 - \lambda) a_{i\alpha}^-) d\alpha.$$

حالت دوم: فرض کنید $P((a, b]) = b^2 - a^2$ که $0 \leq a \leq b \leq 1$ و $\lambda \in [0, 1]$ باشد، آنگاه:

$$CM_2^\lambda(\tilde{A}_i) = 2 \int_0^1 \alpha (\lambda a_{i\alpha}^+ + (1 - \lambda) a_{i\alpha}^-) d\alpha.$$

۵-۲-۲ Liou and Wang [۱۶] روش

فرض کنید عدد فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر داده شده باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(x), & a \leq x \leq b, \\ 1, & b \leq x \leq c, \\ R(x), & c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

که در آن R, L توابع پیوسته به ترتیب اکیداً صعودی و اکیداً نزولی روی $[a, b]$ و $[c, d]$ می باشند.
مقدار انتگرال چپ و انتگرال راست $\tilde{A}$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$I_L(\tilde{A}) = \int_0^1 L^{-1}(y) dy \quad \text{و} \quad I_R(\tilde{A}) = \int_0^1 R^{-1}(y) dy.$$

آنگاه مقدار انتگرال کلی $\tilde{A}$ با شاخص خوش بینی λ به شکل زیر تعریف می شود:

$$LW^\lambda(\tilde{A}_i) = I_T^\lambda(\tilde{A}) = \lambda I_R(\tilde{A}) + (1 - \lambda) I_L(\tilde{A}), \quad \lambda \in [0, 1],$$

۶-۲-۲ Choobineh and Li [۱۳] روش

این روش مستقل از نرمال بودن عدد فازی است. فرض کنید $\tilde{A}$ یک عدد فازی باشد، و a, d دو عدد باشند که:

$$a \leq \inf(\text{Supp } \tilde{A}), \quad d \geq \sup(\text{Supp } \tilde{A}),$$

روش پیشنهادی Choobineh و Li به صورت زیر تعریف می شود:

$$CL(\tilde{A}_i) = \frac{1}{2} \left[hgt(\tilde{A}_i) - \frac{1}{d-a} \left(\int_0^{hgt(\tilde{A}_i)} (d - a_{i\alpha}^+) d\alpha - \int_0^{hgt(\tilde{A}_i)} (a_{i\alpha}^- - a) d\alpha \right) \right].$$

۷-۲-۲ Fortemos and Roubens [۳۲] روش

فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مقادیر محدب باشند. شاخص Fortemos و Roubens به صورت زیر می باشد:

$$FR(\tilde{A}_i) = \frac{1}{\sqrt{hgt(\tilde{A}_i)}} \int_0^{hgt(\tilde{A}_i)} (a_{i\alpha}^+ + a_{i\alpha}^-) d\alpha$$

که برای عدد فازی مثلثی $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)$ و عدد ذوزنقه ای $\tilde{B} = (b^l, b^u, \alpha, \beta)$ تابع مقایسه تعریف شده در بالا، به صورت آنچه که در زیر آمده بیان می شود:

$$FR(\tilde{A}) = m + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) , \quad FR(\tilde{B}) = \frac{1}{2} \left(b^l + b^u + \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \right).$$

۲-۲-۸- روش Delgado [۱۷]

برای هر عدد فازی $\tilde{A}$ تعریف می کنیم:

$$Val_s(\tilde{A}) = \int_0^1 s(\alpha)(A_l(\alpha) + A_r(\alpha)) d\alpha,$$

$$A_s(\tilde{A}) = \int_0^1 s(\alpha)(A_l(\alpha) - A_r(\alpha)) d\alpha.$$

شاخص زیر را برای رتبه بندی عدد فازی $\tilde{A}$ در نظر می گیریم:

$$r(\tilde{A}) = \gamma Val_s(\tilde{A}) + \beta A_s(\tilde{A}),$$

که $\beta \in [-1, 1]$ و $\gamma \in [0, 1]$.

۲-۳- دسته دوم روشهای رتبه بندی

۲-۳-۱- روش Jain [۳۱]

در این روش اعداد فازی نرمال با استفاده از مجموعه Max (بیشینه ساز) و مقدار سودمندی که به صورت زیر

معرفی می شوند، مقایسه می شوند. (در ضمن فرض بر مثلثی یا ذوزنقه ای بودن اعداد فازی است).

فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ عدد فازی نرمال باشند و

$$S_i = Supp \tilde{A}_i , \quad S = \bigcup_{i=1}^n S_i , \quad x_{max} = \sup S.$$

آنگاه مجموعه بیشینه ساز M به شکل زیر تعریف می شود:

$$M = \{(x, \mu_M(x)) | x \in \mathcal{R}\},$$

که در آن

$$\mu_M(x) = \begin{cases} \left(\frac{x}{x_{max}} \right)^k , & x \in S, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

مقدار $k > 0$ برای کاربردهای متفاوت قابل تغییر است و بستگی به شخص تصمیم گیرنده دارد. مقدار

سودمندی برای هر $\tilde{A}_i$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$U(i) = \sup_{x \in S} \left(\min(\mu_{\tilde{A}_i}(x), \mu_M(x)) \right).$$

در واقع مقایسه n عدد فازی مفروض به مقایسه رتبه متناظر با آنها که از رابطه بالا محاسبه می شود که همان شاخص Jain است ، برمی گردد.

۲-۳-۲-۷] Kerre روش

Kerre شاخصی معرفی می کند که از فاصله Hamming بین $\tilde{A}_1$ و $\max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ استفاده شده است:

$$K(\tilde{A}_i) = \int_S |\mu_{\tilde{A}_i}(x) - \max(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)(x)| dx,$$

که

$$S_i = \text{Supp } \tilde{A}_i, \quad S = \bigcup_{i=1}^n S_i.$$

۲-۳-۲-۲۴] Chen روش

فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ ، عدد فازی با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}_i}(x)$ باشند. تعریف می شود:

$$S_i = \text{Supp } \tilde{A}_i, \quad S = \bigcup_{i=1}^n S_i, \quad x_{\min} = \inf S, \quad x_{\max} = \sup S.$$

مجموعه های بیشینه ساز M و کمینه ساز G به ترتیب با توابع عضویت زیر معرفی می شوند:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^k, & x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\mu_G(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}} \right)^k, & x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

مقدار سودمندی راست و چپ $\tilde{A}_i$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$U_M(i) = \sup_x (\min(\mu_{\tilde{A}_i}(x), \mu_M(x))),$$

$$U_G(i) = \sup_x (\min(\mu_{\tilde{A}_i}(x), \mu_G(x))).$$

سودمندی کلی یا مقدار ترتیبی $\tilde{A}_i$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$CH^K(\tilde{A}_i) = U_T(i) = \frac{1}{2} [U_M(i) + (1 - U_G(i))].$$

در مقایسه دو یا چند عدد فازی با روش چن گاهی اتفاق می افتد که مقادیر سودمندی متناظر با آنها برابرند، اگر رئوس آنها نیز بر هم منطبق شدند، دو عدد با هم برابر است. در غیر این صورت عددی که رأس آن از مبدأ دورتر است، بزرگتر است. در روش چن ترتیب اعداد با تغییر $x_{\max}$ و $x_{\min}$ و k تغییر می کند.

۲-۳-۴- Wang [۱۶] روش

روشی که Wang ارائه داد از $\max$ فازی استفاده می شود، فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ اعداد فازی باشند.

$$W(\tilde{A}_i) = \frac{\int_{\mathcal{R}} \min(\mu_{\tilde{A}_i}(x), \max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)(x)) dx}{\int_{\mathcal{R}} \max(\mu_{\tilde{A}_i}(x), \max(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)(x)) dx}.$$

۲-۳-۵- Kim – Park [۳۳] روش

مجموعه بیشینه ساز M و مجموعه کمینه ساز G به ترتیب با توابع عضویت زیر تعریف می شوند:

$$\mu_M(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} & , x \in S, \\ . & , otherwise. \end{cases}$$

$$\mu_G(x) = \begin{cases} \frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}} & , x \in S, \\ . & , otherwise. \end{cases}$$

مجموعه تصمیم خوش بینانه $D_o = \{(i, D_o(i))\}$ و مجموعه تصمیم بد بینانه $D_p = \{(i, D_p(i))\}$ با توابع زیر معرفی می شوند:

$$D_o(i) = \sup[\min(\mu_{\tilde{A}_x}, \mu_M(x))],$$

$$D_p(i) = 1 - \sup[\min(\mu_{\tilde{A}_x}, \mu_G(x))].$$

مجموعه تصمیم فازی $D = \{(i, D(i))\}$ که در واقع ترتیب نهایی روی $\tilde{A}_i$ ها با توابع عضویت آن اعمال می شود، به شکل زیر تعریف می شود:

$$D(i) = kD_o(i) + (1 - k)D_p(i), \quad k \in [0, 1],$$

که $D(i)$ همان شاخص Kim و Park می باشد که به صورت زیر نیز نشان داده می شود:

$$KP^k(\tilde{A}_i) = k.hgt(\tilde{A}_i \cap M) + (1 - k)(1 - hgt(\tilde{A}_i \cap G)).$$

۲-۳-۶- Chen [۲۴] روش

پایین ترین و بالاترین حد k ام α -برش $\tilde{A}_i$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$L_{i,k} = \inf\{x | \mu_{\tilde{A}_i}(x) \geq \alpha_k\},$$

$$R_{i,k} = \sup\{x | \mu_{\tilde{A}_i}(x) \geq \alpha_k\}.$$

حال مقدار تسلط راست (چپ) $D_{i,j}^L$ ($D_{i,j}^r$) بر $\tilde{A}_i$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$D_{i,j}^L = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (L_{i,k} - L_{j,k}),$$

$$D_{i,j}^R = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (R_{i,k} - R_{j,k}),$$

$$\alpha_n = \frac{k}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

و در کل میزان تسلط $\tilde{A}_i$ بر $\tilde{A}_i$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$D_{i,j} = \beta D_{i,j}^L + (1 - \beta) D_{i,j}^R, \quad \beta \in [0, 1].$$

۲-۳-۷- روش Abbasbandy-Asady [۳۰]

ابتدا تعریف می کنیم:

$$D_p(\tilde{A}, \tilde{A}_.) = \left(\int_0^1 |A_l(\alpha)|^p + |A_r(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1,$$

که $(A_l(\alpha), A_r(\alpha))$ شکل پارامتری عدد فازی $\tilde{A}_i$ است و $\tilde{A}_.(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$ و تعریف می کنیم

$$\gamma(\tilde{A}) = \text{sign} \left(\int_0^1 (A_l(\alpha) + A_r(\alpha)) d\alpha \right).$$

پس

$$\gamma(\tilde{A}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \text{sign} \left(\int_0^1 (A_l(\alpha) + A_r(\alpha)) d\alpha \right) \geq 0, \\ 0 & \text{if } \text{sign} \left(\int_0^1 (A_l(\alpha) + A_r(\alpha)) d\alpha \right) < 0. \end{cases}$$

برای رتبه بندی شاخص زیر تعریف می شود:

$$d_p(\tilde{A}, \tilde{A}_.) = \gamma(u). D_p(\tilde{A}, \tilde{A}_.).$$

۲-۴- فرمول بندی ترتیب رتبه بندی برای روشهای دسته سوم

در اینجا دو فرآیند ترتیب معرفی می شود که در دسته سوم کاربرد دارد.

(۱) برای رابطه فازی دوتایی $p \in \{P_{BK}, P_{BG}\}$ رتبه بندی $\tilde{A}_i$ ها توسط رابطه زیر بدست می آید:

$$R_p(\tilde{A}_i) = \min(P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_1), P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_2), \dots, P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_n)),$$

بزرگترین $R_p(\tilde{A}_i)$ معادل با بالاترین رتبه برای $\tilde{A}_i$ ها می باشد. P_{BG} و P_{BK} در بخش بعدی معرفی می گردد.

(۲) برای رابطه دوتایی فازی $P \in \{P_N^\lambda, P_Y, \beta_T, PD, PSD, NSD, ND\}$ از فرآیند ترتیب (۱) استفاده می کند تا رتبه نهایی حاصل شود.

(۳) برای رابطه دوتایی فازی $P \in \{P_{SS}, P_{K1}, P_{K2}, \delta_T\}$ استفاده می شود تا رتبه نهایی بدست آید.

۲-۵- فرآیند ترتیب براساس رابطه فازی غیردوری

فرض کنید $E = \{\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n\}$ مجموعه ای از مقادیر فازی باشد. در ابتدا دوفرایند ترتیب معرفی می شود که برای مرتب کردن مقادیر فازی بر اساس رابطه فازی غیر دوری P روی مجموعه E ، استفاده می شوند.

فرآیند ترتیب (۱)

مجموعه $I_m = \{1, 2, \dots, n\}$ را در نظر بگیرید. برای فرآیند ترتیب (۱) باید مجموعه هایی را به صورت زیر بسازید:

$$\mathcal{R}_1 = \{\tilde{A}_i \mid \tilde{A}_i \in E \ \& (\forall \tilde{A}_i \in E) [P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \geq P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)]\}$$

و در صورتی که $B_1 = E/\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$ باشد، می توانید مجموعه $\mathcal{R}_2$ را بسازید:

$$\mathcal{R}_2 = \{\tilde{A}_i \mid \tilde{A}_i \in B_1 \ \& (\forall \tilde{A}_i \in B_1) [P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \geq P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)]\}$$

و به طور مشابه اگر $B_2 = B_1/\mathcal{R}_2 \neq \emptyset$ باشد، $\mathcal{R}_3$ را تشکیل دهید و این روند را تا جایی ادامه دهید که

$$B_m = B_{m-1}/\mathcal{R}_m = \emptyset$$

حال با استفاده از فرآیند فوق، روابط ترتیب فازی $>$ ، $<$ ، $\sim$ را روی E به صورت زیر تعریف می شود:

(۱) اگر $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $(s, t) \in I_m^*$ وجود داشته باشد که $s < t$ و $\tilde{A}_i \in \mathcal{R}_s$ و $\tilde{A}_j \in \mathcal{R}_t$ باشد.

(۲) $\tilde{A}_i \sim \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $s \in I_m$ بی وجود داشته باشد که $\tilde{A}_i \in \mathcal{R}_s$ و $\tilde{A}_j \in \mathcal{R}_t$.

(۳) $\tilde{A}_i \succeq \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$ یا $\tilde{A}_i \sim \tilde{A}_j$ باشد.

که روابط فوق دارای خواص زیر هستند:

(۱) $\sim$ و $\succeq$ انعکاسی هستند.

(۲) $\sim$ متقارن و $\succeq$ نامتقارن است.

(۳) $\succeq$ و $\sim$ و $>$ متعدی هستند.

(۴) برای مقادیر فازی $\tilde{A}_i$ و $\tilde{A}_j$ در E ، فقط یکی از حالات زیر برقرار است:

$$\tilde{A}_i > \tilde{A}_j, \quad \tilde{A}_j > \tilde{A}_i, \quad \tilde{A}_i \sim \tilde{A}_j$$

(۵) اگر $P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) > P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)$ باشد، آنگاه $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$.

(۶) اگر P پایدار باشد، آنگاه

(i) $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) > P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)$.

(ii) $\tilde{A}_i \sim \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)$.

فرآیند ترتیب (۲)

مشابه فرآیند ترتیب (۱) در ابتدا باید مجموعه ها را به صورت زیر بسازید:

$$\mathcal{R}_1 = \{\tilde{A}_i \mid \tilde{A}_i \in E \ \& (\forall \tilde{A}_j \in E) [P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \leq P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)]\}$$

و در صورتی که $B_1 = E/\mathcal{R}_1 \neq \emptyset$ باشد، می توانید مجموعه $\mathcal{R}_2$ را بسازید:

$$\mathcal{R}_2 = \{\tilde{A}_i \mid \tilde{A}_i \in B_1 \ \& (\forall \tilde{A}_j \in B_1) [P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \leq P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)]\}.$$

و به طور مشابه اگر $B_2 = B_1/\mathcal{R}_2 \neq \emptyset$ باشد، $\mathcal{R}_3$ را تشکیل دهید و این روند را تا جایی ادامه دهید که

$$B_m = B_{m-1}/\mathcal{R}_m = \emptyset$$

حال با استفاده از فرآیند ترتیب (۲) روابط ترتیب فازی $>$ ، $<$ ، $\sim$ را روی E به صورت زیر تعریف می شود:

(۱) $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $(s, t) \in I_m^*$ وجود داشته باشد که $s < t$ و $\tilde{A}_i \in \mathcal{R}_s$ و $\tilde{A}_j \in \mathcal{R}_t$ باشد.

(۲) $\tilde{A}_i \sim \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $s \in I_m$ بی وجود داشته باشد که $\tilde{A}_i \in \mathcal{R}_s$ و $\tilde{A}_j \in \mathcal{R}_t$.

(۳) $\tilde{A}_i \gtrsim \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$ یا $\tilde{A}_i \sim \tilde{A}_j$ باشد.

روابط فوق همه خواص ذکر شده برای فرآیند ترتیب (۱) را دارا می باشند بجز خواص (۵) و (۶) که به صورت زیر می باشند:

(۵) اگر $P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) < P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)$ باشد، آنگاه $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$.

(۶) اگر P پایدار باشد، آنگاه :

(i) $\tilde{A}_i > \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) < P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)$.

(ii) $\tilde{A}_i \sim \tilde{A}_j$ اگر و تنها اگر $P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)$.

قضیه ۲-۵-۱- فرض کنید P و P' روابط فازی دوتایی در E باشند:

(۱) اگر رابطه دو شرطی $\{P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \geq P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)\}$ اگر و تنها اگر $\{P'(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \geq P'(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)\}$ برقرار باشد، آنگاه رتبه بندی های بدست آمده از P و P' ، که هر دو براساس فرآیند ترتیب (۱) می باشند، یکی هستند.

(۲) اگر رابطه دو شرطی $\{P(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \geq P(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)\}$ اگر و تنها اگر $\{P'(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) \leq P'(\tilde{A}_j, \tilde{A}_i)\}$ برقرار باشد، آنگاه رتبه بندی های بدست آمده از P براساس فرآیند ترتیب (۱) و P' براساس فرآیند ترتیب (۲) یکی هستند.

اثبات : به [۵] مراجعه نمایید.

۲-۶-۲- دسته سوم روشهای رتبه بندی

۲-۶-۱- روش Bass and Kwakernaak [۲۰]

در سال ۱۹۷۷ "Bass" و "Kwakernaak" با موضوع رتبه بندی کمیت های فازی مواجه شدند، آنها در ابتدا مجموعه فازی $O\tilde{R}$ را معرفی کردند:

$$O\tilde{R}(i \setminus x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & x_i \geq x_j, \quad (\forall i \neq j) \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

سپس شاخصی به صورت زیر ارائه کردند:

$$\begin{aligned} BK(\tilde{A}_i) &= \sup_{x_1, \dots, x_n} \min(O\tilde{R}(i \setminus x_1, x_2, \dots, x_n), \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x))) \\ &= \sup_{x_1, \dots, x_n, x_j \geq \max(x_1, x_2, \dots, x_n)} \min(\mu_{A_1}(x), \mu_{A_2}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)) \\ &= \min_{j \neq i} \sup_{x_j \leq x_i} \min(\mu_{A_i}(x_i), \mu_{A_j}(x_j)) \end{aligned}$$

تعریف می شود :

$$P_{BK}(A_i, A_j) = \sup_{x_i \geq x_j} \min(\mu_{\tilde{A}_i}(x_i), \mu_{\tilde{A}_j}(x_j))$$

با توجه به تعریف فوق و شاخص BK بدست می آید :

$$BK(\tilde{A}_i) = \min_{i \neq j} P_{BK}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j),$$

و چون به ازای هر $A_j \in E$ عبارت زیر برقرار است:

$$P_{BK}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = hgt(P_{BK}(\tilde{A}_i)) \geq P_{BK}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j),$$

در نتیجه:

$$BK(\tilde{A}_i) = \min_j P_{BK}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j).$$

۲-۶-۲-۲ Baldwin and Guild روش [۲۳]

Baldwin و Guild مشابه شرایط فازی مجموعه فازی Bass و Kwakernaak، یک رابطه فازی دوتایی R_{ij} را روی R معرفی کردند که با $R_{ij}(x_i, x_j)$ نمایش داده می شود که مشخص می کند x_i چقدر بزرگتر از x_j است.

$$BG(\tilde{A}_i) = \min_{i \neq j} \sup_{x_i, x_j} \min(\mu_{\tilde{A}_i}(x_i), \mu_{\tilde{A}_j}(x_j), R_{ij}(x_i, x_j)),$$

تشخیص R_{ij} به ریسک تصمیم گیرنده بستگی دارد که :

$$\begin{aligned} R_{ij}(x_i, x_j) &= x_i - x_j & : & \text{برای تصمیم گیرنده عادی} \\ R_{ij}(x_i, x_j) &= x_i^\gamma - x_j^\gamma & : & \text{برای تصمیم گیرنده ریسک پذیر} \\ R_{ij}(x_i, x_j) &= \sqrt{x_i} - \sqrt{x_j} & : & \text{برای تصمیم گیرنده محتاط} \end{aligned}$$

تعریف می شود :

$$P_{BG}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \sup_{x_i, x_j} \min(\mu_{\tilde{A}_i}(x_i), \mu_{\tilde{A}_j}(x_j), R_{ij}(x_i, x_j)),$$

بنابراین

$$, BG(\tilde{A}_i) = \min_{i \neq j} P_{BG}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j)$$

و چون به ازای هر $\tilde{A}_i \in E$ عبارت زیر برقرار است:

$$P_{BG}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_i) \geq P_{BG}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j),$$

بنابراین

$$BG(\tilde{A}_i) = \min_j P_{BG}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j).$$

۲-۶-۲-۳ Dubios and Prade روش [۱۴]

در سال ۱۹۸۳، Dubios و Prade برای مقایسه کمیت های فازی نرمال و محدب $\tilde{A}_i$ و $\tilde{A}_j$ چهار رابطه ارائه کردند :

$$PD(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \sup_{x_i \geq x_j} \min(\mu_{\tilde{A}_i}(x_i), \mu_{\tilde{A}_j}(x_j)),$$

$$PSD(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \sup_{x_i \geq x_j} \inf_{x_i} \min(\mu_{\tilde{A}_i}(x_i), 1 - \mu_{\tilde{A}_j}(x_j)),$$

$$ND(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \inf_{x_i \geq x_j} \sup_{x_j} \min(1 - \mu_{\tilde{A}_i}(x_i), \mu_{\tilde{A}_j}(x_j)),$$

$$NSD(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = 1 - \sup_{x_i \geq x_j} \min(\mu_{\tilde{A}_i}(x_i), \mu_{\tilde{A}_j}(x_j)).$$

۲-۶-۴- روش Nakamura [۳۴]

فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ اعداد فازی باشند. Nakamura از فاصله Hamming و پارامتر λ استفاده کرد و شاخص زیر را ارائه کرد:

$$P_N^\lambda(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \frac{\lambda d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j) + (1-\lambda) d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \min(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j))}{\lambda d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j) + (1-\lambda) d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j)},$$

که در آن

$$\underline{\tilde{A}} = \mu_{\underline{\tilde{A}}}(x) = \sup_{y \leq x} \mu_{\tilde{A}}(y), \quad \overline{\tilde{A}} = \mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = \sup_{y \geq x} \mu_{\tilde{A}}(y),$$

در موردی که

$$\lambda d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j) + (1-\lambda) d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j) = 1,$$

فرض کنید

$$P_N^\lambda(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \frac{1}{\lambda}.$$

۲-۶-۵- روش Kolodziejczyk [۳۳]

این روش نیز مشا به Nakamura است. فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ اعداد فازی باشند. Kolodziejczyk با استفاده از فاصله max Hamming زیر ارائه کرد:

$$P_{K1}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \frac{d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \max(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j)) + d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \max(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j))}{d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j) + d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j)},$$

$$P_{K2}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \frac{d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \max(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j)) + d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \max(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j)) + d_H(\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j, \emptyset)}{d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j) + d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j) + 2 d_H(\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j, \emptyset)}.$$

۲-۶-۶- روش Delgado [۳۵]

Delgado و همکارانش دو رابطه فازی با استفاده از مفاهیم "بزرگتر از $(A_{\geq})$ " و "کوچکتر $(A_{\leq})$ " برای عدد فازی مفروض A ، پیشنهاد کردند.

فرض کنید A و B اعداد فازی و T یک t -نرم باشد. دو رابطه فازی α_T و γ_T را به صورت زیر معرفی کردند:

$$\begin{aligned}\alpha_T(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup_{x \in \mathcal{R}} T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \geq), \\ \gamma_T(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \sup_{x \in \mathcal{R}} T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x), \leq),\end{aligned}$$

که در آنها

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{A}}(x)_{\geq} &= \frac{\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x)(1+\lambda)}{1+\lambda\mu_{\underline{\tilde{A}}}(x)}, \quad \lambda \in [-1, 0], \\ \mu_{\tilde{A}}(x)_{\leq} &= \frac{\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x)}{1+\lambda(1-\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x))}, \quad \lambda \in [0, +\infty],\end{aligned}$$

که با استفاده از روابط α_T و γ_T ، روابط فازی زیر تعریف می شوند:

$$\beta_T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \alpha_T(\tilde{A}, \tilde{B}), \quad \delta_T(\tilde{A}, \tilde{B}) = 1 - \gamma_T(\tilde{A}, \tilde{B}),$$

که از دو رابطه فوق برای مقایسه مقادیر فازی استفاده می شود.

۲-۶-۷- روش Yuan [۱۱]

روشی که Yuan معرفی کرد، پهنای چپ و راست یک عدد فازی را با هم مقایسه می کند. شاخص به صورت

زیر تعریف می شود:

$$P_Y(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{ij} + \Delta_{ji}},$$

که

$$\Delta_{ij} = \int_{a_{i\alpha}^+ > a_{j\alpha}^-} (a_{i\alpha}^+ - a_{j\alpha}^-) d\alpha + \int_{a_{j\alpha}^- > a_{i\alpha}^+} (a_{j\alpha}^- - a_{i\alpha}^+) d\alpha.$$

۲-۶-۸- روش Saade and Schwarzlander [۱۲]

فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ مقادیر فازی محدب و نرمال باشند. شاخصی که آنها پیشنهاد کردند به صورت زیر می باشد:

$$P_{SS}(\tilde{A}_i, \tilde{A}_j) = d_H(\underline{\tilde{A}}_i, \max(\underline{\tilde{A}}_i, \underline{\tilde{A}}_j)) + d_H(\overline{\tilde{A}}_i, \max(\overline{\tilde{A}}_i, \overline{\tilde{A}}_j))$$

۹-۶-۲- جدول زیر خواص برخی از روشهای رتبه بندی را نشان می دهد.

Index	A_1	A_2	A_3	A_4	A'_4	A_5	A_6	A'_6	A_7
Y_1	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N
Y_2	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
Y_3	Y	Y	Y	N	N	Y	N	N	N
Y_4	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N
C	Y	Y	Y	N	N	Y	N	N	N
FR	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
CL	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
LW^λ	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
CM_1^λ	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
CM_2^λ	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
AD^α	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
K	Y	Y	Y	N	N	N	N	N	N
W	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N	N
J^k	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
CH^k	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
KP^k	Y	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N
BK	Y	Y	Y	Y	N	N	Y	N	Y
PD	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	N	Y
PSD	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	N	Y
ND	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	N	Y
NSD	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	N	Y
P_N^λ	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
BG	Y	Y	Y	Y	N	N	N	N	N
P_{SS}	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
β_T	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	N	Y
δ_T	Y	Y	Y	Y	Y	N	Y	N	Y
P_Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
P_{K1}	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N
P_{K2}	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	N

جدول ۹-۶-۲

فصل سوم

نظریه تقریب برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس
مقدار بازه ای وزن دار

مقدمه

با مرور روش های قبلی، این مقاله به ارائه روشی مبنی بر استفاده از نظریه مقدار بازه ای وزن دار رقم فازی و همچنین یافتن ترتیب ارقام فازی می پردازد. این روش می تواند آلترناتیو ها را به خوبی تشخیص دهد. هدف اصلی از این مقاله این است که این مقدار بازه ای وزن دار رقم فازی می تواند به عنوان مجموعه تقریبی کریسپ از رقم فازی مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین با استفاده از این تقریب، این مقاله سعی دارد تا روش جدیدی برای رتبه بندی ارقام فازی ارائه دهد. علاوه بر شاخصه های رتبه بندی آن، این روش شباهت و ابهامات حاصل را برطرف کرده و بر نواقص ناشی از مقایسه رتبه بندی پیشین غلبه می کند.

۱-۳- تعاریف و نکات اساسی

تعریف ۱-۱-۳- فرض کنید U یک مجموعه جهانی باشد. مجموعه فازی $\tilde{A}$ با تابع $\tilde{A}(x): U \rightarrow [0,1]$ که $\mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in U$ و نمایش درجه عضویت $\tilde{A}$ می باشد بیان می شود.

تعریف ۲-۱-۳- مجموعه فازی $\tilde{A}$ از مجموعه جهان U نرمال نامیده می شود اگر و فقط اگر $\sup_{x \in U} \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$.

تعریف ۳-۱-۳- مجموعه r -برش از عدد فازی $\tilde{A}$ که در آن $0 \leq r \leq 1$ ، به صورت $\tilde{A} = \{x \in \mathcal{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\}$ تعریف می شود. متناظر با تعریف عدد فازی واضح است که هر مجموعه r -برش یک بازه بسته است، لذا می توان نوشت، $\tilde{A} = [\tilde{A}_L(r), \tilde{A}_R(r)]$ که در آن

$$\tilde{A}_L(r) = \inf \{x \in \mathcal{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\},$$

$$\tilde{A}_R(r) = \sup \{x \in \mathcal{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq r\}.$$

فضای مجموعه اعداد فازی را با $\mathcal{F}$ نمایش خواهیم داد.

تعریف ۴-۱-۳- فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی با مجموعه r -برش های $\tilde{A} = [\tilde{A}_L(r), \tilde{A}_R(r)]$ و $\tilde{B} = [\tilde{B}_L(r), \tilde{B}_R(r)]$ باشند. کمیت زیر را یک فاصله وزن دار $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ می نامند، که در آن $d^*(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r) = (\tilde{A}_L(r) - \tilde{B}_L(r))^2 + (\tilde{A}_R(r) - \tilde{B}_R(r))^2$ و $f(r)$ یک تابع نامنفی صعودی در بازه $[0,1]$ با شرایط $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(r) dr = \frac{1}{p}$ می باشد. [۶].

$$d_w(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left(\int_0^1 f(r) d^*(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r) dr \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1-1-3)$$

تعریف ۳-۱-۵- عملگر تقریب بازه ای نامیده می شود هرگاه به ازاء هر $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ داشته باشیم:

$$(a) \quad I(\tilde{A}) \subseteq \text{supp} \tilde{A},$$

$$(b) \quad \text{core}(\tilde{A}) \subseteq I(\tilde{A}),$$

$$(c) \quad \forall (\varepsilon > 0) \exists (\delta > 0) \text{ s.t } d(\tilde{A}, \tilde{B}) < \delta \Rightarrow d(I(\tilde{A}), I(\tilde{B})) < \varepsilon,$$

که در آن $d: \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty[$ فاصله تعریف شده بین مجموعه تمام اعداد فازی می باشد. [۷].

تعریف ۳-۱-۶- هر گاه عملگر تقریب بازه ای در خاصیت (c) صدق نماید آنرا عملگر تقریب بازه ای وزن دار می نامند. [۷].

۳-۲- تقریب مقدار بازه ای وزن دار

در تحقیقات پیشین انجام شده برخی از مولفین در [۷, ۸] تقریبات کریسپ از اعداد فازی را مورد مطالعه قرار داده اند که روشهای پیشنهادی آنها تحت عناوین نزدیک ترین مجموعه معمولی و نزدیکترین تقریب بازه ای به عدد فازی نام گذاری شده است. در این بخش، سعی بر آن داریم که یک تقریب مقدار بازه ای وزن دار را تحت متر وزن دار ارائه نماییم. برای این کار فرض کنیم $\tilde{A}$ یک عدد فازی و $[\tilde{A}_L(r), \tilde{A}_R(r)]$ مجموعه $r -$ برش آن باشد. در این صورت به دنبال یک بازه بسته مانند $I_{d_w}(\tilde{A})$ خواهیم بود که آنرا بازه وزن دار عدد فازی $\tilde{A}$ نسبت به متر d_w می نامیم. از آنجاییکه به ازاء هر بازه با r -برش ثابت که $r \in]0, 1[$ یک عدد فازی است، بنابراین فرض می کنیم $I_{d_w}(\tilde{A}) = [I_L, I_R]$ یعنی $(I_{d_w}(\tilde{A}))_r = [I_L, I_R]$ که در آن $r \in]0, 1[$. برای یافتن نزدیکترین بازه بایستی متر d_w را نسبت به پارامترهای I_L و I_R مینیمم نماییم، در این صورت داریم:

$$d_w(\tilde{A}, I_{d_w}(\tilde{A})) = \left(\int_0^1 f(r) d^*(\tilde{A}_r, (I_{d_w}(\tilde{A}))_r) \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (2-1-3)$$

که در آن $d^*(\tilde{A}_r, (I_{d_w}(\tilde{A}))_r) = (\tilde{A}_L(r) - I_L)^{\frac{1}{\alpha}} + (\tilde{A}_R(r) - I_R)^{\frac{1}{\alpha}}$ می باشد. واضح است که برای یافتن مینیمم مقدار I_L و I_R باید داشته باشیم:

$$\nabla \bar{D}_w(I_L, I_R) = \left(\frac{\partial \bar{D}_w}{\partial I_L}, \frac{\partial \bar{D}_w}{\partial I_R} \right) = 0.$$

در این صورت دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{D}_w(I_L, I_R)}{\partial I_L} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 f(r) (\tilde{A}_L(r) - I_L) dr = 0, \\ \frac{\partial \bar{D}_w(I_L, I_R)}{\partial I_R} = -\frac{1}{\alpha} \int_0^1 f(r) (\tilde{A}_R(r) - I_R) dr = 0. \end{cases} \quad (3-1-3)$$

با حل دستگاه فوق پارامتر های I_L و I_R را که به ترتیب کران چپ و کران راست از بازه وزن دار می نامیم حاصل می گردد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} I_L = \int_0^1 f(r) \tilde{A}_L(r) dr, \\ I_R = \int_0^1 f(r) \tilde{A}_R(r) dr. \end{cases} \quad (4-1-3)$$

تبصره ۳-۲-۱- از آنجاییکه $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial D^*(I_L, I_R)}{\partial I_L^*} & \frac{\partial D^*(I_L, I_R)}{\partial I_R \partial I_L} \\ \frac{\partial D^*(I_L, I_R)}{\partial I_L \partial I_R} & \frac{\partial D^*(I_L, I_R)}{\partial I_R^*} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 > 0$ و $\frac{\partial D^*(I_L, I_R)}{\partial I_L^*} = 1 > 0$ لذا

پارامتر های I_L و I_R که از (۴-۱-۳) حاصل می گردند مینیمم مقدار $d_w(\tilde{A}, I_{d_w}(\tilde{A}))$ بوده پس بازه

$$I_{d_w}(\tilde{A}) = \left[\int_0^1 f(r) \tilde{A}_L(r) dr, \int_0^1 f(r) \tilde{A}_R(r) dr \right], \quad (5-1-3)$$

تقریب مقدار بازه ای وزن دار عدد فازی $\tilde{A}$ نسبت به متر d_w می باشد.

تبصره ۳-۲-۲- در حالت خاص با فرض $f(r) = r$ ، $I_{d_w}(\tilde{A})$ بازه میانگین ممکن مقدار بازه ای وزن دار خواهد بود. [۹].

هدف اصلی در این تحقیق آنست که می خواهیم هر عدد فازی را با یک بازه کریسپ تقریب بنزیم. لذا نیاز به عملگری خواهیم داشت که هر عدد فازی را به خانواده ای از بازه های بسته روی محور حقیقی نسبت دهد.

لم ۳-۲-۱- همواره $\left(\int_0^1 f(r) g(r) dr \right)^* \leq \int_0^1 f(r) g^*(r) dr$. [۶].

قضیه ۳-۲-۱- عملگر تقریب بازه ای I_{d_w} یک عملگر تقریب بازه ای پیوسته است.

اثبات: به سادگی شرایط $(\tilde{a})$ و $(\tilde{b})$ قابل بیان است. برای اثبات $(\tilde{c})$ فرض می کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ اعداد فازی دلخواه باشند، بنابراین می توان نوشت:

$$\begin{aligned} d_w^*(I_{d_w}(\tilde{A}), I_{d_w}(\tilde{B})) &= \int_0^1 f(r) (I_L(\tilde{A}) - I_L(\tilde{B}))^* dr + \int_0^1 f(r) (I_R(\tilde{A}) - I_R(\tilde{B}))^* dr \\ &= \frac{1}{\gamma} (I_L(\tilde{A}) - I_L(\tilde{B}))^* + \frac{1}{\gamma} (I_R(\tilde{A}) - I_R(\tilde{B}))^* \\ &= \left(\int_0^1 f(r) (\tilde{A}_L(r) - \tilde{B}_L(r)) dr \right)^* + \left(\int_0^1 f(r) (\tilde{A}_R(r) - \tilde{B}_R(r)) dr \right)^*, \end{aligned}$$

طبق لم ۳-۲-۱ می توان نوشت،

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 f(r) (\tilde{A}_L(r) - \tilde{B}_L(r))^* dr + \int_0^1 f(r) (\tilde{A}_R(r) - \tilde{B}_R(r))^* dr \\ &= \int_0^1 f(r) \left[(\tilde{A}_L(r) - \tilde{B}_L(r))^* + (\tilde{A}_R(r) - \tilde{B}_R(r))^* \right] dr = \gamma d_w^*(\tilde{A}, \tilde{B}). \end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می دهد که $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\gamma} > 0$ به طوریکه $d_w(\tilde{A}, \tilde{B}) < \delta$ که در این صورت $d_w = (I_{d_w}(\tilde{A}), I_{d_w}(\tilde{B})) < \varepsilon$ و این نشان می دهد که تقریب مقدار بازه ای وزن دار یک تقریب بازه ای پیوسته است.

۳-۳- مقایسه اعداد فازی بر اساس بازه وزن دار

در این بخش یک روش جدید برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس مقدار بازه وزن دار ارائه خواهیم داد. فرض کنیم $\tilde{A}$ یک عدد فازی و $[\tilde{A}_L(r), \tilde{A}_R(r)]$ مجموعه r -برش آن و همچنین $I_{d_w}(\tilde{A})$ مقدار بازه وزن دار آن باشد. با توجه به اینکه هر مقدار بازه ای وزن دار به عنوان مجموعه تقریبی کریسپ از یک عدد فازی می تواند باشد، لذا از این بازه می توان برای ترتیب اعداد فازی استفاده نمود. پس از شاخص I_{d_w} برای رتبه بندی اعداد فازی استفاده می کنیم.

تعریف ۳-۳-۱- فرض کنیم $\mathcal{F}[L]$ نمایش مجموعه ای از بازه های بسته در $\mathcal{R}$ باشد. ترتیب بازه ای به صورت زیر تعریف می گردد:

به ازاء $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{R}$ که $\alpha_1 \leq \beta_1$ & $\alpha_2 \leq \beta_2$ ، همواره،

$$[\alpha_1, \beta_1] \leq [\alpha_2, \beta_2] \Leftrightarrow \alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ \& } \beta_1 \leq \beta_2.$$

فرض کنیم $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}[L]$ ، سوپریمم و اینفیمم دو بازه را نمادهای $SUP(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ و $INF(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ نمایش داده که به صورت زیر تعریف می شود:

$$SUP(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A} \vee \mathcal{B},$$

$$INF(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}.$$

به طوریکه سوپریمم و اینفیمم بازه ها به صورت زیر تعریف می شود:

به ازاء $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathcal{R}$ که $\alpha_1 \leq \beta_1$ & $\alpha_2 \leq \beta_2$ ،

$$[\alpha_1, \beta_1] \wedge [\alpha_2, \beta_2] = [\alpha_1 \wedge \alpha_2, \beta_1 \wedge \beta_2] \quad \text{و} \quad [\alpha_1, \beta_1] \vee [\alpha_2, \beta_2] = [\alpha_1 \vee \alpha_2, \beta_1 \vee \beta_2]$$

فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند و $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{B}) = [b_1, b_2]$ مقدار بازه ای وزن دار آنها باشد. رتبه بندی این دو عدد به صورت زیر تعریف می گردد:

$$1. \quad I_{d_w}(\tilde{A}) \supseteq I_{d_w}(\tilde{B}) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \tilde{A} > \tilde{B},$$

$$2. \quad INF(\tilde{A}, \tilde{B}) < SUP(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \tilde{A} < \tilde{B},$$

$$3. \quad INF(\tilde{A}, \tilde{B}) = SUP(\tilde{A}, \tilde{B}) \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad \tilde{A} \sim \tilde{B}.$$

همچنین عمل ترتیب $\succsim$ و $\precsim$ به صورت $\tilde{A} \succsim \tilde{B}$ بیان می شود اگر و تنها اگر داشته باشیم $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ یا $\tilde{A} > \tilde{B}$. همچنین $\tilde{A} \precsim \tilde{B}$ می باشد اگر و تنها اگر داشته باشیم $\tilde{A} < \tilde{B}$ یا $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

تبصره ۳-۳-۱- فرض کنیم $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند همواره رابطه زیر برقرار است:

$$I_{d_w}(\tilde{A} + \tilde{B}) = I_{d_w}(\tilde{A}) + I_{d_w}(\tilde{B}).$$

اثبات: فرض کنید $\tilde{A} = [\tilde{A}_L(r), \tilde{A}_R(r)]$ و $\tilde{B} = [\tilde{B}_L(r), \tilde{B}_R(r)]$ مجموعه های r -برش $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ باشند. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & I_{d_w}(\tilde{A}) + I_{d_w}(\tilde{B}) \\ &= \left[\int_0^1 f(r) \tilde{A}_L(r) dr, \int_0^1 f(r) \tilde{A}_R(r) dr \right] + \left[\int_0^1 f(r) \tilde{B}_L(r) dr, \int_0^1 f(r) \tilde{B}_R(r) dr \right] \\ &= \left[\int_0^1 f(r) (\tilde{A}_L(r) + \tilde{B}_L(r)) dr, \int_0^1 f(r) (\tilde{A}_R(r) + \tilde{B}_R(r)) dr \right] \\ &= \left[\int_0^1 f(r) (\tilde{A}_L + \tilde{B}_L)(r) dr, \int_0^1 f(r) (\tilde{A}_R + \tilde{B}_R)(r) dr \right] = I_{d_w}(\tilde{A} + \tilde{B}). \end{aligned}$$

در این قسمت خواص معقول برای رتبه بندی کمیت های فازی که توسط Wang و Kerre [۴]، پیشنهاد شده را برای روش رتبه بندی بازه ای ارائه شده در این تحقیق را مورد بررسی قرار میدهیم. فرض کنیم $I_{d_w}(\cdot)$ یک روش رتبه بندی و $\mathcal{A}$ یک زیر مجموعه متناهی روی S باشد. اصول موضوعه برای خواص معقول رتبه بندی $I_{d_w}(\cdot)$ به صورت زیر بیان می شود:

A_1 - برای هر زیر مجموعه متناهی $\mathcal{A}$ از S و هر $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ ، همواره $\tilde{A} \succeq \tilde{A}$.

A_2 - برای هر زیر مجموعه متناهی $\mathcal{A}$ از S و هر $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{A}^2$ ، هرگاه داشته باشیم $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ و $\tilde{B} \succeq \tilde{A}$ ، طبق این روش همواره $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

A_3 - برای هر زیر مجموعه متناهی $\mathcal{A}$ از S و هر $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}) \in \mathcal{A}^3$ ، هرگاه $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ و $\tilde{B} \succeq \tilde{C}$ در این صورت همواره $\tilde{A} \succeq \tilde{C}$.

A_4 - برای هر زیر مجموعه متناهی $\mathcal{A}$ از S و هر $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{A}^2$ ، هرگاه داشته باشیم $\inf \text{supp}(\tilde{A}) < \sup \text{supp}(\tilde{B})$ در این صورت $\tilde{B} \succeq \tilde{A}$.

A'_4 - برای هر زیر مجموعه متناهی $\mathcal{A}$ از S و هر $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathcal{A}^2$ ، هرگاه داشته باشیم $\inf \text{supp}(\tilde{A}) < \sup \text{supp}(\tilde{B})$ در این صورت $\tilde{B} \succ \tilde{A}$.

A_5 - فرض کنید S و S' دو مجموعه متناهی از کمیت های فازی باشند به طوری که $I_{d_w}(\cdot)$ روی آنها تعریف شده باشد. هرگاه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ در $S \cap S'$ قرار گرفته باشند در این صورت اگر تحت $I_{d_w}(\cdot)$ در S داشته باشیم $\tilde{B} \succeq \tilde{A}$ همواره تحت $I_{d_w}(\cdot)$ در S' نیز خواهیم داشت $\tilde{B} \succeq \tilde{A}$.

A_6 - فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A} + \tilde{C}$ و $\tilde{B} + \tilde{C}$ عناصری از S باشند. اگر $\tilde{B} \succeq \tilde{A}$ ، در این صورت تحت $I_{d_w}(\cdot)$ همواره $\tilde{B} + \tilde{C} \succeq \tilde{A} + \tilde{C}$.

A'_1 - فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A} + \tilde{C}$ و $\tilde{B} + \tilde{C}$ عناصری از S باشند. اگر $\tilde{A} > \tilde{B}$ ، در این صورت تحت $I_{d_w}(\cdot)$ همواره $\tilde{A} + \tilde{C} > \tilde{B} + \tilde{C}$.

A_v - فرض کنید $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{A}\tilde{C}$ و $\tilde{B}\tilde{C}$ عناصری از S باشند به طوری که $\tilde{C} \geq 0$. هرگاه تحت $I_{d_w}(\cdot)$ روی $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ داشته باشیم $\tilde{B} \succeq \tilde{A}$ در این صورت تحت $I_{d_w}(\cdot)$ روی $\{\tilde{A}\tilde{C}, \tilde{B}\tilde{C}\}$ همواره $\tilde{B}\tilde{C} \succeq \tilde{A}\tilde{C}$.
قضیه ۳-۳-۱ - تابع I_{d_w} خواص A_1 و A_2 و ... و A_v را داراست.

اثبات:

A_1 - فرض کنید $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ مقدار بازه ای وزن دار عدد فازی $\tilde{A}$ باشد. از آنجاییکه $a_1 \leq a_1$ و $a_2 \leq a_2$ می باشد، لذا طبق روابط ۳-۱ از **تعریف ۳-۳-۱** واضح است که $INF(\tilde{A}, \tilde{A}) \leq SUP(\tilde{A}, \tilde{A})$ و بنابراین $\tilde{A} \succeq \tilde{A}$.

A_2 - فرض کنید $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{B}) = [b_1, b_2]$ مقدار بازه ای وزن دار اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ باشند. طبق روابط ۳-۲ از **تعریف ۳-۳-۱** خواهیم داشت:

$$اگر \tilde{A} \preceq \tilde{B} \text{ در این صورت } a_1 \leq b_1 \text{ \& } a_2 \leq b_2,$$

$$اگر \tilde{B} \preceq \tilde{A} \text{ در این صورت } b_1 \leq a_1 \text{ \& } b_2 \leq a_2.$$

بنابراین $a_1 = b_1$ و $a_2 = b_2$ بوده و در نتیجه $INF(\tilde{A}, \tilde{B}) = SUP(\tilde{A}, \tilde{B})$ بوده و طبق رابطه ۳ از **تعریف ۳-۳-۱**، $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ خواهد بود.

A_3 - فرض کنید $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{B}) = [b_1, b_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{C}) = [c_1, c_2]$ مقدار بازه ای وزن دار اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ باشند، در این صورت طبق روابط ۳-۲ از **تعریف ۳-۳-۱** خواهیم داشت:

$$اگر \tilde{A} \preceq \tilde{B} \text{ در این صورت } a_1 \leq b_1 \text{ \& } a_2 \leq b_2 \Rightarrow INF(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq SUP(\tilde{A}, \tilde{B})$$

$$اگر \tilde{B} \preceq \tilde{C} \text{ در این صورت } b_1 \leq c_1 \text{ \& } b_2 \leq c_2 \Rightarrow INF(\tilde{B}, \tilde{C}) \leq SUP(\tilde{B}, \tilde{C}),$$

بنابراین $a_1 \leq c_1$ و $a_2 \leq c_2$ بوده و $INF(\tilde{A}, \tilde{C}) \leq SUP(\tilde{A}, \tilde{C})$ و بنابراین $\tilde{A} \preceq \tilde{C}$ خواهد بود.

A_4 - فرض کنید $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{B}) = [b_1, b_2]$ مقدار بازه ای وزن دار اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ باشند. اگر $inf\ sup(\tilde{A}) < sup\ sup(\tilde{B})$ باشد واضح است که $a_1 \leq b_1$ و $a_2 \leq b_2$ در این صورت

$$اگر \tilde{A} \preceq \tilde{B} \text{ در این صورت } INF(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq SUP(\tilde{A}, \tilde{B})$$

A'_4 - اثبات مشابه A_4 می باشد.

A_5 - طبق روابط ۳-۲ از **تعریف ۳-۳-۱** اثبات بدیهی است.

A_6 - فرض کنید $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{B}) = [b_1, b_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{C}) = [c_1, c_2]$ مقدار بازه ای وزن دار اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ باشند به طوریکه داشته باشیم $\tilde{A} \lesssim \tilde{B}$ طبق روابط ۲-۳ از تعریف ۱-۳-۳ می توان نوشت:

$$a_1 \leq b_1 \text{ در این صورت } a_1 + c_1 \leq b_1 + c_1,$$

$$a_2 \leq b_2 \text{ در این صورت } a_2 + c_2 \leq b_2 + c_2.$$

با توجه به اینکه $c_1 \leq c_2$ می باشد و طبق شرایط فوق $\inf(\tilde{A} + \tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{C}) \leq \sup(\tilde{A} + \tilde{C}, \tilde{B} + \tilde{C})$ و بنابراین $\tilde{B} + \tilde{C} \gtrsim \tilde{A} + \tilde{C}$

A'_6 - مشابه A_6 اثبات بدیهی است.

A_7 - فرض کنید $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{B}) = [b_1, b_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{C}) = [c_1, c_2]$ مقدار بازه ای وزن دار اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ باشند. طبق روابط ۲-۳ از تعریف ۱-۳-۳ خواهیم داشت:

$$a_1 \leq b_1 \text{ \& } a_2 \leq b_2 \text{ در این صورت } \tilde{A} \lesssim \tilde{B} \text{ اگر}$$

$$c_1 \leq c_2 \text{ در این صورت } c_1 \geq 0.$$

بنابراین $c_1 \leq b_1$ و $c_2 \leq b_2$ و $a_2 c_2 \leq b_2 c_2$ بوده و در نتیجه $\inf(\tilde{A}\tilde{C}, \tilde{B}\tilde{C}) \leq \sup(\tilde{A}\tilde{C}, \tilde{B}\tilde{C})$ بوده و بنابراین $\tilde{B}\tilde{C} \gtrsim \tilde{A}\tilde{C}$

تبصره ۲-۳-۳- اگر داشته باشیم $\tilde{A} \lesssim \tilde{B}$ در این صورت همواره $-\tilde{A} \gtrsim -\tilde{B}$.

اثبات: فرض کنید $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی دلخواه باشند و $I_{d_w}(\tilde{A}) = [a_1, a_2]$ و $I_{d_w}(\tilde{B}) = [b_1, b_2]$ مقدار بازه ای وزن دار آنها باشد. فرض کنید $\tilde{A} \lesssim \tilde{B}$ باشد، در این صورت طبق روابط ۱-۳ از تعریف ۱-۳-۳ خواهیم داشت:

$$a_1 \leq b_1 \text{ \& } a_2 \leq b_2 \Rightarrow -a_1 \geq -b_1 \text{ \& } -a_2 \geq -b_2,$$

بنابراین

$$\inf(-\tilde{A}, -\tilde{B}) \geq \sup(-\tilde{A}, -\tilde{B}) \Rightarrow -\tilde{A} \gtrsim -\tilde{B}.$$

بنابراین تصویر اعداد فازی نیز طبق روش پیشنهاد شده مرتب می شوند.

۳-۴- مثال های عددی

در این بخش به مقایسه روش پیشنهاد شده با سایر روشهای ارائه شده در [۱, ۲, ۳, ۵, ۱۰, ۱۱, ۱۲] خواهیم پرداخت.

مثال ۳-۴-۱- مجموعه ای از اعداد فازی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{Set 1: } \tilde{A} = (0.4, 0.5, 1), \tilde{B} = (0.4, 0.7, 1), \tilde{C} = (0.4, 0.9, 1).$$

Set ۲: $\tilde{A}=(.۳,.۴,.۷,.۹)$, $\tilde{B}=(.۳,.۷,.۹)$, $\tilde{C}=(.۵,.۷,.۹)$

Set ۳: $\tilde{A}=(.۳,.۵,.۷)$, $\tilde{B}=(.۳,.۵,.۸,.۹)$, $\tilde{C}=(.۳,.۵,.۹)$.

Set ۴: $\tilde{A}=(.۰,.۴,.۷,.۸)$, $\tilde{B}=(.۰.۲,.۵,.۹)$, $\tilde{C}=(.۰.۱,.۶,.۸)$.

مقایسه روش پیشنهادی با برخی از سایر روشها در جدول ۳-۴-۱ آورده شده است.

Authors	Fuzzy	Set ^۱	Set ^۲	Set ^۳	Set ^۴
Proposed method	$\tilde{A}$	[.۴۶,.۶۶]	[.۳۶,.۷۶]	[.۴۳,.۵۶]	[.۲۶,.۷۳]
	$\tilde{B}$	[.۶۰,.۸۰]	[.۵۶,.۷۶]	[.۴۳,.۸۳]	[.۴۰,.۶۳]
	$\tilde{C}$	[.۷۳,.۹۳]	[.۶۳,.۷۶]	[.۴۳,.۶۳]	[.۴۳,.۶۶]
Results		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{B} < \tilde{C} < \tilde{A}$
Sign Distance (p=۲)	$\tilde{A}$	۱.۲۰۰۰	۱.۱۵۰۰	۱.۰۰۰۰	۰.۹۵۰۰
	$\tilde{B}$	۱.۴۰۰۰	۱.۳۰۰۰	۱.۲۵۰۰	۱.۰۵۰۰
	$\tilde{C}$	۱.۶۰۰۰	۱.۴۰۰۰	۱.۱۰۰۰	۱.۰۵۰۰
Results		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B} \sim \tilde{C}$
Sign Distance (p=۲)	$\tilde{A}$	۰.۸۸۶۹	۰.۸۷۵۶	۰.۷۲۵۷	۰.۷۸۵۳
	$\tilde{B}$	۱.۰۱۹۴	۰.۹۵۲۲	۰.۹۴۱۶	۰.۷۹۵۸
	$\tilde{C}$	۱.۱۶۰۵	۱.۰۰۳۳	۰.۸۱۶۵	۰.۸۳۸۶
Results		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$
Distance Minimization	$\tilde{A}$	۰.۶	۰.۵۷۵	۰.۵	۰.۴۷۵
	$\tilde{B}$	۰.۷	۰.۶۵	۰.۶۲۵	۰.۵۲۵
	$\tilde{C}$	۰.۹	۰.۷	۰.۵۵	۰.۵۲۵
Result		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B} \sim \tilde{C}$
Chen	$\tilde{A}$	۰.۳۳۷۵	۰.۴۳۱۵	۰.۳۷۵۰	۰.۵۲۰۰
	$\tilde{B}$	۰.۵۰۰۰	۰.۵۶۲۵	۰.۴۲۵۰	۰.۵۷۰۰
	$\tilde{C}$	۰.۶۶۷۰	۰.۶۲۵۰	۰.۵۵۰۰	۰.۶۲۵۰
Results		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$
Chu and Tsao	$\tilde{A}$	۰.۲۹۹۰	۰.۲۸۴۷	۰.۲۵۰۰	۰.۲۴۴۰
	$\tilde{B}$	۰.۳۵۰۰	۰.۳۲۴۷	۰.۳۱۵۲	۰.۲۶۲۴
	$\tilde{C}$	۰.۳۹۹۳	۰.۳۵۰۰	۰.۲۷۴۷	۰.۲۶۱۹
Results		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$
Yao and Wu	$\tilde{A}$	۰.۶۰۰۰	۰.۵۷۵۰	۰.۵۰۰۰	۰.۴۷۵۰
	$\tilde{B}$	۰.۷۰۰۰	۰.۶۵۰۰	۰.۶۲۵۰	۰.۵۲۵۰
	$\tilde{C}$	۰.۸۰۰۰	۰.۷۰۰۰	۰.۵۵۰۰	۰.۵۲۵۰
Results		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B} \sim \tilde{C}$
Cheng Distance	$\tilde{A}$	۰.۷۹۰۰	۰.۷۵۷۷	۰.۷۰۷۱	۰.۷۱۰۶
	$\tilde{B}$	۰.۸۶۰۲	۰.۸۱۴۹	۰.۸۰۳۷	۰.۷۲۵۶
	$\tilde{C}$	۰.۹۲۶۸	۰.۸۶۰۲	۰.۷۴۵۸	۰.۷۲۴۱
Results		$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$
Cheng CV uniform	$\tilde{A}$	۰.۰۲۷۲	۰.۳۲۸	۰.۰۱۳۳	۰.۰۶۹۳
	$\tilde{B}$	۰.۰۲۱۴	۰.۰۲۴۶	۰.۰۳۰۴	۰.۰۳۸۵
	$\tilde{C}$	۰.۰۲۲۵	۰.۰۰۹۵	۰.۰۲۷۵۰	۰.۰۴۳۳
Results		$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{B} < \tilde{C} < \tilde{A}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$

Cheng CV proportional	$\tilde{A}$	۰.۱۸۳۰	۰.۰۲۶۰	۰.۰۰۸۰	۰.۰۴۷۱
	$\tilde{B}$	۰.۰۱۲۸	۰.۰۱۴۶	۰.۰۲۳۴	۰.۰۲۳۶
	$\tilde{C}$	۰.۰۱۳۷	۰.۰۰۵۷	۰.۰۱۷۳	۰.۰۲۵۵
Results		$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$	$\tilde{A} < \tilde{B} < \tilde{C}$	$\tilde{B} < \tilde{C} < \tilde{A}$	$\tilde{A} < \tilde{C} < \tilde{B}$

جدول ۳-۴-۱

توجه می‌کنیم که در جدول ۳-۴-۱ در Set برای روش‌های Distance و Sign Distance و Minimization و روش پیشنهادی Chu-Tsao و Yao-Wu برای اعداد فازی $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ نتیجه $\tilde{B} \sim \tilde{C}$ حاصل شده معقول به نظر نمی‌رسد. در صورتیکه نتیجه حاصل از روش پیشنهاد شده در این تحقیق با نتایج سایر روشها (Cheng Distribution) یکسان و معقول به نظر می‌رسد.

مثال ۳-۴-۲- سه عدد فازی $\tilde{A} = (۱, ۲, ۵)$ ، $\tilde{B} = (۰, ۳, ۴)$ و $\tilde{C} = (۲, ۲.۵, ۳)$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از روش پیشنهاد شده، $I_{d_w}(\tilde{A}) = [۱.۶۶, ۳.۰۰]$ ، $I_{d_w}(\tilde{B}) = [۲.۰۰, ۳.۳۳]$ و $I_{d_w}(\tilde{C}) = [۲.۳۳, ۲.۶۶]$ خواهد بود. بنابراین ترتیب این اعداد به صورت $\tilde{C} < \tilde{A} < \tilde{B}$ می‌باشد. به وضوح دیده می‌شود که نتایج به دست آمده از روشهای Distance Minimization و Sign distance غیر منطقی به نظر می‌رسد. نتایج حاصل از چند روش در جدول ۳-۴-۲ آورده شده است. علاوه بر این در مثال مذکور $I_{d_w}(-\tilde{C}) = [-۲.۶۶, -۲.۳۳]$ و $I_{d_w}(-\tilde{B}) = [-۳.۳۳, -۲.۰۰]$ ، $I_{d_w}(-\tilde{A}) = [-۳.۰۰, -۱.۶۶]$ بوده و در نتیجه $-\tilde{B} < -\tilde{A} < -\tilde{C}$. این نشان می‌دهد که روش پیشنهادی برای رتبه بندی قرینه اعداد فازی نیز صادق است در صورتیکه این عمل در روش CV جوابگو نیست.

Fuzzy number	approach New	Sign Distance With p=۱	Sign Distance with p=۲	Distance Minimization	Chu - Tsao
$\tilde{A}$	[۱.۶۶, ۳.۰۰]	۵	۳.۹۱۵۷	۲.۵	۰.۷۴۰۷
$\tilde{B}$	[۲.۰۰, ۳.۳۳]	۵	۳.۹۱۵۷	۲.۵	۰.۷۴۰۷
$\tilde{C}$	[۲.۳۳, ۲.۶۶]	۵	۳.۵۵۹۰	۲.۵	۰.۷۵
Results	$\tilde{C} < \tilde{A} < \tilde{B}$	$\tilde{C} \sim \tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{C} < \tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{C} \sim \tilde{A} \sim \tilde{B}$	$\tilde{A} \sim \tilde{B} < \tilde{C}$

جدول ۳-۴-۲

فصل چهارم

روشی دیگر برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس

یک متر وزن دار جدید

مقدمه

این بخش روشی را برای استفاده از مفهوم متر فازی بین اعداد فازی برای یافتن ترتیب ارقام فازی ارائه می دهد. این روش می تواند تکرارها را به خوبی تشخیص دهد. هدف اصلی از این بخش ارائه روش جدید برای رتبه بندی ارقام فازی می باشد. علاوه بر رتبه بندی مشخصه های آن، این روش ابهامات ناشی از مقایسه رتبه بندی های پیشین را بر طرف می نماید. این بخش از قسمت های زیر تشکیل شده است: در بخش ۴-۱ برخی نتایج پایه ای در رابطه با ارقام فازی را یادآوری می کنیم. روش های پیشنهادی برای رتبه بندی ارقام فازی در بخش ۴-۲ پرداخته خواهد شد. در این بخش برخی برهان ها و تفاسیر پیشنهاد و نشان داده خواهند شد. بحث و مقایسه این روش و دیگر روش ها در بخش ۴-۳ پرداخته شده است.

۴-۱- تعاریف و نکات اساسی

در این بخش یک روش رتبه بندی اعداد فازی را به کمک متر جدید وزن دار تعریف شده بین اعداد فازی را ارائه می دهیم. همانطور که در بخش قبل نیز بیان شد مجموعه ای از تمام اعداد فازی را با F نمایش خواهیم داد. بنابر این فرض کنیم عدد فازی $\tilde{A} \in F$ در فرم LR به صورت زیر نمایش داده شده باشد:

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} (\alpha, [L_A(\alpha), R_A(\alpha)]).$$

که در آن به ازاء هر $\alpha \in [0,1]$ داریم $A_\alpha = [L_A(\alpha), R_A(\alpha)] \subset (-\infty, +\infty)$ در این رابطه $L : [0,1] \rightarrow (-\infty, +\infty)$ ، یک تابع اکیدا غیر کاهشی و $R : [0,1] \rightarrow (-\infty, +\infty)$ یک تابع اکیدا غیر صعودی از چپ پیوسته می باشند. توابع $L(\cdot)$ و $R(\cdot)$ به ترتیب شاخه چپ و راست عدد فازی را نشان می دهد.

تعریف ۴-۱-۱- فرض کنید A یک عدد فازی باشد. مقادیر ثابت زیر به ترتیب نمایشگر متوسط مقدار وزن دار و پهنای وزن دار نامیده می شود:

$$I(A) = \int_0^1 (cL_A(\alpha) + (1-c)R_A(\alpha)) d\alpha,$$

$$D(A) = \int_0^1 (R_A(\alpha) - L_A(\alpha)) f(\alpha) d\alpha.$$

مقدار $0 \leq c \leq 1$ ، ضریب خوشبینانگی/بدبینانگی در رفتار اعداد فازی می باشد. تابع $f(\alpha)$ نیز یک تابع وزن می باشد. در یک حالت خاص در این بخش $f(\alpha) = \alpha$ فرض خواهد شد.

۲-۴- یک روش جدید برای رتبه بندی اعداد فازی با استفاده از متر وزن دار

تعریف ۱-۲-۴- فرض کنید $\nabla: F \rightarrow \{-1, 1\}$ تابعی باشد که به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\forall A \in F: \nabla(A) = \begin{cases} 1 & \text{when } I(A) \geq 0, \\ -1 & \text{when } I(A) < 0. \end{cases}$$

تبصره ۲-۲-۴- هرگاه $\inf Supp(A) \geq 0$ و یا $\inf L_A(\alpha) \geq 0$ ، در این صورت $\nabla(A) = 1$.

تبصره ۳-۲-۴- هرگاه $\inf Supp(A) < 0$ و یا $\sup R_A(\alpha) < 0$ ، در این صورت $\nabla(A) = -1$.

تعریف ۴-۲-۴- اگر A و B دو عدد فازی باشند کمیت

$$TRD(A, B) = \sqrt{[I(A) - I(B)]^2 + [D(A) - D(B)]^2},$$

متر TRD بین A و B نامیده می شود. به راحتی می توان نشان داد که متر TRD در خواص زیر صدق می کند.

$$TRD(A, B) \geq 0,$$

$$A \sim B \Leftrightarrow TRD(A, B) = 0,$$

$$TRD(A, B) + TRD(B, C) \geq TRD(A, C),$$

$$TRD(A, B) = TRD(B, A).$$

درجه عضویت هر $a \in \mathcal{R}$ ، هرگاه $x = a$ به صورت $A_a(x) = 1$ و هرگاه $x \neq a$ به صورت $A_a(x) = 0$ خواهد بود. بنابر این اگر $a = 0$ خواهیم داشت:

$$A_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x = 0, \\ 0 & \text{when } x \neq 0. \end{cases}$$

در این وضعیت A_0 عدد فازی مبدا بوده و از آنجاییکه $A_0 \in F$ بنابرین به ازاء هر $A \in F$ خواهیم داشت:

$$TRD(A, A_0) = \sqrt{[I(A)]^2 + [D(A)]^2}.$$

تعریف ۵-۲-۴- اگر A یک عدد فازی بوده و ضریب خوشبینانه و بدبینانه را برابر با ۰.۵ در نظر بگیریم کمیت

$$TR(A, A_0) = \nabla(A) TRD(A, A_0),$$

متر وزن دار نامیده می شود.

تعریف ۶-۲-۴ برای هر دو عدد فازی دلخواه A و B رتبه بندی تحت TR روی F به صورت زیر انجام می شود:

$TR(A, A.) > TR(B, A.)$ اگر فقط و اگر $A > B$,

$TR(A, A.) < TR(B, A.)$ اگر فقط و اگر $A < B$,

$TR(A, A.) = TR(B, A.)$ اگر فقط و اگر $A \sim B$.

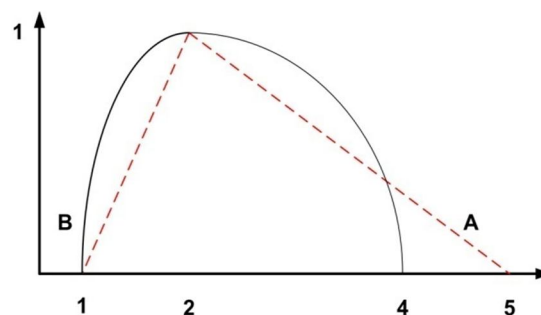
همچنین عمل ترتیب $\succsim$ و $\precsim$ به صورت $A \succsim B$ بیان می شود اگر و تنها اگر داشته باشیم $A \sim B$ یا $A > B$. همچنین $A \precsim B$ می باشد اگر و تنها اگر داشته باشیم $A < B$ یا $A \sim B$.

تبصره ۷-۲-۴ اگر داشته باشیم $A \precsim B$ در این صورت همواره $-A \succsim -B$. بنابراین تصویر اعداد فازی نیز طبق روش پیشنهاد شده مرتب می شوند.

۳-۴- مثال های عددی

در سراسر این بخش تابع وزن را $f(x) = x$ و ضریب خوشبینانه و بدبینانه را ۰.۵ در نظر خواهیم گرفت.
مثال ۱-۳-۴ فرض کنید $A = (2, 1, 3)$ و $B = (2, 2, 1, 2)$ دو عدد فازی باشند که تابع عضویت B به صورت زیر تعریف شده است (شکل ۱-۳-۴ را ببینید):

$$B(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - (x - 2)^2} & \text{when } x \in [1, 2], \\ \sqrt{1 - \frac{1}{4}(x - 2)^2} & \text{when } x \in [2, 4], \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



شکل ۱-۳-۴

در روش "لیو" و "وانگ" به ازاء ضریب خوشبینانه متفاوت رتبه بندی های متفاوتی حاصل می شود. و در روش *Sign Distance* به ازاء $p = 1$ ، $d_p(A, A.) = 5$ و $d_p(B, A.) = 4.78$ بوده و به ازاء $p = 2$ ، $d_p(A, A.) = 3.91$ و $d_p(B, A.) = 3.80$ حاصل شده است و بنابر این رتبه بندی حاصل به صورت

$A \succ B$ خواهد بود. در روش رتبه بندی "چو" و "تیسائو" $S(A) = ۱.۲۴$ و $S(B) = ۱.۱۸$ حاصل شده و بنابراین نتیجه رتبه بندی به صورت $A \succ B$ خواهد بود. بر اساس روش پیشنهادی $TR(A, A.) = ۲.۵۹۳۲$ و $TR(B, A.) = ۲.۵۸۷۳$ بنابراین $A \succ B$ خواهد بود. همچنین نتایج حاصل از روش *Distance Minimization* با نتایج حاصل از روش ارائه شده یکسان می باشد. به وضوح دیده میشود که از این روش برای رتبه بندی اعداد غیر مثلثی و دوزنقه ای استفاده نمود.

مثال ۴-۳-۲- فرض کنید A و B دو عدد فازی باشند که تابع عضویت آنها به صورت زیر تعریف شده است: (شکل ۴-۳-۲ را ببینید)

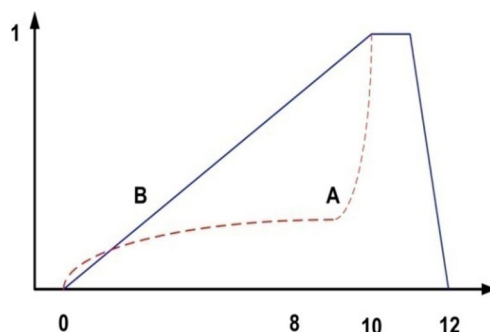
$$A(x) = \begin{cases} g(x) & \text{when } x \in [۰, ۱۰), \\ ۱ & \text{when } x \in [۱۰, ۱۱), \\ ۱۲ - x & \text{when } x \in [۱۱, ۱۲), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

به طوریکه

$$g(x) = \begin{cases} ۰.۱\sqrt{x} & \text{when } x \in [۰, ۹), \\ ۰.۷x^۲ - ۱۲.۶x + ۵۷ & \text{when } x \in [۹, ۱۰]. \end{cases}$$

و همچنین

$$B(x) = \begin{cases} ۰.۱x & \text{when } x \in [۰, ۱۰), \\ ۱ & \text{when } x \in [۱۰, ۱۱), \\ ۱۲ - x & \text{when } x \in [۱۱, ۱۲), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$



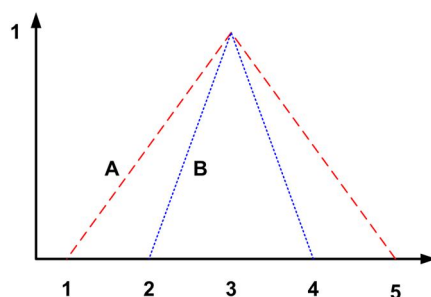
شکل ۴-۳-۲

با استفاده از این روش $TR(A, A.) = ۱۰.۳۹$ و $TR(B, A.) = ۸.۵۷$ بوده و بنابراین $A \succ B$. همانطور که در جدول ۴-۳-۱ دیده می شود نتیج حاصل از روش "چو" و "تیسائو" غیر معقول به نظر می رسد ولی نتایج حاصله از روش *Sign Distance* با $p = ۱$ و $p = ۲$ با نتایج روش جدید پیشنهادی یکسان می باشد.

fuzzy number	new approach	Sign Distance with $p=1$	Sign Distance with $p=2$	Cheng	Chu-Tsao
A	۱۰.۳۹	۲۱.۶۸	۱۶.۱۳	۷.۵۱	۴.۱۱
B	۸.۵۷	۱۶.۵	۱۲.۸۷	۷.۶۲	۴.۱۵
Results	$A > B$	$A > B$	$A > B$	$A < B$	$A < B$

جدول ۱-۳-۴

مثال ۳-۳-۴- فرض کنید $A = (3, 2, 2)$ و $B = (3, 1, 1)$ دو عدد فازی مثلثی باشند که در شکل نمایش داده شده باشند. برای مقایسه نتایج حاصل از روش جدید با سایر روشها نتایج درج شده در جدول ۲-۳-۴ ملاحظه می شود:



شکل ۳-۳-۴

Fuzzy number	new approach	Magnitude method	Sign Distance With $p=1$	Sign Distance with $p=2$	Distance Minimization	Chen-Max-Min
A	۳.۰۷۳	۳	۶	۴.۵۴۶	۳	۰.۵
B	۳.۰۱۸۴	۳	۶	۴.۳۲	۳	۰.۵
Results	$A > B$	$A \sim B$	$A \sim B$	$A > B$	$A \sim B$	$A \sim B$

جدول ۲-۳-۴

در جدول ۲-۳-۴ دیده می شود که نتایج یکسانی از روشهای *Magnitude* و *Distance Minimization* و *Method* و *Sign distance* ($p=1$) به صورت $A \sim B$ حاصل شده است که برای این اعداد این نتیجه غیر منطقی به نظر می رسد. نتیجه حاصله از روش جدید با روش *Sign distance* ($p=2$) یکسان می باشد. نتایج حاصله از روش جدید نشان می دهد این روش نتایج معقول تری را ارائه میدهد خصوصا اینکه ابهامات موجود در برخی از روشها خصوصا *Magnitude Method* را بر طرف می نماید.

فصل پنجم

روش فازی زدایی برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس

مرکز ثقل

مقدمه

با توجه به اینکه رتبه بندی اعداد فازی نقش مهمی را در ارزیابی واحد های تصمیم گیری دارد لذا روشهای گوناگونی در این زمینه خصوصا بر مبنای مرکز ثقل اعداد فازی صورت گرفته است. ولی از انجاییکه تمام روشهای پیشنهادی در زمینه دارای اشکالاتی بوده است لذا هدف اصلی در این بخش آنست روشی ارائه دهیم که علاوه بر داشتن تمام خصوصیات روشهای رتبه بندی قبلی، اشکالات و ابهامات موجود در روشهای پیشین که بر اساس مرکز ثقل انجام می گرفته را رفع نماید.

۵-۱- تعاریف و نکات اساسی

فرض کنید A یک عدد فازی باشد که تابع عضویت آن در حالت کلی به صورت زیر بیان شده باشد:

$$f_A(x) = \begin{cases} f_A^L(x) & \text{when } a \leq x \leq b, \\ \omega & \text{when } b \leq x \leq c, \\ f_A^R(x) & \text{when } c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1-1-5)$$

به طوریکه $0 \leq \omega \leq 1$ یک مقدار ثابت بوده و همچنین $f_A^L : [a, b] \rightarrow [0, \omega]$ و $f_A^R : [c, d] \rightarrow [0, \omega]$ دو نگاشت اکیدا یکنوا از $\mathcal{R}$ به بازه $[0, \omega]$ می باشند. اگر $\omega = 1$ باشد در این صورت عدد فازی A را نرمال می نامند و در غیر این صورت آن را غیر نرمال می نامند. اگر عدد فازی A به طور قطعه ای خطی باشد آنرا عدد فازی ذوزنقه ای نامیده و با نماد $A = (a, b, c, d; \omega)$ نمایش می دهیم. درحالت خاص هرگاه $b = c$ باشد عدد فازی A را مثلثی می نامند. با توجه به اینکه توابع $f_A^L(x)$ و $f_A^R(x)$ توابعی پیوسته و اکیدا یکنوا می باشند، بنابراین معکوس این توابع موجود، پیوسته و اکیدا یکنوا می باشند. فرض کنیم معکوس این توابع به صورت $g_A^L : [0, \omega] \rightarrow [a, b]$ و $g_A^R : [0, \omega] \rightarrow [c, d]$ باشند. در این صورت $g_A^L(y)$ و $g_A^R(y)$ در بازه بسته $[0, \omega]$ انتگرال پذیر بوده و $\int_0^\omega g_A^L(y) dy$ و $\int_0^\omega g_A^R(y) dy$ موجودند. اگر عدد فازی ذوزنقه ای باشد در این صورت این توابع به صورت زیر می باشند:

$$g_A^L(y) = a + \frac{(b-a)y}{\omega}, \quad 0 \leq y \leq \omega, \quad (2-1-5)$$

$$g_A^R(y) = d - \frac{(d-c)y}{\omega}, \quad 0 \leq y \leq \omega. \quad (3-1-5)$$

برای تعیین مرکز ثقل عدد فازی A یعنی $(\bar{x}, \bar{y})$ ، در سال ۲۰۰۶، "وانگ" و همکارانش [۱۳]، روابط زیر را پیشنهاد دادند:

$$\bar{x}_\cdot(A) = \frac{\int_a^b x f_A^L(x) dx + \int_b^c (x\omega) dx + \int_c^d x f_A^R(x) dx}{\int_a^b f_A^L(x) dx + \int_b^c (\omega) dx + \int_c^d f_A^R(x) dx}, \quad (4-1-5)$$

$$\bar{y}_\cdot(A) = \frac{\int_\cdot^\omega y (g_A^R(y) - g_A^L(y)) dy}{\int_\cdot^\omega (g_A^R(y) - g_A^L(y)) dy}. \quad (5-1-5)$$

که تابع عضویت آن به صورت $A = (a, b, c, d; \omega)$ در این صورت برای عدد فازی دوزنقه ای

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{\omega(x-a)}{b-a}, & \text{when } a \leq x \leq b, \\ \omega, & \text{when } b \leq x \leq c, \\ \frac{\omega(d-x)}{d-c}, & \text{when } c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6-1-5)$$

می باشد طبق روابط (4-1-5) و (5-1-5) به صورت زیر است:

$$\bar{x}_\cdot(A) = \frac{1}{3} [a + b + c + d - \frac{dc-ab}{(d+c)-(a+b)}], \quad (7-1-5)$$

$$\bar{y}_\cdot(A) = \omega \frac{1}{3} \left[1 + \frac{c-b}{(d+c)-(a+b)} \right]. \quad (8-1-5)$$

اندیس رتبه بندی $R(A)$ قبلاً توسط "چنگ"^۲ در سال ۱۹۹۸ به صورت زیر معرفی شده بود [۱۴]:

$$R(A) = \sqrt{\bar{x}_\cdot(A) + \bar{y}_\cdot(A)}. \quad (9-1-5)$$

در این روش مقدار بیشتر برای $R(\cdot)$ رتبه بزرگتری برای عدد فازی نسبت میدهد. همچنین در سال ۲۰۰۲، "تیسائو"^۳ یک اندیس دیگر برای رتبه بندی اعداد فازی بر اساس مرکز ثقل ارائه داد [۱۲]. در این روش با فرض اینکه نقطه $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ مرکز ثقل عدد فازی A باشد، با تعریف اندیس رتبه بندی $S(A)$ که به صورت

$$S(A) = \bar{x}_A \times \bar{y}_A. \quad (10-1-5)$$

تعریف شده بود رتبه بندی را انجام داد. او بیان نمود که مقادیر بیشتر برای $S(A)$ رتبه بهتری برای عدد فازی نسبت می دهد. با اینحال در سال ۲۰۰۸، "زائو"^۴ [۱۵] بیان داشت که روشهای پیشنهادی توسط "تیسائو" و "چنگ" عمل رتبه بندی را به درستی انجام نمی دهند و لذا روش دیگری را برای بهتر نمودن روشهای ایشان

بر اساس فرمولهای (۷-۱-۵) و (۸-۱-۵) پیشنهاد نمود. با این حال اشکالات دیگری نیز در این روش وجود دارد که به درستی نمی تواند برخی از اعداد فازی را رتبه بندی نماید. در بخش آتی روشی را ارائه خواهیم داد که در حالت کلی تمام اشکالات اساسی موجود در روشهایی که بر اساس مرکز ثقل رتبه بندی را انجام می دهند را رفع می نماید.

۵-۲- یک روش رتبه بندی جدید برای اعداد فازی

در این قسمت یک نظریه جدید برای رتبه بندی اعداد فازی بر مبنای یک فاصله ارائه می دهیم. در این روش علاوه بر اینکه از مختصات مرکز ثقل عدد فازی استفاده خواهیم نمود بلکه از یک مقدار قطعی ماگزیمم^۵ نیز بهره خواهیم جست. برای تعریف روش رتبه بندی جدید ابتدا مقدار کریسپ ماگزیمم τ_{max} به عنوان یک محک^۶ با تابع عضویت $\mu_{\tau_{max}}(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mu_{\tau_{max}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x = \tau_{max}, \\ 0 & \text{when } x \neq \tau_{max}. \end{cases} \quad (1-2-5)$$

حال اگر بخواهیم n عدد فازی $A_1, A_2, \dots, A_n$ را رتبه بندی نماییم، مقدار کریسپ ماگزیمم به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tau_{max} = \max\{x | x \in \text{Domain}(A_1, A_2, \dots, A_n)\}. \quad (2-2-5)$$

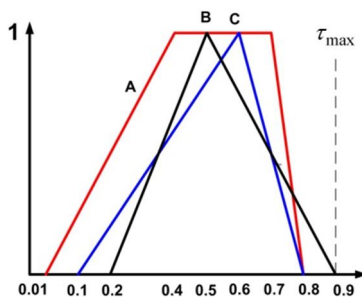
که در رابطه فوق Domain قلمرو اعداد فازی $A_1, A_2, \dots, A_n$ می باشد. مزایای استفاده از مقدار قطعی ماگزیمم را در دو صورت می توان بیان نمود: که اولاً این مقدار توسط خود اعداد ایجاد می شود و ثانیاً اینکه به راحتی قابل محاسبه است.

مثال ۵-۲-۱- سه عدد فازی A ، B و C که در مقاله "چن"^۵ [۵] به تصویر کشیده شده، تابع عضویت آنها به همراه معکوس آنها در جدول ۵-۲-۱ آورده شده است. همانطور که در شکل ۵-۲-۱ ملاحظه می شود مقدار کریسپ ماگزیمم این اعداد به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\tau_{max} = \max\{x | x \in \text{Domain}(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})\} = \max\{0.01, 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9.$$

و

$$g_{max}(x) = \begin{cases} g_{max}^L(x) = 0.9, \\ g_{max}^R(x) = 0.9. \end{cases}$$



شکل ۵-۲-۱. اعداد فازی A ، B و C و τ_{max}

Fuzzy numbers	The membership function	The inverse functions
A	$\mu_A(x) = \begin{cases} 2.564x + 0.256, & 0.01 \leq x \leq 0.2, \\ 1, & 0.2 \leq x \leq 0.4, \\ -1.0x + 0.8, & 0.4 \leq x \leq 0.8. \end{cases}$	$g_A(x) = \begin{cases} L_A(x) = 0.39x + 0.01, \\ R_A(x) = -0.1x + 0.8. \end{cases}$
B	$\mu_B(x) = \begin{cases} 3.33x - 0.66, & 0.2 \leq x \leq 0.5, \\ 1, & x = 0.5, \\ -2.5x + 2.25, & 0.5 \leq x \leq 0.7. \end{cases}$	$g_B(x) = \begin{cases} L_B(x) = 0.3x + 0.2, \\ R_B(x) = -0.4x + 0.9. \end{cases}$
C	$\mu_C(x) = \begin{cases} 2x - 0.2, & 0.1 \leq x \leq 0.6, \\ 1, & x = 0.6, \\ -0.5x + 0.4, & 0.6 \leq x \leq 0.8. \end{cases}$	$g_C(x) = \begin{cases} L_C(x) = 0.5x + 0.1, \\ R_C(x) = -0.2x + 0.8. \end{cases}$

جدول ۵-۲-۱ برای اعداد فازی A ، B و C از مثال ۵-۲-۱

فرض کنید اعداد $A_1, A_2, \dots, A_n$ ، عدد فازی باشند. روش رتبه بندی این اعداد به صورت زیر بیان می شود:

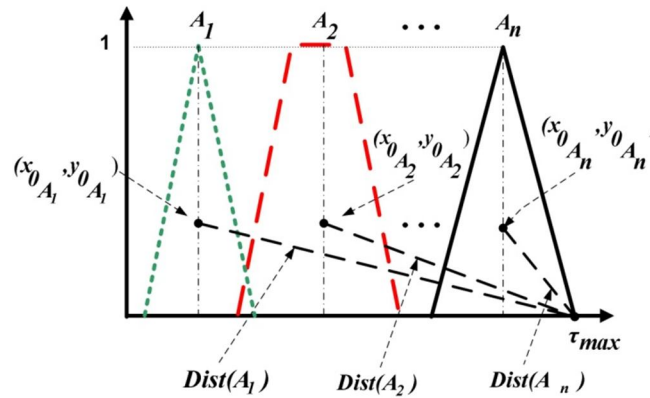
گام اول: با استفاده از روابط (۵-۱-۵) و (۵-۱-۵) مختصات مرکز ثقل هر عدد فازی را به صورت $(\bar{x}_{A_j}, \bar{y}_{A_j})$ محاسبه می کنیم.

گام دوم: به ازاء هر $1 \leq j \leq n$ ، مقدار قطعی ماکزیمم τ_{max} را برای تمام A_j محاسبه می کنیم.

گام سوم: با استفاده از نقطه $(\bar{x}_{A_j}, \bar{y}_{A_j})$ برای هر عدد فازی A_j که $1 \leq j \leq n$ ، اندیس رتبه بندی $Dist(A_j)$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$Dist(A_j) = \sqrt{(\bar{x}_{\cdot A_j} - \tau_{max})^2 + (\bar{y}_{\cdot A_j} - \cdot)^2} = \sqrt{(\bar{x}_{\cdot A_j} - \tau_{max})^2 + (\bar{y}_{\cdot A_j})^2}. \quad (3-2-5)$$

در رابطه (3-2-5) دیده می شود که $Dist(A_j)$ فاصله اقلیدسی نقطه $(\bar{x}_{\cdot A_j}, \bar{y}_{\cdot A_j})$ از نقطه $(\tau_{max}, \cdot)$ مطابق با شکل 3-2-5 می باشد.



شکل 3-2-5 - فاصله بین $(\bar{x}_{\cdot A_j}, \bar{y}_{\cdot A_j})$ و نقطه $(\tau_{max}, \cdot)$

فرض کنید A یک عدد فازی و $Dist(A)$ فاصله اقلیدسی بین نقطه $(\bar{x}_{\cdot A_j}, \bar{y}_{\cdot A_j})$ و نقطه $(\tau_{max}, \cdot)$ باشد. با توجه به اینکه می خواهیم یک عدد فازی را با یک مقدار قطعی تقریب بزنیم، بنابراین از یک عملگر $Dist : F \rightarrow R$ که هر عدد فازی را به خانواده ای از اعداد حقیقی تبدیل می کند استفاده می کنیم. عملگر $Dist$ یک عملگر تقریب قطعی می باشد. لذا از این عملگر برای رتبه بندی اعداد فازی استفاده خواهیم نمود. هر چه مقدار $Dist$ کوچکتر باشد، نتیجه رتبه بندی بهتر خواهد بود.

فرض کنیم $A_1, A_2 \in F$ دو عدد فازی باشند. عمل رتبه بندی روی F به وسیله $Dist$ به صورت زیر تعریف می شود:

(۱) $Dist(A_1) < Dist(A_2)$ اگر $A_1 > A_2$ ،

(۲) $Dist(A_1) > Dist(A_2)$ اگر $A_1 < A_2$ ،

(۳) $Dist(A_1) = Dist(A_2)$ اگر $A_1 \sim A_2$.

همچنین عمل ترتیب $\succsim$ و $\lesssim$ به صورت $A \succsim B$ بیان می شود اگر و تنها اگر داشته باشیم $A \sim B$ یا $A > B$. همچنین $A \lesssim B$ می باشد اگر و تنها اگر داشته باشیم $A < B$ یا $A \sim B$. اندیس رتبه بندی

جدید بسیاری از اعداد فازی را با شرایط یکسان رتبه بندی می کند. علاوه بر این روش محاسبه این اندیس بسیار ساده بوده و بسیاری از خواص مشترک رتبه بندی اعداد فازی را به صورت زیر داراست:

- (a) خاصیت تعدی از رابطه ترتیب، یعنی هرگاه $A_1 \leq A_2$ و $A_2 \leq A_3$ در این صورت داریم $A_1 \leq A_3$.
- (b) خاصیت سازگاری با جمع، یعنی اگر بر روی مجموعه $\{A_1, A_2\}$ داشته باشیم $A_1 \leq A_2$ ، در این صورت بر روی مجموعه $\{A_1 + A_3, A_2 + A_3\}$ همواره $A_1 + A_3 \leq A_2 + A_3$.
- برخی از خواص اندیس رتبه بندی جدید به صورت زیر بیان می شود:

گزاره ۲-۲-۵- فرض کنید $A \in F$ باشد، در این صورت همواره شرایط زیر برقرار است:

(۱) اگر $\inf \sup(A) \geq 0$ باشد $(\inf_{y \in [0, \omega]} g_A^L(y) \geq 0)$ همواره $Dist(A) \geq 0$.

(۲) اگر $\sup \sup(A) \leq 0$ باشد $(\sup_{y \in [0, \omega]} g_A^R(y) \leq 0)$ همواره $Dist(A) \geq 0$.

گزاره ۳-۲-۵- فرض کنید $A_1, A_2 \in F$ ، در این صورت همواره روابط زیر برقرار است:

(۱) اگر $A_1 \leq A_2$ در این صورت $-A_2 \leq -A_1$.

(۲) اگر $A_1 \leq (<) A_2$ ، در این صورت به ازاء هر عدد دلخواه A_3 ، $A_1 + A_3 \leq (<) A_2 + A_3$.

(۳) فرض کنید $A_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; \omega)$ و $A_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; \omega)$ اعداد فازی دلخواه باشند.

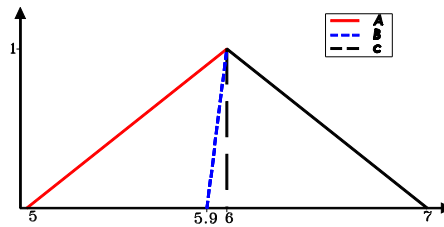
هرگاه $\sup \sup(A_1) \leq (<) \inf \sup(A_2)$ باشد همواره $A_1 \leq (<) A_2$.

اثبات: با توجه به رابطه (۳-۲-۵) به راحتی درستی (۱) و (۲) قابل بیان است. برای اثبات (۳) هرگاه $\sup \sup(A_1) \leq (<) \inf \sup(A_2)$ طبق تعریف همواره $d_1 \leq a_2 (d_1 < a_2)$ خواهد بود. همچنین به ازاء $\forall y \in [0, \omega]$ واضح است که $\bar{x}_{A_1} \leq (<) \bar{x}_{A_2}$ و $\bar{y}_{A_1} \leq \bar{y}_{A_2}$. بنابراین طبق رابطه (۳-۲-۵)، $Dist(A_1) \geq (>) Dist(A_2)$ بوده و بنابراین $A_1 \leq (<) A_2$ خواهد بود.

با توجه به روش رتبه بندی پیشنهاد شده و همچنین الگوریتم ارائه شده مثالهای مربوطه در بخش آتی ارائه می شود.

۳-۵- مثالهای عددی

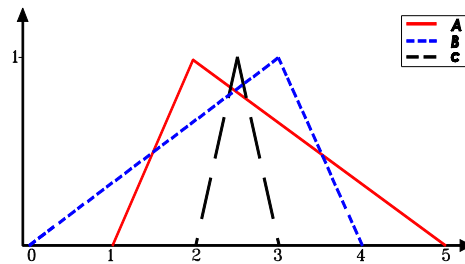
مثال ۱-۳-۵- اعداد فازی $A = (5, 6, 7)$ ، $B = (5.9, 6, 7)$ و $C = (6, 6, 7)$ که در شکل ۱-۳-۵ آورده شده اند در نظر می گیریم.



شکل ۱-۳-۵

با توجه به رابطه (۳-۲-۵) مقدار اندیس رتبه بندی برای اعداد فوق به صورت $Dist(A) = ۱.۰۵$ ، $Dist(B) = ۰.۷۷$ و $Dist(C) = ۰.۷۴$ می باشد. با توجه به ترتیب رتبه بندی، نتیجه $A < B < C$ را خواهیم داشت. نتیجه حاصل از روش "چو" و "تسائو"^۱ در [۱۲]، $A < C < B$ و با روش CV ارائه شده در [۳] به صورت $C < B < A$ محاسبه شده است. طبق شکل ۱-۳-۵ به راحتی می توان دید که نتایج حاصله از روش های ارائه شده در [۵، ۱۲] غیر منطقی است و معقول به نظر نمی رسد. از طرف دیگر طبق روش ارائه شده در [۱]، نتیجه $A < B < C$ حاصل شده است که این نتیجه با نتیجه حاصل از روش جدید یکسان می باشد. با اینحال پروسه محاسباتی روش جدید پیشنهاد شده ساده تر می باشد.

مثال ۲-۳-۵- اعداد فازی $A = (۱, ۲, ۵)$ ، $B = (۰, ۳, ۴)$ و $C = (۲, ۲.۵, ۳)$ را که در شکل ۲-۳-۵ به تصویر کشیده شده اند را در نظر بگیرید. با توجه به نتیجه حاصل از روش جدید $Dist(A) = ۲.۳۵$ ، $Dist(B) = ۲.۶۸$ و $Dist(C) = ۲.۵۲$ بوده و در نتیجه ترتیب رتبه بندی به صورت $B < C < A$ می باشد. به نظر می رسد که نتیجه حاصل از روش *Distance Minimization* منطقی نیست. برای مقایسه نتیجه حاصل از این روش با نتایج موجود در [۱۲]، جدول ۱-۳-۵ تهیه شده است. علاوه بر این، برای اعداد فازی مذکور $Dist(-A) = ۲.۶۸$ ، $Dist(-B) = ۲.۳۵$ و $Dist(-C) = ۲.۵۲$ بوده و در نتیجه برای تصویر اعداد فازی فوق نتیجه $-A < -C < -B$ حاصل می شود، و این یعنی اینکه روش جدید برای رتبه بندی تصویر اعداد فازی نیز نتایج قابل قبولی ارائه می دهد در صورتیکه در روش CV تصویر اعداد فازی به درستی رتبه بندی نمی شوند.



شکل ۵-۳-۲

Fuzzy number	New approach	Sign Distance with $p=2$	Distance Minimization	Chu-Tsao	CV Index	Magnitude method
A	۲.۳۵	۳.۹۱	۲.۵	۰.۷۴	۰.۳۲	۲.۱۶
B	۲.۶۸	۳.۹۱	۲.۵	۰.۷۴	۰.۳۶	۲.۸۳
C	۲.۵۲	۳.۵۵	۲.۵	۰.۷۵	۰.۰۸	۲.۵۰
Results	$B < C < A$	$C < A \sim B$	$C \sim A \sim B$	$A \sim B < C$	$B < A < C$	$A < C < B$

جدول ۵-۳-۱

مثال ۵-۳-۳- مقادیر اندیس $Dist$ برای ۱۲ مثال به تصویر کشیده شده در شکل ۵-۳-۳ آورده شده است. جدول ۵-۳-۲ نتایج رتبه بندی را نمایش می دهد. طبق این جدول، اهداف اصلی و $Dist$ با برخی از مزایای این روش به صورت زیر آورده شده است:

۱. در مثال های L و K ، برخی از روشها از یک پروسه پیچیده و نرمال سازی برای عمل رتبه بندی استفاده می کنند و با این حال نتایج معقول نیز به دست نمی آورند. در صورتیکه روش پیشنهادی بدون استفاده از عمل نرمال سازی نتایج قابل قبولی را ارائه می دهد.

۲. برای آن دسته از اعداد فازی نظیر مثالهای B و A ، که دارای میانه مساوی هستند، روشهای ارائه شده توسط $Yager$ در [۱۶]، $Kerre$ در [۴] و $Bass$ در [۱۷]، قادر به رتبه بندی نیستند. روش ارائه شده توسط $Chang$ در [۱۸]، این دسته از اعداد را رتبه بندی میکند ولی برای اعدادی که دارای پهنای بیشتری هستند رتبه بندی کوچکتری را تخصیص می دهد. در مثالهای B و A به وضوح می توان دید که روش پیشنهادی این دسته از اعداد را فوراً رتبه بندی می کند به طوریکه این نتایج نیز معقول و منطقی به نظر می رسد و با نظر تصمیم گیرنده نیز منطبق است.

۳. در مثالهای C ، D و L ملاحظه می شود که روشهای $Kerre$ در [۴] و $Bass$ در [۱۷]، محدودیتهایی را در رتبه بندی اعداد فازی مثلی و دوزنقه ای غیر نرمال دارند.

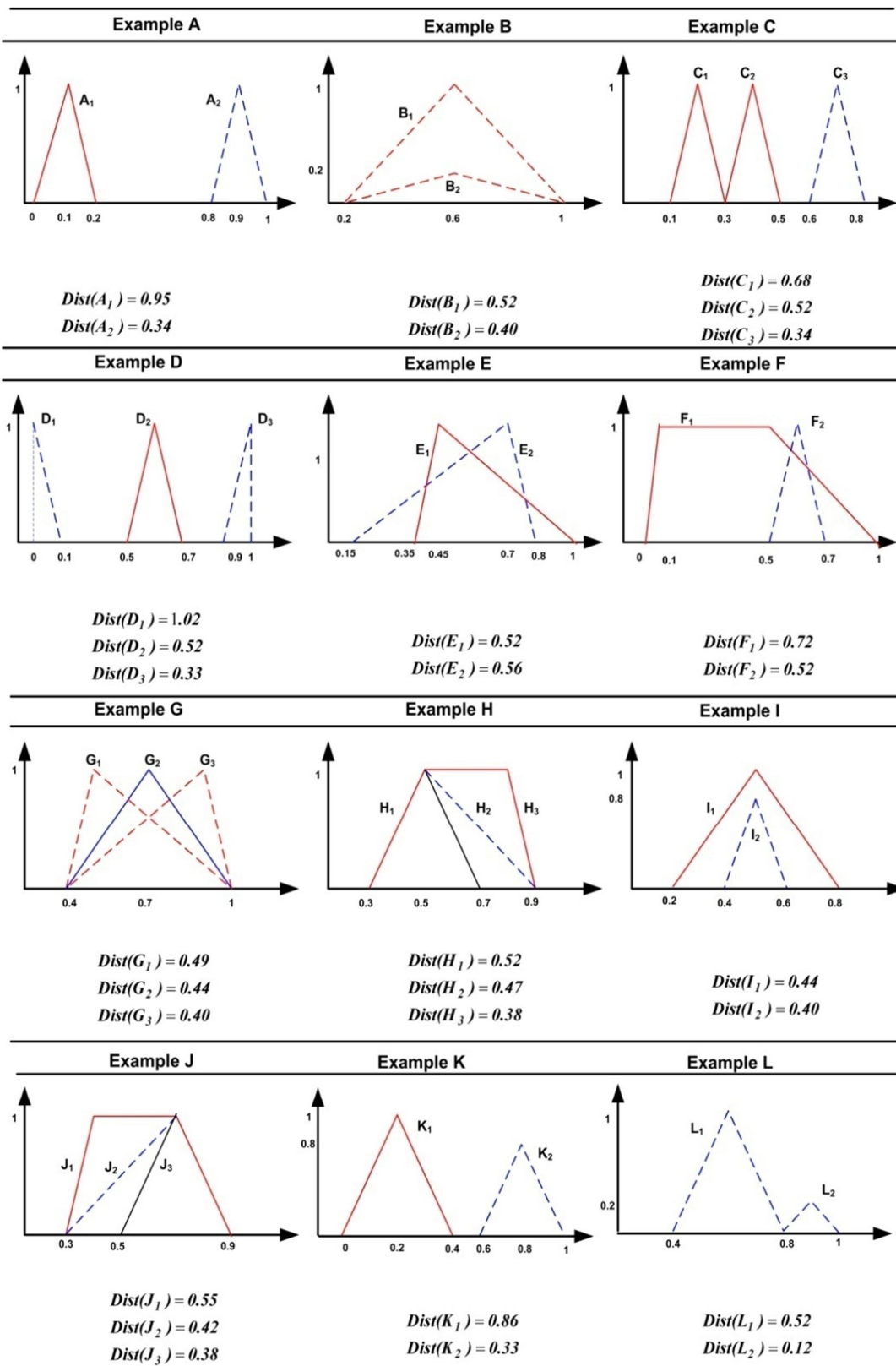
۴. روش ارائه شده جدید علاوه بر اعداد فازی اعداد کریسپ را نیز رتبه بندی می کند در صورتیکه روش ارائه شده توسط *Yager* در [۱۶]، در یافتن ترتیب اعداد کریسپ توانایی ندارد.

Proposed method	Yager's F_1 [۱۶]	Kerre [۴]	Chang [۱۸]	Bass et al. [۱۷]
$A_1 < A_2$	$A_1 < A_2$	$A_1 < A_2$	$A_1 < A_2$	$A_1 < A_2$
$B_1 < B_2$	$B_1 \sim B_2$	$B_1 \sim B_2$	$B_1 < B_2$	$B_1 \sim B_2$
$C_1 < C_2 < C_3$	$C_1 < C_2 < C_3$	$C_1 \sim C_2 < C_3$	$C_1 < C_2 < C_3$	$C_1 \sim C_2 < C_3$
$D_1 < D_2 < D_3$	$D_1 < D_2 < D_3$	$D_2 < D_1 < D_3$	$D_1 < D_2 < D_3$	$D_1 < D_2 < D_3$
$E_1 > E_2$	$E_1 > E_2$	$E_1 > E_2$	$E_1 > E_2$	$E_1 < E_2$
$F_2 > F_1$	$F_1 < F_2$	$F_1 < F_2$	$F_1 > F_2$	$F_1 < F_2$
$G_1 < G_2 < G_3$	$G_1 < G_2 < G_3$	$G_1 < G_2 < G_3$	$G_1 < G_2 < G_3$	$G_1 < G_2 < G_3$
$H_1 < H_2 < H_3$	$H_1 < H_2 < H_3$	$H_1 < H_2 < H_3$	$H_1 < H_2 < H_3$	$H_1 < H_2 < H_3$
$I_2 > I_1$	$I_1 \sim I_2$	$I_1 \sim I_2$	$I_2 > I_1$	$I_1 \sim I_2$
$J_1 < J_2 < J_3$	$J_1 < J_2 < J_3$	$J_1 < J_2 < J_3$	$J_1 < J_2 < J_3$	$J_1 < J_2 < J_3$
$K_2 > K_1$	$K_1 < K_2$	$K_1 < K_2$	$K_1 < K_2$	$K_1 < K_2$
$L_1 < L_2$	$L_1 < L_2$	$L_1 < L_2$	$L_1 > L_2$	$L_1 < L_2$

جدول ۵-۳-۲

مثال ۵-۳-۴- نمونه هایی از اعداد فازی مثبت که توسط سایر روش ها رتبه بندی شده اند در شکل ۵-۳-۴ آورده شده است. مثال های A ، I ، J ، K و L که توسط روشهای *Tseng* و *Klein* در [۱۹]، مرتب شده اند را تفسیر می کنیم. آنها برای توصیف نتایج از روشهای دیگری که حاصل نتیجه آنها در جدول ۵-۳-۳ آورده شده است استفاده کردند. در مثال A ، *Tseng* و *Klein* در [۱۹] و *Kerre* در [۴]، برای هر دو عدد، نتیجه مساوی به دست آوردند در صورتیکه نظر *Baldwin* و *Guild* در [۲۰]، غیر از این می باشد. آنها عقیده دارند که A_2 کوچکتر از A_1 بوده و اختلاف آنها بسیار ناچیز است. همچنین طبق روش ارائه شده توسط *Chen* و *Lu* در [۲۱]، برای این اعداد به ازاء مقادیر مختلف β نتایج مختلفی حاصل می شود. در حالت کلی می توان دید که نتایج متفاوتی بین روش پیشنهادی و سایر روش ها وجود ندارد.

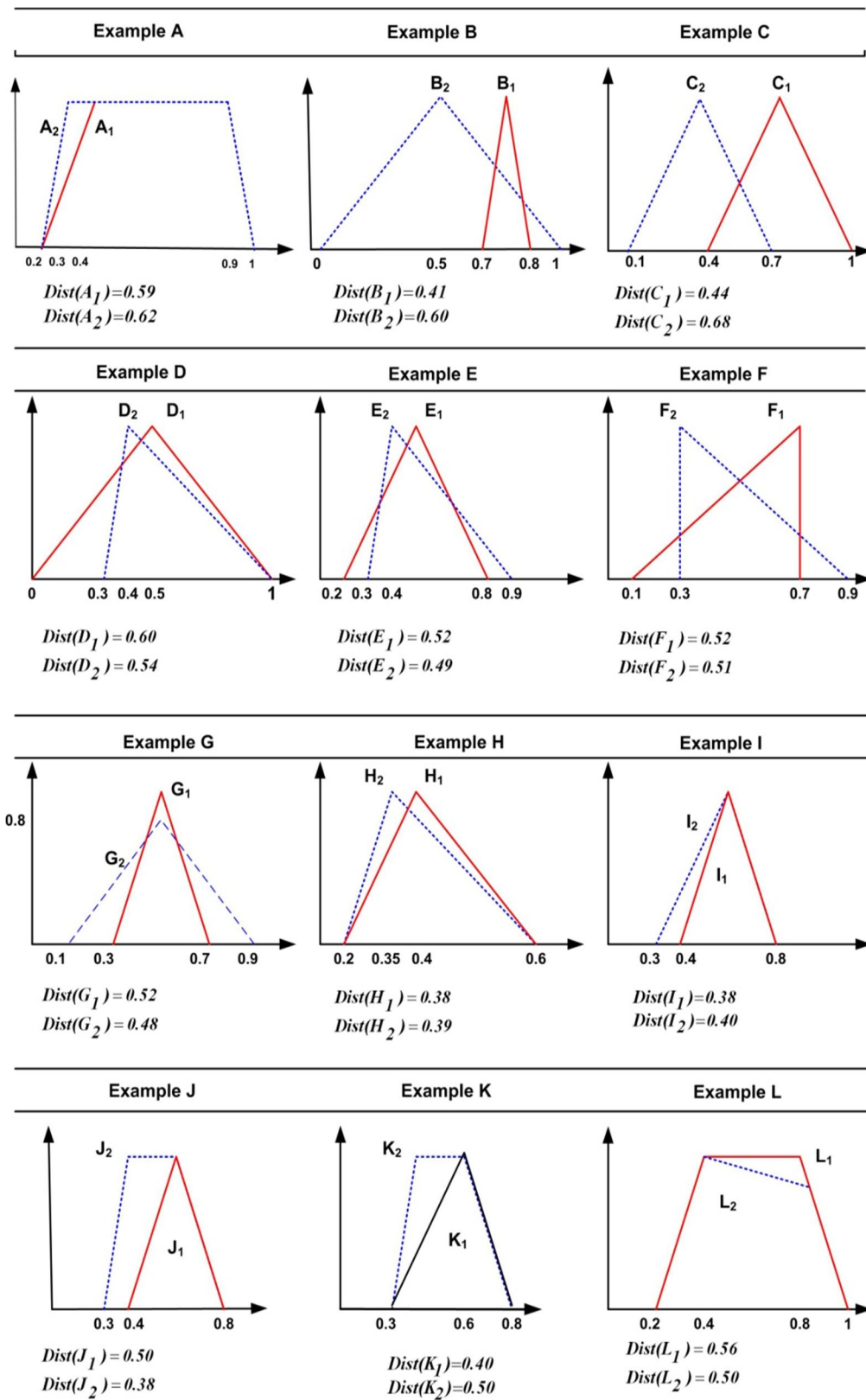
مثال های فوق نشان می دهد که روش پیشنهاد شده در بخش با روش های پیشنهادی دیگر تطابق بیشتری دارد.



شکل ۵-۳-۳

Examples	FN's	Tseng and Klein	Kerre [١٠]	Lee and Li Uniform (١٩٨٨)	Lee and Li [٢١] Proportional	Bass And kwakernaak	Chen and Lu $\beta =$ ١ ٠.٥ ٠.٥		
<i>A</i>	<i>A</i> _١	٠.٥	٠.٩٥	٠.٦	٠.٦	٠.٥٣	-٠.٠٤	٠.٠٥	٠.٥
	<i>A</i> _٢	٠.٥	٠.٩٥	٠.٦٢	٠.٦٣	٠.٥٧	٠.١	٠.٣	٠.٥
<i>B</i>	<i>B</i> _١	٠.٨٧	٠.٩٩	٠.٨	٠.٨	٠.٥٦	٠.١	٠.٣	٠.٥
	<i>B</i> _٢	٠.١٣	٠.٥٤	٠.٥	٠.٥	٠.١٩	٠.٣	٠.٣	٠.٣
<i>C</i>	<i>C</i> _١	٠.٨٧	١.٠	٠.٧	٠.٧	٠.٥٦	٠.٣	٠.٣	٠.٣
	<i>C</i> _٢	٠.١٣	٠.٥٥	٠.٤	٠.٤	٠.١٩	-		
<i>D</i>	<i>D</i> _١	٠.٤٧	٠.٨٩	٠.٥	٠.٥	٠.٤٤	٠.٠٥	-٠.٠٣	-٠.١
	<i>D</i> _٢	٠.٥٣	٠.٩٥	٠.٥٧	٠.٥٣	٠.٤٨	-	-	
<i>E</i>	<i>E</i> _١	٠.٤٩	٠.٤٥	٠.٥	٠.٥	٠.٣٦	٠.٠	٠.٠	٠.٠
	<i>E</i> _٢	٠.٥١	٠.٩٦	٠.٥٣	٠.٥٠	٠.٣٩	-		
<i>F</i>	<i>F</i> _١	٠.٥٦	٠.٩٣	٠.٥٠	٠.٥٥	٠.٤٠	٠.١	٠.١	٠.١
	<i>F</i> _٢	٠.٤٤	٠.٨٧	٠.٥٠	٠.٤٥	٠.٣٦	-		
<i>G</i>	<i>G</i> _١	٠.٥٠	٠.٩٠	٠.٥٠٠	٠.٥٠	٠.٣٨	-٠.١	٠.٠	٠.١
	<i>G</i> _٢	٠.٥٠	٠.٩٠	٠.٥٠	٠.٥٠	٠.٣٨	-		
<i>H</i>	<i>H</i> _١	٠.٥٢	١.٠	٠.٤٠	٠.٤٠	٠.٢٩	٠.٠٢	٠.٠٢	٠.٠٢
	<i>H</i> _٢	٠.٤٨	٠.٩٨	٠.٣٩	٠.٣٩	٠.٢٨	-		
<i>I</i>	<i>I</i> _١	٠.٥٦	١.٠	٠.٦٠	٠.٦٠	٠.٣٣	٠.٠	٠.٠٢٥	٠.٠٥٠
	<i>I</i> _٢	٠.٤٤	٠.٩٥	٠.٥٧	٠.٥٨	٠.٢٩	-		
<i>J</i>	<i>J</i> _١	٠.٦٤	١.٠	٠.٦٠	٠.٦٠	٠.٣٨	٠.٠	٠.٠٧٥	٠.١٥٠
	<i>J</i> _٢	٠.٣٦	٠.٨٥	٠.٥٣	٠.٥٢	٠.٢٩	-		
<i>K</i>	<i>K</i> _١	٠.٥٨	١.٠	٠.٥٧	٠.٥٨	٠.٣٨	٠.٠	٠.٠٥	٠.١
	<i>K</i> _٢	٠.٤٢	٠.٩٠	٠.٥٣	٠.٥٢	٠.٣٣	-		
<i>L</i>	<i>L</i> _١	٠.٥٢	١.٠	٠.٦٠	٠.٦٠	٠.٥٧	٠.٠٧	٠.٠٥	٠.٠٠
	<i>L</i> _٢	٠.٤٨	٠.٩٦	٠.٦٠	٠.٦٠	٠.٤٤	-		

جدول ٥-٣-٣



شكل ٥-٣-٤

۵-۴- نتیجه گیری

تا کنون روشهای متعددی برای رتبه بندی اعداد فازی ارائه شده است. در این پایان نامه، یک تقریب بازه ای با استفاده از یک متر وزن دار معرفی شد و نزدیک ترین تقریب را با مسئله کمینه سازی به دست آوردیم. با استفاده از این بازه ها روش رتبه بندی جدیدی ارائه شد به طوریکه تمام خواص معقول برای رتبه بندی را نیز دارا بود. این روش حتی برای آندسته از اعداد فازی که دارای میانه برابر یا اعداد فازی تو در تو که دارای تکیه گاه یکسان می باشند نیز نتایج منطقی ارائه داد. روشهای تقریب و رتبه بندی های ارائه شده در این تحقیق نسبت به روشهای قبلی بسیار ساده و دارای محاسبات بسیار کمتری می باشند.

واژه نامه

Array.....	آرایه.....
α - cut.....	آلفا برش.....
Strong α - cut.....	آلفا برش قوی.....
Union.....	اجتماع.....
Fuzzy reasoning.....	استدلال فازی.....
Approximation reasoning.....	استدلال تقریبی.....
Inference.....	استنتاج.....
Intersection.....	اشتراک.....
Decomposition principle.....	اصل تجزیه.....
Extension principle.....	اصل توسیع.....
Fuzzy numbers.....	اعداد فازی.....
L-R fuzzy numbers.....	اعداد فازی $L-R$
Shape function.....	تابع شکل.....
Membership function.....	تابع عضویت.....
Characteristic function.....	تابع مشخصه.....
Composition of fuzzy relations	ترکیب رابطه های فازی.....
Composition of complex fuzzy relations.....	ترکیب رابطه های فازی پیچیده.....
Projection of fuzzy relations.....	تصویر رابطه های فازی.....

Compilation of fuzzy relations.....	جمع بندی رابطه های فازی.....
Cartesian product.....	حاصل ضرب کارتزین.....
Arithmetic of fuzzy numbers.....	حساب اعداد اعداد فازی.....
Properties of fuzzy sets.....	خصوصیات مجموعه های فازی.....
Membership degree.....	درجه عضویت.....
Fuzzy relations.....	رابطه های فازی.....
Fundamental operations of fuzzy sets.....	عملیات اصلی مجموعه های فازی.....
Fuzzy.....	فازی.....
Compositional rule.....	قاعده ترکیب.....
The law of contradiction.....	قانون تناقض.....
Distributive law.....	قانون توزیع پذیری.....
DeMorgan's law.....	قانون دمورگان.....
Commutative law.....	قانون جابجایی.....
Idempotent law.....	قانون خود توانی.....
Associative law.....	قانون شرکت پذیری.....
Double negation law.....	قانون منفی مضاعف.....
Compliment.....	متمم.....
Fuzzy set.....	مجموعه فازی.....
Convex fuzzy sets.....	مجموعه فازی محدب.....

Normal fuzzy sets.....	مجموعه فازی نرمال.....
Universal set.....	مجموعه مرجع.....
Popular fuzzy sets.....	مجموعه های فازی متداول.....
Triangular fuzzy sets.....	مجموعه های فازی مثلثی.....
Trapezoidal fuzzy sets.....	مجموعه های فازی ذوزنقه ای.....
Exponential fuzzy sets.....	مجموعه های فازی نمایی.....
Converse fuzzy relations.....	معکوس رابطه های فازی.....
Fuzzy logic.....	منطق فازی.....
Defuzzification.....	نا فازی سازی.....
Mapping.....	نگاشت.....
Core.....	هسته.....

مراجع فارسی

- [۱] زاهدی مرتضی، ۱۳۷۸، تئوری مجموعه های فازی و کاربردهای آن، نشر کتاب دانشگاهی.
- [۲] مقدمه ای بر منطق فازی برای کاربردهای عملی، تألیف: کازوتاناکا.
- [۳] منهاج محمد باقر، ۱۳۸۶، محاسبات فازی، انتشارات دانش نگار.

مراجع انگلیسی

- [۴] S. Abbasbandy, B. Asady, (۲۰۰۶). Ranking of fuzzy numbers by sign distance, *Inform. Sci.*, ۱۷۶: ۲۴۰۵ – ۲۴۱۶.
- [۵] S. Abbasbandy, T. Hajjari, (۲۰۰۹). A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers, *Computer and Mathematics with App*, ۵۷: ۴۱۳ – ۴۱۹.
- [۶] B. Asady, A. Zendehnam, (۲۰۰۷). Ranking fuzzy numbers by distance minimization, *Appl. Math. Model*, ۳۱: ۲۵۸۹ – ۲۵۹۸.
- [۷] X. Wang, E. E. Kerre, (۲۰۰۱). Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I). *Fuzzy Sets and Systems*, ۱۱۸: ۳۷۸ – ۴۰۵.
- [۸] S. H. Chen, (۱۹۸۵). Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, *Fuzzy Sets and Systems*, ۱۷: ۱۱۳ – ۱۲۹.
- [۹] W. Zeng, H. Li, (۲۰۰۷). Weighted triangular approximation of fuzzy numbers, *International Journal of Approximate Reasoning*, ۴۶: ۱۳۷ – ۱۵۰.
- [۱۰] P. Grzegorzewski, (۲۰۰۲). Nearest interval approximation of a fuzzy number, *Fuzzy Sets and Systems*, ۱۳۰: ۳۲۱ – ۳۳۰.
- [۱۱] K. Chakrabarty, R. Biswas, S. Nanda, (۱۹۹۸). Nearest ordinary set of a fuzzy set: a rough theoretic construction, *Bull., Polish Acad. Sci.*, ۴۶: ۱۰۵ – ۱۱۴.
- [۱۲] C. Carlsson, R. Fullér, ۲۰۰۱. On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, ۱۲۲: ۳۱۵ – ۳۲۶.
- [۱۳] F. Choobineh, H. Li, (۱۹۹۳). An index for ordering fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, ۵۴: ۲۸۷ – ۲۹۴.

- [14] D. Dubois, H. Prade, (1987). The mean value of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 21: 279 – 300.
- [15] T. Chu, C. Tsao, (2002). Ranking fuzzy numbers with an area between the centroid point and original point, *Comput. Math. App*, 43: 11- 117.
- [16] Y. M. Wang, J. B. Yang, D. L. Xu and K. S. Chin, (2006). On the centroids of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 157: 919 – 926.
- [17] CH. Cheng, (1998). A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method, *Fuzzy Sets and Systems*, 95: 307 – 317.
- [18] J. Zhao, Q. S. Liu, (2008). Ranking fuzzy numbers based on the centroid of fuzzy numbers. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 22: 142 – 146.
- [19] R. R. Yager, D. P. Filev, (1993). On the issue of defuzzification and selection based on a fuzzy set, *Fuzzy Sets and Systems*, 55: 255 – 272.
- [20] S. M. Bass, H. Kwakernaak, (1977). Rating and ranking of multiple aspect alternatives using fuzzy sets, *Automatica*, 13: 47 – 58.
- [21] W. Chang, (1981). Ranking of fuzzy utilities with triangular membership function, *Proceeding of the International conference on policy analysis information system*, 105: 263 – 272.
- [22] T. Y. Tseng, C. M. Klein, (1989). New algorithm for the ranking procedure in fuzzy decision making. *IEEE Trans Syst Man Cybernet SMC*, 19: 1289 – 1296.
- [23] J. F. Baldwin, N. C. Guild (1979) Comparison of fuzzy sets on the same decision space. *Fuzzy Sets Syst*, 2: 213 – 231.
- [24] L. H. Chen, H. W. Lu, (2001). An approximate approach for ranking fuzzy numbers based on left and right dominance. *Comput Math Appl*, 41: 1589 – 1602.

- [۲۵] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, R. Saneifard, (۲۰۱۱). A method for ranking fuzzy numbers using new weighted distance. *Mathematical and Computational Applications*, ۲: ۳۵۹ – ۳۶۹.
- [۲۶] T. Allahviranloo, S. Abbasbandy and R. Saneifard, (۲۰۱۱). An approximation approach for ranking fuzzy numbers based on weighted interval-value, *Mathematical and Computational Applications*, ۳: ۵۸۸ – ۵۹۷.
- [۲۷] R. Saneifard, T. Allahviranloo, F. Hosseinzadeh, N. Mikaeilvand, (۲۰۰۷). Euclidean ranking DMUs with fuzzy data in DEA. *Applied Mathematical Sciences*, ۶۰: ۲۹۸۹ – ۲۹۹۸.
- [۲۸] R. Saneifard, (۲۰۰۹). Ranking L-R fuzzy numbers with weighted averaging based on levels. *Int. J. Industrial Mathematics*, ۲: ۱۶۳ – ۱۷۳.
- [۲۹] R. Saneifard, (۲۰۱۰). A method for defuzzification by weighted distance. *Int. J. Industrial Mathematics*, ۳: ۲۰۹ – ۲۱۷.
- [۳۰] S. Abbasbandy and B. Asady, (۲۰۰۶). Ranking of fuzzy numbers by sign distance, *Information Science*, ۱۷۶: ۲۴۰۵ -۲۴۱۶.
- [۳۱] R. Jain, (۱۹۷۶). Decision-making in the presence of fuzzy variable. *IEEE Trans. Systems Man and Cybernet.SMC*, ۶: ۶۹۸ – ۷۰۳.
- [۳۲] P. Fortemps, M. Roubens, (۱۹۹۶). Ranking and defuzzification methods based on area compensation. *Fuzzy Sets and Systems*, ۸۲: ۳۱۹ – ۳۳۰.
- [۳۳] S. Kim, S. Park, (۱۹۸۳). Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control system. *IFAC Symp. on fuzzy inform. Knowledge Representation and Decision Anal*, ۳۶۳ – ۳۶۸.
- [۳۴] S. Nakamura, S. Maeda and S. Imamura, (۱۹۸۳). Fuzzy decision analysis on the development of centralized regional energy control system, IFAC Symp. on fuzzy inform. *Knowledge Representation and Decision Anal*, ۳۶۳ – ۳۶۸.

[35] I. Requena, M. Delgado and J. I. Verdegay, (1998). Automatic ranking of fuzzy numbers with the criterion of decision maker learnt by an artificial neural network. *Fuzzy Sets and Systems*, 98: 1 – 9.

Abstract

Ranking of fuzzy numbers and their comparison is a very important process in decision making. Since the decision making appears in many cases such as fuzzy control, approximate reasoning, optimization, mathematical programming and etc., sometimes it is useful to analyze the different situations with an unclear environment that faced with an uncertainty. However the decision maker declares the situations with fuzzy numbers and then makes decisions after their arrangement. In a clear form, the comparison between fuzzy numbers is to compare the related situations. To gain this, there are different methods to ranking the fuzzy numbers that have advantages and disadvantages in function. Some of these methods don't have enough sensitivity in comparison or may show different results in some tested data. It has been shown that in some of methods omitting or adding a fuzzy number result in some changes in assortment members.

Keywords: Approximation, Defuzzification, Fuzzy number, Metric.



Islamic Azad University
Science and Research Branch

Faculty of Science – Department of Applied Mathematics

Thesis Ph.D.

On Applied Mathematical

Subject:

On The Fuzzy Distances and Their Applications In Ranking of Fuzzy Numbers

Supervisors:

Prof. Dr. Tofigh Allahviranloo

Prof. Dr. Saied Abbasbandy

Advisor:

Dr. Mohammad Ali Fariborzi Araghi

By:

Seyed Rahim Saneifard

Autumn 2011